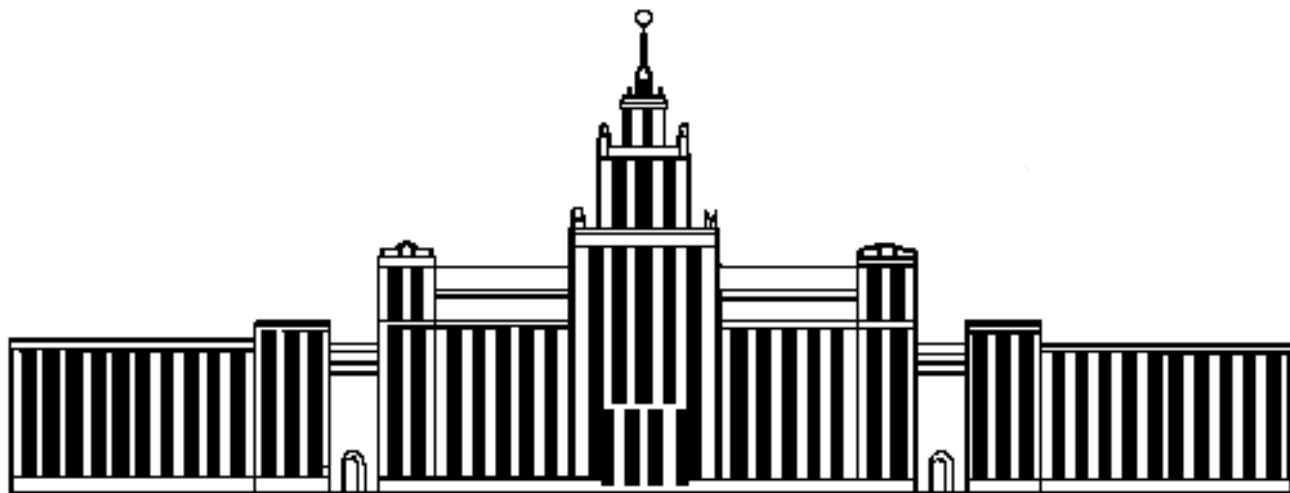

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**



ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

519.2(07)

3-259

В.И. Заляпин, А.В. Кунгурцева, Е.В. Харитонова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 5

Криволинейные и поверхностные интегралы

Сборник контрольных заданий

**Челябинск
2018**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра математического анализа и МПМ

517.1(075.8)
3 - 259

В.И. Заляпин, А.В. Кунгурцева, Е.В. Харитонова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть V

Криволинейные и поверхностные интегралы

Сборник контрольных заданий

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2018

УДК 517.1(075.8)
3-259

Одобрено
учебно-методической комиссией
Института естественных и точных наук ЮУрГУ

Рецензенты:
В.И. Ухоботов, В.Е. Федоров

Заляпин, В.И.
3-259 Математический анализ. Часть V. Криволинейные и поверхностные интегралы: Сборник контрольных заданий / В.И. Заляпин, А.В. Кунгурцева, Е.В. Харитоновна. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2018. – 48 с.

Сборник контрольных заданий предназначен студентам 2 курса факультета математики, механики и компьютерных технологий, обучающимся по направлениям 01.03.01 - математика, 02.03.01 – математика и компьютерные науки, 01.03.02 – прикладная математика и информатика, 01.03.03 – механика и математическое моделирование и 01.03.04 – прикладная математика и изучающим курс «Дополнительные главы математического анализа». Сборник содержит теоретические вопросы, задачи и упражнения для самостоятельной работы по разделу «Криволинейные и поверхностные интегралы», а также варианты индивидуальных заданий.

Задачи и вопросы, сложность которых выше средней, помечены знаком *.

УДК 517.1(075.8)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2018.

Теоретические вопросы

I. Криволинейные интегралы I-го рода.

1. Линия в \mathbb{R}^n . как образ отрезка. Длина отрезка в \mathbb{R}^n .
2. Спрямолинейные линии в \mathbb{R}^n . Гладкие линии. Спрямолинейность гладкой линии.
3. Интеграл Римана по дуге спрямолинейной линии: определение.
4. Существование интеграла от непрерывной функции вдоль гладкой кривой..
5. Свойства криволинейного интеграла – аддитивность, однородность, интегрирование неравенств, теоремы об оценке интеграла.
6. Теорема о среднем.
7. Вычисление криволинейного интеграла для линий на плоскости, заданных явно.
8. Вычисление криволинейных интегралов для линий в \mathbb{R}^n , заданных параметрически.

II. Криволинейные интегралы второго рода. Случай \mathbb{R}^3 .

1. Криволинейные интегралы II-го рода. Определение и элементарные свойства.
2. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.
3. Вычисление криволинейных интегралов II-го рода для случая плоских кривых, заданных явно.
4. Вычисление криволинейных интегралов II-го рода для случая кривых, заданных в \mathbb{R}^3 параметрически.
5. Плоские кривые. Формула Грина.
6. Плоские кривые. Независимость криволинейного интеграла II-го рода от пути интегрирования.
7. Плоские кривые. Интегрирование полных дифференциалов.

III. Поверхностные интегралы I-го рода. Случай \mathbb{R}^3

1. Параметрическое задание поверхности. Гладкие поверхности. Кусочно-гладкие поверхности.
2. Площадь поверхности. Квадрируемые поверхности. Квадрируемость гладкой поверхности.
3. Поверхностные интегралы I-го рода: определение.
4. Интегрируемость функции, непрерывной на гладкой поверхности.
5. Свойства поверхностного интеграла I-го рода: аддитивность, однородность, интегрирование неравенств, теоремы об оценке интеграла.
6. Теорема о среднем.
7. Вычисление интеграла по двумерной поверхности в трехмерном пространстве. Случай параметрического задания поверхности.

8. Вычисление интеграла по двумерной поверхности в трехмерном пространстве. Случай поверхности, заданной явным уравнением.

IV. Поверхностные интегралы II рода. Случай \mathbb{R}^3 .

1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Сторона поверхности. Ориентация поверхности.
2. Поверхностные интегралы II-го рода. Определение и элементарные свойства. Зависимость значения интеграла от ориентации поверхности.
3. Вычисление интеграла II-го рода. Сведение интеграла II-го рода к интегралу I-го рода.
4. Формула Гаусса-Остроградского — векторный и скалярный варианты.
5. Формула Стокса — векторный и скалярный варианты. Независимость криволинейного интеграла II-го рода от пути интегрирования. Интегрирование полных дифференциалов.

V. Элементы теории поля.

1. Скалярные поля. Производная по направлению. Градиент скалярного поля. Потенциальные поля. Линии уровня.
2. Поток векторного поля. Дивергенция. Соленоидальные поля. Формула Остроградского.
3. Циркуляция и ротор. Условие потенциальности векторного поля.
4. Формула Стокса.
5. Оператор Гамильтона.
6. Операции второго порядка. Оператор Лапласа.
7. Ортогональные криволинейные координаты. Запись основных дифференциальных операций теории поля в криволинейных координатах.
8. Цилиндрические координаты. Оператор Гамильтона. Оператор Лапласа.
9. Сферические координаты. Оператор Гамильтона. Оператор Лапласа.

Теоретические упражнения

1. Дайте определение криволинейного интеграла I рода.

Вычислите интеграл

$$\int_L xyz dl$$

в случае

- 1.1. L — ломаная, звенья которой соединяют точки

$$(0, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1) \rightarrow (-1, 0, 0).$$

1.2. L – дуга эллипса, образованного пересечением поверхностей

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{и} \quad x + y + z = 0.$$

2. Пусть L – гладкая кривая на плоскости, задаваемая полярным уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, а $f(x, y)$ – непрерывная функция. Докажите, что

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

3. Сформулируйте теорему о вычислении поверхностного интеграла первого рода.. Вычислите интеграл

$$\int_S (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

если

- 3.1. S – поверхность куба со стороной 1 и центром в начале координат;
 3.2. S – поверхность октаэдра $|x| + |y| + |z| \leq 1$;
 3.3. S – поверхность сферы радиуса 1 с центром в начале координат;
 3.4. S – поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$.
4. Докажите формулу Пуассона

$$\int_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax + by + cz) ds = 2\pi \int_{-1}^1 f(t \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) dt.$$

5. Дайте определение криволинейного интеграла II рода. Сформулируйте правило вычисления криволинейного интеграла II рода.
6. Сформулируйте условие полного дифференциала.
- 6.1. Установите, что выражение

$$x^2 dx + y^2 dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$ и найдите эту функцию.

- 6.2. Установите, что выражение

$$(x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz$$

является полным дифференциалом некоторой функции и найдите эту функцию.

7. Функция $f(x, y)$ дифференцируема и такова, что интеграл

$$\int_{L^+(A, B)} f(x, y)(y dx + x dy)$$

не зависит от пути $L^+(A, B)$, а зависит лишь от начальной (A) и конечной (B) точек. Опишите все функции, обладающие этим свойством.

8. Дайте определение поверхностного интеграла II-го рода. Сформулируйте теорему о вычислении поверхностного интеграла II-го рода.
9. Вычислите интеграл

$$\iint_{S^+} xzdydz + xydx dz + yzdx dy, \quad S^+ : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2,$$

Нормаль – внешняя.

10. Найдите производную скалярного поля $U(x, y, z)$ в направлении градиента скалярного поля $V(x, y, z)$.
11. Найдите градиент скалярного поля $U = c_1x + c_2y + c_3z$. Каковы поверхности уровня этого поля?
12. Докажите, что если Ω — замкнутая гладкая поверхность, \mathbf{n} — нормаль к этой поверхности, \mathbf{a} — произвольный ненулевой вектор, то

$$\iint_{\Omega} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{a}) d\omega = 0.$$

13. Докажите, что если функция $P(x, y, z)$ — многочлен второй степени, а Ω — гладкая замкнутая поверхность, то интеграл

$$I = \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial n} d\omega$$

пропорционален объему области, ограниченной поверхностью Ω .

Здесь $\frac{\partial P}{\partial n}$ — производная $P(x, y, z)$ в направлении нормали к поверхности Ω .

14. Докажите, что если $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ — линейные функции, S — плоская фигура, ограниченная гладким контуром ∂S и интеграл

$$I = \int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz \neq 0,$$

то он пропорционален площади фигуры S .

15. Функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа: $\Delta u = 0$. Докажите, что

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\omega = 0.$$

Здесь — Ω — гладкая замкнутая поверхность, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная функции $u(x, y, z)$ в направлении нормали к поверхности Ω .

Индивидуальные задания

Вариант № 1

1. Вычислите $\int_L (x + 2y + z) ds$, где L — отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, 2, 4)$ и $B(3, 1, 2)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L : x^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0$) от точки $M(2; 0)$ до точки $N(-2; 0)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L 2x^2y dx - xy^2 dy$, где L — контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 1$, $y = x$, $y = -x$ ($y \geq x$, $y \leq -x$). Обход контура осуществляется против часовой стрелки.
4. Найдите площадь поверхности $z^2 = 2xy$, если $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $z \geq 0$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = 7x\vec{i} + (5\pi y + z)\vec{j} + 4\pi z\vec{k}$ через часть плоскости $2x + y + 8z = 2$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + (z + y)\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $x^2 + y^2 = 9$, $z = x$, $z = 0$ ($z \geq 0$).
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = (x^2 - y)\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$ вдоль контура $L : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля: $\vec{F} = \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 6x^2y + 1; \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} - 2x^3 \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(0; 1)$ в точку $B(-1; 2)$.
9. Для функции $u = x^2y + xz^3 - 2xyz$ найдите $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ в точке $A(1; 1; -1)$.

Вариант № 2

1. Вычислите $\int_L (2x - y + z) ds$, где L — отрезок прямой, соединяющий точки $A(-1, 1, 3)$ и $B(5, 3, 1)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (x^2 + y)\vec{i} + 2xy\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L : x^2 + y^2 = 1$ ($x \geq 0$) от точки $M(1; 0)$ до точки $N(0; 1)$.

3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L xy^2 dx + 3y^2 x dy$, где L – контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 4$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$ ($y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \geq \sqrt{3}x$). Обход контура осуществляется по часовой стрелке.
4. Найдите площадь поверхности $2z = x^2$, если $x \leq 2y \leq 4x$, $x \leq 2\sqrt{2}$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = 2\pi x \vec{i} + (7y + 2) \vec{j} + 7\pi z \vec{k}$ через часть плоскости $6x + 3y + 2z = 6$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = 2x \vec{i} + z \vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $z = 3x^2 + 2y^2 + 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = xz \vec{i} - \vec{j} + y \vec{k}$ вдоль контура L : $\begin{cases} z = 5(x^2 + y^2) - 1, \\ z = 4 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля:
 $\vec{F} = \left(\frac{y}{(x+y)^2} - 4xy + y^2 - 1; -\frac{x}{(x+y)^2} - 2x^2 + 2xy \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(0; 1)$ в точку $B(1; 2)$.
9. Найдите $\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v})$ в точке $A(1; 0; -1)$, где $\vec{u} = x \vec{i} + yz \vec{j} + z^2 \vec{k}$,
 $\vec{v} = (x^2 + y) \vec{i} - y^2 z \vec{j} + zx \vec{k}$.

Вариант № 3

1. Вычислите $\int_L (x - y + 2z) ds$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(-1, 3, 2)$ и $B(4, 7, 1)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (2xy - y) \vec{i} + (x^2 + x) \vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 9$ ($y \geq 0$) от точки $M(3; 0)$ до точки $N(-3; 0)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L x^2 y^2 dy - xy^2 dx$, где L – контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 9$, $y = -\sqrt{3}x$, $y = 0$ ($y \geq -\sqrt{3}x$, $y \leq 0$). Обход контура осуществляется против часовой стрелки.
4. Найдите площадь поверхности $y^2 + z^2 = 2x$, если $y^2 \leq x \leq 1$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = 9\pi x \vec{i} + \vec{j} - 3z \vec{k}$ через часть плоскости $x + 3y + 3z = 3$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $y = x^2$, $y = 4x^2$ ($x \geq 0$), $y = 1$, $z = y$, $z = 0$.
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + xy\vec{k}$ вдоль контура $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ ($z > 0$) двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля:
 $\vec{F} = \left(\frac{2x}{y} + 3y^2 - \frac{1}{y^2} + 1; -\frac{x^2}{y^2} + 6xy + \frac{2x}{y^3} \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(0; 1)$ в точку $B(1; -1)$.
9. Для функции $u = x^3y - 2xy^2 + yz^2$ найдите $\text{rot}(\text{grad } u)$ в точке $A(1; 0; 5)$.

Вариант № 4

1. Вычислите $\int_L (x + y - 2z) ds$, где L — отрезок прямой, соединяющий точки $A(2, 1, 1)$ и $B(3, 4, -5)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ ($y \geq 0$) от точки $M(1; 0)$ до точки $N(0; 3)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L xy^2 dx - 2y^2 x dy$, где L — контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 1$, $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$, $x = 0$ ($x \geq 0$, $y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}$). Обход контура осуществляется по часовой стрелке.
4. Найдите площадь поверхности $x^2 = 2(1 - z)$, если $0 \leq y \leq x$, $z \geq 0$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = (2x + 1)\vec{i} - y\vec{j} + 3\pi z\vec{k}$ через часть плоскости $x + 3y + 6z = 3$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = 3x\vec{i} - z\vec{j}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $z = 6 - x^2 - y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$ ($z \geq 0$).
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + yz\vec{j} - x\vec{k}$ вдоль контура $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля:
 $\vec{F} = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{(x + y)^2} - 1; \frac{x}{(x + y)^2} - \frac{x}{y^2} + 2 \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(-1; 0)$ в точку $B(1; 1)$.

9. Найдите $\operatorname{rot} \vec{F}, \operatorname{div} \vec{F}$, где $\vec{F} = \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$.

Вариант № 5

1. Вычислите $\int_L (x + 2y - 3z) ds$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(0, 1, 1)$ и $B(1, 2, 0)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = x^2 y \vec{i} - xy^2 \vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 1$ ($y \geq 0$) от точки $M(1; 0)$ до точки $N(-1; 0)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L 2y^2 x dy - xy dx$, где L – контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 4$, $y = -x$, $y = \sqrt{3}x$ ($y \geq \sqrt{3}x$, $y \leq -x$). Обход контура осуществляется против часовой стрелки.
4. Найдите площадь поверхности $2z = x^2 + y^2$, если $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \leq x$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = 7x \vec{i} + 9\pi y \vec{j} + \vec{k}$ через часть плоскости $3x + y + 3z = 3$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = (z + y) \vec{i} + y \vec{j} - x \vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $x^2 + z^2 = 2y$, $y = 2$.
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = (x - y) \vec{i} + x \vec{j} - z \vec{k}$ вдоль контура $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 5 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля: $\vec{F} = \left(\frac{1}{y^2} - 12x^3 y + 3x^2 y^2; 1 + 2x^3 y - \frac{2x}{y^3} - \frac{1}{y^2} - 3x^4 \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(1; 1)$ в точку $B(2; -1)$.
9. Найдите $\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{u})$ в точке $A(1; 1; 1)$, где $\vec{a} = (3x; 2y^2; -z)$, $\vec{u} = (-1; x; -2z)$.

Вариант № 6

1. Вычислите $\int_L (z - 5y + x) ds$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(-3, 2, 1)$ и $B(2, 1, 1)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = yx^2 \vec{i} - (x + y^2) \vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 2$ ($y \geq 0$) от точки $M(\sqrt{2}; 0)$ до точки $N(-\sqrt{2}; 0)$.

3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L 3x^2y dx + 2xy^2 dy$, где L – контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 9$, $y = -x$, $y = 0$ ($y \geq -x$, $y \leq 0$). Обход контура осуществляется по часовой стрелке.
4. Найдите площадь поверхности $z^2 = 2xy$, если $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = \vec{i} + 5y\vec{j} + 11\pi z\vec{k}$ через часть плоскости $3x + 3y + z = 3$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} - (x + 2y)\vec{j} + y\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $x + 2y + 3z = 6$.
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k}$ вдоль контура L : $\begin{cases} z = 3(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 4 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля:
 $\vec{F} = \left(\frac{y}{x^2} + 12xy - \frac{1}{x^2} - \frac{2y^2}{x^3}; 6x^2 + \frac{2y}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(1; -1)$ в точку $B(2; 0)$.
9. Найдите $\text{rot } \vec{F}$, $\text{div } \vec{F}$ в точке $A(0; 1; -1)$ где $\vec{F} = (2xy; -y^2 + z^2; xyz)$.

Вариант № 7

1. Вычислите $\int_L (3x + y - z) ds$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(2, 1, -1)$ и $B(0, -1, 5)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + yx\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 9$ ($y \geq 0$) от точки $M(3; 0)$ до точки $N(-3; 0)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L 2xy^2 dy - 3x^2y dx$, где L – контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 1$, $y = \sqrt{3}x$, $x = 0$ ($y \geq \sqrt{3}x$, $x \leq 0$). Обход контура осуществляется против часовой стрелки.
4. Найдите площадь поверхности $2z = x^2$, если $x \leq y \leq 2x$, $x \leq 2$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + (\pi z - 1)\vec{k}$ через часть плоскости $12x + 3y + 2z = 6$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = 2(z - y)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $z = x^2 + 3y^2 + 1$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$.

7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + y^2\vec{k}$ вдоль контура L : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16 \ (z > 0) \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля:
 $\vec{F} = \left(\frac{x+2y}{2\sqrt{(x+y)^3}} + \frac{y}{2\sqrt{x^3}} + 7y; 7x - \frac{x}{2\sqrt{(x+y)^3}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(1; 0)$ в точку $B(4; 1)$.
9. Для функции $u = 2z^2x - y^2z + xy^2$ найдите $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ в точке $A(1; 0; 2)$.

Вариант № 8

- Вычислите $\int_L (2y - x - 2z) ds$, где L — отрезок прямой, соединяющий точки $A(0, 1, -2)$ и $B(1, -3, -2)$.
- Найдите работу силы $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \ (y \geq 0)$ от точки $M(3; 0)$ до точки $N(-3; 0)$.
- Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L 2x^2y dx + xy^2 dy$, где L — контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 4$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = 0$ $\left(y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq 0 \right)$. Обход контура осуществляется по часовой стрелке.
- Найдите площадь поверхности $y^2 + z^2 = 4x$, если $y^2 \leq 2x \leq 4$.
- Найдите поток векторного поля $\vec{a} = 5\pi x\vec{i} + (9y+1)\vec{j} + 4\pi z\vec{k}$ через часть плоскости $3x + 2y + 3z = 6$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
- С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + z\vec{j} - y\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $z = 4 - 2(x^2 + y^2)$, $z = 2(x^2 + y^2)$.
- Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ вдоль контура $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
- Проверьте потенциальность векторного поля:
 $\vec{F} = \left(6x^2 + y^2 + 1 - \frac{y}{2\sqrt{(x+y)^3}}; 4x^3y - 2y + \frac{2x+y}{2\sqrt{(x+y)^3}} \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(1; 0)$ в точку $B(3; 1)$.
- Найдите $\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v})$ в точке $A(2; -1; 1)$, где $\vec{u} = xy\vec{i} - yz^2\vec{j} + z\vec{k}$,
 $\vec{v} = (y^2 - x)\vec{i} + y\vec{j} - z^2\vec{k}$.

Вариант № 9

1. Вычислите $\int_L (x + 2y - 4z) ds$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, -1, 3)$ и $B(-1, 5, 6)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = xy\vec{i} - x^2\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 9$ ($x \leq 0$) от точки $M(0; 3)$ до точки $N(0; -3)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L x^2 y dx - xy^2 dy$, где L – контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 9$, $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ ($y \leq x$, $y \geq \sqrt{3}x$). Обход контура осуществляется против часовой стрелки.
4. Найдите площадь поверхности $x^2 = 4(2 - z)$, если $0 \leq y \leq 2x$, $z \geq 0$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = 2\vec{i} + y\vec{j} + \frac{3\pi}{2}z\vec{k}$ через часть плоскости $4x + 12y + 3z = 12$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = z\vec{i} - 4y\vec{j} + 2x\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 1$.
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + (1 - x)\vec{j} - z\vec{k}$ вдоль контура $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 1 \ (z > 0) \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля: $\vec{F} = \left(\frac{2x(2+y)}{y^2} - 4x; -\frac{4x^2 + y + x^2 y}{y^3} \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(0; 1)$ в точку $B(1; 2)$.
9. Для функции $u = 2x^4 y - 3y^2 x^2 + x - y$ найдите $\text{rot}(\text{grad } u)$ в точке $A(1; 2; 3)$.

Вариант № 10

1. Вычислите $\int_L (2x + 2z - 3y) ds$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, 2, 2)$ и $B(2, 3, -3)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (y^2 - y)\vec{i} + (2xy + x)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ($x \geq 0$) от точки $M(0; -3)$ до точки $N(0; 3)$.

3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L 4x^2y dx + 3xy^2 dy$, где L – контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 1$, $y = -x$, $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ ($y \geq -x$, $y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}$). Обход контура осуществляется по часовой стрелке.
4. Найдите площадь поверхности $4z = x^2 + y^2$, если $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = 9\pi x \vec{i} + (5y+1) \vec{j} + 2\pi z \vec{k}$ через часть плоскости $27x + 9y + z = 9$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = 4x \vec{i} - 2y \vec{j} - z \vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $3x + 2y = 12$, $3x + y = 6$, $x + y + z = 6$, $z = 0$, $y = 0$.
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = y \vec{i} - x \vec{j} + z^2 \vec{k}$ вдоль контура $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 4 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля:
 $\vec{F} = \left(2xy - 2y^2 + 1 + \frac{1}{(xy+1)^2}; x^2 - \frac{x^2}{(xy+1)^2} - 4xy \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(1; 1)$ в точку $B(2; -1)$.
9. Найдите $\text{rot } \vec{F}, \text{div } \vec{F}$, где $\vec{F} = \text{grad}(x^2y + xz^2 - 2z)$.

Вариант № 11

1. Вычислите $\int_L (y - z + 3x) ds$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(-2, -1, 1)$ и $B(3, 2, 0)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (x+y)^2 \vec{i} - (x^2 + y^2) \vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ($y \leq 0$) от точки $M(-2; 0)$ до точки $N(2; 0)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L 2x^2y dy - xy^2 dx$, где L – контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$, $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ ($y \leq 0$, $x \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}$). Обход контура осуществляется против часовой стрелки.
4. Найдите площадь поверхности $x^2 = 2yz$, если $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = 7\pi x \vec{i} + 2\pi y \vec{j} + (7z+2) \vec{k}$ через часть плоскости $x + y + \frac{z}{2} = 1$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = 8x\vec{i} + 2y\vec{j} + x\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$.
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = 4x\vec{i} + 2\vec{j} - xy\vec{k}$ вдоль контура L : $\begin{cases} z = 2(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 7 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля:
 $\vec{F} = \left(\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - 6y^2x + 1; -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - 2y^3 \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(1; 0)$ в точку $B(2; -1)$.
9. Найдите $\text{div}(\text{rot } \vec{F})$ в точке $A(1; -1; 2)$, где $\vec{F} = 3x^2y^3\vec{i} - (x^2 - 2xy)\vec{j} + (z^2 + x)\vec{k}$.

Вариант № 12

1. Вычислите $\int_L (3x - 2y + z) ds$, где L — отрезок прямой, соединяющий точки $A(-1, 0, 3)$ и $B(-2, 1, -3)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L : x^2 + y^2 = 1$ ($x \leq 0$) от точки $M(0; 1)$ до точки $N(0; -1)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L 2x^2y dx + y^2x^2 dy$, где L — контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 9$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = -\sqrt{3}x$ ($y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \geq -\sqrt{3}x$). Обход контура осуществляется по часовой стрелке.
4. Найдите площадь поверхности $2y = x^2$, если $x \leq 2z \leq 4x$, $x \leq 2$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = \pi y\vec{j} + (4 - 2z)\vec{k}$ через часть плоскости $24x + 4y + 3z = 12$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $4z = x^2 + y^2$, $z = 4$.
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = 2y\vec{i} - 3x\vec{j} + z^2\vec{k}$ вдоль контура L : $\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 1 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля:
 $\vec{F} = \left(\frac{x}{(x + y)^2} - 4xy + x^2 - 1; -\frac{y}{(x + y)^2} - 2y^2 + 2xy \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(1; 0)$ в точку $B(2; 1)$.

9. Найдите $\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{u})$ в точке $A(1; -1; 2)$, где $\vec{a} = (x^2; -2xy; y^2 + x)$,
 $\vec{u} = (y^2 - x; -7x; y + x)$.

Вариант № 13

1. Вычислите $\int_L (x + y - 4z) ds$, где L — отрезок прямой, соединяющий точки $A(0, 1, 3)$ и $B(-2, 1, 3)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ ($y \leq 0$) от точки $M(-2; 0)$ до точки $N(2; 0)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L x^2 y dx + 2xy^2 dy$, где L — контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 1$, $y = x$, $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ ($y \geq x$, $y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}$). Обход контура осуществляется против часовой стрелки.
4. Найдите площадь поверхности $x^2 + z^2 = 2y$, если $z^2 \leq y \leq 1$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = 5\pi x \vec{i} + (1 - 2y)\vec{j} + 4\pi z \vec{k}$ через часть плоскости $3x + 24y + 2z = 6$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = 6x \vec{i} - 2y \vec{j} - z \vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $z = 3 - 2(x^2 + y^2)$, $z^2 = x^2 + y^2$ ($z \geq 0$).
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = -3z \vec{i} + y^2 \vec{j} + 2y \vec{k}$ вдоль контура $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля:
 $\vec{F} = \left(\frac{2y}{x} + 3x^2 - \frac{1}{x^2} + 1; -\frac{y^2}{x^2} + 6xy + \frac{2y}{x^3} \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(1; 0)$ в точку $B(-1; 1)$.
9. Найдите $\operatorname{rot} \vec{F}$, $\operatorname{div} \vec{F}$ в точке $A(1; 2; -1)$ где $\vec{F} = (x^3 + 2xy; -7y^2; 3x^2y)$.

Вариант № 14

1. Вычислите $\int_L (y - x - z) ds$, где L — отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, -2, 1)$ и $B(3, -1, 2)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0$) от точки $M(2; 0)$ до точки $N(-2; 0)$.

3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L xy^2 dx - 3y^2 x dy$, где L – контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ ($x \leq 0$, $y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}$). Обход контура осуществляется по часовой стрелке.
4. Найдите площадь поверхности $y^2 = 2(1 - z)$, если $0 \leq x \leq 2y$, $z \geq 0$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = \pi x \vec{i} + \frac{\pi}{2} y \vec{j} + (4 - 2z) \vec{k}$ через часть плоскости $12x + 4y + 3z = 12$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = (z + y) \vec{i} + (x - z) \vec{j} + z \vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $x^2 + 4y^2 = 4$, $3x + 4y + z = 12$, $z = 1$.
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = 2y \vec{i} + 5z \vec{j} + 3x \vec{k}$ вдоль контура $L: \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 1, \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля: $\vec{F} = \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{(x+y)^2} - 1; \frac{y}{(x+y)^2} - \frac{y}{x^2} + 2 \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(0; -1)$ в точку $B(1; 1)$.
9. Для функции $u = x^2 y + x z^3 - 2xyz$ найдите $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ в точке $A(1; 1; -1)$.

Вариант № 15

1. Вычислите $\int_L (4x + 2y - z) ds$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(-1, 0, 5)$ и $B(3, -1, 6)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (x^2 + y) \vec{i} + 2xy \vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 1$ ($x \geq 0$) от точки $M(1; 0)$ до точки $N(0; 1)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L 2x^2 y dx - xy^2 dy$, где L – контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 9$, $y = \sqrt{3}x$, $y = -x$ ($y \leq -x$, $y \leq \sqrt{3}x$). Обход контура осуществляется против часовой стрелки.
4. Найдите площадь поверхности $2x = y^2 + z^2$, если $y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq y$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = (5y + 3) \vec{j} + 11\pi z \vec{k}$ через часть плоскости $3x + y + 12z = 3$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = (y + 2z)\vec{i} - x\vec{j} + 3x\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $3z = 27 - 2(x^2 + y^2)$, $z^2 = x^2 + y^2$ ($z \geq 0$).
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = 2y\vec{i} + \vec{j} - 2yz\vec{k}$ вдоль контура $L : \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 2 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля: $\vec{F} = \left(\frac{1}{x^2} - 12y^3x + 3x^2y^2; 1 + 2y^3x - \frac{2y}{x^3} - \frac{1}{x^2} - 3y^4 \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(1; 1)$ в точку $B(-1; 2)$.
9. Найдите $\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v})$ в точке $A(1; 0; -1)$, где $\vec{u} = x\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$, $\vec{v} = (x^2 + y)\vec{i} - y^2z\vec{j} + zx\vec{k}$.

Вариант № 16

1. Вычислите $\int_L (x - y - 2z) ds$, где L — отрезок прямой, соединяющий точки $A(-2, 3, 1)$ и $B(1, -1, 4)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (2xy - y)\vec{i} + (x^2 + x)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L : x^2 + y^2 = 9$ ($y \geq 0$) от точки $M(3; 0)$ до точки $N(-3; 0)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L xy^2 dx + 3y^2x dy$, где L — контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 1$, $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$ ($y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \leq \sqrt{3}x$). Обход контура осуществляется по часовой стрелке.
4. Найдите площадь поверхности $z^2 = 2xy$, если $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $z \geq 0$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = 9\pi y\vec{j} + (7z + 1)\vec{k}$ через часть плоскости $x + y + z = 1$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = (y + 6x)\vec{i} + 5(x + z)\vec{j} + 4y\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $y = x$, $y = 2x$, $y = 2$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$.
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$ вдоль контура $L : \begin{cases} x^2 + y^2 - 4z^2 = 0, \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).

8. Проверьте потенциальность векторного поля:

$\vec{F} = \left(\frac{x}{y^2} + 12xy - \frac{1}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3}; 6y^2 + \frac{2x}{y^2} - \frac{1}{y} \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(-1; 1)$ в точку $B(0; 2)$.

9. Для функции $u = x^3y - 2xy^2 + yz^2$ найдите $\text{rot}(\text{grad } u)$ в точке $A(1; 0; 5)$.

Вариант № 17

1. Вычислите $\int_L (2x + y - 3z) ds$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, -1, 5)$ и $B(2, 3, 4)$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ ($y \geq 0$) от точки $M(1; 0)$ до точки $N(0; 3)$.

3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L x^2y^2 dy + xy^2 dx$, где L – контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 4$, $y = \sqrt{3}x$, $y = 0$ ($y \leq \sqrt{3}x$, $y \geq 0$). Обход контура осуществляется против часовой стрелки.

4. Найдите площадь поверхности $2z = x^2$, если $x \leq 2y \leq 4x$, $x \leq 2\sqrt{2}$.

5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = \pi y\vec{j} + (1 - 2z)\vec{k}$ через часть плоскости $3x + 4y + 12z = 12$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + 5y\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $z = x$, $z = 0$ ($z \geq 0$).

7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = xz\vec{i} - \vec{j} + y\vec{k}$ вдоль контура $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).

8. Проверьте потенциальность векторного поля:

$\vec{F} = \left(\frac{y + 2x}{2\sqrt{(x+y)^3}} + \frac{x}{2\sqrt{y^3}} + 7x; 7y - \frac{y}{2\sqrt{(x+y)^3}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(0; 1)$ в точку $B(1; 4)$.

9. Найдите $\text{rot } \vec{F}, \text{div } \vec{F}$, где $\vec{F} = \text{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$.

Вариант № 18

1. Вычислите $\int_L (x - 2y + 3z) ds$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(0, 1, 3)$ и $B(-1, 4, 3)$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = x^2y\vec{i} - xy^2\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 1$ ($y \geq 0$) от точки $M(1; 0)$ до точки $N(-1; 0)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L xy^2 dx - 2y^2x dy$, где L – контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 9$, $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = 0$ ($y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \leq 0$). Обход контура осуществляется по часовой стрелке.
4. Найдите площадь поверхности $y^2 + z^2 = 2x$, если $y^2 \leq x \leq 1$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = 7\pi x\vec{i} + 4\pi y\vec{j} + 2(z+1)\vec{k}$ через часть плоскости $4x + 3y + 12z = 24$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = z\vec{i} + (3y - x)\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2 + 2$, $z = 0$.
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} - x^2\vec{k}$ вдоль контура $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9 \ (z > 0) \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля: $\vec{F} = \left(6x^2y^2 + 1 - \frac{x}{2\sqrt{(x+y)^3}}; 4y^3x - 2x + \frac{2y+x}{2\sqrt{(x+y)^3}} \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(0; 1)$ в точку $B(1; 3)$.
9. Найдите $\text{rot}(\vec{a} \times \vec{u})$ в точке $A(1; 1; 1)$, где $\vec{a} = (3x; 2y^2; -z)$, $\vec{u} = (-1; x; -2z)$.

Вариант № 19

1. Вычислите $\int_L (x + 2y - 4z) ds$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, -1, 2)$ и $B(-2, 2, 4)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = yx^2\vec{i} - (x+y^2)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 2$ ($y \geq 0$) от точки $M(\sqrt{2}; 0)$ до точки $N(-\sqrt{2}; 0)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L 2y^2x dy - x^2y dx$, где L – контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 1$, $y = -\sqrt{3}x$, $y = x$ ($y \leq x$, $y \geq -\sqrt{3}x$). Обход контура осуществляется против часовой стрелки.
4. Найдите площадь поверхности $x^2 = 2(1 - z)$, если $0 \leq y \leq x$, $z \geq 0$.

5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = \pi x \vec{i} + 2 \vec{j} + 2\pi z \vec{k}$ через часть плоскости $3x + 2y + 6z = 6$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = z \vec{i} - 4y \vec{j} + 2x \vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 1$.
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = 4x \vec{i} - yz \vec{k} + x \vec{j}$ вдоль контура $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля:
 $\vec{F} = \left(\frac{2y(2+x)}{x^2} - 4y; -\frac{4y^2 + x + y^2x}{x^3} \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(1; 0)$ в точку $B(2; 1)$.
9. Найдите $\text{rot } \vec{F}$, $\text{div } \vec{F}$ в точке $A(0; 1; -1)$ где $\vec{F} = (2xy; -y^2 + z^2; xyz)$.

Вариант № 20

1. Вычислите $\int_L (2x - 3y + z) ds$, где L — отрезок прямой, соединяющий точки $A(-1, 3, 4)$ и $B(4, 2, -3)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (x^2 - y) \vec{i} + yx \vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 9$ ($y \geq 0$) от точки $M(3; 0)$ до точки $N(-3; 0)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L 3x^2y dx - 2xy^2 dy$, где L — контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$, $x = 0$ ($y \leq x$, $x \leq 0$). Обход контура осуществляется по часовой стрелке.
4. Найдите площадь поверхности $2z = x^2 + y^2$, если $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \leq x$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = 4\pi x \vec{i} + 7\pi y \vec{j} + (2z + 1) \vec{k}$ через часть плоскости $6x + y + 6z = 3$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = 4x \vec{i} - 2y \vec{j} - z \vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $3x + 2y = 12$, $3x + y = 6$, $x + y + z = 6$, $z = 0$, $y = 0$.
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = -y \vec{i} + 2 \vec{j} + \vec{k}$ вдоль контура $L: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 1 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса)

8. Проверьте потенциальность векторного поля:

$\vec{F} = \left(2xy - 2x^2 + 1 + \frac{1}{(xy+1)^2}; y^2 - \frac{y^2}{(xy+1)^2} - 4xy \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(1; 1)$ в точку $B(-1; 2)$.

9. Для функции $u = 2z^2x - y^2z + xy^2$ найдите $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ в точке $A(1; 0; 2)$.

Вариант № 21

1. Вычислите $\int_L (4x - y - z) ds$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(-2, 0, 3)$ и $B(-1, 1, 5)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ($y \geq 0$) от точки $M(3; 0)$ до точки $N(-3; 0)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L 2xy^2 dy + 3x^2y dx$, где L – контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 9$, $y = -\sqrt{3}x$, $y = -x$ ($y \geq -x$, $y \leq -\sqrt{3}x$). Обход контура осуществляется против часовой стрелки.
4. Найдите площадь поверхности $z^2 = 2xy$, если $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = 3\pi x\vec{i} + 6\pi y\vec{j} + 10\vec{k}$ через часть плоскости $6x + 3y + z = 3$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + (z + y)\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $x^2 + y^2 = 9$, $z = x$, $z = 0$ ($z \geq 0$).
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + 3x\vec{j} + z^2\vec{k}$ вдоль контура $L: \begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1, \\ z = 4 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля: $\vec{F} = (2x \cos y - y^2 \sin x; 2y \cos x - x^2 \sin y)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ в точку $B\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
9. Найдите $\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v})$ в точке $A(2; -1; 1)$, где $\vec{u} = xy\vec{i} - yz^2\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{v} = (y^2 - x)\vec{i} + y\vec{j} - z^2\vec{k}$.

Вариант № 22

1. Вычислите $\int_L (x - y + 5z) ds$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(-2, 1, 0)$ и $B(3, 2, 4)$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = xy\vec{i} - x^2\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L : x^2 + y^2 = 9$ ($x \leq 0$) от точки $M(0; 3)$ до точки $N(0; -3)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L 2x^2y dx + 3xy^2 dy$, где L – контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 1$, $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$, $x = 0$ ($x \leq 0$, $y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}$). Обход контура осуществляется по часовой стрелке.
4. Найдите площадь поверхности $2z = x^2$, если $x \leq y \leq 2x$, $x \leq 2$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = \pi x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$ через часть плоскости $12x + y + 6z = 6$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $4z = x^2 + y^2$, $z = 4$.
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + (1 - x)\vec{j} - z\vec{k}$ вдоль контура $L : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 1 \ (z > 0) \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля:

$$\vec{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{x^2}; \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{1}{x} \right)$$
, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(1; 0)$ в точку $B(-1; 1)$.
9. Для функции $u = 2x^4y - 3y^2x^2 + x - y$ найдите $\text{rot}(\text{grad } u)$ в точке $A(1; 2; 3)$.

Вариант № 23

1. Вычислите $\int_L (3x - y - z) ds$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, 2, 0)$ и $B(-1, 0, 1)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (y^2 - y)\vec{i} + (2xy + x)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ($x \geq 0$) от точки $M(0; -3)$ до точки $N(0; 3)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L x^2y dx - 2xy^2 dy$, где L – контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 4$, $y = -x$, $y = \sqrt{3}x$ ($y \geq -x$, $y \geq \sqrt{3}x$). Обход контура осуществляется против часовой стрелки.
4. Найдите площадь поверхности $y^2 + z^2 = 4x$, если $y^2 \leq 2x \leq 4$.

5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = \frac{\pi}{2}x\vec{i} + \pi y\vec{j} + (4 - 2z)\vec{k}$ через часть плоскости $12x + 4y + 3z = 8$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $y = x^2$, $y = 4x^2$ ($x \geq 0$), $y = 1$, $z = y$, $z = 0$.
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = 4x\vec{i} + 2\vec{j} - xy\vec{k}$ вдоль контура L : $\begin{cases} z = 2(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 7 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля:

$$\vec{F} = \left(\sqrt{1 - y^2} - \frac{xy}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(\sqrt{1 - x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1 - y^2}} + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y} \right) dy,$$
 найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ в точку $B\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.
9. Найдите $\text{rot } \vec{F}$, $\text{div } \vec{F}$, где $\vec{F} = \text{grad}(x^2y + xz^2 - 2z)$.

Вариант № 24

1. Вычислите $\int_L (x + y - z) ds$, где L — отрезок прямой, соединяющий точки $A(-1, -2, -3)$ и $B(3, 4, 1)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (x + y)^2\vec{i} - (x^2 + y^2)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ($y \leq 0$) от точки $M(-2; 0)$ до точки $N(2; 0)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L 4x^2y dx + 3xy^2 dy$, где L — контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 9$, $y = x$, $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ ($y \leq x$, $y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}$). Обход контура осуществляется по часовой стрелке.
4. Найдите площадь поверхности $x^2 = 4(2 - z)$, если $0 \leq y \leq 2x$, $z \geq 0$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = \pi x\vec{i} + 2\pi y\vec{j} + 2\vec{k}$ через часть плоскости $6x + 3y + 4z = 12$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = (z + y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $x^2 + 4y^2 = 4$, $3x + 4y + z = 12$, $z = 1$.

7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = -3z\vec{i} + y^2\vec{j} + 2y\vec{k}$ вдоль контура $L : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля:
 $\vec{F} = \left(\frac{y + 2x}{2\sqrt{(x+y)^3}} + \frac{x}{2\sqrt{y^3}} + 7x; 7y - \frac{y}{2\sqrt{(x+y)^3}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(0; 1)$ в точку $B(1; 4)$.
9. Найдите $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F})$ в точке $A(1; -1; 2)$, где $\vec{F} = 3x^2y^3\vec{i} - (x^2 - 2xy)\vec{j} + (z^2 + x)\vec{k}$.

Вариант № 25

1. Вычислите $\int_L (2x - y + z) ds$, где L — отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, 2, -2)$ и $B(2, -1, 4)$.
2. Найдите работу силы $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $L : x^2 + y^2 = 1$ ($x \leq 0$) от точки $M(0; 1)$ до точки $N(0; -1)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина $\int_L 2x^2y dy - xy^2 dx$, где L — контур, образованный линиями $x^2 + y^2 = 1$, $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ ($y \leq 0$, $y \geq \sqrt{3}x$). Обход контура осуществляется против часовой стрелки.
4. Найдите площадь поверхности $4z = x^2 + y^2$, если $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = 9\pi x\vec{i} + 2\pi y\vec{j} + 8\vec{k}$ через часть плоскости $6x + 24y + z = 3$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).
6. С помощью формулы Гаусса—Остроградского найдите поток векторного поля $\vec{a} = (z + y)\vec{i} + y\vec{j} - x\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности S , образованной поверхностями $x^2 + z^2 = 2y$, $y = 2$.
7. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{a} = 2y\vec{i} + \vec{j} - 2yz\vec{k}$ вдоль контура $L : \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 2 \end{cases}$ двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса).
8. Проверьте потенциальность векторного поля:
 $\vec{F} = \left(6x^2y^2 + 1 - \frac{x}{2\sqrt{(x+y)^3}}; 4y^3x - 2x + \frac{2y + x}{2\sqrt{(x+y)^3}} \right)$, найдите его потенциал и работу по перемещению материальной точки из точки $A(0; 1)$ в точку $B(1; 3)$.
9. Найдите $\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{u})$ в точке $A(1; -1; 2)$, где $\vec{a} = (x^2; -2xy; y^2 + x)$,
 $\vec{u} = (y^2 - x; -7x; y + x)$.