

Южно-Уральский государственный университет
(научно-исследовательский университет)

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Практикум

Челябинск
2018

Министерство образования и науки
Российской Федерации

Южно-Уральский государственный университет
(Научно-исследовательский университет)

Определенный интеграл методы решения

Учебно-методическое пособие

Челябинск 2018

Одобрено учебно-методическим советом математического факультета
Челябинского государственного университета.???????

Методические указания содержат изложение методов вычисления определенных интегралов и их применения.

Предназначены для студентов первого курса технических направлений.

Составители:

доктор физ.-мат. наук, доц. М.В. Плеханова

доктор физ.-мат. наук, проф. В.Е. Федоров

Рецензенты:

заведующий кафедрой математического и функционального анализа ЮУрГУ, доктор физико-математических наук В.Л. Дильман,

доцент кафедры вычислительной механики ЮУрГУ,

доктор физико-математических наук М.В. Плеханова.

Оглавление

Введение	4
1. Интеграл Римана	5
1.1. Интеграл Римана. Условия существования	5
1.2. Свойства определенного интеграла	7
1.3. Формула Ньютона — Лейбница	9
2. Методы интегрирования	11
2.1. Таблица простейших интегралов	11
2.2. Замена переменной	13
2.3. Интегрирование по частям	16
2.4. Интегрирование рациональных функций	18
2.5. Метод Остроградского	22
2.6. Тригонометрические функции	25
2.7. Интегрирование иррациональных функций	27
2.8. Вычисление определенных интегралов	33
3. Вычисление площадей	36
3.1. Площадь фигуры в декартовых координатах	36
3.2. Площадь фигуры в полярной системе координат	38
3.3. Площадь для неявно заданной функции	38
4. Несобственные интегралы	41
4.1. Признаки сравнения	41
4.2. Признак Абеля-Дирихле	47
4.3. Главное значение в смысле Коши	49
Список литературы	51

Введение

Пособие посвящено практическим разделам по теме определенный интеграл. Цель — кратко описать основные методы решения, геометрического применения интеграла, а также на примерах пояснить некоторые, обычно сложные для понимания студентов, теоретические аспекты. В тексте приведены многочисленные задания с подробным решением. К каждой теме либо даны упражнения для закрепления темы.

Первый раздел затрагивает основные определения и свойства определенного интеграла, а также формулу Ньютона – Лейбница их подсчета. Приведены примеры, иллюстрирующие важность теоретических условий. Второй раздел описывает основные методы интегрирования и может быть применен при изучении неопределенных интегралов. Третий раздел — применение определенных интегралов к вычислению площадей. Здесь рассмотрены три основных метода описания области, с помощью функций, в декартовых, полярных координатах, а также заданных параметрически. В четвертом разделе описываются основные признаки исследования на сходимость несобственных интегралов.

В общем, пособие описывает все разделы изучения интегралов для функций одной переменной изучаемой в рамках курса математического анализа для студентов технических направлений. Также пособие может рассматриваться как дополнительная литература для студентов математических направлений.

1. Интеграл Римана

В этой главе приведены основные аспекты теории определенных интегралов. Фактически суть интегрирования сводится к тому, чтобы предъявить операцию обратную операции дифференцирования. Многие приложения в физике, технике, экономике и др. областях описываются с помощью уравнений, содержащих производные некоторых функций. Важнейшим этапом таких задач является интегрирование. Особое внимание в главе уделено теоретическим упражнениям, объясняющим нюансы свойств определенных интегралов. Читателю следует вдумчиво разобратить предложенные упражнения и примеры, чтобы не только хорошо ориентироваться в типах интегралов, методах их решения, но и понимать в каких случаях решение требует специальных методов или вовсе невозможно.

1.1. Интеграл Римана. Условия существования

Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}$ – некоторый отрезок; $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая функция. Отрезок $[a, b]$ разобьем на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ и будем говорить, что произведено *разбиение* r отрезка $[a, b]$ на отрезки $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Длину отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ условимся обозначать через Δx_i , а $\max\{\Delta x_i : i = 0, \dots, n-1\} = \lambda_r$. На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ выберем произвольную точку ξ_i и составим сумму

$$S_r = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Ее называют *интегральной суммой Римана* функции f на отрезке $[a, b]$ с разбиением r и промежуточными точками ξ_i .

Интегралом Римана от функции f на отрезке $[a, b]$ называется конечный предел

$$\lim_{\lambda_r \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = I_R,$$

если он не зависит от выбора разбиений и точек ξ_i .

Пример 1. Найдем по определению $\int_1^2 x dx$.

Введем разбиение $x_k = 1 + \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Заметим, что точки разбиения задают отрезок $[1; 2]$, поскольку $x_0 = 1$ и $x_n = (1 + \frac{n}{n}) = 2$. В качестве точек ξ_k выберем правые концы отрезков разбиения.

Учитывая, что $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n}$, составим сумму Римана

$$\begin{aligned} S_r &= \sum_{k=1}^n n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{k}{n} = \\ &= \frac{1}{n} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{n} \left[n + \frac{1}{n} (1 + 2 + \dots + n) \right] = 1 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n. \end{aligned}$$

По определению

$$\int_1^2 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n \right) = 1,5.$$

Упражнение 1. Вычислите по определению следующие интегралы

$$a) \int_0^1 e^x dx; \quad b) \int_{-1}^2 x^2 dx; \quad \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx.$$

ТЕОРЕМА (Достаточные условия интегрируемости)

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда f интегрируема по Риману на данном отрезке.

Пример 2. Приведем пример неинтегрируемой по Риману функции. Рассмотрим функцию Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{иррациональное,} \\ 1, & x - \text{рациональное.} \end{cases}$$

В самом деле, на любом сколь угодно малом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ найдутся как рациональная, так и иррациональная точка. Если на всех отрезках разбиения выбрать рациональные ξ_k , то $I(x_k, \xi_k) = b - a$; если же все ξ_k иррациональны, то $I(x_k, \xi_k) = 0$. Чередую такие выборы при $\Delta \rightarrow 0$, получаем, что предел I не существует. Значит, функция Дирихле не интегрируема.

Замечание. В дальнейшем множество интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$ функций будем обозначать $\mathcal{R}[a, b]$. Соответственно запись $f \in \mathcal{R}[a, b]$ следует читать "функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ ".

1.2. Свойства определенного интеграла

СВОЙСТВО 1 (аддитивность). Пусть $c \in [a, b]$. Тогда $(f \in \mathcal{R}[a, b]) \Leftrightarrow (f \in \mathcal{R}[a, c] \wedge f \in \mathcal{R}[c, b])$, причем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

СВОЙСТВО 2 (линейность). Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $c \in \mathbb{R}$. Тогда $f+g \in \mathcal{R}[a, b]$, $cf \in \mathcal{R}[a, b]$, причем

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

СВОЙСТВО 3 (интегрируемость произведения и частного). Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда $fg \in \mathcal{R}[a, b]$, а если к тому же $|g(x)| > c > 0$ на $[a, b]$, то и $f/g \in \mathcal{R}[a, b]$.

СВОЙСТВО 4. (i) Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $\forall x \in [a, b] (f(x) \leq g(x))$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

(ii) Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, тогда и $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$, причем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq K(b-a),$$

где $K = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Пример 3. Приведем пример, демонстрирующий, что сумма, произведение и частное двух неинтегрируемых функций могут быть интегрируемы.

Пусть $f(x) = 2 + D(x)$, $g(x) = 2 + D(x)$, где $D(x)$ - функция Дирихле. Напомним, что функция Дирихле не интегрируема. Функция $f(x)$ также неинтегрируема. Действительно, если допустить, что $f(x)$ интегрируема, то как разность интегрируемых функций по свойствам интеграла функция $f(x) - 2 = D(x)$ также должна быть интегрируема, что не так. Аналогично, $g(x) = f(x)$. Рассмотрим функцию

$$h(x) = 1/g(x) = \begin{cases} 1/2, & x - \text{иррациональное}, \\ 1/3, & x - \text{рациональное}. \end{cases}$$

Эта функция также интегрируема. Доказательство аналогично доказательству неинтегрируемости функции Дирихле.

Теперь составим сумму, произведение и частное неинтегрируемых функций:

$$F_1 = f(x) - g(x) \equiv 0; \quad F_2 = f(x)h(x) \equiv F_3 = f(x)/g(x) \equiv 1.$$

Очевидно, что как постоянные эти функции интегрируемы на любом промежутке.

Упражнение 2. Привести пример того, что произведение интегрируемой функции $f(x)$ на неинтегрируемую функцию $g(x)$ может быть: а) интегрируемой функцией; б) неинтегрируемой функцией.

ТЕОРЕМА (теорема о среднем). Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\forall x \in [a, b]$ $g(x) \geq 0$. Тогда

$$\exists \gamma \in [m, M] \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = \gamma \int_a^b g(x)dx,$$

где $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

В частности, если $g \equiv 1$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \gamma(b-a).$$

Пример 4. Найти среднее значение функции на заданном промежутке:

а) $f(x) = \cos x$ на $[0, 3\pi/2]$;

б) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на $[-1, 2]$.

Напомним, что функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ определяется следующим образом

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Находим среднее значение используя формулу из предыдущей теоремы.

а) $\gamma = \frac{2}{3\pi} \int_{-1}^{3\pi/2} \cos x dx = -\frac{2}{3\pi};$

б) $\gamma = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 \operatorname{sgn} x dx = \frac{1}{3}.$

1.3. Формула Ньютона — Лейбница

Функция F называется *первообразной* для функции f на множестве X , если для всех $x \in X$ $F'(x) = f(x)$.

ТЕОРЕМА (Ньютона - Лейбница). Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и существует первообразная $F(x)$ функции f на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Пример 5. Покажем, что формальное применение формулы Ньютона — Лейбница (без учета условий ее применимости) может привести к неверному результату.

Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. Взяв в качестве первообразной подынтегральной функции $f(x) = 1/(2\sqrt{x})$ функцию $F(x) = \sqrt{x}$ и формально

применив формулу Ньютона — Лейбница, получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 1.$$

Однако этот результат неверен, так как функция $f(x) = 1/(2\sqrt{x})$ не ограничена на $[0, 1]$ и, следовательно, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ не существует.

2. Методы интегрирования

В этой главе описаны основные приемы интегрирования. Среди них есть как часто встречающиеся так и специфические, такие, например, как метод Остроградского или подстановки Эйлера. В любом случае каждый метод приводит к применению табличных интегралов. Так что изучение методов интегрирования следует начать с запоминания таблицы основных интегралов. Следует понимать, однако, что не для каждой функции можно найти первообразную (свести к применению стандартного интеграла). Например, к классу непрерывных, но не имеющих первообразной относится часто встречающаяся в приложениях функция $y = e^{-x^2}$.

2.1. Таблица простейших интегралов

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается $\int f(x)dx$. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольная константа.

СВОЙСТВА

$$1) \int f'(x)dx = f(x) + C, \text{ или } \left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

$$2) \int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C.$$

$$3) \int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

ТАБЛИЦА ПРОСТЕЙШИХ ИНТЕГРАЛОВ

$$\begin{array}{ll} \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, & a > 0, \quad a \neq 1 \\ \int e^x dx = e^x + C \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \cos x dx &= \sin x + C \\
\int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{tg} x + C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\operatorname{ctg} x + C \\
\int \operatorname{sh} x dx &= \operatorname{ch} x + C & \int \operatorname{ch} x dx &= \operatorname{sh} x + C \\
\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} &= \operatorname{th} x + C & \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} &= -\operatorname{cth} x + C \\
\int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \\
\int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad a \neq 0 \\
\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} &= \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \quad a \neq 0
\end{aligned}$$

Приведем некоторые примеры вычисления неопределенных интегралов.

Пример 6.

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x^3 + \sqrt{x})^2 dx}{\sqrt{x}} &= \int \frac{x^6 + 2x^3\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} dx = \\
&= \int x^{11/2} dx + 2 \int x^3 dx + \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{13} x^6 \sqrt{x} + \frac{1}{2} x^4 + \frac{2}{3} x^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

Пример 7.

$$\int 2^{2x} 5^x dx = \int (2^2 \cdot 5)^x dx = \int 20^x dx = \frac{20^x}{\ln 20} + C.$$

Упражнение 3. Применяя таблицу простейших интегралов, решить интегралы

$$\int \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx; \quad \int \frac{dx}{x^2 + 7}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{8 - x^2}}.$$

2.2. Замена переменной

Используя формулу для дифференциала функции

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)dx,$$

с помощью замены $\varphi(x) = u$ часто удается упростить подынтегральное выражение вида

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C,$$

где $F(u)$ – первообразная для функции $f(u)$.

Приведем некоторые формулы для преобразования дифференциалов:

$$dx = \frac{1}{a}d(ax + b), \quad \frac{dx}{x} = d \ln x,$$

$$x^\alpha dx = \frac{dx^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad a^x dx = \frac{da^x}{\ln a},$$

$$\cos x dx = d \sin x, \quad \sin x dx = -d \cos x.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 8.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg x} &= \int \frac{d \arctg x}{\arctg x} = \left| u = \arctg x \right| = \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\arctg x| + C. \end{aligned}$$

Пример 9.

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{4+x^4} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{4+x^4} = \left| u = x^2 \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{2^2+u^2} = \\ &= \frac{1}{4} \arctg \frac{u}{2} + C = \frac{1}{4} \arctg \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Иногда при интегрировании функции, содержащей в знаменателе неразложимые квадратные трехчлены (с отрицательным дискриминантом), надо выделить в трехчлене полный квадрат. Общее правило выделения полного квадрата в неразложимом трехчлене:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4c - b^2}{4a}.$$

Рассмотрим простейшие примеры.

Пример 10.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 1/2)^2 + 3/4}} = \int \frac{d(x + 1/2)}{\sqrt{(x + 1/2)^2 + 3/4}} =$$

$$= \ln |x + 1/2 + \sqrt{(x + 1/2)^2 + 3/4}| + C = \ln |x + 1/2 + \sqrt{x^2 + x + 1}| + C.$$

Пример 11.

$$\int \frac{dx}{2x^2 + x + 1} = \int \frac{dx}{2(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x + 1/4)^2 + 7/16} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{7} \int \frac{dx}{\left(\frac{4x}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{7}} \int \frac{d\left(\frac{4x}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)}{\left(\frac{4x}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left(\frac{4x + 1}{\sqrt{7}} \right) + C.$$

Иногда удобнее проводить замену переменных в обратном порядке. Пусть $x(t)$ и $t(x)$ взаимнообратные и непрерывно дифференцируемые функции. Если $\Phi(t)$ – первообразная для функции $f(x(t))x'(t)$, то

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt = \Phi(t) + C = \Phi(t(x)) + C.$$

Функция $x(t)$ подбирается так, чтобы упростить подынтегральное выражение.

Пример 12.

$$\int (x + 3)^2 \sqrt{x - 1} dx = \left| x - 1 = t, \quad dx = dt \right| = \int (t + 4)^2 \sqrt{t} dt =$$

$$= \int t^{5/2} dt + 8 \int t^{3/2} dt + 16 \int t^{1/2} dt = \frac{2}{7} t^{7/2} + \frac{16}{5} t^{5/2} + \frac{32}{3} t^{3/2} + C =$$

$$= \frac{2}{7} (x - 1)^3 \sqrt{x - 1} + 3 \frac{1}{5} (x - 1)^2 \sqrt{x - 1} + 10 \frac{2}{3} (x - 1) \sqrt{x - 1} + C.$$

Если дробных степеней от выражений вида $\frac{ax+b}{cx+d}$ несколько, то делаем замену

$$\frac{ax + b}{cx + d} = z^p,$$

где p – наибольший общий знаменатель всех показателей степеней.

Пример 13.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{\frac{x}{1+x}} dx}{(1+x)^2 \left(1 + \sqrt[3]{\frac{x}{1+x}}\right)} &= \left| \frac{x}{1+x} = z^6, \quad dx = \frac{6z^5 dz}{(1-z^6)^2} \right| = \\
&= \int \frac{z^3 \cdot 6z^5 dz}{1+z^2} = 6 \int \left(z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{1+z^2} \right) dz = \\
&= \frac{6}{7} z^7 - \frac{6}{5} z^5 + 2z^3 - 6z + 6 \operatorname{arctg} z + C = \\
&= \frac{6}{7} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{7/6} - \frac{6}{5} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{5/6} + \\
&+ \sqrt{\frac{x}{1+x}} - 6 \sqrt[6]{\frac{x}{1+x}} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{\frac{x}{1+x}} + C.
\end{aligned}$$

При этом мы разделили z^8 на $1+z^2$.

Вычислим еще несколько интегралов.

Пример 14.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+e^x} &= \left| e^x = y, \quad x = \ln y, \quad dx = \frac{dy}{y} \right| = \int \frac{dy}{y(1+y)} = \\
&= \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y+1} = \ln \left| \frac{y}{1+y} \right| + C = \ln \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right) + C.
\end{aligned}$$

Пример 15.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} = - \int \frac{d \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) + C.$$

Упражнение 4. Используя методы, изложенные в данном параграфе, вычислить интегралы

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^2}{1+x^6} dx; \quad \int \frac{dx}{3x^2+5}; \quad \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx; \\
&\int \frac{1}{1+e^x} dx; \quad \int x \sin(1-x^2) dx; \quad \int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1} dx.
\end{aligned}$$

2.3. Интегрирование по частям

Если $u(x)$, $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, то справедлива формула интегрирования по частям

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x), \quad \text{или}$$

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Приведем наиболее типичные примеры.

Пример 16.

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \left| u = \ln x, v = x \right| = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = \\ &= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C. \end{aligned}$$

Пример 17.

$$\begin{aligned} \int x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int x d \sin 2x = \left| u = x, v = \sin 2x \right| = \\ &= \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

Пример 18.

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x} dx &= \frac{1}{3} \int x^2 d e^{3x} = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} 2x dx = \\ &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} \int x d e^{3x} = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{9} \int e^{3x} dx = \\ &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C. \end{aligned}$$

Такие интегралы аналогичным образом вычисляются и в случае, когда в первом интеграле вместо множителя x или во втором интеграле вместо множителя x^2 стоит некоторый многочлен степени n . При этом надо интегрировать последовательно по частям n раз.

Интегралы следующих типов выражаются сами через себя.

Пример 19.

$$\begin{aligned} I &= \int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int \sin 3x de^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{1}{2} \int e^{2x} d \sin 3x = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4} \int \cos 3x de^{2x} = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} \int e^{2x} d \cos 3x = \\ &= \frac{1}{4} e^{2x} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x) - \frac{9}{4} \int e^{2x} \sin 3x dx = \\ &= \frac{1}{4} e^{2x} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x) - \frac{9}{4} I \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{13}{4} I = \frac{1}{4} e^{2x} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x), \quad I = \frac{1}{13} e^{2x} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x).$$

$$\begin{aligned} J &= \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int x d \sqrt{a^2 - x^2} = \\ &= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int x \frac{-2x}{2 \sqrt{a^2 - x^2}} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - J + C_1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$J = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$$

Упражнение 5. Применяя метод интегрирования по частям, вычислить интегралы

$$\int \operatorname{arctg} x dx; \quad \int x \cos(3x) dx; \quad \int 3^x \cos x dx; \quad \int \sqrt{1 + x^2} dx.$$

2.4. Интегрирование рациональных функций

Рациональной называется функция вида $\frac{R_l(x)}{Q_n(x)}$, где $R_l(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены степени l и n , соответственно.

Если $l \geq n$, то можно выделить целую часть дроби

$$\frac{R_l(x)}{Q_n(x)} = S_{l-n}(x) + \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $S_{l-n}(x)$, $P_m(x)$ – многочлены степени $l - n$ и m , соответственно, $m < n$. Поэтому интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad m < n.$$

При этом можно считать коэффициент при x^n равным единице.

Первым шагом при вычислении интеграла от функции такого вида является разложение знаменателя на множители

$$Q_n(x) = (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_i)^{k_i} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_jx + q_j)^{l_j},$$

где a_1, a_2, \dots, a_i – корни многочлена $Q_n(x)$ кратности k_1, k_2, \dots, k_i , соответственно, а трехчлены $x^2 + p_lx + q_l$, $l = 1, \dots, j$, не имеют действительных корней ($p_l^2 - 4q_l < 0$). При этом $\sum_{r=1}^i k_r + 2 \sum_{r=1}^j l_j = n$.

Следующим шагом является представление дроби в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = & \frac{A_1^{(1)}}{x - a_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x - a_1)^{k_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{x - a_2} + \dots + \frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x - a_2)^{k_2}} + \\ & + \frac{A_1^{(i)}}{x - a_i} + \dots + \frac{A_{k_i}^{(i)}}{(x - a_i)^{k_i}} + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_2^{(1)}x + C_2^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \\ & + \frac{B_{l_1}^{(1)}x + C_{l_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \dots + \frac{B_1^{(j)}x + C_1^{(j)}}{x^2 + p_jx + q_j} + \dots + \frac{B_{l_j}^{(j)}x + C_{l_j}^{(j)}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{l_j}}. \end{aligned}$$

Здесь $A_1^{(1)}, \dots, A_{k_i}^{(i)}$, $B_1^{(1)}, \dots, B_{l_j}^{(j)}$, $C_1^{(1)}, \dots, C_{l_j}^{(j)}$ – некоторые числа, которые находятся *методом неопределенных коэффициентов*. Заключается он в том, чтобы правую часть последнего равенства привести к общему знаменателю, получить числитель этого выражения некоторый многочлен степени m , коэффициенты которого, выраженные через искомые константы, нужно приравнять к коэффициентам многочлена $P_m(x)$. Получится система $m + 1$ линейного уравнения. Рассмотрим пример.

Пример 20.

$$I = \int \frac{4x^2 + 3}{(2x^2 - 8)(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{4x^2 + 3}{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)^2}.$$

$$\frac{4x^2 + 3}{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{A(x + 2)(x^2 + 1)^2 + B(x - 2)(x^2 + 1)^2}{(x^2 - 4)(x^2 + 1)^2} +$$

$$+ \frac{(Cx + D)(x^2 - 4)(x^2 + 1) + (Ex + F)(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)(x^2 + 1)^2}.$$

$$4x^2 + 3 = (A + B + C)x^5 + (2A - 2B + D)x^4 + (2A + 2B - 3C + E)x^3 +$$

$$+ (4A - 4B - 3D + F)x^2 + (A + B - 4C - 4E)x + (2A - 2B - 4D - 4F).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0, & 2A - 2B + D &= 0, \\ 2A + 2B - 3C + E &= 0, & 4A - 4B - 3D + F &= 4, \\ A + B - 4C - 4E &= 0, & 2A - 2B - 4D - 4F &= 3. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим значения $A = 0,19$, $B = -0,19$, $C = E = 0$, $D = -0,76$, $F = 0,2$. Поэтому

$$I = 0,095 \int \frac{dx}{x - 2} - 0,095 \int \frac{dx}{x + 2} - 0,38 \int \frac{dx}{x^2 + 1} + 0,1 \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \quad (4.1).$$

Есть другие методы нахождения коэффициентов разложения, которые не столь универсальны, как изложенный выше, но в частных случаях бывают гораздо удобнее. Например, если знаменатель имеет только действительные простые (кратности один) корни, можно поступить следующим образом:

$$\frac{2x^2 + 4x - 5}{(x^2 - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 2}.$$

$$2x^2 + 4x - 5 = A(x + 1)(x + 2) + B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)(x + 1).$$

Положим поочередно $x = 1$, $x = -1$, $x = -2$. Получим равенства

$$1 = 6A, \quad -7 = -2B, \quad -5 = 3C.$$

Отсюда $A = 1/6$, $B = 7/2$, $C = -5/3$.

$$\int \frac{2x^2 + 4x - 5}{(x^2 - 1)(x + 2)} = \frac{1}{6} \ln |x - 1| + 3\frac{1}{2} \ln |x + 1| - 1\frac{2}{3} \ln |x + 2| + C.$$

Если знаменатель имеет действительные корни, среди которых есть корни кратности больше единицы, то поступим так:

$$\frac{-x^2 + 3x + 7}{(x + 3)(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x + 3}.$$

$$-x^2 + 3x + 7 = A(x + 1)(x + 3) + B(x + 3) + C(x + 1)^2. \quad (4.2)$$

Положим $x = -1$, тогда $3 = 2B$, $B = 3/2$. Теперь положим $x = -3$, получим $-11 = 4C$, $C = -11/4$. Осталось найти A . Продифференцируем тождество (4.2):

$$-2x + 3 = A(2x + 4) + B + 2C(x + 1).$$

Положим x равным значению кратного корня, то есть, $x = -1$, тогда $5 = 2A + B = 2A + 3/2$, $A = 7/4$.

$$\begin{aligned} \int \frac{-x^2 + 3x + 7}{(x + 3)(x + 1)^2} &= \frac{7}{4} \int \frac{dx}{x + 1} + \frac{3}{2} \int \frac{d(x + 1)}{(x + 1)^2} - \frac{11}{4} \int \frac{dx}{x + 3} = \\ &= 1,75 \ln |x + 1| - \frac{1,5}{x + 1} - 2,75 \ln |x + 3| + C. \end{aligned}$$

Итак, разбивая правильную дробь на простейшие, мы ее интегрирование сводим к интегрированию дробей следующих видов:

$$1) \frac{A}{x - a}, \quad 2) \frac{B}{(x - a)^k}, \quad 3) \frac{Cx + D}{x^2 + px + q}, \quad 4) \frac{Cx + D}{(x^2 + px + d)^l}.$$

Посчитаем интегралы от этих дробей.

$$1) \int \frac{A}{x - a} dx = A \ln |x - a| + C.$$

$$2) \int \frac{B}{(x - a)^k} = \frac{B}{(1 - k)(x - a)^{k-1}} + C.$$

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{Cx + D}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{Cx + D}{(x + p/2)^2 + \frac{4q - p^2}{4}} dx = \\ &= \left\| x + p/2 = u, \quad \frac{4q - p^2}{4} = b, \quad D - C\frac{p}{2} = E \right\| = \int \frac{Cu + E}{u^2 + b} du = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C \int \frac{u du}{u^2 + b} + E \int \frac{du}{u^2 + b} = \frac{C}{2} \int \frac{d(u^2 + b)}{u^2 + b} + E \int \frac{du}{u^2 + b} = \\
&= \frac{C}{2} \ln(u^2 + b) + \frac{E}{\sqrt{b}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{b}} + C_1 =
\end{aligned}$$

Здесь надо заметить, что $b = -\mathcal{D}/4 > 0$, так как \mathcal{D} – дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + px + q$, не имеющего действительных корней, а значит, отрицательный.

$$= \frac{C}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2D - Cp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C_1.$$

$$\begin{aligned}
4) \quad & \int \frac{Cx + D}{(x^2 + px + q)^l} dx = \int \frac{\frac{C}{2}(2x + p) + \left(D - \frac{Cp}{2}\right)}{(x^2 + px + q)^l} dx = \\
&= \frac{C}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^l} dx + \left(D - \frac{Cp}{2}\right) \int \frac{d(x + p/2)}{\left((x + p/2)^2 + \frac{4q - p^2}{4}\right)^l} = \\
&= \left| x + p/2 = u, \quad \frac{4q - p^2}{4} = b \right| = \\
&= \frac{C}{2(1-l)} (x^2 + px + q)^{1-l} + \left(D - \frac{Cp}{2}\right) \int \frac{du}{(u^2 + b)^l}.
\end{aligned}$$

В последнем интеграле делается подстановка $u = \sqrt{b} \operatorname{tg} z$:

$$\int \frac{du}{(u^2 + b)^l} = b^{\frac{1}{2}-l} \int \cos^{2(l-1)} z dz.$$

Вычисление интегралов такого вида мы еще рассмотрим в п. 6.

Еще один способ вычисления интеграла $I_l = \int \frac{du}{(u^2 + b)^l}$ – использовать рекуррентное соотношение, которое мы сейчас установим.

$$\begin{aligned}
I_l &= \int \frac{du}{(u^2 + b)^l} = \frac{1}{b} \int \frac{u^2 + b - u^2}{(u^2 + b)^l} du = \\
&= \frac{1}{b} \int \frac{du}{(u^2 + b)^{l-1}} - \frac{1}{2} \int \frac{u}{(u^2 + b)^l} d(u^2 + b) = \\
&= \frac{1}{b} I_{l-1} - \frac{1}{2} \int u d \left(\frac{(u^2 + b)^{1-l}}{1-l} \right) = \\
&= \frac{1}{b} I_{l-1} + \frac{1}{2(l-1)} u (u^2 + b)^{1-l} - \frac{1}{2(l-1)} \int \frac{du}{(u^2 + b)^{l-1}} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2l - b - 2}{2b(l - 1)} I_{l-1} - \frac{u}{2(l - 1)(u^2 + b)^{l-1}} = I_l.$$

Например, посчитаем интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} I_1 - \frac{x}{2(x^2 + 1)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2(x^2 + 1)} + C.$$

Досчитаем интеграл (4.1)

$$I = 0,095 \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| - 0,33 \operatorname{arctg} x - 0,05 \frac{x}{x^2 + 1} + C.$$

Упражнение 6. Решить задания

$$\int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx; \quad \int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x - 3)^2(x + 1)^2} dx.$$

2.5. Метод Остроградского

Пусть знаменатель несократимой правильной дроби $P_m(x)/Q_n(x)$ имеет вид

$$Q_n(x) = (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_i)^{k_i} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_jx + q_j)^{l_j}.$$

Метод Остроградского заключается в использовании формулы

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \frac{R(x)}{S(x)} + \int \frac{T(x)}{U(x)} dx.$$

В ней многочлены $S(x)$ и $U(x)$ имеют вид

$$S(x) = (x - a_1)^{k_1-1} \dots (x - a_i)^{k_i-1} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1-1} \dots (x^2 + p_jx + q_j)^{l_j-1},$$

$$U(x) = (x - a_1) \dots (x - a_i) (x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_jx + q_j),$$

соответственно, и могут быть вычислены без разложения многочлена $Q_n(x)$ на произведение неприводимых множителей.

Действительно, $S(x)$ является наибольшим общим делителем двух многочленов $Q_n(x)$ и $Q'_n(x)$ и может быть вычислен при помощи алгоритма Евклида, который излагается в курсе алгебры.

Многочлен $U(x)$ представляет собой частное $Q_n(x)/S(x)$ и может быть вычислен посредством деления $Q_n(x)$ на $S(x)$ "столбиком" (или по схеме Горнера).

Остается вычислить многочлены $R(x)$ и $T(x)$ как многочлены с неопределенными коэффициентами степени на единицу ниже, чем $S(x)$ и $U(x)$,

соответственно. Для вычисления указанных неопределенных коэффициентов следует продифференцировать формулу Остроградского, привести результат дифференцирования к общему знаменателю и сопоставить коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях.

Метод Остроградского особенно эффективен, когда корни $Q_n(x)$ в основном являются кратными или когда вызывает затруднение нахождение корней $Q_n(x)$.

Пример 21. *Вычислим*

$$\int \frac{6 - 7x - x^2}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} dx.$$

Имеем

$$Q_n(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1,$$

$$Q'_n(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2.$$

Наибольший общий делитель этих многочленов равен

$$S(x) = x^2 - x + 1.$$

Поделив $Q_n(x)$ на $S(x)$ «столбиком», найдем

$$U(x) = x^2 - x + 1.$$

$R(x)$ и $T(x)$ задаем как многочлены первой степени с неопределенными коэффициентами, и формула Остроградского принимает вид

$$\int \frac{6 - 7x - x^2}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} dx = \frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1} dx.$$

Продифференцируем эту формулу:

$$\begin{aligned} & \frac{6 - 7x - x^2}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} = \\ & = \frac{A(x^2 - x + 1) - (Ax + B)(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1}. \end{aligned}$$

Результат дифференцирования приводим к общему знаменателю, после чего сопоставляем числители. Получим

$$6 - 7x - x^2 = A(x^2 - x + 1) - (Ax + B)(2x - 1) + (Cx + D)(x^2 - x + 1).$$

Сравнивая коэффициенты при x^0, x^1, x^2 и x^3 , получим систему уравнений

$$\begin{cases} C = 0, \\ -A + D - C = -1, \\ -2B - D + C = -7, \\ A + B + D = 6. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A = 2, B = 3, C = 0, D = 1$. Таким образом, формула Остроградского принимает вид

$$\int \frac{6 - 7x - x^2}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} dx = \frac{2x + 3}{x^2 - x + 1} + \int \frac{dx}{x^2 - x + 1}.$$

Вычислим интеграл в правой части:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{dx}{(x - 1/2)^2 + 3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{6 - 7x - x^2}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} dx = \frac{2x + 3}{x^2 - x + 1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Рассмотрим еще один пример.

Пример 22.

$$I = \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

Разложим знаменатель на множители:

$$x^4 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + cx + 1) = x^4 + (a + c)x^3 + (2 + ac)x^2 + (a + c)x + 1.$$

$$\text{Отсюда } a + c = 0, \quad 2 + ac = 0, \quad a = \sqrt{2}, c = -\sqrt{2}.$$

$$\frac{x^2 + 1}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

Приравниваем коэффициенты:

$$A + C = 0, \quad \sqrt{2}(C - A) + B + D = 1, \quad A + C + \sqrt{2}(D - B) = 0,$$

$$B + D = 1; \quad A = C = 0, \quad B = D = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \\ &= \int \frac{dx}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1} + \int \frac{dx}{(\sqrt{2}x - 1)^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1)) + C. \end{aligned}$$

Упражнение 7. Применяя метод Остроградского, найти

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 2}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx; \quad \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^4}.$$

2.6. Тригонометрические функции

При интегрировании тригонометрических функций часто оказываются полезными следующие формулы:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x,$$

$$\sin \alpha \sin \beta = 1/2(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \cos \beta = 1/2(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = 1/2(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

Например,

$$\begin{aligned} \int \sin(\alpha x) \cos(\beta x) dx &= \frac{1}{2} \int \sin((\alpha + \beta)x) dx + \frac{1}{2} \int \sin((\alpha - \beta)x) dx = \\ &= \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \int \sin((\alpha + \beta)x) d((\alpha + \beta)x) + \\ &+ \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \int \sin((\alpha - \beta)x) d((\alpha - \beta)x) = \\ &= -\frac{1}{2(\alpha + \beta)} \cos((\alpha + \beta)x) - \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \cos((\alpha - \beta)x) + C. \end{aligned}$$

Иногда удобно использовать формулу $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \\ &= \left| t = \sin x \right| = \int \frac{dt}{1 - t^2} + \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| - \frac{1}{t} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) - \frac{1}{\sin x} + C. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \tag{6.1}$$

с рациональной функцией R .

При любой функции R такой интеграл сводится к интегралу от рациональной функции (см. пп. 4, 5) с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Пример 23.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3+2\sin x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{4t}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{3t^2+4t+3} = \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{dt}{(t+2/3)^2+5/9} = \frac{6}{5} \int \frac{dt}{\left(\frac{3t+2}{\sqrt{5}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t+2}{\sqrt{5}} + C = \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

В некоторых случаях процедуру сведения интеграла (6.1) к интегралу от рациональной функции можно упростить. Рассмотрим эти случаи.

1. Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то удобнее воспользоваться подстановкой

$$t = \cos x, \quad dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

2. При условии $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, проще всего использовать замену

$$t = \sin x, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

3. В случае $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, поможет подстановка

$$t = \operatorname{tg} x, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 24.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x} dx &= \left| \operatorname{tg} x = t, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2t}{1+t^2}, \right. \\ \sin x &= \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}} \operatorname{tg} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \Big| = \end{aligned}$$

$$= \int \left(\frac{2t}{1+t^2} \frac{dt}{1+t^2} \right) : \left(\frac{t^2}{1+t^2} \frac{1}{(1+t^2)^2} \right) = 2 \int \frac{1+t^2}{t} dt.$$

$$2 \int \frac{dt}{t} + 2 \int t dt = 2 \ln |t| + t^2 + C = 2 \ln |\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg}^2 x + C.$$

Упражнение 8. Вычислить интегралы

$$\int \cos^3 x dx; \quad \int \sin^2 x dx; \quad \int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}.$$

Наряду с тригонометрическими функциями часто применяются гиперболические тригонометрические функции. Их применение при решении интегралов аналогично изложенному выше материалу. Приведем основные формулы.

1. Основное гиперболическое тождество: $ch^2 x - sh^2 x = 1$;
2. $1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}$; $cth^2 x - 1 = \frac{1}{sh^2 x}$, ($x \neq 0$);
3. Формулы понижения степени:
 $ch^2 x = \frac{ch 2x + 1}{2}$, $sh^2 x = \frac{ch 2x - 1}{2}$;
4. Формулы двойного аргумента:
 $sh 2x = 2 sh x \cdot ch x$, $ch 2x = ch^2 x + sh^2 x$.

В частности, интеграл вида

$$\int R(sh x, ch x) dx$$

можно рационализировать посредством подстановки $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$, при этом

$$sh x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad ch x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

2.7. Интегрирование иррациональных функций

Если подынтегральная функция содержит радикалы вида $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, то часто бывает полезно сделать одну из следующих замен:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \left| x = a \sin t, \quad dx = a \cos t dt \right| = a \cos t,$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \left| x = a \cos t, \quad dx = -a \sin t dt \right| = a \sin t,$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \left| x = \frac{a}{\cos t}, \quad dx = a \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt \right| = a \operatorname{tg} t$$

или

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - a^2} &= \left| x = a \operatorname{ch} t, \quad dx = a \operatorname{sh} t dt \right| = a \operatorname{sh} t, \\ \sqrt{x^2 + a^2} &= \left| x = a \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt \right| = \frac{a}{\cos t}, \\ \sqrt{x^2 + a^2} &= \left| x = a \operatorname{sh} t, \quad dx = a \operatorname{ch} t dt \right| = a \operatorname{ch} t.\end{aligned}$$

В следующем интеграле воспользуемся последней из замен.

Пример 25.

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{2}{\operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch} t} \operatorname{ch} t dt = 2 \int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -2 \operatorname{cth} t + C = \\ &= -2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.\end{aligned}$$

Иногда могут помочь тригонометрические или гиперболические подстановки другого вида:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx &= \left| x-a = (b-a) \sin^2 t, \quad dx = 2(b-a) \sin t \cos t dt \right| \\ &= \int 2(b-a) \sqrt{(b-a)^2 \sin^2 t \cos^2 t} \sin t \cos t dt = \frac{1}{2} \int (b-a)^2 \sin^2 2t dt = \\ &= \frac{(b-a)^2}{4} \int (1 - \cos 4t) dt = \frac{(b-a)^2}{16} (4t - \sin 4t) dt = \\ &= \frac{(b-a)^2}{16} \left(4 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} - 4 \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}(b+a-2x)}{(b-a)^2} \right) + C = \\ &= \frac{(b-a)^2}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} - \frac{1}{4} (b+a-2x) \sqrt{(x-a)(b-x)} + C.\end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int \frac{R_l(x)}{Q_n(x) \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad (7.1).$$

Выделим из рациональной функции целую часть

$$\frac{R_l(x)}{Q_n(x)} = S_{l-n}(x) + \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

и разложим правильную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ на сумму простейших дробей. После этого задача о нахождении интеграла (7.1) сведется к нахождению интегралов

$$1) \int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (7.2)$$

$$2) \int \frac{dx}{(x - \alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (7.3)$$

$$3) \int \frac{(Ax + B)dx}{(x^2 + px + q)^l \sqrt{ax^2 + bx + c}}. \quad (7.4)$$

Интеграл (7.2) считается с помощью формулы

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Чтобы найти коэффициенты многочлена Q_{n-1} степени $n - 1$ и число λ , надо продифференцировать эту формулу.

Пример 26.

$$I = \int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx = (Ax^2 + Bx + C) \sqrt{x^2 + 4x + 3} + \\ + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}.$$

После дифференцирования получим

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \\ = \frac{(2Ax + B)(x^2 + 4x + 3) + (Ax^2 + Bx + C)(x + 2) + \lambda}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}.$$

Приравняем коэффициенты

$$3A = 1, \quad 10A + 2B = -6, \quad 6A + 6B + C = 11, \quad 3B + 2C + \lambda = -6.$$

Отсюда

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{14}{3}, \quad C = 37, \quad \lambda = -66.$$

$$I = \left(\frac{1}{3}x^2 - 4\frac{2}{3}x + 37 \right) \sqrt{x^2 + 4x + 3} - 66 \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 2)^2 - 1}} = \\ = \left(\frac{1}{3}x^2 - 4\frac{2}{3}x + 37 \right) \sqrt{x^2 + 4x + 3} - 66 \ln |x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}| + C.$$

Посчитаем теперь интеграл (7.3) с помощью замены $x - \alpha = t^{-1}$. Получим

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{(x - \alpha)^l \sqrt{ax^2 + bx + c}} = \\
&= \int \frac{dx}{(x - \alpha)^l \sqrt{a(x - \alpha)^2 + (b + 2a\alpha)(x - \alpha) + c + a\alpha^2 + b\alpha}} = \\
&= \int \frac{dx}{(x - \alpha)^l \sqrt{a(x - \alpha)^2 + b_1(x - \alpha) + c_1}} = \\
&= \int \frac{dx}{(x - \alpha)^{l+1} \sqrt{a + \frac{b_1}{x - \alpha} + \frac{c_1}{(x - \alpha)^2}}} = \\
&= \left| x - \alpha = t^{-1}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2} \right| = - \int \frac{t^{l-1} dt}{\sqrt{a + b_1 t + c_1 t^2}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, интеграл сведен к предыдущему (7.2).

Осталось рассмотреть интеграл (7.4). В случае $p = b/a$ делаем замену $x = t - p/2$. Когда $p \neq b/a$, нужна замена $x = \frac{\alpha t + \beta}{t + 1}$, при этом α и β подбираются такими, чтобы в трехчленах не осталось членов с первой степенью. Для этого надо решить относительно α и β уравнения

$$2\alpha\beta + p(\alpha + \beta) + 2q = 0, \quad 2a\alpha\beta + b(\alpha + \beta) + 2c = 0. \quad (7.5)$$

После замены получим интегралы

$$A \int \frac{tdt}{(t^2 + \gamma)^l \sqrt{\delta t^2 + \varepsilon}} + B \int \frac{dt}{(t^2 + \gamma)^l \sqrt{\delta t^2 + \varepsilon}}.$$

В первом из них применяем подстановку $u = \sqrt{\delta t^2 + \varepsilon}$, во втором – подстановку $v = (\sqrt{\delta t^2 + \varepsilon})'$.

Рассмотрим соответствующие примеры. Первый случай ($p = b/a$):

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{(x + 1)dx}{(4 - 2x + x^2)\sqrt{2 + 2x - x^2}} = \left| x = t + 1 \right| = \int \frac{(t + 2)dt}{(t^2 + 3)\sqrt{3 - t^2}} = \\
&= \left| \sqrt{3 - t^2} = u, \quad tdt = -udu, \quad (\sqrt{3 - t^2})' = v, \quad t = \frac{\sqrt{3}v}{\sqrt{1 + v^2}} \right| = \\
&= - \int \frac{udu}{u(6 - u^2)} + 2 \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{(1 + v^2)^{3/2}} dv}{\frac{3 + 6v^2}{1 + v^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 + v^2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6} + u}{\sqrt{6} - u} \right| + \frac{2}{3} \int \frac{dv}{1 + 2v^2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2 + 2x - x^2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2 + 2x - x^2}} \right| + \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}v) + C = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2 + 2x - x^2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2 + 2x - x^2}} \right| + \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}x}{\sqrt{2 + 2x - x^2}} \right) + C.
\end{aligned}$$

Случай второй ($p \neq b/a$):

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Решаем систему (7.5)

$$2\alpha\beta - \alpha - \beta + 2 = 0, \quad 2\alpha\beta + \alpha + \beta + 2 = 0.$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1.$$

Делаем замену

$$x = \frac{t-1}{t+1}, \quad dx = \frac{2dt}{(t+1)^2}.$$

$$I = \int \frac{2(t+1)dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}.$$

Дальше интеграл считается совершенно аналогично предыдущему.

Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx, \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac \neq 0,$$

где $R(\cdot, \cdot)$ – рациональная функция, можно свести к интегралам от рациональных функций посредством одной из *подстановок Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{a}x, \quad a > 0,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm tx \pm \sqrt{c}, \quad c > 0,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - x_1), \quad b^2 - 4ac > 0,$$

где x_1 – один из корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Пример 27.

$$I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \left| \sqrt{x^2 + x + 1} = tx + 1, \quad x = \frac{2t-1}{1-t^2}, \right.$$

$$dx = \frac{2 - 2t + 2t^2}{(1 - t^2)^2} dt \Big| = \int \frac{\frac{2-2t+2t^2}{(1-t^2)^2} dt}{\frac{2t-1}{1-t^2} + \frac{2t^2-t}{1-t^2} + 1} =$$

$$= \int \frac{2 - 2t + 2t^2}{(1 - t^2)(t^2 + t)} dt.$$

$$\frac{2 - 2t + 2t^2}{(1 - t^2)(t^2 + t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1 - t} + \frac{C}{1 + t} + \frac{D}{(1 + t)^2}.$$

$$2 - 2t + 2t^2 = A(1 - t^2)(1 + t) + Bt(1 + t)^2 + Ct(1 - t^2) + Dt(1 - t).$$

$$-A + B - C = 0, \quad -A + 2B - D = 2, \quad A + B + C + D = -2, \quad A = 2.$$

$$B = 1/2, \quad C = -3/2, \quad D = -3.$$

$$I = 2 \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1 - t} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{1 + t} - 3 \int \frac{dt}{(1 + t)^2} =$$

$$= 2 \ln |t| - \frac{1}{2} \ln |1 - t| - \frac{3}{2} \ln |1 + t| + \frac{3}{1 + t} + C =$$

$$= 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x} \right| -$$

$$- \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x} \right| + \frac{3x}{x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}} + C.$$

Интеграл вида

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx, \quad (7.6)$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$, причем $a, b, n, p \neq 0$, называют *интегралом от дифференциального бинома*. Интеграл (7.6) сводится к интегралу от рациональной функции в следующих трех случаях:

- а) $p \in \mathbb{Z}$ – подстановкой $x = t^q$, где q – общий знаменатель m, n ;
- б) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ – подстановкой $ax^n + b = t^q$, где q – знаменатель p ;
- с) $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ – подстановкой $a + bx^{-n} = t^q$, где q – знаменатель p .

Рассмотрим пример.

Пример 28.

$$I = \int \sqrt[3]{3x - x^3} dx.$$

Здесь

$$m = p = 1/3, \quad n = 2, \quad a = -1, \quad b = 3, \quad p + \frac{m+1}{n} = 1.$$

Делаем замену

$$3 - \frac{1}{x^2} = t^3, \quad dx = \frac{3t^2 dt}{2(3 - t^3)^{3/2}}, \quad \sqrt[3]{3x - x^3} = \frac{\sqrt[3]{8 - 3t^3}}{\sqrt{3 - t^3}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt[3]{8 - 3t^3}}{\sqrt{3 - t^3}} \cdot \frac{3t^2 dt}{2(3 - t^3)^{3/2}} = \left| t^3 = u \right| = \int \frac{\sqrt[3]{8 - 3u}}{2(3 - u)^2} du = \\ &= \left| 8 - 3u = v^3, \quad du = -v^2 dv \right| = \\ &= -\frac{9}{2} \int \frac{v^3 dv}{(v^3 + 1)^2} = -\frac{9}{2} \int \frac{v^3 dv}{(v + 1)^2(v^2 - v + 1)^2}. \end{aligned}$$

Дальше интеграл считается уже изложенными методами.

Упражнение 9. Применяя различные методы, изложенные выше, найти интегралы

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x\sqrt{x^2 - x + 1}}; \quad \int \frac{dx}{x^2(2 + x^3)^{5/3}}.$$

2.8. Вычисление определенных интегралов

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда формула интегрирования по частям для определенных интегралов приобретает вид

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Пример 29.

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{3 \operatorname{arctg} \sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x - x) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Тогда имеет место *формула замены переменной*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 30.

$$\begin{aligned} \int_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} &= \left| x+1 = t^{-1} \right| = - \int_1^{4/7} \frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{4/7}^1 \frac{dt}{\sqrt{(t-1/2)^2 + 1/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t + \frac{1}{2}} \right| \Big|_{4/7}^1 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \frac{1+\sqrt{2}}{2} - \ln \frac{1+5\sqrt{2}}{14} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{7(1+\sqrt{2})}{1+5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9+4\sqrt{2}}{7}. \end{aligned}$$

Пример 31.

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx &= \left| \sqrt{e^x - 1} = y, \quad x = \ln(1+y^2), \quad dx = \frac{2ydy}{1+y^2} \right| = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{y^2 dy}{1+y^2} = 2(y - \operatorname{arctg} y) \Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Пример 32.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \left| \arcsin \sqrt{x} = y, \quad x = \sin^2 y \right| = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2y \sin y \cos y dy}{\sin y \cos y} = y^2 \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Пример 33.

$$\begin{aligned} I &= \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2} = \\ &= \int_3^4 \frac{dx}{(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \ln \left| \frac{(x - \frac{3}{2}) - \frac{1}{4}}{(x - \frac{3}{2}) + \frac{1}{4}} \right|_3^4 = \ln \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Упражнение 10. *Посчитать интегралы*

$$\int_1^{\ln 2} x^3 e^{-x/3} dx; \quad \int_0^{\pi} x \sin x \cos x dx; \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x}{\sin^2 x}.$$

3. Вычисление площадей

В этой главе приведены примеры вычисления площадей для областей ограниченных функциями в декартовых, полярных координатах, а также заданных параметрически.

3.1. Площадь фигуры в декартовых координатах

Рассмотрим область, которая может быть описана как множество

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y(x) \leq y_2(x)\}.$$

Такую область будем называть элементарной относительно оси OX . Тогда площадь фигуры Ω может быть найдена по формуле

$$S = S(\Omega) = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

Пример 34. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 e^{-x}$, $y = 0$, $x = 2$.



$$S = S(\Omega) = \int_0^2 x^2 e^{-x} dx =$$

Для подсчета интеграла используем формулу интегрирования по частям

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x^2; & dv = e^{-x} dx \\ du = 2x dx; & v = -e^{-x} \end{array} \right| =$$

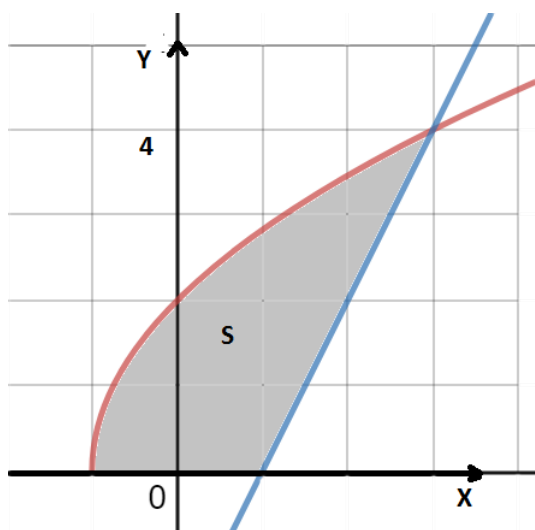
$$= -x^2 e^{-x} \Big|_0^2 + 2 \int_0^2 x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x; & dv = e^{-x} dx \\ du = dx; & v = -e^{-x} \end{array} \right| =$$

$$= -x^2 e^{-x} \Big|_0^2 - 2x e^{-x} \Big|_0^2 + 2 \int_0^2 e^{-x} dx = -10e^{-2} + 2.$$

В элементарной области относительно оси OY $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} : c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x(y) \leq x_2(y)\}$ площадь фигуры

$$S = S(\Omega) = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y)) dy.$$

Пример 35. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y^2 = 4x + 4$, $y \geq 0$, $y = 2x - 2$.



Изобразим заданную область. Учитывая формулу выше, необходимо выразить x как функцию от переменной y : $x = (y^2 - 4)/4$, $x = (y + 2)/2$. Для определения границ переменной y найдем точку пересечения графиков:

$$(y^2 - 4)/4 = (y + 2)/2;$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0;$$

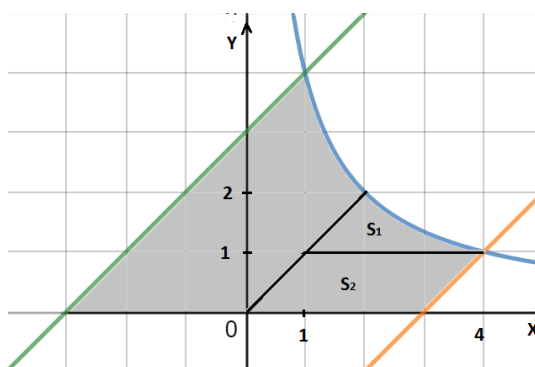
$$y_1 = -2; \quad y_2 = 4.$$

С учетом условия $y \geq 0$ площадь найдем с помощью интеграла

$$S = S(\Omega) = \int_0^4 (y^2 - 2y - 8) dy = \left(\frac{y^3}{3} - y^2 - 8y \right) \Big|_0^4 = 5\frac{1}{3}.$$

Теперь рассмотрим неэлементарную область.

Пример 36. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 4/x$, $y = x + 3$, $y = x - 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.



Разобьем заданную область на несколько элементарных областей. Сделать это можно несколькими способами, выберем наиболее рациональный. Проведем прямые $y = x$ (область симметрична относительно данной прямой) и прямую $y = a$, где a — ордината точки пересечения графиков $y = 4/x$, $y = x - 3$.

$$4/x = x - 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 4.$$

Соответственно $a = 1$ и половину искомой площади найдем как сумму площадей S_1 и S_2 .

$$S_1 = \int_0^1 (y - y - 3) dy = 3; \quad S_2 = \int_1^4 (4/y - y) dy = (4 \ln y - y^2/2) \Big|_1^4 = 4 \ln 4 - 7,5.$$

Ответ $S = 8 \ln 4 - 21$.

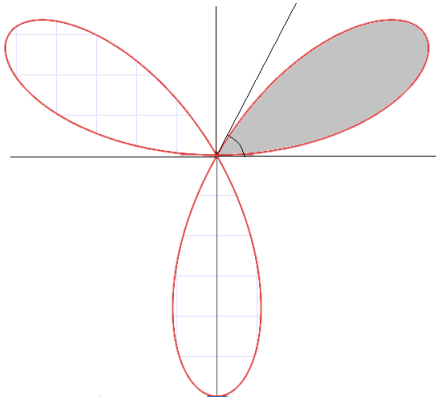
3.2. Площадь фигуры в полярной системе координат

Площадь криволинейного сектора, ограниченного на плоскости кривыми $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$ ($0 \leq r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$) и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)) d\varphi.$$

Пример 37. Найти площадь фигуры, ограниченной трилистником

$$r = a \sin 3\varphi \quad (a > 0).$$



Период данной функции $2\pi/3$. Таким образом, найдем площадь для $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi/3$.

$$\begin{aligned} S/3 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} a^2 \sin^2 3\varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} a^2 \int_0^{\pi/3} (1 - \cos 6\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{4} \left(\varphi - \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right) \Big|_0^{\pi/3} = \frac{a^2}{12} \pi. \end{aligned}$$

3.3. Площадь для неявно заданной функции

Будем рассматривать функцию, заданную выражением $F(x, y) = 0$.

а) В некоторых случаях можно выразить явно одну из переменных и разбить полученную область на подобласти, ограниченные биективными (однозначными) функциями.

Пример 38. Найдём площадь части круга $x^2 + y^2 = 4$ (с центром в точке $(0, 0)$ радиуса 2) в первой четверти ($x > 0, y > 0$).

Из уравнения окружности $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$, условию $x > 0, y > 0$ удовлетворяет функция $y = \sqrt{4 - x^2}$. Таким образом, площадь может быть вычислена с помощью интеграла

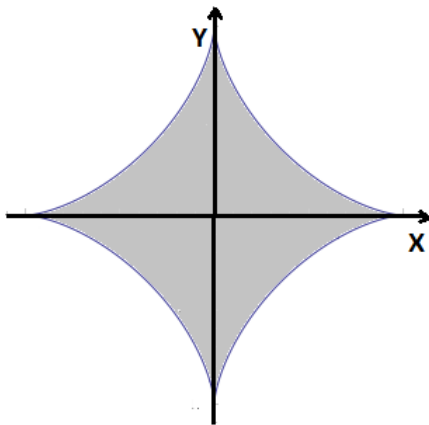
$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \left| x = 2 \sin t, 0 < t < \pi/2 \right| = \int_0^{\pi/2} 2 \cos t \sqrt{4 - \sin^2 t} dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = 2(t - (\sin 2t)/2) \Big|_0^{\pi/2} = \pi. \end{aligned}$$

б) Случай замкнутой кривой. Пусть $x = x(t), y = y(t), t \in [T_0, T]$, есть параметрические уравнения непрерывной или кусочно-гладкой простой замкнутой кривой L , пробегаемой против хода часовой стрелки и ограничивающей слева от себя фигуру площади S . Тогда

$$S = \frac{1}{2} \int_{T_0}^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt.$$

Пример 39. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$



Воспользуемся параметрическими уравнениями астроиды

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Тогда

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t,$$

$$y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t.$$

По формуле вычисления площади для параметрически заданной функции получим

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t + 3a \cos^2 t \sin t \cdot a \sin^3 t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8}a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \\
&= \frac{3}{16}a^2 \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{8}a^2 \pi.
\end{aligned}$$

Упражнение 11. Выполните задания на нахождение площади.

1. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = 4x - x^2$ и осью абсцисс.
2. Найти площадь, ограниченную кривой $y = x(x-1)(x-2)$ и осью OX .
3. Вычислить площадь, заключенную между параболой $y = x^2$, $y = x^2/2$ и прямой $y = 2x$.
4. С помощью перехода к полярным координатам в обобщенном виде найти площадь, ограниченную астроидой

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

5. Найти площадь, ограниченную одной ветвью трохойды

$$x = at - b \sin t; \quad y = a - b \cos t.$$

4. Несобственные интегралы

Часто в приложениях возникает необходимость рассмотреть интеграл по бесконечному промежутку или интеграл от функции имеющей разрыв на промежутке интегрирования. Такие интегралы относятся к несобственным интегралам. Кроме подсчета несобственного интеграла, его также можно исследовать на сходимость, т.е. установить принимает ли интеграл конечное значения не вычисляя его. В данной главе приводятся методы подсчета несобственных интегралов и наиболее часто встречающиеся признаки сходимости.

4.1. Признаки сравнения

Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ при любом $b > a$. Следующий предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (9.1)$$

называется *несобственным интегралом первого рода* от функции $f(x)$ на множестве $[a, +\infty)$.

Если функция не ограничена в окрестности точки b и интегрируема на любом отрезке $[a, b - \varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < b - a$, то *несобственным интегралом второго рода* с особенностью в точке b от функции $f(x)$ на множестве $[a, b)$ называется предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (9.2)$$

В отличие от определенных выше, интеграл Римана в смысле предыдущего параграфа называется *собственным*.

Если конечные пределы (9.1) или (9.2) существуют, то соответствующий интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Пример 40.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$$

Посчитаем сначала первообразную.

$$\begin{aligned} \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\ln x d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2} \int \ln x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{x^2(1+x^2)} = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \int \frac{dx^2}{x^2(1+x^2)} = \\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I &= \left(-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \right) \Big|_0^{+\infty} = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln b}{2(1+b^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{b^2}{1+b^2} \right) - \\ &\quad - \lim_{a \rightarrow 0+} \left(-\frac{\ln a}{2(1+a^2)} + \frac{1}{4} \ln a^2 - \frac{1}{4} \ln(1+a^2) \right) = \\ &= 0 - \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{1}{2} \ln a \left(1 - \frac{1}{1+a^2} \right) = - \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{a^2 \ln a}{2(1+a^2)} = 0. \\ \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} &= \left| \sqrt{1-x} = y, \quad x = 1-y^2 \right|_1^0 = \int_1^0 \frac{-2y dy}{(1+y^2)y} = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = 2 \operatorname{arctg} y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Последний из посчитанных интегралов изначально был несобственным второго рода, но после замены получился собственный интеграл.

$$\int_0^1 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_0^1 = -1 - \lim_{a \rightarrow 0+} (a \ln a - a) = -1.$$

Интеграл (9.1) или (9.2) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится соответствующий интеграл от $|f(x)|$. Из абсолютной сходимости следует сходимость несобственного интеграла.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную особенность в точке b , $b \leq +\infty$, и выполняются неравенства $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in (a, b)$. Тогда из сходимости несобственного интеграла $I_2 = \int_a^b g(x)dx$ следует сходимость $I_1 = \int_a^b f(x)dx$, а из расходимости I_1 – расходимость I_2 . (Это утверждение называется *первым признаком сходимости* несобственных интегралов.) Если же для этих функций к тому же существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

(другими словами, функции $f(x)$ и $Ag(x)$ эквивалентны $f \sim Ag$), то интегралы I_1 и I_2 сходятся или расходятся одновременно. (*Второй признак сходимости* несобственных интегралов.)

Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (9.3)$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. Интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \quad (9.4)$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Пример 41.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1} = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}.$$

Знаменатель подынтегральной функции вещественных корней не имеет, поэтому ее особенность – только $+\infty$, а первое из слагаемых в правой части равенства – собственный интеграл. На бесконечности $x^4 - x^2 + 1 \sim x^4$, поэтому рассмотрим

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Он сходится, так как $2 > 1$ (см. (9.3)). Следовательно, и наш интеграл сходится.

Пример 42.

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\ln x} = - \int_0^1 \frac{dx}{-\ln x} + \int_1^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

Признаки сравнения сформулированы для неотрицательных функций, поэтому мы разбили промежуток интегрирования на два промежутка, на которых подынтегральная функция сохраняет знак. Исследуем получившиеся два интеграла отдельно.

$$\int_0^1 \frac{dx}{-\ln x} = \left| \frac{1}{x} = y \right| = \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2 \ln y} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2}.$$

Последний интеграл сходится, значит, наш интеграл на интервале $(0, 1)$ тоже сходится.

Пример 43.

$$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x} = \left| x = 1 + y \right| = \int_0^1 \frac{dy}{\ln(1+y)} \sim \int_0^1 \frac{dy}{y}.$$

Интеграл расходится (см. (9.4)). Здесь мы учли, что единственная особенность у интеграла после замены – в нуле, и использовали эквивалентность $y \sim \ln(1+y)$ при $y \rightarrow 0$. Таким образом, наш исходный интеграл расходится.

Пример 44.

$$I = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Начнем со второго из интегралов. Так как для достаточно большого A при $x > A$ $e^{-x} \leq x^{-p-1}$, то

$$\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \leq \int_1^A x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Первое слагаемое – собственный интеграл, второе – сходящийся несобственный. Их сумма – сходящийся интеграл.

При $x \in (0, 1)$ $e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$, поэтому сходимость интеграла $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$ равносильна сходимости интеграла $\int_0^1 x^{p-1} dx$. Согласно (9.4), он сходится только при $1 - p < 1$. Значит, наш исходный интеграл от нуля до бесконечности сходится при $p > 0$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx = \int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx.$$

На бесконечности $\frac{x^m}{1+x^n} \sim \frac{1}{x^{n-m}}$, поэтому интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ сходится при $n > m+1$. При $x \rightarrow 0$ $\frac{x^m}{1+x^n} \sim x^m$ и интеграл сходится при $m > -1$. Весь интеграл поэтому сходится при выполнении условий $m > -1$, $n > m+1$.

Пример 45.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx.$$

В окрестности нуля $\frac{\ln(1+x)}{x^n} \sim x^{1-n}$, поэтому первый из интегралов сходится при $n < 2$. Для любого α при достаточно больших x $\ln(1+x) \leq x^\alpha$. Значит, при $n > 1$ $\ln(1+x) \leq x^{\frac{n-1}{2}}$ и $\frac{\ln(1+x)}{x^n} \leq \frac{1}{x^{\frac{n+1}{2}}}$. Интеграл от 1 до $+\infty$ сходится, так как $\frac{n+1}{2} > 1$. При $n \leq 1$ $\frac{\ln(1+x)}{x^n} \geq \frac{1}{x^n}$ и поэтому интеграл расходится, согласно (9.4). Исходный интеграл I от нуля до бесконечности сходится при $n \in (1, 2)$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^n} dx \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx.$$

Поэтому интеграл сходится при $n > 1$. Единственная особенность — на бесконечности. При $n \leq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^n} dx \geq \frac{\pi}{4} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}.$$

Последний из интегралов расходится, поэтому при соответствующих n расходится исходный интеграл.

Пример 46.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}.$$

У первого из слагаемых особенность в нуле. При $x \rightarrow 0$ $\sin^p x \cos^q x \sim x^p$. Поэтому соответствующий интеграл сходится при $p < 1$. Рассмотрим второй интеграл. У него особенность в точке $\pi/2$. Сделаем замену.

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \left\| x = \frac{\pi}{2} - y \right\| = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^p x \sin^q x}.$$

Значит, интеграл сходится при $q < 1$. Весь интеграл I сходится при $p, q < 1$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x^2 + 1}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}\sqrt{1 + x^{-2}}} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}.$$

Оба слагаемых сходятся.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln x}{1 - x^2} dx &= \left| 1/x = y \right| = \int_{+\infty}^1 \frac{-\ln y \frac{-dy}{y^2}}{1 - \frac{1}{y^2}} = - \int_1^{+\infty} \frac{\ln y dy}{y^2 - 1} = \\ &= \left| y - 1 = z \right| = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + z) dz}{z^2 + 2z} = \int_0^1 \frac{\ln(1 + z) dz}{z^2 + 2z} + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1 + z) dz}{z^2 + 2z} \sim \\ &\sim \int_0^1 \frac{z dz}{2z} + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1 + z) dz}{z^2 + 2z}. \end{aligned}$$

Первый из интегралов сходится. Вторым оценим сверху:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1 + z) dz}{z^2 + 2z} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{z} dz}{z^2}.$$

Согласно (9.3), интеграл сходится. Исходный интеграл также сходится.

Упражнение 12. Вычислить интегралы.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}; \int_1^\infty \frac{dx}{x^p}; \int_0^\infty \sin x dx.$$

Упражнение 13. Исследовать на сходимость интегралы.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{x^4 + 1}}; \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}.$$

4.2. Признак Абеля-Дирихле

Все сформулированные до сих пор признаки касаются абсолютной сходимости, так как они справедливы для неотрицательных функций, в частности для $|f(x)|$. Если интеграл от a до $b \leq +\infty$ сходится, но не абсолютно, то мы будем называть его *условно сходящимся*.

Сформулируем *признак Абеля-Дирихле* условной сходимости: Пусть функция $f(x)$ имеет ограниченную при $x > a$ первообразную, а функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Пример 47. Исследуем интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

на абсолютную и условную сходимость. Так как при $x \rightarrow 0$ $\frac{\sin x}{x} \sim 1$, то единственная особенность интеграла на бесконечности. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

сходится по признаку Абеля-Дирихле, так как $1/x$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$, а первообразная функции $\sin x$ — это $-\cos x$, ограниченная функция. Проверим наличие абсолютной сходимости.

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

Первый из интегралов в правой части равенства, очевидно, расходится, второй – сходится по признаку Абеля-Дирихле, так как первообразная функции $\cos 2x$, функция $\frac{1}{2} \sin 2x$, ограничена на всей числовой прямой. Поэтому разность интегралов расходится. Значит, по первому признаку сравнения, исходный интеграл не является абсолютно сходящимся.

Пример 48.

$$\int_0^{\pi/2} \sin \left(\frac{1}{\sin x} \right) dx = \left| \frac{1}{\sin x} = y, \quad x = \arcsin \frac{1}{y}, \quad dx = \frac{-dy}{y\sqrt{y^2-1}} \right| =$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin y dy}{y\sqrt{y^2-1}}.$$

Исследуем последний из интегралов на абсолютную сходимость.

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin y| dy}{y\sqrt{y^2-1}} \leq \int_1^2 \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} + \int_2^{+\infty} \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}.$$

Во втором интеграле при $y \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{y\sqrt{y^2-1}} \sim y^{-2}$, поэтому он сходится. В первом интеграле сделаем замену

$$\int_1^2 \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} = \left| y-1 = z \right| = \int_0^1 \frac{dz}{(z+1)\sqrt{z(z+2)}}.$$

При $z \rightarrow 0$ $\frac{1}{(z+1)\sqrt{z(z+2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2z}}$ и, согласно (9.4), последний интеграл сходится. Значит, исходный интеграл сходится абсолютно.

Пример 49.

$$\int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx = \int_0^2 x^2 \cos(e^x) dx + \int_2^{+\infty} \frac{x^2}{e^x} \cos(e^x) dx.$$

Первый интеграл абсолютно сходится, так как

$$\int_0^2 x^2 |\cos(e^x)| dx \leq \int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}.$$

Во втором интеграле функция $x^2 e^{-x}$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. А первообразная функции $e^x \cos(e^x)$ есть функция $\sin(e^x)$. Она ограничена по модулю единицей. По признаку Абеля-Дирихле второй интеграл сходится. Проверим его на абсолютную сходимость:

$$\int_2^{+\infty} x^2 |\cos(e^x)| dx \geq \int_2^{+\infty} x^2 \cos^2(e^x) dx = \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} x^2 dx - \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} x^2 \cos(2e^x) dx.$$

Первый из интегралов расходится, а второй сходится опять же по признаку Абеля-Дирихле. Значит, их разность расходится, поэтому исходный интеграл $\int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx$ не является абсолютно сходящимся.

4.3. Главное значение в смысле Коши

Пусть при любом $\varepsilon > 0$ существуют собственные интегралы

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx, \quad \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx, \quad c \in (a, b).$$

Тогда интегралом в смысле главного значения по Коши называется число

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

Аналогично, при условии, что функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[-a, a]$, $a > 0$, определим

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx.$$

Пример 50.

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} &= \text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int_{1+\varepsilon}^{3/2} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left(\int_{3/2}^{2-\delta} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int_{2+\delta}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} \right) = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Big|_0^{1-\varepsilon} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Big|_{1+\varepsilon}^{3/2} \right) + \\
& + \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left(\ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Big|_{3/2}^{2-\delta} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Big|_{2+\delta}^{+\infty} \right) = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\ln \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} - \ln 2 - \ln \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right) + \\
& + \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left(\ln \frac{\delta}{1-\delta} - \ln \frac{\delta}{1+\delta} + \lim_{a \rightarrow +\infty} \ln \frac{a-2}{a-1} \right) = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln \frac{1+\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} + \lim_{\delta \rightarrow 0+} \ln \frac{1+\delta}{1-\delta} = -\ln 2. \\
\\
\text{v.p.} \int_{1/2}^2 \frac{dx}{x \ln x} & = \text{v.p.} \int_{1/2}^2 \frac{d \ln x}{\ln x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\ln |\ln x| \Big|_{1/2}^{1-\varepsilon} + \ln |\ln x| \Big|_{1+\varepsilon}^2 \right) = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\ln |\ln(1-\varepsilon)| - \ln \ln 2 + \ln \ln 2 - \ln \ln(1+\varepsilon)) = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln \frac{(-\ln(1-\varepsilon))}{\ln(1+\varepsilon)} = 0. \\
\\
\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx & = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\text{arctg } x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) \Big|_{-a}^a = \\
& = 2 \lim_{a \rightarrow +\infty} \text{arctg } a = \pi.
\end{aligned}$$

Список литературы

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Санкт-Петербург: МИФРИЛ, 1995.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1977.
3. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. М.: МГУ, 1988.
4. Зорич В.А. Математический анализ. Т.1. М.: Наука, 1981.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: Высш. шк., 1988.
6. Садовничая И.В., Хорошилова Е.В. Определенный интеграл. Теория и практика вычислений. М.: ВМиК МГУ, МАКС Пресс, 2008.
7. Интеграл и его приложения Учеб. для строит. специальностей вузов Л. И. Лесняк, В. А. Старенченко; Томск. гос. архитектур.-строит. ун-т. Томск Издательство научно-технической литературы, 2003.
8. Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. Математический анализ. Часть I.: Учеб. пособие. Челябинск, 1999.
8. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.

Определенный интеграл. Методы решения

Учебное пособие

Составители:

Марина Васильевна Плеханова,
Владимир Евгеньевич Федоров.

Техн. редактор ...

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета
(Научно-исследовательский университет)

Подписано в печать ...2018.

Формат 60x84 1/16. Бумага типографская №2.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 1,6.

Тираж 50 экз. Заказ 55

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ(НИУ).
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76. 576.