

Контрольная работа №1.

Вариант №1.

1. Выразить все значения следующего выражения в числовой и тригонометрической форме и изобразить на \mathbb{C} :

$$\sqrt[4]{-1}.$$

2. Пусть $f(z) = |z|^2$.

(а) В каких точках существует производная $\frac{df}{dz}$?

(б) В точках, где производная существует, вычислить $\frac{df}{dz}$.

3. Разложить следующую функцию в ряд Тейлора в точке $z_0 = 0$:

$$\frac{1}{4 + z^2};$$

Найти область сходимости полученного ряда.

Вариант №2.

1. Определить и изобразить на комплексной плоскости \mathbb{C} множества чисел, заданные условиями:

$$|z - 1| + |z + 1| \leq 2.$$

2. Пусть $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $x, y \in \mathbb{R}$, и

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 - 4x - 3 \\ v(x, y) = 2xy - 4y \end{cases}.$$

(1) Убедиться, что f дифференцируема на всей комплексной плоскости \mathbb{C} .

(2) Найти $\frac{df}{dz}$.

(3) Восстановить формулу $f(z)$ как функцию от z .

3. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\oint_{|z-2|=2} \frac{z^2 dz}{z^2 - 4}$$

(контур интегрирования обходится по часовой стрелке).

Вариант №3.

1. Выразить все значения следующих выражений в числовой и тригонометрической форме и изобразить на \mathbb{C} :

$$(i\sqrt{3} - 1)^{1/4}.$$

2. Предположим, что $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $x, y \in \mathbb{R}$, и

$$\begin{cases} u(x, y) = \sin x \cdot \sinh y \\ v(x, y) = \cos x \cdot \cosh y \end{cases}$$

(1) Показать, что u и v удовлетворяют условиям Коши-Римана.

(2) Найти производную $\frac{df}{dz}$.

(3) Как можно восстановить формулу $f(z)$?

(Указание: разложите функцию $g(z) = -i \sin z$ на действительную и мнимую части).

3. Разложить следующую функцию в ряд Тейлора в точке $z_0 = 0$:

$$\operatorname{Ln}(z - 1).$$

Найти радиус сходимости полученного ряда.

Вариант №4.

1. Определить и изобразить на комплексной плоскости \mathbb{C} множества чисел, заданные условиями:

$$|z - 1|^2 + |z + 1|^2 < 8.$$

2. Разложить следующую функцию в ряд Тейлора в точке $z_0 = 0$:

$$z^2 - \cos^2 z.$$

Найти область сходимости полученного ряда.

3. Используя интегральную формулу Коши, вычислить следующий интеграл:

$$\oint_{|z+2i|=1} \frac{dz}{z(z^2 + 4)e^z}.$$