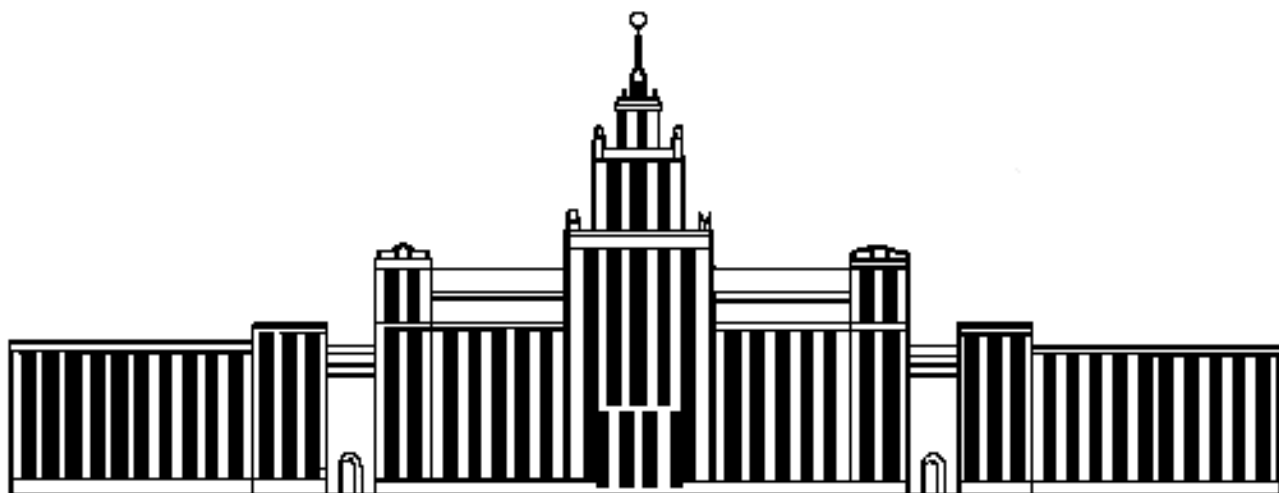


---

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---



---

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

517(07)  
3-259

**В.И. Заляпин, А.В. Кунгурцева, Т.Н. Хохлова**

# **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

**Часть II. Дифференцирование.  
Исследование функций**

**Сборник контрольных заданий**

---

Челябинск  
2015

---

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Южно-Уральский государственный университет  
Кафедра математического и функционального анализа

517(07)  
3 - 259

**В.И. Заляпин, А.В. Кунгурцева, Т.Н. Хохлова**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.  
Часть II. Дифференцирование.  
Исследование функций**

**Сборник контрольных заданий**

Челябинск  
Издательский центр ЮУрГУ  
2015

УДК 517.1(075.8)  
3-259

*Одобрено  
учебно-методической комиссией  
факультета математики, механики и компьютерных наук ЮУрГУ*

*Рецензенты:*  
В.И. Ухоботов, В.Е. Федоров

**Заляпин, В.И.**  
3-259      Математический анализ. Часть II. Дифференцирование.  
Исследование функций: Сборник контрольных заданий / В.И. Заляпин,  
А.В. Кунгурцева, Т.Н. Хохлова. – Челябинск: Издательский центр  
ЮУрГУ, 2015. – 44 с.

Сборник контрольных заданий предназначен студентам 1 курса факультета математики, механики и компьютерных наук, обучающимся по направлениям 01.03.01 - математика, 02.03.01 – математика и компьютерные науки, 01.03.02 – прикладная математика и информатика, 01.03.03 – механика и математическое моделирование, 01.03.04 – прикладная математика, изучающим курс математического анализа. Сборник содержит теоретические вопросы, задачи и упражнения для самостоятельной работы по разделам «Элементы дифференциального исчисления» и «Исследование функций и построение графиков», а также варианты индивидуальных заданий.

Задачи, сложность которых выше средней, помечены знаком \*.

УДК 517.1(075.8)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2015

## **Оглавление**

### **1. Теория**

1.1. Теоретические вопросы . . . . .	4
1.2. Теоретические упражнения . . . . .	5

<b>2. Индивидуальные задания . . . . .</b>	<b>8</b>
--	----------

# 1. Теория

## 1.1. Теоретические вопросы

### I. Производные и дифференциалы.

1. Средняя скорость изменения функции на отрезке. Мгновенная скорость изменения функции в точке. Производная функции в точке.
2. Теорема о приращении функции, имеющей производную.
3. Теорема о непрерывности функции, имеющей производную.
4. Касательная к графику функции в точке. Необходимое и достаточное условие существования касательной. Уравнение касательной.
5. Арифметические свойства производных: производная суммы, произведения, частного.
6. Производные основных элементарных функций (таблица производных).
7. Теорема о производной сложной функции.
8. Производная обратной функции.
9. Параметрически заданные функции. Теорема о существовании функции одной переменной, заданной параметрически. Производная функции, заданной параметрически. Касательная и нормаль к графику функции, заданной параметрически.
10. Теорема Ферма (необходимое условие экстремума).
11. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.
12. Правила Лопиталя-Бернулли раскрытия неопределенностей.
13. Дифференциал функции в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Дифференцируемость и линеаризация.
14. Дифференциал сложной функции. Инвариантность первого дифференциала.
15. Многочлен Тейлора (Маклорена). Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
16. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
17. Разложение по формуле Маклорена функций:  $\sin x$ ;  $\cos x$ ;  $e^x$ ;  $\operatorname{sh} x$ ;  $\operatorname{ch} x$ ;  $(1+x)^\alpha$ ;  $\ln(1+x)$ ;  $\operatorname{arctg} x$ .
18. Дифференциальная форма формулы Тейлора-Маклорена.

## II. Исследование функций и построение графиков

1. Поведение функции на границе области определения. Горизонтальные, вертикальные и наклонные асимптоты. Теорема о необходимом и достаточном условии существования асимптот.
2. Теорема о достаточном условии монотонности функции.
3. Теорема о достаточном условии экстремума в терминах первой производной.
4. Теорема о достаточном условии экстремума в терминах второй производной.
5. Выпуклые и вогнутые (выпуклые вверх) функции. Неравенство Йенсена). Лемма о графике выпуклой функции и хорде.
6. Необходимое и достаточное условие выпуклости функции, имеющей вторую производную.

### 1.2. Теоретические упражнения

1. Найдите производные приведенных ниже функций в точке  $x_0 = 0$  или докажите, что они не существуют:

$$\text{а) } y = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} e^{-1/x^3}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } y = [x], \quad y = \{x\}; \quad \text{г) }^{**} y = \begin{cases} 0, & x - \text{иррационально,} \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} - \text{несократимая} \\ & \text{дробь.} \end{cases}$$

2. Функции  $f(x)$  и  $q(x)$  дифференцируемы в точке  $x_0$ . Что можно сказать о дифференцируемости в этой точке функций:  $\varphi = f + q$ ,  $\varphi = fq$ ,  $\varphi = \frac{f}{q}$ ?
3. Функции  $f(x)$  и  $q(x)$  дифференцируемы в точке  $x_0$ . Что можно сказать о дифференцируемости в этой точке функций:  $\varphi = \max\left(f(x), q(x)\right)$ ,  $\varphi = |f|$ ,  $\varphi = \min(f, 1)$ ?
4. Следует ли из дифференцируемости квадрата функции дифференцируемость функции?
5. Следует ли из дифференцируемости куба функции дифференцируемость функции?

6. Пусть  $f(x)$  – монотонная дифференцируемая функция на некотором интервале. Будет ли дифференцируема обратная функция?
7. Показать, что производная дифференцируемой функции может не быть непрерывной функцией. Какого сорта разрывы у нее могут быть?

## 2. Индивидуальные задания

### Вариант № 1

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln \left( 1 + x^2 \sin \frac{1}{x} \right)}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}$ ;

б)  $y = x^{\operatorname{arcsin} x}$ ;

в)  $f(x) = \varphi(\operatorname{arcsin}(\psi))$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = t^4 + 1, \\ y(t) = t^3 + t \end{cases}$  в точке  $M(2, 2)$ ;

д)  $x^4 + x = y^5 + y^2$  в точке  $M(1, 1)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \sqrt[3]{x^2} - 20$  в точке с абсциссой  $x_0 = -8$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = x \ln |x + \sqrt{x^2 + 3}| - \sqrt{x^2 + 3}$ .

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{x^2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot e^{-x^2}$ .

6. Разложите функцию  $f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$  по формуле Маклорена до  $o(x^3)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1 + 3x + \frac{9}{2}x^2}}{x^3}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$  на отрезке  $[-1, 5]$ .
9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:  
 а)  $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ ; б)  $y = \ln \frac{x}{x + 2} + 1$ .

### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x \leq 1, \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$  будет:  
 а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;  
 б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;  
 в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$ ,  $x = 0,97$ .
3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = \frac{c}{\cos x}$  дифференциальному соотношению  $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0$ ?
4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = a^{3x}$ .
5. Докажите неравенство  $e^x \geq 1 + x$  при  $x \geq 0$ .
6. Определите отношение радиуса основания к высоте цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

### Вариант № 2

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin \left( e^{x^2 \sin \frac{5}{x}} - 1 \right) + x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = \frac{1}{2} \ln (e^{2x} + 1) - 2 \operatorname{arctg} e^x$ ;

б)  $y = (\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}$ ;

в)  $f(x) = \sqrt[n]{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;



$$\Gamma) \begin{cases} x(t) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, \\ y(t) = \sqrt{1 - \sqrt{t}} \end{cases} \quad \text{в точке } M(1, 1);$$

$$\Delta) y^3 - y = 6x^2 \text{ в точке } M(1, 2).$$

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 4$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + \operatorname{sh} x \cdot \ln \operatorname{sh} x$ .

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 3x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right).$$

6. Разложите функцию  $f(x) = e^{2x-x^2}$  по формуле Маклорена до  $o(x^3)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - e^x + x^2}{\ln(1+x) - \sin x}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = x - 4\sqrt{x} + 5$  на отрезке  $[1, 9]$ .

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

$$\text{а) } y = \frac{4 - x^3}{x^2}; \quad \text{б) } y = (x - 2)e^{3-x}.$$

### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha + \beta x^2, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

будет:

а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;

б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;

в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $x = 26, 46$ .

3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = -\frac{1}{3x + c}$  дифференциальному соотношению  $y' = 3y^2$ ?

4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \frac{x}{2(3x+2)}$ .
5. Докажите неравенство  $e^x \geq ex$  при  $x \in \mathbb{R}$ .
6. Через точку  $P\left(\frac{1}{2}, 2\right)$  провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.

## Вариант № 3

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{4}{3x} + \frac{x^2}{2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = \ln(e^x + 1) + \frac{18e^{2x} + 27e^x + 11}{6(e^x + 1)^3};$

б)  $y = x^{e^{\operatorname{tg} x}};$

в)  $f(x) = \operatorname{arctg} \left( \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \right)$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = \sin^2 t, \\ y(t) = \cos^2 t \end{cases}$  в точке  $M\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right);$

д)  $x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0$  в точке  $M(1, 3).$

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = 8\sqrt[4]{x} - 70$  в точке с абсциссой  $x_0 = 16$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \arccos \frac{x^2 - 1}{x^2 \sqrt{2}}.$

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{x^2};$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right).$

6. Разложите функцию  $f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2}$  по формуле Маклорена до  $o(x^3).$

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{10x}{1+x^2} \text{ на отрезке } [0, 3].$$

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

$$\text{а) } y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}; \quad \text{б) } y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}.$$

### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x \leq -1 \\ \alpha + \beta x^2, & x > -1 \end{cases}$

будет:

а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;

б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;

в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ ,  $x = 1,97$ .

3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = \ln(c + e^x)$  дифференциальному соотношению  $y' = e^{x-y}$ ?

4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \lg(x + 4)$ .

5. Докажите неравенство  $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$  при  $x > 0$ .

6. По взаимно перпендикулярным улицам к перекрёстку движутся две машины со скоростями 30 км/ч и 40 км/ч. В некоторый момент времени они находятся на расстоянии 10 км от перекрёстка. Через какое время после этого расстояние между машинами станет наименьшим?

### Вариант № 4

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left( x^3 - x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{3x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = \frac{2(\sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{2^x - 1})}{\ln 2}$ ;

б)  $y = (\operatorname{tg} x)^{4e^x}$ ;

в)  $f(x) = (\varphi(x))^{\psi(x)}$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = \sin^3 t, \\ y(t) = \cos^3 t \end{cases}$  в точке  $M\left(\frac{1}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$ ;

д)  $xy - \sqrt[3]{xy^2 + 6} = 0$  в точке  $M(2, 1)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = 2x^2 - 3x + 1$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$ .

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{tg}^2 x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x)$ .

6. Разложите функцию  $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$  по формуле Маклорена до  $o(x^2)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x - 2 \operatorname{sh} x}{x^3}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2$  на отрезке  $[-3, 3]$ .

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

а)  $y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$ ; б)  $y = 3 - 3 \ln \frac{x}{x+4}$ .

### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} (x + \alpha) \cdot e^{-\beta x}, & x < 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

будет:

а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;

б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;

в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = x^{11}$ ,  $x = 1,021$ .
3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = \sqrt{x^2 - cx}$  дифференциальному соотношению  $(x^2 + y^2) dx - 2xydy = 0$ ?
4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \sqrt{x}$ .
5. Докажите неравенство  $\ln(1 + x) < x$  при  $x > 0$ .
6. Точки  $A$  и  $B$  с абсциссами 2 и  $-2$  расположены на параболе  $y = \frac{1}{2}x^2$ . найдите на этой параболе точку, сумма квадратов расстояний которой до точек  $A$  и  $B$  была бы наименьшей.

## Вариант № 5

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot \cos \frac{5}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = 2(x - 2)\sqrt{1 + e^x} - 2 \ln \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1};$

б)  $y = (\cos 5x)^{e^x};$

в)  $f(x) = \log_{\varphi(x)} \psi(x)$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = t - \sin t, \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$  в точке  $M(\pi, 2)$ ;

д)  $x \cdot e^{\frac{x}{y^2} - 1} - 2y = 0$  в точке  $M(4, 2)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 3$ .
4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} \operatorname{arctg} x$ .
5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:
  - а)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x};$
  - б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \cdot \ln \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right) \right).$

6. Разложите функцию  $f(x) = \ln \cos x$  по формуле Маклорена до  $o(x^4)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59 \text{ на отрезке } [2, 4].$$

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

$$\text{а) } y = \frac{(x-1)^2}{x^2}; \quad \text{б) } y = -(2x+1)e^{2(x+1)}.$$

### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha + \beta x, & x < 0 \\ \alpha \cos x + \beta \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$

будет:

а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;

б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;

в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $x = 1, 21$ .

3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = x(c - \ln x)$  дифференциальному соотношению  $(x - y)dx + xdy = 0$ ?

4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \frac{2x+5}{13(3x+1)}$ .

5. Докажите неравенство  $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$  при  $x > 0$ .

6. Число 204 разложите на 3 слагаемых, так чтобы два из них относились как 1 : 7, а произведение трёх слагаемых было наибольшим.

### Вариант № 6

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} x + \arcsin \left( x^2 \sin \frac{6}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2};$

б)  $y = (x \sin x)^{8 \ln(x \sin x)};$

в)  $f(x) = \varphi(\psi(\varphi(x)))$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = (t-1)^2 \cdot (t-2), \\ y(t) = (t-2)^2 \cdot (t-1) \end{cases}$  в точке  $M(-2, -4)$ ;

д)  $3^{\sin(yx^2)} - 3x(y - \pi) - 1 = 0$  в точке  $M(1, \pi)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 64$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \frac{\ln|x|}{1+x^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2}$ .

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{-x^3}$ .

6. Разложите функцию  $f(x) = \sin(\cos x - e^x)$  по формуле Маклорена до  $o(x^4)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}$  на отрезке  $[-1, 2]$ .

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

а)  $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ ; б)  $y = \frac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}$ .

### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha x, & x \leq 1 \\ \frac{x - \beta}{2}, & x > 1 \end{cases}$  бу-

дет:

а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;

- б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;  
 в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = x^{21}$ ,  $x = 0,998$ .
3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$  дифференциальному соотношению  $y' \sin x = y \ln y$ ?
4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = 2^{3x+5}$ .
5. Докажите неравенство  $1 - 2 \ln x \leq \frac{1}{x^2}$  при  $x > 0$ .
6. Требуется изготовить ящик с крышкой, объём которого был бы равен  $36\text{ м}^3$ , стороны основания относились бы как  $1 : 3$ . Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?

## Вариант № 7

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} \left( 2^{x^2 \cos \frac{1}{8x}} - 1 + x \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = \frac{e^{\alpha x}(\beta \sin \beta x - \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2}$ ;

б)  $y = (x - 5)^{\operatorname{ch} x}$ ;

в)  $f(x) = \varphi(\sin^2 x) + \psi(\cos^2 x)$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = \ln \sin \frac{t}{2}, \\ y(t) = \ln \sin t \end{cases}$  в точке  $M \left( \ln \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$ ;

д)  $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$  в точке  $M(3, 4)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{x^3 + 2}{x^3 - 2}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 2$ .
4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \ln \left( e^x + \sqrt{e^{2x} - 1} \right) + \arcsin e^x$ .



5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin x^2}{x \cos x - \sin x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}) \cdot \sqrt{x}$ .

6. Разложите функцию  $f(x) = \cos(\cos x - 1)$  по формуле Маклорена до  $o(x^4)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 3x + \cos 3x - 2}{x^4}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}$  на отрезке  $[-1, 6]$ .

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

а)  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$ ; б)  $y = \ln \frac{x}{x-2} - 2$ .

#### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} 5x + 1, & x \leq 1 \\ \alpha x^2 + x + \beta, & x > 1 \end{cases}$

будет:

- а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;
- б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;
- в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \sqrt[3]{x^2}$ ,  $x = 1,03$ .

3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = \frac{1+x}{1-x}$  дифференциальному соотношению  $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ ?

4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \sin(x+1) + \cos 2x$ .

5. Докажите неравенство  $e^x > 1 + \ln(1+x)$ .

6. Найдите радиус основания цилиндра наибольшего объёма, вписанного в шар радиуса  $R$ .

## Вариант № 8

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x \cdot \sin \frac{7}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = e^{ax} \left( \frac{1}{2a} + \frac{a \cos 2bx + 2b \sin 2bx}{2(a^2 + 4b^2)} \right);$

б)  $y = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x};$

в)  $f(x) = \left( \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \right)^{10}$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = t^2 + t + 1, \\ y(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + 1 \end{cases}$  в точке  $M(1, 1);$

д)  $3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$  в точке  $M(-2, 1).$

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = 2x^2 + 3$  в точке с абсциссой  $x_0 = -1$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = x\sqrt{4 - x^2} + a \arcsin \frac{x}{2}.$

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - x};$  б)  $\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \cdot \left( \ln \frac{1}{x} \right)^3.$

6. Разложите функцию  $f(x) = \sin(\cos x - 1)$  по формуле Маклорена до  $o(x^6).$

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{2(-x^2 + 7x - 7)}{x^2 - 2x + 2} \text{ на отрезке } [1, 4].$$

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

а)  $y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12};$  б)  $y = (2x + 5)e^{-2(x+2)}.$

### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$  будет:  
а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;  
б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;  
в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = x^6$ ,  $x = 2,01$ .
3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = \frac{b+x}{1+bx}$  дифференциальному соотношению  $y - xy' = b(1 + x^2y')$ ?
4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \sqrt[3]{e^{2x+1}}$ .
5. Докажите неравенство  $\frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$  при  $x > 0, x \neq 1$ .
6. На гиперболе  $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$  найдите точку, ближайшую к точке  $(3, 0)$ .

### Вариант № 9

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \cos \frac{1}{9x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = x + \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$ ;

б)  $y = x^{\sin x^3}$ ;

в)  $f(x) = \ln \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = t^5 \cdot (t-1), \\ y(t) = t^5 \cdot (t+1) \end{cases}$  в точке  $M(0, 2)$ ;

д)  $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$  в точке  $M(-1, 3)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{x^{29} + 6}{x^4 + 1}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$ .

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( \frac{1+x}{1-x} - 2x \right)}{x - \sin x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot 2^{-x}$ .

6. Разложите функцию  $f(x) = \frac{x}{e^{2x} - 1}$  по формуле Маклорена до  $o(x^2)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt[3]{1+3x} - 2\sqrt[4]{1+4x}}{x^2}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$  на отрезке  $[-1, 7]$ .

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

а)  $y = \frac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x + 13}$ ; б)  $y = \frac{e^{3-x}}{3-x}$ .

#### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha x + 1, & x < 1 \\ \beta + x, & x \geq 1 \end{cases}$

будет:

а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;

б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;

в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $x = 8, 24$ .

3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = \sqrt[3]{2 + 3x - 3x^2}$  дифференциальному соотношению  $yy' = \frac{1-2x}{y}$ ?

4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \frac{4 + 15x}{5x + 1}$ .

5. Докажите неравенство  $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$  при  $x \in \mathbb{R}$ .

6. На параболе  $y = x^2$  найдите точку, ближайшую к точке  $A \left(2, \frac{1}{2}\right)$ .

## Вариант № 10

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos^2 \frac{11}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = x - 3 \ln \left( \left(1 + e^{x/6}\right) \sqrt{1 + e^{x/3}} \right) - 3 \operatorname{arctg} e^{x/6};$

б)  $y = (x^2 - 1)^{\operatorname{sh} x};$

в)  $f(x) = \varphi(e^x) \cdot e^{\psi(x)}$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = 1 - t^2, \\ y(t) = t - t^3 \end{cases}$  в точке  $M(0, 0);$

д)  $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0$  в точке  $M(1, 2).$

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = 2x + \frac{1}{x}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = 2x + \ln |\sin x + 2 \cos x|$ .

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\ln^3(1+x)};$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$

6. Разложите функцию  $f(x) = e^{\cos x - 1}$  по формуле Маклорена до  $o(x^4)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$  на отрезке  $[1, 5].$

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

а)  $y = -\frac{8x}{x^2 + 4};$  б)  $y = 2 \ln \frac{x}{x+1} - 1.$

### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 1, & x < 1 \\ -1, & x \geq 1 \end{cases}$  будет:  
а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;  
б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;  
в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = x^7$ ,  $x = 1,996$ .
3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = \sqrt{\ln \left( \frac{1+e^x}{2} \right)^2} + 1$  дифференциальному соотношению  $(1+e^x)yy' = e^x$ ?
4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \lg(3x+1)$ .
5. Докажите неравенство  $\operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$  при  $x \in \mathbb{R}$ .
6. Найдите наибольшую площадь прямоугольника, две вершины которого лежат на осях  $OX$  и  $OY$  прямоугольной системы координат, третья в точке  $(0,0)$ , а четвёртая на параболе  $y = 3 - x^2$ .

### Вариант № 11

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = x + \frac{8}{1 + e^{x/4}}$ ;

б)  $y = (x^4 + 5)^{\operatorname{ctg} x}$ ;

в)  $f(x) = \varphi(\sin x^2) + \psi(\cos x^2)$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

$$\text{г) } \begin{cases} x(t) = \frac{t+1}{t}, \\ y(t) = \frac{t-1}{t} \end{cases} \quad \text{в точке } M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right);$$

$$\text{д) } x^5 + y^5 - 2xy = 0 \text{ в точке } M(1, 1).$$

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x^8 + 2}{x^4 + 1}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{3}$ .

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^2 \cdot \arcsin x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

6. Разложите функцию  $f(x) = \sin(e^x - 1)$  по формуле Маклорена до  $o(x^3)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+5x} - 1}{\sqrt[4]{1+4x} - \sqrt{1+2x}}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{4x}{4+x^2} \text{ на отрезке } [-4, 2].$$

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

$$\text{а) } y = \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^2; \quad \text{б) } y = (4-x)e^{x-3}.$$

### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + x + \beta, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

будет:

а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;

б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;

в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $x = 7,64$ .

3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = \operatorname{tg} \ln 3x$  дифференциальному соотношению  $(1+y^2) dx = x dy$ ?

4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = 7^{5x}$ .
5. Докажите неравенство  $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$  при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .
6. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точку  $A(1, 2)$  и отсекающей от первого координатного угла треугольник наименьшей площади.

## Вариант № 12

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = \ln \left( e^x + \sqrt{e^{2x} - 1} \right) + \arcsin e^{-x}$ ;

б)  $y = (\sin x)^{5x/2}$ ;

в)  $f(x) = \sqrt{\varphi^3(x) + \psi^3(x)}$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = \ln(1 + t^3), \\ y(t) = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$  в точке  $M(0, 0)$ ;

д)  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  в точке  $M(1, 0)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2x} \right|$ .

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\arcsin x - \ln(1 + x)}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x^2} \right)$ .

6. Разложите функцию  $f(x) = e^{x \cdot \ln(1-x)}$  по формуле Маклорена до  $o(x^4)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1 + 2x}}{\ln(1 + x) - x}.$$



8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8 \text{ на отрезке } [-4, -1].$$

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

$$\text{а) } y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}; \quad \text{б) } y = -\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}.$$

### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha + \beta x^3, & x < 1 \\ 2x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

будет:

а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;

б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;

в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \sqrt{4x - 1}$ ,  $x = 2,56$ .

3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = -\sqrt{\frac{2}{x^2} - 1}$  дифференциальному соотношению  $1 + y^2 + xyy' = 0$ ?

4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \frac{x}{9(4x + 9)}$ .

5. Докажите неравенство  $\arctg x \leq x$  при  $x \geq 0$ .

6. Найдите длину боковой стороны трапеции, имеющей наименьший периметр среди всех равнобедренных трапеций с заданной площадью  $S$  и углом  $\alpha$  между боковой стороной и нижним основанием.

### Вариант № 13

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} 6x + x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = x - e^{-x} \arcsin e^x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{2x}})$ ;

б)  $y = (x^2 + 1)^{\cos x}$ ;

в)  $f(x) = 2^{\varphi(x) \cdot (1 + \psi(x))}$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = t(1 - \sin t), \\ y(t) = t \cos t \end{cases}$  в точке  $M(0, 0)$ ;

д)  $y^5 + y^3 + y + x = 0$  в точке  $M(-3, 1)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}$ .

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ .

6. Разложите функцию  $f(x) = e^{x-2x^2}$  по формуле Маклорена до  $o(x^3)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln \cos x}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}$  на отрезке  $[-2, 4]$ .

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

а)  $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$ ; б)  $y = 2 \ln \frac{x+3}{x} - 3$ .

#### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq -1 \\ \alpha + \beta x, & x > -1 \end{cases}$

будет:

а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;

б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;

в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$ ,  $x = 1,016$ .

3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = \sqrt[3]{x - \ln x - 1}$  дифференциальному соотношению  $\ln x + y^3 - 3xy^2y' = 0$ ?
4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \lg(1 + x)$ .
5. Докажите неравенство  $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$  при  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .
6. Найдите конус наибольшего объёма с данной образующей  $b$ .

## Вариант № 14

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = x - \ln(1 + e^x) - 2e^{-x/2} \operatorname{arctg} e^{x/2} - \left(\operatorname{arctg} e^{x/2}\right)^2$ ;

б)  $y = 19^{x^{19}} x^{19}$ ;

в)  $f(x) = \psi^2(x) \cdot \ln(\varphi(x))$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = \frac{t^3 + 1}{t^2 - 1}, \\ y(t) = \frac{t}{t^2 - 1} \end{cases}$  в точке  $M\left(3, \frac{2}{3}\right)$ ;

д)  $xy + \ln y = 1$  в точке  $M(1, 1)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = 3(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x}$ .

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x$ .

6. Разложите функцию  $f(x) = \sqrt{1 + 2x + x^2} - \sqrt[3]{1 + 3x - x^2}$  по формуле Маклорена до  $o(x^3)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x + \sin x - 3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5} \text{ на отрезке } [1, 4].$$

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

$$\text{а) } y = 8 \frac{x-1}{(x+1)^2}; \quad \text{б) } y = (2x-1)e^{2(1-x)}.$$

### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 1, & x \leq 1 \\ 3x + 2, & x > 1 \end{cases}$

будет:

а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;

б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;

в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $x = 8, 36$ .

3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = a + \frac{7x}{ax+1}$  дифференциальному соотношению  $y - xy' = a(1 + x^2 y')$ ?

4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \frac{4}{x}$ .

5. Докажите неравенство  $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ .

6. Найдите высоту конуса наименьшего объёма, описанного около шара  $R$ .

### Вариант № 15

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{x \sin \frac{5}{x}} - 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = \frac{e^{x^3}}{1+x^3}$ ;

б)  $y = x^{3^x} \cdot 2^x$ ;

в)  $f(x) = \varphi^2(x) \cdot \ln(1 + \psi^2(x))$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = e^t \cdot \sin t, \\ y(t) = e^t \cdot \cos t \end{cases}$  в точке  $M(0, 1)$ ;

д)  $x^2 + y^2 = x^3 + y^3$  в точке  $M(1, 1)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{1}{3x+2}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 2$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \ln|x^2 - 1| - \frac{1}{x^2 - 1}$ .

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\operatorname{ctg} x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}$ .

6. Разложите функцию  $f(x) = \frac{x}{e^{3x} - 1}$  по формуле Маклорена до  $o(x^2)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = -\frac{2(x^2 + 3)}{x^2 + 2x + 5}$  на отрезке  $[-6, 1]$ .

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

а)  $y = \frac{1 - 2x^3}{x^2}$ ; б)  $y = -\frac{e^{-(x+2)}}{x+2}$ .

#### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x < -1 \\ x^3 + x, & x \geq -1 \end{cases}$

будет:

а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;

б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;

в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $x = 4,16$ .
3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = a \operatorname{tg} \sqrt{\frac{a}{x}} - 1$  дифференциальному соотношению  $a^2 + y^2 + 2x\sqrt{ax - x^2}y' = 0$ ?
4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \frac{5x + 1}{13(2x + 3)}$ .
5. Докажите неравенство  $\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ .
6. Найдите высоту правильной треугольной призмы наибольшего объёма, вписанной в шар радиуса  $R$ .

## Вариант № 16

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} 3^{x^2 \sin \frac{2}{x}} - 1 + 2x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left( e^{mx} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} \right);$

б)  $y = (\sin \sqrt{x})^{e^{1/x}};$

в)  $f(x) = \varphi^2(\psi(5x))$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = \frac{3t}{t^3 + 1}, \\ y(t) = \frac{3t^2}{t^3 + 1} \end{cases}$  в точке  $M(0, 0)$ ;

д)  $2y \ln y = x$  в точке  $M(2e, e)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$  в точке с абсциссой  $x_0 = -2$ .
4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right)$ .

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln \operatorname{tg} x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ .

6. Разложите функцию  $f(x) = \ln \cos 2x$  по формуле Маклорена до  $o(x^4)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-1)}$  на отрезке  $[0, 4]$ .

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

а)  $y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$ ; б)  $y = 2 \ln \frac{x}{x-4} - 3$ .

#### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x < 0 \\ x^2 + \beta x, & x \geq 0 \end{cases}$

будет:

а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;

б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;

в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = x^7$ ,  $x = 2,002$ .

3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = \sqrt[4]{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$  дифференциальному соотношению  $8xy' - y = -\frac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$ ?

4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = a^{2x+3}$ .

5. Докажите неравенство  $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$  при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

6. Найдите стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  так, что стороны прямоугольника параллельны осям эллипса.

## Вариант № 17

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln \left( 1 + 3x^2 \cos \frac{2}{x} \right)} - 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = 3e^{\sqrt[3]{x}} \left( \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2 \right);$

б)  $y = x^{e^{\operatorname{ctg} x}};$

в)  $f(x) = \sin(\varphi^2(x)) + \cos(\psi^2(x))$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = t \operatorname{sh} t, \\ y(t) = t \operatorname{ch} t \end{cases}$  в точке  $M(0, 0);$

д)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$  в точке  $M(1, 1).$

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{3}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 3$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \ln \left| 2x + 2\sqrt{x^2 + x} + 1 \right|.$

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{3 + \ln x}{2 - 3 \ln \sin x};$  б)  $\lim_{x \rightarrow +0} (1 + x)^{\ln x}.$

6. Разложите функцию  $f(x) = \operatorname{sh}(\cos 2x - e^{2x})$  по формуле Маклорена до  $o(x^3).$

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e(1 - \frac{x}{2})}{x^2}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^2 - 2x + \frac{16}{x-1} - 13 \text{ на отрезке } [2, 5].$$

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

а)  $y = \frac{4}{3 + 2x - x^2};$  б)  $y = -(x+1)e^{x+2}.$



## Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x \leq 0 \\ \alpha x^2 + x + \beta, & x \in (0, 1) \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$  будет:  
а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;  
б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;  
в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \sqrt{4x - 3}$ ,  $x = 1,78$ .
3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = (x + 1)e^{x^2}$  дифференциальному соотношению  $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$ ?
4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \sin(3x + 1) + \cos 5x$ .
5. Докажите неравенство  $\ln x > \frac{2(x - 1)}{1 + x}$  при  $x > 1$ .
6. Найдите цилиндр наибольшего объёма, периметр осевого сечения которого равен  $a$ .

## Вариант № 18

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{x \sin \frac{3}{5x}} - 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = \ln \frac{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}} - e^x - 1}{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}} - e^x + 1}$ ;

б)  $y = x^{e^{\cos x}}$ ;

в)  $f(x) = \arcsin(\varphi(x) + \psi^2(x))$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = 2^{\sin^2 t}, \\ y(t) = 2^{\cos^2 t} \end{cases}$  в точке  $M(1, 2)$ ;

д)  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$  в точке  $M(1, 0)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .
4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \ln |\cos \sqrt{x}| + \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}$ .
5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:  
 а)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$ .
6. Разложите функцию  $f(x) = \operatorname{ch}(\cos x - 1)$  по формуле Маклорена до  $o(x^4)$ .
7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} \cos x \right)}{\sin (\sin^2 x)}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$  на отрезке  $[1, 5]$ .
9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:  
 а)  $y = \frac{x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2x - 3}$ ; б)  $y = \frac{e^{x+3}}{x + 3}$ .

#### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3, & x \leq 1 \\ x + \beta, & x > 1 \end{cases}$  будет:  
 а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;  
 б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;  
 в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $x = 0,98$ .
3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = \frac{2x}{x^3 + 1} + \frac{1}{x}$  дифференциальному соотношению  $x(x^3 + 1)y' + (2x^3 - 1)y = \frac{x^3 - 2}{x}$ ?
4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \sqrt{e^{3x+1}}$ .
5. Докажите неравенство  $2x \cdot \operatorname{arctg} x > \ln(1 + x^2)$  при  $x \neq 0$ .

6. Найдите высоту конуса наибольшего объёма, вписанного в шар радиуса  $R$ .

## Вариант № 19

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2^{\operatorname{tg} x} - 2^{\sin x}}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = e^{\sin x} \left( x - \frac{1}{\cos x} \right);$

б)  $y = x^{2^x} \cdot 5^x;$

в)  $f(x) = \psi^2(x) \cdot \operatorname{arctg}(\varphi(x))$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = t^3 + 2t^2 + t, \\ y(t) = -t^3 + 3t - 2 \end{cases}$  в точке  $M(0, -2);$

д)  $e^y = \ln y + e^{\frac{x}{2}}$  в точке  $M(2, 1)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x})$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = e^x(\cos 2x + 2 \sin 2x)$ .

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^2};$  б)  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{\ln \operatorname{sh} x}}.$

6. Разложите функцию  $f(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{ch} x - 1)$  по формуле Маклорена до  $o(x^6)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^3) - 2 \sin x + 2x \cos x^2}{\sin x^3}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$  на отрезке  $[-3, 4]$ .

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

а)  $y = \frac{1}{x^4 - 1};$  б)  $y = \ln \frac{x}{x+5} - 1.$

### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 1, & x < 0 \\ \beta + x^2, & x \geq 0 \end{cases}$  будет:  
а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;  
б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;  
в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = x^5$ ,  $x = 2,997$ .
3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = e^{x+x^2} + 2e^x$  дифференциальному соотношению  $y' - y = 2xe^{x+x^2}$ ?
4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \frac{11 + 12x}{6x + 5}$ .
5. Докажите неравенство  $\ln(1 + x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x}$  при  $x > 0$ .
6. Через какую точку эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  следует провести касательную, чтобы площадь треугольника, образованного этой касательной и положительными полуосями  $OX$  и  $OY$ , была наименьшей?

### Вариант № 20

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left( \frac{3x}{2} - x^2 \sin \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = \frac{e^x}{2} ((x^2 - 1) \cos x + (x - 1)^2 \sin x)$ ;

б)  $y = x^{e^{\sin x}}$ ;

в)  $f(x) = \varphi(\sin x) \cdot \psi^3(x)$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = e^{-t}, \\ y(t) = t^3 \end{cases}$  в точке  $M(1, 0)$ ;

д)  $x^4 + y^4 = 2x^2y^2$  в точке  $M(2, 2)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .
4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = x(\sin \ln x - \cos \ln x)$ .
5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:  
 а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x) - \sin x}{x^3}$ ;   б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} (\pi - 2x)^{\cos x}$ .
6. Разложите функцию  $f(x) = e^{\operatorname{ch} 3x - 1}$  по формуле Маклорена до  $o(x^4)$ .
7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора  

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sqrt{1 + \sin x} - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - x}{\sin^3 x}.$$
8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  
 $y = -\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{8}{x - 2} + 5$  на отрезке  $[-2, 1]$ .
9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:  
 а)  $y = -\left(\frac{x}{x + 2}\right)^2$ ;   б)  $y = -(2x + 3)e^{2(x+2)}$ .

#### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 1, & x \leq -1 \\ 2x + 3, & x > -1 \end{cases}$  будет:  
 а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;  
 б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;  
 в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \sqrt[5]{x^2}$ ,  $x = 1,03$ .
3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = -x \cos x + 3x$  дифференциальному соотношению  $xy' = y + x^2 \sin x$ ?
4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \lg(2x + 7)$ .
5. Докажите неравенство  $x^3 + 3x + 6x \cdot \ln x + 2 > 6x^2$  при  $x > 1$ .
6. Найдите наибольшую полную поверхность цилиндра, вписанного в шар радиуса  $R$ .

## Вариант № 21

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{\left(x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{2}{x}\right)} - 1 + x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x})$ ;

б)  $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln(\operatorname{tg} x)/4}$ ;

в)  $f(x) = \psi^3(\varphi(2x))$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = t^2 + 6t + 5, \\ y(t) = \frac{t^3 - 54}{t} \end{cases}$  в точке  $M(0, 55)$ ;

д)  $y = 1 + x \cdot e^y$  в точке  $M(-1, 0)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{2\sqrt{x-1}}$ .

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} 2x - \operatorname{tg} 2x}{x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$ .

6. Разложите функцию  $f(x) = \operatorname{sh}(e^{2x} - 1)$  по формуле Маклорена до  $o(x^3)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x \cos x}{\ln^3(1-x)}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 8x + \frac{4}{x^2} - 15 \text{ на отрезке } \left[\frac{1}{2}, 2\right].$$

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

а)  $y = \frac{x^3 - 32}{x^2}$ ; б)  $y = -\frac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}$ .

### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x \leq 0 \\ x^3 + 1, & x > 0 \end{cases}$  будет:  
а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;  
б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;  
в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = x^4$ ,  $x = 3,998$ .
3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x + x}}$  дифференциальному соотношению  $2 \sin x \cdot y' + y \cos x = y^3(x \cos x - \sin x)$ ?
4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = 2^{kx}$ .
5. Докажите неравенство  $x^4 + 8x + 12x^2 \cdot \ln x > 8x^3 + 1$  при  $x > 1$ .
6. Найдите наибольшую площадь трапеции, вписанной в полукруг радиуса  $R$  так, что нижним основанием трапеции служит диаметр полукруга.

### Вариант № 22

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1 - 2x^3 \sin \frac{5}{x}} - 1 + x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = 3e^{\sqrt[3]{x}} \left( \sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} - 120 \right);$

б)  $y = x^{e^{\arctg x}};$

в)  $f(x) = \ln \frac{1 + \varphi(x)}{\psi^2(x)}$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = (t-1)^2(t-2), \\ y(t) = (t-1)^2(t-3) \end{cases}$  в точке  $M(-2, -3);$

д)  $y = x + \arctg y$  в точке  $M(1 - \frac{\pi}{4}, 1).$

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .
4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x - \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .
5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:  
 а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 3^x)^{\frac{1}{x}}$ .
6. Разложите функцию  $f(x) = e^{x \cdot \ln(1+2x)}$  по формуле Маклорена до  $o(x^4)$ .
7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора  

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} + \ln(1 - x) - 1}{2 - \sqrt{4 + x^3}}.$$
8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)} + 3$  на отрезке  $[-4, 2]$ .
9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:  
 а)  $y = \frac{4(x+1)^2}{x^2 + 2x + 4}$ ; б)  $y = \ln \frac{x-5}{x} + 2$ .

#### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq 0 \\ \alpha x^2 + x + \beta, & x \in (0, 1) \\ 1 - 2x, & x \geq 1 \end{cases}$  будет:  
 а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;  
 б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;  
 в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \sqrt{1 + x + \sin x}$ ,  $x = 0,01$ .
3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = \frac{x}{x-1} + x^2$  дифференциальному соотношению  $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1)$ ?
4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \frac{x}{x+1}$ .
5. Докажите неравенство  $\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$  при  $x > 0$ .
6. Найдите наибольший объём цилиндра, полная поверхность которого равна  $S$ .



## Вариант № 23

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{|x|} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = -\frac{e^{3x}}{3 \operatorname{sh}^3 x}$ ;

б)  $y = (x^8 + 1)^{\operatorname{th} x}$ ;

в)  $f(x) = \sqrt[5]{\varphi^2(x) + \psi^3(x)}$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = 2 \cos^3 t, \\ y(t) = 2 \sin^3 t \end{cases}$  в точке  $M(2, 0)$ ;

д)  $x - y = \arcsin x - \arcsin y$  в точке  $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{3x - 2x^3}{3}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \sqrt{3 + x^2} - x \ln \left| x + \sqrt{3 + x^2} \right|$ .

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .

6. Разложите функцию  $f(x) = e^{2x+x^2}$  по формуле Маклорена до  $o(x^3)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \cdot \sin x + \ln \cos x - x}{\sqrt[3]{1-x^3} - 1}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^2 + 4x + \frac{16}{x+2} - 9 \text{ на отрезке } [-1, 2].$$

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

а)  $y = \frac{3x-2}{x^3}$ ; б)  $y = (x+4)e^{-(x+3)}$ .

### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \leq 1 \\ \alpha x^2 + x + \beta, & x > 1 \end{cases}$  будет:  
а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;  
б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;  
в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}$ ,  $x = 0,01$ .
3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = \frac{x}{\cos x}$  дифференциальному соотношению  $y' - y \operatorname{tg} x - \sec x$ ?
4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \log_3(x + 5)$ .
5. Докажите неравенство  $\frac{2}{2x + 1} - \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) < 0$  при  $x > 0$ .
6. Найдите наибольшую полную поверхность цилиндра, вписанного в шар радиуса  $R$ .

### Вариант № 24

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + 2x^2 + x^3)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = \arcsin e^{-x} - \sqrt{1 - e^{2x}}$ ;

б)  $y = x^{29} 29^x$ ;

в)  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\varphi^2(x)}{\psi(x)}$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = 2(t - \sin t), \\ y(t) = 2(1 - \cos t) \end{cases}$  в точке  $M(2\pi, 4)$ ;

д)  $y = \cos(x + y)$  в точке  $M(-1, 1)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{x^2}{10} + 3$  в точке с абсциссой  $x_0 = 2$ .
4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = \sqrt{x} - (1 + x) \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ .
5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:  
 а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{th} x) - x}{x^3}$ ;   б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + e^x}{2} \right)^{\operatorname{cth} x}$ .
6. Разложите функцию  $f(x) = \sin(\operatorname{sh} 2x - e^{2x})$  по формуле Маклорена до  $o(x^3)$ .
7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{\sin x - x}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = \frac{4}{x^2} - 8x - 15$  на отрезке  $\left[-2, -\frac{1}{3}\right]$ .
9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:  
 а)  $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{(x - 1)^2}$ ;   б)  $y = \frac{e^{x-3}}{x - 3}$ .

#### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x^2 + 1, & x \leq 1 \\ 2x + 4, & x > 1 \end{cases}$  будет:  
 а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;  
 б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;  
 в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \sqrt[4]{2x - \sin \frac{\pi x}{2}}$ ,  $x = 1,02$ .
3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = (x + 1)^n (e^x - 1)$  дифференциальному соотношению  $y' - \frac{ny}{x + 1} = e^x (1 + x)^n$ ?
4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \frac{1 + x}{1 - x}$ .

5. Докажите неравенство  $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$  при  $x > 1$ .
6. Найдите высоту конуса наименьшего объёма, описанного около шара радиуса  $R$ .

## Вариант № 25

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos 3x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке  $x_0 = 0$  по определению.

2. Найдите производные функций:

а)  $y = -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4 + 2x^2 + 2);$

б)  $y = (\cos 2x)^{\ln(\cos 2x)/4};$

в)  $f(x) = \arccos(\varphi(x) \cdot \psi(3x))$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}$ ;

г)  $\begin{cases} x(t) = 2 \cos^3 t, \\ y(t) = 3 \sin^3 t \end{cases}$  в точке  $M\left(\frac{1}{4}, \frac{9\sqrt{3}}{8}\right);$

д)  $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$  в точке  $M(1, 0)$ .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{4}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 4$ .

4. Найдите дифференциал  $dy$  функции  $y = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2}$ .

5. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - \sin x}{x^3};$  б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$

6. Разложите функцию  $f(x) = \cos(\operatorname{ch} 2x - 1)$  по формуле Маклорена до  $o(x^4)$ .

7. Найдите предел функции, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x^3} - \cos x^4}{\sin x - x}.$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}$  на отрезке  $[-2, 5]$ .

9. Проведите полное исследование функции и постройте её график:

а)  $y = \frac{x^3 - 27x + 54}{x^3}$ ;   б)  $y = \ln \frac{x+6}{x} - 1$ .

#### Дополнительные задачи

1. При каких значениях параметров функция  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + x + \beta, & x \leq 1 \\ 3 - x^2, & x > 1 \end{cases}$  будет:  
а) непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;  
б) дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ;  
в) непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ?
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенное значение  $y = \sqrt{x^2 + 5}$ ,  $x = 1,97$ .
3. Проверьте, удовлетворяет ли функция  $y = 2\frac{\sin x}{x} + \cos x$  дифференциальному соотношению  $x \sin x \cdot y' + (\sin x - x \cos x)y = \sin x \cdot \sin x - x$ ?
4. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = \frac{7x+1}{17(4x+3)}$ .
5. Докажите неравенство  $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$  при  $x > 0$ .
6. В конус, радиус основания которого равен  $R$ , а высота  $H$ , вписан цилиндр наибольшего объёма. Найдите радиус основания и высоту этого цилиндра.