

## Домашняя работа №2.

### Список задач.

### Домашнее задание.

\*Каждая из 7 предложенных задач стоит 3 балла.

Пусть:

$A$  – количество букв в Вашем имени,  $a = 1 + (A \bmod 4)$

$B$  – количество букв в Вашей фамилии,  $b = 1 + (B \bmod 5)$

$M$  – номер месяца Вашего рождения,  $m = 1 + (M \bmod 4)$

$n = 1 + ((A + M) \bmod 4)$ .

Домашнее задание:

№1. Решить задачу №1.

№2. Решить задачу №2, часть  $m/2$ , если  $m$  – чётное; решить задачу №3, часть  $(m + 1)/2$ , если  $m$  – нечётное.

№3. Решить задачу №4 целиком.

№4. (1) Решить задачу №4, часть  $m$ . (2) Решить задачу №5, часть 1, если  $a$  – чётное; решить задачу №5, часть 2, если  $a$  – нечётное.

№5. Решить задачу №6, часть  $a + m$ , из списка «Практикум по интегрированию с помощью вычетов и леммы Жордана.»

№6. Решить задачу №7.

№7. Решить задачу №8.

№1. Разложить в ряд Лорана функцию  $f(z) = \frac{1}{z(z-a)}$  в следующих областях:

$$\text{а) } V_1 = \{0 < |z| < a\}; \quad \text{б) } V_2 = \{|z| > a\}.$$

№2. Для функции  $f(z)$ , определённой ниже, найти все особые точки и определить их характер:

$$(1) f(z) = \frac{\sin(bz)}{z^3 + az};$$

$$(2) f(z) = \frac{e^{a/z}}{z^4 - m^2 z^2}.$$

№3. (1) Определить тип особенности в точке  $z_0 = 0$  для следующих функций:

$$(a) f(z) = \operatorname{ctg}(az); \quad (б) f(z) = \frac{\sin(bz)}{z^4}; \quad (с) f(z) = \frac{e^{nz}}{z^{n+1}}; \quad (d) f(z) = z \cos\left(\frac{m}{z}\right).$$

(2) Для каждой части, вычислить коэффициент  $c_{-1}$ , разложения в ряд Лорана в точке  $z_0 = 0$ .

**№4.** Вычислить вычеты  $\text{Res}_{z_k} f$  во всех особых точках, для следующих функций:

$$(1) f(z) = \frac{e^{3z}}{\sin z};$$

$$(2) f(z) = \frac{\tan(\pi z)}{z^2};$$

$$(3) f(z) = \frac{1}{(z^2 + 2z)^2};$$

$$(4) f(z) = \frac{1}{(z^3 - z)^2}.$$

**№5.**

(1) Вычислить интеграл (использование результата з. №1 приветствуется):

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - az}.$$

(2) Пусть  $D = \{|z| < 10\}$  круг радиуса 10 с центром в 0. Вычислить интеграл:

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{z^2 + 9}.$$

**№6. Практикум по интегрированию с помощью вычетов и леммы Жордана.**

Вычислить интеграл:

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4};$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

$$(4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + 1}$$

$$(5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}.$$

$$(6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 4)}.$$

(7) Показать, используя вычеты, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}.$$

(8) Показать, используя вычеты, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

**№7.**

Ответить на два следующих вопроса:

- (а) Функция  $f(z)$  регулярна в окрестности точки  $z_0 = 0$ . Может ли вычет этой функции в точке  $z_0$  быть равным (1) 0; (2)  $\infty$ ? (В обоих случаях – если да, приведите пример, если нет – приведите краткое пояснение).

(б)  $g(z)$  - чётная функция,  $f(z) = z g(z)$  и  $\text{Res}[f(z), -1] = 5$ . Чему равен  $\text{Res}[f(z), 1]$ ? (Привести краткое пояснение).

**№8.**

Ответить на два следующих вопроса:

- (а) Ряд Лорана функции  $f(z)$  начинается с суммы:

$$\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z} + 5 + 6z - z^2 - \dots$$

Чему равен интеграл  $\int_{|z|=1} f(z) dz$  при условии, что других особых точек у функции  $f(z)$ , кроме нуля, нет?

- (б) Найти ошибку в рассуждении:

Вычет функции  $g(z) = \frac{\sin z}{z^2}$  в точке  $z_0 = 0$  равен

$$\text{Res}[g(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{(z^2)'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2}.$$

(То, что это ошибка, легко увидеть, записав для функции  $g(z)$  ряд Лорана).