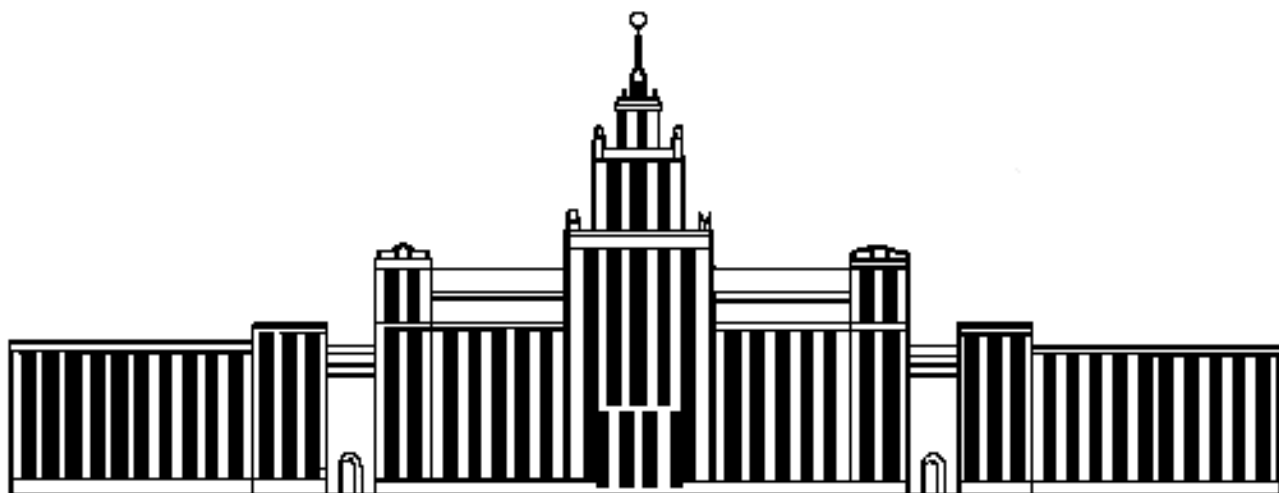

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

519.2(07)

3-259

В.И. Заляпин, А.В. Кунгурцева, Т.Н. Хохлова

**СБОРНИК КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
Часть III. Интегралы**

Учебное пособие

Челябинск
2015

Теоретические вопросы

I. Первообразная и неопределенный интеграл

1. Первообразная. Основные свойства первообразных. Обобщенные первообразные.
2. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла.
3. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
4. Замена переменных в неопределенном интеграле.
5. Таблица основных неопределенных интегралов.
6. Интегрирование рациональных дробей.
7. Интегрирование простейших иррациональностей.
8. Интегрирование квадратичных иррациональностей.
9. Интегрирование тригонометрических функций. Основные подстановки.

II. Определенный интеграл Римана

1. Определенный интеграл Римана. Свойства интеграла Римана. Первая теорема о среднем.
2. Ограниченность интегрируемой функции.
3. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий Дарбу.
4. Множества нулевой меры Лебега. Критерий Лебега интегрируемости по Риману.
5. Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость монотонной функции. Интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Интегрируемость произведения двух функций.
6. Интеграл с переменным верхним пределом – функция Барроу. Теорема о дифференцируемости функции Барроу.
7. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Интегрирование по частям и замена переменных в определенном интеграле.
9. Приложения: вычисление длины дуги, площади плоской области, объема тела вращения, работы и т.п.

Теоретические упражнения

1. Функция $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на всей числовой прямой. Докажите или опровергните следующие утверждения:
 - 1). функция $F(x)$ – периодическая тогда и только тогда, когда $f(x)$ периодическая;
 - 2). если функция $f(x)$ – четная, то её первообразная функция нечетная;
 - 3). если функция $f(x)$ – нечетная, то её первообразная функция четная
2. Какому условию должны удовлетворять постоянные a_i , $i = 1, 2$, чтобы интеграл

$$I = \int (a_1 + \frac{a_2}{x}) e^x dx$$

был элементарной функцией?

3. Существует ли у функции $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ первообразная на всей числовой прямой?
4. Найдите все функции $f(x)$, $x > 0$, такие, что $f'(x^2) = \frac{1}{x} \forall x > 0$.
5. Найдите все первообразные функции $f(x) = \max(1, x^2)$.
6. Установите, что функция Дирихле не интегрируема по Риману на любом отрезке.
7. Привести пример функции, которая не интегрируема на отрезке, а её квадрат — интегрируем на этом отрезке.
8. Докажите теорему: *если функция $c \leq f(x) \leq d$, $x \in [a; b]$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, а функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[c; d]$, то сложная функция $g(f(x))$ интегрируема на отрезке $[a; b]$.*
9. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и известно, что

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Докажите, что $f(x) \equiv 0$.

10. Найдите производные:

$$1). \frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx; \quad 2). \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx; \quad 3). \frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx; \quad 4). \frac{d}{dx} \int_a^x \sin x^2 dx.$$

11. Используя интеграл

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx,$$

докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

12. Докажите справедливость равенства:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t} dt.$$

13. Можно ли, при вычислении интеграла

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

заменой переменных $x = \sin t$, взять в качестве пределов интегрирования числа π и $\frac{\pi}{2}$?

14. Докажите, что интеграл от нечетной функции в симметричных относительно начала координат пределах равен нулю.

15. Докажите, что интеграл от четной функции в симметричных относительно начала координат пределах равен удвоенному интегралу от этой функции по половинному отрезку.

16. Докажите, что если функция $f(x)$ периодическая с периодом T , то $\forall a$ справедливо равенство:

$$\int_0^T f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx.$$

17. Найдите производную функции $F(x)$

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t+x) dt.$$

Функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, а числа x, α и β удовлетворяют условию $0 < a - \alpha < x < b - \beta$.

Индивидуальные задания

Вариант № 1

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - \sqrt{x} + 1}{x}$, график которой проходит через точку $A(1; 2)$.
2. Найдите:
 - а) $\int (5x - 2)e^{3x} dx$;
 - б) $\int \frac{x}{1 + \sqrt{2x+1}} dx$;
 - в) $\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$;
 - г) $\int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx$;
 - д) $\int \frac{2x^3 + 11x^2 + 16x + 10}{(x+2)^2(x^2 + 2x + 3)} dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_{2 \operatorname{arctg} 2}^{2 \operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{\cos x(1 - \cos x)}$;
 - б) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_0^5 |x^2 - 3x - 4| dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq 2$).
6. Найдите длину дуги графика функции $y = \ln x$ при $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x^2 + 5x - 6$ и $y = 0$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_0^a x^3 \cdot f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} t \cdot f(t) dt$, $a > 0$.

3. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^{1 - \frac{x^2}{2}} \operatorname{arctg} t \, dt}{e^x - 1}$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = 4 \cos 3\varphi$, $r = 2$ ($r \geq 2$).

Вариант № 2

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{5x^5 - 3x^4 - \sqrt{x} + 2}{x^2}$, график которой проходит через точку $A(1; -1)$.
2. Найдите:
- а) $\int (1 - 6x)e^{2x} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$;
- в) $\int \operatorname{tg} x \ln \cos x \, dx$; г) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$;
- д) $\int \frac{3x^3 + 6x^2 + 5x - 1}{(x+1)^2(x^2+2)} dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
- а) $\int_{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}}^{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}} \frac{dx}{\sin x(1 - \sin x)}$; б) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_0^2 x \cdot |1 - x^2| dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \cos x \sin^2 x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$).
6. Найдите длину дуги графика функции $y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$ при $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)x) dx$.
3. Найдите $\frac{dy}{dx}$, если $\int_0^y e^{-t^2} dt + \int_0^{x^2} \sin^2 t \, dt = 0$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 3

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{3\sqrt[4]{x} + x^2 - 1}{\sqrt{x}}$, график которой проходит через точку $A(1; -1)$.
2. Найдите:
 - а) $\int \ln(x^2 + 4) dx$;
 - б) $\int \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$;
 - в) $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx$;
 - г) $\int \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$;
 - д) $\int \frac{x^3 + 9x^2 + 21x + 21}{(x+3)^2(x^2+3)} dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1 + \sin x - \cos x)^2}$;
 - б) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0$, $x = \ln 2$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = \ln(x^2 - 1)$ при $2 \leq x \leq 3$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$, $x = 0$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^4}$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$.
3. Найдите $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t e^{x^2} dx}{\int_0^t e^{2x^2} dx}$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 4

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - \sqrt[4]{x} + 3}{x}$, график которой проходит через точку $A(1; 3)$.
2. Найдите:
 - а) $\int \ln(4x^2 + 1) dx$;
 - б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (1 + \sqrt[4]{x})}$;
 - в) $\int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx$;
 - г) $\int \frac{x^3}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)} dx$;
 - д) $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 8x + 8}{(x + 2)^2(x^2 + 4)} dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{5 + 4 \cos x}$;
 - б) $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{(2 - x^2)^{3/2}}$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_0^{\pi} x \cdot \operatorname{sgn}(\cos x) dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^3$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x$ при $0 \leq x \leq \frac{8}{9}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2$, $y = 2 - x$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k a}{n} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$.
3. Найдите точки экстремума функции $I(x) = \int_0^x (t^2 - 1)(t + 3)^2 dt$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 5

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{(x^2 + 2)^2}{\sqrt{x}}$, график которой проходит через точку $A(1; 1)$.
2. Найдите:
 - а) $\int (2x - 4) \sin 2x \, dx$;
 - б) $\int \frac{dx}{x(1 + \sqrt[3]{x})}$;
 - в) $\int \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} \, dx$;
 - г) $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x - 4)(x - 3)(x - 2)} \, dx$;
 - д) $\int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x + 2)^2(x^2 + 4)} \, dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} \, dx$;
 - б) $\int_0^2 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{16 - x^2}}$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x) \, dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \arccos x$, $y = 0$, $x = 0$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = \ln(1 - x^2)$ при $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = e^{1-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + n}$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \, dx}{\sin x}$.
3. Найдите точки экстремума функции $I(x) = \int_1^x e^{-\frac{t^2}{2}} (1 - t^2) \, dt$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 6

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 3)^2}{x^2}$, график которой проходит через точку $A(1; 2)$.
2. Найдите:

а) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{6x - 1} dx;$	б) $\int \frac{x^2 dx}{1 + \sqrt{1 + 2x}};$
в) $\int \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^5} dx;$	г) $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x - 4)(x - 3)x} dx;$
д) $\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 16x - 12}{(x - 1)^2(x^2 + 4x + 5)} dx.$	
3. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x - \cos x};$	б) $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$
--	----------------------------------
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} x^2 \cdot \operatorname{sgn}(\cos x) dx.$
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = (x + 1)^2$, $y^2 = x + 1$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = 2 + \operatorname{ch} x$ при $0 \leq x \leq 1$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $y^2 = x$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{k^2 + n^2}$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_0^{\pi} x \cdot f(\cos^2 x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\cos^2 x) dx.$
3. Найдите $\frac{dy}{dx}$, если $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{3 - 2 \sin^2 z} dz + \int_0^y \cos t dt = 0.$
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 7

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{(1 + \sqrt{x})(x^2 - 3)}{x}$, график которой проходит через точку $A(1; -1)$.
2. Найдите:

а) $\int e^{-2x}(4x - 3) dx;$	б) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{1+x}};$
в) $\int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx;$	г) $\int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x(x-1)(x-2)} dx;$
д) $\int \frac{-3x^3 + 13x^2 - 13x + 1}{(x-2)^2(x^2 - x + 1)} dx.$	
3. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x + \cos x} dx;$	б) $\int_0^4 \frac{dx}{(16 + x^2)^{3/2}}.$
--	--
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_{-2}^1 x \cdot \operatorname{sgn}(x + x^4) dx.$
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = 1 - \ln \cos x$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + (y - 2)^2 = 1$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{n}{n+3k}} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$
3. Найдите точки экстремума функции $I(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} (1 - t^2) dt.$
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 8

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{(2x-3)(\sqrt{x}+2)}{x^2}$, график которой проходит через точку $A(1; 2)$.
2. Найдите:
 - а) $\int e^{-3x}(2-9x) dx$;
 - б) $\int \frac{1 + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$;
 - в) $\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx$;
 - г) $\int \frac{3x^3 - 2}{x^3 - x} dx$;
 - д) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)} dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1 + \sin x + \cos x}$;
 - б) $\int_0^4 x^2 \sqrt{16 - x^2} dx$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cdot \operatorname{sgn} x dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x\sqrt{36 - x^2}$, $y = 0$, $(0 \leq x \leq 6)$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = e^x + 13$ при $\ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = \sqrt{y - 2}$, $x = 1$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$.
3. Найдите $\frac{dy}{dx}$, если $\int_0^y e^{t^2} dt + \int_0^x \cos t dt = 0$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 9

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{5x^3 - 2x^2 - 2\sqrt{x} + 1}{x}$, график которой проходит через точку $A(1; 2)$.
2. Найдите:
 - а) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx$;
 - б) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1} dx$;
 - в) $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-x^2-1}} dx$;
 - г) $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-2)} dx$;
 - д) $\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)} dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_0^{2\operatorname{arctg} \frac{1}{2}} \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2} dx$;
 - б) $\int_0^{\frac{5}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_0^4 |4-x^2| dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $x = \arccos y$, $x = 0$, $y = 0$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}$ при $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $y = 1$, $x = 2$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{k} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2} dx + 3 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} e^{9(x-\frac{2}{3})^2} dx = 0$.
3. Найдите наибольшие и наименьшие значения функции $I(x) = \int_0^x \frac{4t^2 + 4t + 1}{t^3 - 2t + 1} dt$ на отрезке $[-1; 0]$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 10

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{4x^3 + x^2 - \sqrt{x} + 3}{x}$, график которой проходит через точку $A(1; -1)$.
2. Найдите:
 - а) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} dx$;
 - б) $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;
 - в) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}$;
 - г) $\int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx$;
 - д) $\int \frac{4x^3 + 24x^2 + 20x - 28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)} dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x + \cos x}$;
 - б) $\int_0^5 x^2 \sqrt{25 - x^2} dx$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_0^5 x \cdot \operatorname{sgn}(x^2 - 3x - 4) dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \operatorname{arctg} x$, $y = 0$, $x = \sqrt{3}$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = 2 - e^x$ при $\ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_0^\pi \frac{\sin 2kx}{\sin x} dx = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Найдите точки экстремума функции $I(x) = \int_0^{x^2} e^{-\sqrt{t}}(t^2 - 3t + 2) dt$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 11

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 2\sqrt[4]{x} + 1}{x}$, график которой проходит через точку $A(1; 2)$.
2. Найдите:
 - а) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx$;
 - б) $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx$;
 - в) $\int \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx$;
 - г) $\int \frac{x^5 + 2x^3 - 1}{x^2 + x} dx$;
 - д) $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_0^{2\operatorname{arctg} \frac{1}{3}} \frac{\cos x dx}{(1 - \sin x)(1 + \cos x)}$;
 - б) $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_{-2}^3 x \cdot \operatorname{sgn}(4 - x^2) dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2\sqrt{8 - x^2}$, $y = 0$, $(0 \leq x \leq 2\sqrt{2})$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$ при $0 \leq x \leq \frac{15}{16}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sin \frac{\pi x}{2}$, $y = x^2$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx$.
3. Найдите $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x e^{3t^2} dt}{\int_0^x e^{4t^2} dt}$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 12

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{(2x^2 + 1)^2}{\sqrt{x}}$, график которой проходит через точку $A(1; 1)$.
2. Найдите:
 - а) $\int (5x + 6) \cos 2x \, dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}};$
 - в) $\int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^5} \, dx$; г) $\int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x} \, dx$;
 - д) $\int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} \, dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_{-\frac{2\pi}{3}}^0 \frac{\cos x \, dx}{1 + \cos x - \sin x}$; б) $\int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64 - x^2)^3}}.$
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_{-2}^0 (x + 2) \cdot |x^2 - 1| \, dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $x = \sqrt{e^y - 1}$, $x = 0$, $y = \ln 2$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = 1 - \ln \sin x$ при $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = \arccos \frac{x}{3}$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{n}{n + 4k}} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_0^t f(x) \cdot g(t - x) \, dx = \int_0^t g(x) \cdot f(t - x) \, dx$.
3. Найдите точки экстремума функции $I(x) = \int_0^x e^{2t^2} (1 + 2t)^3 \, dt$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 13

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{(2\sqrt{x} - 1)^2}{x^2}$, график которой проходит через точку $A(1; 2)$.
2. Найдите:
 - а) $\int (3x - 2) \cos 5x \, dx$;
 - б) $\int \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \, dx$;
 - в) $\int \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} \, dx$;
 - г) $\int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} \, dx$;
 - д) $\int \frac{x^2 + x + 3}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} \, dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos x \, dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$;
 - б) $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x^4} \, dx$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_{-1}^2 x \cdot |x^2 + 5x - 6| \, dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x\sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, $(0 \leq x \leq 2)$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$ при $3 \leq x \leq 4$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = \arcsin \frac{x}{5}$, $y = \arcsin x$, $y = \frac{\pi}{2}$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_x^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1 + t^2}$, $x > 0$.
3. Найдите промежутки монотонности функции $\int_0^{x^2} \frac{t^2 - 5t + 4}{2 + e^t} \, dt$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 14

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{(1 + 2\sqrt{x})(x^2 + 2)}{x}$, график которой проходит через точку $A(1; -1)$.
2. Найдите:
 - а) $\int (x\sqrt{2} - 3) \cos 2x \, dx$;
 - б) $\int \frac{x \cdot \sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} \, dx$;
 - в) $\int \frac{x^3}{x^2 + 4} \, dx$;
 - г) $\int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x} \, dx$;
 - д) $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)} \, dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$;
 - б) $\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 \, dx}{(16 - x^2)\sqrt{16 - x^2}}$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_{-1}^2 \operatorname{sgn}(x^2 - 1) \cdot x^3 \, dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5$ при $\frac{1}{9} \leq x \leq 1$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{n+k}{n}} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{tg} x} \frac{t \, dt}{1 + t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{ctg} x} \frac{dt}{t(1 + t^2)} = 1$.
3. Найдите $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^{t^2} \sin \sqrt{x} \, dx}{t^3}$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 15

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{(5x+3)(\sqrt{x}-2)}{x^2}$, график которой проходит через точку $A(1; 2)$.
2. Найдите:
 - а) $\int (4x+7) \cos 3x \, dx$;
 - б) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x^2-\sqrt{x}} \, dx$;
 - в) $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x} \, dx$;
 - г) $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x} \, dx$;
 - д) $\int \frac{2x^3+7x^2+7x+9}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)} \, dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_0^{2\operatorname{arctg} \frac{1}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x(1+\cos x)} \, dx$;
 - б) $\int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} \, dx$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_2^5 x^2 \cdot |x-3| \, dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \frac{1}{1+\cos x}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = -\arccos x + \sqrt{1-x^2} + 1$ при $0 \leq x \leq \frac{9}{16}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$, $y = 0$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{9n^2 - k^2}} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} \, dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} \, dt = \frac{\pi}{4}$.
3. Найдите точки экстремума функции $I(x) = \int_0^{e^x} \frac{t^4 - 16}{t + 1} \, dt$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 16

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{4x^3 - x^2 + \sqrt{x} - 2}{x}$, график которой проходит через точку $A(1; 2)$.
2. Найдите:
 - а) $\int (2x - 5) \cos 4x \, dx$;
 - б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}$;
 - в) $\int \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} \, dx$;
 - г) $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 23}{(x-1)(x+1)(x-5)} \, dx$;
 - д) $\int \frac{4x^2 + 3x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} \, dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \, dx}{(1 + \sin x)^2}$;
 - б) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_{-1}^2 |e^x - 1| \, dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $x = (y - 2)^3$, $x = 4y - 8$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = \ln \sin x$ при $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0, 5$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{3}{\sqrt{9n^2 + k^2}} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_0^a x^3 \cdot f(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} t \cdot f(t) \, dt$, $a > 0$.
3. Найдите точки экстремума функции $I(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\sin t^2}{t} \, dt$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 17

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{4x^3 - 2x^2 + \sqrt{x} + 1}{x}$, график которой проходит через точку $A(1; -1)$.
2. Найдите:
 - а) $\int (8 - 3x) \cos 5x \, dx$;
 - б) $\int \frac{x}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} \, dx$;
 - в) $\int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} \, dx$;
 - г) $\int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{(x+3)(x-1)x} \, dx$;
 - д) $\int \frac{3x^3 + 4x^2 + 6x}{(x^2 + 2)(x^2 + 2x + 2)} \, dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \, dx}{(1 + \sin x + \cos x)^2}$;
 - б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16 - x^2)^3}}$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_{-2}^1 x \cdot \operatorname{sgn}(x^3 + x) \, dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \cos^5 x \sin 2x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$).
6. Найдите длину дуги графика функции $y = \ln 7 - \ln x$ при $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^3} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_a^b f(x) \, dx = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)x) \, dx$.
3. Найдите точки экстремума функции $I(x) = \int_0^{\sin x} (1 - \arcsin^2 t) \, dt$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 18

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 - 4\sqrt[4]{x} + 1}{x}$, график которой проходит через точку $A(1; 2)$.
2. Найдите:
 - а) $\int (x + 5) \sin 3x \, dx$;
 - б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} \cdot (1 + \sqrt[4]{2x+1})}$;
 - в) $\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} \, dx$;
 - г) $\int \frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x(x-2)(x+2)} \, dx$;
 - д) $\int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} \, dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin x \, dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$;
 - б) $\int_0^2 \frac{x^4 \, dx}{\sqrt{(8 - x^2)^3}}$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_0^4 x \cdot |9 - x^2| \, dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$, $y = 0$, $x = 1$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = \operatorname{ch} x + 3$ при $0 \leq x \leq 1$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = (x - 1)^2$, $y = 1$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}} \sum_{k=1}^n \sqrt[4]{k} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \, dx$.
3. Докажите, что $\int_0^x e^{t^2} \, dt \sim \frac{1}{2x} \cdot e^{x^2}$ при $x \rightarrow \infty$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 19

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{(3x^2 - 2)^2}{\sqrt{x}}$, график которой проходит через точку $A(1; 1)$.
2. Найдите:
 - а) $\int (2 - 3x) \sin 2x \, dx$;
 - б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2} \cdot (2 + \sqrt[3]{3x+2})}$;
 - в) $\int \frac{x}{x^4 + 1} \, dx$;
 - г) $\int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)} \, dx$;
 - д) $\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} \, dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_{-\frac{2\pi}{3}}^0 \frac{\cos^2 x \, dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$;
 - б) $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} \, dx$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_{-1}^3 x \cdot \operatorname{sgn}(x^2 - 2x) \, dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 2y$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$ при $0 \leq x \leq \frac{3}{4}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y^2 = x - 2$, $y = 0$, $y = x^3$, $y = 1$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{n}{n+2k}} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_0^\pi x \cdot f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) \, dx$.
3. Найдите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{\sin x}^x e^t \ln(1+t) \, dt$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 20

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{(2\sqrt{x} + 1)^2}{x^2}$, график которой проходит через точку $A(1; 2)$.
2. Найдите:
 - а) $\int (4x + 3) \sin 5x \, dx$;
 - б) $\int \frac{x + 2}{1 + \sqrt{x - 1}} \, dx$;
 - в) $\int \frac{x + \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx$;
 - г) $\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2}{x(x - 1)(x + 2)} \, dx$;
 - д) $\int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} \, dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \, dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$;
 - б) $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} \, dx$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{tg} x) \, dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $x = \frac{1}{y\sqrt{1 + \ln y}}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = e^3$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = \ln \cos x + 2$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3$, $y = x^2$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \, dx}{\sin x}$.
3. Найдите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} \cdot \int_{\cos x}^{1 - \frac{x^2}{2}} \operatorname{arctg} t \, dt$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 21

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{(4 + 3\sqrt{x})(x^2 - 2)}{x}$, график которой проходит через точку $A(1; -1)$.
2. Найдите:
 - а) $\int (7x - 10) \sin 4x \, dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x+1} \, dx$;
 - в) $\int \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$; г) $\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20}{x(x-4)(x+5)} \, dx$;
 - д) $\int \frac{2x^3 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} \, dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos^2 x \, dx}{(1 + \sin x + \cos x)^2}$; б) $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4} \, dx$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_0^\pi (x - \pi) \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} x) \, dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \frac{e^{1/x}}{x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 1$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = e^x + 26$ при $\ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = \arccos \frac{x}{5}$, $y = \arccos \frac{x}{3}$, $y = 0$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{k}{n}} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_0^\pi x \cdot f(\cos^2 x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\cos^2 x) \, dx$.
3. Найдите $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \int_{x^3}^x \frac{(1+t)^{\frac{1}{3}} - 1}{t} \, dt \right)$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 22

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{(2x+3)(\sqrt{x}+5)}{x^2}$, график которой проходит через точку $A(1; 2)$.
2. Найдите:
 - а) $\int (\sqrt{2} - 8x) \sin 3x \, dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} \, dx$;
 - в) $\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} \, dx$; г) $\int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)} \, dx$;
 - д) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} \, dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin x (1 + \sin x)}$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_{-1}^2 x \cdot |x^2 + x| \, dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 \sqrt{16 - x^2}$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq 4$).
6. Найдите длину дуги графика функции $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3$ при $0 \leq x \leq 2$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a+b-x) \, dx$.
3. Найдите $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \int_x^{x^3} \frac{\ln t}{t} \, dt \right)$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 23

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - \sqrt{x} + 4}{x}$, график которой проходит через точку $A(1; 2)$.
2. Найдите:
 - а) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$; б) $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$;
 - в) $\int \frac{x - \operatorname{arctg}^4 x}{1 + x^2} dx$; г) $\int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)} dx$;
 - д) $\int \frac{x+4}{(x^2+x+2)(x^2+2)} dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1 + \sin x + \cos x)^2}$; б) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(4 - x^2)^{3/2}}$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cdot \operatorname{sgn}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $x = \sqrt{4 - y^2}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4$ при $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 2x + 1$, $x = 2$, $y = 0$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$.
3. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^{1 - \frac{x^2}{2}} \operatorname{arctg} t dt}{e^x - 1}$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 24

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{5x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{x} + 1}{x}$, график которой проходит через точку $A(1; -1)$.
2. Найдите:
 - а) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x} dx$;
 - б) $\int \frac{\sqrt[6]{2x-1} + 1}{(2x-1)(\sqrt[3]{2x-1} - 1)} dx$;
 - в) $\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$;
 - г) $\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)} dx$;
 - д) $\int \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx$.
3. Вычислите определенные интегралы:
 - а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{2 + \sin x}$;
 - б) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_0^2 x \cdot |x^2 + 2x - 3| dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = (x-1)^2$, $y^2 = x-1$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = \frac{e^x + e^{-x} + 3}{4}$ при $0 \leq x \leq 2$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3$, $y = x$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{3k\pi}{n} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2} dx + 3 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} e^{9(x-\frac{2}{3})^2} dx = 0$.
3. Найдите $\frac{dy}{dx}$, если $\int_0^y e^{-t^2} dt + \int_0^{x^2} \sin^2 t dt = 0$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.

Вариант № 25

1. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 4\sqrt[4]{x} - 1}{x}$, график которой проходит через точку $A(1; 2)$.
2. Найдите:

а) $\int x \sin^2 x \, dx$; в) $\int \frac{\arcsin^2 x + 1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$; д) $\int \frac{3x^3 + 7x^2 + 12x + 6}{(x^2 + x + 3)(x^2 + 2x + 3)} \, dx$.	б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} \cdot (1 + \sqrt[3]{x^2})}$; г) $\int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} \, dx$;
---	--
3. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x(1 + \cos x)}$;	б) $\int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{4-x^2}}$.
---	--
4. Используя аддитивность определенного интеграла, вычислите $\int_0^2 (|x^2 - 1| - |x + 2|) \, dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 \cos x$, $y = 0$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.
6. Найдите длину дуги графика функции $y = e^x + e$ при $\ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$.
7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $x = 0$.

Дополнительные задачи

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \right)$, используя определение определенного интеграла.
2. Используя теорему о замене переменной в определенном интеграле, докажите равенство (считайте, что функция f непрерывна на данном отрезке) $\int_0^{\pi} \frac{\sin 2kx}{\sin x} \, dx = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Найдите $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t e^{x^2} \, dx}{\int_0^t e^{2x^2} \, dx}$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \varphi$, $r = 2$.