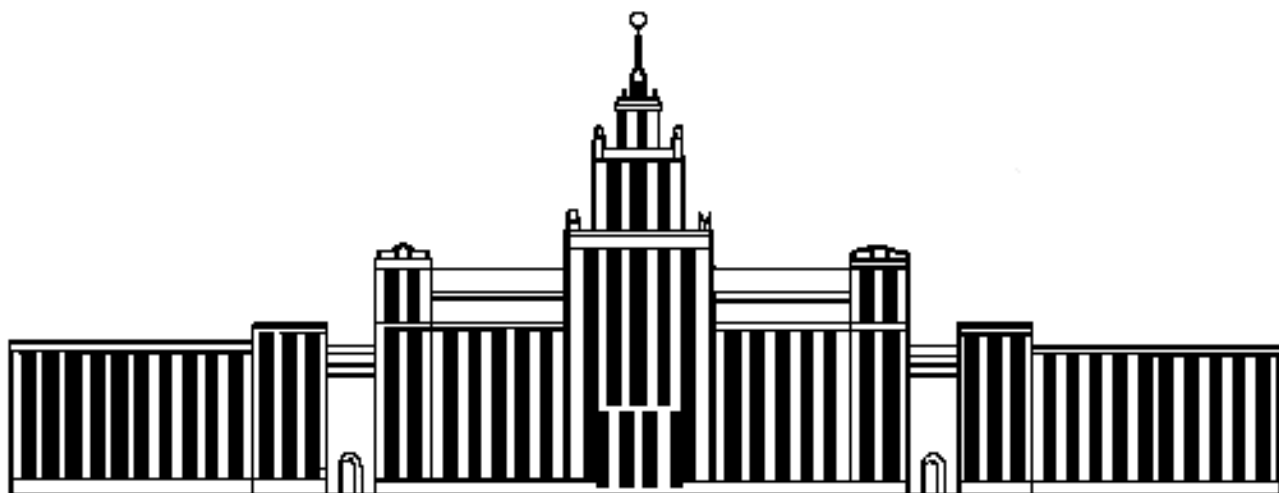

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

517(07)
3-259

В.И. Заляпин, А.В. Кунгурцева, Т.Н. Хохлова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть I. Введение в анализ

Сборник контрольных заданий

Челябинск
2015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра математического и функционального анализа

517(07)
3 - 259

В.И. Заляпин, А.В. Кунгурцева, Т.Н. Хохлова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть I. Введение в анализ

Сборник контрольных заданий

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2015

УДК 517.1(075.8)
3-259

*Одобрено
учебно-методической комиссией
факультета математики, механики и компьютерных наук ЮУрГУ*

Рецензенты:
В.И. Ухоботов, В.Е. Федоров

Заляпин, В.И.

3-259 Математический анализ. Часть I. Введение в анализ: Сборник контрольных заданий / В.И. Заляпин, А.В. Кунгурцева, Т.Н. Хохлова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – 46 с.

Сборник контрольных заданий предназначен студентам 1 курса факультета математики, механики и компьютерных наук, обучающимся по направлениям 01.03.01 - математика, 02.03.01 – математика и компьютерные науки, 01.03.02 – прикладная математика и информатика, 01.03.03 – механика и математическое моделирование, 01.03.04 – прикладная математика и 09.03.04 – программная инженерия и изучающим курс математического анализа. Сборник содержит теоретические вопросы, задачи и упражнения для самостоятельной работы по разделу «Введение в анализ», а также варианты индивидуальных заданий.

Задачи и вопросы, сложность которых выше средней, помечены знаком *.

УДК 517.1(075.8)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2015

Оглавление

1. Теория

1.1. Теоретические вопросы	4
1.2. Теоретические упражнения	5

2. Индивидуальные задания	8
-------------------------------------	---

1. Теория

1.1. Теоретические вопросы

I. Функции

1. Функция. Сложная функция. Обратная функция.
2. Элементарные свойства - ограниченность, монотонность, периодичность, четность и нечетность.
3. Свойства и графики основных элементарных функций.
4. Определение, свойства и графики тригонометрических и обратных тригонометрических функций
5. Определение, свойства и графики гиперболических функций.

II. Предел последовательности

1. Последовательность. Подпоследовательность. Предел последовательности.
2. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.
3. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности.
4. Лемма Больцано-Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности.

III. Предел функции

1. Бесконечно малые функции. Основные теоремы о бесконечно малых.
2. Предел функции. Арифметические свойства пределов.
3. Переход к пределу в неравенствах.
4. Теорема о знакопостоянстве функции, имеющей ненулевой предел.
5. Эквивалентные бесконечно малые. Теорема о замене бесконечно малых эквивалентными в произведениях и отношениях.

IV. Приложение понятия предела функции

1. Исследование поведения функции в граничной точке области определения.
2. Горизонтальные, вертикальные и наклонные асимптоты. Необходимое и достаточное условие наличия асимптоты у графика функции.

V. Непрерывность функции в точке

1. Определение локальной непрерывности функции.
2. Теорема об арифметических свойствах непрерывных функций.
3. Теорема о локальной ограниченности непрерывной функции.
4. Теорема о локальном знакопостоянстве непрерывной функции.
5. Теорема о локальной непрерывности сложной функции.
6. Теорема о локальной непрерывности обратной функции.

VI. Непрерывность функции на отрезке

1. Теорема об ограниченности непрерывной функции (1-я теорема Вейерштрасса).
2. Теорема о достижении непрерывной функцией своих наибольшего и наименьшего значений (2-я теорема Вейерштрасса).
3. Теорема об обращении в нуль непрерывной функции (1-я теорема Больцано–Коши).
4. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции (2-я теорема Больцано–Коши).

1.2. Теоретические упражнения

1. Функция определена во всех точках отрезка $[-1,1]$ и обладает свойством нечетности. Какое значение она может принимать в нуле?
2. Тот же вопрос для функции, обладающей свойством четности.
3. Можно ли утверждать, что сумма четных функций — функция четная? нечетная?
4. Можно ли утверждать, что сумма нечетных функций — функция нечетная? Четная?
5. Произведение четных (нечетных) функций — функция четная. Доказать.
6. Произведение четной функции на нечетную — функция нечетная. Доказать.
7. Доказать, что функция $y = \sin x$ периодическая и установить, что ее главный период равен 2π .

8. Доказать, что функция $y = \frac{1}{1+x^2}$ не является периодической.
9. Функция $y = f(x)$ — периодическая с периодом T . Доказать, что функция $y = f(\alpha x)$ — периодическая с периодом $\frac{T}{\alpha}$.
10. Рациональные числа r_1 и r_2 являются периодами функций f_1 и f_2 . Можно ли утверждать, что сумма (произведение) этих функций является периодической функцией?
11. Всегда ли сумма двух периодических функций будет функцией периодической? Рассмотрите пример: $f = \sin x$, $g = \sin(x\sqrt{2})$.
12. Функция $f(x)$ задана соотношением $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Найти $f(f(x))$ и $f(f(f(x)))$.
13. Можно ли логарифмировать неравенства почленно? Как и почему?
14. Можно ли неравенство возводить в квадрат? Как и почему?
15. Можно ли извлекать квадратный корень из обеих частей неравенства? Как и почему?
- 16.* Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — монотонно возрастающие функции, для которых выполняется неравенство $f(x) < g(x)$. Доказать, что в этом случае справедливо неравенство $f(f(x)) < g(g(x))$.
17. Установите, существует ли обратная функция для функций, указанных ниже, и, в случае существования, найдите ее.

$$y = 2x + 3; y = x^2, x \in (-\infty, 0]; y = \frac{1-x}{1+x}, x \neq -1.$$

18. Докажите те из приведенных ниже утверждений, которые верны.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = a^2 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \cup \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0;$$

$$3. \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cap \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0;$$

$$4. \exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cap \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

Укажите ошибки в утверждениях, представляющихся Вам неверными.

19. Докажите или опровергните следующие утверждения

$$\sin x^3 = o(x^2), x \rightarrow 0; \quad 1 + x = o\left(\frac{1}{x}\right), x \rightarrow 0; \quad \sqrt{x + \sqrt{x}} \sim \sqrt[4]{x}, x \rightarrow 0;$$

$$x^n = o(x^m), x \rightarrow 0 \iff m < n; \quad \ln(1 - \sin^2 x) = o(x), x \rightarrow 0.$$

20. Докажите следующие утверждения

$$1. \quad o(\text{const} \cdot f) = o(f); \quad 2. \quad o(f) + o(f) = o(f);$$

$$3. \quad o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g); \quad 4. \quad o(o(f)) = o(f).$$

21. Сформулируйте следующие утверждения

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = 1; \quad 2. \quad \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = +\infty; \quad 3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

22. Запишите с помощью логических символов следующие утверждения:

1. Число 5 не является пределом функции $f(x)$ в точке 1.

2. У функции $f(x)$ нет предела в точке 1.

Эквивалентны ли утверждения 1 и 2?

23. Функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0 . Доопределите эту функцию в точке x_0 так, чтобы она стала там непрерывной. Если такое доопределение невозможно — объясните почему.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, x_0 = 1; \quad f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, x_0 = 0; \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, x_0 = 0;$$

$$f(x) = x \operatorname{ctg} x, x_0 = 0; \quad f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, x_0 = 0; \quad f(x) = \frac{x}{x+1}, x_0 = -1;$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, x_0 = 0; \quad f(x) = 2 - \frac{1}{x-2}, x_0 = 2; \quad f(x) = \frac{|x|}{x}, x_0 = 0.$$

24. Известно, что функция $f(x)$ обладает следующими свойствами: она непрерывна в точке x_0 и в любой окрестности этой точки может быть как положительной так и отрицательной. Позволяют ли эти данные определить значение $f(x_0)$? Да — найти это значение, нет — объяснить почему этого сделать нельзя.

25. Установить истинность или ложность следующих утверждений:

1. Если сумма двух функций непрерывна в некоторой точке, то в этой точке непрерывны слагаемые.

2. Произведение двух функций непрерывно в точке тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны сомножители.
3. Частное двух функций непрерывно в точке тогда и только тогда, когда непрерывны в этой точке числитель и знаменатель и знаменатель не обращается в ноль.
4. Функция непрерывна в точке, если в этой точке непрерывен ее квадрат.
5. Функция непрерывна в точке, если в этой точке непрерывен ее модуль.
6. Сумма функции непрерывной в точке и функции разрывной в этой точке является функцией разрывной.
- 7*. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в некоторой точке, то в этой точке непрерывны и функции $M(x) = \max\{f, g\}$ и $m(x) = \min\{f, g\}$.

2. Индивидуальные задания

Вариант № 1

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x^4 + x^2 - 2}{(1 - x^2)(x + 5)}}$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = \ln x$ и $g(x) = \sqrt{x + 3}$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|y - 1| + |x - 2| = x$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 1}{3n^2 + 2} = \frac{4}{3}$.
6. Вычислите пределы последовательностей:
 - а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[5]{n} - \sqrt[3]{27n^6 + n^2}}{(n + \sqrt[4]{n})(\sqrt{9 + n^2})}$;
 - в) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n)$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 6n + 7}{3n^2 + 20n - 1} \right)^{1-n}$.

7. Вычислите пределы функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\cos(3\pi/4 - x)}}. \end{aligned}$$

8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\operatorname{arctg} x - x^2}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{1-x}, & x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 1.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{4k^2 + 6k + 1}{(2k + 2)!}$.
2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = 2, \underbrace{3434 \dots 34}_{n \text{ пар}}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = 5, x_{n+1} = \sqrt{5 + x_n}, n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n, \inf x_n$, если

$$x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right).$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^n}, \quad x \geq 0.$$

Вариант № 2

1. Найдите область определения функции $y = \arccos \left(\frac{x+2}{3x-1} \right)$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = \arcsin x$ и $g(x) = \ln x$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = 1 - 2 \sin x$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|y| + |x-2| = x+3$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9-n^3}{1+2n^3} = -\frac{1}{2}$.
6. Вычислите пределы последовательностей:
а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1} - \sqrt[3]{n^4-1}}$;
в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \sqrt[3]{4-n^3} \right)$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 3n + 6}{n^2 + 5n + 1} \right)^{n/2}$.
7. Вычислите пределы функций:
а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^3 - 3x - 1}{x^5 + x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$;
в) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{(x-\pi)^4}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{1/(\sqrt[5]{x}-1)}$.
8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^x}{x - \sin 9x}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x-5} \right), \quad x \neq 5, \quad f(5) = 1.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$.
2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{k^2 \ln^2 k}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{2}$, $n \geq 1$.
4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + x^{-n}}{x^n - x^{-n}}, \quad x \neq 0.$$

Вариант № 3

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x^2+3x-4}{x^4-1}}$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = e^x$ и $g(x) = \arcsin x$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = \sqrt{2-x} - 4$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|x+y| + |x-y| = 1$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{2n+1} = 2$.
6. Вычислите пределы последовательностей:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}; & \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2} + \sqrt{n-2}}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2-2n+3} \right); & \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-10}{n+1} \right)^{3n+1}. \end{aligned}$$

7. Вычислите пределы функций:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x + x^2} - (1 + x)}{x}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\operatorname{tg} \pi x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}. \end{array}$$

8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{-2x}}{2 \operatorname{arctg} x - \sin x}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & |x| \geq 5, \\ \ln(x + 5), & |x| < 5; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = e^{x + \frac{1}{x}}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{(k+3)!}$.

2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{arctg}^2 k}{k^2 + 1}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_{n+1} = \frac{2x_n^2 + 1}{4}$, $n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = \frac{2n-1}{n+1} \cos \left(\frac{2\pi n}{3} \right).$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}}, \quad x \geq 0.$$

Вариант № 4

1. Найдите область определения функции $y = \frac{\arcsin(0, 5 - x)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = x^2 + 2x - 3$ и $g(x) = \ln x$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = \frac{x - 1}{x + 3}$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|x| - |y| = 2$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n^2}{4n^2 + 2} = -\frac{1}{2}$.
6. Вычислите пределы последовательностей:
а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 - n)^3}{(n + 1)^2 - (n + 1)^3}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5 + 1}}{\sqrt{4n^6 + 3} - n}$;
в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(n + 2)(n + 1)} - \sqrt{(n - 1)(n + 3)} \right)$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n - 7}{6n + 4} \right)^{3n + 2}$.
7. Вычислите пределы функций:
а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + 3x + x^2} - 2}{x + x^2}$;
в) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\operatorname{ctg} 2x / \sin 3x}$.
8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12^x - 5^{-3x}}{2 \arcsin x - x}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{4}, & x \leq -\frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x, & -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{4}; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{\ln x}, \quad \begin{matrix} x \neq 0, x \neq 1, \\ f(0) = 0, f(1) = 0. \end{matrix}$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1}) \cdot \sqrt{k(k+1)}}$.

2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^k}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$, $n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = 1 + n \sin \left(\frac{\pi n}{2} \right).$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-x} - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}.$$

Вариант № 5

1. Найдите область определения функции $y = \ln \left(\frac{x-4}{x^4-3x^3-4x^2} \right)$.

2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = \frac{1}{2x-\pi}$ и $g(x) = \arccos x$.

3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = 2 + 3 \sin x$.

4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|x| - x = |y| - y$.

5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1} = 5$.

6. Вычислите пределы последовательностей:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2 - (n+2)^3}{(4-n)^3}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7} - n}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt{n(n^4-1)} - \sqrt{n^5-8} \right); \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7} \right)^{2n+5}. \end{aligned}$$

7. Вычислите пределы функций:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{x^2} - e^{4\pi^2}}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{1/\sin^2 2x}. \end{array}$$

8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x \leq -3, \\ -x^3, & -3 < x \leq 0, \\ \operatorname{arctg} x, & x > 0; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}, \\ x \neq -1, f(-1) = 0.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1}$.

2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = 0, \underbrace{777 \dots 7}_{n \text{ цифр}}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_{n+1} = \frac{3x_{n-1}^2 + 1}{6}$, $n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}.$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n}, \quad x \geq 0.$$

Вариант № 6

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt[6]{\frac{2x^2+x-3}{x^3-2x^2+x}}$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = \sqrt{x+2}$ и $g(x) = \lg x$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = 3 - \sqrt{x+2}$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|y+1| + |2x-3| = x+1$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{1-2n} = -\frac{1}{2}$.
6. Вычислите пределы последовательностей:
а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 + 2n - 3}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[4]{3n+1} + \sqrt{81n^4 - n^2 + 1}}{(n + \sqrt[3]{n})(\sqrt{5-n+n^2})}$;
в) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{5+8n^3} - 2n \right)$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right)^{-n^2}$.
7. Вычислите пределы функций:
а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}$;
в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6-x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}$.
8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^{7x}}{\arcsin 2x - x}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq -1, \\ 1, & -1 < x \leq 0, \\ \frac{1}{x-1}, & x > 0; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{2 - 2^{\frac{1}{x}}}, \quad \begin{matrix} x \neq 0, x \neq 1, \\ f(0) = 0, f(1) = 1. \end{matrix}$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 5k + 5}{(k+3)!}$.
2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \frac{\cos 3}{3} + \frac{\cos 3^2}{3^2} + \dots + \frac{\cos 3^n}{3^n}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}$, $n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = \frac{n^2}{n+1} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right).$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x.$$

Вариант № 7

1. Найдите область определения функции $y = \arcsin\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = \lg(x - \frac{\pi}{4})$ и $g(x) = \arccos(2x)$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|y|(|x+1| - 3) = 1$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-5} = \frac{2}{3}$.
6. Вычислите пределы последовательностей:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+5)^3}; & \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4} - \sqrt[4]{n^4+1}}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt[3]{n^3+5} - \sqrt[3]{n^3+3} \right); & \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3} \right)^n. \end{aligned}$$

7. Вычислите пределы функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\operatorname{ctg} x / \sin 4x}. \end{aligned}$$

8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^x}{\arcsin x + x^3}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \sin x + 1, & x > 0; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = x + \frac{x+2}{|x+2|}, \quad x \neq -2, f(-2) = 1.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^3 + 6k^2 + 11k + 5}{(k+3)!}$.

2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = 0, \underbrace{555 \dots 5}_{n \text{ цифр}}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = \frac{1}{8}$, $x_{n+1} = x_{n-1}^2 + \frac{1}{8}$, $n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = \cos^n \left(\frac{2\pi n}{3} \right).$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{2n} + x^{2n})}{n}, \quad x \geq 0.$$

Вариант № 8

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{2x^3+x^2-2x}{2x^2+x-3}}$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = \arccos(2x)$ и $g(x) = 5^x$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = 2 + 3 \sin x$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $x^2 + y^2 = 2(|x| + |y|)$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n^2}{n^2 + 3} = -2$.
6. Вычислите пределы последовательностей:
а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^3 - (n+4)^3}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5+3} - \sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3} + \sqrt{n-3}}$;
в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(n+2)^2} - \sqrt[3]{(n-3)^2} \right)$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}$.
7. Вычислите пределы функций:
а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}}$;
в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin \pi x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.
8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^{7x}}{\operatorname{tg} 3x - x}.$$
9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{4}, & x \leq -\frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x, & -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \\ \sin x, & x \geq \frac{\pi}{4}; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x+3} \right), \quad x \neq -3, \quad f(-3) = 2.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$.
2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos 5^k}{k^3}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 - \frac{1}{4x_n}, n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n, \inf x_n$, если

$$x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \left(\frac{\pi n}{4} \right).$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + x^{2n}}{2 + x^{4n}}.$$

Вариант № 9

1. Найдите область определения функции $y = \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = \lg(x+6)$ и $g(x) = x^2 + 5x - 6$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x), y = f(|x|), y = |f(x)|$, если $f(x) = \sqrt{x+4} - 3$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|x+1| - |y-2| = 2$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{2 - n^2} = -3$.
6. Вычислите пределы последовательностей:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}; & \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8 + 1}}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}; & \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 + 3n - 1}{5n^2 + 3n + 3} \right)^{n^2}. \end{array}$$

7. Вычислите пределы функций:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg} 5x \sin 2x}}. \end{array}$$

8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x - \sin x}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 3,75 - \frac{1}{4x}, & -1 \leq x < 0, \\ \sin x, & x \geq 0; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 2 + 2^{\frac{1}{x}}, \quad x \neq 0, f(0) = 2.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!}$.

2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(1+k)}{k^5}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{4(1-x_n)}$, $n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right).$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sin x)^{2n+2} + (\cos x)^{2n+2}}{(\sin x)^{2n} + (\cos x)^{2n}}.$$

Вариант № 10

1. Найдите область определения функции $y = \ln \left(\frac{x^2 - 4}{x^4 + 5x^2 - 6} \right)$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = \arcsin x$ и $g(x) = \frac{1}{4x - \pi}$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = \frac{x - 2}{x + 1}$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|x + y| + |x - y| = 3$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n - 1} = \frac{1}{3}$.

6. Вычислите пределы последовательностей:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 2n}{(n + 1)^4 - (n - 1)^4}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n + 1} - \sqrt[3]{27n^3 + 4}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[3]{n^5 + n}}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - 3} \right); \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n + 1}{3n - 1} \right)^{2n+3}. \end{aligned}$$

7. Вычислите пределы функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3 + x} - \sqrt{2x}}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{9 - 2x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}. \end{aligned}$$

8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^{2x} - 7^{-x}}{2 \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 3, & x \leq 1, \\ 4 - 2x, & 1 < x \leq 2, \\ \frac{1}{x - 2}, & x > 2; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right), \quad x \neq 0, f(0) = 0.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{4k^2 + 6k + 1}{(2k + 2)!}$.

2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(1+k)}{k!}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = -n(2 + (-1)^n).$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + e^{nx}}.$$

Вариант № 11

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt[4]{\frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 1}}$.

2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ и $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = 2 - 3 \sin x$.

4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|y + 1| + |x + 2| = x + 5$.

5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 - 1} = 1$.

6. Вычислите пределы последовательностей:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{7n} + \sqrt[4]{81n^8 - 1}}{(n+4\sqrt{n})\sqrt{n^2-5}}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3} \right); \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 7n - 1}{5n^2 + 3n - 1} \right)^{-n^2}. \end{aligned}$$

7. Вычислите пределы функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{\sin \pi x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{6 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x}. \end{aligned}$$

8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin 3x - \sin 5x}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{|\operatorname{arctg} x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{3 - 3^{\frac{1}{x}}}, \quad x \neq 1, f(1) = 0.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{4k^2 + 2k - 1}{(2k+1)!}$.

2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin 3^k}{k^3}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - x_n^2$, $n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^n.$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3^x + (x+1)^n)}{n}, \quad x \geq 0.$$

Вариант № 12

1. Найдите область определения функции $y = \arccos\left(\frac{2x-7}{1-x}\right)$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{\pi^2}{9}}$ и $g(x) = \arccos x$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = 2 - \sqrt{x+3}$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|y-1| - |x+3| = x+2$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+2n}{1-3n} = -\frac{2}{3}$.

6. Вычислите пределы последовательностей:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 - (n+5)^3}{(3n-1)^3 + (2n+3)^3}; & \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3-7} + \sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5} + \sqrt{n}}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n^5+9)} - \sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}; & \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}. \end{aligned}$$

7. Вычислите пределы функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x} - 4}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln 2x - \ln \pi}{\sin(5x/2) \cos x}; & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{x/(x-1)}. \end{aligned}$$

8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{3x} - 3^{2x}}{\operatorname{tg} x + x^3}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(1-x), & x < 1, \\ 1-x, & 1 \leq x \leq 3, \\ x^2-11, & x > 3; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{5x^2-3x}{2x}, \quad x \neq 0, f(0) = -\frac{3}{2}.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{2k+1}{k^2+k} \right) \cdot \sin \left(\frac{1}{k^2+k} \right)$.
2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 \operatorname{arctg} \sqrt{k}}{k^5 + 1}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{4}{3}x_{n-1} - x_{n-1}^2$, $n \geq 1$.
4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^{n+1}.$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n.$$

Вариант № 13

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt[6]{\frac{x^2-9x+14}{x^4-16}}$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = 2 \lg x - 3$ и $g(x) = \sqrt{x+5}$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $x^2 + y^2 = 4(|x| - |y|)$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+15}{6-n} = -5$.
6. Вычислите пределы последовательностей:
а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+10)^2 + (3n+1)^2}{(n+6)^3 - (n+1)^3}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6+4} + \sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+6} - \sqrt{n-6}}$;
в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n(n+5)} - n \right)$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-1} \right)^{2n-n^3}$.

7. Вычислите пределы функций:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x^2} - 4}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{1/(x-\pi/2)}. \end{array}$$

8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{2x}}{2 \operatorname{tg} x - \sin x}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} & \text{б) } f(x) = \frac{2|x-1|}{x^3 - x^2}, \\ & x \neq 0, x \neq 1, \\ & f(0) = 0, f(1) = 2. \end{array}$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{2k+1}{k^2+k} \right) \cdot \sin \left(\frac{1}{k^2+k} \right)$.

2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k^2 + 1}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n, \inf x_n$, если

$$x_n = \frac{(1 + \cos(\pi n))n + \lg n}{\lg(2n)}.$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^n}, x \geq 0.$$

Вариант № 14

1. Найдите область определения функции $y = \log_3 \left(\frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 + 5x - 6} \right)$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = x^2 + 5x - 6$ и $g(x) = \lg(x - 8)$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = 2 \arctg(x - 1) - \frac{\pi}{2}$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|y - 1| + |x - 3| = y + 4$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - n^2}{2n^2 + 1} = -\frac{1}{2}$.
6. Вычислите пределы последовательностей:
а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)^3 + (3n + 2)^3}{(2n + 3)^3 - (n - 7)^3}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - \sqrt[4]{n^3}}{(\sqrt[3]{n^6 + n^3 + 1} - 5n)^{2n+1}}$;
в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 + 8} \left(\sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 - 1} \right)$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 21n - 7}{2n^2 + 18n + 9} \right)^{2n+1}$.
7. Вычислите пределы функций:
а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt[3]{x/4} - 1/2}{\sqrt{1/2 + x} - \sqrt{2x}}$;
в) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^\pi - e^x}{\sin 5x - \sin 3x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{\frac{3x-1}{x-1}}$.
8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 7^x}{\arcsin 3x - 5x}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 2(1 - 2^{\frac{x}{1-x}})^{-1}, & x \neq 0, x \neq 1, \\ 1, & x = 0, x = 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}, \quad x \neq \pi k, f(\pi k) = 0, k \in \mathbb{Z}.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{9}{9k^2 + 21k - 8}$.
2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{k^{2,5}}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 4$, $n \geq 1$.
4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = \frac{n}{n-3} \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right).$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Вариант № 15

1. Найдите область определения функции $y = \frac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = \log_2(x-3)$ и $g(x) = \sqrt{x-1}$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = \sqrt{3-x} - 2$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно:

$$(|y+1| - 2)(|x| + 1) = 1.$$

5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3}$.

6. Вычислите пределы последовательностей:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 - (n+2)^3}{(3n+2)^2 + (4n+1)^2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4} - \sqrt[5]{n^5+5}}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^3+1)(n^2+3)} - \sqrt{n(n^4+2)}}{2\sqrt{n}}; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n-3}{10n-1} \right)^{5n}. \end{aligned}$$

7. Вычислите пределы функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{\sqrt[3]{x/9} - 1/3}{\sqrt{1/3+x} - \sqrt{2x}}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2\pi x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \cos 3x)^{\sec x}. \end{aligned}$$

8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-5x}}{2 \sin x - \operatorname{tg} x}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \notin [-1, 1], \\ \arcsin x \operatorname{ctg} x, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^2 - 2x + 1}, & x < 1, \\ 2x + 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{9k^2 - 3k - 2}$.

2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \cos^2 k}{5^k}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} - 1$, $n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = \left(2 + \cos \frac{\pi n}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{n} \cos \frac{\pi n}{6}\right).$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n}, \quad x \geq 0.$$

Вариант № 16

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt[4]{\frac{x^4 - 1}{x^2 - 4x - 5}}$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = \arccos(2x + 1)$ и $g(x) = \log_2 x$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = \frac{2 - x}{x + 1}$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|2x + y| + |2x - y| = 4$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 1}{5n + 1} = \frac{3}{5}$.
6. Вычислите пределы последовательностей:
а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)^3 - (2n + 3)^3}{(2n + 1)^2 + (2n + 3)^2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[4]{11n} + \sqrt{25n^4 - 81}}{(n - 7\sqrt{n})\sqrt{n^2 - n + 1}}$;
в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 + 2)} - \sqrt{(n^2 - 1)(n^2 - 2)} \right)$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 5n}{3n^2 - 5n + 7} \right)^{n+1}$.
7. Вычислите пределы функций:
а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1/4} \frac{\sqrt[3]{x/16} - 1/4}{\sqrt{1/4 + x} - \sqrt{2x}}$;
в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - 2^{4-x^2}}{2(\sqrt{2x} - \sqrt{3x^2 - 5x + 2})}$; г) $\lim_{x \rightarrow 2} (2e^{x-2} - 1)^{\frac{3x+2}{x-2}}$.
8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{5x} - 9^{-2x}}{\sin x - \operatorname{tg} x^3}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \left| \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right|, x \neq 0, f(0) = 0;$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{\ln(1 + |x|)}{x}, x \neq 0, f(0) = 0.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 5k + 5}{(k+3)!}$.
2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = 3, \underbrace{123123 \dots 123}_{n \text{ троек}}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = \frac{9}{2}, x_{n+1} = x_n^2 - 8x_n + 20, n \geq 1$.
4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n, \inf x_n$, если

$$x_n = \frac{n+2}{2n+1+n(-1)^n}.$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}.$$

Вариант № 17

1. Найдите область определения функции $y = \arcsin\left(\frac{3x-5}{2-x}\right)$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = \arcsin(x-3)$ и $g(x) = 2e^x$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x), y = f(|x|), y = |f(x)|$, если $f(x) = \operatorname{arctg}(x+2) - \frac{\pi}{2}$.

4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно:

$$|x + 1| - x = |y + 2| - y.$$

5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 3}{2n + 1} = 2$.

6. Вычислите пределы последовательностей:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n - 1)^3}{(n + 1)^4 - n^4}; & \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2 + 5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n + 1}}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} - n\sqrt{n(n^4 + 1)}}{n}; & \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 3}{n + 1} \right)^{-n^2}. \end{aligned}$$

7. Вычислите пределы функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt[7]{x}}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}; & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(x - 1)}{x - 1} \right)^{\frac{\sin(x - 1)}{x - 1 - \sin(x - 1)}}. \end{aligned}$$

8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 3^x, & x < 0, \\ 2 + x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k - 1}{(k + 1)!}$.

2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(1 + k)}{k2^k}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{6}{5} - \frac{1}{5x_n}$, $n \geq 1$.
4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = n \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right).$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + xe^{nx}}{1 + e^{nx}}.$$

Вариант № 18

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x - 4}}$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = x^2 + 3x - 4$ и $g(x) = \ln(x + 4)$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = 3 - \sqrt{2 - x}$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно:
 $|x - 2| + |y + 4| = 2y + 1$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n^2}{4n^2 + 2} = -\frac{1}{2}$.

6. Вычислите пределы последовательностей:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{(n+5)^2 + (n-5)^2}; & \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^7 + 5} - \sqrt{n - 5}}{\sqrt[7]{n^7 + 5} + \sqrt{n - 5}}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^4 + 1)(n^2 - 1)} - \sqrt{n^4 - 1}}{n}; & \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 6n + 5}{n^2 - 5n + 5} \right)^{3n+2}. \end{array}$$

7. Вычислите пределы функций:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{x}}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2-x}{x} \right)^{1/\ln(2-x)}. \end{array}$$

8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 2^{3x}}{\sin x + \sin x^2}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{|x|}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0;$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{3^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 - k - 1}{k!}$.

2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos 2^k}{k!}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = 10$, $x_{n+1} = \sqrt{4x_n + 1}$, $n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = 3^{n(-1)^n}.$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n x.$$

Вариант № 19

1. Найдите область определения функции $y = \log_2 \left(\frac{x^3 - 2x^2 + x}{2x^2 + x - 3} \right)$.

2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = \log_2(x - 1)$ и $g(x) = \sqrt{x - 4}$.

3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно:
 $|x+3| - y = |y-2| + x$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{10n-3} = \frac{1}{2}$.
6. Вычислите пределы последовательностей:
 а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2} - 5n^2}{n - \sqrt{n^4 - n + 1}}$;
 в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt{n(n-1)} \right)$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+2} \right)^n$.
7. Вычислите пределы функций:
 а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(x/2)}{\pi - x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)^{1/\cos x}$.
8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < 1, \\ (x-1)^2, & x \in [1, 2], \\ 3-x, & x > 2; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{3 - 3^{\frac{1}{x+1}}}, \quad x \neq 0, x \neq 1, \\ f(0) = 0, f(1) = 0.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности:

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\sqrt{k+2} + \sqrt{k} \right) \cdot \sqrt{k(k+2)}}$$

2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = 0, \underbrace{888 \dots 8}_{n \text{ цифр}}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3x_n}$, $n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = \frac{n}{2n-1} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln(2^{2n} + x^{2n})}, \quad x \geq 0.$$

Вариант № 20

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt[4]{\frac{x^4 + 5x^2 - 6}{x^2 - 4}}$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = 3^x$ и $g(x) = \arccos(3x)$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = 1 + 4 \sin x$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|x + y| + y = |x| + 1$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 2n}{3 + 4n} = -\frac{1}{2}$.

6. Вычислите пределы последовательностей:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}; & \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2} - \sqrt[5]{n^5+2}}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\sqrt[3]{n^2(n^6+4)} - \sqrt[3]{n^8-1} \right); & \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2 + 18n - 15}{7n^2 + 11n + 15} \right)^{n+2}. \end{aligned}$$

7. Вычислите пределы функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x + 3x^2} - (1 + x)}{\sqrt[3]{x}}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(\pi - 3x)}; & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{\sin(\pi x/2)}{\ln(2-x)}}. \end{aligned}$$

8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 2^{3x}}{\operatorname{arctg} 2x - 7x}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \sin x + 2, & x \leq 0, \\ x + 2, & x \in (0, 2], \\ \frac{1}{2-x}, & x > 2; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{e}\right)^{x+\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 8k + 3}$.

2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = 1 + \frac{\cos \alpha}{\alpha} + \frac{\cos \alpha^2}{\alpha^2} + \dots + \frac{\cos \alpha^n}{\alpha^n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$, $n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = \frac{n \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{n+1}.$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + x^{2n}}{(x+1)^n + 4^n}}, \quad x \geq 0.$$

Вариант № 21

1. Найдите область определения функции $y = \arccos\left(\frac{2x-3}{x+2}\right)$.

2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ и $g(x) = \log_2(x + 5)$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = \sqrt{x + 4} - 2$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|y - 2| + |2x - 4| = x + 2$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{23 - 4n}{2 - n} = 4$.
6. Вычислите пределы последовательностей:
 - а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^3 - (n - 1)^3}{(n + 1)^2 + (n - 1)^2}$;
 - б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{71n} - \sqrt[3]{64n^6 + 9}}{(n - \sqrt[3]{n})\sqrt{11 + n^2}}$;
 - в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n\sqrt{n} - \sqrt{n(n + 1)(n + 2)} \right)$;
 - г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n - 1}{2n + 1} \right)^{n+1}$.
7. Вычислите пределы функций:
 - а) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 - 2x)}{\sin 2\pi x}$;
 - г) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3} \right)^{1/(x-3)}$.
8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-2x}}{x + \sin x^2}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \leq 0, \\ x + 1, & x \in (0, 2], \\ \frac{1}{x - 2}, & x > 2; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln \frac{1}{x}}, & x \neq 0, x \neq 1, \\ f(0) = 0, f(1) = 0. \end{cases}$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{4k^2 + 2k - 1}{(2k + 1)!}$.

2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{arctg} 5^k}{k^4}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{10} + 2x_n^2$, $n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = n \cos \left(\frac{\pi n}{2} \right) + (-1)^n.$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3^n + x^{-n})}{\ln(x^n + 3^{-n})}, \quad x > 0.$$

Вариант № 22

1. Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\arccos(x-3)}$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = 3 \log_3 x - 2$ и $g(x) = \sqrt{x+8}$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = \frac{1-x}{x+2}$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|y-1| - |x-2| = x+1$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3n}{6-n} = -3$.
6. Вычислите пределы последовательностей:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 + (n-2)^3}{n^4 + 2n^2 - 1}; & \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3} + \sqrt[4]{n^3+1}}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \left(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)} \right); & \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+n+1}{n^3+2} \right)^{2n^2}. \end{aligned}$$

7. Вычислите пределы функций:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x} - 4)^2}};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x + 1}{2x} \right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}.$$

8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^{-7x}}{2x - \operatorname{tg} x}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x < 2, \\ x^2 - 1, & x \geq 2; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}},$$

$x \neq 1, f(1) = 0.$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{(k+2)!}$.

2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = 5, \underbrace{1212 \dots 12}_{n \text{ пар}}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = \frac{5}{2}, x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 6, n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n, \inf x_n$, если

$$x_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n(2+(-1)^n)}.$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + 2^n + x^{-n}}, x > 0.$$

Вариант № 23

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^3 - 27}}$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{4x-1}}$ и $g(x) = \frac{1}{x^2}$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = 3 \arctg(x+2) + \frac{\pi}{2}$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $x^2 + y^2 = 2|x| - 4|y|$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n+5} = 2$.
6. Вычислите пределы последовательностей:
а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 - 3n}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^8+6} - \sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6} + \sqrt{n-6}}$;
в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n-4})$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{13n+3}{13n-10} \right)^{n-3}$.
7. Вычислите пределы функций:
а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + x^5}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$;
в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{1 - \sqrt{x}}$; г) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\frac{18 \sin x}{\operatorname{ctg} x}}$.
8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin 2x - \sin x}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{7 + 3^{\frac{1}{x-1}}}, \quad x \neq 1, \quad f(1) = 0.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{4}{16k^2 + 24k + 5}$.
2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{arctg} k^2}{k!}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = 3$, $x_{n+1} = x_n^2 - 6x_n + 12$, $n \geq 1$.
4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = \frac{1 + n^2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n + 1}.$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(5^n + x^n + x^{-n})}{2n}, \quad x > 0.$$

Вариант № 24

1. Найдите область определения функции $y = \lg \left(\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} \right)$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = x^2 + 5x$ и $g(x) = \log_3(x - 6)$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = 2 - \sqrt{-x - 2}$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|x + 1| - |y - 2| = 3$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2}{4n^2 - 1} = \frac{3}{4}$.

6. Вычислите пределы последовательностей:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1}; & \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^3 + 1}}{\sqrt[3]{n^6 + 2} - n}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^4 + 3} - \sqrt{n^4 - 2} \right); & \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 3}{2n^2 + 2n + 1} \right)^{3n^2 - 7}. \end{aligned}$$

7. Вычислите пределы функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x^2 - 16}}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{10 - x}}{\sin 3\pi x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}. \end{aligned}$$

8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x + \operatorname{tg} x^2}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x > 0, \\ 2 - x, & x \leq 0; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{|x - 1|}{x^2 - x^3}, \quad x \neq 0, x \neq 1, f(0) = 0, f(1) = 0.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{9k^2 + 4k - 2}$.

2. Используя Критерий Коши, докажите, что у последовательности существует предел

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(1 + k)}{k^3 + 5k}.$$

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = \sqrt{3}$, $x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}$, $n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = \frac{((-1)^n - 1)n^2 + n + 1}{n}.$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln((x + 1)^n + 3^n)}{\ln(x^{2n} + 4^n)}, \quad x \geq 0.$$

Вариант № 25

1. Найдите область определения функции $y = \arcsin \left(\frac{5x - 2}{3 - x} \right)$.
2. Найдите суперпозиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и их области определения, если $f(x) = \arcsin x$ и $g(x) = \sqrt{x^2 - \frac{\pi^2}{4}}$.
3. Постройте эскизы графиков функций $y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, если $f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$.
4. Постройте эскиз графика функции, заданной неявно: $|x + y| - |x - y| = 2$.
5. Докажите, используя определение предела последовательности (т. е. для ε найдите соответствующее значение $N(\varepsilon)$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 3n^2}{5n^2 + 4} = -\frac{3}{5}$.
6. Вычислите пределы последовательностей:
а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2)^2 - (n - 2)^2}{(n + 3)^2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 1}}{\sqrt[4]{n + 1} - \sqrt[5]{n^5 + 1}}$;
в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n + 1)(n + 2)} \left(\sqrt{n^3 - 3} - \sqrt{n^3 - 2} \right)$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 5}{n - 7} \right)^{n/6 + 1}$.
7. Вычислите пределы функций:
а) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$; б) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{10 - x - 6\sqrt{1 - x}}{2 + \sqrt[3]{x}}$;
в) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right)^{\frac{1}{\cos(x/2)}}$.
8. Используя теорему о замене б. м. эквивалентными, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{x + \arcsin x^3}.$$

9. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва (если таковые есть) и определите их тип. Постройте эскизы графиков этих функций.

$$\text{а) } f(x) = 5 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x-1}{x}}, \quad x \neq 0, f(0) = 0.$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}, \quad x \neq -1, f(-1) = -2.$$

Дополнительные задачи к варианту

1. Найдите предел последовательности:

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\sqrt{k+3} + \sqrt{k+2}) \cdot \sqrt{(k+3)(k+2)}}.$$

2. Используя критерий Коши, докажите, что у последовательности

$$x_n = 1, \underbrace{432432 \dots 432}_{n \text{ троек}}$$

существует предел

3. Примените теорему Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) для доказательства существования предела последовательности и найдите этот предел: $x_1 = 4$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$, $n \geq 1$.

4. Для последовательности x_n найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, если

$$x_n = (-1)^n \frac{3n-1}{n(1+2(-1)^{n+1})}.$$

5. Постройте эскиз графика функции, заданной соотношением

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3^n + x^n)}{n}, \quad x \geq 0.$$