

М.В.Плеханова, В.Е.Федоров

**АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ  
МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Учебное пособие

Челябинск 2007

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Челябинский государственный педагогический  
университет"

М.В.Плеханова, В.Е.Федоров

## **АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

**Учебное пособие**

Челябинск 2007

ББК В16я7

С247

УДК 517.9

С247 Анализ функций многих переменных: Учеб. пособие / М.В.Плеханова, В.Е.Федоров; Челяб. гос. пед. ун-т. Челябинск, 2007. 119 с.

ISBN 5-230-20031-6

Пособие охватывает раздел курса математического анализа, читаемый, как правило, в течение второго семестра студентам, обучающимся по специальности "Прикладная математика". Изложение материала сопровождается большим количеством примеров, замечаний и упражнений, позволяющих читателю лучше освоить предлагаемый материал и используемые методы.

Библиогр.: 12 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Челябинского государственного педагогического университета.

Рецензенты: кафедра математического анализа  
ЧГПУ; д-р физ.-мат. наук, проф. Г.А.Свиридюк

С  $\frac{1702050000}{4К8(03) - 07}$  Без объявл.

ББК 162 я 73 – 1

ISBN 5-230-20031-6 ©Челябинский государственный педагогический университет, 2007

## Содержание

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>Глава I. Пространство <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>6</b>
1. Метрическая структура $\mathbb{R}^n$ . . . . .	6
2. Сходимость в метрическом пространстве и полнота $\mathbb{R}^n$ . . . . .	9
3. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве . . . . .	12
4. Компакт в метрическом пространстве . . . . .	16
5. Линейная и евклидова структуры множества $\mathbb{R}^n$	20
<b>Глава II. Непрерывные функции многих переменных</b>	<b>24</b>
1. Предел функции в точке . . . . .	24
2. Предел по множеству. Повторный предел. Бесконечные пределы . . . . .	26
3. Непрерывность функций многих переменных в точке . . . . .	29
4. Функции, непрерывные на компакте . . . . .	31
<b>Глава III. Дифференцируемые функции многих переменных</b>	<b>36</b>
1. Дифференцируемость функции многих переменных в точке . . . . .	36
2. Частные производные. Необходимые, достаточные условия дифференцируемости .	41
3. Матрица Якоби. Дифференцируемость композиции и обратного отображения. Формула Лагранжа . . . . .	45
4. Дифференциал. Инвариантность формы первого дифференциала. Геометрический смысл дифференциала . . . . .	49
5. Производная по направлению. Градиент . . . . .	53

6. Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных . . . . .	55
7. Дифференциалы высших порядков . . . . .	59
8. Формула Тейлора для функций многих переменных . . . . .	62
<b>Глава IV. Теорема о неявной функции.</b>	
<b>Экстремумы функций многих переменных</b>	<b>66</b>
1. Простейший вариант теоремы о неявной функции	66
2. Теорема о неявной функции . . . . .	70
3. Необходимые условия экстремума функции многих переменных . . . . .	76
4. Достаточные условия экстремума . . . . .	80
5. Условный экстремум. Теорема Лагранжа . . . .	84
6. Достаточные условия условного экстремума . .	90
<b>Глава V. Кратные интегралы</b>	<b>96</b>
1. Свойства декартовых произведений. Клетки . .	96
2. Клеточные множества в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	100
3. Мера Жордана. Множества меры нуль . . . . .	103
4. Критерий измеримости. Свойства измеримых множеств . . . . .	105
5. Определение кратного интеграла Римана. Критерий интегрируемости. Достаточные условия интегрируемости . . . . .	109
6. Свойства кратного интеграла . . . . .	114
7. Сведение двойного интеграла по прямоугольнику к повторному интегралу . .	118
8. Сведение кратного интеграла по элементарной области к повторному интегралу . . . . .	122
9. Формула замены переменных в кратном интеграле	125
10. Несобственные кратные интегралы . . . . .	132
<b>Библиографический список</b>	<b>137</b>

## Введение

Учебное пособие предназначено для студентов физико-математических специальностей вузов. В основе его лежит десятилетний опыт чтения лекций по курсу математического анализа одним из авторов. Пособие содержит такие традиционные разделы курса математического анализа, как структура конечномерного пространства и сходимость в нем, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, его приложения к вопросам существования неявно заданной функции и вопросам отыскания экстремумов функций нескольких переменных, в том числе условных экстремумов, а также теорию собственного и несобственного кратных интегралов Римана. На авторов, безусловно, оказали влияние те классические учебники по математическому анализу, которые упомянуты в списке литературы, однако при построении курса авторы руководствовались собственными предпочтениями.

Объем учебного пособия рассчитан примерно на три десятка лекций, при этом для удобства студентов текст структурирован таким образом, что каждый параграф, по сути, является одним вопросом на экзамене. Изложение теоретического материала снабжено большим количеством примеров, которые в основном касаются принципиальных моментов теории, и упражнений, позволяющих разгрузить текст изложения от однотипных рассуждений.

Учебное пособие может оказаться полезным и при самостоятельном изучении математического анализа функций нескольких переменных.

## Глава I. Пространство $\mathbb{R}^n$

### 1. Метрическая структура $\mathbb{R}^n$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пара  $(X, d)$  называется *метрическим пространством*, если на множестве  $X$  задано отображение  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  такое, что для любых  $x, y, z \in X$  выполнено:

- 1)  $d(x, y) \geq 0$ ;
- 2)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- 3)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- 4) неравенство треугольника  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

Условия 1) – 4) называются *аксиомами метрики*, отображение  $d$  – *метрикой*,  $x, y, z \in X$  – *точками* метрического пространства.

ПРИМЕР 1.1. Пусть  $X = \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = a|x - y|$ ,  $a > 0$ . Тогда  $(X, d)$  является метрическим пространством.

ПРИМЕР 1.2. Пусть задана плоскость

$$\{(x^1, x^2) : x^1, x^2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

и для любых точек  $x = (x^1, x^2)$ ,  $y = (y^1, y^2)$  данной плоскости заданы

$$d(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2},$$

$$d_1(x, y) = \max\{|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|\},$$

$$d_2(x, y) = |x^1 - y^1| + |x^2 - y^2|.$$

Тогда  $(\mathbb{R}^2, d)$ ,  $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ,  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  – различные метрические пространства.

УПРАЖНЕНИЕ 1.1. Проверить аксиомы метрики для  $d$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В дальнейшем, когда вид метрики будет ясен из контекста, метрическое пространство будем обозначать через  $X$ , опуская обозначение метрики.

Введем обозначения:

$$\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n) : x^i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\} = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R},$$

$$x = (x^1, \dots, x^n), y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

ЛЕММА 1.1 (неравенство Коши – Буняковского – Шварца). Пусть  $a^i, b^i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$ . Тогда

$$\left| \sum_{i=1}^n a^i b^i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n (a^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n (b^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим  $P(t) = \sum_{i=1}^n (a^i + tb^i)^2 = A + 2Bt + Ct^2$ , где  $A = \sum_{i=1}^n (a^i)^2, B = \sum_{i=1}^n a^i b^i, C = \sum_{i=1}^n (b^i)^2$ . Если  $C = 0$ , то  $b^i = 0, i = \overline{1, n}, B = 0$  и неравенство выполняется. Если  $C \neq 0$ , то поскольку  $P(t) \geq 0$ , квадратное уравнение  $P(t) = 0$  имеет не более одного корня. Поэтому его дискриминант  $D = 4(B^2 - AC) \leq 0$ , что и требовалось доказать.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Здесь и далее знаком  $\square$  отмечено завершение доказательства.

ЛЕММА 1.2 (неравенство Минковского). Пусть  $a^i, b^i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$ . Тогда

$$\left( \sum_{i=1}^n (a^i + b^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{i=1}^n (a^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^n (b^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a^i + b^i)^2 &= \sum_{i=1}^n (a^i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n a^i b^i + \sum_{i=1}^n (b^i)^2 \leq \\ \sum_{i=1}^n (a^i)^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^n (a^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n (b^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^n (b^i)^2 &= \\ \left( \left( \sum_{i=1}^n (a^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^n (b^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2. &\square \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть  $x = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$ . Тогда  $d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  – метрика в  $\mathbb{R}^n$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в проверке определения 1.1. Аксиомы метрики 1), 2) и 3), очевидно, выполняются. Неравенство треугольника

$$\left( \sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{i=1}^n (x^i - z^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^n (z^i - y^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

следует из леммы 1.2 при  $a^i = x^i - z^i$  и  $b^i = z^i - y^i$ .  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Метрика, определенная в теореме 1.1, называется *евклидовой*. Именно ею в дальнейшем по умолчанию будет снабжаться  $\mathbb{R}^n$ , если не будет оговорено противное.

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Показать, что  $d_1(x, y) = \max_{i=1, n} |x^i - y^i|$ ,  $d_2(x, y) = \sum_{i=1}^n |x^i - y^i|$  – метрики в  $\mathbb{R}^n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.3. Доказать неравенства

$$d_1(x, y) \leq d(x, y) \leq d_2(x, y) \leq n d_1(x, y).$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.4. Возьмем множество  $X = B[a, b]$  ограниченных функций, заданных на отрезке  $[a, b]$  и определим отображение  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  формулой  $d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$  для любых  $f, g \in B[a, b]$ . Доказать, что  $(B[a, b], d)$  – метрическое пространство.

## 2. Сходимость в метрическом пространстве и полнота $\mathbb{R}^n$

Пусть  $(X, d)$  – метрическое пространство. *Последовательностью* в нем назовем отображение из  $\mathbb{N}$  в  $X$  и обозначим ее  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  или, для краткости,  $\{x_k\}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем считать, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \in X$ , если  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, a) = 0$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k > N \quad d(x_k, a) < \varepsilon.$$

В этом случае последовательность  $\{x_k\}$  в метрическом пространстве называется *сходящейся*, а элемент  $a$  называется ее *пределом*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Последовательность  $\{x_k\}$  пространства  $X$  *ограничена*, если

$$\exists a \in X \quad \exists c > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad d(x_k, a) \leq c.$$

ЛЕММА 2.1. *Сходящаяся последовательность в метрическом пространстве ограничена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы  $d(x_k, a) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Следовательно, последовательность  $\{d(x_k, a)\}$  ограничена, т. е.  $\exists c > 0 \quad |d(x_k, a)| = d(x_k, a) \leq c \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

ЛЕММА 2.2. *Последовательность в метрическом пространстве не может сходиться к двум различным пределам.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем от противного. Пусть существуют  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ ,  $b = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ . Тогда из неравенства треугольника получим

$$0 \leq d(a, b) \leq d(a, x_k) + d(x_k, b) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Следовательно,  $d(a, b) = 0$  и по свойствам метрики  $a = b$ .  $\square$

ЛЕММА 2.3. Пусть последовательность  $\{x_k\} \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$ ,  $a = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ . Предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$  существует тогда и только тогда, когда  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i = a^i$  для всех  $i = \overline{1, n}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость условий существования предела последовательности в  $\mathbb{R}^n$ . Для любого  $i = \overline{1, n}$  имеем

$$0 \leq |x_k^i - a^i| \leq \left( \sum_{i=1}^n (x_k^i - a^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = d(x_k, a) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Поэтому  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i = a^i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Для доказательства достаточности заметим, что поскольку для любого  $i = \overline{1, n}$  выполняется  $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k^i - a^i| = 0$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n (x_k^i - a^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \quad \square$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Последовательность  $\{x_k\} \subset X$  называется фундаментальной, если  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k > N \quad \forall m > N \quad d(x_k, x_m) < \varepsilon$ .

ЛЕММА 2.4. Сходящаяся последовательность в метрическом пространстве фундаментальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \in X$ . Тогда по определению сходимости

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k > N \quad \forall m > N$$

$$\left(d(x_k, a) < \frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge \left(d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

В силу неравенства треугольника имеем

$$d(x_k, x_m) \leq d(x_k, a) + d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

ПРИМЕР 2.1. Пусть  $X = \mathbb{Q}$  – множество рациональных чисел,  $d(x, y) = |x - y|$ ,  $x_k = (1 + \frac{1}{k})^k \in \mathbb{Q}$ . Тогда последовательность  $\{x_k\}$  фундаментальная, но не сходящаяся, поскольку число  $e$  не является рациональным.

ПРИМЕР 2.2. Пусть  $X = (0, 1]$ , тогда  $\{x_k\} = \{\frac{1}{k}\}$  фундаментальная, но не сходящаяся последовательность, так как  $0 \notin X$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Метрическое пространство  $X$  полно, если любая фундаментальная последовательность в  $X$  сходится.

ПРИМЕР 2.3. Пространство  $X = \mathbb{R}$  с метрикой  $d(x, y) = |x - y|$  полно.

ТЕОРЕМА 2.1. Метрическое пространство  $(\mathbb{R}^n, d)$  полное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\{x_k\}$  фундаментальная последовательность элементов  $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n) \in \mathbb{R}^n$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k, m > N$

$$|x_k^i - x_m^i| \leq \left( \sum_{j=1}^n (x_k^j - x_m^j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Следовательно, для каждого  $i = \overline{1, n}$  последовательность  $\{x_k^i\}_{k=1}^\infty$  фундаментальна в  $\mathbb{R}$ . Согласно критерию Коши существует предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i = a^i \in \mathbb{R}$ . В силу леммы 2.3 получим  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a = (a^1, \dots, a^n)$ .  $\square$

### 3. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве

Пусть  $(X, d)$  – метрическое пространство. *Шаром* с центром в точке  $a \in X$  и радиусом  $r > 0$  будем называть множество  $B_r(a) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$ . В пространстве  $\mathbb{R}$  шаром является интервал  $(a - r, a + r)$ , в  $\mathbb{R}^2$  – круг  $\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : (x^1 - a^1)^2 + (x^2 - a^2)^2 < r^2\}$ , в  $\mathbb{R}^n$ , соответственно,  $B_r(a) = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (x^i - a^i)^2 < r^2\}$ .

Точка  $x_0 \in M \subset X$  называется *внутренней* точкой множества  $M$ , если существует  $\varepsilon > 0$ , что  $B_\varepsilon(x_0) \subset M$ . Совокупность внутренних точек множества  $M$  называется *внутренностью* множества  $M$  и обозначается через  $\text{int}M$  или  $\overset{\circ}{M}$ . Очевидно, что  $\text{int}M \subset M$ .

Если  $\text{int}M = M$ , т. е. все точки в  $M$  внутренние, то  $M$  называется *открытым* в  $X$  множеством. По определению будем считать, что  $\emptyset$  – открытое множество.

**ПРИМЕР 3.1.** Шар  $B_r(a)$  в метрическом пространстве  $X$  является открытым множеством. Действительно, выберем  $x_0 \in B_r(a)$ . Тогда  $d(x_0, a) < r$ . Положив  $\varepsilon = r - d(x_0, a) > 0$ , получим  $B_\varepsilon(x_0) \subset B_r(a)$ , поскольку для любого  $x \in B_\varepsilon(x_0)$  справедливо  $d(x, a) \leq d(x, x_0) + d(x_0, a) < \varepsilon + d(x_0, a) = r$ , и следовательно,  $x \in B_r(a)$ .

**ТЕОРЕМА 3.1.**

- 1)  $X, \emptyset$  – открытые множества в метрическом пространстве  $X$ ;
- 2) объединение произвольной совокупности открытых множеств есть открытое множество;
- 3) пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первое утверждение теоремы очевидно, докажем второе. Пусть  $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ , где множество индексов  $I$  произвольно,  $G_\alpha$  – открытые множества в  $X$  при

всех  $\alpha \in I$ . Если  $a \in G$ , то существует  $\alpha_0 \in I$ , такое, что  $a$  принадлежит открытому множеству  $G_{\alpha_0}$ . Поэтому при некотором  $\varepsilon > 0$   $B_\varepsilon(a) \subset G_{\alpha_0} \subset G$ .

Для доказательства последнего утверждения возьмем  $G = \bigcap_{i=1}^n G_i$ , где  $G_i$  – открытые множества в  $X$ . Если  $a \in G$ , то  $a \in G_i$  для всех  $i = \overline{1, n}$ . Поэтому существуют такие числа  $\varepsilon_i > 0$ , что  $B_{\varepsilon_i}(a) \subset G_i$ . Положив  $\varepsilon = \min_{i=\overline{1, n}} \varepsilon_i$ , получим  $B_\varepsilon(a) \subset G_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Следовательно,  $B_\varepsilon(a) \subset G$  и  $G$  – открытое множество.  $\square$

ПРИМЕР 3.2. Множество  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1 + \frac{1}{n}) = (0, 1]$  не является открытым в  $\mathbb{R}$ , так как 1 – не внутренняя точка. Таким образом, предположение о конечности системы открытых множеств в третьем утверждении теоремы 3.1 существенно.

Множество  $O_{x_0}$  называется *окрестностью* точки  $x_0 \in X$ , если  $x_0$  – внутренняя точка множества  $O_{x_0}$ . Простейшим примером окрестности точки  $x_0$  является шар  $B_\varepsilon(x_0)$ .

Точка  $x_0$  называется *предельной точкой* множества  $M \subset X$ , если любая окрестность  $O_{x_0}$  точки  $x_0$  содержит точки множества  $M$ , отличные от  $x_0$ . Заметим, что сама предельная точка  $x_0$  множества  $M$  может принадлежать или не принадлежать этому множеству.

ПРИМЕР 3.3. Для интервала  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  предельными точками являются все точки отрезка  $[a, b]$ .

Если точка  $x_0 \in M$  не является предельной точкой множества  $M$ , то  $x_0$  называется *изолированной точкой* множества  $M$ . Другими словами,  $x_0 \in M$  – изолированная точка множества  $M$ , если существует окрестность  $O_{x_0}$ , которая не содержит других точек из  $M$ .

Множество  $M \subset X$  *замкнуто*, если содержит все свои предельные точки.

ПРИМЕР 3.4. Множество  $[a, b]$  замкнуто в  $\mathbb{R}$ .

Объединение множества  $M$  и всех его предельных точек называется *замыканием* множества  $M$  и обозначается через  $\overline{M}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.1. Доказать, что множество в метрическом пространстве замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит пределы всех сходящихся последовательностей своих точек.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть  $X$  – метрическое пространство. Тогда множество  $F \subset X$  является замкнутым в том и только в том случае, когда  $X \setminus F$  открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $F$  содержит все свои предельные точки и  $X \setminus F$  не открыто. Тогда найдется точка  $a \in G = X \setminus F$ , не являющаяся внутренней точкой множества  $G$ . Следовательно, для любой окрестности  $O_a$  существуют точки, отличные от  $a$  и не принадлежащие  $G$ , а значит, принадлежащие  $F$ . Таким образом,  $a$  – предельная точка  $F$  и поэтому должна принадлежать этому множеству. Но  $a \in X \setminus F$  – получили противоречие, к которому привело предположение о том, что  $X \setminus F$  не открыто.

Обратное утверждение также докажем от противного. Пусть множество  $G = X \setminus F$  открыто,  $a$  – предельная точка множества  $F$ . Предположим, что  $a \notin F$ , т. е.  $a$  принадлежит открытому множеству  $G$ . Следовательно, существует окрестность  $O_a \subset G$ . Отсюда получим, что  $O_a \cap F = \emptyset$  и, значит,  $a$  – не является предельной точкой множества  $F$ . Пришли к противоречию.  $\square$

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть  $X$  – метрическое пространство, тогда:

- 1)  $X, \emptyset$  – замкнутые множества;
- 2) пересечение любой системы замкнутых множеств есть замкнутое множество;
- 3) объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Поскольку пространство  $X$  мож-

но представить как  $X \setminus \emptyset$ , где  $\emptyset$  – открытое множество, то из теоремы 3.2 следует замкнутость  $X$ . Аналогичным образом получается замкнутость пустого множества  $\emptyset = X \setminus X$ .

2) Положим  $F = \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ ,  $I$  – некоторое множество индексов, для всех  $\alpha \in I$  множества  $F_\alpha$  замкнуты. Тогда  $X \setminus F = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_\alpha)$  – открытое множество по теореме 3.1 и, следовательно, множество  $F$  замкнуто.

3) Положим  $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$ , где все множества  $F_i$  замкнуты. Тогда  $X \setminus F = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus F_i)$  – открытое множество по теореме 3.1, поэтому по теореме 3.2 множество  $F$  замкнуто.  $\square$

Точка  $a \in X$  называется *граничной точкой* множества  $M \subset X$ , если любая окрестность точки  $a$  содержит точки из  $M$  и точки, не принадлежащие множеству  $M$ . Граничная точка множества  $M$  может не принадлежать самому множеству. Совокупность всех граничных точек множества  $M$  будем называть *границей*  $M$  и обозначать  $\partial M$ .

**ТЕОРЕМА 3.4.** Пусть  $X$  – метрическое пространство,  $M \subset X$ . Тогда  $\partial M = \overline{M} \setminus \text{int} M$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $x \in \partial M$ . Тогда по определению граничной точки для любой окрестности  $O_x$  выполняется  $O_x \cap M \neq \emptyset$  и поэтому  $x$  – предельная точка множества  $M$ , т. е.  $x \in \overline{M}$ . С другой стороны,  $O_x \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$ , т. е.  $x$  не внутренняя точка  $M$ . Таким образом, доказано вложение  $\partial M \subset \overline{M} \setminus \text{int} M$ .

Докажем обратное вложение. Пусть  $x \in \overline{M} \setminus \text{int} M$ . Это значит, что для любой окрестности  $O_x$  точки  $x$  выполняется  $O_x \cap M \neq \emptyset$  в силу того, что  $x \in \overline{M}$ . С другой стороны, поскольку  $x \notin \text{int} M$ , имеем  $O_x \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$  и, следовательно,  $x \in \partial M$ . Получили  $\overline{M} \setminus \text{int} M \subset \partial M$ .  $\square$



#### 4. Компакт в метрическом пространстве

ТЕОРЕМА 4.1 (теорема Больцано – Вейерштрасса). Из любой ограниченной в пространстве  $\mathbb{R}^n$  последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем ограниченную последовательность  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ , тогда для некоторого  $c > 0$

$$|x_k^i| \leq \left( \sum_{j=1}^n (x_k^j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Получили ограниченность числовой последовательности  $\{x_k^1\}_{k=1}^\infty$ . По теореме Больцано – Вейерштрасса для числовых последовательностей можно выбрать такую подпоследовательность  $\{x_{k_l}^1\}$ , что  $\lim_{l \rightarrow \infty} x_{k_l}^1 = x^1$ .

Из ограниченной последовательности  $\{x_{k_l}^2\}_{k_l=1}^\infty$  выделим подпоследовательность  $\{x_{k_{lm}}^2\}_{m=1}^\infty$ , такую, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{k_{lm}}^2 = x^2$ . При этом очевидно, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{k_{lm}}^1 = x^1$ . Продолжая этот процесс, на  $n$ -м шаге получим подпоследовательность, покомпонентно, а значит, и в смысле метрики в  $\mathbb{R}^n$ , сходящуюся к элементу  $x = (x^1, \dots, x^n)$ .  $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Подмножество  $K$  метрического пространства  $X$  называется *компактом* или *компактным* множеством, если из любой последовательности  $\{x_k\} \subset K$  можно выделить подпоследовательность  $x_{k_l}$ , сходящуюся к точке из  $K$ .

Множество  $M \subset X$  называется *ограниченным*, если

$$\exists a \in X \quad \exists c > 0 \quad \forall x \in M \quad d(x, a) \leq c.$$

ТЕОРЕМА 4.2. Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем замкнутость компакта. Пусть  $K \subset X$  – компакт,  $a \in X$  – предельная

точка  $K$ . Рассмотрим шар

$$B_{\frac{1}{m}}(a) = \left\{ x \in X : d(x, a) < \frac{1}{m} \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Поскольку  $B_{\frac{1}{m}}(a) \cap K \neq \emptyset$  для всех  $m \in \mathbb{N}$ , то

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists x_m \in K \quad d(x_m, a) < \frac{1}{m}.$$

Устремив  $m \rightarrow \infty$ , получим  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a$ . Следовательно, любая подпоследовательность последовательности  $\{x_m\}$  сходится к  $a$ . Отсюда по определению компакта имеем  $a \in K$ .

Ограниченность множества  $K$  докажем от противного. Пусть  $K$  – неограниченное множество,  $a \in K$ ,  $B_m(a) = \{x \in X : d(x, a) < m\}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Из неограниченности  $K$  следует, что для любого  $m \in \mathbb{N}$   $K$  не является подмножеством  $B_m(a)$ .

Возьмем  $m_1 = 1$ , выберем из чисел  $2, 3, \dots$  наименьшее число  $m_2$ , такое, что множество  $B_{m_2}(a) \setminus B_{m_1}(a)$  пересекается с  $K$ . В силу сказанного выше такое число найдется. Затем из чисел  $m_2 + 1, m_2 + 2, \dots$  выберем наименьшее число  $m_3$ , для которого  $(B_{m_3}(a) \setminus B_{m_2}(a)) \cap K \neq \emptyset$ . Продолжая этот процесс, получим подпоследовательность шаров  $\{B_{m_k}(a)\}$ , для которой  $(B_{m_{k+1}}(a) \setminus B_{m_k}(a)) \cap K \neq \emptyset$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ . По построению имеем, что  $m_{k+1} - m_k \geq 1$  и при этом

$$\exists \{x_k\} \subset K \quad m_k \leq d(x_k, a) < m_{k+1}.$$

Если положить  $l > k + 1$ , то в силу неравенств  $d(x_k, x_l) \geq d(x_l, a) - d(x_k, a) > m_l - m_{k+1} \geq 1$  сделаем вывод, что из полученной последовательности  $\{x_k\}$  нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность. Получили противоречие с компактностью множества  $K$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 4.1.** *Множество  $K \subset \mathbb{R}^n$  компактно тогда и только тогда, когда  $K$  замкнуто и ограничено.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $K$  – замкнутое и ограниченное множество. Тогда любая последовательность  $\{x_k\} \subset K$  ограничена и по теореме 4.1 из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность к точке  $a \in X$ . Тогда  $a$  – предельная точка множества  $K$ , и поскольку  $K$  замкнуто,  $a \in K$ .  $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Множество

$$\Pi_a^b = \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : a^i \leq x^i \leq b^i, i = \overline{1, n}\},$$

где  $a = (a^1, \dots, a^n)$ ,  $b = (b^1, \dots, b^n)$ , называется  $n$ -мерным прямоугольником.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Отрезок  $[a, b]$  является 1-мерным прямоугольником  $\Pi_a^b$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.1. Доказать, что  $\Pi_a^b$  – компакт.

Число  $D = \left( \sum_{i=1}^n (b^i - a^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  называется *диаметром* прямоугольника  $\Pi_a^b$ . Если  $n = 1$ , то  $D$  – длина отрезка. Если  $n = 2, 3$ , то  $D$  – длина главной диагонали прямоугольника или параллелепипеда соответственно.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть  $\{\Pi_{a_k}^{b_k}\}$  – последовательность вложенных прямоугольников. Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad c \in \Pi_{a_k}^{b_k}.$$

Если последовательность диаметров  $\{D_k\}$  прямоугольников стремится к нулю, то указанная точка  $c \in \mathbb{R}^n$  единственна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что  $\{[a_k^i, b_k^i]\}$  – последовательность вложенных отрезков. Следовательно, для любого  $k \in \mathbb{N}$  найдется  $c^i \in [a_k^i, b_k^i]$ . Если  $d_k \rightarrow 0$ , то  $|b_k^i - a_k^i| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  для всех  $i = \overline{1, n}$  и по принципу Коши – Кантора существует единственная точка  $c^i \in \mathbb{R}$ , принадлежащая  $[a_k^i, b_k^i]$  при всех  $k \in \mathbb{N}$ . Отсюда

$$\exists ! c = (c^1, \dots, c^n) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad c \in \Pi_{a_k}^{b_k}. \quad \square$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Совокупность открытых множеств  $\{O_\alpha \subset \mathbb{R}^n : \alpha \in I\}$ , где  $I$  – множество индексов, называется *открытым покрытием* множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ , если  $X \subset \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$ . Открытое покрытие *конечно*, если  $I$  – конечное множество. Покрытие  $\{O_\alpha \subset \mathbb{R}^n : \alpha \in J\}$  является *подпокрытием* покрытия  $\{O_\alpha \subset \mathbb{R}^n : \alpha \in I\}$ , если  $J \subset I$ .

ТЕОРЕМА 4.4 (теорема Бореля – Лебега). *Множество  $K \subset \mathbb{R}^n$  компактно тогда и только тогда, когда из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $K$  – компакт,  $\{O_\alpha : \alpha \in I\}$  – его открытое покрытие. Согласно теореме 4.2 компактное множество ограничено. Следовательно найдется прямоугольник  $\Pi_a^b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^n$ , содержащий  $K$ . Пусть  $K = \Pi_a^b \cap K$  нельзя покрыть конечным покрытием.

Прямоугольник  $\Pi_a^b = \{x \in \mathbb{R}^n : a^i \leq x^i \leq b^i, i = \overline{1, n}\}$  с диаметром  $D$  разобьем на  $2^n$  равных прямоугольников. Среди них найдется прямоугольник  $\Pi_1$ , такой, что  $\Pi_1 \cap K$  нельзя покрыть конечным числом множеств из  $\{O_\alpha\}$ . На следующем шаге разобьем  $\Pi_1$  на  $2^n$  равных прямоугольников, среди которых найдется прямоугольник  $\Pi_2$  такой, что  $\Pi_2 \cap K$  нельзя покрыть конечным числом множеств из  $\{O_\alpha\}$  и т. д. В результате получим такую систему вложенных прямоугольников  $\{\Pi_k\}$ , что при всех  $k \in \mathbb{N}$  множество  $\Pi_k \cap K$  нельзя покрыть конечным числом множеств из системы  $\{O_\alpha\}$ . Так как по построению последовательность диаметров прямоугольников  $D_k = 2^{-k}D$  стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , по теореме 4.3 найдется единственный элемент  $c \in \mathbb{R}^n$ , принадлежащий прямоугольникам  $\Pi_k$  при всех  $k \in \mathbb{N}$ . В каждом множестве  $\Pi_k \cap K$  выберем произвольный элемент  $x_k$ , тогда

$$d(c, x_k) \leq D_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Поэтому  $c \in \overline{K} = K$  в силу замкнутости  $K$ .

Далее, найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что при некотором  $\alpha_0 \in I$  выполняется  $O_\varepsilon(c) \subset O_{\alpha_0}$ . Тогда при достаточно больших  $k \in \mathbb{N}$  имеют место вложения  $\Pi_k \subset O_\varepsilon(c) \subset O_{\alpha_0}$ . Таким образом, множество  $\Pi_k$  имеет конечное покрытие, состоящее из одного множества  $O_{\alpha_0}$ . Получили противоречие.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть из любого открытого покрытия  $K$  можно выбрать конечное подпокрытие. Рассмотрим систему шаров  $\{B_r(x) : x \in K\}$ , где  $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$ . Очевидно, что эта система образует открытое покрытие множества  $K$ . Тогда по условию теоремы можно выбрать конечное подпокрытие  $\{B_r(x_1), \dots, B_r(x_m)\}$  для  $K$ . Очевидно, что можно выбрать достаточно большое  $R > 0$ , при котором  $B_R(x_1) \supset B_r(x_i)$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Таким образом, из вложения  $B_R(x_1) \supset K$  получим ограниченность  $K$ .

Покажем открытость  $\mathbb{R}^n \setminus K$ . Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus K$ ,  $x \in K$ ,  $r(x) = \frac{d(x, x_0)}{2}$ . Тогда  $x_0 \notin \overline{B_{r(x)}(x)}$ ,  $\{B_{r(x)}(x) : x \in K\}$  – открытое покрытие  $K$ . Выберем из него конечное подпокрытие  $\{B_{r(x_1)}(x_1), \dots, B_{r(x_m)}(x_m)\}$ . Понятно, что  $K \subset \bigcup_{i=1}^m \overline{B_{r(x_i)}(x_i)}$ . Поскольку  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{r(x_i)}(x_i)}$ , то  $x_0 \in \bigcap_{i=1}^m (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{r(x_i)}(x_i)})$ . Последнее множество является открытым, кроме того,  $\bigcap_{i=1}^m (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{r(x_i)}(x_i)}) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^m \overline{B_{r(x_i)}(x_i)} \subset \mathbb{R}^n \setminus K$ . Следовательно,  $x_0$  – внутренняя точка  $\mathbb{R}^n \setminus K$ , а  $K$  – замкнутое множество.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Теорема Бореля – Лебега справедлива и для случая произвольного метрического пространства.

## 5. Линейная и евклидова структуры множества $\mathbb{R}^n$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Множество  $X$  называется *линейным пространством* (или *векторным пространством*) над

полем  $\mathbb{R}$ , если для любых элементов  $x, y \in X$  определена их сумма  $x + y \in X$  и при этом

- 1)  $\forall x, y \in X \quad x + y = y + x$ ;
- 2)  $\forall x, y, z \in X \quad x + (y + z) = (x + y) + z$ ;
- 3)  $\exists 0 \quad \forall x \in X \quad x + 0 = x$ ;
- 4)  $\forall x \in X \quad \exists y \in X \quad x + y = 0$ ;

а также для любых  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $x \in X$  определено произведение  $\alpha x \in X$  элемента множества  $X$  на число, которое при всех  $x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  удовлетворяет условиям:

- 5)  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ;
- 6)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ;
- 7)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ ;
- 8)  $1 \cdot x = x$ .

Элементы линейного пространства будем называть *точками* или *векторами*.

УПРАЖНЕНИЕ 5.1. Доказать, что:

а) в любом линейном пространстве существует единственный нулевой элемент  $0 \in X$ ;

б) для любого  $x \in X$  выполняется  $0 \cdot x = 0$ . Здесь в левой части равенства – число "ноль" а в правой – нулевой вектор пространства  $X$ , для которых используется один и тот же символ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Линейное пространство  $X$  называется *евклидовым*, если существует отображение  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , такое, что:

- 1)  $\forall x \in X \quad \langle x, x \rangle \geq 0$ ;
- 2)  $\langle x, x \rangle = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ;
- 3)  $\forall x, y \in X \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  (симметричность);
- 4)  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in X \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$  (однородность);
- 5)  $\forall x, y, z \in X \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  (аддитивность).

Отображение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  называется *скалярным произведением* в пространстве  $X$ .

ТЕОРЕМА 5.1. Пространство  $\mathbb{R}^n$  является евклидовым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем векторы  $x = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $y = (y^1, \dots, y^n)$  из  $\mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Определим сумму  $x + y = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n)$ , произведение вектора на число  $\alpha x = (\alpha x^1, \dots, \alpha x^n)$  и скалярное произведение  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 5.2. Завершить доказательство теоремы, проверив соответствующие определения.

Через  $|x|_n = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left( \sum_{i=1}^n (x^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  обозначим норму вектора  $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$  или, по-другому, расстояние от точки 0 до точки  $x$ .

Пусть  $X$  – линейное пространство, векторы  $\{x_1, \dots, x_n\}$  линейно независимы, если  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$  тогда и только тогда, когда  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ . Линейно независимая система векторов  $\{x_1, \dots, x_n\}$  называется базисом в пространстве  $X$ , если для любого вектора  $x \in X$  существует набор чисел  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ , такой, что  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ .

В евклидовом пространстве  $X$  векторы  $x, y \in X$  называются ортогональными, если  $\langle x, y \rangle = 0$ . Базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ортонормирован в евклидовом пространстве  $X$ , если при  $i, j = \overline{1, n}$  выполняется

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

ПРИМЕР 5.1. В  $\mathbb{R}^n$  можно задать ортонормированный базис  $e_i = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , где единичной является  $i$ -я координата. Такой базис называется стандартным.

Прямой в  $\mathbb{R}^n$ , проходящей через точки  $a = (a^1, \dots, a^n)$

и  $b = (b^1, \dots, b^n)$ , называется множество

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x^i = a^i t + b^i(1 - t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}\}.$$

Лучом с вершиной в точке  $a = (a^1, \dots, a^n)$  в направлении вектора  $l = (l^1, \dots, l^n)$ ,  $|l|_n = 1$ , называется множество

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x^i = a^i + t l^i, \quad t \in [0, \infty), \quad i = \overline{1, n}\}.$$

Отрезком, соединяющим точки  $a$  и  $b$ , называется множество

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x^i = a^i t + b^i(1 - t), \quad t \in [0, 1], \quad i = \overline{1, n}\}.$$

Множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  выпукло, если вместе с любыми двумя точками оно содержит отрезок, их соединяющий.

УПРАЖНЕНИЕ 5.3. Доказать, что  $B_r(x)$  в  $\mathbb{R}^n$  – выпуклое множество.



## Глава II. Непрерывные функции многих переменных

### 1. Предел функции в точке

Пусть  $O_{x_0}$  – окрестность точки  $x_0$  в метрическом пространстве  $X$ . Через  $\dot{O}_{x_0} = O_{x_0} \setminus \{x_0\}$  обозначим проколотую окрестность точки  $x_0$ .

Далее, пусть  $M \subset X$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  – некоторая функция. Если  $X = \mathbb{R}^n$ , то  $f$  – *функция многих переменных*,  $f(x) = f(x^1, \dots, x^n)$ .

ПРИМЕР 1.1. Рассмотрим  $M = \overline{B_1(0,0)} = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : (x^1)^2 + (x^2)^2 \leq 1\}$ ,  $f(x^1, x^2) = \sqrt{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2}$  или множество  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  для  $g(x^1, x^2) = \ln((x^1)^2 + (x^2)^2)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть  $X$  – метрическое пространство,  $x_0 \in X$ ,  $f : \dot{O}_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ . Число  $A \in \mathbb{R}$  называется *пределом функции  $f$*  при  $x \rightarrow x_0$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{O}_{x_0} \quad (d(x, x_0) < \delta) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть  $X$  – метрическое пространство,  $x_0 \in X$ ,  $f : \dot{O}_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ . Число  $A \in \mathbb{R}$  называется *пределом функции  $f$*  при  $x \rightarrow x_0$ , если для любой последовательности  $\{x_k\} \subset \dot{O}_{x_0}$  такой, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ , выполняется  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = A$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.1. Доказать эквивалентность определений 1.1 и 1.2.

В частности для  $X = \mathbb{R}^n$  предел  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  обозначается также через

$$\lim_{\substack{x^1 \rightarrow x_0^1 \\ x^2 \rightarrow x_0^2 \\ \dots \\ x^n \rightarrow x_0^n}} f(x^1, \dots, x^n)$$

и называется *кратным пределом*.

ЛЕММА 1.1. Пусть  $X$  – метрическое пространство,  $x_0 \in X$ ,  $f : \dot{O}_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi : \dot{O}_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $|f(x)| \leq \phi(x)$  для всех  $x \in \dot{O}_{x_0}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = 0$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку по условию

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{O}_{x_0} \cap B_\delta(x_0) \quad |\phi(x)| < \varepsilon,$$

то  $|f(x)| < \varepsilon$ .  $\square$

ПРИМЕР 1.2. Для  $\alpha > 0$  покажем, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^\alpha = 0.$$

Действительно,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \varepsilon^{\frac{1}{2\alpha}} \quad \forall (x, y) \in B_\delta(0, 0) \quad (x^2 + y^2)^\alpha < \delta^{2\alpha} = \varepsilon.$$

ПРИМЕР 1.3. Докажем равенство

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2 + y^2)^\gamma} = 0$$

при  $\alpha + \beta - 2\gamma > 0$ . Имеем  $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ . Поэтому при  $x^2 + y^2 > 0$  выполняется

$$0 < f(x, y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2 + y^2)^\gamma} \leq \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}}}{(x^2 + y^2)^\gamma} = \\ (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha + \beta - 2\gamma}{2}} = \phi(x, y).$$

В силу примера 1.2 и леммы 1.1 получим требуемое.

ПРИМЕР 1.4. Функция  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$  не имеет предела при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Действительно, взяв последовательность  $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ , сходящуюся к точке  $(0, 0)$ , получим  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = 1$ . На сходящейся к той же точке последовательности  $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$  имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n) = -1$ , что в силу определения 1.2 означает требуемое.

ПРИМЕР 1.5. Покажем, что не существует

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}.$$

Возьмем две последовательности  $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ,  $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ , сходящиеся к точке  $(0, 0)$ . Тогда имеем  $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow 0$ ,  $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть  $X$  – метрическое пространство, множество  $M \subset X$ . Вектор-функцией называется отображение  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Понятно, что вектор-функция  $f$  определяется функциями  $f^i : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , в том смысле, что

$$f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$$

для  $x \in M$ . Функции  $f^i$  в дальнейшем будем называть *компонентами* вектор-функции  $f$ .

Если  $\dot{O}_{x_0} \subset M$ , пределом вектор-функции  $f$  в точке  $x_0$  называется вектор  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A = (A^1, \dots, A^m) \in \mathbb{R}^m$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{O}_{x_0} \cap B_\delta(x_0) \quad |f(x) - A|_m < \varepsilon.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Показать, что существование предела вектор-функции равносильно существованию пределов ее компонент

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^i(x) = A^i, \quad i = \overline{1, m}.$$

## 2. Предел по множеству. Повторный предел. Бесконечные пределы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть  $M$  – подмножество метрического пространства  $X$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $M_1 \subset M$ ,  $x_0$  – предельная точка множества  $M_1$ . Вектор  $A \in \mathbb{R}^m$  называется

пределом вектор-функции  $f$  по множеству  $M_1$  при  $x \rightarrow x_0$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{B}_\delta(x_0) \cap M_1 \quad |f(x) - A|_m < \varepsilon.$$

Здесь  $\dot{B}_\delta(x_0) = \{x \in X : 0 < d(x, x_0) < \delta\}$ . Обозначать предел по множеству будем через  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M_1} f(x) = A$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В случае, когда  $x_0$  – внутренняя точка множества  $M_1$ , понятие предела вектор-функции по множеству  $M_1$  совпадает с понятием ее предела.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Возьмем  $M_1 = \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^i = x_0^i + tl^i, \quad t \in [0, \infty), \quad i = \overline{1, n}\}$  – луч с вершиной в точке  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$  в направлении вектора  $l = (l^1, \dots, l^n)$ ,  $|l|_n = 1$ . Пределом вектор-функции  $f$  в точке  $x_0$  по направлению  $l$  называется величина

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M_1} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(x_0^1 + tl^1, \dots, x_0^n + tl^n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Понятно, что взяв в определениях 2.1 и 2.2  $m = 1$ , получим определения предела функции  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  по множеству и предела ее по направлению.

ПРИМЕР 2.1. Покажем, что предел функции  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$  в точке  $(0, 0)$  по любому направлению  $l = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  существует и равен  $\sin 2\alpha$ . При  $t > 0$  имеем  $f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ .

ПРИМЕР 2.2. Предел функции  $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$  в точке  $(0, 0)$  по направлению  $l = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  существует и равен нулю. Действительно, так как  $t > 0$ , то  $f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \frac{2t \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha}$ . Если  $\sin \alpha = 0$ , то  $f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = 0$ , при  $\sin \alpha \neq 0$  имеем  $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = 0$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Если существует  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M_1} f(x)$ ,  $M_2 \subset M_1$ ,  $x_0$  – предельная точка  $M_2$ , то существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M_2} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in M_1} f(x).$$

Поэтому, в частности, из существования предела  $f(x)$  в точке  $x_0$  следует существование предела  $f$  в точке  $x_0$  по любому направлению. Обратное, как это видно из предыдущих двух примеров, неверно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \dot{O}_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , тогда величина

$$\lim_{x^n \rightarrow x_0^n} \lim_{x^{n-1} \rightarrow x_0^{n-1}} \dots \lim_{x^1 \rightarrow x_0^1} f(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^m,$$

вычисляемая последовательно сначала переходом к пределу по  $x^1$  к  $x_0^1$ , затем – по  $x^2$  к  $x_0^2$  и т. д., называется *повторным пределом функции  $f$  в точке  $x_0$* . Понятно, что у функции  $n$  переменных можно посчитать  $n!$  различных повторных пределов в одной и той же точке  $x_0$ , так как переменные  $x^i$  можно устремлять к предельному значению  $x_0^i$  в различном порядке.

ПРИМЕР 2.3. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Имеем  $|f(x, y)| \leq |x| \rightarrow 0$  при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , поэтому

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

Кроме того,  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ , но  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  не существует, так как не существует уже  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ .

Определим бесконечные пределы для функций многих переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Равенство  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  для функции  $f : \dot{O}_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{O}_{x_0} \cap B_\delta(x_0) \quad f(x) > \varepsilon.$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.1. Определить пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ .

ПРИМЕР 2.4. Пусть существует  $R > 0$ , что на множестве  $M_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > R, y > R\}$  определена функция  $f : M_R \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда можно определить предел вида

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y) = A \in \mathbb{R}.$$

Последнее равенство означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x > \delta \quad \forall y > \delta \quad |f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Покажем, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = 0.$$

Для  $x, y > 0$  верны неравенства

$$0 \leq (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} \leq (x + y)^2 e^{-(x+y)} = t^2 e^{-t}, \quad t = x + y.$$

Известно, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t > \delta \quad t^2 e^{-t} < \varepsilon.$$

Отсюда получим  $\forall x, y > \frac{\delta}{2} \quad 0 \leq (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} < \varepsilon$ .

### 3. Непрерывность функций многих переменных в точке

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть  $x_0$  — точка метрического пространства  $X$ . Вектор-функция  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *непрерывной в точке  $x_0$* , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \quad |f(x) - f(x_0)|_m < \varepsilon.$$

При этом надо заметить, что поскольку вектор-функция  $f$  определена в окрестности  $O_{x_0}$  точки  $x_0$ , то при достаточно малом  $\delta > 0$  имеем  $B_\delta(x_0) \subset O_{x_0}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.** Пусть  $M$  – подмножество метрического пространства  $X$ ,  $M_1 \subset M$ ,  $x_0 \in M$  – предельная точка  $M_1$ . Вектор-функция  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *непрерывной в точке  $x_0$  по множеству  $M_1$* , если  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M_1} f(x) = f(x_0)$ .

**ПРИМЕР 3.1.** Как было замечено ранее, предел по направлению есть частный случай предела по множеству, если в качестве множества взят луч. Соответственно непрерывность по направлению – частный случай непрерывности по множеству. Из рассмотренных выше примеров следует, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

непрерывна по любому направлению, но не является непрерывной в точке  $(0, 0)$ .

**ТЕОРЕМА 3.1.** Пусть  $X$  – метрическое пространство,  $x_0 \in X$ ,  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ , функции  $f$ ,  $g$  непрерывны в точке  $x_0$ . Тогда:

- 1) функция  $f + g$  непрерывна в точке  $x_0$ ;
- 2) функция  $f \cdot g$  непрерывна в точке  $x_0$ ;
- 3) если  $g(x_0) \neq 0$ , то функция  $\frac{f}{g}$  непрерывна в точке  $x_0$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 3.1.** Доказать теорему 3.1.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.** Утверждение о непрерывности суммы справедливо и для вектор-функций  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 3.2.** Сформулировать аналогичную теорему для функций, непрерывных в точке  $x_0$  по множеству  $M_1$ .

**ТЕОРЕМА 3.2.** Пусть  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ , вектор-функция  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывна в точке  $x_0$ , вектор-функция  $g : O_{y_0} \rightarrow \mathbb{R}^k$  непрерывна в  $y_0 = (f^1(x_0), \dots, f^m(x_0))$ . Тогда в некоторой окрестности точки  $x_0$  определена сложная функция  $F(x) = g(f^1(x), \dots, f^m(x))$ , которая непрерывна в точке  $x_0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По определению непрерывность вектор-функции  $g$  в точке  $y_0$  означает

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \gamma > 0 \quad \forall y \in B_\gamma(y_0) \quad |g(y) - g(y_0)|_k < \varepsilon.$$

Поскольку  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ ,

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \quad |f(x) - f(x_0)|_m < \gamma.$$

Это означает, что  $(f^1(x), \dots, f^m(x)) \in B_\gamma(y_0)$ . Таким образом, в  $B_\delta(x_0)$  определена вектор-функция

$$F(x) = g(f^1(x), \dots, f^m(x)).$$

При этом для любого  $x \in B_\delta(x_0)$  имеем

$$|g(y) - g(y_0)|_k = |g(f(x)) - g(f(x_0))|_k = |F(x) - F(x_0)|_k < \varepsilon. \quad \square$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.** Пусть  $M$  – подмножество метрического пространства  $X$ . Вектор-функция  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *непрерывной на множестве  $M$* , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.** Если множество  $M$  содержит изолированные точки, то в них функцию будем считать непрерывной по определению.

#### 4. Функции, непрерывные на компакте

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.** Пусть  $X$  – метрическое пространство, множество  $M \subset X$ . Вектор-функция  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *ограниченной на множестве  $E \subset M$* , если

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in E \quad |f(x)|_m \leq C.$$



**ТЕОРЕМА 4.1** (теорема Вейерштрасса). Пусть  $X$  – метрическое пространство, вектор-функция  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывна на компакте  $K \subset X$ . Тогда вектор-функция  $f$  ограничена на множестве  $K$ , а в случае  $m = 1$  функция  $f$  принимает на  $K$  максимальное и минимальное значения.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку вектор-функция  $f$  непрерывна в каждой точке  $x \in K$ , то она имеет в  $x$  предел, и поэтому существует открытая окрестность  $O_x$ , в которой вектор-функция  $f$  ограничена. Система множеств  $\{O_x : x \in K\}$  образует открытое покрытие множества  $K$ . Поэтому можно выбрать конечное подпокрытие  $\{O_{x_1}, \dots, O_{x_l}\}$  компакта  $K$ . Имеем  $|f(x)|_m \leq C_k$  при всех  $x \in O_{x_k}$ ,  $k = \overline{1, l}$ , поэтому  $|f(x)|_m \leq \max_{1 \leq k \leq l} C_k$  для всех  $x \in K$ , что означает ограниченность вектор-функции  $f$  на множестве  $K$ .

Пусть  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s = \sup_{x \in K} f(x) < +\infty$  по доказанному.

Допустим  $f(x) < s$  для всех  $x \in K$ . Тогда функция  $\frac{1}{s-f(x)}$  непрерывна на компакте  $K$  и в силу доказанного ограничена на нем. Тогда  $\exists c > 0 \ \forall x \in K \ s - f(x) \geq c$ , но это противоречит определению супремума  $s$ . Таким образом, существует точка  $x_s \in K$ , в которой  $f(x_s) = s$ .

Аналогично доказывается существование точки минимума функции  $f$  на множестве  $K$ .  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.** Пусть  $X$  – метрическое пространство, множество  $M \subset X$ . Говорят, что вектор-функция  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  равномерно непрерывна на множестве  $E \subset M$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in E$$

$$(d(x, x') < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x')|_m < \varepsilon).$$

Соответственно вектор-функция  $f$  не является равномерно непрерывной на  $E$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, x' \in E$$

$$(d(x, x') < \delta) \wedge (|f(x) - f(x')|_m \geq \varepsilon).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Очевидно, что из равномерной непрерывности вектор-функции на множестве  $E$  следует ее непрерывность на этом множестве.

ПРИМЕР 4.1. Покажем, что функция  $f(x) = x^2$  не является равномерно непрерывной на  $(0, +\infty)$ . Возьмем  $\varepsilon = 1$ ,  $x_\delta = \frac{1}{\delta}$ ,  $x'_\delta = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ , тогда  $d(x'_\delta, x_\delta) = |x'_\delta - x_\delta| = \frac{\delta}{2} < \delta$ ,

$$|f(x'_\delta) - f(x_\delta)| = (x'_\delta)^2 - x_\delta^2 =$$

$$(x'_\delta - x_\delta)(x'_\delta + x_\delta) = \frac{\delta}{2} \left( \frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) \geq 1.$$

ПРИМЕР 4.2. Функция  $\sin \frac{1}{x}$  не равномерно непрерывна на  $(0, 1)$ .

ТЕОРЕМА 4.2 (теорема Кантора). Пусть  $X$  – метрическое пространство. Вектор-функция  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывна на компакте  $K \subset X$  тогда и только тогда, когда  $f$  равномерно непрерывна на  $K$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 4.1 достаточно доказать, что из непрерывности функции на компакте  $K$  следует ее равномерная непрерывность на  $K$ . Предположим противное, тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, x'_n \in K$$

$$\left( d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n} \right) \wedge (|f(x'_n) - f(x_n)|_m \geq \varepsilon). \quad (4.1)$$

Из последовательности  $\{x_n\}$  элементов компакта  $K$  можно выбрать подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ , сходящуюся к  $x_0 \in K$ . Используя неравенство треугольника, при  $k \rightarrow \infty$  получим

$$0 \leq d(x'_{n_k}, x_0) \leq d(x'_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + d(x_{n_k}, x_0) \rightarrow 0.$$

Следовательно,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} = x_0$  и в силу непрерывности вектор-функции  $f$  в точке  $x_0$  имеем  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0)$ . Из формулы (4.1) следует, что  $|f(x'_{n_k}) - f(x_{n_k})|_m \geq \varepsilon$ . Переходя к пределу в последнем неравенстве придем к противоречию:  $0 = |f(x_0) - f(x_0)|_m \geq \varepsilon > 0$ . Таким образом, вектор-функция  $f$  равномерно непрерывна на  $K$ .  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3.** Пусть  $X$  – метрическое пространство, вектор-функция  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  ограничена на множестве  $E \subset X$ . *Модулем непрерывности* вектор-функции  $f$  на множестве  $E$  называется величина

$$w_f(\delta, E) = \sup_{x, y \in E, d(x, y) < \delta} |f(x) - f(y)|_m.$$

**УПРАЖНЕНИЕ 4.1.** Доказать, что  $f$  равномерно непрерывна на  $E$  тогда и только тогда, когда  $w_f(\delta, E) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0+$ .

**ТЕОРЕМА 4.3.** Пусть вектор-функция  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывна на компакте  $K$  из метрического пространства  $X$ . Тогда образ  $f[K] \subset \mathbb{R}^m$  – компакт.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмем последовательность  $\{y_k\} \subset f[K]$ , тогда по определению образа вектор-функции существует  $\{x_k\} \subset K$ ,  $f(x_k) = y_k$  для  $k \in \mathbb{N}$ . В силу компактности  $K$  существует такая подпоследовательность  $\{x_{k_l}\} \subset \{x_k\}$ , что  $\lim_{l \rightarrow \infty} x_{k_l} = x_0 \in K$ . Из непрерывности  $f$  следует, что  $\lim_{l \rightarrow \infty} f(x_{k_l}) = f(x_0)$ . Но  $f(x_{k_l}) = y_{k_l}$ ,  $\lim_{l \rightarrow \infty} y_{k_l} = y_0 = f(x_0) \in f[K]$ , и поэтому  $f[K]$  – компакт.  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4.** *Кривой* в пространстве  $\mathbb{R}^n$  называется непрерывное отображение  $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . С кривой часто ассоциируют образ этого отображения  $\gamma = \phi[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (\phi^1(t), \dots, \phi^n(t)), t \in [\alpha, \beta]\}$ , где  $\phi^i$  – компоненты вектор-функции  $\phi$ .

Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется *связным*, если любые две его точки можно соединить кривой  $\gamma$ , лежащей в  $M$ .

Открытое и связное множество в  $\mathbb{R}^n$  называется *областью*. Замыкание области называется *замкнутой областью*.

**ТЕОРЕМА 4.4.** Пусть множество  $E$  из  $\mathbb{R}^n$  связно, вектор-функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывна. Тогда множество  $f[E] \subset \mathbb{R}^m$  связно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмем любые две точки  $y_1, y_2 \in f[E]$ , тогда существуют такие точки  $x_1, x_2 \in E$ , что  $f(x_1) = y_1$ ,  $f(x_2) = y_2$ . Связность  $E$  означает, что для  $x_1, x_2 \in E$  существует такая кривая  $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , что  $\phi(\alpha) = x_1$ ,  $\phi(\beta) = x_2$ . Вектор-функция  $\Phi = f \circ \phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывна как композиция непрерывных вектор-функций и поэтому тоже является кривой. При этом  $\Phi(\alpha) = f(\phi(\alpha)) = f(x_1) = y_1$ ,  $\Phi(\beta) = f(\phi(\beta)) = f(x_2) = y_2$ . Кроме того, для любого  $t \in [\alpha, \beta]$  имеем  $\phi(t) \in E$  и поэтому  $\Phi(t) = f(\phi(t)) \in f[E]$ . Тем самым мы соединили точки  $y_1, y_2 \in f[E]$  кривой, лежащей в  $f[E]$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 4.1** (теорема о промежуточном значении). Пусть множество  $E \subset \mathbb{R}^n$  связно, функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $E$  и принимает в  $E$  значения  $A, B \in \mathbb{R}$ , причем  $A < B$ . Тогда функция  $f$  принимает в  $E$  все значения из отрезка  $[A, B]$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Связными в  $\mathbb{R}$  множествами являются исключительно промежутки, как это следует из теоремы о промежуточном значении для функций одной переменной. По теореме 4.4  $f[E]$  – промежуток в  $\mathbb{R}$ , и поэтому он вместе с точками  $A, B$  содержит и отрезок  $[A, B]$ .  $\square$

## Глава III. Дифференцируемые функции многих переменных

### 1. Дифференцируемость функции многих переменных в точке

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Отображение  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *линейным*, если для любых  $x, y \in \mathbb{R}^n$  и любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  выполнено  $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$ .

При этом для  $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  подразумевается, что  $\alpha x = (\alpha x^1, \dots, \alpha x^n)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Скобки у аргумента линейного отображения будем по возможности опускать.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  линейная вектор-функция. Тогда существует единственная матрица размера  $m \times n$ , такая, что  $Lx = Ax$  для любого  $x \in \mathbb{R}^n$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $m = 1$  и  $\{e^1, \dots, e^n\}$  – стандартный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда любой вектор  $x \in \mathbb{R}^n$  можно разложить по базису  $x = \sum_{i=1}^n x^i e^i$ . Следовательно,  $Lx = \sum_{i=1}^n x^i L e^i = \sum_{i=1}^n x^i a^i = \langle a, x \rangle$ , где  $a = (L e^1, \dots, L e^n) \in \mathbb{R}^n$ .

Докажем единственность. Предположим, что найдется такое  $b \in \mathbb{R}^n$ , что  $Lx = \langle b, x \rangle$  для любого  $x \in \mathbb{R}^n$ . Тогда для произвольного  $x \in \mathbb{R}^n$   $\langle a - b, x \rangle = 0$ . Если положим  $x = a - b$ , из  $\langle a - b, a - b \rangle = 0$  получим  $a - b = 0$  или  $a = b$ .

Пусть  $m \in \mathbb{N}$ . Очевидно, что вектор-функция  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  линейна в том и только в том случае, когда линейны все ее компоненты  $L^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

$$Lx = \begin{pmatrix} L^1 x \\ \vdots \\ L^m x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle a_m, x \rangle \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m^1 & a_m^2 & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} = Ax,$$

где  $A$  – соответствующая матрица. Единственность в этом случае следует из единственности векторов  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.** Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Вектор-функция  $n$  переменных  $f$  называется *дифференцируемой в точке  $x_0$* , если для любого  $h \in \mathbb{R}^n$ , такого, что  $x_0 + h \in O_{x_0}$ , приращение вектор-функции представимо в виде

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = L_{x_0}h + \alpha_{x_0}(h),$$

где  $L_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  – линейная относительно вектора приращения  $h \in \mathbb{R}^n$  вектор-функция,  $|\alpha_{x_0}(h)|_m = o(|h|_n)$  при  $|h|_n \rightarrow 0$ . Последнее равенство по определению означает

$$\lim_{|h|_n \rightarrow 0} \frac{|\alpha_{x_0}(h)|_m}{|h|_n} = 0.$$

Линейное отображение  $L_{x_0}$  при этом называется *дифференциалом*, *касательным отображением* или *производным отображением* функции  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается одним из следующих способов:  $L_{x_0} = df_{x_0} = f'_{x_0}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.** В случае  $n = m = 1$  линейное отображение  $f'_{x_0}$  действует на вектор приращения  $h$  посредством умножения на число  $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ :  $f'_{x_0}h = f'(x_0) \cdot h$ .

**ПРИМЕР 1.1.** В точке  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  для функции  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  вида

$$\begin{pmatrix} f^1(x, y) \\ f^2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xy \end{pmatrix}$$

найдем дифференциал. Возьмем  $h = (h^1, h^2)$ , тогда

$$f(x_0 + h^1, y_0 + h^2) - f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} (1 + h^1)^2 + (1 + h^2)^2 - 2 \\ (1 + h^1)(1 + h^2) - 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2h^1 + 2h^2 + (h^1)^2 + (h^2)^2 \\ h^1 + h^2 + h^1 h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix} + \alpha_{(1,1)}(h).$$

Имеем  $|\alpha_{(1,1)}(h)|_2 = (((h^1)^2 + (h^2)^2)^2 + (h^1 h^2)^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{5}}{2} |h|_2^2 = |h|_2 \frac{\sqrt{5}}{2} |h|_2 = \tilde{o}(|h|_2)$  при  $|h|_2 \rightarrow 0$ , производное отображение  $f$  в точке  $(1, 1)$  задается матрицей

$$f'_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 1.2. Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = x$  — тождественное отображение. Поскольку  $f(x_0 + h) - f(x_0) = h$ , то  $f'_{x_0} = E$  — тождественное отображение (задается единичной матрицей),  $\alpha_{x_0}(h) \equiv 0$ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Вектор-функция  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируема в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  в том и только в том случае, когда ее компоненты  $f^i : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируемы в точке  $x_0$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем определение дифференцируемости вектор-функции  $f$  покомпонентно:

$$f^i(x_0 + h) - f^i(x_0) = L_{x_0}^i h + \alpha_{x_0}^i(h), \quad i = \overline{1, m}.$$

Вектор-функция  $L_{x_0}$  линейна тогда и только тогда, когда линейна каждая из ее компонент  $L_{x_0}^i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . В силу неравенства  $|\alpha^i(x_0, h)| \leq |\alpha(x_0, h)|_m$ , если  $|\alpha(x_0, h)|_m = \tilde{o}(|h|_n)$ , то для любого  $i = \overline{1, m}$  имеем  $|\alpha^i(x_0, h)| = \tilde{o}(|h|_n)$ . Обратное верно, поскольку  $|\alpha(x_0, h)|_m \leq \sum_{i=1}^m |\alpha^i(x_0, h)|$ .  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Из утверждения 1.1 следует, что для отыскания дифференциала вектор-функции достаточно найти дифференциалы ее компонент. Тем самым при рассмотрении вопросов дифференцируемости можно ограничиться только функциями многих переменных, очевидным образом переходя к вопросам дифференцируемости вектор-функции в случае необходимости.

ТЕОРЕМА 1.2. Функция  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема во внутренней точке  $x_0$  множества  $M \subset \mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда найдется окрестность  $O_{x_0} \subset M$  такая, что для любого  $x \in O_{x_0}$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n g^i(x)(x^i - x_0^i),$$

где  $g^i : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывные в точке  $x_0$  функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда по определению

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n a^i h^i + \tilde{o}(|h|_n).$$

Нетрудно заметить, что функция  $\psi(h) = \tilde{o}(|h|_n)$  при  $h \rightarrow 0$  тогда и только тогда, когда она представима в виде  $\psi(h) = \varepsilon(h)|h|_n$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ . Поскольку  $|h|_n = \left( \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ , то

$$\psi(h) = \frac{\varepsilon(x - x_0)}{|x - x_0|_n} \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i)^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon^i(x)(x^i - x_0^i),$$

где  $\varepsilon^i(x) = \varepsilon(x - x_0) \frac{x^i - x_0^i}{|x - x_0|_n}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon^i(x) = 0$ , так как

$$0 \leq \frac{x^i - x_0^i}{|x - x_0|_n} \leq 1.$$

Доопределим по непрерывности  $\varepsilon^i(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon^i(x) = 0$  и положим  $x = x_0 + h$ . Тогда с учетом вышеизложенного имеем

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n a^i(x^i - x_0^i) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i(x)(x^i - x_0^i) =$$



$$f(x_0) + \sum_{i=1}^n g^i(x)(x^i - x_0^i),$$

где  $g^i(x) = a^i + \varepsilon^i(x)$ . Так как  $\varepsilon^i(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то тем же свойством обладает и  $g^i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Докажем обратное утверждение. Пусть функция имеет вид  $f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n g^i(x)(x^i - x_0^i)$ . Положим  $a^i = g^i(x_0)$ ,  $\varepsilon^i(x) = g^i(x) - a^i$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon^i(x) = 0$ . Тогда  $f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n a^i(x^i - x_0^i) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i(x)(x^i - x_0^i)$ , где

$$\frac{\left| \sum_{i=1}^n \varepsilon^i(x)(x^i - x_0^i) \right|}{|x - x_0|_n} \leq \sum_{i=1}^n |\varepsilon^i(x)| \rightarrow 0$$

при  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 1.1.** *Дифференцируемая в точке функция непрерывна в ней.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу теоремы 1.2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{i=1}^n g^i(x)(x^i - x_0^i) = f(x_0). \quad \square$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.** Понятно, что последние два утверждения справедливы и для вектор-функций.

**ПРИМЕР 1.3.** Покажем, что функция  $f(x, y) = (x^3 + y^4)^{\frac{1}{3}}$  дифференцируема в точке  $(0, 0)$ . Сначала докажем, что

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad |(x^3 + y^4)^{\frac{1}{3}} - x| \leq c|y|^{\frac{4}{3}}.$$

В случае, когда  $y = 0$  неравенство очевидно для любого  $c \in \mathbb{R}$ . Пусть  $y \neq 0$ , положим  $t = x|y|^{\frac{-4}{3}}$ ,  $\psi(t) = (1 + t^3)^{\frac{1}{3}} - t$ . Неравенство  $|\psi(t)| \leq c$  следует из того, что  $\psi$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$ .

Далее, в силу неравенства  $\left| \frac{y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = |y|^{\frac{1}{3}} \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |y|^{\frac{1}{3}}$  имеем  $y^{\frac{4}{3}} = \tilde{o}(\sqrt{x^2+y^2})$  при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Таким образом,  $(x^3 + y^4)^{\frac{1}{3}} = x + \tilde{o}(\sqrt{x^2+y^2})$  при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , что означает дифференцируемость функции  $f(x, y)$  в точке  $(0, 0)$ , причем  $f'_{(0,0)} = (1, 0)$ .

**ПРИМЕР 1.4.** Покажем недифференцируемость в точке  $(0, 0)$  функции  $f(x, y) = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$ . Если  $f(x, y)$  дифференцируема в точке  $(0, 0)$ , то по теореме 1.2 в некоторой окрестности начала координат  $(x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}} = x\phi(x, y) + y\psi(x, y)$ , где  $\phi$  и  $\psi$  непрерывны в точке  $(0, 0)$ . Сделаем замену  $y = kx$ , тогда  $(1 + k^3)^{\frac{1}{3}} = \phi(x, kx) + k\psi(x, kx)$ . Устремим  $x \rightarrow 0$  и получим  $(1 + k^3)^{\frac{1}{3}} = \phi(0, 0) + k\psi(0, 0) = a + kb$ , следовательно  $((1 + k^3)^{\frac{1}{3}})'_{kk} = 0$ . Получили противоречие.

## 2. Частные производные. Необходимые, достаточные условия дифференцируемости

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** Пусть  $x_0$  – внутренняя точка множества  $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . При  $i = \overline{1, n}$  рассмотрим функцию

$$\phi_i(x^i) = f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{i-1}, x^i, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n).$$

Частной производной функции  $f$  по переменной  $x^i$  в точке  $x_0$  называется  $f'_{x^i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = \phi'_i(x_0^i) =$

$$\lim_{h^i \rightarrow 0} \frac{f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^i + h^i, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)}{h^i}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.** Если  $x_0$  – граничная, но не изолированная, точка множества  $M$ , то точка  $(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^i + h^i, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n) = x_0 + h$  может не принадлежать  $M$  ни при каком векторе  $h = (0, \dots, 0, h^i, 0, \dots, 0)$ . Если при этом во внутренних точках множества  $M$  частная производная  $\frac{\partial f}{\partial x^i}$

непрерывна, а  $x_0 \in \overline{\text{int}M}$ , то частную производную в точке  $x_0$  можно определить через предел по множеству:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x).$$

ПРИМЕР 2.1. Для функции двух переменных  $f(x, y) = x^y$  частные производные имеют вид  $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$ .

Как было замечено в предыдущем параграфе, из дифференцируемости функции многих переменных в точке следует ее непрерывность в этой точке. Выясним следует ли непрерывность из существования частных производных.

ТЕОРЕМА 2.1 (необходимое условие дифференцируемости). Пусть функция  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Тогда для любого  $i = \overline{1, n}$  существует  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$  и

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)(x^i - x_0^i) + \tilde{o}(|x - x_0|_n)$$

при  $x \rightarrow x_0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда существует набор чисел  $a^1, \dots, a^n$  такой, что при  $x \rightarrow x_0$

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n a^i(x^i - x_0^i) + \tilde{o}(|x - x_0|_n).$$

Пусть  $x^1 \neq x_0^1$ ,  $x^2 = x_0^2, \dots, x^n = x_0^n$ . Тогда из предыдущего равенства получим

$$f(x^1, x_0^2, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n) = a^1(x^1 - x_0^1) + \tilde{o}(|x^1 - x_0^1|).$$

Отсюда следует существование предела

$$\lim_{x^1 \rightarrow x_0^1} \frac{f(x^1, x_0^2, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)}{x^1 - x_0^1} = a^1 = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0).$$

Существование остальных частных производных доказывается аналогичным образом.  $\square$

ПРИМЕР 2.2. Пусть  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

Ранее было показано, что функция  $f$  разрывна в точке  $(0, 0)$ . Но при этом из равенств  $f(x, 0) = 0$ ,  $f(0, y) = 0$  следует, что  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Таким образом, существования частных производных функции в точке недостаточно для ее непрерывности в этой точке.

ТЕОРЕМА 2.2 (достаточные условия дифференцируемости). Пусть  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , все частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , существуют в каждой точке из  $O_{x_0}$  и непрерывны в точке  $x_0$ . Тогда функция  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай  $n = 3$ . Запишем приращение функции в следующем виде

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = f(x, y, z) - f(x_0, y, z) +$$

$$f(x_0, y, z) - f(x_0, y_0, z) + f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Пусть  $x_0 < x$  и  $\psi(t) = f(t, y, z)$ ,  $t \in [x_0, x]$ . Тогда на этом отрезке функция  $\psi(t)$  имеет производную

$$\psi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, y, z).$$

По формуле конечных приращений Лагранжа

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \psi'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0), \quad \theta \in (0, 1),$$

откуда

$$f(x, y, z) - f(x_0, y, z) = f_1(x, y, z)(x - x_0)$$

$$f_1(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1(x - x_0), y, z).$$

Аналогичным образом получим

$$f(x_0, y, z) - f(x_0, y_0, z) = f_2(x, y, z)(y - y_0),$$

$$f_2(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2(y - y_0), z),$$

$$f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0) = f_3(x, y, z)(z - z_0),$$

$$f_3(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0 + \theta_3(z - z_0)),$$

В результате имеем

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) =$$

$$(x - x_0)f_1(x, y, z) + (y - y_0)f_2(x, y, z) + (z - z_0)f_3(x, y, z).$$

Из непрерывности частных производных в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  следует непрерывность функций  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а в силу теоремы 1.2 – дифференцируемость функции  $f$  в данной точке.

Общий случай  $n$  переменных доказывается аналогичным образом.  $\square$

ПРИМЕР 2.3. Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Поскольку  $|(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}| \leq (x^2 + y^2) = \tilde{o}(\sqrt{x^2 + y^2})$  при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , то  $f(x, y) = 0x + 0y + \tilde{o}(\sqrt{x^2 + y^2})$ . Отсюда следует, что  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Однако при  $x^2 + y^2 > 0$  частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

не имеет предела при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , так как функция

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 2x \sin \frac{1}{|x|} - \operatorname{sgn} x \cos \frac{1}{|x|}$$

не имеет предела при  $x \rightarrow 0$ . То же самое можно сказать про частную производную по  $y$  в точке  $(0, 0)$ . Получен пример дифференцируемой в точке функции, у которой частные производные в этой точке разрывны. Поэтому достаточные условия дифференцируемости из теоремы 2.2 не являются необходимыми.

### 3. Матрица Якоби. Дифференцируемость композиции и обратного отображения. Формула Лагранжа

Пусть вектор-функция  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируема в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , тогда в силу утверждения 1.1 и теоремы 2.1

$$\begin{aligned} f'_{x_0} h &= \begin{pmatrix} (f^1)'_{x_0}(h) \\ \dots \\ (f^n)'_{x_0}(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0)h^1 + \dots + \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x_0)h^n \\ \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x_0)h^1 + \dots + \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x_0)h^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ \dots \\ h^n \end{pmatrix} = J_f(x_0)h. \end{aligned}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.** Матрица  $J_f(x_0)$  называется *матрицей Якоби* вектор-функции  $f$  в точке  $x_0$ . В случае  $n = m$  определитель  $\det J_f(x_0)$  матрицы Якоби называется *якобианом*.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.** Матрица Якоби  $J_f(x_0)$ , таким образом, и определяет действие производной на вектор приращения:  $f'_{x_0} h = J_f(x_0)h$ .

**ПРИМЕР 3.1.** Рассмотрим вектор-функцию  $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , определяющую полярную замену координат:

$$\begin{aligned} f^1(r, \phi) &= r \cos \phi, \\ f^2(r, \phi) &= r \sin \phi. \end{aligned}$$

Нетрудно вычислить  $\frac{\partial f^1}{\partial r} = \cos \phi$ ,  $\frac{\partial f^1}{\partial \phi} = -r \sin \phi$ ,  $\frac{\partial f^2}{\partial r} = \sin \phi$ ,  $\frac{\partial f^2}{\partial \phi} = r \cos \phi$ ,

$$J_f = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \det J_f = r.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть вектор-функция  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируема в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , а вектор-функция  $g : O_{y_0} \rightarrow \mathbb{R}^k$  дифференцируема в точке  $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^m$ . Тогда вектор-функция  $g \circ f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^k$  дифференцируема в точке  $x_0$  и

$$(g \circ f)'_{x_0} = g'_{y_0} \circ f'_{x_0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $h_x \in \mathbb{R}^n$ ,  $h_y = f(x_0 + h_x) - f(x_0)$ . Тогда  $(g \circ f)(x_0 + h_x) - (g \circ f)(x_0) = g(f(x_0 + h_x)) - g(f(x_0)) = g(y_0 + h_y) - g(y_0) = g'_{y_0} h_y + \tilde{o}(|h_y|_m)$  при  $|h_y|_m \rightarrow 0$ .

Учитывая, что  $h_y = f'_{x_0} h_x + \tilde{o}(|h_x|_n)$  при  $|h_x|_n \rightarrow 0$ , получим

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_0 + h_x) - (g \circ f)(x_0) &= g'_{y_0} (f'_{x_0} h_x) + g'_{y_0} (\tilde{o}(|h_x|_n)) + \tilde{o}(|h_y|_m) \\ &= (g'_{y_0} \circ f'_{x_0}) h_x + \alpha_{x_0}(h_x), \quad \alpha_{x_0}(h_x) = g'_{y_0} (\tilde{o}(|h_x|_n)) + \tilde{o}(|h_y|_m). \end{aligned}$$

Возьмем  $h = \sum_{i=1}^m h^i e_i \in \mathbb{R}^m$ . Тогда из неравенств

$$|g'_{y_0} h|_k = \left| \sum_{i=1}^m h^i g'_{y_0} e_i \right|_k \leq \sum_{i=1}^m |h^i| |g'_{y_0} e_i|_k \leq$$

$$\sum_{i=1}^m |h^i| |g'_{y_0} e_i|_k \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m (h^j)^2} \sum_{i=1}^m |g'_{y_0} e_i|_k =$$

$$|h|_m \sum_{i=1}^m |g'_{y_0} e_i|_k = \beta |h|_m$$

следует, что  $|g'_{y_0} \tilde{o}(|h_x|_n)|_k \leq \beta \tilde{o}(|h_x|_n) = \tilde{o}(|h_x|_n)$  при  $|h_x|_n \rightarrow 0$ . Кроме того,  $|h_y|_m \leq \gamma|h_x|_n + \tilde{o}(|h_x|_n) = O(|h_x|_n)$ ,  $\tilde{o}(|h_y|_m) = \tilde{o}(O(|h_x|_n)) = \tilde{o}(|h_x|_n)$  при  $|h_x|_n \rightarrow 0$ . Отсюда  $\alpha_{x_0}(h_x) = \tilde{o}(|h_x|_n)$  при  $|h_x|_n \rightarrow 0$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.** Таким образом, матрицей Якоби композиции двух вектор-функций является произведение матриц Якоби этих вектор-функций.

**СЛЕДСТВИЕ 3.1.** Пусть функции  $f^i : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , дифференцируемы в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , а функция  $g : O_{y_0} \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $y_0 = (f^1(x_0), \dots, f^m(x_0)) \in \mathbb{R}^m$ . Тогда вектор-функция  $g \circ f : O'_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $x_0$  и при этом

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x^j}(x_0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial y^i}(y_0) \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0), \quad j = \overline{1, n}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Построим вектор-функцию  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Композиция  $g \circ f$  определена по теореме 2.3.2 в силу непрерывности функций  $f$  и  $g$ , вообще говоря, в меньшей окрестности  $O'_{x_0} = f^{-1}[O_{y_0}]$ . Формула для частной производной композиции получается по правилу перемножения матриц Якоби  $J_g(y_0)$  и  $J_f(x_0)$ .  $\square$

Через  $e_X$  будем обозначать тождественное отображение, заданное на множестве  $X$ .

**ЛЕММА 3.1.** Пусть  $X, Y$  – некоторые множества. Тогда отображения  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow X$  биективны и являются обратными друг к другу в том и только в том случае, когда  $g \circ f = e_X$ ,  $f \circ g = e_Y$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прямое утверждение леммы очевидно. Докажем обратное утверждение. Имеем  $X = e_X[X] = (g \circ f)[X] = g[f[X]] \subset g[Y]$ , и поэтому отображение  $g$  сюръективно. Пусть теперь  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \neq x_2$ . Тогда  $e_X(x_1) \neq e_X(x_2)$ . Отсюда имеем  $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$ , т. е.  $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ .



$g(f(x_2))$  и поэтому  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Получили инъективность отображения  $f$ .

До сих пор было использовано только равенство  $g \circ f = e_X$ . Аналогичным образом используя равенство  $f \circ g = e_Y$ , получим инъективность  $g$  и сюръективность  $f$ .  $\square$

**ТЕОРЕМА 3.2.** Пусть  $x_0, y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : O_{x_0} \rightarrow O_{y_0}$  — биективная вектор-функция, дифференцируемая в каждой точке множества  $O_{x_0}$ , а вектор-функция  $f^{-1} : O_{y_0} \rightarrow O_{x_0}$  дифференцируема в каждой точке множества  $O_{y_0}$ . Тогда  $f' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — биекция,

$$(f'_x)^{-1} = (f^{-1})'_y, \quad y = f(x).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Имеем  $f \circ f^{-1} = e_Y$ ,  $f^{-1} \circ f = e_X$ . Как было замечено ранее, производная тождественного отображения является тождественным отображением. Используя правило дифференцирования композиции, получим

$$e_{\mathbb{R}^n} = (e_Y)' = f'_x \circ (f^{-1})'_y, \quad y = f(x).$$

$$e_{\mathbb{R}^n} = (e_X)' = (f^{-1})'_y \circ f'_x, \quad y = f(x).$$

Отсюда и из леммы 3.1 следует, что отображение  $f'$  биективно и  $(f'_x)^{-1} = (f^{-1})'_y$ ,  $y = f(x)$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.** В силу теоремы 3.2 матрицы Якоби двух взаимно обратных вектор-функций являются взаимно обратными матрицами.

**ТЕОРЕМА 3.3** (формула Лагранжа о промежуточном значении). Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  выпуклая область, функция  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в области  $G$  и непрерывна в ее замыкании  $\bar{G}$ . Тогда для любых  $x = (x^1, \dots, x^n), y = (y^1, \dots, y^n) \in \bar{G}$  найдется такое число  $\theta \in (0, 1)$ , что

$$f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x + \theta(y - x))(y^i - x^i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку по условию  $G$  выпуклая область, отрезок, соединяющий точки  $x$  и  $y$  лежит в  $G$ , т. е. определена функция  $\phi(t) = f(x^1 + t(y^1 - x^1), \dots, x^n + t(y^n - x^n))$ ,  $t \in [0, 1]$ . Очевидно, что  $\phi(0) = f(x)$ ,  $\phi(1) = f(y)$ , причем  $\phi$  дифференцируема на интервале  $(0, 1)$  и непрерывна на  $[0, 1]$ . Ее производная по правилу дифференцируемости композиции выражается равенством

$$\phi'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1 + t(y^1 - x^1), \dots, x^n + t(y^n - x^n))(y^i - x^i).$$

По формуле Лагранжа для функций одной переменной существует  $\theta \in (0, 1)$  такое, что  $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\theta)$ .  $\square$

#### 4. Дифференциал. Инвариантность формы первого дифференциала. Геометрический смысл дифференциала

Пусть  $dx^i = \Delta x^i = x^i - x_0^i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Если функция  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , то отображение относительно вектора  $(dx^1, \dots, dx^n)$  называется *дифференциалом функции  $f$  в точке  $x_0$* :

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) dx^i,$$

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) + \tilde{o}(|x - x_0|_n)$$

при  $x \rightarrow x_0$ . Выражение  $df(x_0)$  также называется *первым дифференциалом функции  $f$  в точке  $x_0$* .

Пусть в окрестности точки  $t_0 = (t_0^1, \dots, t_0^k) \in \mathbb{R}^k$  задана вектор-функция  $\phi : O_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , которая дифференцируема в точке  $t_0$ , причем  $\phi(t_0) = x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ . Обозначим  $f(\phi(t)) = \Phi(t)$ . Тогда по определению дифференциала

$$d\Phi(t_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial t^1}(t_0) dt^1 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial t^k}(t_0) dt^k,$$

а в силу следствия 3.1

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t^i}(t_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) \frac{\partial \phi^j}{\partial t^i}(t_0), \quad i = \overline{1, k},$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} d\Phi(t_0) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) \frac{\partial \phi^j}{\partial t^1}(t_0) dt^1 + \cdots + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) \frac{\partial \phi^j}{\partial t^k}(t_0) dt^k \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) \sum_{i=1}^k \frac{\partial \phi^1}{\partial t^i}(t_0) dt^i + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \sum_{i=1}^k \frac{\partial \phi^n}{\partial t^i}(t_0) dt^i = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) dx^n. \end{aligned}$$

Таким образом, после замены переменной  $x = \varphi(t)$  дифференциал функции  $f(x)$  принял вид дифференциала функции  $\Phi(t) = f(\phi(t))$ . Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала*.

**ТЕОРЕМА 4.1.** Пусть функции  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируемы в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Тогда в этой точке:

- 1)  $d(cf) = c \cdot df \quad \forall c \in \mathbb{R}$ ;
- 2)  $d(f + g) = df + dg$ ;
- 3)  $d(fg) = g df + f dg$ ;
- 4)  $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}$ , если  $g(x_0) \neq 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем, например, утверждение 3). Пусть  $u = fg$ , где  $f, g$  – переменные,  $f_0 = f(x_0)$ ,  $g_0 = g(x_0)$ . Тогда по свойству инвариантности формы первого дифференциала

$$d(fg)(x_0) = du(f_0, g_0) = \frac{\partial u}{\partial f}(f_0, g_0) df + \frac{\partial u}{\partial g}(f_0, g_0) dg =$$

$$g(x_0) df(x_0) + f(x_0) dg(x_0). \quad \square$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.1. Доказать остальные утверждения теоремы 4.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Пусть вектор-функция  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируема в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\begin{aligned} df(x_0) &= J_f(x_0) \begin{pmatrix} dx^1 \\ \dots \\ dx^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^1}{\partial x^i}(x_0) dx^i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^m}{\partial x^i}(x_0) dx^i \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n D_i f(x_0) dx^i, \quad D_i f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^i}(x_0) \\ \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^i}(x_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4.1. Для функции  $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  найдем первый дифференциал. Обозначив  $u = \frac{y}{x}$ , получим

$$df = d(\operatorname{arctg} u) = \frac{du}{1+u^2} = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Пусть задана область  $G \subset \mathbb{R}^2$  и функция  $f(x, y)$  дифференцируема на  $G$ . Определим график функции

$$\operatorname{graph} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in G\}.$$

Возьмем точку  $P = (x_0, y_0, z_0) \in \operatorname{graph} f$ , т. е.  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . Множество

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]\}$$

назовем *гладкой кривой*, если  $x, y, z \in C^1[\alpha, \beta]$ , т. е. функции  $x(t), y(t), z(t)$  непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[\alpha, \beta]$ . Пусть выполняется условие  $\Gamma \subset \operatorname{graph} f$ ,  $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ . Другими словами, для всех  $t \in [\alpha, \beta]$  должно выполняться  $(x(t), y(t)) \in G$ ,  $z(t) = f(x(t), y(t))$ , а при некотором  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  должно быть  $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$ .

Вектор

$$d\vec{\tau} = (dx(t_0), dy(t_0), dz(t_0)) = (x'(t_0)dt, y'(t_0)dt, z'(t_0)dt)$$

называется *касательным вектором* к  $\Gamma$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ . Определим вектор  $\vec{n} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$ . Тогда скалярное произведение  $(d\vec{\tau}, \vec{n}) = 0$ , поскольку по определению дифференциала

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.$$

Таким образом,  $\vec{n}$  — ортогональный вектор к касательному вектору  $d\vec{\tau}$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , будем его называть также *ортогональным к кривой  $\Gamma$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$* . Нетрудно заметить, что вектор  $\vec{n}$  ортогонален произвольной гладкой кривой, лежащей на графике  $\text{graph} f$  и проходящей через  $(x_0, y_0, z_0)$ . Такой вектор называется *вектором нормали* к поверхности  $\text{graph} f$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Прямая, проходящая через точку  $(x_0, y_0, z_0)$ , параллельная вектору нормали, называется *нормалью* к  $\text{graph} f$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ . *Уравнение нормали* можно задать равенством

$$\frac{x - x_0}{-f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f_y(x_0, y_0)} = z - f(x_0, y_0),$$

где переменные  $x, y, z$  — координаты точки нормали.

Плоскость, проходящая через точку  $(x_0, y_0, z_0)$  и ортогональная вектору нормали  $\vec{n}$ , называется *касательной плоскостью* к  $\text{graph} f$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ . *Уравнение касательной плоскости* задается равенством

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Отсюда видно, что значение дифференциала на заданном векторе приращения  $(x - x_0, y - y_0)$  равно соответствующему приращению аппликаты касательной плоскости.

## 5. Производная по направлению. Градиент

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Производной функции  $f$  в точке  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$  по направлению вектора  $l = (l^1, \dots, l^n) \in \mathbb{R}^n$  называется конечная величина

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tl) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0^1 + tl^1, \dots, x_0^n + tl^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)}{t}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Физический смысл производной функции по направлению – скорость изменения функции в этом направлении.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial f}{\partial(-l)}(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial l}(x_0).$$

Действительно, сделав замену переменной  $s = -t$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial(-l)}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0^1 - tl^1, \dots, x_0^n - tl^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)}{t} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0^1 + sl^1, \dots, x_0^n + sl^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)}{-s} = -\frac{\partial f}{\partial l}(x_0). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 5.1. Возьмем базис  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$  в  $\mathbb{R}^n$ . В силу определений производной по направлению и частной производной получим равенства

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0), \quad i = \overline{1, n}.$$

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть функция  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $l = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_n)$ ,  $|l|_n = 1$ . Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \cos \alpha_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0^1 + t \cos \alpha_1, \dots, x_0^n + t \cos \alpha_n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} = \phi'(0),\end{aligned}$$

где  $\phi(t) = f(x_0^1 + t \cos \alpha_1, \dots, x_0^n + t \cos \alpha_n)$ . В силу следствия 3.1 получим

$$\phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) \cos \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \cos \alpha_n. \quad \square$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Компоненты вектора единичной нормы часто обозначают через косинусы, как это сделано в теореме 5.1, поскольку они имеют геометрический смысл косинусов углов, образуемых этим вектором с соответствующими координатными осями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Вектор

$$\nabla f(x_0) = \text{grad} f(x_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right) \in \mathbb{R}^n$$

называется *градиентом функции  $f$*  в точке  $x_0$ , а формальный оператор  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$  — *оператором Гамильтона*.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Согласно теореме 5.1 производную по направлению можно представить в виде  $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), l \rangle = \langle \nabla, l \rangle f(x_0)$ . В последнем выражении использован формальный оператор

$$\langle \nabla, l \rangle = \left( \cos \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \cos \alpha_n \frac{\partial}{\partial x^n} \right).$$

Производная по направлению градиента имеет максимальное значение среди всех производных по направлению

в заданной точке. Действительно,

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = |\nabla f(x_0)|_n |l|_n \cos \alpha = |\nabla f(x_0)|_n \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\nabla f(x_0)$  и  $l$ . Значение косинуса будет наибольшим только при  $\alpha = 0$ , т. е. когда  $l = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|_n}$ . Таким образом,  $\max_{|l|_n} \frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = |\nabla f(x_0)|_n$ , соответственно  $\min_{|l|_n} \frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = -|\nabla f(x_0)|_n$  – достигается только на векторе  $l = -\frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|_n}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.5.** Функция может иметь производные по любому направлению в некоторой точке, но не быть непрерывной в ней. Например, такой функцией является

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

**УПРАЖНЕНИЕ 5.1.** Убедиться в справедливости замечания 5.5.

## 6. Частные производные высших порядков.

### Теорема о смешанных производных

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ , существует частная производная  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$  при некотором  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Тогда *вторая частная производная* в точке  $x_0$  определяется следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \Big|_{x=x_0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x_0) = f''_{x^j x^i}.$$

Если  $i = j$ , то используется следующее обозначение:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \Big|_{x=x_0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i2}}(x_0) = f''_{x^i x^i}.$$



По индукции определяется частная производная  $m$ -го порядка

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^{i_m} \dots \partial x^{i_1}}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x^{i_m}} \left( \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{i_{m-1}} \dots \partial x^{i_1}} \right) \Big|_{x=x_0}.$$

Число различных частных производных возрастает при увеличении порядка:  $n^m$  — число всех производных порядка  $m$  у функции  $n$  переменных.

ПРИМЕР 6.1. Для функции

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

имеем по определению

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Поскольку

$$\left| y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

то  $f'_x(0, 0) = 0$ . Аналогичным образом получим  $f'_y(0, 0) = 0$ . Далее,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad x^2 + y^2 > 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad x^2 + y^2 > 0.$$

Отсюда

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(h, 0) - f'_y(0, 0)}{h} = 1,$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(0,h) - f'_x(0,0)}{h} = -1$$

и, таким образом,

$$f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0).$$

Получим условия, при которых смешанные частные производные, взятые по одним и тем же переменным, но в различном порядке, совпадают.

**ТЕОРЕМА 6.1** (теорема о смешанных производных). Пусть  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , частные производные  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$  определены в каждой точке окрестности  $O_{x_0}$  и непрерывны в точке  $x_0$ . Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Без ограничения общности можно рассмотреть случай функции двух переменных. Для функции

$$\begin{aligned} F(h^1, h^2) &= f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2) - \\ &\quad - f(x_0^1, x_0^2 + h^2) + f(x_0^1, x_0^2), \end{aligned}$$

где  $h = (h^1, h^2)$  таково, что  $x + h \in O_{x_0}$ , имеет место представление  $F(h^1, h^2) = \phi(1) - \phi(0)$ ,

$$\phi(t) = f(x_0^1 + th^1, x_0^2 + h^2) - f(x_0^1 + th^1, x_0^2).$$

Дважды применив теорему Лагранжа о конечном приращении, получим

$$\begin{aligned} F(h^1, h^2) &= \phi'(t_1) = \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1 + t_1 h^1, x_0^2 + h^2) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1 + t_1 h^1, x_0^2) \right) h^1 = \end{aligned}$$

$$(\Phi(1) - \Phi(0))h^1 = \Phi'(\theta_2)h^1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}(x_0^1 + \theta_1 h^1, x_0^2 + \theta_2 h^2)h^1 h^2,$$

где  $\Phi(t) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1 + \theta_1 h^1, x_0^2 + t h^2)$ ,  $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ .

Проведем аналогичные рассуждения с использованием функций

$$\psi(t) = f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + t h^2) - f(x_0^1, x_0^2 + t h^2),$$

$$\Psi(t) = \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1 + t h^1, x_0^2 + \eta_2 h^2)$$

и получим

$$\begin{aligned} F(h^1, h^2) &= \psi(1) - \psi(0) = \psi'(\eta_1) = \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1 + h^1, x_0^2 + \eta_2 h^2) - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2 + \eta_2 h^2) \right) h^2 = \\ &= (\Psi(1) - \Psi(0))h^2 = \\ &= \Psi'(\eta_1)h^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(x_0^1 + \eta_1 h^1, x_0^2 + \eta_2 h^2)h^1 h^2, \end{aligned}$$

при некоторых  $\eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$ .

Таким образом, получено равенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}(x_0^1 + \theta_1 h^1, x_0^2 + \theta_2 h^2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(x_0^1 + \eta_1 h^1, x_0^2 + \eta_2 h^2).$$

Устремим  $(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$  и, используя непрерывность вторых частных производных в окрестности точки  $x_0$ , получим требуемое равенство  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(x_0)$ .  $\square$

Через  $C^k(G, \mathbb{R})$ ,  $G$  – область из  $\mathbb{R}^n$ , обозначим множество функций, заданных на  $G$ , все частные производные которых до порядка  $k$  включительно определены и непрерывны в  $G$ .

**СЛЕДСТВИЕ 6.1.** Пусть  $f \in C^k(G, \mathbb{R})$ . Тогда при всех  $x \in G$ ,  $m = \overline{2, k}$  значение частной производной  $\frac{\partial^m f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_m}}(x)$  не зависит от порядка дифференцирования.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем теорему методом математической индукции. Утверждение при  $k = 2$  верно, так как это доказано в теореме 6.1. Пусть утверждение верно при  $k = m$ . Рассмотрим

$$\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{m+1}}}(x) = \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \left( \frac{\partial^m f}{\partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_{m+1}}} \right)(x).$$

Последние  $m$  индексов при переменных можно переставлять по предположению индукции. Докажем, что можно переставить индексы  $i_1$  и  $i_2$ , не меняя значения производной. По определению и по теореме 6.1

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{m+1}}}(x) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}} \left( \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{i_3} \dots \partial x^{i_{m+1}}} \right)(x) = \\ &= \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{i_2} \partial x^{i_1} \partial x^{i_3} \dots \partial x^{i_{m+1}}}(x). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что первый индекс можно поменять местами с  $k$ -м, а после этого –  $k$ -й со вторым (по доказанному). В итоге получили, что первый индекс можно поменять местами с  $k$ -м, не перемещая другие индексы.

Чтобы поменять местами произвольные  $k$ -й и  $l$ -й индексы, поменяем местами  $i_1$  и  $i_k$ , затем  $i_k$  (с первого места) и  $i_l$ , после чего вернем  $i_1$  на исходное первое место.  $\square$

## 7. Дифференциалы высших порядков

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1.** Функция  $A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  вида

$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i y^j,$$

где  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , называется *билинейной формой* от  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Функция  $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  вида  $B(x) = A(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x^i x^j$

называется *квадратичной формой*, соответствующей билинейной форме  $A(x, y)$ .

ПРИМЕР 7.1. Билинейной формой от  $x, y$  является скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$   $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i$ . Норма  $\|x\|_n^2 = \sum_{i=1}^n (x^i)^2$  является соответствующей квадратичной формой.

Пусть область  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^2(G)$ , рассмотрим функцию  $df : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  от  $2n$  переменных

$$(x, dx) = (x^1, \dots, x^n, dx^1, \dots, dx^n) \in G \times \mathbb{R}^n :$$

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) dx^i.$$

Если фиксировать  $dx^1, \dots, dx^n$ , то  $df(x)$  – функция переменной  $x \in G$ . Тогда существует дифференциал  $d(df)$  – функция  $2n$  переменных  $(x^1, \dots, x^n, \delta x^1, \dots, \delta x^n) \in G \times \mathbb{R}^n$ , имеющая вид

$$d(df(x)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x^k}(df(x)) \delta x^k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i}(x) dx^i \delta x^k.$$

С другой стороны, при фиксированном  $x \in G$  отображение  $d(df(x))$  является билинейной формой относительно векторов  $(dx^1, \dots, dx^n), (\delta x^1, \dots, \delta x^n) \in \mathbb{R}^n$ . При  $\delta x^i = dx^i$ ,  $i = 1, n$ , получим квадратичную форму относительно  $dx \in \mathbb{R}^n$

$$d^2 f(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i}(x) dx^i dx^k. \quad (7.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Пусть  $G$  – область в  $\mathbb{R}^n$ , функция  $f \in C^2(G, \mathbb{R})$ . Вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) в точке  $x \in G$  функции  $f$  называется квадратичная форма от  $dx \in \mathbb{R}^n$  вида (7.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Для функции  $f(x) = f(x^1, \dots, x^n)$  класса  $C^2(G; \mathbb{R})$  осуществим замену переменных  $x^i = \phi^i(u)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ :  $f(x(u)) = f(\phi^1(u), \dots, \phi^n(u))$ . Тогда, используя инвариантность формы первого дифференциала, получим

$$df(x(u)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x(u)) dx^i(u).$$

Но второй дифференциал после замены имеет вид

$$\begin{aligned} d^2 f(x(u)) &= \sum_{i=1}^n d \left( \frac{\partial f}{\partial x^i}(x(u)) dx^i(u) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x(u))}{\partial x^i \partial x^j} dx^i(u) dx^j(u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x(u))}{\partial x^i} d^2 x^i(u). \end{aligned}$$

Последняя сумма нарушает форму второго дифференциала. Тем самым, второй дифференциал не обладает свойством инвариантности формы относительно замены переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. Пусть  $G$  – область в  $\mathbb{R}^n$ , функция  $f \in C^m(G, \mathbb{R})$ . По индукции определяется  $m$ -й дифференциал (дифференциал  $m$ -го порядка) в точке  $x \in G$  функции  $f$  – однородная форма порядка  $m$

$$d^m u = d(d^{m-1} u) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m u}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_m}}(x) dx^{i_1} \dots dx^{i_m}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Если ввести в рассмотрение формальный оператор  $d = \sum_{i=1}^n dx^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , то

$$d^2 f(x) = \left( \sum_{i=1}^n dx^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^2 f(x),$$

$$d^m f(x) = \left( \sum_{i=1}^n dx^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^m f(x).$$

При возведении в степень написанных выше сумм, необходимо иметь в виду, что произведение  $\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$  означает

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) f = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}.$$

## 8. Формула Тейлора для функций многих переменных

Пусть  $x = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ . По определению будем считать

$$\Delta x = dx = (dx^1, \dots, dx^n) = x - x_0 = (x^1 - x_0^1, \dots, x^n - x_0^n),$$

$$|dx| = |\Delta x| = \sqrt{(\Delta x^1)^2 + \dots + (\Delta x^n)^2} = |x - x_0|_n.$$

**ТЕОРЕМА 8.1** (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0|_n < \delta\}$ , функция  $f \in C^m(B_\delta(x_0); \mathbb{R})$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Тогда для любой точки  $x = x_0 + \Delta x \in B_\delta(x_0)$  найдется такое число  $\theta \in (0, 1)$ , что

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{d^k f(x_0)}{k!} + r_m(x),$$

$$r_m(x) = \frac{1}{m!} d^m f(x_0 + \theta \Delta x).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку точка  $x_0 + \Delta x \in B_\delta(x_0)$ , то  $|\Delta x|_n < \delta$ . Следовательно,  $x_0 + t\Delta x \in B_\delta(x_0)$  при любом  $t \in [-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ , где можно взять  $\varepsilon = \frac{1}{2}(\delta - |\Delta x|_n) > 0$ . Таким образом, на отрезке  $[-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$  определена  $m$  раз непрерывно дифференцируемая функция

$$\phi(t) = f(x_0 + t\Delta x) = f(x_0^1 + t\Delta x^1, \dots, x_0^n + t\Delta x^n),$$

для которой

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x)}{\partial x^i} \Delta x^i = df(x_0 + t\Delta x) = \\ &= \left( dx^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + dx^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) f(x_0 + t\Delta x), \\ \phi''(t) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0 + t\Delta x)}{\partial x^i \partial x^j} \Delta x^i \Delta x^j = d^2 f(x_0 + t\Delta x) = \\ &= \left( dx^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + dx^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right)^2 f(x_0 + t\Delta x).\end{aligned}$$

По индукции получим для любого  $k = \overline{1, m}$

$$\begin{aligned}\phi^{(k)}(t) &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f(x_0 + t\Delta x)}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_k}} dx^{i_1} \cdots dx^{i_k} = \\ d^k f(x_0 + t\Delta x) &= \left( dx^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + dx^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right)^k f(x_0 + t\Delta x).\end{aligned}$$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции одной переменной найдется  $\theta \in (0, 1)$ , при котором

$$\phi(t) = \phi(0) + \phi'(0)t + \cdots + \frac{\phi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} t^{m-1} + \frac{\phi^{(m)}(\theta t)}{m!} t^m.$$

При  $t = 1$  эта формула дает равенство

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \cdots + \frac{\phi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \frac{\phi^{(m)}(\theta)}{m!},$$

что и требуется.  $\square$



СЛЕДСТВИЕ 8.1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^m(B_\delta(x_0); \mathbb{R})$ , точка  $x = x_0 + \Delta x \in B_\delta(x_0)$ . Тогда при  $|\Delta x|_n \rightarrow 0$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^m \frac{d^k f(x_0)}{k!} + \tilde{o}(|\Delta x|_n^m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 8.1:

$$r_m(x) = \frac{1}{m!} d^m f(x_0 + \theta \Delta x) = \frac{1}{m!} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m f(x_0 + \theta \Delta x)}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_m}} \Delta x^{i_1} \cdots \Delta x^{i_m}.$$

Так как принадлежность функции к классу  $C^m(B_\delta(x_0); \mathbb{R})$  означает, в частности, непрерывность всех ее производных порядка  $m$  в точке  $x_0$ , то

$$\frac{\partial^m f(x_0 + \theta \Delta x)}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_m}} = \frac{\partial^m f(x_0)}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_m}} + \alpha_{i_1 \dots i_m}(\Delta x),$$

где

$$\lim_{\substack{\Delta x^1 \rightarrow 0 \\ \vdots \\ \Delta x^n \rightarrow 0}} \alpha_{i_1 \dots i_m}(\Delta x) = 0.$$

Поскольку  $|\Delta x^i| \leq |\Delta x|_n$ , то  $|\Delta x^{i_1} \cdots \Delta x^{i_m}| \leq |\Delta x|_n^m$ . Поэтому

$$\sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n \alpha_{i_1 \dots i_m}(\Delta x) \Delta x^{i_1} \cdots \Delta x^{i_m} = \tilde{o}(|\Delta x|_n^m)$$

при  $|\Delta x|_n \rightarrow 0$ . Отсюда

$$r_m(x) = \frac{1}{m!} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m f(x_0)}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_m}} \Delta x^{i_1} \cdots \Delta x^{i_m} +$$

$$\frac{1}{m!} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n \alpha_{i_1 \dots i_m}(\Delta x) \Delta x^{i_1} \dots \Delta x^{i_m} =$$
$$\frac{1}{m!} d^m f(x_0) + \tilde{o}(|\Delta x|_n^m).$$

ПРИМЕР 8.1. Разложим функцию  $e^x \sin y$  по формуле Тейлора:

$$e^x \sin y = y + xy - \frac{y^3}{6} + \frac{x^2 y}{2} + \tilde{o}((x^2 + y^2)^{3/2})$$

при  $x^2 + y^2 \rightarrow 0$ .

## Глава IV. Теорема о неявной функции. Экстремумы функций многих переменных

### 1. Простейший вариант теоремы о неявной функции

Пусть  $M \subset \mathbb{R}^2$ ,  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Рассмотрим множества  $G_F = \{(x, y) \in M : F(x, y) = 0\}$ ,  $A_F = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} (x, y) \in G_F\}$  – проекция  $G_F$  на ось  $x$ . Если существует биекция между  $G_F$  и  $A_F$ , то однозначно определена функция  $f : A_F \rightarrow \mathbb{R}$  по правилу  $f(x) = y$ , где  $(x, y) \in G_F$ . Тем самым уравнение

$$F(x, y) = 0 \quad (1.1)$$

определяет  $y$  как неявную функцию от  $x$ .

Рассмотрим функцию  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Для нее  $G_F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  – окружность с центром в нуле и единичным радиусом,  $A_F = [-1, 1]$  – отрезок. При этом биекции между  $G_F$  и  $A_F$  не существует. Однако для всех точек  $(x, y)$  окружности  $G_F$ , кроме точек  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ , можно выразить  $y$  через  $x$  в некоторой окрестности точки  $x$  – формулой  $y = \sqrt{1 - x^2}$  для точек  $(x, y)$  верхней полуокружности и формулой  $y = -\sqrt{1 - x^2}$  для точек  $(x, y)$  нижней полуокружности. Аналогично, в окрестности любой точки окружности, кроме точек  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ , можно выразить  $x$  через  $y$  формулами  $x = \sqrt{1 - y^2}$ ,  $x = -\sqrt{1 - y^2}$  для правой и левой полуокружности соответственно.

Таким образом, неявная функция  $y = f(x)$  уравнением (1.1) определяется, вообще говоря, локально и при определенных условиях на функцию  $F$ . Сформулируем соответствующий результат, который представляет собой простейший  $(x, y \in \mathbb{R})$  вариант теоремы о неявной функции.

**ТЕОРЕМА 1.1.** Пусть выполняются следующие условия:

1) функция  $F(x, y)$  имеет в окрестности  $O_{(x_0, y_0)}$  непрерывные частные производные  $F'_x(x, y)$  и  $F'_y(x, y)$ ;

2)  $F(x_0, y_0) = 0$ ;

3)  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тогда в  $O_{(x_0, y_0)}$  существует прямоугольник

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\},$$

в котором уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет  $y$  как неявную функцию от  $x$ . Функция  $y = f(x)$  при этом непрерывно дифференцируема на интервале  $(x_0 - a, x_0 + a)$ , причем

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}. \quad (1.2)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Разобьем доказательство на две части.

Сначала докажем существование неявной функции  $y = f(x)$ . Из условия 3) следует, что либо  $F'_y(x_0, y_0) > 0$ , либо  $F'_y(x_0, y_0) < 0$ . Без потери общности можно считать, что

$$F'_y(x_0, y_0) > 0. \quad (1.3)$$

Действительно, если  $F'_y(x_0, y_0) < 0$ , то вместо уравнения  $F(x, y) = 0$  можно было бы рассмотреть эквивалентное уравнение  $G(x, y) = -F(x, y) = 0$ . Тогда имеем  $G'_y(x_0, y_0) = -F'_y(x_0, y_0) > 0$ .

Так как функция  $F'_y(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  непрерывна и в силу условия (1.3) принимает в этой точке положительное значение, то найдется такой прямоугольник

$$K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a_1, |y - y_0| \leq b\} \subset O_{(x_0, y_0)},$$

в котором функция  $F'_y(x, y)$  положительна.

Рассмотрим функцию одной переменной

$$\psi(y) = F(x_0, y), \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b.$$

Функция  $\psi(y)$  строго возрастает на отрезке  $[y_0 - b, y_0 + b]$ , так как

$$\psi'(y) = F'_y(x_0, y) > 0.$$

Кроме того, в силу условия 2)

$$\psi(y_0) = F(x_0, y_0) = 0.$$

Поэтому

$$\psi(y_0 - b) = F(x_0, y_0 - b) < 0, \quad \psi(y_0 + b) = F(x_0, y_0 + b) > 0. \quad (1.4)$$

Неравенства (1.4) в силу непрерывности функции  $F(x, y)$  должны сохраняться в некоторых окрестностях точек  $(x_0, y_0 - b)$  и  $(x_0, y_0 + b)$ . Поэтому существует такое  $a \in (0, a_1]$ , что для всех  $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$  выполнены неравенства

$$F(x, y_0 - b) < 0, \quad F(x, y_0 + b) > 0. \quad (1.5)$$

Покажем, что в прямоугольнике

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет  $y$  как неявную функцию  $x$ . Возьмем любую точку  $x^* \in [x_0 - a, x_0 + a]$  и рассмотрим непрерывную на отрезке  $[y_0 - b, y_0 + b]$  функцию одной переменной  $\phi(y) = F(x^*, y)$ . В силу условий (1.5) эта функция принимает на концах отрезка значения разных знаков:

$$\phi(y_0 - b) = F(x^*, y_0 - b) < 0, \quad \phi(y_0 + b) = F(x^*, y_0 + b) > 0.$$

По теореме Больцано – Коши о промежуточном значении существует  $y^* \in [y_0 - b, y_0 + b]$  такое, что

$$\phi(y^*) = F(x^*, y^*) = 0.$$

Так как  $\phi'(y) = F'_y(x^*, y) > 0$ , то функция  $\phi(y)$  строго возрастает на  $[y_0 - b, y_0 + b]$  и обращается в ноль на отрезке не

более одного раза. Поэтому существует единственная точка  $y^* \in [y_0 - b, y_0 + b]$ , в которой  $\phi(y^*) = 0$ .

Таким образом, для любого  $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$  найдется единственный элемент  $y \in [y_0 - b, y_0 + b]$ , для которого  $F(x, y) = 0$ . Это в точности означает, что в прямоугольнике  $K$  уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет  $y$  как неявную функцию от  $x$ .

В силу того, что функция  $F'_y(x, y)$  непрерывна на компакте  $K$ , по теореме Вейерштрасса она принимает в прямоугольнике  $K$  наименьшее значение  $\alpha$ . Так как  $F'_y(x, y) > 0$  на  $K$ , то

$$F'_y(x, y) \geq \alpha > 0, \quad (1.6)$$

для любых  $(x, y) \in K$ .

Функция  $F'_x(x, y)$  непрерывна на компакте  $K$ , следовательно,  $F'_x(x, y)$  ограничена на  $K$ . Поэтому

$$\exists \beta > 0 \quad \forall (x, y) \in K \quad |F'_x(x, y)| < \beta. \quad (1.7)$$

Пусть  $y = f(x)$  – функция, неявно определяемая в  $K$  уравнением (1.1). Зададим множество  $G_F = \{(x, y) \in O_{(x_0, y_0)} : F(x, y) = 0\}$ . Пусть точки  $(x, y), (x + \Delta x, y + \Delta y) \in G_F \cap K$ . Тогда

$$F(x, y) = 0, \quad F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

По формуле Лагранжа (теорема 3.3) существует  $\theta \in (0, 1)$ , при котором

$$F'_x(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) \Delta x + F'_y(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) \Delta y = 0,$$

откуда

$$\Delta y = -\frac{F'_x(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}{F'_y(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)} \Delta x. \quad (1.8)$$

Поскольку множество  $K$  выпукло, то  $(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) \in K$ . Воспользовавшись (1.6) и (1.7), из (1.8) получим  $|\Delta y| \leq \frac{\beta}{\alpha} |\Delta x|$ . Отсюда следует, что  $\Delta y \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  и поэтому

Разделим (1.8) на  $\Delta x$  и, используя непрерывность  $F'_x$ ,  $F'_y$ , получим формулу (1.2). Следовательно, функция  $f'$  непрерывна на  $(x_0 - a, x_0 + a)$  как композиция непрерывных функций.  $\square$

ПРИМЕР 1.1. Проверим, что для уравнения  $F(x, y) = x^4 + xy + y^3 - 3 = 0$  и точки  $(1, 1)$  выполняются условия теоремы 1.1. Неочевидно лишь выполнение третьего из этих условий. Имеем  $F'_y(x, y) = x + 3y^2 > 0$  при  $x > 0$ .

## 2. Теорема о неявной функции

$$K(x_0) = \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : -\varepsilon_i \leq x^i - x_0^i \leq \varepsilon_i, i = \overline{1, n}\}$$

при  $\varepsilon_i > 0, i = \overline{1, n}$ .

Рассмотрим систему  $m$  уравнений с  $n + m$  неизвестными

$$\begin{aligned} F^1(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{n+m}) &= 0, \\ F^2(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{n+m}) &= 0, \\ &\vdots \\ F^m(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{n+m}) &= 0. \end{aligned}$$

Если  $K_1(x_0) \times K_2(y_0)$  – клеточная окрестность точки  $(x_0, y_0) = (x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^m)$  в  $\mathbb{R}^{n+m}$ , положим  $y_1 = x_{n+1}, \dots, y_m = x_{n+m}$ . Тогда систему уравнений можно записать в виде

$$F(x, y) = 0, \quad (2.1)$$

$F : K_1(x_0) \times K_2(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F(x, y) = (F^1(x, y), \dots, F^m(x, y))$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть  $K(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Q(y_0) \subset \mathbb{R}^m$  – клеточные окрестности. Уравнение (2.1) определяет в клеточной окрестности  $K(x_0) \times Q(y_0)$  вектор  $y = (y^1, \dots, y^m)$  как неявную функцию переменной  $x = (x^1, \dots, x^n)$ , если для любого  $x \in K(x_0)$  найдется единственный  $y \in Q(y_0)$  такой, что  $F(x, y) = 0$ .

При  $m = 1$  получим  $(x_0, y_0) = (x_0^1, \dots, x_0^n, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(x^1, \dots, x^n, y) = 0. \quad (2.2)$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $F : O_{(x_0, y_0)} \rightarrow \mathbb{R}$  и выполняются условия

- 1)  $F \in C^1(O_{(x_0, y_0)}; \mathbb{R})$ ;
- 2)  $F(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0) = 0$ ;
- 3)  $F'_y(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0) \neq 0$ .

Тогда существуют такие клеточные окрестности  $K(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Q(y_0) \subset \mathbb{R}$ , что в  $K(x_0) \times Q(y_0)$  уравнение (2.2) определяет  $y$  как неявную функцию от  $x^1, \dots, x^n$ . Неявная функция  $y = f(x^1, \dots, x^n)$  непрерывно дифференцируема в  $K(x_0)$ ,  $y_0 = f(x_0)$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = -\frac{F'_{x^i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция  $F'_y(x, y)$  непрерывна в  $(x_0, y_0)$ , существует

$$K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x^i - x_0^i| \leq a_1, |y - y_0| \leq b\},$$

в которой  $F'_y > 0$ . Из равенств  $\phi(y) = F(x_0, y)$ ,  $y \in [y_0 - b, y_0 + b]$ ,  $\phi'(y) = F'_y(x_0, y) > 0$ ,  $\phi(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$  получим  $\phi(y_0 - b) < 0$ ,  $\phi(y_0 + b) > 0$ . Следовательно,

$$\exists a \in (0, a_1) \quad \forall x \in K(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x^i - x_0^i| \leq a, i = \overline{1, n}\}$$



$$F(x, y_0 - b) < 0, F(x, y_0 + b) > 0.$$

Для фиксированного  $x^* \in K(x_0)$  рассмотрим функцию  $\phi(y) = F(x^*, y)$ . Для нее имеем  $\phi(y_0 - b) = F(x^*, y_0 - b) < 0$ ,  $\phi(y_0 + b) = F(x^*, y_0 + b) > 0$ . Следовательно, существует такое значение  $y^* \in [y_0 - b, y_0 + b]$ , для которого  $\phi(y^*) = F(x^*, y^*) = 0$ . Из неравенства  $\phi'(y) = F'_y(x^*, y) > 0$  следует, что  $\phi$  строго монотонно возрастает на  $[y_0 - b, y_0 + b]$  и поэтому упомянутое значение  $y^*$  единственно. Тем самым существование неявной функции  $n$  переменных  $y = f(x^1, \dots, x^n)$  доказано.

Функция  $F'_y(x, y)$  непрерывна на компакте  $K(x_0) \times Q(y_0)$ , поэтому существует  $\alpha = \min_{K(x_0) \times Q(y_0)} F'_y(x, y) > 0$ . Из непрерывности производных  $F'_{x^i}(x, y)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , на компактном множестве  $K(x_0) \times Q(y_0)$  следует, что

$$\exists \beta > 0 \quad \forall (x, y) \in K(x_0) \times Q(y_0) \quad |F'_{x^i}(x, y)| < \beta$$

Возьмем  $(x^1, x^2, \dots, x^n), (x^1 + \Delta x^1, x^2, \dots, x^n) \in K(x_0)$ ,  $y = f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ ,  $\Delta y = f(x^1 + \Delta x^1, x^2, \dots, x^n) - f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ . Тогда  $y + \Delta y = f(x^1 + \Delta x^1, x^2, \dots, x^n)$  и справедливы равенства

$$F(x, y) = 0, \quad F(x^1 + \Delta x^1, x^2, \dots, x^n, y + \Delta y) = 0.$$

По формуле Лагранжа отсюда следуют равенства при некотором  $\theta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} & F'_x(x^1 + \theta \Delta x^1, x^2, \dots, x^n, y + \theta \Delta y) \Delta x^1 + \\ & F'_y(x^1 + \theta \Delta x^1, x^2, \dots, x^n, y + \theta \Delta y) \Delta y = 0, \\ & \Delta y = - \frac{F'_x(x^1 + \theta \Delta x^1, x^2, \dots, x^n, y + \theta \Delta y)}{F'_y(x^1 + \theta \Delta x^1, x^2, \dots, x^n, y + \theta \Delta y)} \Delta x^1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta x^1 \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x^1} = - \lim_{\Delta x^1 \rightarrow 0} \frac{F'_x(x^1 + \theta \Delta x^1, x^2, \dots, x^n, y + \theta \Delta y)}{F'_y(x^1 + \theta \Delta x^1, x^2, \dots, x^n, y + \theta \Delta y)} =$$

$$-\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Отсюда по теореме о непрерывности композиции непрерывных функций следует непрерывность частной производной  $\frac{\partial f}{\partial x^1}$  на множестве  $K(x_0)$ .

Утверждения об остальных частных производных функции  $f$  доказываются аналогично.  $\square$

Введем обозначения  $J_f(x) = f'_x(x)$ ,

$$F'_x(x, f(x)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n} \end{pmatrix} (x, f(x)),$$

$$F'_y(x, f(x)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial y^m} \end{pmatrix} (x, f(x)).$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $F : O_{(x_0, y_0)} \rightarrow \mathbb{R}^m$  и выполняются условия:

- 1)  $F \in C^1(O_{(x_0, y_0)}, \mathbb{R}^m)$ ;
- 2)  $F(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^m) = 0$ ;
- 3)

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial y^m} \end{pmatrix} (x_0, y_0) \neq 0. \quad (2.3)$$

Тогда существуют такие клеточные окрестности  $K(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Q(y_0) \subset \mathbb{R}^m$ , что в  $K(x_0) \times Q(y_0)$  уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет  $y = (y^1, \dots, y^m)$  как неявную функцию от  $x = (x^1, \dots, x^n)$ . При этом  $y_0 = f(x_0)$ , неявная функция непрерывно дифференцируема в клеточной окрестности  $K(x_0)$  и

$$f'_x(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} F'_x(x, f(x)), \quad x \in K(x_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем по индукции. При  $m = 1$  получаем теорему 2.1, которая доказана выше.

Пусть теорема верна для случая функции  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Раскладывая определитель (2.3) по последней строке, получим, что хотя бы один из миноров  $(m-1)$ -го порядка не равен нулю. Пусть

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^{m-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F^{m-1}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^{m-1}}{\partial y^{m-1}} \end{vmatrix} (x_0, y_0) \neq 0.$$

Если это не так, перенумеруем компоненты вектора  $y$ . По предположению индукции существуют клеточные окрестности

$$K_1 = \{(x, y^m) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x^i - x_0^i| \leq \varepsilon_i^1, i = \overline{1, n}, |y^m - y_0^m| \leq \delta_m^1\},$$

$$Q_1 = \{(y^1, \dots, y^{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} : |y^j - y_0^j| \leq \delta_j^1, j = \overline{1, m-1}\},$$

в которых уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет  $y^1, \dots, y^{m-1}$  как неявные функции от  $x^1, \dots, x^n, y^m$ , т. е.

$$y^j = \psi_j(x, y^m), \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Функции  $\psi_j(x, y^m)$  непрерывно дифференцируемы в  $K_1$ ,

$$\psi_j(x_0, y_0^m) = y_0^j, \quad j = \overline{1, m-1},$$

и для  $(x, y^m) \in K_1$  выполняется

$$F^j(x, \psi_1(x, y^m), \dots, \psi_{m-1}(x, y^m), y^m) \equiv 0, \quad j = \overline{1, m-1}. \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что для

$$K_2 = \{(x^1, \dots, x^n) : |x^i - x_0^i| \leq \varepsilon_i^1, \quad i = \overline{1, n}\},$$

$$Q_2 = \{(y^1, \dots, y^m) : |y^j - y_0^j| \leq \delta_j^1, \quad j = \overline{1, m}\}$$

уравнение  $F(x, y) = 0$  при  $(x, y) \in K_2 \times Q_2$  эквивалентно системе

$$y^1 - \psi_1(x, y^m) = 0, \dots, y^{m-1} - \psi_{m-1}(x, y^m) = 0, \quad (2.5)$$

$$\tilde{F}^m(x, y^m) = F^m(x, \psi_1(x, y^m), \dots, \psi_{m-1}(x, y^m), y^m) = 0. \quad (2.6)$$

Покажем, что последнее уравнение может быть разрешено относительно  $y^m$ . Функция  $\tilde{F}^m(x, y^m)$  непрерывно дифференцируема как композиция непрерывно дифференцируемых функций  $F^m, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}$ . Из (2.4) получим равенство

$$\begin{aligned} \tilde{F}^m(x_0, y_0^m) &= F^m(x_0, \psi_1(x_0, y_0^m), \dots, \psi_{m-1}(x_0, y_0^m), y_0^m) = \\ &= F^m(x_0, y_0^1, \dots, y_0^m) = 0. \end{aligned}$$

Пусть  $\frac{\partial \tilde{F}^m}{\partial y^m}(x_0, y_0) =$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial F^m}{\partial y^k}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial y^m}(x_0, y_0^m) + \frac{\partial F^m}{\partial y^m}(x_0, y_0^m) = 0.$$

Дифференцируя по  $y^m$  тождества (2.4), получим для  $j = \overline{1, m-1}$

$$\frac{\partial F^j}{\partial y^m}(x_0, y_0) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial F^j}{\partial y^k}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial y^m}(x_0, y_0^m) + \frac{\partial F^j}{\partial y^m}(x_0, y_0^m) = 0.$$

Следовательно, последний столбец в (2.3) является линейной комбинацией остальных столбцов, т. е. определитель (2.3) равен нулю. Получили противоречие со вторым условием теоремы и, значит,  $\frac{\partial \tilde{F}^m}{\partial y^m}(x_0, y_0) \neq 0$ .

Таким образом, для  $F^m$  выполняются условия теоремы 2.1. Поэтому существует клеточная окрестность

$$K = \{(x, y^m) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x^i - x_0^i| \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_i^1,$$

$$i = \overline{1, n}, |y^m - y_0^m| \leq \delta_m \leq \delta_m^1\},$$

в которой уравнение (2.6) определяет неявную функцию  $y^m = f^m(x)$ , при этом  $y_0^m = f^m(x_0)$ . Поэтому система уравнений (2.5), (2.6) эквивалентна системе

$$y^1 = f^1(x), \dots, y^{m-1} = f^{m-1}(x), y^m = f^m(x),$$

где  $f^i = \psi_i(x, f^m(x))$ ,  $i = \overline{1, m-1}$ ,

$$x \in K(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x^i - x_0^i| \leq \varepsilon_i, i = \overline{1, n}\},$$

при этом  $f^i(x_0) = y_0^i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Это означает, что функция  $y = f(x)$  неявно определяется уравнением  $F(x, y)$  в  $K(x_0) \times Q(y_0)$ , где

$$Q(y_0) = \{y : |y^j - y_0^j| \leq \delta_j, j = \overline{1, m}\}, \delta_j = \delta_j^1, j = \overline{1, m-1}.$$

Отсюда следует, что  $F(x, f(x)) \equiv 0$  для любого  $x \in K(x_0)$ , т. е. для  $i = \overline{1, m}$

$$F^i(x^1, \dots, x^n, f^1(x^1, \dots, x^n), \dots, f^m(x^1, \dots, x^n)) \equiv 0.$$

Продифференцируем это тождество по  $x^j$  и получим

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial F^i}{\partial y^k}(x, f(x)) \frac{\partial f^k}{\partial x^j}(x) + \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x, f(x)) \equiv 0, j = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}.$$

В матричном виде совокупность этих равенств можно записать как  $F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x))f'_x(x) \equiv 0$ ,  $F'_y(x, y)$  обратима по условию теоремы в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , отсюда следует равенство  $f'_x(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1}F'_x(x, f(x))$ .  $\square$

### 3. Необходимые условия экстремума функции многих переменных

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.** Пусть  $O_{x_0}$  – открытая окрестность точки  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ . Точка  $x_0$  называется *точкой локального минимума* (точкой локального максимума)

функции  $f$ , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \quad f(x) \geq f(x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0)).$$

Значение функции  $f$  в точке локального минимума называется *локальным минимумом* (*локальным максимумом*) функции  $f$ .

Точка  $x_0$  называется *точкой строгого локального минимума* (*точкой строгого локального максимума*) функции  $f$ , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \quad f(x) > f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Значение функции в этой точке называется *строгим локальным минимумом* (*строгим локальным максимумом*) функции  $f$ .

*Точкой (строгого) локального экстремума* функции  $f$  называется точка, являющаяся для этой функции точкой (строгого) локального минимума или точкой (строгого) локального максимума. Значение функции в этой точке называется *локальным экстремумом* функции  $f$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В определении 3.1 по умолчанию учитывается, что при достаточно малом  $\delta > 0$  выполняется  $B_\delta(x_0) \subset O_{x_0}$ , так как  $O_{x_0}$  – окрестность точки, и поэтому в шаре  $B_\delta(x_0)$  функция  $f$  определена.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть функция  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  имеет в точке локального экстремума  $x_0$  частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0)$ . Тогда  $\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0) = 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим  $\phi(x^1) = f(x^1, \dots, x_0^n)$ . Если  $x_0$  – точка локального минимума, то по определению

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Следовательно, для любой точки  $x^1 \in (x_0^1 - \delta, x_0^1 + \delta)$

$$\phi(x^1) = f(x^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \geq f(x_0^1, \dots, x_0^n) = \phi(x_0^1).$$

Поэтому функция  $\phi$  имеет в точке  $x_0^1$  локальный минимум и по теореме Ферма  $\phi'(x_0^1) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) = 0$ .

Для частных производных по остальным переменным утверждение теоремы доказывается аналогично.  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть функция  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке локального экстремума  $x_0$ . Тогда

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) dx^i = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из дифференцируемости функции следует, что существуют  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . По теореме 3.1 получим требуемое.  $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть функция  $f : O_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $df(x_0) = 0$ . Тогда  $x_0$  называется *стационарной точкой* функции  $f$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Точка экстремума в силу следствия 3.1 является стационарной точкой. Обратное неверно.

ПРИМЕР 3.1. Точка  $(0, 0)$  – стационарная точка для функции  $f(x, y) = xy$ , но не является точкой экстремума. Действительно,

$$df(x, y) = ydx + xdy.$$

Так как  $df(0, 0) = 0$ , то  $(0, 0)$  стационарная точка. Точки  $(\delta, \delta)$ ,  $(\delta, -\delta) \in B_{2\delta}(0, 0)$ , при этом  $f(\delta, \delta) = \delta^2 > f(0, 0) = 0 > f(\delta, -\delta) = -\delta^2$ . Следовательно,  $(0, 0)$  – не точка экстремума для данной функции.

ПРИМЕР 3.2. Нетрудно проверить, что точка  $(0, 0)$  – локальный минимум функции  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

ЛЕММА 3.1. Если существуют  $\phi'(t)$ ,  $\phi''(t)$  в окрестности точки локального минимума  $t = 0$  функции  $\phi(t)$ , то  $\phi''(0) \geq 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $t = 0$  – точка локального минимума функции  $\phi(t)$ . Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \phi(t) - \phi(0) \geq 0.$$

Так как по теореме Ферма  $\phi'(0) = 0$ , по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано получим при  $t \rightarrow 0$

$$0 \leq \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t^2} = \frac{1}{t^2} \left( \phi'(0)t + \phi''(0)\frac{t^2}{2} + \tilde{o}(t^2) \right) = \frac{1}{2}\phi''(0) + \tilde{o}(1).$$

Устремим  $t \rightarrow 0$ , тогда  $\phi''(0) \geq 0$ .  $\square$

ТЕОРЕМА 3.2 (необходимые условия минимума). Пусть  $f \in C^2(O_{x_0}; \mathbb{R})$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  – точка локального минимума функции  $f$ . Тогда

$$df(x_0) = 0, \quad d^2f(x_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) dx^i dx^j \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем такое  $\delta > 0$ , что для любого  $\xi \in B_\delta(x_0) \subset O_{x_0}$  выполняется неравенство  $f(\xi) \geq f(x_0)$ . Пусть  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ , тогда  $|\Delta x|_n = |x - x_0|_n > 0$ . При любом таком  $t$ , что  $|t| < \frac{\delta}{|\Delta x|}$ , точка  $x_0 + t\Delta x \in B_\delta(x_0)$  и поэтому

$$\phi(t) = f(x_0 + t\Delta x) - f(x_0) \geq 0.$$

Получили, что при некотором  $\varepsilon > 0$   $\phi \in C^2((-\varepsilon, \varepsilon); \mathbb{R})$  имеет при  $t = 0$  минимум. В силу необходимых условий минимума функции одной переменной

$$\phi'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) dx^i = df(x_0) = 0,$$



$$\phi''(0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j = d^2 f(x_0) \geq 0. \quad \square$$

ТЕОРЕМА 3.3 (необходимые условия максимума). Пусть  $f \in C^2(O_{x_0}; \mathbb{R})$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  – точка локального максимума функции  $f$ . Тогда

$$df(x_0) = 0, \quad d^2 f(x_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) dx^i dx^j \leq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно заметить, что  $x_0$  – точка локального максимума функции  $f$  точно тогда, когда она является точкой локального минимума функции  $-f$ . Применив теорему 3.2 к  $-f$ , получим требуемое.  $\square$

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим функцию  $f(x, y) = x^3 + y^3$ . Для нее найдем стационарные точки. Если  $df = 3x^2 dx + 3y^2 dy = 0$ , то  $x = y = 0$ . Таким образом,  $(0, 0)$  – стационарная точка. Поскольку  $d^2 f(x, y) = 6x dx + 6y dy$ , то  $d^2 f(0, 0) = 0$  и поэтому для функции  $f$  выполняются необходимые условия локального экстремума. В то же время при любом  $\delta > 0$  имеем  $f(\delta, \delta) = 2\delta^3 > 0$ ,  $f(-\delta, -\delta) = -2\delta^3 < 0$ , т. е. экстремума в точке  $(0, 0)$  нет. Следовательно, необходимые условия локального экстремума не являются достаточными.

#### 4. Достаточные условия экстремума

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Квадратичная форма

$$B(\xi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi^i \xi^j, \quad \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n, \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R},$$

называется

1) *положительно определенной*, если  $B(\xi) > 0$  для любого  $\xi \neq 0$ ;

2) отрицательно определенной, если  $B(\xi) < 0$  для любого  $\xi \neq 0$ ;

3) неопределенной, если существуют  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ , для которых  $B(\xi) > 0$ ,  $B(\eta) < 0$ .

В курсе алгебры доказывается следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 4.1** (критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы). *Квадратичная форма  $B$  положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры  $A_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , матрицы  $\|a_{ij}\|$  положительны, т. е.*

$$A_1 = a_{11} > 0, \quad A_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \dots,$$

$$A_n = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} > 0.$$

**СЛЕДСТВИЕ 4.1.** *Квадратичная форма  $B$  отрицательно определена тогда и только тогда, когда выполняются все условия*

$$(-1)^k A_k > 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (4.1)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Нетрудно заметить, что квадратичная форма  $B$  отрицательно определена тогда и только тогда, когда квадратичная форма  $-B$  определена положительно. Если записать критерий Сильвестра для билинейной формы  $-B$ , которой соответствует матрица коэффициентов  $\| -a_{ij} \|$ , то будут в точности получены условия (4.1).  $\square$

**ЛЕММА 4.1.** *Если квадратичная форма  $B(\xi)$  положительно определена, то*

$$\exists \gamma > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad B(\xi) \geq \gamma |\xi|_n^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем единичную сферу с центром в нуле  $S = \{\eta \in \mathbb{R}^n : (\eta^1)^2 + \dots + (\eta^n)^2 = 1\}$ . Точка  $0 \notin S$ , а квадратичная форма  $B$  положительно определена, следовательно,  $B(\eta) > 0$  для любого  $\eta \in S$ . Множество  $S$  замкнуто и ограничено в  $\mathbb{R}^n$ , а потому компактно. По теореме Вейерштрасса найдется точка  $\eta_0 \in S$  такая, что  $B(\eta_0) = \min_{\eta \in S} B(\eta)$ . Пусть  $\gamma = B(\eta_0) > 0$ . Тогда для любого  $\eta \in S$   $B(\eta) \geq \gamma$ . При  $\xi \neq 0$   $\frac{\xi}{|\xi|_n} \in S$ , поэтому  $B\left(\frac{\xi}{|\xi|_n}\right) \geq \gamma$ . Отсюда  $\frac{1}{|\xi|_n^2} B(\xi) = B\left(\frac{\xi}{|\xi|_n}\right) \geq \gamma$ , что и требовалось. Для  $\xi = 0$  утверждение леммы выполняется очевидным образом.  $\square$

ТЕОРЕМА 4.2 (достаточные условия экстремума). Пусть функция  $f \in C^2(O_{x_0}; \mathbb{R})$ ,  $df(x_0) = 0$ . Если  $d^2f(x_0)$  – положительно определенная квадратичная форма относительно  $dx \in \mathbb{R}^n$ , то  $x_0$  – точка строгого локального минимума функции  $f$ , если  $d^2f(x_0)$  – отрицательно определенная квадратичная форма, то  $x_0$  – точка строгого локального максимума  $f$ , если  $d^2f(x_0)$  – неопределенная квадратичная форма, то  $x_0$  не является точкой локального экстремума функции  $f$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} d^2f(x_0) + o(|\Delta x|_n^2) \quad (4.2)$$

при  $|\Delta x|_n \rightarrow 0$ .

Пусть второй дифференциал

$$d^2f(x_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^i \partial x^j} \Delta x^i \Delta x^j$$

является положительно определенной квадратичной формой относительно  $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Тогда в силу

леммы 4.1

$$\exists \gamma > 0 \quad \forall \Delta x \in \mathbb{R}^n \quad d^2 f(x_0) \geq \gamma |\Delta x|_n^2.$$

Применяя это неравенство, из (4.2) получим

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{\gamma}{2} |\Delta x|_n^2 + \tilde{o}(|\Delta x|_n^2) = \frac{\gamma}{2} |\Delta x|_n^2 (1 + \alpha(\Delta x)),$$

где  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Поэтому

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \Delta x \in B_\delta(0) \quad |\alpha(\Delta x)| < \frac{1}{2},$$

следовательно,

$$\forall x = x_0 + \Delta x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \quad f(x) - f(x_0) \geq \frac{\gamma}{4} |\Delta x|_n^2 > 0.$$

Таким образом,  $x_0$  – точка строгого минимума.

Аналогичным образом для отрицательно определенной квадратичной формы получим неравенства

$$-d^2 f(x_0) \geq \gamma |\Delta x|_n^2, \quad d^2 f(x_0) \leq -\gamma |\Delta x|_n^2,$$

$$f(x) - f(x_0) \leq -\frac{\gamma}{2} |\Delta x|_n^2 + \tilde{o}(|\Delta x|_n^2) < 0$$

для всех  $x = x_0 + \Delta x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ .

Если  $d^2 f(x_0)$  – неопределенная квадратичная форма, то не выполняется необходимое условие минимума  $d^2 f(x_0) \geq 0$ , следовательно,  $x_0$  не является точкой локального минимума функции  $f$ . То же самое можно сказать относительно функции  $-f$ , и поэтому  $x_0$  не является точкой локального минимума функции  $-f$  или, что равносильно, точкой локального максимума функции  $f$ .  $\square$

**ПРИМЕР 4.1.** Для функции  $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4xz + 8yz + 5y^2 + 9z^2$  найдем сначала стационарные точки. Для этого решим систему

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + 4z = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 10y + 8z = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4x + 8y + 18z = 0.$$

Посчитаем определитель матрицы этой линейной однородной системы алгебраических уравнений

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{pmatrix} = 8 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} = 8 \cdot 16 > 0.$$

Поэтому система имеет единственное решение  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . В этой стационарной точке второй дифференциал исследуемой функции имеет вид  $d^2f(0, 0, 0) = 2dx^2 + 2dxdy + 2dydx + 4dxdz + 4dzdx + 10dy^2 + 8dydz + 8dzdy + 18dz^2$ . Этой квадратичной форме соответствует матрица коэффициентов

$$\|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{pmatrix}$$

с минорами  $A_1 = 2 > 0$ ,  $A_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = 16 > 0$ ,  $A_3 = 8 \cdot 16 > 0$ . Таким образом, по критерию Сильвестра квадратичная форма  $d^2f(0, 0, 0)$  положительно определена, и по теореме 4.2 точка  $(0, 0, 0)$  является точкой строгого локального минимума. Других локальных экстремумов у функции нет, поскольку у нее нет других стационарных точек.

## 5. Условный экстремум. Теорема Лагранжа

Пусть  $G$  – открытое множество из  $\mathbb{R}^n$ ,  $m < n$ , заданы функции  $f^i : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{0, m}$ . Рассмотрим так называемые *уравнения связи*

$$f^i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.1)$$

Множество точек, удовлетворяющих всем уравнениям (5.1), обозначим через  $E = \{x \in G : f^i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m}\}$ . Точка  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in E$  называется *точкой условного минимума (условного максимума)* функции  $f^0$  при наличии связей (5.1), если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \cap B_\delta(x_0) \quad f^0(x) \geq f^0(x_0) \quad (f^0(x) \leq f^0(x_0)),$$

$x_0 \in E$  – точка *строгого условного минимума (строгого условного максимума)* функции  $f^0$ , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \cap B_\delta(x_0) \quad f^0(x) > f^0(x_0) \quad (f^0(x) < f^0(x_0)).$$

Пусть из уравнений связи (5.1) можно выразить  $m$  переменных через остальные  $n - m$  переменных:

$$x^{n-m+1} = \phi^1(x^1, \dots, x^{n-m}), \dots, x^n = \phi^m(x^1, \dots, x^{n-m}).$$

Тогда, сделав соответствующую подстановку, можно получить функцию  $F(x^1, \dots, x^{n-m}) =$

$$f(x^1, \dots, x^{n-m}, \phi^1(x^1, \dots, x^{n-m}), \dots, \phi^m(x^1, \dots, x^{n-m}))$$

от  $n - m$  переменных и искать точки условного экстремума функции  $f^0$  при наличии связей (5.1), как точки обычного локального экстремума для функции  $F$ .

**ПРИМЕР 5.1.** Пусть  $n = 2, m = 1, f^0(x, y) = 1 - x^2 - y^2, f^1(x, y) = x + y - 1 = 0$  – уравнение связи. Оно определяет множество  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 1 = 0\}$  – прямую на плоскости. Из уравнения связи выразим  $y = 1 - x$  и, подставив в  $f^0$ , получим  $F(x) = 1 - x^2 - (1 - x)^2 = 2x - 2x^2$ . Эта функция имеет максимум при  $x = \frac{1}{2}$ , т. е. точкой условного максимума является точка  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.1.** Прямой метод редко бывает эффективным, поскольку уравнения связей, как правило, затруднительно разрешить относительно какой-нибудь группы переменных.

Функция  $n + m$  переменных

$$L(x, \lambda) = f^0(x) + \lambda^1 f^1(x) + \dots + \lambda^m f^m(x),$$

где  $x \in G$ ,  $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^m) \in \mathbb{R}^m$ , называется *функцией Лагранжа*, а переменные  $\lambda^1, \dots, \lambda^m$  называются *множителями Лагранжа*.

Будем говорить, что  $(x_0, \lambda_0)$  – *стационарная точка функции Лагранжа*, если

$$\frac{\partial L}{\partial x^1}(x_0, \lambda_0) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x^n}(x_0, \lambda_0) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda^1}(x_0, \lambda_0) = f^1(x_0) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial \lambda^m}(x_0, \lambda_0) = f^m(x_0) = 0.$$

**ТЕОРЕМА 5.1** (теорема Лагранжа). Пусть  $x_0$  – точка условного экстремума функции  $f^0$  при наличии связей (5.1), функции  $f^i \in C^1(O_{x_0}; \mathbb{R})$ ,  $i = \overline{0, m}$ , причем

$$\text{rank } J_f(x_0) = \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix} = m.$$

Тогда существует единственный набор множителей Лагранжа  $\lambda_0 = (\lambda_0^1, \dots, \lambda_0^m) \in \mathbb{R}$ , такой, что  $(x_0, \lambda_0)$  – стационарная точка функции Лагранжа.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Матрица  $J_f$  является матрицей Якоби вектор-функции  $f = (f^1, \dots, f^m)$ , задающей уравнения связей (5.1) в виде  $f(x) = 0$ . Так как  $m < n$ , а ранг матрицы Якоби в точке  $x_0$  равен  $m$ , то хотя бы один из миноров этой матрицы порядка  $m$  отличен от нуля. Без ограничения общности можно считать, что

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^m}(x_0) \end{pmatrix} \neq 0. \quad (5.2)$$

Если от нуля отличен другой минор порядка  $m$ , получим условие (5.2), перенумеровав переменные в нужном порядке.

Точка  $x_0 \in E$ , т. е.  $f(x_0) = 0$ . В силу выполнения условия (5.2) к вектор-функции  $f = (f^1, \dots, f^m)$  можно применить теорему о неявной функции. Найдется такая клеточная окрестность

$$K(x_0) = K_1(x_0^1, \dots, x_0^m) \times K_2(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n),$$

в которой система уравнений связей (5.1) определяет переменные  $x^1, \dots, x^m$  как неявные функции переменных  $x^{m+1}, \dots, x^n$ . Это означает, что найдется единственный набор непрерывно дифференцируемых в  $K_2(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n)$  функций  $\phi^i(x^{m+1}, \dots, x^n)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , таких, что

$$\phi^i(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n) = x_0^i,$$

$$\begin{aligned} (\phi^1(x^{m+1}, \dots, x^n), \dots, \phi^m(x^{m+1}, \dots, x^n)) &\in K_1(x_0^1, \dots, x_0^m), \\ f^i(\phi^1(x^{m+1}, \dots, x^n), \dots, \phi^m(x^{m+1}, \dots, x^n), x^{m+1}, \dots, x^n) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

при всех  $i = \overline{1, m}$ ,  $(x^{m+1}, \dots, x^n) \in K_2(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n)$ . Другими словами, множество  $E \cap K(x_0)$  можно задать следующим образом:

$$\begin{aligned} E \cap K(x_0) &= \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : (x^{m+1}, \dots, x^n) \in \\ &K_2(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n), x^i = \phi^i(x^{m+1}, \dots, x^n), i = \overline{1, m}\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Предположим для определенности, что  $x_0$  – точка условного минимума функции  $f^0(x)$ , тогда существует такая окрестность точки  $x_0$ , которая может быть сужена до клеточной окрестности

$$K'(x_0) = K'_1(x_0^1, \dots, x_0^m) \times K'_2(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n) \subset K(x_0),$$



в которой

$$f^0(x) - f^0(x_0) \geq 0 \quad \forall x \in E \cap K'(x_0).$$

Поэтому функция  $f^0$  принимает на множестве  $E \cap K'(x_0)$  наименьшее значение в точке  $x_0$ . Согласно равенству (5.4) сложная функция

$$F(x^{m+1}, \dots, x^n) =$$

$$= f^0(\phi^1(x^{m+1}, \dots, x^n), \dots, \phi^m(x^{m+1}, \dots, x^n), x^{m+1}, \dots, x^n)$$

определена в клеточной окрестности  $K'_2(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n)$  и принимает в этой окрестности наименьшее значение в точке с координатами  $(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n)$ . Следовательно, в силу необходимых условий локального экстремума должно выполняться равенство  $dF(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n) = 0$ . Воспользовавшись инвариантностью формы первого дифференциала, получим, что

$$dF(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^0(x_0)}{\partial x^k} dx^k = 0. \quad (5.5)$$

В этом равенстве  $dx^{m+1}, \dots, dx^n$  есть дифференциалы независимых переменных, а  $dx^1, \dots, dx^m$  – дифференциалы функций  $\phi^1, \dots, \phi^m$ , зависящих от  $x^{m+1}, \dots, x^n$ . Для краткости будем говорить о независимых и зависимых дифференциалах.

Найдем связи между зависимыми и независимыми дифференциалами. Дифференцируя тождества (5.3) в точке с координатами  $(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n)$  и пользуясь инвариантностью формы первого дифференциала, получаем

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i(x_0)}{\partial x^k} dx^k = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.6)$$

Умножая эти равенства на множители  $\lambda^i$  и складывая полученные равенства с равенством (5.5), получаем

$$0 = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f^0}{\partial x^k}(x_0) + \sum_{i=1}^m \lambda^i \frac{\partial f^i}{\partial x^k}(x_0) \right) dx^k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L(x_0, \lambda)}{\partial x^k} dx^k. \quad (5.7)$$

Подберем множители  $\lambda_0^1, \dots, \lambda_0^m$  так, чтобы коэффициенты при зависимых дифференциалах в равенстве (5.7) обратились в нуль, т. е.

$$\frac{\partial L(x_0, \lambda_0)}{\partial x^k} = \frac{\partial f^0(x_0)}{\partial x^k} + \sum_{i=1}^m \lambda_0^i \frac{\partial f^i(x_0)}{\partial x^k} = 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (5.8)$$

Система линейных уравнений (5.8) единственным образом определяет множители  $\lambda_0^1, \dots, \lambda_0^m$ , так как ее определитель (5.2) отличен от нуля. При выполнении условий (5.8) уравнение (5.7) примет вид

$$\sum_{k=m+1}^n \frac{\partial L(x_0, \lambda_0)}{\partial x^k} dx^k = 0.$$

В силу произвольности дифференциалов независимых переменных  $dx^{m+1}, \dots, dx^n$  отсюда следует, что

$$\frac{\partial L(x_0, \lambda_0)}{\partial x^k} = 0, \quad k = m+1, \dots, n. \quad (5.9)$$

Так как  $x_0 \in E$ , то

$$\frac{\partial L(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda^i} = f^i(x_0) = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

С учетом равенств (5.8) и (5.9) получили, что  $(x_0, \lambda_0)$  – стационарная точка функции Лагранжа  $L(x, \lambda)$ .  $\square$

## 6. Достаточные условия условного экстремума

Второй дифференциал функции Лагранжа, вычислительный при фиксированном  $\lambda_0 = (\lambda_0^1, \dots, \lambda_0^m)$  по переменным  $x^1, \dots, x^n$  в точке  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ , будем обозначать через  $d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx)$ . Здесь мы подчеркиваем зависимость выражения

$$d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(x_0, \lambda_0)}{\partial x^k \partial x^j} dx^k dx^j$$

от вектора  $dx = (dx^1, \dots, dx^n) \in \mathbb{R}^n$ .

Обозначим через  $E_T$  следующее линейное многообразие в  $\mathbb{R}^n$ :

$$E_T = \left\{ \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i(x_0)}{\partial x^k} \xi^k = 0, \quad i = \overline{1, m} \right\}.$$

Равенства (5.6) означают, что  $dx = (dx^1, \dots, dx^n) \in E_T$ .

В случае дважды непрерывно дифференцируемых функций  $f^i$ ,  $i = \overline{0, m}$ , утверждение теоремы Лагранжа можно усилить.

**ТЕОРЕМА 6.1.** Пусть  $x_0$  — точка условного минимума функции  $f^0$  при наличии связей (5.1), функции  $f^i \in C^2(O_{x_0}; \mathbb{R})$ ,  $i = \overline{0, m}$ ,

$$\text{rank } J_f(x_0) = \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix} = m.$$

Тогда существует единственный набор множителей Лагранжа  $\lambda_0 = (\lambda_0^1, \dots, \lambda_0^m)$  такой, что  $(x_0, \lambda_0)$  — стационарная точка функции Лагранжа,  $d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx) \geq 0$  при  $dx = (dx^1, \dots, dx^n) \in E_T$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Учитывая теорему Лагранжа, остается доказать, что  $d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx) \geq 0$  при всех векторах

$dx = (dx^1, \dots, dx^n) \in E_T$ . Повторяя рассуждения теоремы 5.1, рассмотрим функцию

$$F(x^{m+1}, \dots, x^n) = f^0(\phi^1(x^{m+1}, \dots, x^n), \dots, \phi^m(x^{m+1}, \dots, x^n), x^{m+1}, \dots, x^n),$$

имеющую локальный экстремум в точке  $(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n)$ . По теореме о необходимых условиях локального экстремума должно быть выполнено условие  $d^2F(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n) \geq 0$ . Воспользовавшись правилом нахождения второго дифференциала сложной функции, получим

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f^0(x_0)}{\partial x^k \partial x^j} dx^k dx^j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^0(x_0)}{\partial x^k} d^2 x^k \geq 0. \quad (6.1)$$

При этом выполняются равенства (5.6), поэтому вектор  $dx = (dx^1, \dots, dx^n) \in E_T$ .

Дифференцируя два раза в точке  $x_0^{m+1}, \dots, x_0^n$  тождества (5.3), получаем равенства

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f^i(x_0)}{\partial x^k \partial x^j} dx^k dx^j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i(x_0)}{\partial x^k} d^2 x^k = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Если умножить каждое из этих равенств на соответствующий множитель Лагранжа  $\lambda_0^i$  и сложить с неравенством (6.1), то получим

$$d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L(x_0, \lambda_0)}{\partial x^k} d^2 x^k \geq 0.$$

Последняя сумма в этом неравенстве равна нулю, так как  $(x_0, \lambda_0)$  есть стационарная точка функции Лагранжа. Таким образом,  $d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx) \geq 0$  при  $dx \in E_T$ .  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ 6.1.** Сформулировать и доказать аналогичную теорему для условного максимума.

ТЕОРЕМА 6.2 (достаточные условия условного экстремума). Пусть  $f^i \in C^2(O_{x_0}; \mathbb{R})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $\text{rank} J_f(x_0) = m$ ,  $(x_0, \lambda_0)$  – стационарная точка функции Лагранжа  $L(x, \lambda)$ .

1) Если  $d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx) > 0$  при всех  $dx \in E_T \setminus \{0\}$ , то  $x_0$  – точка строго условного минимума функции  $f^0$  при наличии связей (5.1).

2) Если  $d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx) < 0$  при всех  $dx \in E_T \setminus \{0\}$ , то  $x_0$  – точка строго условного максимума функции  $f^0$  при наличии связей (5.1).

3) Если существуют векторы  $dx_1, dx_2 \in E_T$ , для которых  $d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx_1) < 0$ ,  $d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx_2) > 0$ , то  $x_0$  не является точкой условного экстремума функции  $f^0$  при наличии связей (5.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая, как в теореме Лагранжа, можно показать, что

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^m}(x_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

и существует  $K(x_0) = K_1(x_0^1, \dots, x_0^m) \times K_2(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n)$ , что

$$E \cap K(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x^{m+1}, \dots, x^n) \in K_2(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n), \\ x^i = \phi_i(x^{m+1}, \dots, x^n), i = \overline{1, m}\}. \quad (6.2)$$

На  $E \cap K(x_0)$  функция  $f^0$  принимает вид

$$F(x^{m+1}, \dots, x^n) = f^0(\phi_1(x^{m+1}, \dots, x^n), \dots, \phi_m(x^{m+1}, \dots, x^n), x^{m+1}, \dots, x^n).$$

При этом  $F \in C^2(K_2(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n))$ .

Поскольку  $(x_0, \lambda_0)$  – стационарная точка функции Лагранжа, то

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial x^k}(x_0, \lambda_0) dx^k = 0,$$

а при  $x \in E \cap K(x_0)$  имеет место равенство

$$L(x, \lambda_0) = f^0(x) = F(x^{m+1}, \dots, x^n).$$

В силу инвариантности формы первого дифференциала

$$dF(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial x^k}(x_0, \lambda_0) dx^k = 0.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} d^2 F(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(x_0, \lambda_0)}{\partial x^j \partial x^k} dx^j dx^k + \\ &\sum_{k=1}^n \frac{\partial L(x_0, \lambda_0)}{\partial x^k} d^2 x^k = d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Пусть  $d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx) > 0$  при  $dx \in E_T \setminus \{0\}$ . Так как  $E \cap K(x_0)$  имеет вид (6.2), то дифференциалы  $dx^1, \dots, dx^m$  зависят от  $dx^{m+1}, \dots, dx^n$ . Дифференцируя в точке  $x_0$  имеющие место в  $K_2(x_0^{m+1}, \dots, dx^n)$  тождества

$$f^i(\phi_1(x^{m+1}, \dots, x^n), \dots, \phi_m(x^{m+1}, \dots, x^n), x^{m+1}, \dots, x^n) \equiv 0,$$

$i = \overline{1, m}$ , получим

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^k}(x_0) dx^k = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

поэтому  $dx \in E_T$ . Из (6.3) следует, что  $d^2 F(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n) > 0$  при  $(dx^{m+1})^2 + \dots + (dx^n)^2 > 0$ . По теореме о достаточных условиях локального экстремума  $(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n)$  – точка строгого локального минимума для  $F(x^{m+1}, \dots, x^n)$ , т. е.  $x_0$  – точка строгого минимума функции  $f^0$  на множестве  $E \cap K(x_0)$ . Это означает, что  $x_0$  – точка строгого условного минимума функции  $f^0$  при наличии связей (5.1).

Если  $d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx) < 0$  при  $dx \in E_T \setminus \{0\}$ , то  $x_0$  – точка строгого условного минимума функции  $-f^0$ , а поэтому и точка строгого условного максимума функции  $f^0$  при наличии связей (5.1).

Если существуют  $dx_1, dx_2 \in E_T$ , для которых

$$d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx_1) < 0, \quad d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx_2) > 0,$$

то точка  $x_0$  не является точкой условного минимума для функций  $f^0, -f^0$  при наличии связей (5.1) по теореме 6.1. Следовательно,  $x_0$  – не точка условного максимума для  $f^0$ .

□

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Если  $d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx)$  положительно определенная квадратичная форма на всем пространстве  $\mathbb{R}^n$ , т. е.  $d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0, dx) > 0$  при любых  $dx \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , то  $x_0$  – точка условного минимума.

ПРИМЕР 6.1. Найдем точки условного экстремума функции  $f^0(x, y) = e^{axy}$ ,  $a \neq 0$ , при наличии связи

$$f^1(x, y) = x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0.$$

Для функции Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = e^{axy} + \lambda(x^3 + y^3 + x + y - 4)$$

найдем стационарные точки, решив уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = aye^{axy} + \lambda(3x^2 + 1) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = axe^{axy} + \lambda(3y^2 + 1) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0.$$

Умножим первое уравнение на  $x$  и вычтем из него второе уравнение, умноженное на  $y$ :

$$\lambda(3x^3 - 3y^3 + x - y) = \lambda(x - y)(3x^2 + 3xy + 3y^2 + 1) = 0.$$

Если  $\lambda = 0$ , то из первых двух уравнений получим  $x = y = 0$ . Точка  $(0, 0)$  не удовлетворяет уравнению связи. При  $\lambda \neq 0$  получим с необходимостью  $x = y$ , так как  $3x^2 + 3xy + 3y^2 + 1 = 3(x^2 + xy + y^2) + 1 > 0$ . Поэтому из уравнения связи получим  $x^3 + x = 2$ . Отсюда следует, что  $x = y = 1$ ,  $(1, 2, -\frac{a}{4}e^a)$  – единственная стационарная точка функции Лагранжа. Далее,

$$d^2L\left(1, 1, -\frac{a}{4}e^a, dx, dy\right) = \\ ae^a \left( a(dx + dy)^2 + 2dxdy - \frac{3}{2}(dx^2 + dy^2) \right).$$

Из уравнения связи при  $x = y = 1$  получим  $dy = -dx$ , следовательно,

$$d^2L\left(1, 1, -\frac{a}{4}e^a, dx, -dx\right) = -5ae^a(dx)^2.$$

Таким образом, при  $a < 0$  точка  $(1, 1)$  является условным минимумом, а при  $a > 0$  – условным максимумом функции  $e^{axy}$  при наличии связи  $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Уравнение связи  $x^3 + y^3 + x + y = 4$  было бы затруднительно разрешить относительно  $x$  или  $y$ , поэтому метод Лагранжа для задачи нахождения условных экстремумов в примере 6.1 более эффективен.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. В конкретных прикладных задачах множители Лагранжа имеют содержательную интерпретацию. В механике множители Лагранжа часто задают реакции связей, в математической экономике – цены на продукты производства.



## Глава V. Кратные интегралы

### 1. Свойства декартовых произведений. Клетки

Множества  $A$  и  $B$  называются *непересекающимися*, если  $A \cap B = \emptyset$ . Множества  $A_1, \dots, A_n$  *попарно непересекающиеся*, если для любых  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . Система множеств  $\{A_1, \dots, A_n\}$  называется *разбиением множества  $A$* , если  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$  и  $A_1, \dots, A_n$  попарно не пересекаются. Обозначается это следующим образом:  $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$  (символ  $\sqcup$  или  $\coprod$  в дальнейшем будет означать объединение попарно непересекающихся множеств).

Напомним, что *декартовым произведением* множеств  $A_1, \dots, A_n$  называется множество  $A_1 \times \dots \times A_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in A_i, i = 1, n\}$

СВОЙСТВА ДЕКАРТОВА ПРОИЗВЕДЕНИЯ:

- 1)  $A_1 \times A_2 = \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $(A_1 = \emptyset) \vee (A_2 = \emptyset)$ ;
- 2)  $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$ ;
- 3)  $(A_1 \subset B_1) \wedge (A_2 \subset B_2) \Rightarrow A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$ ;
- 4)  $(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = ((A_1 \setminus B_1) \times A_2) \sqcup ((A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2))$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем последнее свойство. Имеем

$$\begin{aligned}
 & ((x_1, x_2) \in (A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2)) \Leftrightarrow \\
 & ((x_1, x_2) \in A_1 \times A_2) \wedge ((x_1, x_2) \notin B_1 \times B_2) \Leftrightarrow \\
 & ((x_1 \in A_1) \wedge (x_2 \in A_2) \wedge (x_1 \notin B_1)) \vee \\
 & \vee ((x_1 \in A_1) \wedge (x_2 \in A_2) \wedge (x_1 \in B_1) \wedge (x_2 \notin B_2)) \Leftrightarrow \\
 & ((A_1 \setminus B_1) \times A_2) \sqcup ((A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)). \quad \square
 \end{aligned}$$

Свойство 5.  $(A_1 \times \cdots \times A_n) \setminus (B_1 \times \cdots \times B_n) = \bigcup_{i=2}^n ((A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_{i-1} \cap B_{i-1}) \times (A_i \setminus B_i) \times A_{i+1} \times \cdots \times A_n)$ .

Свойство 6. Если  $A = \prod_{i=1}^n A_i$ ,  $B = \prod_{j=1}^m B_j$ , то  $A \times B = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m A_i \times B_j$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.1. Доказать свойства 1 – 3, 5, 6 декартова произведения.

Промежутками в  $\mathbb{R}$  будем называть отрезки, полуинтервалы, интервалы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Клетками в  $\mathbb{R}$  называются промежутки, точки, пустое множество. Если клетка  $I$  – промежуток, то ее мерой  $m(I)$  называется величина, равная длине промежутка  $I$ . Если  $I$  – точка или  $\emptyset$ , то  $m(I) = 0$ .

Пусть  $I_1, \dots, I_n$  – клетки в  $\mathbb{R}$ . Множество  $\Pi = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$  называется клеткой в  $\mathbb{R}^n$ . Мерой клетки  $\Pi$  называется величина  $m(\Pi) = \prod_{k=1}^n m(I_k)$ .

СВОЙСТВА КЛЕТОК:

1) Если существует  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  такое, что  $I_i = \emptyset$ , то  $\Pi = I_1 \times \cdots \times I_n = \emptyset$  и  $m(\Pi) = 0$ . Если существует  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , такое, что  $I_i$  – точка, то  $m(\Pi) = 0$ . Поэтому, если  $m(\Pi) > 0$ , то  $I_i$  – промежутки,  $i = \overline{1, n}$ .

2) Отрезки, точки и  $\emptyset$  – замкнутые множества в  $\mathbb{R}$  (замкнутые клетки). Замыкание любой клетки есть замкнутая клетка.

3) Интервалы и  $\emptyset$  – открытые множества в  $\mathbb{R}$  (открытые клетки). Внутренность любой клетки есть замкнутая клетка.

4) Пересечение двух клеток в  $\mathbb{R}$  – клетка, разность двух клеток в  $\mathbb{R}$  – объединение не более чем двух непересекающихся клеток.

5) Для любой клетки  $I \subset \mathbb{R}$   $m(I) = m(\overset{\circ}{I}) = m(\bar{I})$ , где

$$\overset{\circ}{I} = \text{int} I.$$

6) Для любой клетки  $\Pi = I_1 \times \cdots \times I_n$  справедливы соотношения

$$\overset{\circ}{\Pi} = \overset{\circ}{I}_1 \times \cdots \times \overset{\circ}{I}_n, \quad \bar{\Pi} = \bar{I}_1 \times \cdots \times \bar{I}_n, \quad m(\Pi) = m(\bar{\Pi}) = m(\overset{\circ}{\Pi}).$$

7) Если  $\Pi$  и  $Q$  – клетки в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Pi \subset Q$ , то  $m(\Pi) \leq m(Q)$ .

8) Если  $I_1, \dots, I_n, J_1, \dots, J_n$  – клетки в  $\mathbb{R}$ ,  $\Pi = I_1 \times \cdots \times I_n$ ,  $Q = J_1 \times \cdots \times J_n$ , то  $\Pi \cap Q = (I_1 \cap J_1) \times \cdots \times (I_n \cap J_n)$  – клетка в  $\mathbb{R}^n$ .

9) Если  $I$  – промежуток в  $\mathbb{R}$  с концами  $a$  и  $b$ , то  $\partial I = \{a, b\}$ ; если  $I \subset \mathbb{R}$  – точка или  $\emptyset$ , то  $\partial I = I$ .

10) Если  $I, I_1, \dots, I_p$  – клетки в  $\mathbb{R}$ ,  $I = \coprod_{i=1}^p I_i$ , то

$$m(I) = \sum_{i=1}^p m(I_i).$$

11) Если  $I, I_1, \dots, I_p, J, J_1, \dots, J_q$  – клетки в  $\mathbb{R}$ ,  $I = \coprod_{i=1}^p I_i$ ,  $J = \coprod_{j=1}^q J_j$ , то  $\Pi = I \times J = \coprod_{i=1}^p \coprod_{j=1}^q \Pi_{ij}$  – клетка в  $\mathbb{R}^2$ , где  $\Pi_{ij} = I_i \times J_j$ , и  $m(\Pi) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q m(\Pi_{ij})$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Приведенное в формулировке свойства 11 разбиение клетки из  $\mathbb{R}^2$  называется *стандартным*, аналогично строится стандартное разбиение клетки в  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть  $I$  – промежуток в  $\mathbb{R}$  с концами  $a$  и  $b$ ,  $S$  – конечное множество точек из  $\mathbb{R}$ ,  $a, b \in S$ ,  $S' = S \cap [a, b]$ . Тогда  $S'$  можно представить в следующем виде:

$$S' = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}, \quad a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b.$$

Выберем разбиение промежутка  $I$  промежутками  $I_i$  с концами  $a_{i-1}, a_i$ ,  $i = \overline{1, p}$ , и будем говорить, что множество  $S$  порождает разбиение промежутка  $I$  промежутками  $\{I_1, \dots, I_p\}$ .

Если  $I$  – точка,  $I \in S$ , то  $S$  порождает тривиальное разбиение клетки  $I$ , состоящее из одной клетки  $I$ .

12) Если  $\Pi = I \times J$  – клетка в  $\mathbb{R}^2$ ,  $S, T \subset \mathbb{R}$  – конечные множества,  $S \supset \partial I$ ,  $T \supset \partial J$ , то пара множеств  $(S, T)$  порождает стандартное разбиение клетки  $\Pi$ .

13) Если  $\{\Pi_1, \dots, \Pi_p\}$  – разбиение клетки  $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ , то  $m(\Pi) = \sum_{i=1}^p m(\Pi_i)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\Pi = I \times J$ ,  $\Pi_i = I_i \times J_i$ ,  $i = \overline{1, p}$ ,  $S = \bigcup_{i=1}^p \partial I_i$ ,  $T = \bigcup_{i=1}^p \partial J_i$ . По свойству 12 пара  $(S, T)$  определяет стандартное разбиение клетки  $\Pi$  и всех  $\Pi_i$ ,  $i = \overline{1, p}$ . При этом стандартное разбиение  $\Pi$  является объединением стандартных разбиений всех клеток  $\Pi_i$ . Обозначим его через

$$\{\Pi_i^j : i = \overline{1, p}, j = \overline{1, N(i)}\},$$

где  $\{\Pi_i^j : j = \overline{1, N(i)}\}$  – стандартное разбиение клетки  $\Pi_i$ ,  $i = \overline{1, p}$ . По свойству 11  $m(\Pi) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{N(i)} m(\Pi_i^j) = \sum_{i=1}^p m(\Pi_i)$ .  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Свойство 13 выполняется также для клеток в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

14) Для любой клетки  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует открытая клетка  $\Pi^\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ , такая, что  $\Pi \subset \Pi^\varepsilon$ ,  $m(\Pi^\varepsilon) < m(\Pi) + \varepsilon$ .

15) Для любой клетки  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  с мерой  $m(\Pi) \neq 0$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует замкнутая клетка  $\Pi_\varepsilon$ , такая, что  $\Pi_\varepsilon \subset \Pi$ ,  $m(\Pi_\varepsilon) > m(\Pi) - \varepsilon$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Доказать свойства клеток.

## 2. Клеточные множества в $\mathbb{R}^n$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  называется *клеточным*, если существуют клетки  $\Pi_i$ ,  $i = \overline{1, p}$ , такие, что  $A = \prod_{i=1}^p \Pi_i$ . Мера клеточного множества  $A$  определяется

формулой  $m(A) = \sum_{i=1}^p m(\Pi_i)$ .

ЛЕММА 2.1. Мера клеточного множества  $A$  не зависит от способа разбиения  $A$  на клетки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть найдутся клетки  $\Pi_i, Q_j$ , такие, что  $A = \prod_{i=1}^p \Pi_i = \prod_{j=1}^q Q_j$ . По свойству 8  $\Pi_{ij} = \Pi_i \cap Q_j$  – клетки. Очевидно, что для  $i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$  клетки  $\Pi_{ij}$  попарно не пересекаются. По свойству 13:

$$\Pi_i = \prod_{j=1}^q \Pi_{ij}, \quad m(\Pi_i) = \sum_{j=1}^q m(\Pi_{ij}), \quad i = \overline{1, p},$$

$$Q_j = \prod_{i=1}^p \Pi_{ij}, \quad m(Q_j) = \sum_{i=1}^p m(\Pi_{ij}), \quad j = \overline{1, q}.$$

Следовательно,  $A = \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^q \Pi_{ij}$ ,

$$\sum_{i=1}^p m(\Pi_i) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q m(\Pi_{ij}) = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p m(\Pi_{ij}) =$$

$$\sum_{j=1}^q m(Q_j) = m(A). \quad \square$$

СВОЙСТВА КЛЕТОЧНЫХ МНОЖЕСТВ:

1) Если клеточные множества  $A$  и  $B$  не пересекаются, то  $A \sqcup B$  клеточное множество и  $m(A \sqcup B) = m(A) + m(B)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A = \prod_{i=1}^p \Pi_i$ ,  $B = \prod_{j=1}^q Q_j$ , все  $\Pi_i$ ,  $Q_j$  – клетки, то  $A \sqcup B = \prod_{i=1}^p \Pi_i \prod_{j=1}^q Q_j$ . Следовательно,

$$m(A \sqcup B) = \sum_{i=1}^p m(\Pi_i) + \sum_{j=1}^q m(Q_j) = m(A) + m(B). \quad \square$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть  $A = \prod_{i=1}^p A_i$ , где  $A_i$  – клеточные множества,  $i = \overline{1, p}$ . Тогда  $A$  – клеточное множество и  $m(A) = \sum_{i=1}^p m(A_i)$ .

СВОЙСТВО 2. Если  $S$  и  $T$  – клеточные множества в  $\mathbb{R}$ , то  $S \times T$  – клеточное множество в  $\mathbb{R}^2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем  $S = \prod_{i=1}^p I_i$ ,  $T = \prod_{j=1}^q J_j$ , где  $I_i$ ,  $J_j$  – клетки. По свойству 6 декартовых произведений совокупность клеток  $\{I_i \times J_j : i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}\}$  – разбиение множества  $S \times T$ . Поэтому  $S \times T$  – клеточное множество.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.  $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ ,  $S_i$  – клеточные множества. Следовательно,  $S$  – клеточное множество в  $\mathbb{R}^n$ .

СВОЙСТВО 3. Разность двух клеток – клеточное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение для клеток из  $\mathbb{R}^2$ . Пусть  $\Pi = I_1 \times I_2$ ,  $Q = J_1 \times J_2$ , где  $I_1, I_2, J_1, J_2$  – клетки в  $\mathbb{R}$ . Тогда  $\Pi \setminus Q = A_1 \cup A_2$ , где  $A_1 = (I_1 \setminus J_1) \times I_2$ ,  $A_2 = (I_1 \cap J_1) \times (I_2 \setminus J_2)$ . Последнее равенство выполняется в силу свойств декартова произведения.

Разность двух клеток в  $\mathbb{R}$  является объединением не более чем двух непересекающихся клеток, а значит, клеточным множеством. Тогда  $A_1$  – клеточное множество по свойству 2 клеточных множеств. Аналогично доказывается, что  $A_2$  – клеточное множество. Поскольку  $I_1 \setminus J_1$  и  $I_1 \cap J_1$  не

пересекаются, то множества  $A_1$  и  $A_2$  тоже не пересекаются, следовательно,  $\Pi \setminus Q$  – клеточное множество.  $\square$

**СВОЙСТВО 4.** *Разность двух клеточных множеств в  $\mathbb{R}^n$  – клеточное множество.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}^n$  – клеточное множество, а совокупность клеток  $\{\Pi_1, \dots, \Pi_p\}$  – разбиение  $A$ . Для любой клетки  $\Pi$  множество  $A \setminus \Pi = \bigcup_{i=1}^p (\Pi_i \setminus \Pi)$  является клеточным, а по свойству 3  $\Pi_i \setminus \Pi$  – клеточное множество. По следствию 2.1  $A \setminus \Pi$  – клеточное множество.

Пусть  $B = \bigcup_{j=1}^q Q_j$ , где  $Q_j$  – клетки. Множество  $A \setminus B$  можно получить последовательным вычитанием из  $A$  клеток  $Q_1, \dots, Q_q$ , получая на каждом шаге клеточное множество в силу доказанного в предыдущем абзаце.  $\square$

**СВОЙСТВО 5.** *Пересечение двух клеточных множеств – клеточное множество.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $A = \bigcup_{i=1}^p \Pi_i$ ,  $B = \bigcup_{j=1}^q Q_j$ , где  $\Pi_i, Q_j$  – клетки. Тогда  $\Pi_{ij} = \Pi_i \cap Q_j$ ,  $i = \overline{1, p}$ ,  $j = \overline{1, q}$ , – попарно непересекающиеся клетки,  $A \cap B = \bigcup_{i=1}^p \bigcup_{j=1}^q \Pi_{ij}$ . Следовательно,  $A \cap B$  – клеточное множество.  $\square$

**СВОЙСТВО 6.** *Объединение двух клеточных множеств – клеточное множество.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Имеем

$$A \cup B = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A).$$

Поскольку  $A$  и  $B$  – клеточные множества, то  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  – клеточные множества. Таким образом,  $A \cup B$  – клеточное множество.  $\square$

**СВОЙСТВО 7.** *Если  $A$  и  $B$  – клеточные множества,  $A \subset B$ , то  $m(B) = m(A) + m(B \setminus A)$  и  $m(B) \geq m(A)$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из  $A \subset B$  следует, что  $B = A \sqcup (B \setminus A)$ . Множества  $A, B \setminus A$  – клеточные и не пересекаются. По свойству 1  $m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \geq m(A)$ .  $\square$

СВОЙСТВО 8. Если  $A_1, \dots, A_p$  – клеточные множества, то

$$m\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) \leq \sum_{i=1}^p m(A_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем по индукции. При  $p = 1$  имеем равенство. Пусть неравенство верно для любых  $p$  клеточных множеств. Возьмем  $A = \bigcup_{i=1}^{p+1} A_i$ ,  $B = \bigcup_{i=1}^p A_i$ . Тогда  $A = B \cup A_{p+1}$ ,  $B \sqcup (A_{p+1} \setminus B)$ , где по предположению индукции  $B, A_{p+1}$  – клеточные множества. Тогда по свойству 7 и по предположению индукции  $m(A) = m(B) + m(A_{p+1} \setminus B) \leq m(B) + m(A_{p+1}) \leq \sum_{i=1}^p m(A_i) + m(A_{p+1})$ .  $\square$

### 3. Мера Жордана. Множества меры нуль

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Множество  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  измеримо по Жордану, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся такие клеточные множества  $A$  и  $B$ , такие, что  $A \subset \Omega \subset B$  и  $m(B) - m(A) < \varepsilon$ . Если  $\Omega$  – измеримо по Жордану, то мера Жордана  $m(\Omega)$  – число, для любых клеточных множеств  $A$  и  $B$ , таких, что  $A \subset \Omega \subset B$ , удовлетворяющее неравенству  $m(A) \leq m(\Omega) \leq m(B)$ .

ЛЕММА 3.1. Для любого измеримого по Жордану множества  $\Omega$  мера  $m(\Omega)$  существует и определяется единственным образом

$$m(\Omega) = \sup_{A \subset \Omega} m(A) = \inf_{B \supset \Omega} m(B),$$



где точная верхняя и точная нижняя грани берутся по клеточным множествам  $A$  и  $B$  соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если  $A$  и  $B$  – клеточные множества, такие, что  $A \subset \Omega \subset B$ , то  $m(A) \leq m(B)$ . Таким образом, существует такое  $\gamma$ , что для клеточного множества  $A \subset \Omega$   $\gamma \geq m(A)$  и для любого клеточного множества  $B \supset \Omega$   $\gamma \leq m(B)$ . Отсюда

$$m(A) \leq \sup_{A \subset \Omega} m(A) \leq \gamma \leq \inf_{B \supset \Omega} m(B) \leq m(B).$$

Поэтому можно положить  $\gamma = m(\Omega)$ .

Пусть найдутся такие  $\alpha, \beta$ , что  $m(A) \leq \alpha \leq \beta \leq m(B)$  для любых клеточных множеств  $A, B, A \subset \Omega \subset B$ . Так как  $\Omega$  измеримо по Жордану, то для любого  $\varepsilon > 0$  существуют клеточные множества  $A_\varepsilon$  и  $B_\varepsilon$  такие, что  $A_\varepsilon \subset \Omega \subset B_\varepsilon$ ,  $m(B_\varepsilon) - m(A_\varepsilon) < \varepsilon$ . Тогда получим  $0 \leq \beta - \alpha \leq m(B_\varepsilon) - m(A_\varepsilon) < \varepsilon$  для любого  $\varepsilon > 0$ . Отсюда  $\beta = \alpha$ .  $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Множество  $E \subset \mathbb{R}^n$  имеет *жорданову меру нуль*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует клеточное множество  $B$ , такое, что  $E \subset B$ ,  $m(B) < \varepsilon$ .

СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА МЕРЫ НУЛЬ:

1) Множество  $E$  меры нуль измеримо по Жордану и  $m(E) = 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого  $\varepsilon > 0$  существует клеточное множество  $B$   $m(B) < \varepsilon$ . Возьмем  $A = \emptyset$ , тогда  $m(A) = 0$ ,  $A \subset E \subset B$ ,  $m(B) - m(A) = m(B) < \varepsilon$ .  $\square$

2) Объединение конечного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если  $m(E_1) = m(E_2) = 0$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существуют клеточные множества  $B_1$  и  $B_2$ , для которых  $E_1 \subset B_1$ ,  $E_2 \subset B_2$ ,  $m(B_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $m(B_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда  $B = B_1 \cup B_2$  – клеточное множество,  $E_1 \cup E_2 \subset B_1 \cup B_2$ ,  $m(B_1 \cup B_2) \leq m(B_1) + m(B_2) < \varepsilon$ . Следовательно,  $m(E_1 \cup E_2) = 0$ .  $\square$

3) Подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $E' \subset E$ ,  $m(E) = 0$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует клеточное множество  $A$  такое, что  $E \subset A$ ,  $m(A) < \varepsilon$ . Отсюда следует, что  $E' \subset A$  и  $m(E') = 0$ .  $\square$

#### 4. Критерий измеримости. Свойства измеримых множеств

ЛЕММА 4.1. Если связное множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  не содержит граничных точек множества  $B \subset \mathbb{R}^n$ , то  $(A \subset \overset{\circ}{B}) \vee (A \subset C\overline{B})$ , где  $C\overline{B} = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть лемма не верна. Тогда существуют точки  $a$  и  $b$ , такие, что  $a, b \in A$ ,  $a \in \overset{\circ}{B}$ ,  $b \in C\overline{B}$ .

Если  $A$  – связное множество, то существует непрерывная кривая  $\Gamma$ , соединяющая точки  $a, b$ , лежащая в  $A$ , заданная некоторым параметрическим уравнением

$$x = x(\tau), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta, \quad x(\alpha) = a, \quad x(\beta) = b.$$

Обозначим через  $T$  множество значений  $t$ , при которых дуга кривой

$$\Gamma_t = \{x(\tau) : \tau \in [\alpha, t]\} \subset B.$$

Так как  $\alpha \in T$ , то множество  $T \neq \emptyset$ . А так как  $T \subset [\alpha, \beta]$ , то  $T$  ограничено. Пусть  $\gamma = \sup T$ . Очевидно,  $\gamma \in [\alpha, \beta]$ . Покажем, что  $\gamma \neq \alpha$ . Так как  $a$  принадлежит открытому множеству  $\overset{\circ}{B}$ , то существует  $\varepsilon > 0$ , такое, что  $B_\varepsilon(a) \subset \overset{\circ}{B}$ . Из непрерывности функции  $x(t)$  следует, что

$$\exists \delta > 0 \quad \forall t \in [\alpha, \alpha + \delta] \quad |x(t) - a|_n = |x(t) - x(\alpha)|_n < \varepsilon.$$

Отсюда получим  $\Gamma_\delta \subset B_\varepsilon(a)$  и, значит,  $[\alpha, \alpha + \delta] \subset T$  и  $\sup T > \alpha$ .

Аналогичным образом, поскольку  $C\overline{B}$  – открытое множество, получим  $T \cap [\beta - \delta, \beta] = \emptyset$ . Следовательно,  $\sup T < \beta$ . Таким образом,  $\gamma \in (\alpha, \beta)$ . Покажем, что точка  $c = x(\gamma) \in \partial B$ .

В произвольной окрестности точки  $c$  существует точка из  $B$ , так как при любом  $t \in [\alpha, \gamma)$  кривая  $\Gamma_t \subset B$ . При  $t$  достаточно близких к  $\gamma$  точка  $x(t)$  в силу непрерывности кривой попадает в выбранную окрестность точки  $c$ . С другой стороны, в любой окрестности точки  $c$  есть точка, не принадлежащая  $B$ . Иначе при некотором  $\varepsilon > 0$  получим  $B_\varepsilon(c) \subset B$  и  $\Gamma_t \subset B_\varepsilon(c)$  для  $t \in [\gamma, \gamma + \delta]$ . Следовательно,  $[\alpha, \gamma + \delta] \subset T$  и  $\sup T \geq \gamma + \delta > \gamma$ . Получили противоречие.  $\square$

**ТЕОРЕМА 4.1** (критерий измеримости множества в  $\mathbb{R}^n$ ). *Множество  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда  $\Omega$  – ограничено и  $m(\partial\Omega) = 0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Сначала докажем необходимость условий измеримости множества. Пусть  $\Omega$  – измеримое по Жордану множество. Тогда существуют клеточные множества  $A, B$ , такие, что  $A \subset \Omega \subset B$ ,  $m(B) - m(A) < \varepsilon$ . Если  $A = \bigcup_{i=1}^p \Pi_i$ , где  $\Pi_i$  – клетки, то  $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{i=1}^p \overset{\circ}{\Pi}_i$  – открытое клеточное множество, причем  $m(\overset{\circ}{A}) = m(A)$ . Если  $B = \bigcup_{j=1}^q Q_j$ ,  $Q_j$  – клетки, то объединяя все  $Q_j$  с границами, получим замкнутое множество  $\overline{B} = \bigcup_{j=1}^q \overline{Q}_j$ , причем  $m(\overline{B}) = m(B)$ . Очевидно, что  $\overset{\circ}{A} \subset \Omega \subset \overline{B}$ . Так как  $A \subset \Omega \subset B$ , то  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\Omega}$  и  $\overset{\circ}{A} \cap \partial\Omega = \emptyset$ ,  $\overline{\Omega} \subset \overline{B}$  и  $\overline{B} \supset \partial\Omega$ . Следовательно,  $C = \overline{B} \setminus \overset{\circ}{A}$  – клеточное множество,  $\partial\Omega \subset C$ ,  $m(C) = m(\overline{B}) - m(\overset{\circ}{A}) < \varepsilon$ . В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  множество  $\partial\Omega$  имеет меру нуль. А из вложения  $\Omega \subset B$  следует ограниченность  $\Omega$ .

Докажем достаточность условий измеримости. Пусть

$\partial\Omega$  имеет жорданову меру нуль, а  $\Omega$  – ограниченное в  $\mathbb{R}^n$  множество. Возьмем клетку  $\Pi \supset \Omega$ . Для произвольного  $\varepsilon > 0$  построим клеточное множество  $C$ , такое, что  $\partial\Omega \subset C$ ,  $m(C) < \varepsilon$ . Тогда  $\Pi \setminus C$  – клеточное множество, не содержащее  $\partial\Omega$ . Поэтому существуют клетки  $\Pi_i$ , при которых  $\Pi \setminus C = \bigsqcup_{i=1}^p \Pi_i$ . Так как  $\Pi_i \cap \partial\Omega = \emptyset$ , по лемме 4.1 при каждом  $i = \overline{1, p}$  имеем

$$(\Pi_i \cap \Omega = \emptyset) \vee (\Pi_i \subset \Omega).$$

Пусть  $\Pi_1, \dots, \Pi_l \subset \Omega$ ,  $\Pi_{l+1}, \dots, \Pi_p$  не пересекаются с  $\Omega$ ,  $A = \bigsqcup_{i=1}^l \Pi_i$ ,  $B = A \cup C = \Pi \setminus \left( \bigsqcup_{i=l+1}^p \Pi_i \right)$ . По построению  $A, B$  – клеточные множества, при этом  $A \subset \Omega \subset B$  и  $m(B) - m(A) = m(C) < \varepsilon$ , следовательно,  $\Omega$  измеримо по Жордану.  $\square$

СВОЙСТВА ИЗМЕРИМЫХ ПО ЖОРДАНУ МНОЖЕСТВ:

1) Если  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  измеримы по Жордану, то  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ ,  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$  и  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  измеримы по Жордану;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4.1 множества  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  ограничены,  $m(\partial\Omega_1) = m(\partial\Omega_2) = 0$ . Тогда  $m(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) = 0$  по свойству 2 множеств меры нуль. Очевидны вложения:

$$\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2) \subset \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2,$$

$$\partial(\Omega_1 \setminus \Omega_2) \subset \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2,$$

$$\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2) \subset \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2.$$

Следовательно,

$$m(\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)) = m(\partial(\Omega_1 \setminus \Omega_2)) = m(\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)) = 0.$$

Учитывая очевидную ограниченность множеств  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ ,  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ ,  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ , получим требуемое.  $\square$

2) Если  $\Omega_i$  измеримы по Жордану,  $i = \overline{1, n}$ , то множество  $\bigcup_{i=1}^n \Omega_i$  измеримо по Жордану и выполнено неравенство

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n \Omega_i\right) \leq \sum_{i=1}^n m(\Omega_i).$$

Если  $\Omega_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , при этом попарно не пересекаются, то

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n \Omega_i\right) = \sum_{i=1}^n m(\Omega_i). \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $n = 2$ , если  $\Omega_1, \Omega_2$  измеримы по Жордану, то  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  измеримо по Жордану. По лемме 4.1 для любого  $\varepsilon > 0$  существуют клеточные множества  $B_1, B_2$ , такие, что  $\Omega_1 \subset B_1$ ,  $\Omega_2 \subset B_2$ ,  $m(B_1) - m(\Omega_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $m(B_2) - m(\Omega_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда  $B_1 \cup B_2$  – клеточное множество, содержащее  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ . По свойству 8 клеточных множеств

$$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq m(B_1 \cup B_2) \leq m(B_1) + m(B_2) < m(\Omega_1) + m(\Omega_2) + \varepsilon$$

Поэтому  $m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq m(\Omega_1) + m(\Omega_2)$ .

Пусть  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ . По лемме 4.1 существуют клеточные множества  $A_1, A_2$ , такие, что  $A_1 \subset \Omega_1$ ,  $A_2 \subset \Omega_2$ ,  $m(\Omega_1) - m(A_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $m(\Omega_2) - m(A_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Следовательно,  $A_1 \cup A_2$  – клеточное множество, содержащееся в  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ . Так как  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , то

$$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \geq m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2) \geq$$

$$m(\Omega_1) + m(\Omega_2) - \varepsilon, m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \geq m(\Omega_1) + m(\Omega_2).$$

Таким образом,  $m(\Omega_1 \cup \Omega_2) = m(\Omega_1) + m(\Omega_2)$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 4.1. Завершить доказательство, используя метод математической индукции.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Равенство (4.1) называется свойством аддитивности меры Жордана.

ПРИМЕР 4.1. Множество  $Q \cap [0, 1]$  не измеримо по Жордану в  $\mathbb{R}$ , поскольку содержит только клеточные множества, состоящие из конечного числа точек, но содержится только в клеточных множествах, содержащих весь отрезок  $[0, 1]$ .

## 5. Определение кратного интеграла Римана.

### Критерий интегрируемости. Достаточные условия интегрируемости

Пусть множества  $\Omega, \Omega_1, \dots, \Omega_N$  измеримы по Жордану в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$ . Тогда совокупность множеств  $r = \{\Omega_i : i = \overline{1, N}\}$  называется *разбиением* множества  $\Omega$ . *Диаметром* множества  $\Omega_i$  называется величина  $d(\Omega_i) = \sup_{x, y \in \Omega_i} |x - y|_n$ , а *диаметром разбиения*  $r$  – величина  $\lambda_r = \max_{i=1, N} d(\Omega_i)$ .

Отношение  $r \preceq r'$  разбиений  $r$  и  $r' = \{\Omega'_i : i = \overline{1, N'}\}$  означает, что

$$\forall i \quad \exists k \quad \Omega'_i \subset \Omega_k.$$

Мы будем говорить при этом, что разбиение  $r$  содержится в разбиении  $r'$ . Понятно, что тогда  $\lambda_r \geq \lambda_{r'}$ .

Пусть задана функция  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $r$  – разбиение  $\Omega$ . Выберем точки  $\xi_i \in \Omega_i$  для всех  $i = \overline{1, N}$ . Выражение

$$S_r = S_r(f, \xi) = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) m(\Omega_i)$$

называется *интегральной суммой Римана* функции  $f$  на множестве  $\Omega$ , соответствующей разбиению  $r$  и набору точек  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ .

Если функция  $f$  ограничена на  $\Omega$ , то для любого разбиения  $r$  определены числа  $m_i = \inf_{x \in \Omega_i} f(x)$ ,  $M_i = \sup_{x \in \Omega_i} f(x)$ .

Выражения

$$\bar{S}_r = \sum_{i=1}^N M_i m(\Omega_i), \quad \underline{S}_r = \sum_{i=1}^N m_i m(\Omega_i)$$

называются соответственно *верхней и нижней суммой Дарбу*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Конечный предел  $I = \lim_{\lambda_r \rightarrow 0} S_r(f, \xi)$ , если он существует и не зависит от выбора разбиений  $r$  и точек  $\xi_i$ , называется *кратным интегралом Римана* от функции  $f$  по множеству  $\Omega$  и обозначается через

$$I = \int_{\Omega} f(x) dx = \underbrace{\int_{\Omega} \dots \int_{\Omega}}_n f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n.$$

Другими словами, кратный интеграл  $I$  существует, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall r \quad \forall \xi \quad (\lambda_r < \delta) \Rightarrow (|I - S_r(f, \xi)| < \varepsilon).$$

В случае  $n = 2$  кратный интеграл  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$  называется *двойным интегралом*, а в случае  $n = 3$  *тройным интегралом* называется интеграл  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. При  $n = 1$  данное определение определяет более узкий класс интегрируемых функций, чем аналогичное определение, рассматриваемое в курсе анализа функций одной переменной, поскольку здесь рассматриваются разбиения более общего вида. Отсюда следует, что при  $n = 1$  неограниченная функция не интегрируема в смысле данного определения, поскольку не является интегрируемой в смысле прежнего.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Как отмечено в предыдущем замечании, при  $n = 1$  из интегрируемости следует ограниченность. При  $n \geq 2$  неограниченная функция может быть интегрируемой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Функция  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , называется *существенно неограниченной* на измеримом по Жордану множестве  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , если на любом подмножестве  $\Omega' \subset \Omega$ , таком, что  $m(\Omega \setminus \Omega') = 0$ , функция  $f$  неограничена.

УПРАЖНЕНИЕ 5.1. Доказать, что существенно неограниченная функция на измеримом по Жордану множестве  $\Omega$  не является интегрируемой на  $\Omega$ .

ПРИМЕР 5.1. Неограниченная в окрестности точки  $(2, 0)$  функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & (x, y) \in \Omega_1 = [1, 2) \times \{0\}, \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_1, \end{cases}$$

интегрируема на измеримом множестве  $\Omega = B_1(0, 0) \cup \Omega_1$ ,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = 0.$$

При этом для  $\Omega' = B_1(0, 0)$  выполняется  $m(\Omega \setminus \Omega') = m(\Omega_1) = 0$ , функция  $f$  ограничена на  $\Omega'$ , поэтому она не является существенно неограниченной на  $\Omega$ .

В дальнейшем речь пойдет только об ограниченных функциях.

ТЕОРЕМА 5.1 (критерий интегрируемости). *Ограниченная функция  $f$  интегрируема на измеримом по Жордану множестве  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall r \quad (\lambda_r < \delta) \Rightarrow (\bar{S}_r - \underline{S}_r < \varepsilon).$$

ТЕОРЕМА 5.2. *Ограниченная функция  $f$  интегрируема на измеримом по Жордану множестве  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  тогда*



и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r \quad \overline{S}_r - \underline{S}_r < \varepsilon.$$

Доказательства аналогичны случаю интеграла Римана от функции одной переменной.

**ТЕОРЕМА 5.3** (достаточные условия интегрируемости). Пусть  $\Omega$  – измеримое по Жордану в  $\mathbb{R}^n$  компактное множество, функция  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $\Omega$ . Тогда  $f$  интегрируема на  $\Omega$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Компакт в  $\mathbb{R}^n$  – ограниченное и замкнутое множество. Функция  $f$  непрерывна на компакте, поэтому по теореме Кантора является равномерно непрерывной:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x', x'' \in \Omega \quad (|x' - x''|_n < \delta) \Rightarrow$$

$$\left( |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{m(\Omega)} \right).$$

Пусть  $r = \{\Omega_i : i = \overline{1, N}\}$  – разбиение множества  $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$ ,  $\lambda_r < \delta$ . По теореме Вейерштрасса

$$\exists \xi'_i, \xi''_i \in \overline{\Omega}_i \quad f(\xi'_i) = \inf_{x \in \overline{\Omega}_i} f(x) = \inf_{x \in \Omega_i} f(x) = m_i,$$

$$f(\xi''_i) = \sup_{x \in \overline{\Omega}_i} f(x) = \sup_{x \in \Omega_i} f(x) = M_i.$$

Поэтому из равномерной непрерывности функции  $f$  и того, что

$$|\xi''_i - \xi'_i|_n \leq d(\Omega_i) \leq \lambda_r,$$

следует, что

$$M_i - m_i = f(\xi''_i) - f(\xi'_i) < \frac{\varepsilon}{m(\Omega)},$$

$$\overline{S}_r - \underline{S}_r = \sum_{i=1}^N (M_i - m_i) m(\Omega_i) < \frac{\varepsilon}{m(\Omega)} \sum_{i=1}^N m(\Omega_i) = \varepsilon.$$

По критерию интегрируемости функция  $f$  интегрируема на  $\Omega$ .  $\square$

**ТЕОРЕМА 5.4.** Пусть множество  $\Omega$  измеримо по Жордану в  $\mathbb{R}^n$ , функция  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена, множество точек разрыва функции  $f$  имеет меру нуль. Тогда  $f$  интегрируема на  $\Omega$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Сначала предположим, что  $\Omega$  – измеримое по Жордану компактное множество. Пусть  $E$  – множество точек разрыва функции  $f$ ,  $m(E) = 0$ . Для любого положительного  $\varepsilon$  существует открытое клеточное множество  $A$  такое, что  $E \subset A$ ,  $m(A) < \frac{\varepsilon}{4M}$ , где  $M = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ .

Поскольку  $\Omega \setminus A$  – замкнутое ограниченное множество, функция  $f$  непрерывна на  $\Omega \setminus A$ , то  $f$  – интегрируемая на  $\Omega \setminus A$  функция. Таким образом для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\{\Omega_2, \dots, \Omega_N\} = r'$  – разбиение  $\Omega \setminus A$ , такое, что

$$\overline{S}_{r'} - \underline{S}_{r'} = \sum_{k=2}^N (M_k - m_k) m(\Omega_k) < \frac{\varepsilon}{2},$$

где  $m_k = \inf_{x \in \Omega_k} f(x)$ ,  $M_k = \sup_{x \in \Omega_k} f(x)$ ,  $k = \overline{2, N}$ . Множество  $\Omega_1 = A \cap \Omega$  измеримо, поэтому  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$  – разбиение множества  $\Omega$ . Имеем  $m(\Omega_1) \leq m(A) < \frac{\varepsilon}{4M}$ ,

$$\overline{S}_r - \underline{S}_r = (M_1 - m_1) m(\Omega_1) + \sum_{k=2}^N (M_k - m_k) m(\Omega_k) <$$

$$2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

поэтому функция  $f$  интегрируема на множестве  $\Omega$ .

Далее, пусть множество  $\Omega$  измеримо, но не компактно. Тогда  $\Omega$  ограничено и  $m(\partial\Omega) = 0$ . Поскольку  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$  измеримы, то  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  измеримо по Жордану. Таким образом,  $\bar{\Omega}$  – измеримое компактное множество. Положим  $f(x) = 0$  для любого  $x \in \partial\Omega \setminus \Omega$  и получим ограниченную функцию  $f$  на  $\bar{\Omega}$ . Множество точек разрыва доопределенной функции лежит в  $E \cup \partial\Omega$ , т. е. имеет меру нуль. По доказанному получим, что функция  $f$  интегрируема на компакте  $\bar{\Omega}$  и, значит,  $f$  интегрируема на  $\Omega$ .  $\square$

## 6. Свойства кратного интеграла

СВОЙСТВО 1.  $\int_{\Omega} 1 dx = m(\Omega)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого разбиения  $r$  получим  $S_r = \sum_{i=1}^N m(\Omega_i) = m(\Omega)$ .  $\square$

СВОЙСТВО 2. Если  $f$  интегрируема на измеримом по Жордану множестве  $\Omega$ ,  $f(x) \geq 0$  для всех  $x \in \Omega$ , то  $\int_{\Omega} f(x) dx \geq 0$ .

СВОЙСТВО 3. Если  $f$  и  $g$  интегрируемы на измеримом множестве  $\Omega$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то  $\alpha f + \beta g$  интегрируема на  $\Omega$ , при этом

$$\int_{\Omega} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_{\Omega} f(x) dx + \beta \int_{\Omega} g(x) dx.$$

СВОЙСТВО 4. Если  $f$  и  $g$  интегрируемы на измеримом множестве  $\Omega$ ,  $f(x) \leq g(x)$  для любого  $x \in \Omega$ , то

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq \int_{\Omega} g(x) dx.$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.1. Доказать свойства 2 – 4.

СВОЙСТВО 6. Если  $m(\Omega) = 0$ , то любая функция  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема на  $\Omega$ , при этом

$$\int_{\Omega} f(x) dx = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого разбиения  $r$  выполняется

$$S_r = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) m(\Omega_i) = 0,$$

поскольку подмножества  $\Omega_i$  множества меры нуль также имеют нулевую меру.  $\square$

СВОЙСТВО 6. Если  $f$  непрерывна на измеримом связном компакте  $\Omega$ , то найдется  $\xi \in \Omega$  такое, что

$$\int_{\Omega} f(x) dx = f(\xi) m(\Omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если  $m(\Omega) = 0$ , то равенство очевидно. Пусть  $m(\Omega) > 0$ ,  $m = \min_{x \in \Omega} f$ ,  $M = \max_{x \in \Omega} f$ , которые существуют по теореме Вейрштрасса. Тогда  $m \leq f(x) \leq M$  при  $x \in \Omega$ ,

$$m \cdot m(\Omega) \leq \int_{\Omega} f(x) dx \leq M \cdot m(\Omega),$$

$$m \leq \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} f(x) dx \leq M.$$

Следовательно, найдется  $\xi \in \Omega$ , при котором

$$f(\xi) = \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} f(x) dx. \quad \square$$

СВОЙСТВО 7 (конечная аддитивность интеграла по области интегрирования). Пусть  $\{\Omega_k : k = \overline{1, m}\}$  – разбиение измеримого множества  $\Omega$ . Тогда  $f$  интегрируема на  $\Omega$  в том и только в том случае, когда  $f$  интегрируема на  $\Omega_k$  для любого  $k = \overline{1, m}$ . При этом

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} f(x) dx.$$

СВОЙСТВО 8. Произведение интегрируемых на измеримом множестве  $\Omega$  функций есть интегрируемая на  $\Omega$  функция.

СВОЙСТВО 9. Если  $f$  интегрируема на измеримом множестве  $\Omega$ , то  $|f(x)|$  интегрируема на  $\Omega$  и

$$\left| \int_{\Omega} f(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.2. Доказать свойства 7 – 9.

ЛЕММА 6.1. Пусть  $\Omega$  – измеримое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда цилиндр  $\Omega \times [0, h] =$

$$\Omega_h = \{(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) : (x^1, \dots, x^n) \in \Omega, 0 \leq x^{n+1} \leq h\}$$

является измеримым множеством в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $m(\Omega_h) = h m(\Omega)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого  $\varepsilon > 0$  существуют клеточные множества  $A, B$  в  $\mathbb{R}^n$ , для которых  $A \subset \Omega \subset B$ ,  $m(B) - m(A) < \frac{\varepsilon}{h}$ . Тогда  $A_h = A \times [0, h]$ ,  $B_h = B \times [0, h]$  – клеточные множества в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , при этом  $m(A_h) = h m(A)$ ,  $m(B_h) = h m(B)$ . Кроме того, имеем  $A_h \subset \Omega_h \subset B_h$ ,

$$m(B_h) - m(A_h) = h(m(B) - m(A)) < \varepsilon,$$

что означает измеримость  $\Omega_h$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Имеем  $m(A_h) \leq m(\Omega_h) \leq m(B_h)$ , следовательно,  $hm(A) \leq m(\Omega_h) \leq hm(B)$ . Таким образом,

$$|m(\Omega_h) - hm(\Omega)| \leq h(m(B) - m(A)) < \varepsilon$$

для любого  $\varepsilon > 0$ . Следовательно,  $m(\Omega_h) = hm(\Omega)$ .  $\square$

**ТЕОРЕМА 6.1.** Пусть множество  $\Omega$  измеримо в  $\mathbb{R}^n$ , функция  $f$  ограничена и интегрируема на  $\Omega$ . Тогда график функции  $f$  имеет в  $\mathbb{R}^{n+1}$  жорданову меру нуль.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое разбиение  $r = \{\Omega_i : i = \overline{1, N}\}$  множества  $\Omega$ , что

$$\overline{S}_r - \underline{S}_r = \sum_{i=1}^N (M_i - m_i) m(\Omega_i) < \varepsilon,$$

где  $M_i = \sup_{x \in \Omega_i} f(x)$ ,  $m_i = \inf_{x \in \Omega_i} f(x)$ . Обозначим через

$$\Omega_i^M = \Omega_i \times [0, M_i], \quad \Omega_i^m = \Omega_i \times [0, m_i], \quad i = \overline{1, N},$$

измеримые по лемме 6.1 множества. Тогда множество

$$A = \bigcup_{i=1}^N (\Omega_i^M \setminus \Omega_i^m)$$

также измеримо, при этом в нем лежит график функции

$$\text{graf}(f) = \{(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x^{n+1} = f(x^1, \dots, x^n)\},$$

$$m(A) = \sum_{i=1}^N (m(\Omega_i^M) - m(\Omega_i^m)) =$$

$$\sum_{i=1}^N (M_i m(\Omega_i) - m_i m(\Omega_i)) = \sum_{i=1}^N (M_i - m_i) m(\Omega_i) < \varepsilon$$

для любого  $\varepsilon > 0$ . Таким образом,  $m(\text{graf}(f)) = 0$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 6.1.** Если функция  $f$  непрерывна на измеримом компакте в  $\mathbb{R}^n$ , то её график в  $\mathbb{R}^{n+1}$  имеет жорданову меру нуль. Если граница области состоит из объединения конечного числа таких графиков, то область измерима по Жордану.

## 7. Сведение двойного интеграла по прямоугольнику к повторному интегралу

**ТЕОРЕМА 7.1.** Пусть функция  $f(x, y)$  интегрируема в прямоугольнике  $\Pi = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  и для любого  $x \in [a, b]$  существует  $\int_c^d f(x, y) dy$ . Тогда  $\int_c^d f(x, y) dy$  — интегрируемая функция от  $x$  на  $[a, b]$  и

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмем точки

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b, \quad y_0 = c < y_1 < \dots < y_m = d,$$

обозначим

$$\pi_1 = [x_0, x_1], \quad \pi_i = (x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{2, n},$$

$$\pi'_1 = [y_0, y_1], \quad \pi'_j = (y_{j-1}, y_j], \quad j = \overline{2, m},$$

$$\Pi_{ij} = \pi_i \times \pi'_j, \quad \Pi = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \Pi_{ij},$$

$$M_{ij} = \sup_{(x,y) \in \Pi_{ij}} f(x, y), \quad m_{ij} = \inf_{(x,y) \in \Pi_{ij}} f(x, y).$$

По условию теоремы существует  $\int_c^d f(x, y) dy$  для любого  $x \in [a, b]$ , следовательно, для любого  $x \in \pi_i$

$$m_{ij} \Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \leq M_{ij} \Delta y_j, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1},$$

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \leq \int_c^d f(x, y) dy \leq \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta y_j. \quad (7.1)$$

Обозначим

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad M_i = \sup_{x \in \pi_i} F(x),$$

$$m_i = \inf_{x \in \pi_i} F(x), \quad i = \overline{1, n}.$$

Из (7.1) следует, что  $\sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \leq m_i \leq M_i \leq \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta y_j$ ,  
тогда

$$0 \leq M_i - m_i \leq \sum_{j=1}^m (M_{ij} - m_{ij}) \Delta y_j, \quad i = \overline{1, n}.$$

Умножим  $i$ -е неравенство на  $\Delta x_i$  и, просуммировав по  $i$ , получим

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \leq$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{ij} - m_{ij}) m(\Pi_{ij}) = \bar{S}_r - \underline{S}_r \rightarrow 0$$



при  $\lambda_r \rightarrow 0$ , так как  $f$  интегрируема на  $\Pi$ . Здесь разбиение  $r$  имеет вид

$$r = \{\Pi_{ij} : i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}.$$

Следовательно,  $\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \rightarrow 0$  при  $\max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i| \rightarrow 0$ , поэтому функция  $F$  интегрируема на  $[a, b]$ , т. е. существует

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b dx \int_c^b f(x, y) dy.$$

Интегрируя неравенство (7.1), получим

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_c^d f(x, y) dy \leq \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j.$$

Просуммируем неравенства по  $i$ , тогда

$$\underline{S}_r \leq \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \leq \overline{S}_r.$$

В то же время имеем

$$\underline{S}_r \leq \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy \leq \overline{S}_r,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall r \quad (\lambda_r < \delta) \Rightarrow (\overline{S}_r - \underline{S}_r < \varepsilon).$$

Отсюда следует, что

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad \square$$

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть  $\Pi = [a, b] \times [c, d]$ , существует интеграл  $\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy$ , для любого  $x \in [a, b]$  существует

$\int_c^d f(x, y) dy$ , для любого  $y \in [c, d]$  существует  $\int_a^b f(x, y) dx$ .  
Тогда

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (7.2)$$

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Пусть  $f(x, y)$  непрерывна в  $\Pi = [a, b] \times [c, d]$ . Тогда справедливы равенства (7.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях следствия 7.2 выполняются предположения следствия 7.1.

СЛЕДСТВИЕ 7.3. Пусть  $f(x, y)$  непрерывна в  $\Pi = [a, b] \times [c, d]$ , а  $\phi(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ . Тогда

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi} \phi(x) f(x, y) dx dy = \\ \int_a^b dx \int_c^d \phi(x) f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b \phi(x) f(x, y) dx. \end{aligned} \quad (7.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что  $\phi$  интегрируема в  $\Pi$ . Так как  $\phi$  интегрируема на  $[a, b]$ , то для любого положительного  $\varepsilon$  существует такое разбиение отрезка  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , что

$$\sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{d - c},$$

где  $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \phi(x)$ ,  $m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \phi(x)$ ,  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ ,  $M_n = \sup_{x \in [x_{n-1}, x_n]} \phi(x)$ ,  $m_n = \inf_{x \in [x_{n-1}, x_n]} \phi(x)$ ,

$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ . Рассмотрим разбиение  $r = \{\Pi_i : i = \overline{1, n}\}$  прямоугольника  $\Pi$ , где  $\Pi_i = [x_{i-1}, x_i] \times [c, d]$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $\Pi_n = [x_{n-1}, b] \times [c, d]$ . Имеем  $\sup_{(x,y) \in \Pi_k} \phi(x) = M_k$ ,  $\inf_{(x,y) \in \Pi_k} \phi(x) = m_k$ . Следовательно,

$$\bar{S}_r - \underline{S}_r = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k (d - c) < \varepsilon.$$

Поэтому по теореме 5.2 функция  $\phi$  интегрируема на множестве  $\Pi$ , а следовательно, и функция  $\phi(x)f(x, y)$  интегрируема на  $\Pi$ .

Так как  $f(x, y)$  непрерывна в  $\Pi$ , то для любого  $y \in [c, d]$  эта функция непрерывна на  $[a, b]$ . Таким образом, для любого  $y \in [c, d]$  функция  $\phi(x)f(x, y)$  интегрируема на  $[a, b]$ .

Аналогично, для любого  $x \in [a, b]$  существует  $\int_c^d \phi(x)f(x, y)dy$ , так как  $\phi(x)f(x, y)$  непрерывна по  $y$  на  $[c, d]$ . Тогда по следствию 7.1 имеют место равенства (7.3).  $\square$

## 8. Сведение кратного интеграла по элементарной области к повторному интегралу

Пусть функции  $\phi$  и  $\psi$  непрерывны на  $[a, b]$  и для всех  $x \in [a, b]$  выполняется неравенство  $\phi(x) \leq \psi(x)$ . Множество  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  называется *элементарной областью относительно оси  $y$* . Граница  $\partial\Omega$  состоит из графиков непрерывных на отрезке функций, поэтому множество  $\Omega$  измеримо по Жордану.

**ТЕОРЕМА 8.1.** Пусть  $\Omega$  – элементарная область относительно оси  $y$ , функция  $f(x, y)$  интегрируема в  $\Omega$  и для

любого  $x \in [a, b]$  существует  $\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$ . Тогда

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $c = \min_{x \in [a, b]} \phi(x)$ ,  $d = \max_{x \in [a, b]} \psi(x)$ , тогда  $\Omega \subset \Pi = [a, b] \times [c, d]$ . Рассмотрим функцию

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ 0, & (x, y) \in \Pi \setminus \Omega. \end{cases}$$

В силу условий теоремы  $F$  интегрируема на  $\Omega$  и на  $\Pi \setminus \Omega$ , поэтому существует  $\iint_{\Pi} F(x, y) dx dy$ . Для любого  $x \in [a, b]$  су-

ществуют  $\int_c^{\phi(x)} F(x, y) dy = 0$ ,  $\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} F(x, y) dy$ ,  $\int_{\psi(x)}^d F(x, y) dy = 0$ , следовательно, для любого  $x \in [a, b]$  существует интеграл  $\int_c^d F(x, y) dy$ . По теореме 7.1

$$\iint_{\Pi} F(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy,$$

что и требовалось.  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 8.1. Пусть  $\Omega$  – элементарная область относительно оси  $y$ , функция  $f(x, y)$  непрерывна в  $\Omega$ . Тогда

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

ПРИМЕР 8.1. Пусть область  $\Omega$  лежит внутри окружности  $x^2 + y^2 = 4$ , но вне окружности  $x^2 - 2x + y^2 = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \\ &+ \int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Элементарной областью относительно оси  $x$  называется множество вида

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\},$$

где  $\alpha, \beta$  – непрерывные на отрезке  $[c, d]$  функции, причем  $\alpha(y) \leq \beta(y)$  для всех  $y \in [c, d]$ . Тогда, поменяв  $x$  и  $y$  ролями, в условиях теоремы 8.1 получим равенство

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx.$$

Если область  $\Omega$  элементарна относительно осей  $x$  и  $y$ , то

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx.$$

ПРИМЕР 8.2. Пусть  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \frac{\pi}{2}], y \in [0, x]\}$ , тогда

$$\iint_{\Omega} \frac{\sin x}{x} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Область  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  элементарна относительно оси  $x^{n+1}$ , если

$$\Omega = \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} :$$

$$(x^1, \dots, x^n) \in G \subset \mathbb{R}^n, \phi(x^1, \dots, x^n) \leq x^{n+1} \leq \psi(x^1, \dots, x^n)\},$$

где  $G$  замкнутая ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\phi, \psi \in C(G)$ .

Приведем формулировку простейшего аналога теоремы 8.1 для случая функции  $n$  переменных.

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть функция  $f(x^1, \dots, x^n)$  непрерывна в элементарной относительно оси  $x^{n+1}$  области  $\Omega$ . Тогда

$$\int_{\Omega} \cdots \int f(x^1, \dots, x^{n+1}) dx^1 \dots dx^{n+1} =$$

$$\int_G \cdots \int dx^1 \dots dx^n \int_{\phi(x^1, \dots, x^n)}^{\psi(x^1, \dots, x^n)} f(x^1, \dots, x^{n+1}) dx^{n+1}.$$

## 9. Формула замены переменных в кратном интеграле

Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $F : \Omega \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F$  – диффеоморфизм, т. е. непрерывно дифференцируемая биекция, для которой отображение  $F^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$  также непрерывно дифференцируемо. Отображение  $F$  имеет вид

$$\begin{aligned} x^1 &= F^1(u^1, \dots, u^n), \\ &\dots\dots\dots \\ x^n &= F^n(u^1, \dots, u^n). \end{aligned}$$

Пусть выполнены следующие условия:

- 1) производные  $\frac{\partial F^i}{\partial u^j}$  ограничены в  $\Omega$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ;
- 2) производные  $\frac{\partial F^i}{\partial u^j}$  равномерно непрерывны в  $\Omega$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ;
- 3)  $\exists \alpha > 0 \quad \forall u \in \Omega \quad \det J_F(u) \geq \alpha > 0$ .

Из условий 1) – 3) получим следующие свойства отображения  $F$ .

1. Если  $\Gamma \subset \Omega$  непрерывно дифференцируемая кривая, то в силу свойств сложной функции  $\Gamma' = F(\Gamma)$  – непрерывно дифференцируемая кривая.

2. Если  $\Omega$  – область, то  $\Omega' = F(\Omega)$  – область и  $F(\partial\Omega) = \partial\Omega'$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Имеем  $\Omega = F^{-1}(\Omega')$ . Так как  $F^{-1}$  непрерывна, то  $\Omega'$  – открыто. Поскольку  $\Omega' \subset F(\overline{\Omega})$ , а последнее множество является непрерывным образом компакта, то  $\Omega'$  – ограничено. Далее, по определению граничной точки множества  $\Omega$

$$\forall x \in \partial\Omega \quad (O_x \cap \Omega \neq \emptyset) \wedge (O_x \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \neq \emptyset).$$

В силу непрерывности  $F$  имеем  $F(O_x) = O_{F(x)}$  – множество, пересекающееся и с  $\Omega'$  и с его дополнением. Поэтому  $F(x) \in \partial\Omega'$  и  $F[\partial\Omega] \subset \partial\Omega'$ . Обратное включение  $F[\partial\Omega] \supset \partial\Omega'$  доказывается аналогично с использованием непрерывности  $F^{-1}$ .  $\square$

**ЛЕММА 9.1** (о геометрическом смысле якобиана).

Пусть  $h > 0$ ,  $\Pi = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in (u_0, u_0 + h), v \in (v_0, v_0 + h)\}$  – открытый квадрат, лежащий в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  – биекция множества  $\Omega$  на  $\Omega'$ , удовлетворяющая условиям 1) – 3). Тогда множество  $\Pi' = F(\Pi)$  измеримо по Жордану и

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall h \in (0, \delta) \quad \forall (u_0, v_0) \in \Omega$$

$$((u_0, u_0 + h) \times (v_0, v_0 + h) \subset \Omega) \Rightarrow$$

$$\left( \left| \frac{m(\Pi')}{h^2} - \det J_F(u_0, v_0) \right| < \varepsilon \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что  $\Pi' = F(\Pi)$  – измеримая область. Стороны квадрата  $\Pi$  – отрезки, т. е. гладкие кривые. Следовательно, их образы при отображении  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  будут гладкими кривыми. Поскольку образ границы есть граница образа по свойству 2, то  $\partial\Pi'$  есть кусочно гладкая кривая и  $m(\partial\Pi') = 0$ . Отсюда по теореме 4.1  $\Pi'$  – измеримая область, которую в дальнейшем будем называть криволинейным параллелограммом.

Далее, вместо вектор-функции  $F$  будем рассматривать близкую к ней в некотором смысле вектор-функцию  $\tilde{F}$ . Построим ее следующим образом: для точек  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , достаточно близких к точке  $(u_0, v_0)$ , возьмем разложение в ряд Тейлора функций  $F^1(u, v)$  и  $F^2(u, v)$  в точке  $(u_0, v_0)$ , которые образуют отображение  $F(u, v) = (F^1(u, v), F^2(u, v))$ . Поскольку  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , возьмем первые два члена ряда Тейлора. Обозначим

$$\begin{aligned} x_0 &= F^1(u_0, v_0), & y_0 &= F^2(u_0, v_0), & a_{11} &= \frac{\partial F^1}{\partial u}(u_0, v_0), \\ a_{12} &= \frac{\partial F^1}{\partial v}(u_0, v_0), & a_{21} &= \frac{\partial F^2}{\partial u}(u_0, v_0), & a_{22} &= \frac{\partial F^2}{\partial v}(u_0, v_0). \end{aligned} \quad (9.1)$$

и построим  $\tilde{F}$ :

$$x = \tilde{F}^1(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0),$$

$$y = \tilde{F}^2(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0).$$

Построенное таким образом отображение  $\tilde{F}$  является аффинным. Как известно из аналитической геометрии, образ квадрата при аффинном отображении есть параллелограмм  $\tilde{\Pi} = \tilde{F}(\Pi)$ , при этом

$$m(\tilde{\Pi}) = m(\Pi) \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = h^2 \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$



В силу (9.1) получим

$$\frac{m(\tilde{\Pi})}{h^2} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det J_F(u_0, v_0).$$

Так как  $|F(u, v) - \tilde{F}(u, v)|_2 = \tilde{o}(\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2})$ , то  $m(\Pi')$  отличается от  $m(\tilde{\Pi})$  на  $\tilde{o}(h^2)$  при  $h \rightarrow 0+$  равномерно по точкам  $(u_0, v_0)$ .

Доказательство легко обобщается на случай  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**ТЕОРЕМА 9.1** (формула замены переменной в кратном интеграле). Пусть  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  – биекция, удовлетворяющая условиям 1) – 3), области  $\Omega$  и  $\Omega' = F(\Omega)$  измеримы в  $\mathbb{R}^n$  и функция  $f \in C(\overline{\Omega'}, \mathbb{R})$ . Тогда справедлива формула замены переменной в кратном интеграле:

$$\int_{\Omega'} f(x) dx = \int_{\Omega} f \circ F(u) \det J_F(u) du. \quad (9.2)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** проведем в четыре этапа.

I. Существование интегралов следует из теоремы 5.4. Действительно,  $F^1(u), \dots, F^n(u)$  и их частные производные первого порядка непрерывны и ограничены в измеримой области  $\Omega'$ , функция  $f(x)$  непрерывна и ограничена в измеримой области  $\Omega$ , следовательно, функция  $f \circ F(u) \det J_F(u)$  непрерывна и ограничена в измеримой области  $\Omega$ .

II. Найдется такое число  $c > 0$ , что для любого измеримого множества  $\Omega_1 \subset \Omega$  выполнено неравенство  $d(F(\Omega_1)) < c d(\Omega_1)$ , где  $d(\Omega_1)$  – диаметр множества  $\Omega_1$ . Доказательство этого факта мы опустим. Отметим лишь, что доказательство опирается только на непрерывность и ограниченность в области  $\Omega$  функций  $F^1(u), \dots, F^n(u)$  и их частных производных первого порядка, поэтому указанное неравенство выполняется и для небиективного отображения  $F$  или когда его якобиан может обращаться в нуль.

III. Докажем, что для произвольного положительного числа  $\varepsilon$  найдется клеточное множество  $K \subset \Omega$  такое, что

$$m(\Omega \setminus K) < 2\varepsilon, \quad m(\Omega' \setminus K') < 16c^2\varepsilon,$$

где  $\Omega' = F(\Omega)$ ,  $K' = F(K)$ ,  $c > 0$ . Для простоты будем считать, что  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Так как область  $\Omega$  измерима по Жордану, то она ограничена и  $m(\partial\Omega) = 0$ .

Пусть  $\Pi$  – замкнутый квадрат и  $\Omega \subset \Pi$ . Разобьем стороны на равные части длины  $h$ . Тогда  $\Pi$  разобьется на квадратные клетки площади  $h^2$ . Возьмем  $\Pi_1, \dots, \Pi_N$  – квадраты, имеющие непустое пересечение с  $\partial\Omega$ , тогда  $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N \Pi_i$ .

В силу того, что  $m(\partial\Omega) = 0$ , имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall h \in (0, \delta) \quad \sum_{i=1}^N m(\Pi_i) < \varepsilon.$$

Построим для каждой клетки  $\Pi_i$  такую открытую квадратную клетку  $Q_i$ , что  $\Pi_i \subset Q_i$  и  $m(Q_i) < m(\Pi_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Тогда  $Q = \bigcup_{i=1}^N Q_i$  – открытое клеточное множество и в силу свойств клеток,

$$m(Q) \leq \sum_{i=1}^N m(Q_i) < \sum_{i=1}^N m(\Pi_i) + \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Так как  $\Pi$  – замкнутый квадрат, а  $Q$  – открытое клеточное множество, то  $\Pi \setminus Q$  – замкнутое клеточное множество. Поскольку это множество не содержит граничных точек множества  $\Omega$ , то  $\Pi \setminus Q = K \cup \tilde{K}$ , где  $K$  и  $\tilde{K}$  такие клеточные множества, что  $K \subset \Omega$ , а  $\tilde{K} \cap \overline{\Omega} = \emptyset$ . Так как множество  $K \cup \tilde{K}$  замкнуто и  $K \cap \tilde{K} = \emptyset$ , то нетрудно показать, что множества  $K$  и  $\tilde{K}$  замкнуты. Поскольку  $\Omega \subset (\Pi \setminus \tilde{K}) \subset (K \cup Q)$ , то  $(\Omega \setminus K) \subset Q$  и  $m(\Omega \setminus K) \leq m(Q) < 2\varepsilon$ .

Оценим меру  $m(\Omega' \setminus K')$ . Пусть  $K = \bigcup_{i=1}^N K_i$ , где  $K_i$  – клетки. В силу леммы 9.1 множества  $K'_i$  измеримы и поэтому множества  $K' = \bigcup_{i=1}^N K'_i$  и  $\Omega' \setminus K'$  измеримы.

Пусть  $\Omega_i = Q_i \cap \Omega$ ,  $\Omega'_i = F(\Omega_i)$ , тогда  $\Omega \setminus K = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$ , а  $\Omega' \setminus K' = \bigcup_{i=1}^N \Omega'_i$ . Воспользуемся результатом пункта II и заключим множество  $\Omega'_i$  в квадратную клетку со стороной длины  $2c \cdot d(Q_i)$ . Обозначим эту клетку через  $\tilde{Q}_i$ . Тогда множество  $\Omega' \setminus K'$  покрывается объединением клеток  $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_N$ . Поэтому

$$\begin{aligned} m(\Omega' \setminus K') &\leq \sum_{i=1}^N m(\tilde{Q}_i) \leq 4c^2 \sum_{i=1}^N (d(Q_i))^2 = \\ &= 8c^2 \sum_{i=1}^N m(Q_i) < 16c^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что для квадратных клеток  $Q_i$  выполняется  $(d(Q_i))^2 = 2m(Q_i)$ .

IV. Из ограниченности подынтегральных функций в формуле (9.2) и результата III пункта доказательства следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое замкнутое клеточное множество  $K_\varepsilon \subset \Omega$ , что

$$\left| \int_{\Omega' \setminus K'_\varepsilon} f(x) dx \right| < \varepsilon, \quad \left| \int_{\Omega \setminus K_\varepsilon} f(F^1(u), \dots, F^n(u)) \det J_F(u) du \right| < \varepsilon.$$

Поэтому достаточно показать, что для любого замкнутого клеточного множества  $K \subset \Omega$  выполняется

$$\int_{K'} f(x) dx = \int_K f(F^1(u), \dots, F^n(u)) \det J_F(u) du. \quad (9.3)$$

Понятно, что граница множества  $\partial\Omega$  – ограниченное и замкнутое множество. Так как компакт  $K$  лежит в открытом множестве  $\Omega$ , то  $\partial\Omega \cap K = \emptyset$ . Поэтому  $\delta = d(K, \partial\Omega) = \inf_{u \in K, v \in \partial\Omega} |u - v|_n > 0$ . Если  $K = \bigcup_{i=1}^N K_i$ , где  $K_i$  – прямоугольники, то можно построить такие прямоугольники  $\tilde{K}_i \subset K_i$ , что длины их сторон рациональны, а мера  $\tilde{K} = \bigcup_{i=1}^N \tilde{K}_i$  сколь угодно близка к  $m(K)$ . Следовательно, без ограничения общности можно считать, что клеточное множество  $K$  может быть разбито на такие квадратные клетки  $\Pi_1, \dots, \Pi_N$ , что  $\max_{1 \leq i \leq N} d(\Pi_i) = h < \delta$ . Тогда все клетки  $\Pi_i$  лежат внутри области  $\Omega$  и из леммы 9.1 следует, что

$$|m(\Pi'_i) - m(\Pi_i) \det J_F(u_i, v_i)| \leq \alpha(h) m(\Pi_i),$$

где  $\alpha(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0+$ ,  $i = \overline{1, N}$ . При этом  $(u_i, v_i)$  – нижняя левая точка квадрата  $\Pi_i$ .

Рассматривая интеграл как предел интегральной суммы, получаем при  $n = 2$

$$\begin{aligned} \iint_{K'} f(x, y) dx dy &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(F^1(u_i, v_i), F^2(u_i, v_i)) m(\Pi'_i) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(F^1(u_i, v_i), F^2(u_i, v_i)) \det J(u_i, v_i) m(\Pi_i) + \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(F^1(u_i, v_i), F^2(u_i, v_i)) (m(\Pi'_i) - m(\Pi_i) \det J(u_i, v_i)). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Последний предел равен нулю, поскольку  $|f(x)| < M$  для  $x \in \bar{\Omega}$  и поэтому

$$\left| \sum_{i=1}^N f(F^1(u_i, v_i), F^2(u_i, v_i)) (m(\Pi'_i) - m(\Pi_i) \det J(u_i, v_i)) \right| \leq$$

$$M\alpha(h) \sum_{i=1}^N m(\Pi_i) \leq Mm(\Omega)\alpha(h) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0+.$$

Предел (9.4) при этом равен интегралу

$$\iint_K f(F_1(u, v), F_2(u, v)) \det J_F(u, v) du dv,$$

что доказывает справедливость формулы (9.3).

В случае  $n > 2$  рассуждения аналогичны.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 9.1.** Нарушение условия биективности отображения  $F$  на множестве меры нуль и обращение якобиана  $J_F$  в нуль на множестве меры нуль не влияет на справедливость утверждения теоремы 9.1.

## 10. Несобственные кратные интегралы

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1.** Пусть  $\Omega$  – область в  $\mathbb{R}^n$ . Последовательность открытых измеримых по Жордану в  $\mathbb{R}^n$  множеств  $\{\Omega_k\}$  называется *последовательностью, исчерпывающей множество  $\Omega$* , если  $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ ,  $\overline{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**ЛЕММА 10.1.** Если  $\{\Omega_k\}$  и  $\{\Omega'_m\}$  – последовательности, исчерпывающие  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , то

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists m(k) \quad \overline{\Omega}_k \subset \Omega'_{m(k)}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим противное. Пусть существует такой номер  $k_0$ , что для всех  $m \in \mathbb{N}$  множество  $\overline{\Omega}_{k_0}$  не лежит в  $\Omega'_m$ . Тогда при любом  $m \in \mathbb{N}$  найдется  $x_m \in \overline{\Omega}_{k_0} \setminus \Omega'_m$ . Поскольку множество  $\overline{\Omega}_{k_0}$  измеримо, оно ограничено. Следовательно, из ограниченной последовательности  $\{x_m\} \subset \overline{\Omega}_{k_0}$  по теореме Больцано – Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Обозначим

подпоследовательность так же, как исходную последовательность, а ее предел через  $x_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$ . Следовательно,  $x_0 \in \overline{\Omega}_{k_0} \subset \Omega_{k_0+1} \subset \Omega$ .

Поскольку последовательность  $\{\Omega'_m\}$  исчерпывает множество  $\Omega$ , найдется такое  $m_0 \in \mathbb{N}$ , что  $x_0$  принадлежит открытому множеству  $\Omega'_{m_0}$ , которое является окрестностью точки  $x_0$  и поэтому содержит бесконечное множество членов последовательности  $\{x_m\}$ . Следовательно, найдется в этом бесконечном множестве точка  $x_s$ , номер которой  $s \geq m_0$ . Тогда  $x_s \in \Omega'_{m_0} \subset \Omega'_s$ . Но по построению  $x_s \notin \Omega'_s$ .

Полученное противоречие доказывает, что для любого  $k$  существует такой номер  $m(k)$ , что  $\Omega_k \subset \Omega'_{m(k)}$ .  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2.** Пусть  $\Omega$  – область в  $\mathbb{R}^n$ , функция  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и неотрицательна,  $\{\Omega_k\}$  – последовательность, исчерпывающая, множество  $\Omega$ . *Несобственным интегралом* от функции  $f$  по множеству  $\Omega$  называется величина

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} f(x) dx. \quad (10.1)$$

Будем говорить, что интеграл  $\int_{\Omega} f(x) dx$  *сходится*, если предел (10.1) конечен, и что интеграл *расходится*, если этот предел равен  $+\infty$ .

**ТЕОРЕМА 10.1.** *Определение несобственного интеграла от непрерывной неотрицательной в области  $\Omega$  функции  $f$  корректно: предел (10.1) для любой исчерпывающей области  $\Omega$  последовательности  $\{\Omega_n\}$  существует и не зависит от выбора исчерпывающей последовательности.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\{\Omega_k\}$  и  $\{\Omega'_m\}$  – две исчерпывающие последовательности. Так как  $\overline{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1} \subset \Omega$  и  $\overline{\Omega}'_m \subset \Omega'_{m+1} \subset \Omega$ , а на множестве  $\Omega$  функция  $f$  неотрицательна и непрерывна, то  $f$  неотрицательна и непрерывна на любых множествах  $\overline{\Omega}_k$  и  $\overline{\Omega}'_m$ ,  $k, m \in \mathbb{N}$ , которые являются

компактами в силу замкнутости и измеримости, а значит, ограниченности. Поэтому интегралы  $\int_{\Omega_k} f(x) dx$  и  $\int_{\Omega'_m} f(x) dx$  существуют и числовые последовательности  $\alpha_k = \int_{\Omega_k} f(x) dx$  и  $\beta_m = \int_{\Omega'_m} f(x) dx$  будут монотонно неубывающими. Монотонно неубывающая числовая последовательность всегда имеет конечный или бесконечный предел. Пусть  $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k$  и  $\beta = \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m$ .

В силу леммы 10.1 для любого  $k \in \mathbb{N}$  найдется такой номер  $m(k)$ , что  $\Omega_k \subset \Omega'_{m(k)}$ . Так как  $f(x) \geq 0$  при  $x \in \Omega$ , то

$$\alpha_k = \int_{\Omega_k} f(x) dx \leq \int_{\Omega'_{m(k)}} f(x) dx = \beta_{m(k)} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = \beta.$$

Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , получаем, что  $\alpha \leq \beta$ . Аналогично доказывается, что  $\beta \leq \alpha$ . Поэтому  $\alpha = \beta$ .  $\square$

ПРИМЕР 10.1. Покажем, что несобственный интеграл

$$\iint_{0 < x^2 + y^2 < R^2} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

сходится при  $\alpha < 1$  и расходится при  $\alpha \geq 1$ . Положим

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < R^2\},$$

$$\Omega_k = \left\{ (x, y) : \frac{R^2}{k^2} < x^2 + y^2 < R^2 \right\}.$$

Тогда последовательность колец  $\Omega_k$  образует исчерпывающую последовательность для круга  $\Omega$ . Переходя к полярным координатам, получим

$$I = \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_k} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}.$$

Сделаем замену

$$\begin{aligned}x &= F^1(r, \phi) = r \cos \phi, \\y &= F^2(r, \phi) = r \sin \phi,\end{aligned}$$

для которой нетрудно посчитать якобиан  $J_F(r, \phi) = r$ . Тогда

$$I = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{R/k}^R \frac{r dr}{r^{2\alpha}} = 2\pi \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{R/k}^R \frac{dr}{r^{2\alpha-1}} = 2\pi \int_0^R \frac{dr}{r^{2\alpha-1}}.$$

Таким образом, исходный несобственный интеграл сходится в том и только в том случае, когда сходится несобственный интеграл  $\int_0^R \frac{dr}{r^{2\alpha-1}}$ , т. е. при  $2\alpha - 1 < 1$  или  $\alpha < 1$ .

УПРАЖНЕНИЕ 10.1. Показать, что несобственный интеграл

$$\iint_{1 < x^2 + y^2} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.3. Пусть функция  $f$  непрерывна в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Функция  $f$  интегрируема по области  $\Omega$  в несобственном смысле, если сходятся интегралы

$$\int_{\Omega} f^+(x) dx, \quad \int_{\Omega} f^-(x) dx,$$

где  $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ ,  $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ . Несобственным интегралом от функции  $f$  по  $\Omega$  называется число

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} f^+(x) dx - \int_{\Omega} f^-(x) dx.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.1. В определении 10.3 используется очевидное равенство  $f = f^+ - f^-$ .



ЗАМЕЧАНИЕ 10.2. В случае  $n = 1$  данное понятие несобственного интеграла не эквивалентно понятию несобственного интеграла, вводимому обычно в курсе анализа функций одной переменной. Определение 10.3, в частности, не допускает понятия условной сходимости интеграла. Если в смысле этого определения сходится интеграл от функции  $f$  по области  $\Omega$ , то, очевидно, сходится и интеграл от  $|f|$ . Действительно,

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx = \int_{\Omega} f^+(x) dx + \int_{\Omega} f^-(x) dx.$$

Поэтому, скажем, условно сходящийся интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$  не сходится в смысле определения 10.3. Если же интеграл сходится по определению 10.3, то он будет сходящимся и в смысле прежнего определения. Объясняется это тем, что определение 10.3 требует существование предела интегралов по более общим последовательностям исчерпывающих множеств, чем в определении из курса анализа функций одной переменной.

**Библиографический список**

1. *Демидович, Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – Санкт-Петербург : МИФРИЛ, 1995. – 527 с.
2. *Зорич, В.А.* Математический анализ / В.А. Зорич: в 2 т. – М.: Наука, 1981. – 1185 с.
3. *Кудрявцев, Л.Д.* Математический анализ / Л.Д. Кудрявцев: в 2 т. – М.: Высш. шк., 1988. – 1287 с.
4. *Кудрявцев, Л.Д.* Сборник задач по математическому анализу / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. – М.: Физматлит, 1995. – 496 с.
5. *Ляшко, И.И.* Математический анализ в примерах и задачах / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Г.П. Головач: т. 2. – Киев : Выща шк., 1977. – 672 с.
6. *Никольский, С.М.* Курс математического анализа / С.М. Никольский: в 2 т. – М.: Наука, 1983. – 912 с.
7. *Свиридюк, Г.А.* Математический анализ. Ч. II / Г.А. Свиридюк, Г.А. Кузнецов. – Челябинск: ЧелГУ, 2000. – 179 с.
8. *Свиридюк, Г.А.* Математический анализ. Ч. I / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров. – Челябинск: ЧелГУ, 1999. – 201 с.
9. *Тер-Крикоров, А.М.* Курс математического анализа / А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1988. – 816 с.
10. *Ушаков, В.И.* Функции многих переменных. Предел, непрерывность, дифференцируемость / В.И. Ушаков, А.В. Кунгурцева, Г.А. Кузнецов. – Челябинск: ЧелГУ, 1997. – 28 с.
11. *Фихтенгольц, Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц: в 3 т. – М.: Наука, 1969. – 1468 с.

Учебное издание

Марина Васильевна Плеханова  
Владимир Евгеньевич Федоров

АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Редактор О.С. Савельева

ISBN

Издательство ЧГПУ

454080 г. Челябинск, пр. Ленина, 69

Объем 5,27 уч.-изд. л.      Подписано в печать      .

Тираж 100 экз.      Бумага офсетная.

Формат 60×84\16.      Заказ №      .

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии  
ЧГПУ. 454080 г. Челябинск, пр. Ленина, 69.