«Суперкомпьютерное моделирование технических устройств и процессов»
«Суперкомпьютерное моделирование и технологии»

Лекции 3-6. Введение в конечно-элементный анализ

Абдуллаев Санжар Муталович,
Доктор географических наук, кандидат физико-математических наук,
Кафедра Системное Программирование
Челябинск, 2021

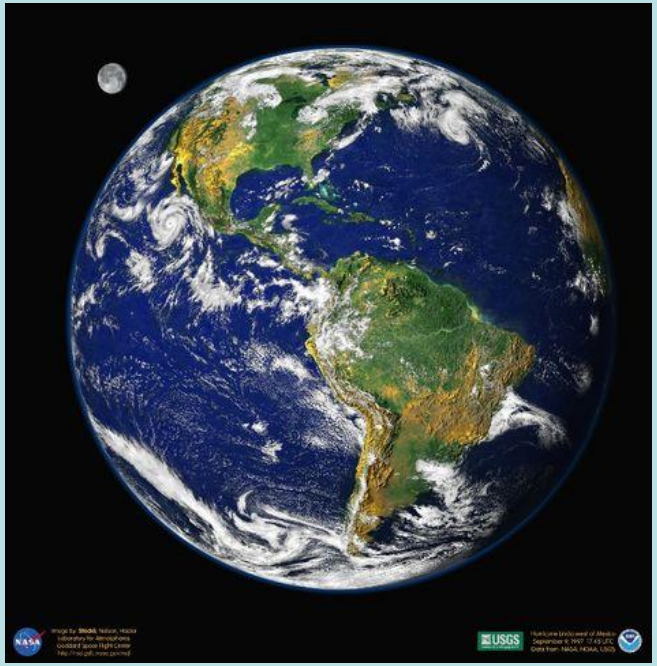
Содержание

1. **Понятие о моделях, компьютерном моделировании, CAD, CAE. Этапы конечно-элементного анализа (FEA).**
2. **Физико-математические основы Метода Конечных Элементов (МКЭ) . Матричное представление. Система пружин. Замечание о терминах.**
3. **Преимущества конечно-элементного анализа. Замечания о выборе физической модели.**
4. **Недостатки и погрешности метода. Оценка точности расчетов.**
5. *Дополнение. Подготовка исходных данных для решения методом КЭ*

Основы компьютерного моделирования.

В процессе познания реальный объект *О* заменяется некоторым другим идеальным, воображаемым или материальным объектом , несущим изучаемые черты исследуемого объекта *О*, и называемым моделью М.

Модель М – это заместитель *оригинала- О*, позволяющий **изучить** некоторые его **свойства** в определенных **условиях**



Классификация моделей
Область исполь-зования
С учетом фактора времени
Отрасль знаний
Способ представления
Материаль-ные
Информационные
Учебные
Научно-технические
Опытные
Игровые
Имитационные
Статичес-кие
Динами-ческие
Биологическая
Экономическая
Химическая
Физическая
Историческая
и другие
Знаковая
Вербаль-ная
Геометрические
Словесные
Математические
Логические
Структурные(таблицы,схемы)
Специальные
Способ реализации
другие способы
компьютерные

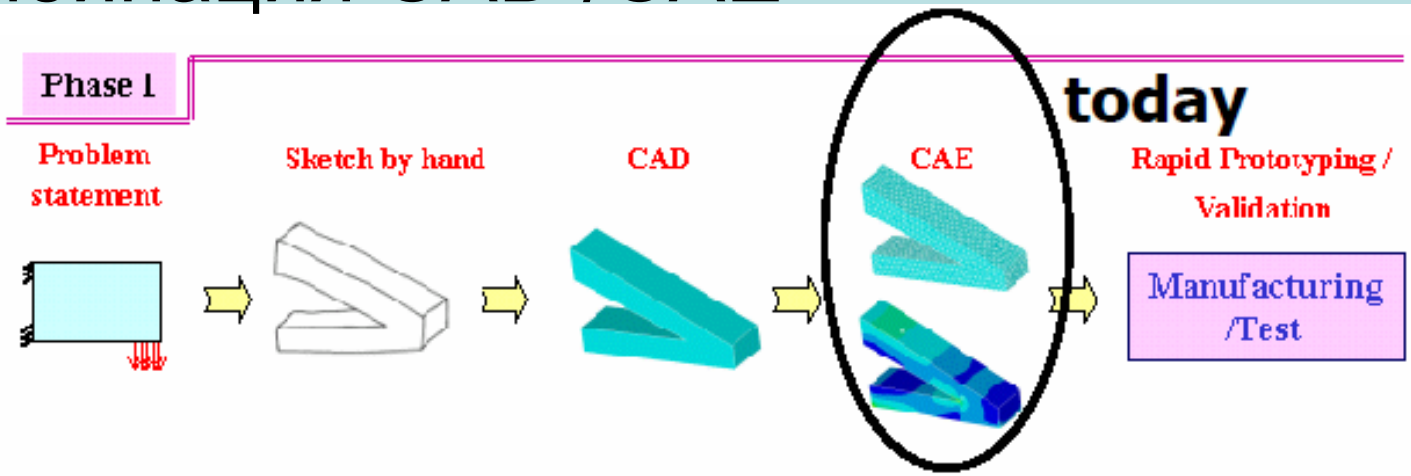
Математическое и компьютерное моделирование

Самарский А.А., Михайлов А.П. **Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.** — 2-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с. — ISBN 5-9221-0120-X.

Этапы компьютерного моделирования

1. **Постановка задачи**
2. **Разработка модели**
3. **Тестирование** – (верификация) проверка результатов модели на ограниченном массиве исходных данных, либо сравнение результатов моделирования с известным результатом (н.п. с аналитическим решением).
4. **Эксперимент**. После верификации модели проводится серия численных экспериментов, и по их завершении следующий этап – валидация. Валидация – это процесс количественной оценки степени близости между результатами моделирования и наблюдений в некотором диапазоне условий.
5. **Анализ результатов.**

В практике разработки новых технических устройств (моделировании) используется комбинация CAD /CAE

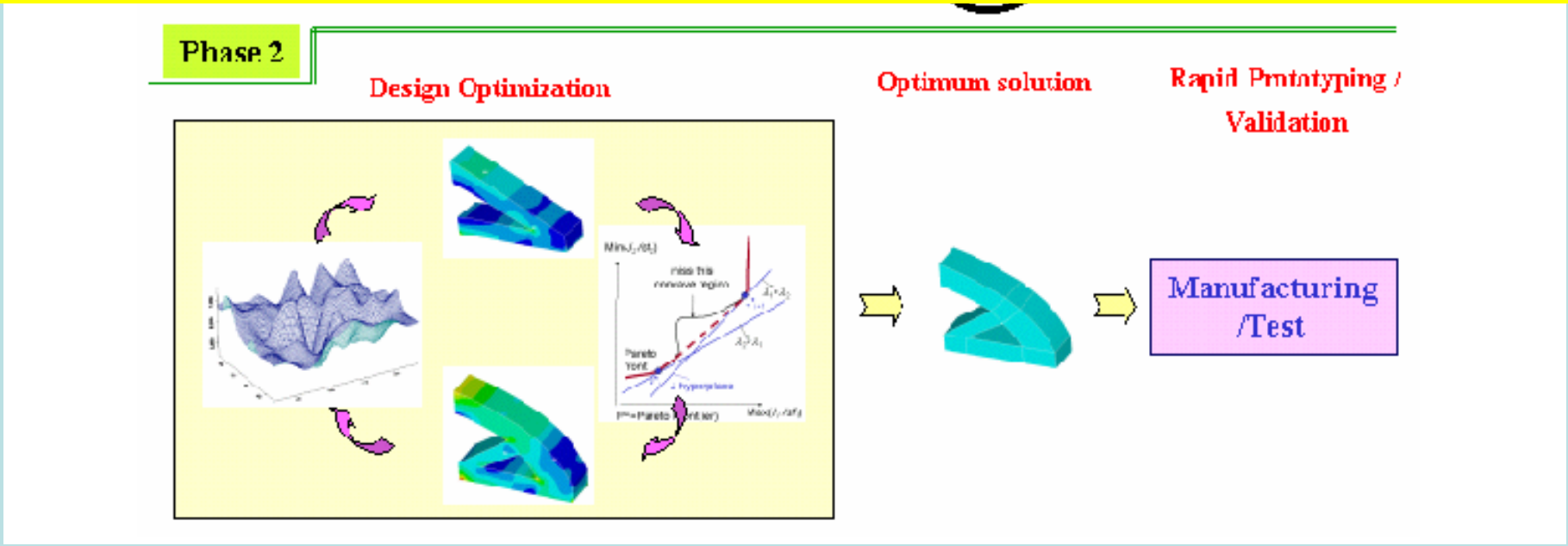


Computer-Aided Design — Система автоматизированного проектирования (САПР)

CAE (англ. Computer-aided engineering) — общее название для программ и программных пакетов, предназначенных для решения различных инженерных задач: расчётов, анализа и симуляции физических процессов (например ANSYS).

ANSYS является пакетом конечно-элементного численного моделирования широкого спектра инженерно-физических задач. К таким задачам относятся: статический/динамический структурный анализ (как линейный, так и нелинейный), передача тепла и движения жидкостью, а также акустические и электромагнитные задачи.

Расчётная часть пакетов CAE основана на численных методах решения дифференциальных уравнений (метод конечных элементов, метод конечных объёмов, метод конечных разностей и др.). Расчеты позволяют провести оптимизации конструкции, но решающее слово за экспериментом.



Выбор численного метода решения.

Предположим, что математическая модель технического устройства создана и записаны управляющие уравнения вместе с начальными и граничными условиями.

Many engineering phenomena can be expressed by "governing equations" and "boundary conditions"

Elastic problems

Thermal problems

Fluid flow

Electrostatics

etc.

Governing Equation (Differential equation)

$$L(\phi) + f = 0$$

$$+$$

Boundary Conditions

$$B(\phi) + g = 0$$

Разработка алгоритма включает выбор численного метода решения краевой задачи.

Finite Element Method (1)

Boundary Element Method

Finite Difference Method (2)

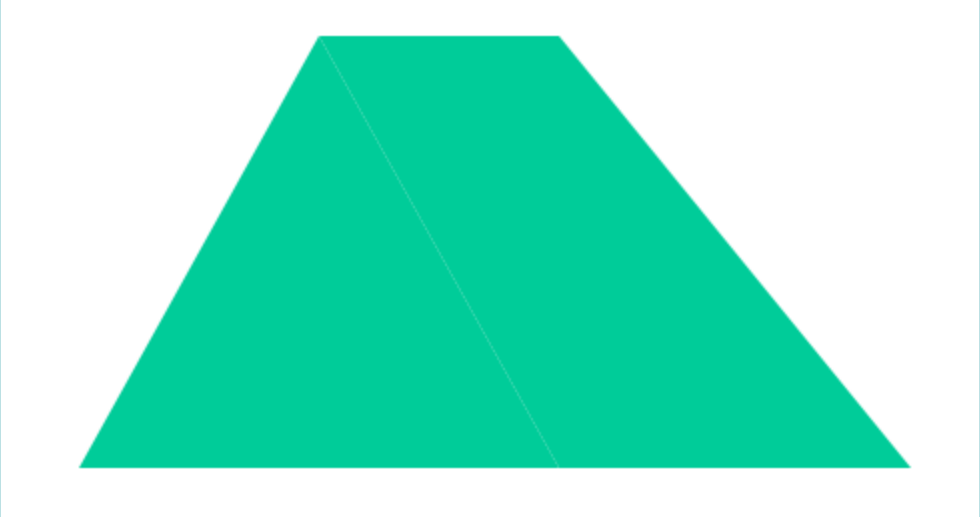
Finite Volume Method

Meshless Method

Спектральные методы

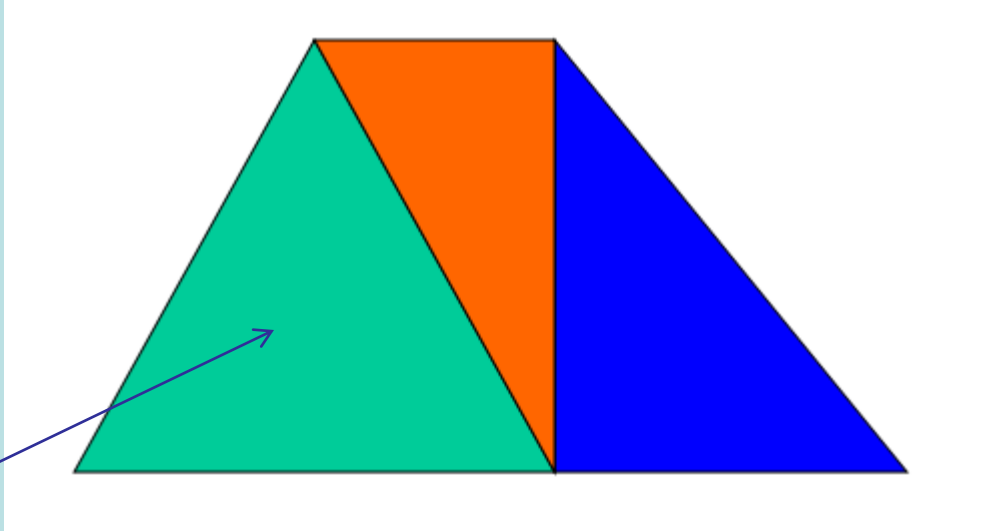
Метод конечных элементов (1) в программной реализации сложнее метода конечных разностей (2).

МКЭ известен давно, но широкое практическое применение получил только с появлением достаточно мощных компьютеров.



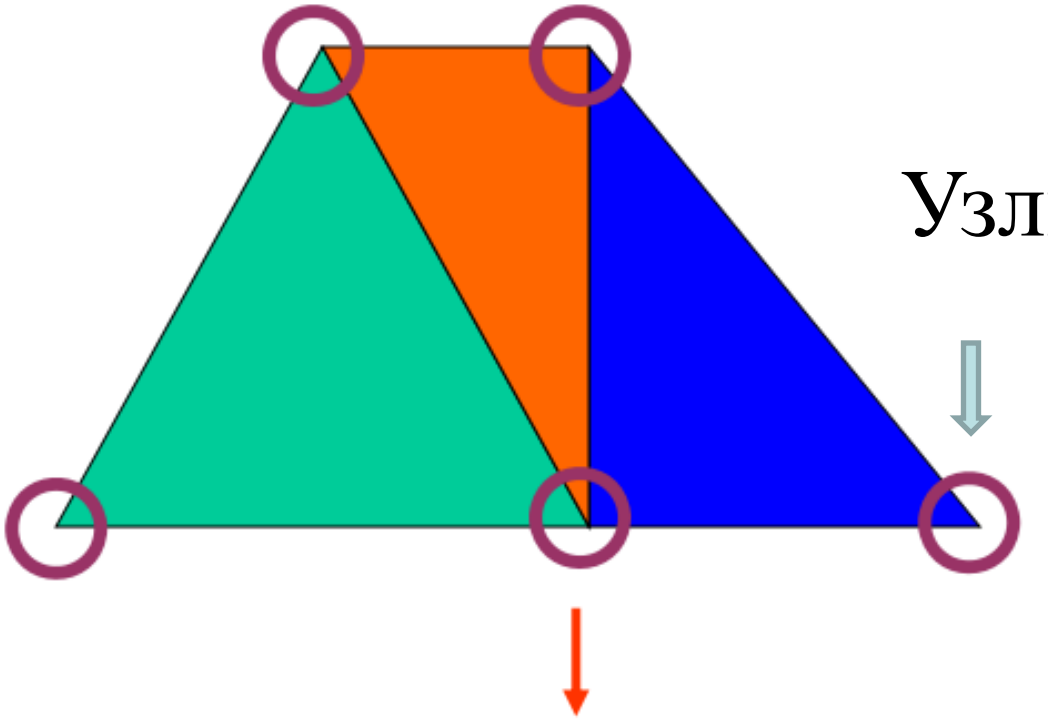
Упрощение объект моделирования непрерывный в нем неограниченное число частей

Область интегрирования делится на мелкие «элементы» где угловые точки каждого элемента «узлы».



Элементы (конечное число)

В методе конечных элементов, узел является определенной точкой , где явным образом рассчитывается значения *ui* некоторой непрерывной переменной *u (x,y)*.

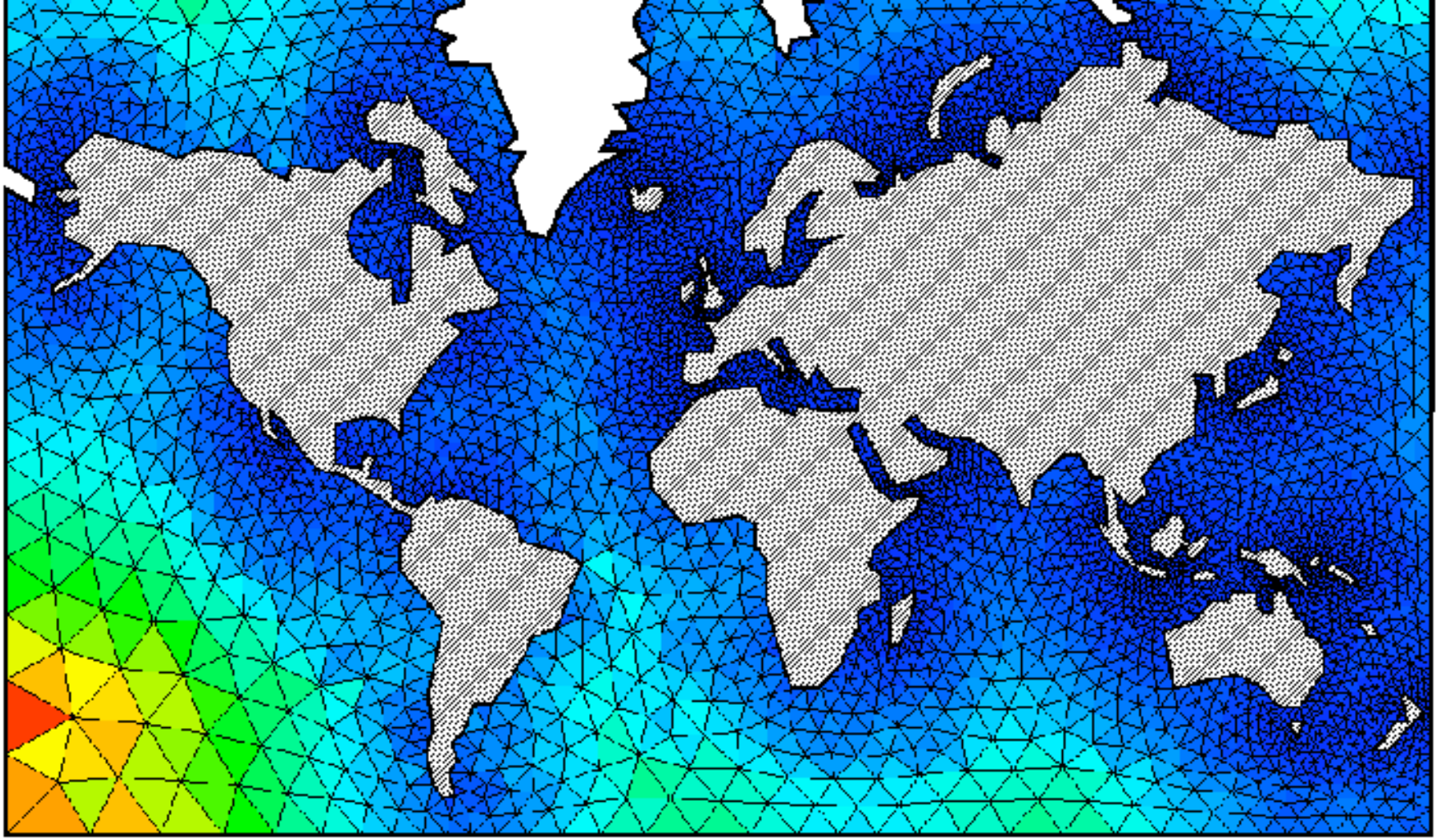


Узлы (nodes)

Displacement → Stress

Displacement → Strain

Напряжение и деформация



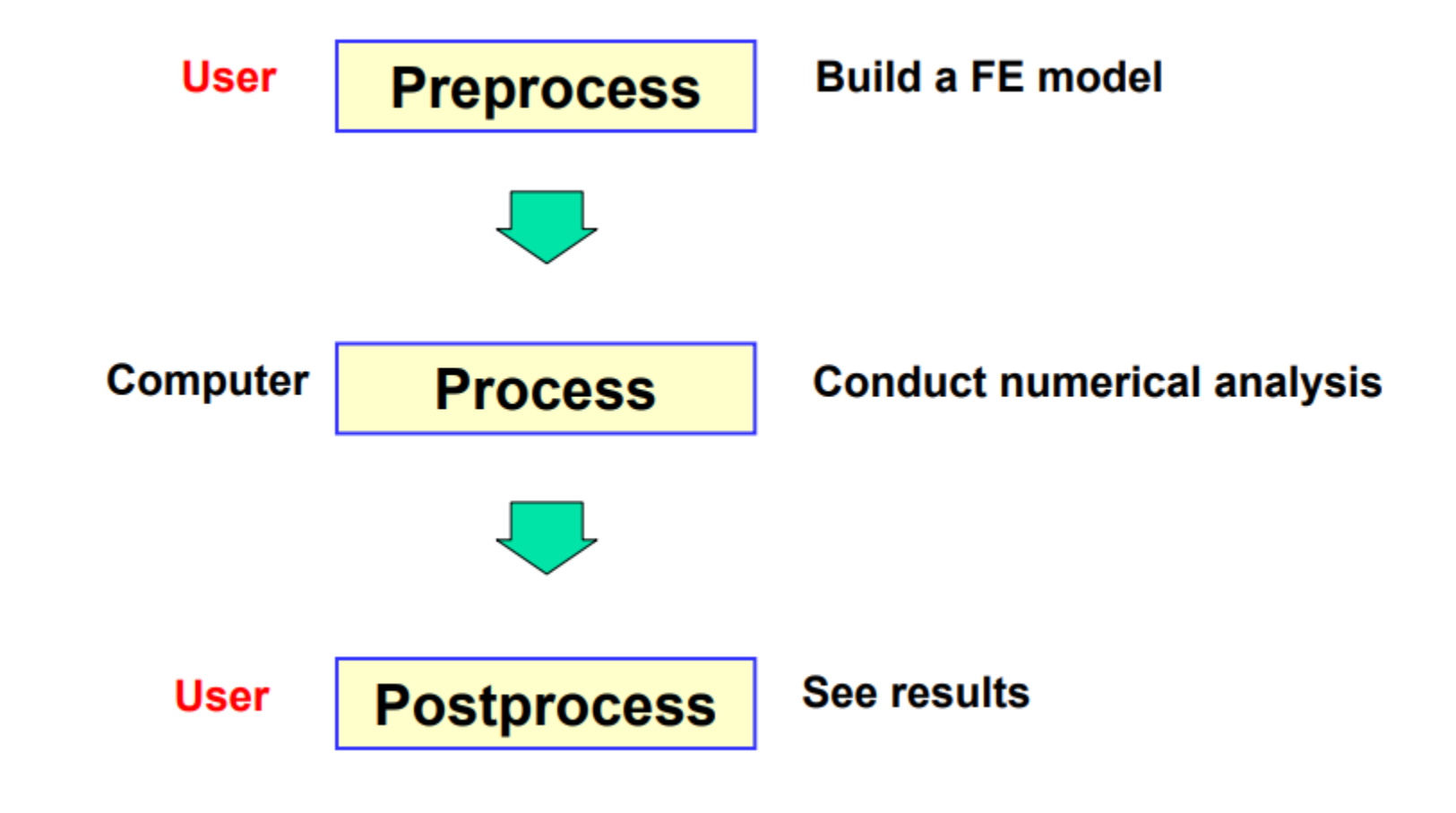
Конечные элементы для расчета общей циркуляции океана

Главное преимущество МКЭ, проявляется в задачах с произвольной формой области численных решений. Сетку МКЭ можно сделать более редкой в тех местах, где особая точность не нужна.

Процесс конечно-элементного анализа Finite element analysis (FEA)

Конечно-элементное решение математической модели. Решение можно осуществлять пакетом программ типа ANSYS

В коммерческих пакетах CAE реализация МКЭ обычно производится в три этапа



Как правило, конечно-элементное решение может быть разбито на следующие три этапа.

Preprocessing. Это предварительная обработка входных данных и условий задачи; Основные шаги в предварительной обработке приведены ниже:

1. Define keypoints /lines/areas/volumes
2. Define element type and material/geometric properties
3. Mesh lines/areas/volumes. Требуемое количество деталей будет зависеть от размерности анализа (т.е. 1D, 2D, осе-симметричный, 3D).
4. *Определяем нагрузки (loads). Например, точку приложения силы либо давление на всю поверхность.*
5. *Задаем ограничения (constraints). Например на движение и вращение отдельных элементов.*

Solution: Пакет **CAE решает результирующий набор уравнений.**

Postprocessing; на этом этапе можно посмотреть:

Таблицу перемещений в узлах

Момент и силы в элементах

Графики отклонений

Контурные диаграммы напряжений и т.д.

1. Понятие о конечно-элементном анализе.
2. Физико-математические основы Метода Конечных Элементов (МКЭ). Матричное представление. Пружина. Система двух пружин. Граничные условия. Замечание о термине «матрица жесткости».
3. Преимущества конечно-элементного анализа. Замечания о выборе физической модели.
4. Недостатки и погрешности метода. Оценка точности расчетов.

2. Конечно-элементный анализ основан на методе конечных элементов (МКЭ):

1. МКЭ использует кусочно-непрерывную полиномиальную интерполяцию. Соединяя элементы вместе мы кусочно-непрерывным образом интерполируем искомое поле некоторой переменной *u* на всю структуру модели.

2. В узлах получаем совместную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}$$

Property

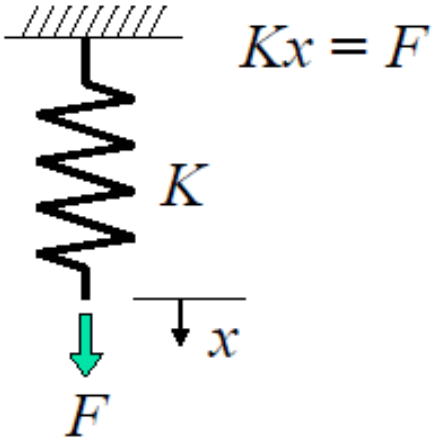
Behavior

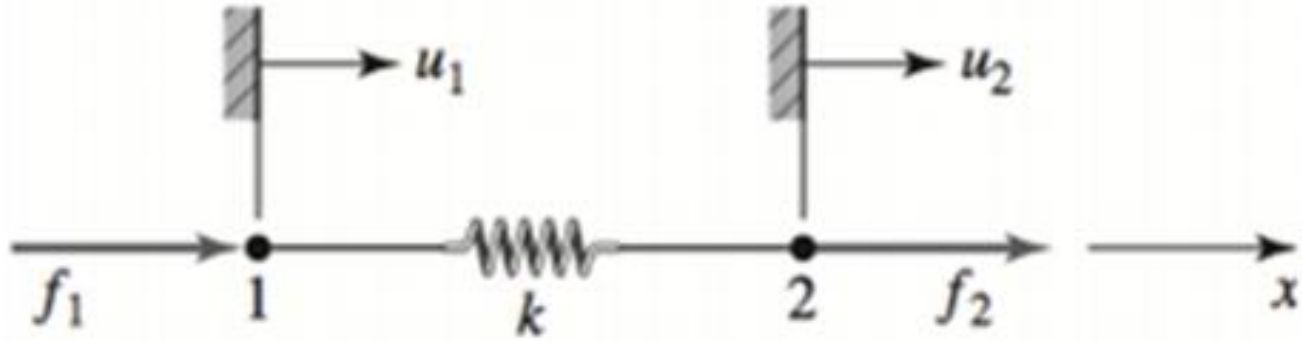
Action

K: Stiffness matrix

x: Displacement

F: Load

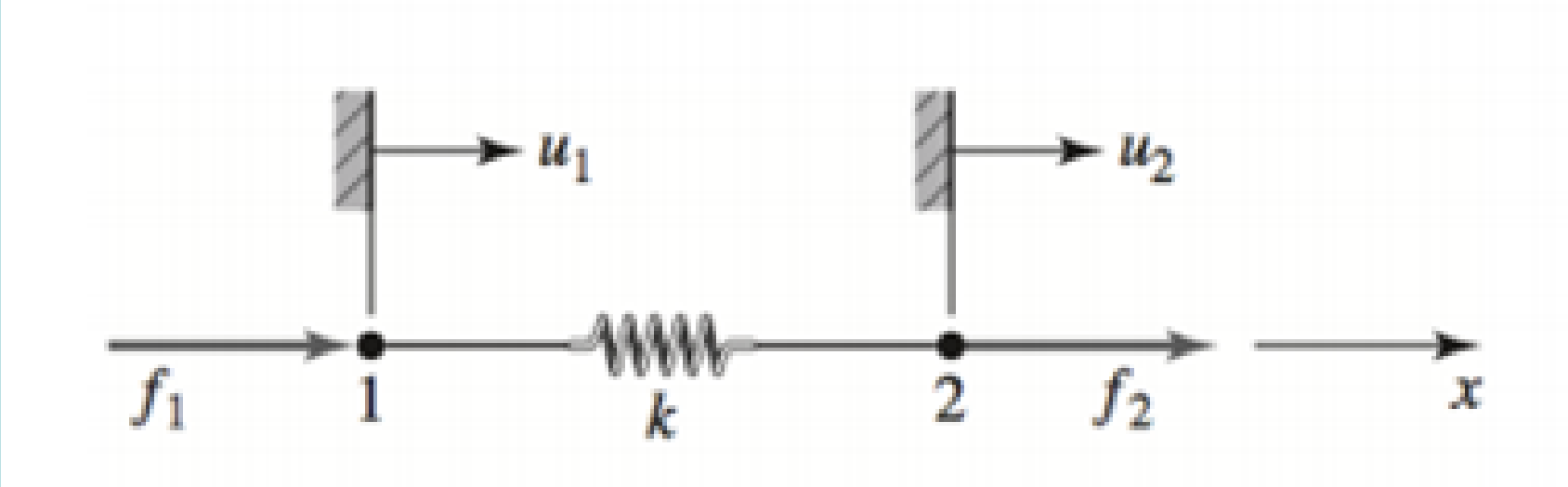




(a) Linear spring element with nodes, nodal displacements, and nodal forces.

Линейная упругая пружина (spring) – механическое устройство которое сопротивляется только осевой нагрузке, и ее удлинение или сокращение прямо пропорционально приложенной осевой нагрузке f.

Константа пропорциональности между отклонением δ и нагрузкой именуется как константа пружины, жесткость или коэффициент жесткости пружины k и выражается в единицах силы на единицу длины.

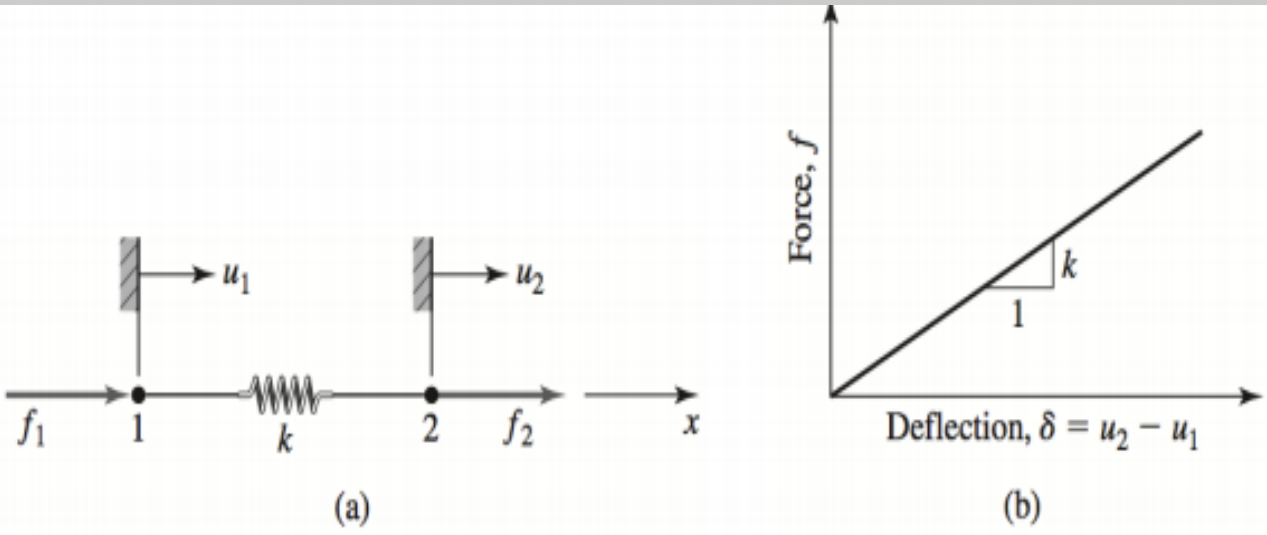


Поскольку упругая пружина выдерживает только осевые нагрузки, то мы выберем систему координат элемента (локальную систему координат) в качестве оси x, ориентированной по длине пружины, как показано на рисунке.

Предположим, что перемещения узлов равны нулю, когда пружина не деформирована.

Тогда при приложении нагрузок результирующее отклонение (deflection) равно

$$\delta = u_2 - u_1,$$



(a) Linear spring element with nodes, nodal displacements, and nodal forces.
(b) Load-deflection curve.

Тогда результирующая сила вдоль оси пружины

$$f = k\delta = k(u_2 - u_1)$$

При равновесии силы

$$f_1 + f_2 = 0 \quad \text{или} \quad f_1 = -f_2,$$

В терминах сил приложенных в узлах 1 и 2

$$f_1 = -k(u_2 - u_1)$$
$$f_2 = k(u_2 - u_1)$$

Это может быть выражено в матричной форме

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$[K]\{u\}=\{F\}$$

Матрица жесткости пружины

$$[K]\{u\}=\{F\}$$

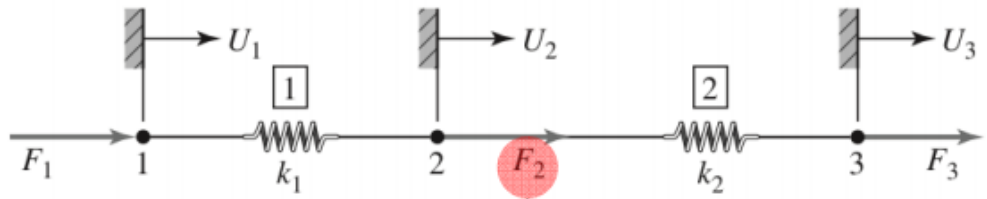
Уравнение показывает, что матрица жесткости линейной пружины имеет размеры 2 × 2.

Кроме того полученная матрица симметрична. Это является следствием симметрии сил (равны и противоположны для обеспечения равновесия).

Как результат детерминант матрицы равен нулю (det[K]=0) и поэтому матрица K не обратима.

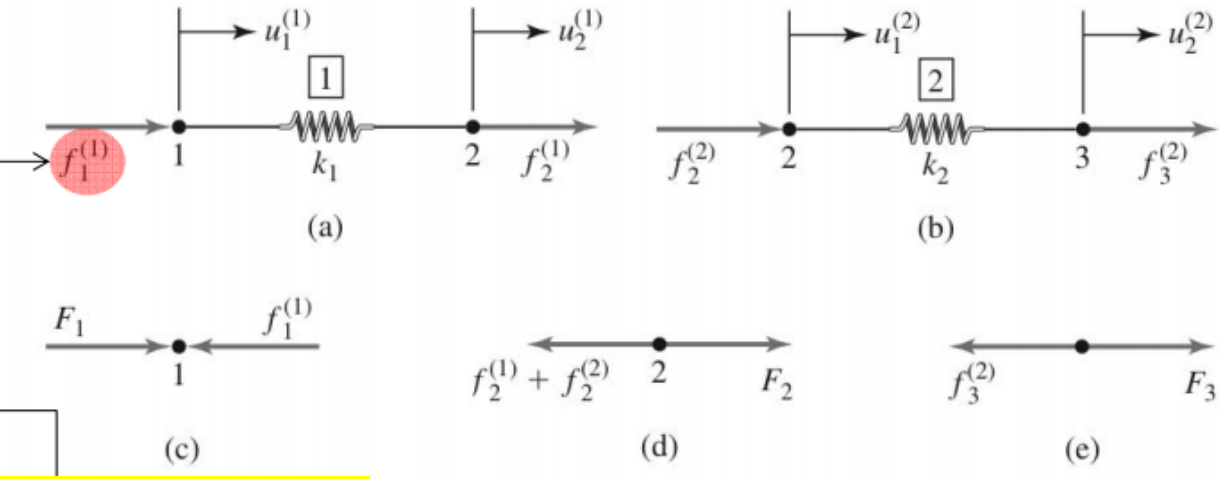
Такая задача не имеет решения потому, что постановка задачи была неполной: граничные условия являются обязательными. Этот вопрос рассмотрим позже.

Система двух пружин



Внешние силы

Free body diagrams:



Внутренние силы

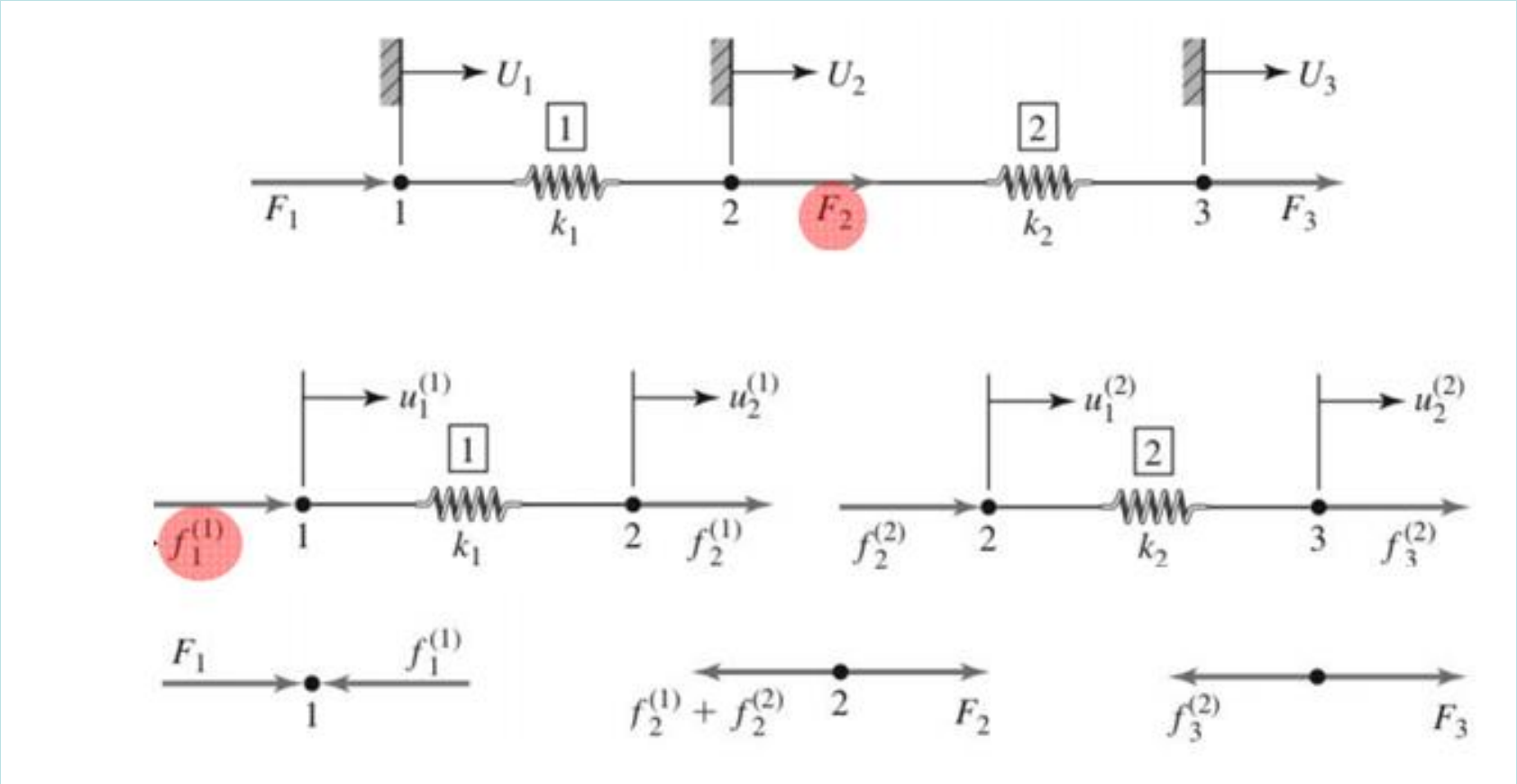
Покажем, что решение для системы из двух пружин, где имеется три узла к которым приложены внешние силы F можно свести к предыдущему случаю

Запишем уравнения для каждой из двух пружин, т.е. для каждого конечного элемента

Верхний индекс означает номер элемента.

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$



Из условия согласования перемещений в узлах следует:

$$u_1^{(1)} = U_1 \qquad u_2^{(1)} = U_2 \qquad u_1^{(2)} = U_2 \qquad u_2^{(2)} = U_3$$

С учетом перемещений перепишем предыдущие матрицы 2×2 в виде

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Затем представим их в эквивалентном виде добавив по «нулевой строке»

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Суммируя по строкам,

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Из условия равновесия системы из двух пружин известно

$$f_1^{(1)} = F_1 \qquad f_2^{(1)} + f_2^{(2)} = F_2 \qquad f_3^{(2)} = F_3$$

Таким образом для двух элементов (три узлов) мы имеем матрицу жесткости 3×3

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Общий вид уравнения не изменился

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}$$

Property

Behavior

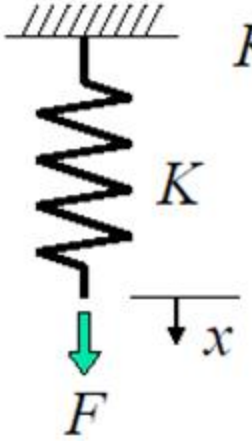
Action

K: Stiffness matrix

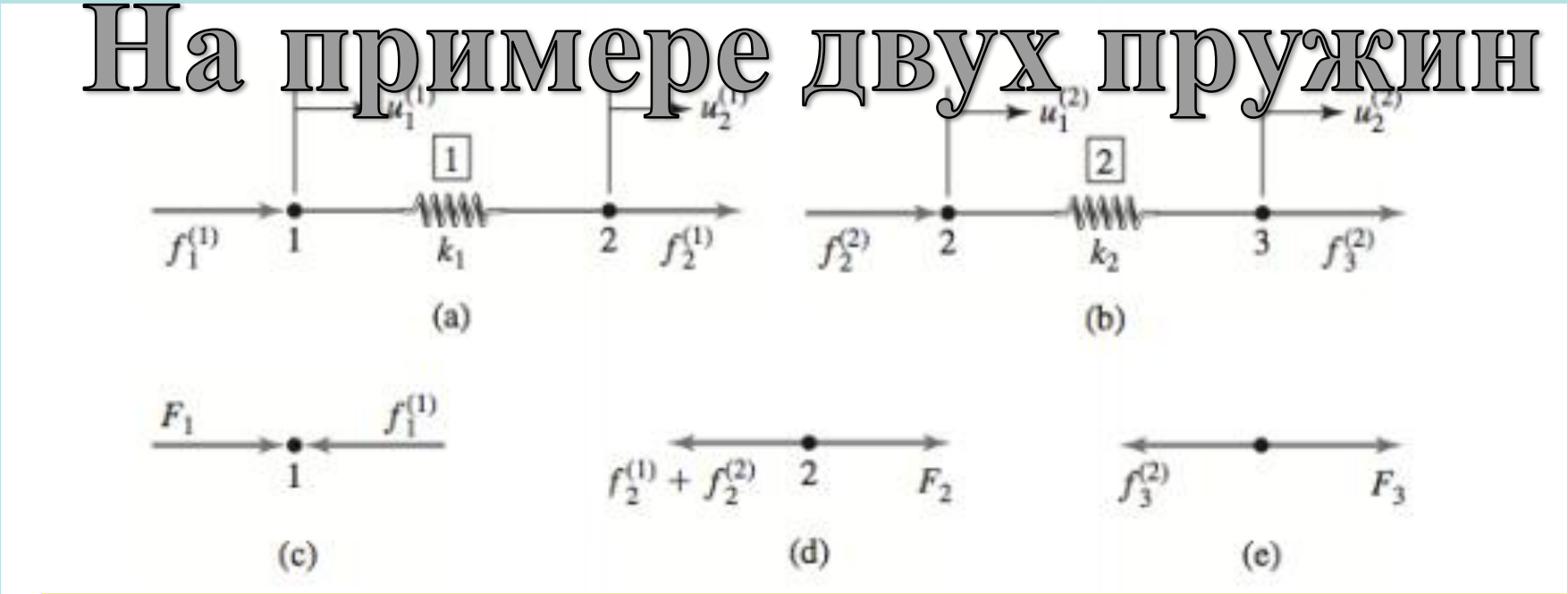
x: Displacement

F: Load

$$Kx = F$$



Роль граничных условий
На примере двух пружин



Запретим перемещения в узле №1: система пружин закреплена

Из-за граничных условий

$$\begin{bmatrix} 50 & -50 & 0 \\ -50 & 125 & -75 \\ 0 & -75 & 75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 75 \\ 75 \end{Bmatrix}$$

В остальных узлах 2,3 зададим силы в ньютонах 75н, жесткость в ньютон на сантиметр (50н/см и 75н/см)

Из-за запрета на смещение на узле 1, сила F1 становится неизвестной. Формально из первого алгебраического уравнения следует, что

$$-50U_2 = F_1$$

Второе и третье уравнения теперь имеют решения

$$\begin{bmatrix} 125 & -75 \\ -75 & 75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 75 \\ 75 \end{Bmatrix}$$

$$U_2 = 3 \qquad U_3 = 4$$

Замечание о терминологии.

В **структурно-механическом анализе** матрица жесткости [K] содержит сведения о геометрических и физических свойствах объекта определяющих сопротивление элемента к деформации при нагрузке. Такая деформация может включать осевые растяжения, изгиб, сдвиг и кручение.

Для конечных элементов, **используемых для неструктурных анализов**, например анализе потока жидкости и передачи тепла также используется термин «матрица жесткости», поскольку матрица представляет сопротивление элемента изменениям вызванными внешними воздействиям.

МКЭ широко используется для решения задач механики деформируемого твёрдого тела, теплообмена, гидродинамики и электродинамики.

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} \Rightarrow \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{K}]^{-1}\{\mathbf{F}\}$$

Property Behavior Action Unknown

	Property $[\mathbf{K}]$	Behavior $\{\mathbf{u}\}$	Action $\{\mathbf{F}\}$
Elastic	stiffness	displacement	force
Thermal	conductivity	temperature	heat source
Fluid	viscosity	velocity	body force
Electrostatic	dialectric permittivity	electric potential	charge

[K]- «Матрица жесткости»

Здесь ***u*** – вектор-столбец неизвестных постоянных (в литературе по методу конечных элементов их принято называть **степенями свободы**; в англоязычной – **degree of freedom** или **DOF**); ***F*** – вектор, называемый вектором нагрузок; матрица ***K***, связывающая нагрузки ***F*** и перемещения (характеризуемые вектором ***u***), называется матрицей жесткости (**stiffness matrix**).

1. **Понятие о конечно-элементном анализе.**
2. **Физико-математические основы Метода Конечных Элементов (МКЭ). Матричное представление. Пружина. Система двух пружин. Граничные условия.**
3. **Преимущества конечно-элементного анализа. Элементарные модели. Замечания о выборе физической модели.**
4. **Недостатки и погрешности метода. Оценка точности расчетов.**

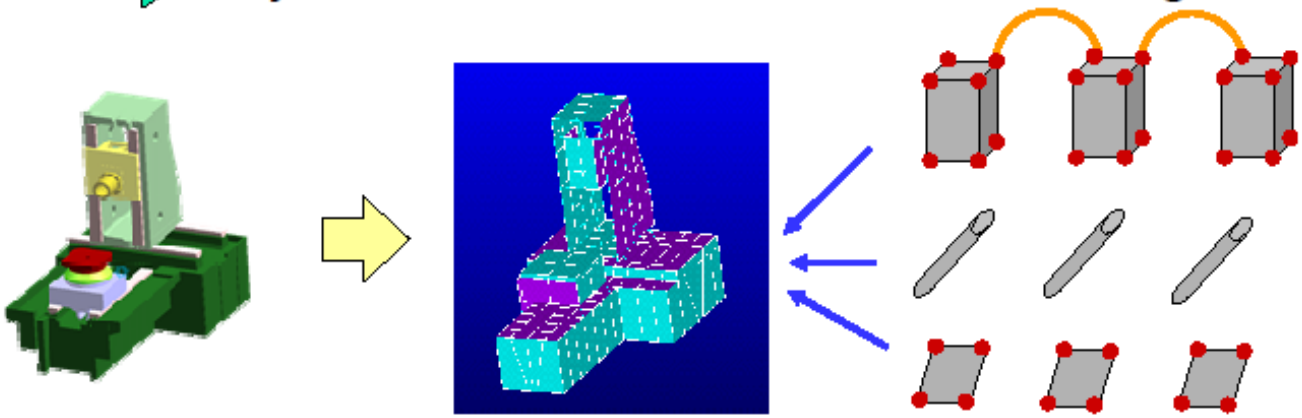
3. Преимущества конечно-элементного анализа.

3.0 Основным достоинством его является возможность решения задач для области любой формы, в то время как аналитические решения могут быть получены только для задач с достаточно простой геометрией (и физикой).

3.1 Простота алгоритма МКЭ.

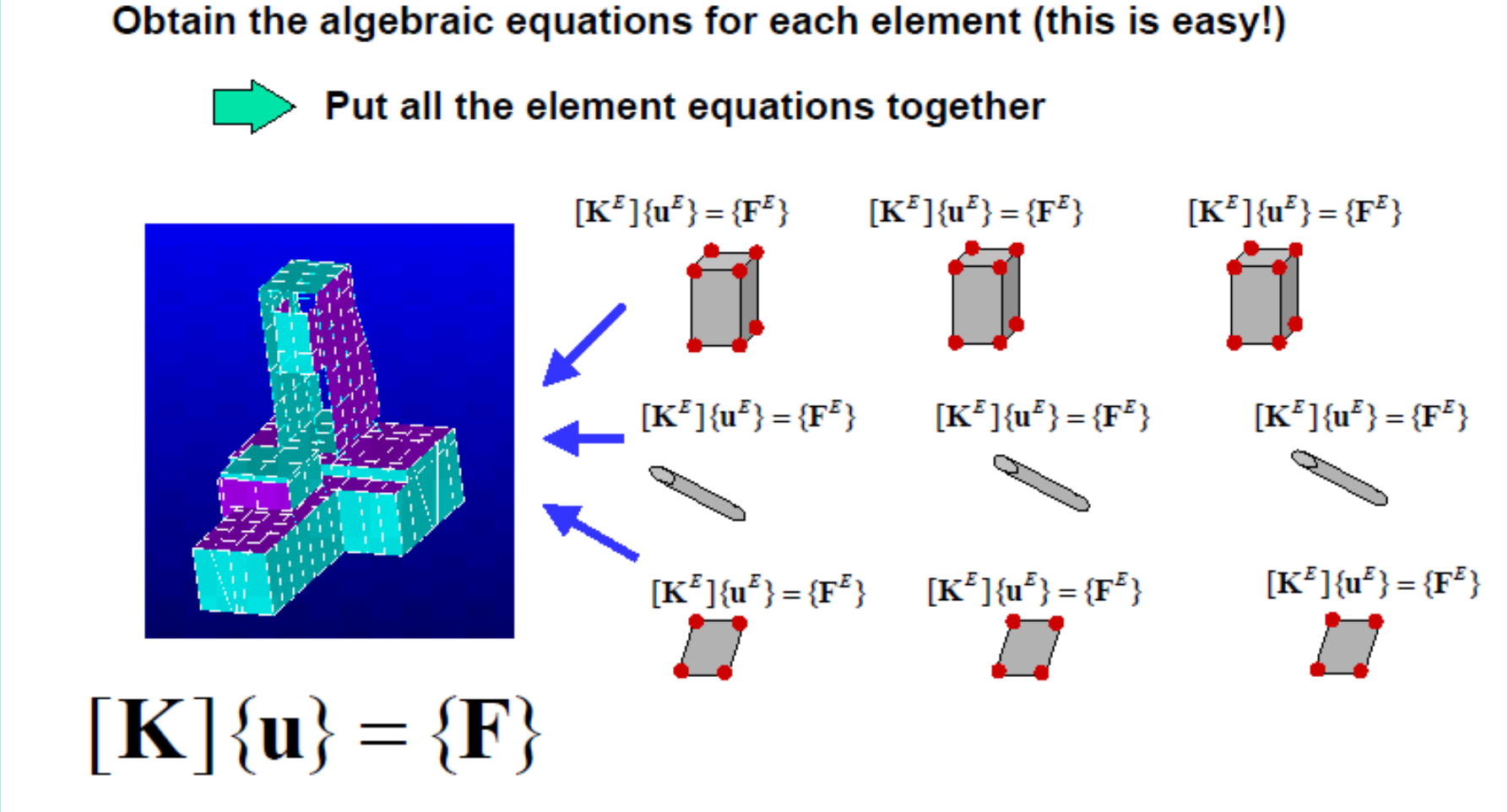
It is very difficult to make the algebraic equations for the entire domain

- Divide the domain into a number of small, simple elements
- A field quantity is interpolated by a polynomial over an element
- Adjacent elements share the DOF at connecting nodes



Независимые «направления», переменные, характеризующие состояния системы степени свободы DOF: в узлах на значения этих переменных влияют только смежные элементы.

Получаем алгебраические уравнения для каждого элемента (пример пружины).

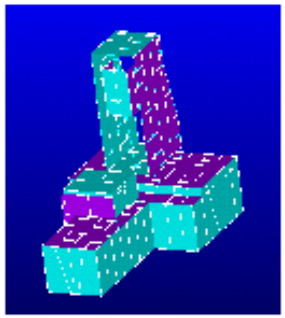


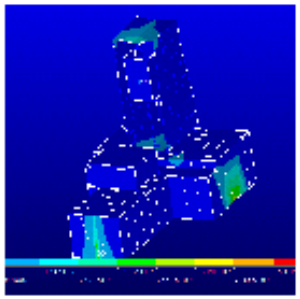
Очевидно, в узлах на значения переменных $\{u^E\}$ влияют только решения в смежных элементах.

Простота решения алгоритма

Solve the equations, obtaining unknown variabless at nodes.

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{K}]^{-1}\{\mathbf{F}\}$$





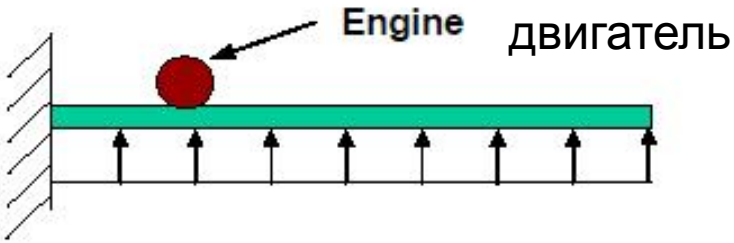
Так как каждый из элементов связан с ограниченным количеством соседних, система линейных алгебраических уравнений имеет разрежённый вид, что существенно упрощает её решение.

Процесс конечно-элементного анализа
Finite element analysis (FEA)

3.2. Конечные элементы представляют элементарные модели (объекты) или структурные элементы с заданными свойствами

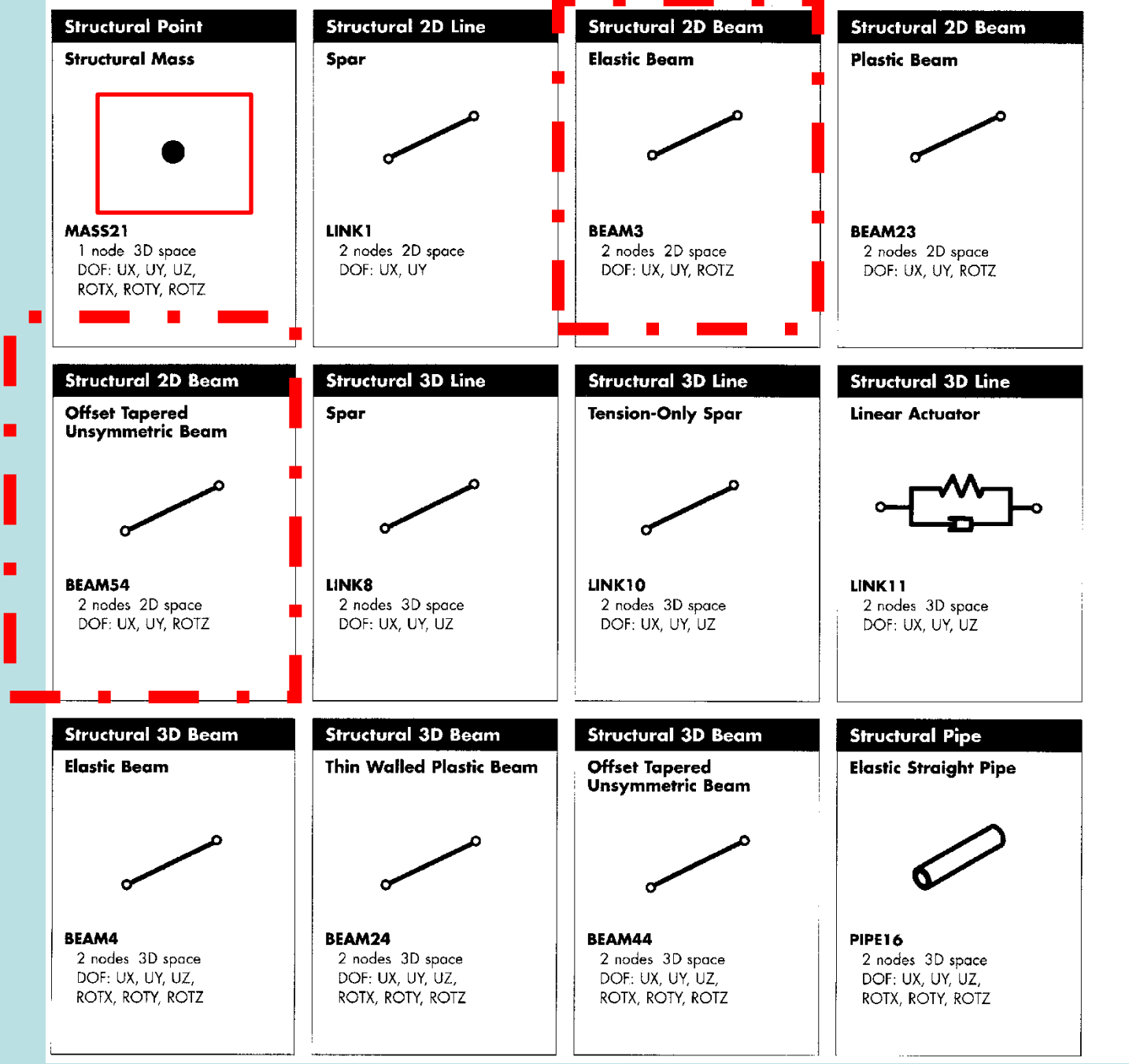
Балка (beam) один из обычных структурных элементов. Многие инженерные конструкции могут моделироваться балкой. Например консольной балкой.

Cantilever beam.



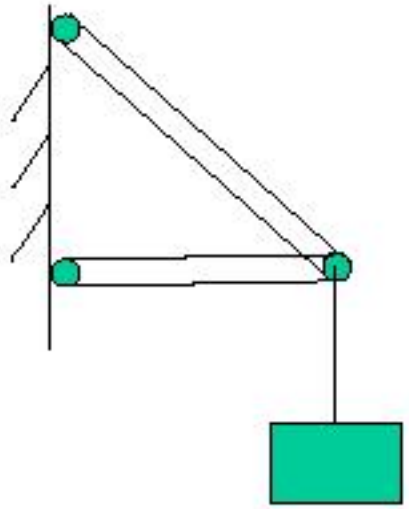
Airplane wing modeled as beam

Крыло самолета моделируется как консольная балка, а двигатель как точка.

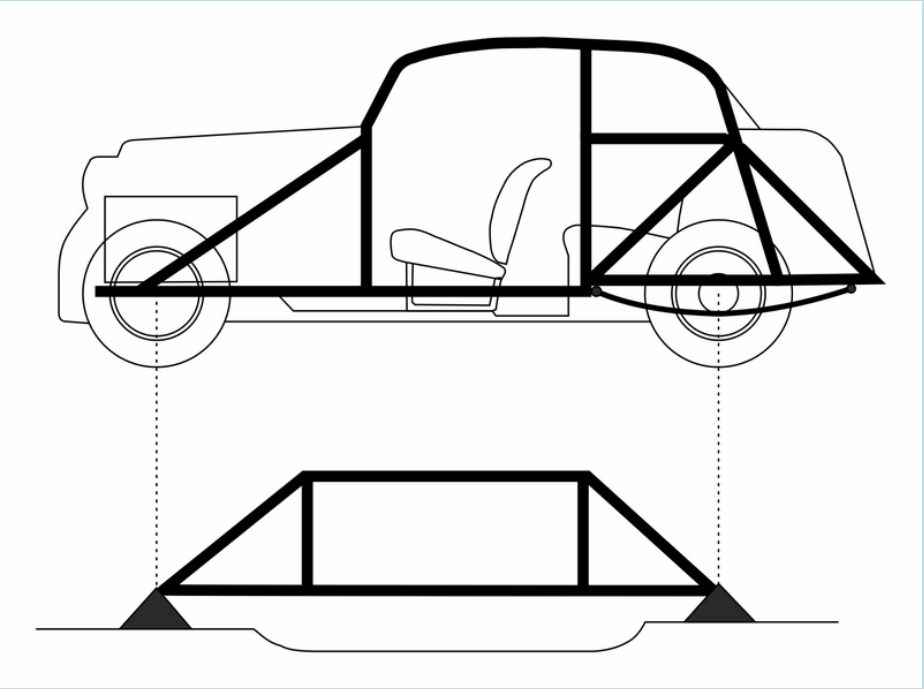


Конечные элементы в пакете ANSYS: крыло самолета

Ферма (лат. *firmus- прочный*) один из обычных структурных элементов. Многие инженерные конструкции могут моделироваться фермой.



Термин truss (ферма) часто используется для описания любой сборки элементов — таких, как пара стропил. Инженерный смысл: «плоская рама из отдельных конструктивных элементов, соединённых концами в треугольники, для охвата большого расстояния».



Сложная механическая модель (система) – взаимодействие элементарных моделей

Схема несущего кузова автомобиля. Роль элементов фермы играют приваренные к оболочке кузова усилители и выштамповки на ней.

Structural Pipe

Elastic Pipe Tee

PIPE17
4 nodes 3D space
DOF: UX, UY, UZ,
ROTX, ROTY, ROTZ

Structural Pipe

Curved Pipe (Elbow)

PIPE18
2 nodes 3D space
DOF: UX, UY, UZ,
ROTX, ROTY, ROTZ

Structural Pipe

Plastic Straight Pipe

PIPE20
2 nodes 3D space
DOF: UX, UY, UZ,
ROTX, ROTY, ROTZ

Structural Pipe

Immersed Pipe

PIPE59
2 nodes 3D space
DOF: UX, UY, UZ,
ROTX, ROTY, ROTZ

Structural Pipe

Plastic Curved Pipe

PIPE60
2 nodes 3D space
DOF: UX, UY, UZ,
ROTX, ROTY, ROTZ

Structural 2D Solid

Triangular Solid

PLANE2
6 nodes 2D space
DOF: UX, UY

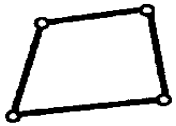
Structural 2D Solid

Axisymmetric Harmonic Structural Solid

PLANE25
4 nodes 2D space
DOF: UX, UY, UZ

Structural 2D Solid

Structural Solid



PLANE42
4 nodes 2D space
DOF: UX, UY

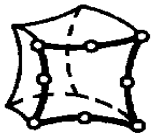
Structural 2D Solid

Structural Solid

PLANE82
8 nodes 2D space
DOF: UX, UY

Structural 2D Solid

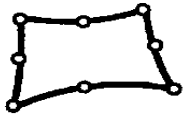
Axisymmetric Harmonic Structural Solid



PLANE83
8 nodes 2D space
DOF: UX, UY, UZ

Structural 2D Solid

Structural Solid p-Element



PLANE145
8 nodes 2D space
DOF: UX, UY

Structural 2D Solid

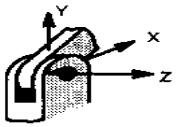
Triangular Solid p-Element

PLANE146
6 nodes 2D space
DOF: UX, UY

Пакет ANSYS дает сотни типов структурных элементов

Combination

Revolute Joint



COMBIN7
5 nodes 3D space
DOF: UX, UY, UZ,
ROTX, ROTY, ROTZ

Combination

Spring-Damper

COMBIN14
2 nodes 3D space
DOF: UX, UY, UZ,
ROTX, ROTY, ROTZ,
PRES, TEMP

Combination

Control

COMBIN37
4 nodes 3D space
DOF: UX, UY, UZ,
ROTX, ROTY, ROTZ,
PRES, TEMP

Combination

Nonlinear Spring

COMBIN39
2 nodes 3D space
DOF: UX, UY, UZ,
ROTX, ROTY, ROTZ,
PRES, TEMP

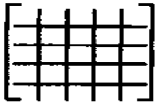
Combination

Combination

COMBIN40
2 nodes 3D space
DOF: UX, UY, UZ,
ROTX, ROTY, ROTZ,
PRES, TEMP

Matrix

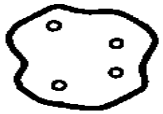
Stiffness, Mass, or Damping Matrix



MATRIX27
2 nodes 3D space
DOF: UX, UY, UZ,
ROTX, ROTY, ROTZ

Matrix

Superelement



MATRIX 50
2D or 3D space
DOF: Any

Infinite

Infinite Boundary

INFIN9
2 nodes 2D space
DOF: AZ, TEMP

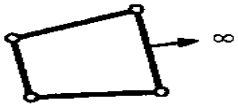
Infinite

Infinite Boundary

INFIN47
4 nodes 3D space
DOF: MAG, TEMP

Infinite

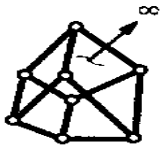
Infinite Boundary



INFIN110
4 nodes 2D space
DOF: AZ, VOLT, TEMP

Infinite

Infinite Boundary



INFIN111
8 nodes 3D space
DOF: MAG, AX, AY, AZ,
VOLT, TEMP

Surface

Surface Effect

SURF19
3 nodes 2D space
DOF: UX, UY, TEMP

Surface

Surface Effect

SURF22
8 nodes 3D space
DOF: UX, UY, UZ, TEMP

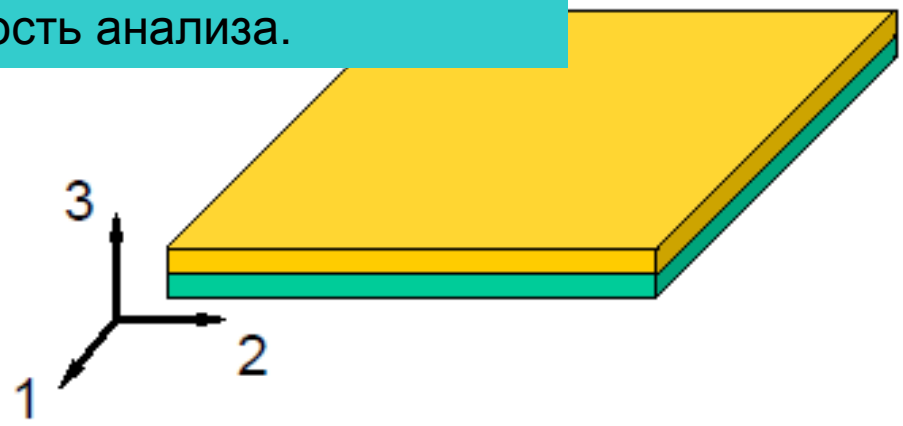
Вариации элементов

Процесс конечно-элементного анализа
Finite element analysis (FEA)

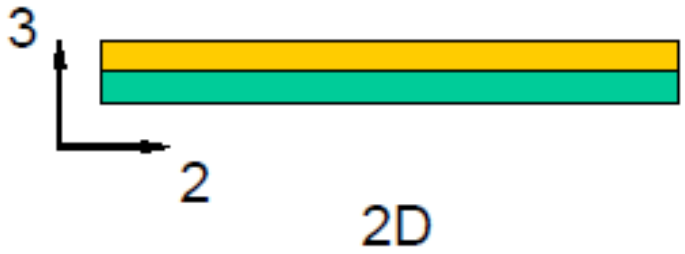
Конечно-элементное решение математической модели. Решение можно осуществлять пакетом программ типа ANSYS

Структурная оптимизация и физическая модель

Разработка физической модели – процесс упрощения проблем реального мира в проблему решаемую конечно-элементным анализом (FEA). При этом учтем, как природу проблемы так и стоимость анализа.



Нагрузка однородная вдоль направления №1 поэтому достаточно рассмотреть двумерную модель.

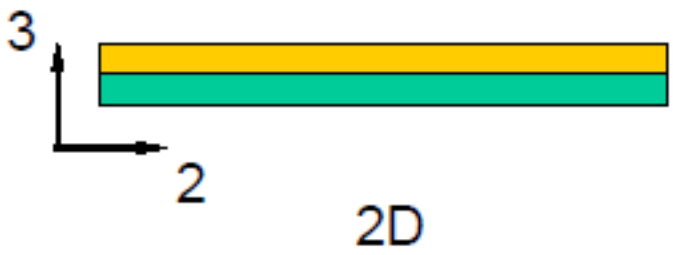


Physical model vs FEA model

Ламинат-

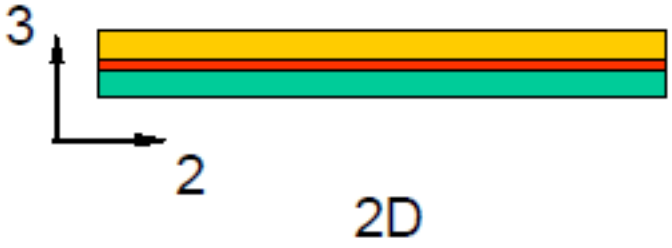
Пусть два слоя ламината склеены между собой.
Стоит ли рассматривать тонкий переходный слой клея?

Если они склеены идеально, игнорируйте переходный слой.



Ignore the interface

Если изучается сам переходный слой, насколько он выдержит нагрузки. То очевидно надо вводить его отдельно.



Consider the interface

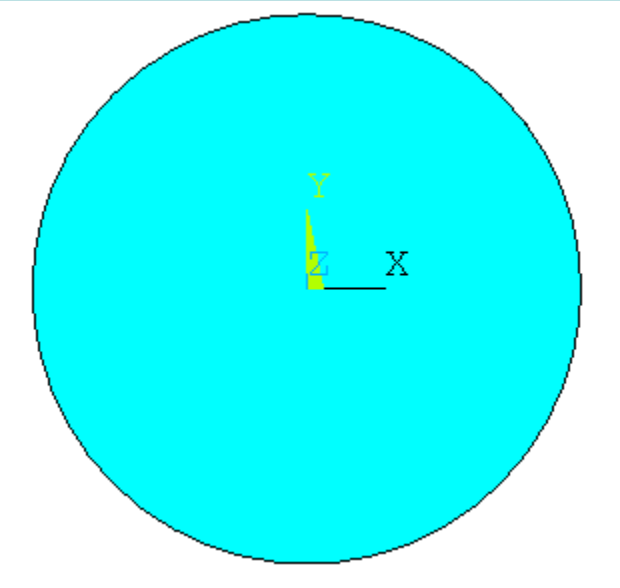
- Говоря о выборе математической модели, следует отметить, что выбор должен основываться на том, какой результат требуется получить. *Наиболее эффективной называется такая математическая модель, которая дает достоверное решение (например, с приемлемой ошибкой) с наименьшими затратами времени и вычислительных мощностей.*
- В то же время, *решение с помощью МКЭ не дает информации больше, чем заложено в решаемой математической модели*. К примеру, если изначально в модель не заложены нелинейные свойства материала, вести себя нелинейно тело в процессе решения задачи не начнет.

1. **Понятие о конечно-элементном анализе.**
2. **Физико-математические основы Метода Конечных Элементов (МКЭ). Матричное представление. Пружина. Система двух пружин. Граничные условия.**
3. **Преимущества конечно-элементного анализа. Замечания о выборе физической модели.**
4. **Недостатки и погрешности метода. Оценка точности расчетов.**

Недостатки метода КЭ.

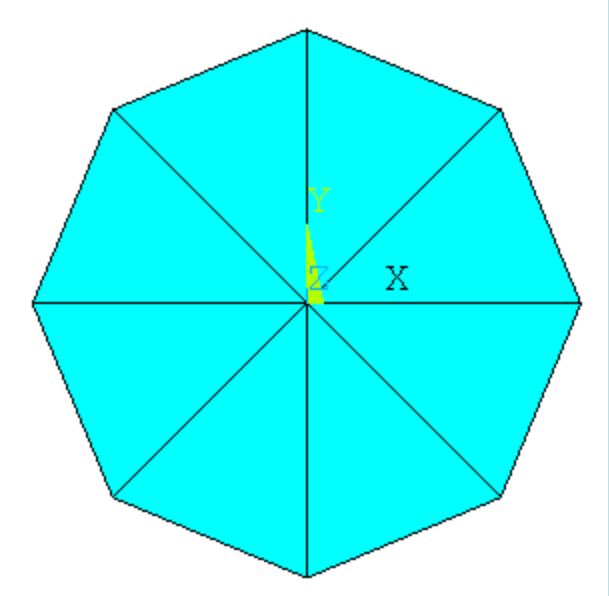
Основные недостатки метода конечных элементов.

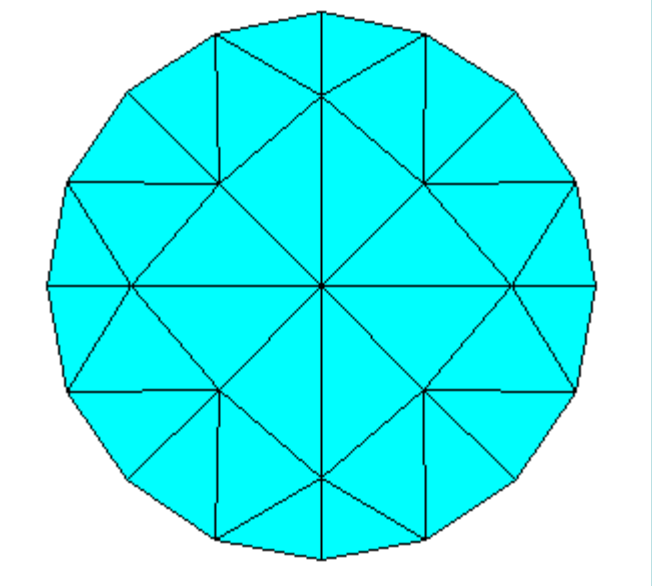
1. Зависимость результатов расчета от выполняемого пользователем выбора (построения) сетки КЭ
2. Трудность оценки точности получаемых результатов

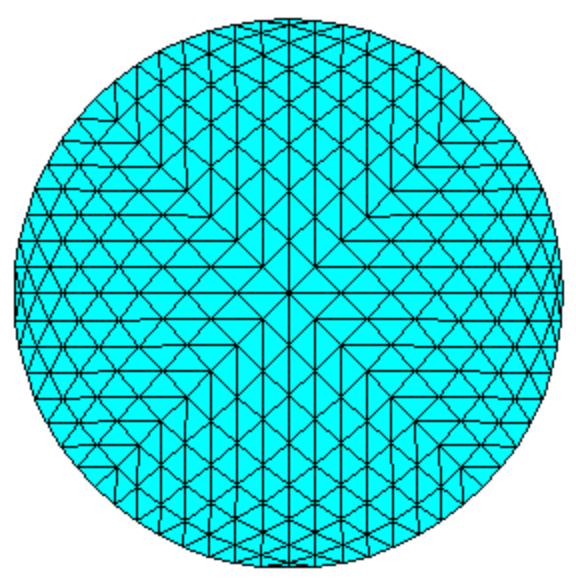


Зависимость результатов расчета от выполняемого пользователем выбора (построения) сетки КЭ.

Каждому разбиению отвечает свой набор базисных функций и, соответственно, свое решение. Например в задаче о нагрузках будут свои поля перемещений, деформаций и напряжений.





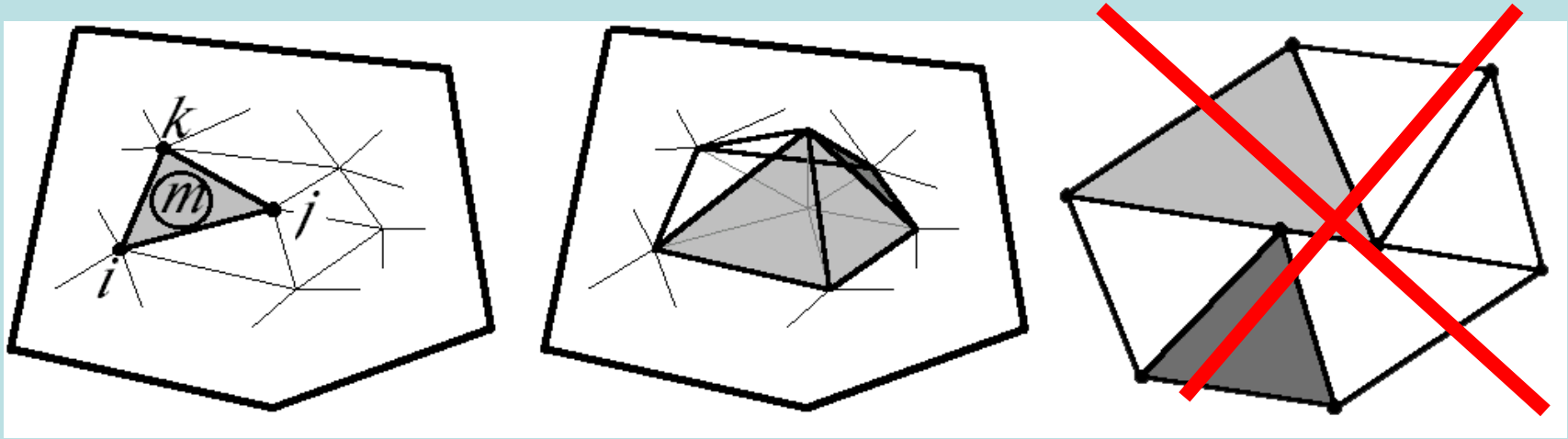


Зависимость результатов расчета от выполняемого пользователем выбора (построения) сетки КЭ

Совместность деформаций требует непрерывности поля перемещений в конструкции, что накладывает ограничения на разбиение конструкции на конечные элементы. Так например, если базисные функции u_j кусочно-линейны и удовлетворяют условиям

$$u_j(x_k, y_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases},$$

то для того, чтобы поле перемещений ***u (x,y)*** было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы соседние элементы имели совпадающие вершины.



Если узел одного элемента лежит на стороне другого, но не совпадает с его вершиной, базисная функция не будет непрерывной, несмотря на то, что конечные элементы заполняют всю конструкцию без пустот. С физической точки зрения эта ситуация эквивалентна наличию разрыва (трещины) в конструкции.

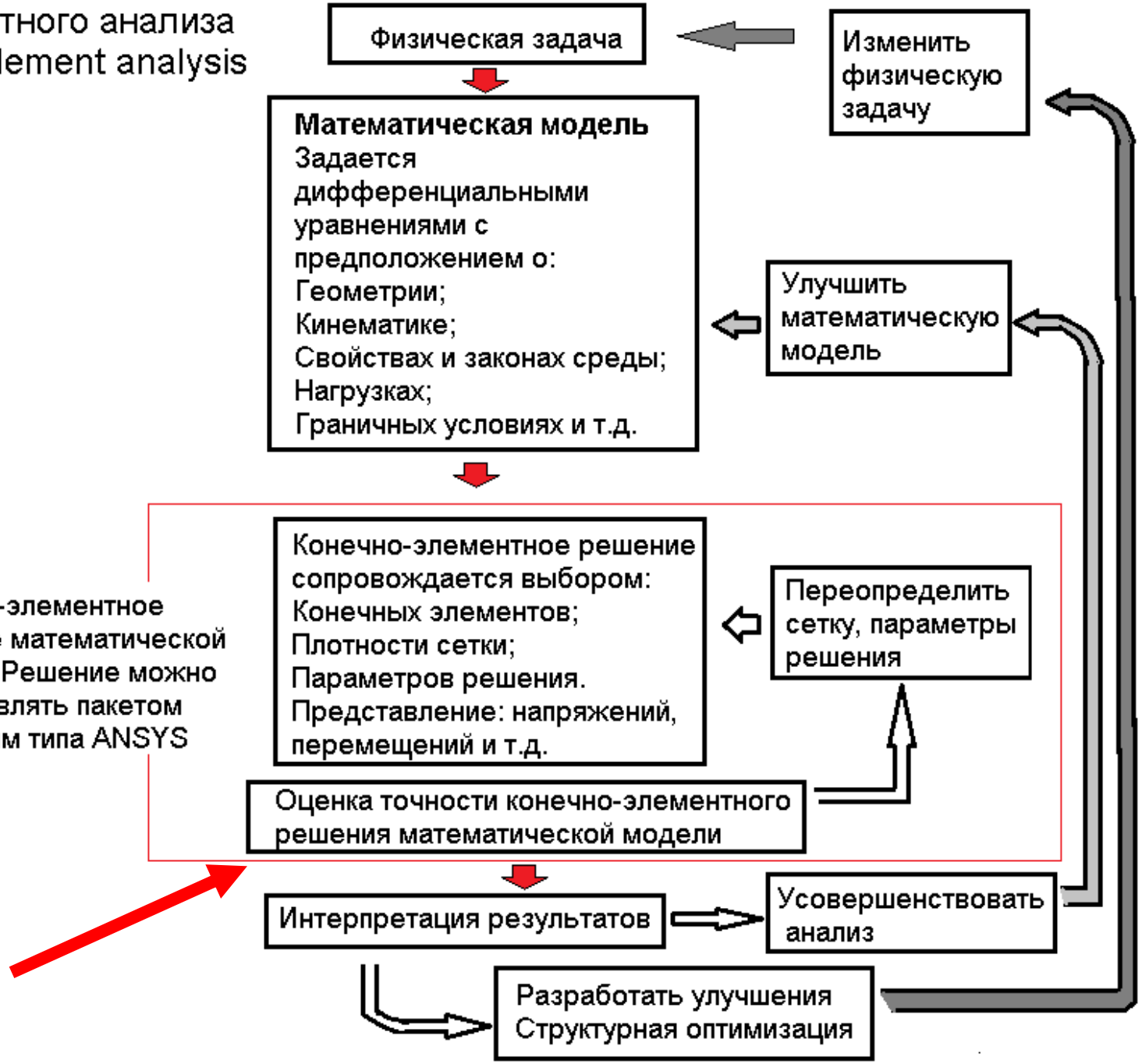
Погрешности метода

Погрешности метода конечных элементов связаны с

- ***ошибками дискретизации***, являющимися результатом геометрических различий границы рассматриваемой области (детали) и ее КЭ-модели;
- ***ошибками базисной функции***, обусловленными разностью между точным решением и его представлением в виде комбинации базисных функций заданного вида;
- ***ошибками округления***, связанными с конечной длиной разрядной сетки компьютера и большим числом операций, выполняемых при решении задачи методом конечных элементов

Ошибки дискретизации уменьшаются с уменьшением размера КЭ, а ошибки базисной функции и ошибки округления – в общем случае, нет (т.е. не обязательно).

Процесс конечно-элементного анализа Finite element analysis (FEA)



Конечно-элементное решение математической модели. Решение можно осуществлять пакетом программ типа ANSYS

Оценка точности результатов

Общий (универсальный и теоретически обоснованный) метод оценки погрешности МКЭ на сегодня отсутствует, а точное решение в реальных задачах обычно неизвестно.

Наилучшим способом оценки качества выбранной сетки МКЭ (и модели объекта в целом) является верификация результатов расчета с помощью экспериментальных данных или аналитических решений. Они не всегда доступны пользователю или не существуют.

В инженерной практике применяются другие методы оценки качества. В их числе: а) последовательное измельчение сетки и оценка скорости изменения величин; б) оценка «гладкости результатов».

Выполняется несколько расчетов при различных разбиениях области на КЭ, по результатам этих расчетов строится зависимость рассчитанных напряжений (перемещений, деформаций) от размера элемента, затем выполняется экстраполяция на случай размера элемента, стремящегося к нулю.

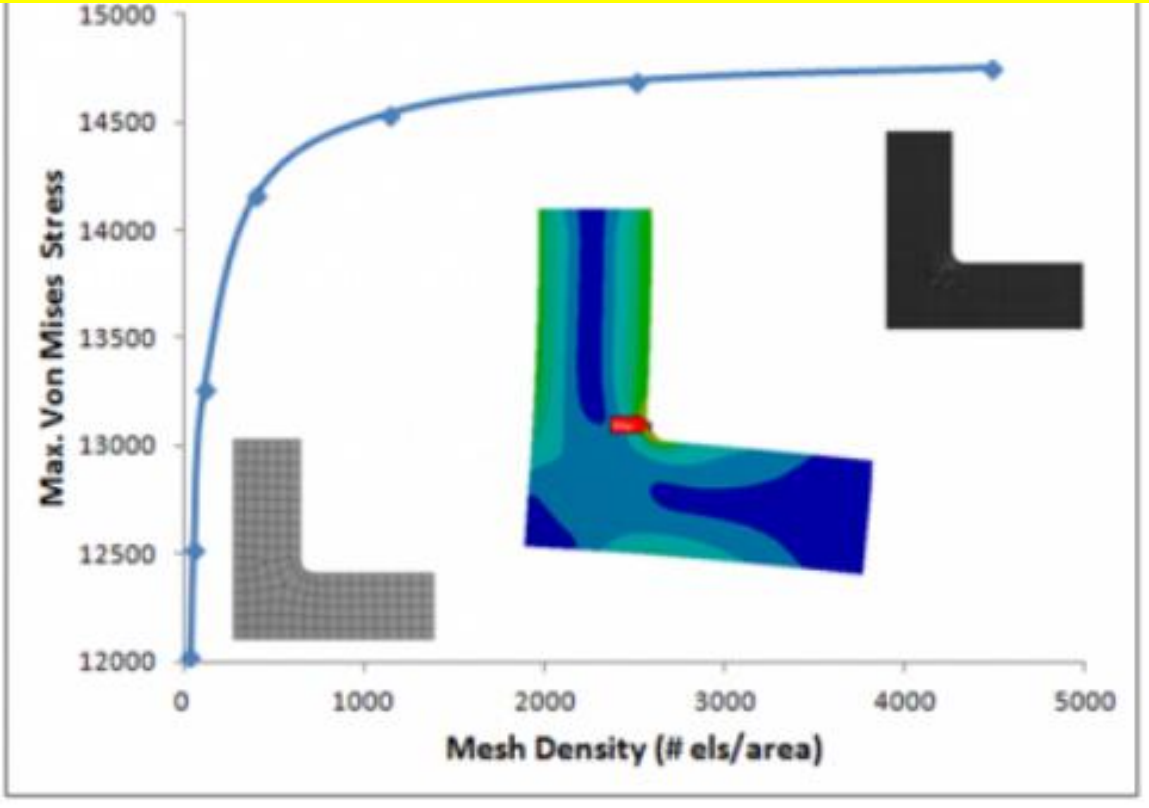
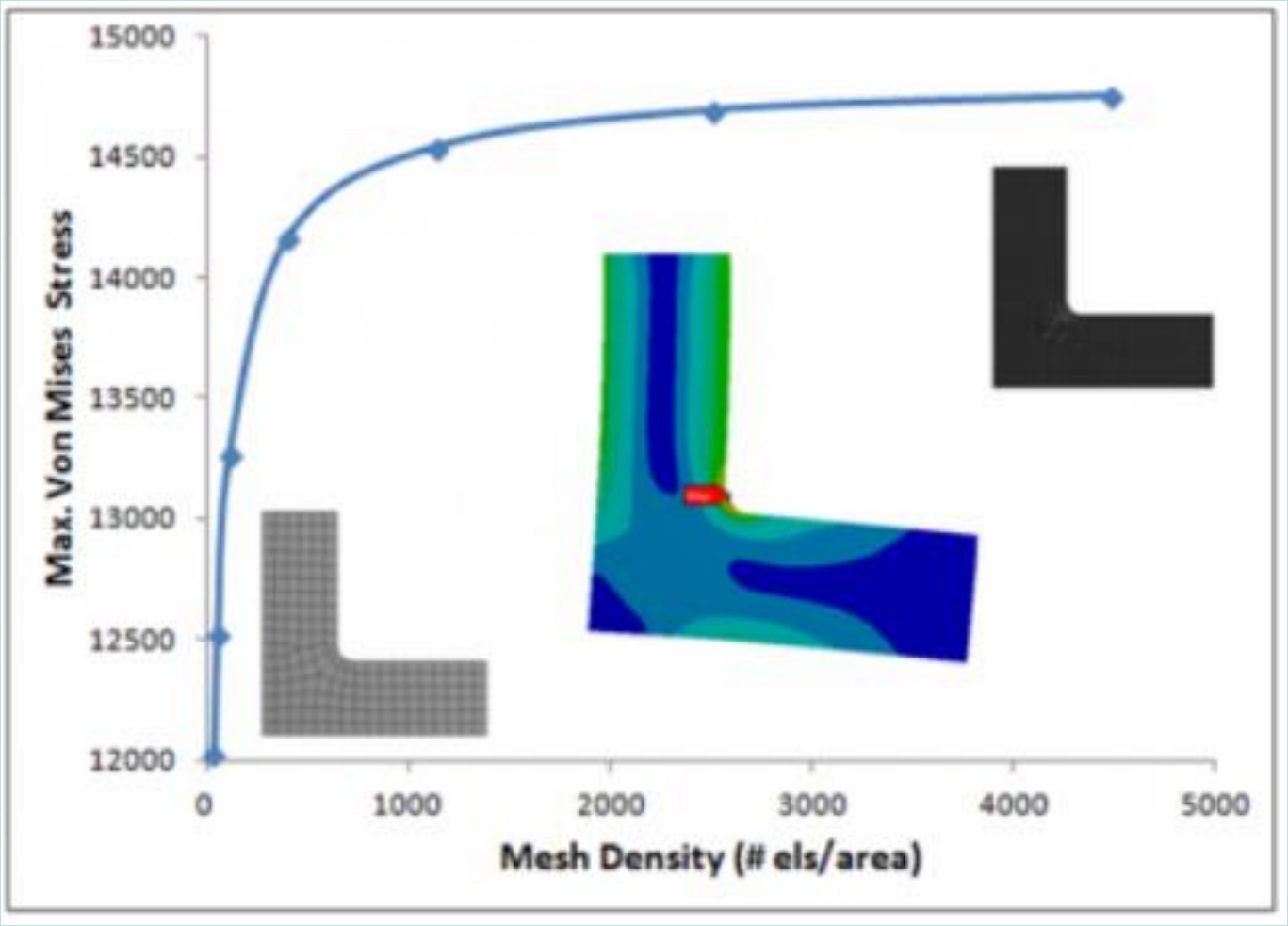
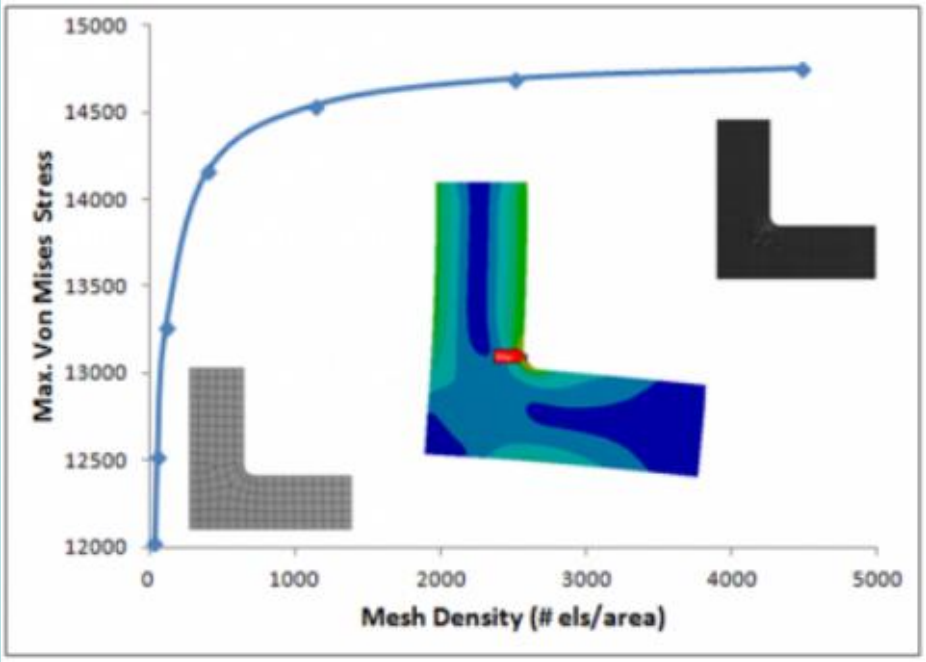


График изменения эквивалентного напряжения в концентраторе в зависимости от плотности сетки в модели

Контроль качества расчетов



Последовательное уменьшение размера элементов ведется до тех пор, пока какой-нибудь значимый результат (например, максимальное напряжение в определенной зоне) не сойдется к некоторому значению (то есть с каждой итерацией изменение напряжения будет меньше заданного допуска).

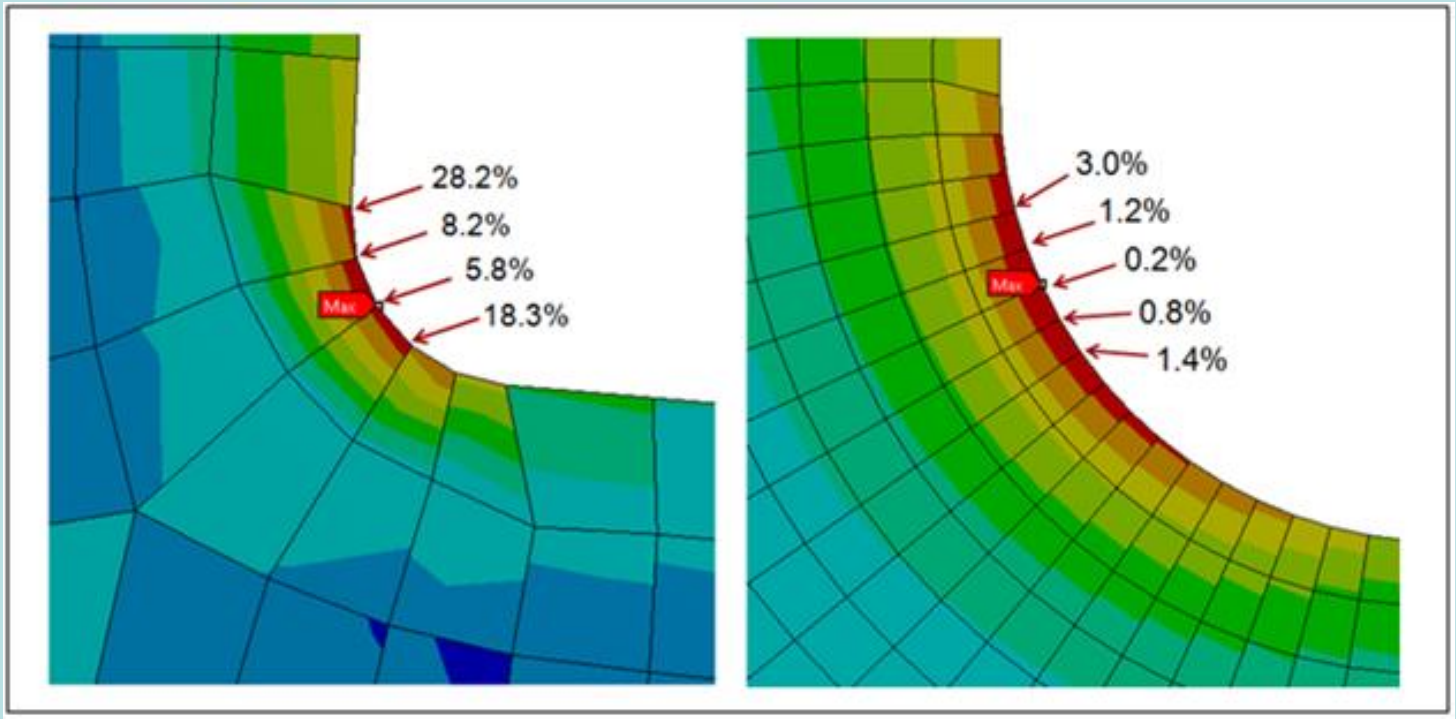


На рисунке показан пример подобного исследования. За образец взята плоская модель кронштейна, закрепленного за верхний торец и нагруженного действующей вниз силой, приложенной к правому нижнему ребру. Зона концентрации напряжений, очевидно, оказывается в скруглении.

График показывает зависимость максимального эквивалентного напряжения в концентраторе от количества конечных элементов на единицу площади кронштейна.

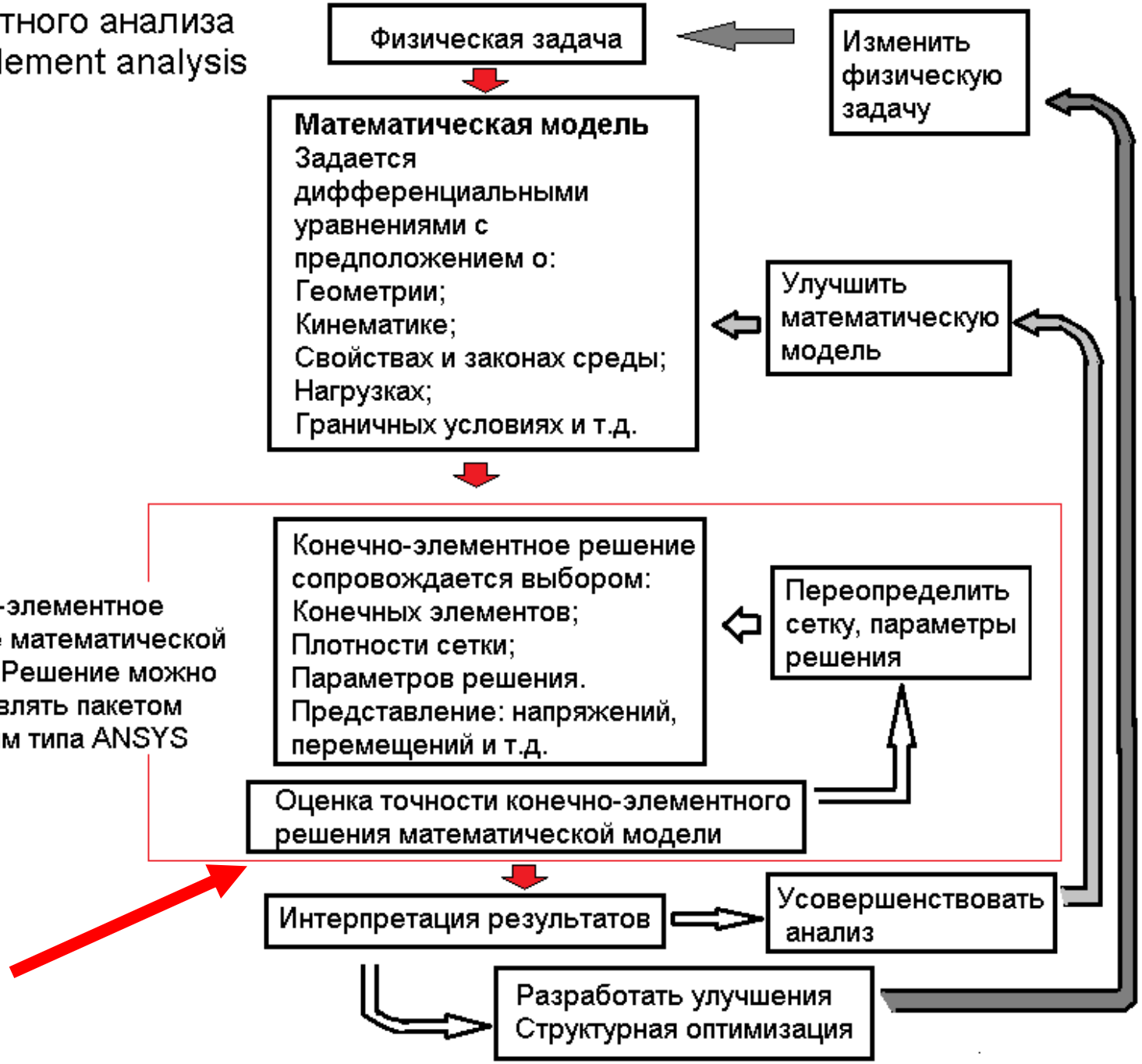
Как видно, увеличение плотности сетки сначала ведет к резкому росту максимального напряжения, однако потом скорость увеличения сильно замедляется и в итоге кривая выходит на практически горизонтальную «полку», где большому приращению плотности сетки соответствует лишь малое изменение в максимальном напряжении. Начальной и конечной точками этого участка в данном случае можно считать точки с плотностью 1134 и 4483 элемента на единицу площади. При изменении плотности в четыре раза значение анализируемого результата выросло только на 1,5%.

б) оценка «гладкости результатов».



На рисунке показана относительная разница значений неосредненного напряжения в общих узлах смежных элементов. Эти проценты получены путем деления разницы между неосредненными напряжениями на осредненное значение в узле. На более мелкой сетке справа разница гораздо меньше, чем на грубой слева. Это говорит о более высокой точности правого решения. Различие процентных величин также показывает степень потенциальной ошибки в результатах решения. Оценка ошибки может быть выполнена и с помощью других методов, однако все они также основываются на вычислении разницы значений характерных результатов в общих между соседними элементами узлах.

Процесс конечно-элементного анализа Finite element analysis (FEA)



Конечно-элементное решение математической модели. Решение можно осуществлять пакетом программ типа ANSYS

Литература к этой лекции

- Каплун, А. Б. Ansys в руках инженера Текст практ. рук. А. Б. Каплун, Е. М. Морозов, М. А. Олферьева ; предисл. А. С. Шадского. - Изд. стер. - М.: URSS : ЛИБРОКОМ, 2014. - 269 с. ил.
- Басов, К. А. ANSYS Текст справ. пользователя К. А. Басов. - 2-е изд., стер. - М.: ДМК-Пресс, 2012. - 639 с. ил.

Дополнение. Подготовка исходных данных для решения методом КЭ

Большую часть времени МКЭ занимает подготовка исходных данных, т.е. работа с препроцессором. Для повышения эффективности этой работы ее следует начинать с планирования подхода, заключающегося в

I. Составлении расчетной схемы, включающей минимально необходимую часть конструкции;

II. Выборе типа (типов) КЭ, которые будут использоваться в задаче

III. Выяснении того, какими возможностями автоматизации создания сетки располагает данный пакет (например, способен ли он генерировать сетку КЭ на областях любой формы или только определенной – например, 4-угольных)

IV. Выполнении эскиза конструкции с разбиением ее на области того типа, которые могут быть автоматически заполнены элементами

В общем случае в каждом узле имеется 6 степеней свободы (3 линейных перемещения и 3 поворота), но для конкретной задачи какие-то из них могут оказаться не нужны.

Например, при решении задачи о деформировании плоской рамы, нагруженной силами в своей плоскости, можно сразу отказаться от базисных функций, описывающих перемещения из плоскости рамы, поскольку эти перемещения равны нулю.

Указание, какие именно базисные функции используются в конкретной задаче, в программах МКЭ делается с помощью **типа элемента**. Описание типа включает топологию элемента (плоский треугольник, плоский четырехугольник, четырехугольник с криволинейными сторонами, объемный элемент – тетраэдр, 6-гранник и т.п.).

В каждом пакете МКЭ содержится заранее заданный набор типов элементов – библиотека КЭ, из которой пользователь выбирает необходимый ему для данной задачи тип. Использование типов элементов, определенных заранее и внесенных в библиотеку конкретного пакета МКЭ, требует аккуратности при моделировании конструкции: поля перемещений, которые могут быть описаны с помощью линейных комбинаций базисных функций, должны удовлетворять условиям совместности деформаций и наложенным на конструкцию связям

Подготовка исходных данных для решения методом КЭ

V определении граничных условий с учетом наложенных на конструкцию связей, возможностей КЭ выбранных типов, исключив возможность перемещений конструкции как жесткого целого

VI оценки (если возможно) требуемых размеров КЭ

VII планирования вариантов улучшения и оценки точности полученного решения. Например, предусмотреть трудозатраты на построение и изменение сетки КЭ.

Обзор пунктов основного меню Ansys графической оболочки Prep7.

– File – работа с файлами баз данных задач, именами, директориями, экспортом/импортом геометрии, чтением модели из файла и т.п.;

– Select – работа с геометрией, выбор, скрытие определенных геометрических объектов, а также создание компонент и их объединений;

– List – табличный вывод списка геометрических объектов и объектов сетки, выбор и отображение атрибутов геометрических объектов и объектов сетки, отображение нагрузок, граничных условий;

– Plot – отображение различных геометрических объектов и вычислительной сетки, рисование графиков созданных функций и т.п.;

– PlotCtrls – настройки режимов отображения, шрифтов, работа с анимацией, сохранение изображений, видео в файл, работа с отображением симметричных постановок задач и т.п.;

– Workplane – операции с рабочей плоскостью и системами координат;

– Parameters – операции с параметрами – таблицами и функциями;

– Macro – создание и выполнение макросов на встроенном языке APDL;

– MenuCtrls – настройки меню;

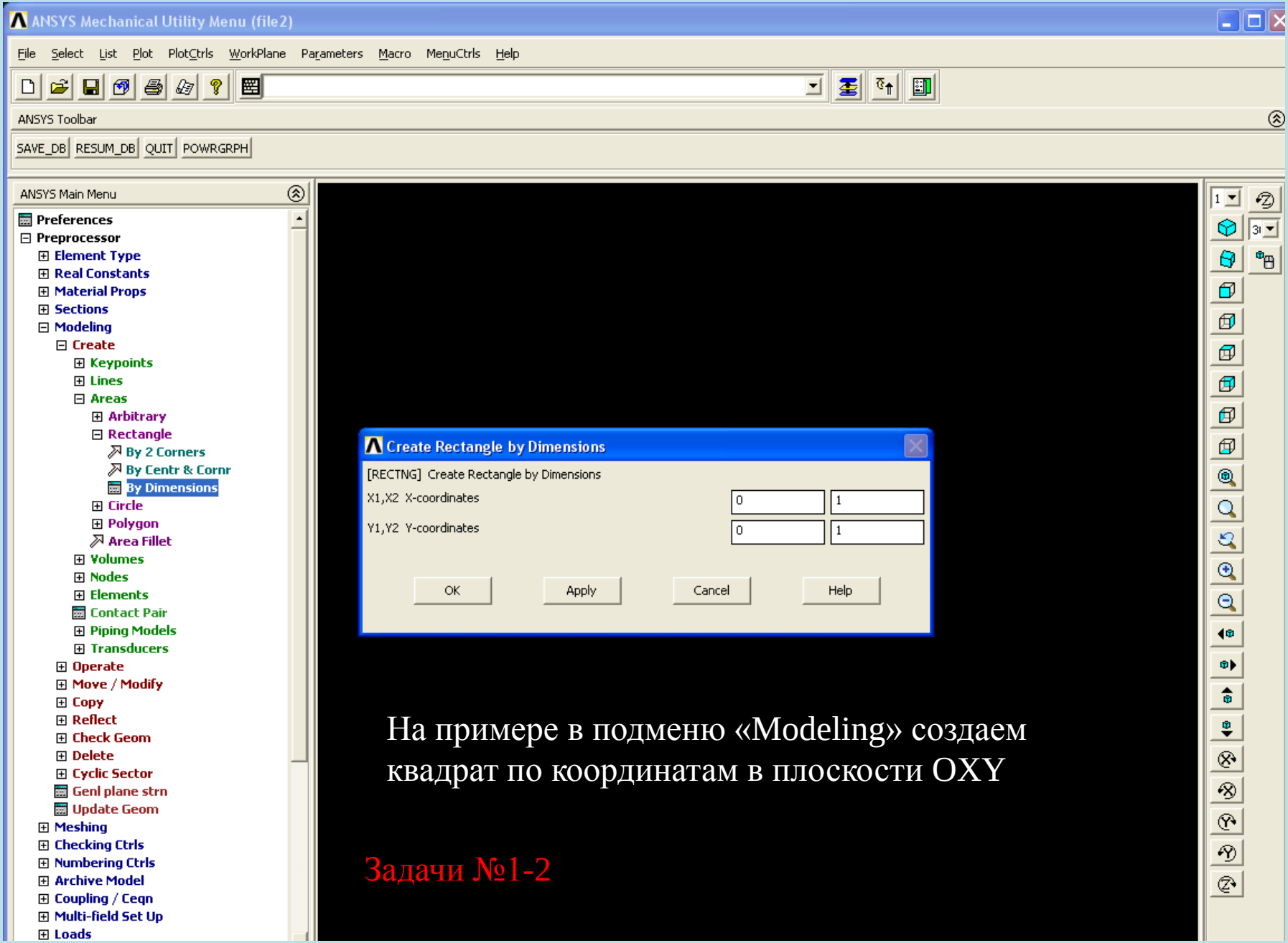
– Help – раздел помощи.

Под основным меню имеется текстовое поле для ввода команд. Не все команды в ANSYS Prep7 реализованы в графическом интерфейсе, поэтому при постановке, решении и анализе задач требуется вводить некоторые команды вручную.

Обзор пунктов меню слева от рабочей области интерфейса ANSYS PREP7

Preferences (выбор основного решающего модуля);
Preprocessor (меню постановки задачи);
подменю
Element type (выбор типа элемента = выбор уравнений, описывающих моделируемый процесс);
Real constants (задание некоторых характеристик элементов, например, для плоского элемента задание его толщины);
Material properties (выбор материала и задание его свойств);
Sections (задание поперечных сечений для некоторых элементов, например, для балок);
Modeling (меню создания, редактирования геометрии модели);
Meshing (создание и редактирование вычислительной сетки);
Checking ctrls (меню проверки качества созданной модели);
Numbering ctrls (работа с геометрией, сеткой, слияние одинаковых объектов);
Archive model (создание архива модели);

Здесь описаны не все меню, присутствующие в ANSYS, а только те, которые наиболее часто используются при решении задач



На примере в подменю «Modeling» создаем квадрат по координатам в плоскости OXY

Задачи №1-2

Multi-field set-up (меню постановки мультифизичных задач, например, связанной упруго-гидродинамической задачи);
Loads (меню задания, редактирования и удаления нагрузок – граничных и начальных условий);
Path operations (меню создания, редактирования так называемых путей–маршрутов);
Solution (меню решения задачи);
подменю
Analysis type (выбор типа анализа: стационарный, нестационарный, модальный, гармонический, спектральный и т.д.);
Define loads (меню задания, редактирования и удаления нагрузок – граничных и начальных условий);
Load step opts (меню настроек шагов нагружения);
Solve (меню запуска решателя)

В ANSYS некоторые пункты меню дублируются, поэтому нагрузки можно задавать и в Preprocessor (Loads) и в Solution (Define loads), что не сказывается на результате расчетов. Также продублирован пункт FLOTRAN Set Up в меню Preprocessor и в меню Solution.

General postprocessor (общий постпроцессор – обработка и вывод результатов расчета);
подменю
Data and file opts (выбор файла с результатами);
Results summary (вывод информации о кол-ве шагов/итераций в файле результатов);
Read results (чтение шагов/итераций из файла);
Plot results (отображение прочитанных результатов: в виде изображения поля значений величины цветом на геометрии модели, векторного поля значений векторной величины, начальной и измененной геометрии модели, линий тока, отображение графика изменения значений выбранной величины по созданному пути-маршруту и т.д.);
List results (вывод результатов – значений величин в виде списка);
Results viewer (оболочка, в которой объединены основные средства для обработки результатов расчета);
Path operations (меню работы с путями-маршрутами: создание, редактирование маршрута, помещение на маршрут переменной и т.д.)
Surface operations (меню работы с поверхностями/сечениями: создание сечения, редактирование, помещение переменной на сечение и ее отображение на сечении и т.д.)
Timehistory postprocessor (вывод и обработка результатов решения нестационарных расчетов).