

Билеты к зачёту по курсу «Комплексный анализ».

Билет №1.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Корень -й степени из комплексного числа.
2. Сформулировать теорему Коши для треугольных областей.
3. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z}$$

в области $D = \{0 < |z| < 1\}$ и $D_2 = \{|z| > 1\}$.

Билет №2.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Логарифмическая функция.
2. Записать формулу вычисления вычета для кратного полюса.
3. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z^3} dz .$$

Билет №3.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Теорема о сходимости последовательности комплексных чисел.
2. Сформулировать теорему Лорана.
3. Показать, что $u = \sin x \sinh y$ и $v = \cos x \cosh y$ удовлетворяют условиям Коши-Римана. Как можно восстановить формулу $f(z)$, если $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$?

Билет №4.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Дифференцируемые функции комплексного переменного.
2. Сформулировать интегральную формулу Коши.
3. Ряд Лорана функции $f(z)$ начинается с суммы:

$$\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z} + 5 + 6z - z^2 - \dots$$

Чему равен интеграл $\int_{|z|=1} f(z) dz$ при условии, что других особых точек у функции $f(z)$, кроме нуля, нет?

Билет №5.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Условия Коши-Римана. Необходимое условие.
2. Сформулировать теорему Абеля.
3. Изобразить на плоскости \mathbb{C} образ следующего множества при отображении $w = \operatorname{Ln} z$:
Правая полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$.

Билет №6.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Условия Коши-Римана. Достаточное условие.
2. Сформулировать теорему Пикара.
3. Вычислить интеграл:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 5z}$$

Билет №7.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Условия Коши-Римана. Комплексная форма.
2. Сформулировать лемму Жордана.
3. Вычислить вычет, $\text{Res}_{z_0} f$, в точке $z_0 = 0$, для функции

$$f(z) = \frac{1}{(z^3 + 2z)^2}.$$

Билет №8.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Условия Коши-Римана. Полярная форма.
2. Сформулировать теорему Лиувилля.
3. Определить и изобразить на комплексной плоскости \mathbb{C} множества чисел, заданные условиями:

$$|z - i|^2 + |z + i|^2 < 12.$$

Билет №9.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Теорема Коши.
2. Сформулировать теорему Сохоцкого.
3. Вычислить вычет, $\text{Res}_{z_0} f$, в точке $z_0 = 0$, для следующей функции:

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{z^5}.$$

Билет №10.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Интегральная формула Коши.
2. Записать формулу корней n -й степени из комплексного числа.
3. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z}$$

в области $D = \{|z| > 1\}$.

Билет №11.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Радиус сходимости степенного ряда. Теорема Абеля.
2. Сформулировать интегральную формулу Коши n -го порядка.
3. Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{z^3 dz}{z^2 + 1}$$

(контур интегрирования обходится против часовой стрелки).

Билет №12.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Почленное дифференцирование степенного ряда.
2. Сформулировать условия Коши-Римана.
3. Вычислить следующий интеграл:

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2(z^2 - 4)e^z}.$$

Билет №13.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Теорема о среднем.
2. Сформулировать условия Коши-Римана в комплексной форме.
3. Изобразить на плоскости \mathbb{C} образ следующего множества при отображении $w = \operatorname{Ln} z$:
Правый единичный полукруг $|z| < 1, \operatorname{Re} z > 0$.

Билет №14.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Регулярность дифференцируемой в области функции.
2. Записать формулу вычисления логарифмической функции $\operatorname{Ln} z$.
3. Вычислить следующий интеграл:

$$\oint_{|z-1-i|=5/4} \frac{\operatorname{Ln} z}{(z-1)^2} dz.$$

Билет №15.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Бесконечная дифференцируемость регулярной функции.
2. Сформулировать неравенство Коши для коэффициентов Лорана.
3. Разложить следующую функцию в ряд Тейлора. Найти радиус сходимости полученного ряда:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Билет №16.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Нули регулярной функции.
2. Записать формулу вычисления аргумента $\arg z$ комплексного числа z .
3. Разложить следующую функцию в ряд Тейлора. Найти радиус сходимости полученного ряда:

$$f(z) = \operatorname{arctg} z.$$

(Указание: что можно сказать про $f'(z)$?)

Билет №17.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Теорема о разложении в ряд Лорана.
2. Сформулировать условия Коши-Римана в полярной форме.
3. Найти и изобразить на \mathbb{C} все значения $\ln z$, если $z = 1 + i$.

Билет №18.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.
2. Записать формулу вычисления преобразования Лапласа.
3. Изобразить на плоскости \mathbb{C} следующее множество и его образ при отображении функцией $w = e^z$:

Вертикальная полоса $0 < \operatorname{Re} z < 1$.

Билет №19.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Устранимая особая точка. 3 критерия.
2. Сформулировать теорему о среднем.
3. Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z+2|=2} \frac{z^2 dz}{z^3 + 1}$$

(контур интегрирования обходится против часовой стрелки).

Билет №20.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Полюс. 3 критерия.
2. Сформулировать определение ряда Лорана и его основных компонент.
3. Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{\sin(2z)}{z^3 - 4z} dz$$

(контур интегрирования обходится против часовой стрелки).

Билет №21.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Существенно особая точка. 3 критерия.
2. Сформулировать определение мероморфной функции.
3. Выразить все значения следующих выражений в числовой и тригонометрической форме и изобразить на \mathbb{C} :

$$\sqrt[4]{16i\sqrt{3} - 16}.$$

Билет №22.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Теорема Лиувилля.
2. Сформулировать основную теорему о вычетах.
3. В каких точках существует производная $\frac{df}{dz}$, и чему она равна в данных точках, если:

$$f(z) = z|z|?$$

Билет №23.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Теорема Сохоцкого.
2. Сформулировать определение интеграла Коши.
3. Определить и изобразить на комплексной плоскости \mathbb{C} множество чисел, заданное условиями:

$$|z - 2|^2 + |z + 2|^2 > 16.$$

Билет №24.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Теорема о мероморфной функции.
2. Сформулировать понятия регулярной, голоморфной и аналитической функции.
3. Для функции $f(z)$, определённой ниже, найти все особые точки и определить их характер:

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^4 + z^2}.$$

Билет №25.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Преобразование Лапласа. Теорема единственности.
2. Сформулировать условия полюса.
3. Получить формулу преобразования Лапласа $\mathcal{L}\{f\}(s)$ для следующей функции:

$$f(t) = \begin{cases} e^{3t}, & 0 < t < 4 \\ 2, & t > 4 \end{cases}.$$

Билет №26.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Обратное преобразование Лапласа. Теорема единственности.
2. Сформулировать условия устранимой особой точки.
3. Пусть γ – полуокружность $\{|z| = 4, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, проходимая против часовой стрелки от точки 4 до точки -4 . Вычислить

$$\int_{\gamma} \cosh z \, dz.$$

Билет №27.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Формула Эйлера.
2. Сформулировать условия существенно особой точки.
3. Изобразить на плоскости \mathbb{C} образ следующего множества при отображении $w = \operatorname{Ln} z$:
Верхний единичный полукруг $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$.

Билет №28.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. ML -оценка.
2. Сформулировать теорему о почленном дифференцировании степенного ряда.
3. Получить формулу преобразования Лапласа $\mathcal{L}\{f\}(s)$ для следующей функции:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2 \\ 3, & t > 2 \end{cases}.$$

Билет №29.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Теорема о первообразной.
2. Сформулировать теорему о нулях регулярной функции.
3. Вычислить интеграл:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2z}$$

Билет №30.

Каждый вопрос билета оценивается в 5 баллов.

1. Теорема о первообразной.
2. Сформулировать понятия регулярной, голоморфной и аналитической функции.
3. Какие из следующих утверждений выполняются для функции $f(z) = z \cdot |z|$:
 - (1) $f(z)$ –голоморфна в точке $z_0 = 0$.
 - (2) $f(z)$ –аналитична в точке $z_0 = 0$.
 - (3) $f(z)$ –регулярна в точке $z_0 = 0$.