

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра математического анализа

51(07)
Д-436

В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина, А.А. Эбель

**ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ
ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

Сборник задач

Часть 3

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2005

Типовой расчет №2

Ряды

В а р и а н т 1

Исследуйте на сходимость ряды.

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n} \operatorname{arctg}(n^2 + 1)}.$$

2.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{(n-1)! \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+2}\right)}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2+2n-2}.$$

4.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln(1+n^2)(1+n^2)\ln\ln(1+n^2)}.$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)}{2n+1}.$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(3n+2)}{n^2+n-1}.$$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,01$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n^2}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^{n-1}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2} + \cos(2x) - 3 - \frac{5}{3}x^4}{2\ln(1-x^2) + \operatorname{arctg}(2x^2) + x^4}.$$

10. Вычислите десятую производную в нуле от функции

$$y = x^2 e^{2x^2}.$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \ln(x^2 - 2x + 4)$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = 1$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001:

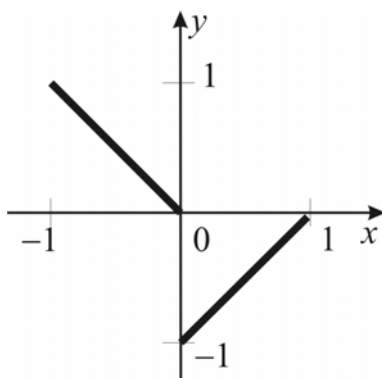
$$\int_0^{0.5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до четвертой степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y'' + xy' + 2y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

14. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = \frac{x^2}{4}$ в интервале $(-\pi; \pi)$.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 2

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(n + \sqrt{n}) \sin \frac{2 + (-1)^n}{n^3}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}\right)}{2^{n^2}}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{3n^2+5n-1}$.
4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^3}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)}{3n-1}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+3} \sin(n^2+5)}{n^4+2}$.
7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,01$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)!}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n}) \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{n+2}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} + x \sin x - e^{\frac{x^4}{3}}}{\ln(1+x^2) - x \arcsin x + \frac{2}{3}x^4}.$$

10. Вычислите двенадцатую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = e^{x^2+4x-2}$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = -2$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

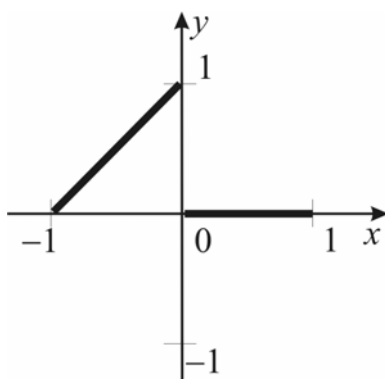
$$\int_0^{0,25} \frac{\sqrt{x}}{e^x} dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = xy + y^2; \quad y(0) = 1.$$

14. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = |\sin x|$.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 3

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2n+1) \left(4 + \cos^2 \frac{\pi n}{2}\right)}{n(n+1)}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1) \sin\left(\frac{1}{n^2+3}\right)}{(n+1)!}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}} \left(\frac{n-5}{n+4}\right)^{2n^2+4n+3}$.

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\ln(1+n^3)(1+n^3)(\ln \ln(1+n^3))^2}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}+2}\right)}{5n+7}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2 \cos(4n^2+3n+2)}{n^3+n+3}$.

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) \left(\frac{3x-1}{2-x}\right)^{n-2}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{30}}{x \ln(1+x^3) - \operatorname{arctg}(x^4)}.$$

10. Вычислите восьмую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{\sin(3x) - 3x}{x^3}, & x \neq 0, \\ -\frac{9}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = x \operatorname{arctg}(2x^2 + 4x + 2)$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = -1$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

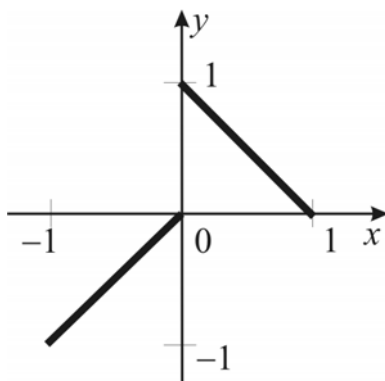
$$\int_0^{0,8} x^2 \cos x \, dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до четвертой степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y'' = ye^x + 1; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 1.$$

14. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ в интервале $(0; 2\pi)$.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 4

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + \sin n^2}{\left(\sqrt[3]{n^7} + 1\right) \operatorname{arctg}(4n + 9)}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n (n!)^2}{(2n)! \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n} + n}\right)}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \left(\frac{3n+2}{3n-4}\right)^{5n^2-2n-1}.$

4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (1 + \ln^2 \ln n)}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[4]{n} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{n+2}}\right)}{4n-3}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3} \sin(\ln(e+n))}{n^5 + n^2 + 5}.$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!(2n+1)}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n}) \left(\frac{2x+1}{2-3x}\right)^{n+1}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-4x^2} - \cos(2x) + \frac{8}{3}x^4}{3x^3 \arcsin(2x) + x^2 \ln(1-6x^2)}.$$

10. Вычислите тринадцатую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{\ln(1-x^3)}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \sin(x^2 + 6x + 7)$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = -3$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

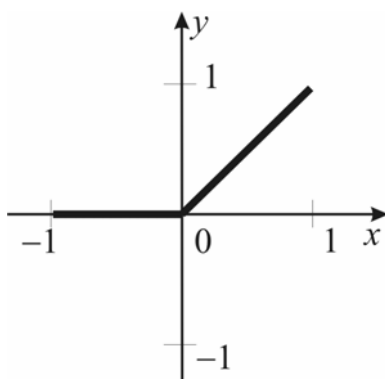
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = e^y + xy; \quad y(0) = 0.$$

14. Функцию $f(x) = x^2$ в интервале $(0; \pi)$ разложите в ряд синусов.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 5

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + (-1)^n) \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{n} + 2n)}{3n - \sqrt{n}}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)! \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{(3n+5)2^n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{9^n} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{-(3n^2+5)}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+n+1)(1+\ln^2(n^2+n+1))}$.

5. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n-3}}\right)}{8n-5}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(n^3+n+2)}{n^6+7n-6}$.

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,01$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^3(n+1)}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \left(\frac{4x+3}{x-1}\right)^{n-1}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x \sin x + \operatorname{arctg}(x^4) - 6x^2}{\sqrt[3]{1+3x^2} - e^{x^2} + \frac{3}{2}x^4}.$$

10. Вычислите пятнадцатую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+2x^4} - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \ln(x^2 + 8x + 18)$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = -4$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

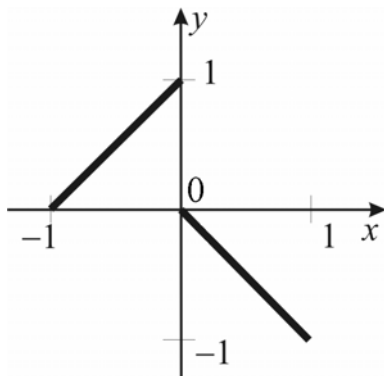
$$\int_0^{0.5} e^{-x^2} dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = \sin y - \sin x; \quad y(0) = 0.$$

14. Функцию
$$\begin{cases} 2x, & \text{при } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$
 разложите в ряд косинусов.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 6

Исследуйте на сходимость ряды.

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\cos 2n} \operatorname{arctg}(\sqrt[7]{n} + 9)}{n^3 + 2}.$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} \sin\left(\frac{5}{3^n}\right)}{(n!)^2}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^{2n+5}} \left(\frac{4n+1}{4n+9} \right)^{\frac{n^2}{2}+3n+1}.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(\ln(8n-2))}{(1+\ln^2(8n-2))(8n-2)}.$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[7]{n^2} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[6]{n}+2}\right)}{2-3n}.$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4 \sin(n+4)}{\sqrt{n^3+1}}.$$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,0001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}) \left(\frac{2x-1}{3x+2} \right)^{n+2}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{2x^2} - \sqrt{1+4x^2})}{\arcsin x + \sin x - 2x}.$$

10. Вычислите десятую производную в нуле от функции

$$y = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^3}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{6}, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \cos(x^2 - 6x + 5)$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = 3$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

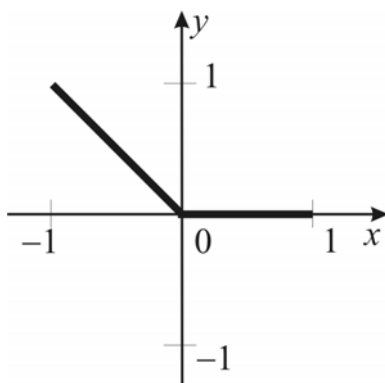
$$\int_0^{0,5} x^2 \operatorname{arctg} x \, dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = y + \frac{x^2}{y}; \quad y(0) = 1.$$

14. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = 3 - x$ в интервале $(-2; 2)$.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 7

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2 + \cos \pi n)}{(2n^2 - 1) \operatorname{arctg}(n^2 + n^3)}.$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{7^n (n!)^2 \sin\left(\frac{1}{7^n}\right)}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{-(4n^2+5)}}{8^{2n-1}}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n-1}{(4n^2-n) \ln(4n^2-n) (\ln \ln(4n^2-n))^3}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n^2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n+4}}\right)}{2n-5}.$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left(4n + \frac{\pi}{3}\right)}{n^4 + n}.$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для вычисления суммы с заданной точностью.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+3} - n) \left(\frac{x+3}{5-2x} \right)^{n+1}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + 2x \operatorname{arctg} x - 1}{\ln(1 + 2x^3) - 2 \sin(x^3)}.$$

10. Вычислите тринадцатую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{e^{x^3} - 1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \sin(x^2 - 4x + 1)$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = 2$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

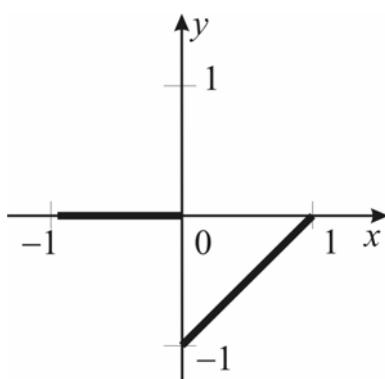
$$\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x} dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = x + y^2; y(0) = 1.$$

14. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ в интервале $(-3; 3)$.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 8

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{\cos \sqrt{n}} \operatorname{arctg} \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 - 1}}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n! \arcsin(3^{-n})}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{3n+5}{3n-6}\right)^{4n^2+n+3}}{6^{3n-5}}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt[3]{n^7 + n^5 - 1}}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n+1}{(3n^2+n)(1+\ln^2(3n^2+n))\operatorname{arctg}^2(\ln(3n^2+n))}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[4]{n^3} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{n^2+1}}\right)}{7n+9}.$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3^n}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=3}^{\infty} (\sqrt{2n} - \sqrt{2n-5}) \left(\frac{2x-3}{1-x}\right)^{n-2}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x - 2 \ln(1+x^2) + \frac{x^4}{3}}{1 - \frac{x^4}{6} + x \operatorname{arctg} x - \sqrt{1+2x^2}}.$$

10. Вычислите семнадцатую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{\cos(x^2) - 1}{x^3}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = e^{x^2-2x+4}$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = 1$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

$$\int_0^{0,5} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx.$$

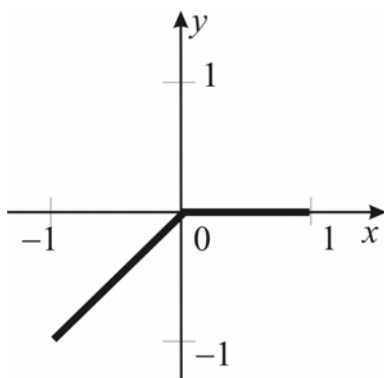
13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до четвертой степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y'' = xy y'; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -1.$$

14. Разложите функцию в ряд Фурье по косинусам

$$\begin{cases} \cos \pi x, & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{при } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 9

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\sqrt{n})}{(n^2 + 3) \operatorname{arctg} \sqrt[3]{n^2 + 5}}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{5^n} \right).$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{5n+1}{5n+4} \right)^{-5n^2-2n+1}}{9^{2n+1}}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{(n^2 + 2n + 2)(1 + \ln^2(n^2 + 2n + 2))}.$

5. $\sum_{n=1000}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[5]{n^3} \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n} - 9} \right)}{9n + 7}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3 \sin \left(3n - \frac{\pi}{2} \right)}{n^3 + 1}.$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(2n-1)^2 (2n+1)^2}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3n} - \sqrt{3n-2}) \left(\frac{4x+1}{x+3} \right)^{n+3}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - 1}{\arcsin(x^2) - x^2 e^{x^4}}.$$

10. Вычислите девятнадцатую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{\sin(x^3)}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \ln(x^2 + 6x + 11)$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = -3$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$$

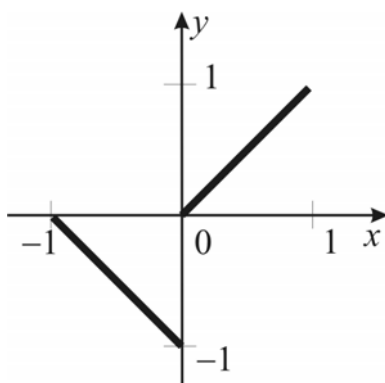
13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = xy^2 - 1; \quad y(0) = 1.$$

14. Разложите в ряд Фурье функцию

$$\begin{cases} -1, & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 10

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\cos n}}{(3n-1)\operatorname{arctg}(2n+4)}.$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2-1)}{n!} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{6^n}\right).$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n-3}} \left(\frac{7n+2}{7n-3}\right)^{3n^2-5n+3}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\ln(2+n^3)(2+n^3)\ln\ln(2+n^3)}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[5]{n^4} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+8}}\right)}{4n+5}.$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)}{n^2 + 4n - \sqrt{n}}.$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,0001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{((2n+1)!)^2}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=3}^{\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n-3}) \left(\frac{x-1}{4x+2}\right)^{n-1}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{arctg} x - x \ln(1-2x^2) - 3x - \frac{13}{5}x^5}{x \left(\sqrt[6]{1+4x^4} - \cos 2x - 2x^2 \right)}.$$

10. Вычислите десятую производную в нуле от функции

$$y = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x^2)}{x^2}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 12}$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = -2$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

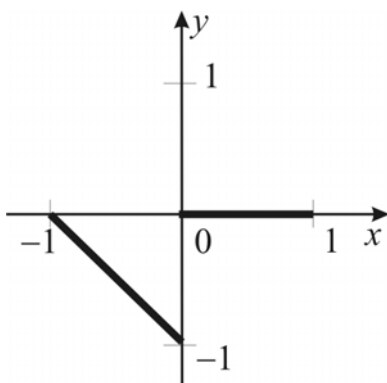
$$\int_0^1 \frac{x - \sin x}{x^3} dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = x^2 y^2 - 1; \quad y(0) = 1.$$

14. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos \alpha x$ при $-\pi < x < \pi$ (α – не целое).

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 11

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sin n} \operatorname{arctg} \sqrt[n]{n^2 + 9}}{n^2 + 4}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{n(n+2)!} \sin\left(\frac{1}{3^n}\right).$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{5^{n+1}} \left(\frac{5-3n}{2-3n}\right)^{3n^2+n-2}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2 + 1) \ln(n^2 + 1) (1 + \ln^2 \ln(1 + n^2))}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n^7} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n^2 + 8}}\right)}{n^2 + 3}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 7 \sin\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{3}\right)}{n^4 + 2n}.$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n \frac{1}{((2n)!)^2}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2n+2} - \sqrt{2n-2}) \left(\frac{4x+3}{1-x}\right)^{n+2}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^3} - 2 \sin(x^3) - 1}{x \left(\arcsin 2x - 2x \sqrt{1+4x^2} + \frac{8}{3} x^3 \right)}.$$

10. Вычислите тринадцатую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+3x^3} - 1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \cos(x^2 - 8x + 14)$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = 4$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

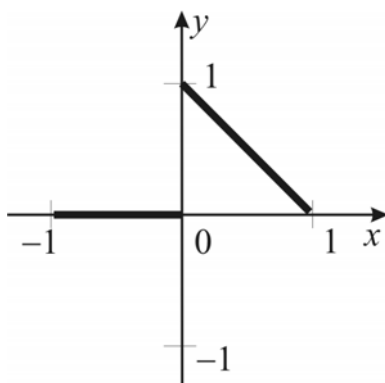
$$\int_0^{0,5} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = 1 + x + x^2 - 2y^2; \quad y(1) = 1.$$

14. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$ в интервале $(-\pi; \pi)$.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 12

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 n}{(n^3 + 5) \operatorname{arctg}(n^2 + n + 1)}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt{n+4}}\right).$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n-5}} \left(\frac{6n+5}{6n-7}\right)^{3n^2-2n+1}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2(\ln(3n+1))}{(1 + \ln^2(3n+1))(3n+1)}.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}\right)}{5n-4}.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos\left(3n + \frac{\pi}{2}\right)}{n^4 + 7n^2 - n}.$
7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,01$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n \frac{1}{n}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n-1}) \left(\frac{x-3}{2-4x}\right)^{n-2}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6e^{x^2} + 3\cos(2x) - 9 - 5x^4}{x \arcsin(2x) + \frac{1}{3} \ln(1-6x^2) + \frac{14}{3} x^4}.$$

10. Вычислите двенадцатую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = e^{2x^2+4x}$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = -1$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых.

$$\int_0^1 \frac{x}{e^{x^3}} dx.$$

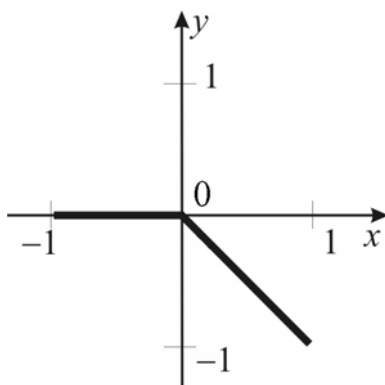
13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = xy^2 - 1; \quad y(0) = 1.$$

14. Разложите в ряд Фурье в интервале $(-\pi; \pi)$ функцию

$$\begin{cases} -\frac{\pi+x}{2}, & \text{при } -\pi < x < 0, \\ \frac{\pi-x}{2}, & \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 13

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(3 + \cos \pi n) \operatorname{arctg} \sqrt[4]{n^3 + 2}}{n^5 + 4}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{7^{2n}} \right)$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3 \sin \left(\frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{4} \right)}{n^2 + 10n + 2}$.
4. $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^{n+2} \left(\frac{2n+5}{2n-4} \right)^{-n^2-2n-8}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n-5}{(3n^2-5n+9)(1+\ln^2(3n^2-5n+9))}$.
6. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[8]{n^5} \sin \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n+5}} \right)}{n^2-4}$.
7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,0001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{7^n}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{4n+1} - \sqrt{4n-2} \right) \left(\frac{5x+2}{2x+3} \right)^{n+1}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x^2) + \frac{1}{2} x^4}{2\sqrt[3]{1+3x^2} - 2e^{x^2} + 3x^4}.$$

10. Вычислите одиннадцатую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \sin(x^2 + 8x + 18)$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = -4$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

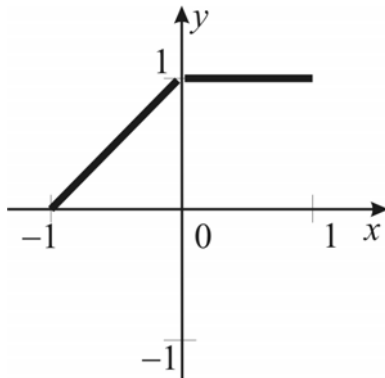
$$\int_0^{0,5} \frac{\cos x - 1}{x^2} dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = e^{2xy} + y; \quad y(0) = 0.$$

14. Разложите функцию $f(x) = \sin x$ в интервале $(0; \pi)$ в ряд косинусов.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 14

Исследуйте на сходимость ряды.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + 3) \operatorname{arctg} \sqrt{n^3 + 4n}}{n^3 (2 + \cos \pi n)}. \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi n}{3} \right)}{9n^{\frac{5}{2}} + n^{\frac{3}{2}} - 2}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[8]{n^7} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n} + 9} \right)}{n^2 + 8}. \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^{n+4}} \left(\frac{9n+5}{9n-2} \right)^{n^2-4n+2}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1 + \ln^2(2n^2 + 3))(2n^2 + 3) \operatorname{arctg}^3(\ln(2n^2 + 3))}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n)!} \sin \left(\frac{1}{n^4 + 2} \right).$$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,0001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3} \right)^n \frac{1}{n}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n-2} \right) \left(\frac{2x-1}{5x-2} \right)^{n-3}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - 1}{\arcsin(x^2) - x^2 e^{x^4}}.$$

10. Вычислите десятую производную в нуле от функции

$$y = \begin{cases} \sin x - x + \frac{x^3}{6}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \ln(x^2 - 4x + 8)$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = 2$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

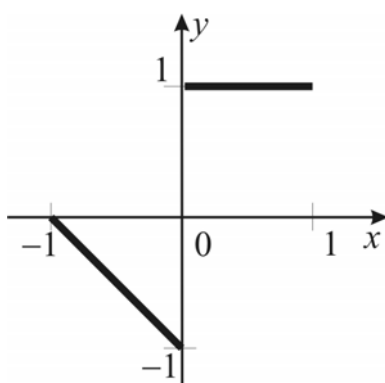
$$\int_0^{0,8} \frac{\sin x - x}{x^3} dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до четвертой степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y'' + xy^2 = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

14. Разложите функцию $f(x) = 2x$ в интервале $(0; 1)$ в ряд синусов.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 15

Исследуйте на сходимость ряды.

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3 \operatorname{arctg} \sqrt{n+1}}} \sin\left(\frac{2+(-1)^n}{6} \pi\right).$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n}+n}\right).$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n+3}} \left(\frac{-2n+3}{-2n-3}\right)^{-2n^2+5n+4}.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2}{(2n^3+1) \ln(2n^3+1) (1+\ln^2 \ln(2n^3+1))}.$$

5.
$$\sum_{n=1000}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[7]{n^5} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}-3}\right)}{16-n}.$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2 \sin\left(\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{5}\right)}{7n^{\frac{7}{2}} + 2}.$$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n)!}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\sqrt{2n+5} - \sqrt{2n-5}\right) \left(\frac{5x+3}{3-2x}\right)^{n-1}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} + x \sin x - e^{\frac{x^4}{3}}}{\sqrt{1-x^2} - \cos x + \frac{x^4}{6}}.$$

10. Вычислите двенадцатую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = e^{2x^2+4x}$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = -1$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

$$\int_0^1 \frac{x}{e^{x^3}} dx.$$

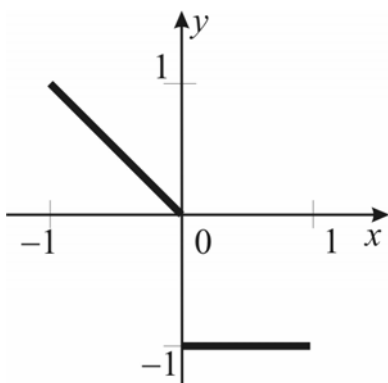
13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = xy^2 + 1; \quad y(1) = 0.$$

14. В интервале $(0; 2)$ разложите в ряд синусов функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{при } 1 < x < 2. \end{cases}$$

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 16

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n \operatorname{arctg} n^3}{n^3 + 1}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n)!^3 2^{3n}}{(3n)!} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2^{3n}} \right).$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^{n+2}} \left(\frac{3n+2}{3n+8} \right)^{-3n+n^2+2}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{(n^2+5n) \ln(n^2+5n) \ln \ln(n^2+5n)}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n} \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt[5]{n^2+7}} \right)}{9-4n}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \left(\frac{8\pi}{15} n + \pi \right)}{\sqrt[3]{n^8} + n + 2}.$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,01$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{3n!}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-4} \right) \left(\frac{2x-3}{2-5x} \right)^{n+3}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) + \frac{2x^4}{3} - x \arcsin x}{\frac{1}{6} \operatorname{arctg}(x^4) + x \sin x - x^2}.$$

10. Вычислите одиннадцатую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x^2) - 2x^2}{x^3}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \cos(x^2 - 10x + 24)$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = 5$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

$$\int_0^{0,4} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^2} dx.$$

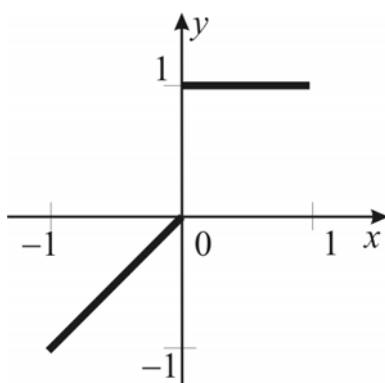
13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = xy - y^2; \quad y(0) = -1.$$

14. Разложите функцию $f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{при } 1 < x < 2 \end{cases}$ в ряд

косинусов в интервале $(0; 2)$.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 17

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi + \sin n}{(n^2 + 1) \operatorname{arctg} \sqrt[4]{n+2}}.$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n + 1)(2n)!} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{3^n + 1} \right).$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{6^{n+1}} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-(n^2 - 7n + 2)}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2 + 2n}{(3n^3 + n^2 + 2)(1 + \ln^2(3n^3 + n^2 + 2))}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[6]{n^5} \sin \left(\frac{1}{\sqrt[5]{n^2 + 16}} \right)}{10n + 3}.$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 7 \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \pi n \right)}{\sqrt[5]{n^9} + \sqrt{n} - 3}.$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,00001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n)!}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{4n+3} - 2\sqrt{n} \right) \left(\frac{3x+4}{x-3} \right)^{n-2}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x^3) - 2\sin(x^3)}{2x \operatorname{arctg}(2x) - \sqrt{1 + 8x^2} + 1 - \frac{8}{3}x^4}.$$

10. Вычислите девятую производную в нуле:

$$y = \begin{cases} \frac{\sqrt[4]{1 + 2x^3} - 1}{x^3}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = e^{3x^2-6x}$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = 1$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

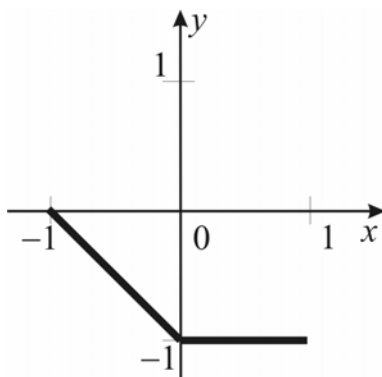
$$\int_0^{0,75} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2} dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = y^2 e^x + 1; \quad y(0) = 2.$$

14. Разложите в ряд косинусов функцию $f(x) = x - 1$ в интервале $(0; 1)$.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 18

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{3}}{(3^n + 2) \operatorname{arctg}(n^2 + 5)}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)}{2^n} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+3}}{7^n} \left(\frac{5n+3}{5n-2}\right)^{n^2-2n+5}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n^3 + 3) \ln(2n^3 + 3) (\ln \ln(2n^3 + 3))^4}.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[4]{n} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{n-3}}\right)}{5n+17}.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos(3n + n^2)}{n^{\frac{10}{3}} + 1}.$
7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n!(2n)!}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=5}^{\infty} \left(\sqrt{n+5} - \sqrt{n-5} \right) \left(\frac{x+1}{3x-4} \right)^{n+2}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x \cos x + 2x^2 - \frac{11}{3}x^3}{\sqrt[3]{1+3x} + (1+x)^{-1} - 2 - \frac{2}{3}x^3}.$$

10. Вычислите тринадцатую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(x^2) - x^2}{x^5}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \sqrt[4]{x^2 + 4x + 20}$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = -2$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

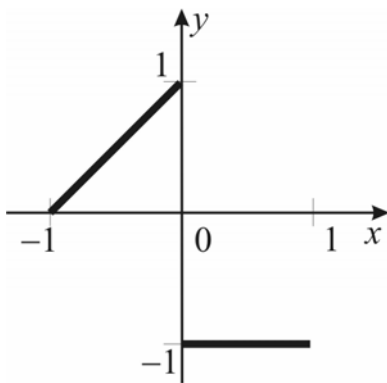
$$\int_0^{0,5} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до пятой степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y''' = y^2 + xy''; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0; \quad y''(0) = 1.$$

14. Разложите в ряд по синусам функцию $f(x) = x + 2$ в интервале $(0; 1)$.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 19

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{4n+3}+2)\cos n}{\sqrt[5]{n^9+1} \operatorname{arctg}\sqrt{n+3}}.$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+9}}\right).$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n+2}} \left(\frac{4n-3}{4n+7}\right)^{4n^2+3n-1}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n+7}{(3n^2+7n)(1+\ln^2(3n^2+7n))}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[6]{n} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[8]{n+7}}\right)}{1 \ln n + 4}.$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n^3+3n^2+3)}{n^7+5}.$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{3n} - \sqrt{3n-4}) \left(\frac{3x+1}{3-x}\right)^{n+3}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \frac{x^2}{2} - \sqrt[6]{1 + \frac{x^4}{4}}}{2 \sin(x^3) - e^{2x^3} + 1}.$$

10. Вычислите двенадцатую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{e^{-x} - 1 + x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \ln(x^2 + 10x + 27)$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = -5$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

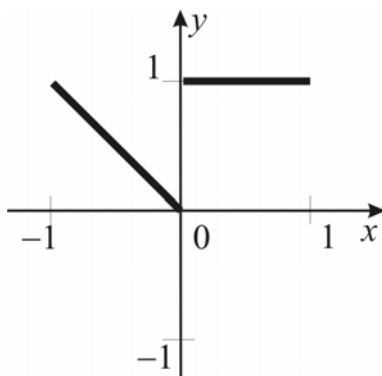
$$\int_0^{0,25} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = x^2 + y^3; \quad y(0) = 2.$$

14. Разложите функцию $f(x) = x^2 - 2x$ в интервале $(0; 2)$ в ряд по косинусам.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 20

Исследуйте на сходимость ряды.

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin \frac{\pi n}{4}}{(1+n)^2 \operatorname{arctg} \sqrt[3]{n^2 + 2}}.$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!} \arcsin \left(\frac{1}{5^n} \right).$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2e)^{n+1}} \left(\frac{8n+9}{8n-5} \right)^{4n^2-2n+4}.$$

4.
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2(\ln(4n-9))}{(1+\ln^2(4n-9))(4n-9)}.$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n} \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt[5]{n} + 7} \right)}{4n+9}.$$

6.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \left(\frac{5\pi}{7} + \frac{2\pi}{3} \right)}{\sqrt[3]{n^8} + \sqrt[4]{n^9} - 2}.$$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(2\sqrt{n} - \sqrt{4n-3} \right) \left(\frac{x+5}{3-4x} \right)^{n-4}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x + \frac{x^3}{3}}{xe^{0,5x^2} - x\sqrt{1+x^2}}.$$

10. Вычислите пятнадцатую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{\cos(x^2) - 1 + 0,5x^4}{x^5}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = x \operatorname{arctg}(2x^2 - 8x + 8)$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = 2$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

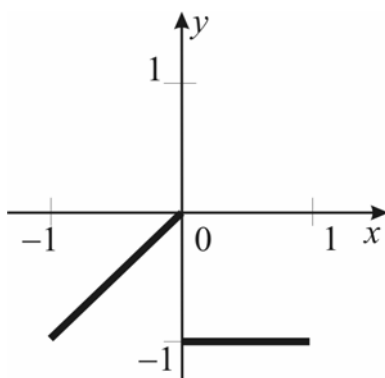
$$\int_0^{0,5} \frac{\sin 2x}{x} dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до пятой степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y''' + x \sin y = 0; \quad y(0) = \frac{\pi}{2}; \quad y'(0) = y''(0) = 0.$$

14. Разложите в ряд по косинусам функцию $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ в интервале $(0; \pi)$.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 21

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\sin^2 2^n) \operatorname{arctg}(8n+6)}{(2-n)^2}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^n}\right)}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{2^{n+1}} \left(\frac{-6n+2}{-6n-3} \right)^{3n^2-6n+1}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{-1}(\operatorname{arctg}(2+3n))}{(1+(2+3n)^2) \operatorname{arctg}(2+3n)}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n^8} \sin\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}+11}\right)}{4n+15}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin\left(\sqrt{n^2+2n-1}\right)}{\sqrt[n]{n^9}+n-4}.$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,00001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n)!}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+2} \right) \left(\frac{6x+3}{2x+3} \right)^{n-2}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x^3) - \operatorname{arctg}(x^4)}{x^2 (\arcsin x + \sin x) - 2x^3}.$$

10. Вычислите одиннадцатую производную в нуле:

$$y = \begin{cases} \frac{\sin(x^2) - x^2}{x^3}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = e^{2x^2+8x}$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = -2$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

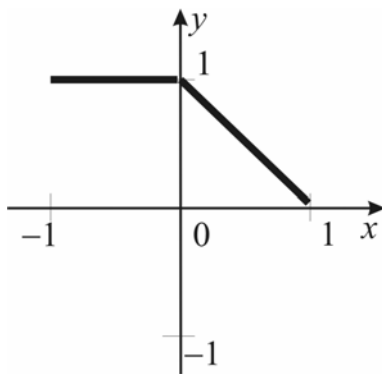
$$\int_0^{0,5} \frac{1 - e^{2x^2}}{x} dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = e^y + xy; \quad y(0) = 0.$$

14. Разложите в ряд по косинусам функцию $f(x) = 1 - x$ в интервале $(0; 2)$.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 22

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n + (-1)^n) \operatorname{arctg}(5n + \sqrt{n})}{3n^2 + 1}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!} \sin\left(\frac{1}{5^n}\right)$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n+1}}{3^{2n-1}} \left(\frac{2n}{2n-3}\right)^{-n^2-9n+6}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \operatorname{arctg}^3(\ln(4n+5))}{(1 + \ln^2(4n+5))(4n+5)}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[7]{n^3} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[9]{n^2} + 1}\right)}{6n^2 + 13}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 0,5 \cos(n^3 + 4)}{\sqrt[3]{n^7} + 3\sqrt{n} - 2}$.
7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{3^n (n+1)}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{4n+5} - \sqrt{4n+1} \right) \left(\frac{2x-1}{5x-1} \right)^{n+1}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + e^{2x^2} - 2 - \frac{8x^4}{3}}{\arcsin(x^2) - \operatorname{arctg}(x^2)}.$$

10. Вычислите девятую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{\ln(1-3x) + 3x}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{9}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = -1$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

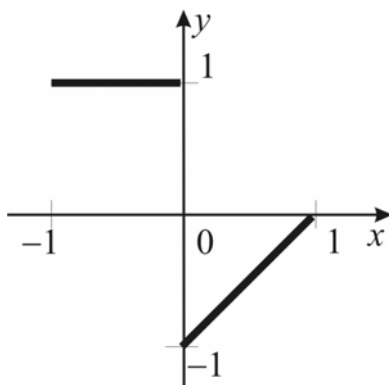
$$\int_0^{0,5} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = xy^2 - 1; \quad y(0) = 1.$$

14. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = x + 1$ на интервале $(0; \pi)$ в ряд по синусам.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 23

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt[3]{n^4 + n^3}}{n^2 \ln n + \sqrt[3]{\ln n}}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!4^n} \arcsin\left(\frac{1}{3^n}\right).$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{7^{2n-5}} \left(\frac{4n+5}{4n-6}\right)^{n-4n^2+2}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{-1}\left(\operatorname{arctg} \frac{n}{3}\right)}{\left(1 + \frac{n^2}{9}\right) \operatorname{arctg} \frac{n}{3}}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n^5} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\frac{4}{n^9} + 15}\right)}{6n^2 + 13}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \frac{1}{3} \sin\left(4n + \frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt[3]{n^8} + 4\sqrt[4]{n} - 3}.$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (2n+1)}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n-5}\right) \left(\frac{4x+5}{3-2x}\right)^{n+4}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x \cos x + 2x^2 - \frac{11}{3}x^3}{x \left(\sqrt[3]{1+3x} + (1+x)^{-1} - 2\right)}.$$

10. Вычислите восьмую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+2x^2} - 1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \cos(x^2 - 12x + 32)$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = 6$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

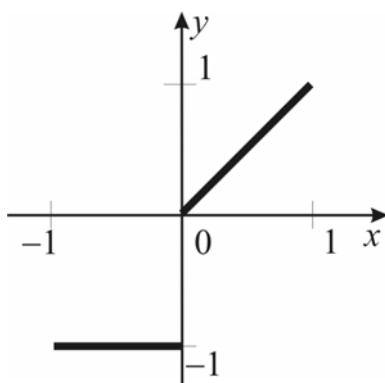
$$\int_0^{0,125} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{x} dx.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = y^2 + \sin x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

14. Разложите функцию $f(x) = 2x - 1$ в интервале $(0; 1)$ в ряд по синусам.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 24

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2 + n + 3)}{\sqrt{n^2 - n} + \cos n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{5^n (n!)^2} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{5^n}\right)$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+5}}{7^{2n+1}} \left(\frac{7n-8}{7n+1}\right)^{-n^2-8n+4}$.
4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln(2n-1) \ln \ln(2n-1)}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{\frac{3}{5}} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}+15}\right)}{4n^2+5}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos(n^4 + n^2 + n)}{\sqrt[7]{n^9+5}}$.
7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,01$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)}{n^3}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{2n+5} - \sqrt{2n+3}\right) \left(\frac{2x-3}{1-5x}\right)^{n+2}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) + \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{3} x^4 - \frac{1}{2}}{e^{x^2} + \ln(1-x^2) - 1}.$$

10. Вычислите девятую производную в нуле от функции

$$y = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(x^3)}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \sin(x^2 - 4x + 3)$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = 2$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

$$\int_0^{0,25} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} dx.$$

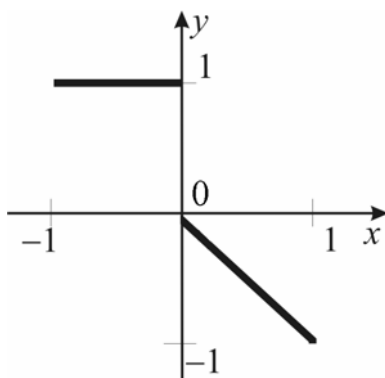
13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до четвертой степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y'' - xy' + y - 1 = 0; \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

14. Разложите функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{при } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ в ряд по

косинусам в интервале $(0; 1)$.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.



В а р и а н т 25

Исследуйте на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(3n^3 + 2)}{n \left(3 + \sin \frac{\pi n}{4} \right)}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n-1)!} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{3^n} \right).$

3. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{4^{2n-1}}{9^n} \left(\frac{n}{n-5} \right)^{-n^2-7n+3}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 4n + 1}{(n^3 + 2n^2 + n)(1 + \ln^2(n^3 + 2n^2 + n))}.$

5. $\sum_{n=13}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[7]{n^5} \sin \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n+9}} \right)}{12 - n}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \left(\frac{5\pi n}{6} + \frac{\pi}{3} \right)}{\sqrt[7]{n^{10}} + 2\sqrt{n} - 5}.$

7. Вычислите сумму ряда с точностью $\alpha = 0,001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)^n}.$$

Укажите наименьшее количество слагаемых, необходимое для этого.

8. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{5n+2} - \sqrt{5n} \right) \left(\frac{2x+3}{x-5} \right)^{n-1}.$$

Исследуйте его на сходимость в граничных точках его области сходимости.

9. Используя разложения функций в степенные ряды, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x \sqrt[3]{1-x^2}}{e^{2x} - \cos 2x - 2x - 4x^2 - \frac{4}{3}x^3}.$$

10. Вычислите девятую производную в нуле

$$y = \begin{cases} \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x^3}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

11. Запишите первые пять ненулевых слагаемых в разложении функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = 1$.

12. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых:

$$\int_0^{0,8} \frac{dx}{e^{x^3}}.$$

13. Найдите несколько первых членов разложения в степенной ряд (до третьей степени включительно) решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$y' = xy^2 + \sqrt{y}; \quad y(0) = 1.$$

14. Разложите функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{при } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ в ряд по синусам

в интервале $(0; 1)$.

15. Разложите в ряд Фурье функцию, периодически продолженную с интервала $(-1; 1)$, на котором она задана графиком. Постройте график суммы этого ряда на отрезке $[-3; 3]$.

