

## Домашняя работа №1.

### Список задач.

1. Определить и изобразить на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  множества чисел, заданные условиями:

(1) $ z - 1 - i  = 1$ ;	(2) $1 <  2z - 6  < 2$ ;	(3) $ z - 1 ^2 +  z + 1 ^2 < 8$ ;
(4) $ z - 1  +  z + 1  \leq 2$ ;	(5) $ z - 1  <  z $ ;	(6) $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ ;
(7) $-\pi < \operatorname{Re} z < \pi$ ;	(8) $ \operatorname{Re} z  <  z $ ;	(9) $\operatorname{Re}(iz + 2) > 0$ ;
(10) $ z - i ^2 +  z + i ^2 < 2$ .		

2. Выразить все значения следующих выражений в числовой и тригонометрической форме и изобразить на  $\mathbb{C}$ :

(1) $\sqrt{i}$ ;	(2) $\sqrt[4]{-1}$ ;	(3) $(-8)^{1/3}$ ;	(4) $(1 + i)^8$ ;
(5) $\sqrt{i - 1}$ ;	(6) $\sqrt[4]{i}$ ;	(7) $(3 - 4i)^{1/8}$ ;	(8) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{25}$ .

3. Изобразить на плоскости  $\mathbb{C}$  каждое из следующих множеств и их образы при отображении функцией  $w = e^z$ . Изобразить также образы горизонтальных и вертикальных прямых:

(1) Вертикальная полоса $0 < \operatorname{Re} z < 1$ ;	(4) Круг (диск) $ z  \leq \pi/2$ ;
(2) Горизонтальная полоса $5\pi/3 < \operatorname{Im} z < 8\pi/3$ ;	(5) Диск $ z  \leq \pi$ ;
(3) Прямоугольник $0 < x < 1, 0 < y < \pi/4$ ;	(6) Диск $ z  \leq 3\pi/2$ .

4. Найти и изобразить на  $\mathbb{C}$  значения  $\ln z$  для следующих комплексных значений  $z$ . Указать главное значение,  $\operatorname{Ln} z$ :

(1) 2;	(2) $i$ ;	(3) $1 + i$ ;	(4) $(1 + i\sqrt{3})/2$ .
--------	-----------	---------------	---------------------------

5. Изобразить на плоскости  $\mathbb{C}$  образ каждого из следующих множеств при отображении  $w = \operatorname{Ln} z$ :

(1) Правая полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ ;	(4) Кольцо с прорезью $\sqrt{e} <  z  < e^2, z \notin (-e^2, \sqrt{e})$ .
(2) Правый единичный полукруг $ z  < 1, \operatorname{Re} z > 0$ ;	(5) Горизонтальная прямая $y = e$ ;
(3) Единичная окружность $ z  = 1$ ;	(6) Вертикальная прямая $x = e$ .

6. Найти производные следующих функций:

(1) $z^2 - 1$ ; (*)	(2) $z^n, n \in \mathbb{N};$ (*)	(3) $(z^2 - 1)^n$ ;
(4) $1/(1 - z)$ ; (*)	(5) $1/(z^2 + 3)$ ;	(6) $z/(z^3 - 5)$ ;
(7) $(az + b)/(cz + d)$ ;	(8) $1/(cz + d)^2$ .	

(\*) Данные производные должны быть найдены из определения  $f'(z)$  (а не из свойств).

7. Разложить следующие функции в ряд Тейлора в точке  $z_0 = 0$ . В каждом случае найти радиус сходимости полученного ряда:

(1)  $\sin z^2$ ;

(2)  $e^{3z}$ ;

(3)  $\cos^2 z$  (двумя способами);

(4)  $\cos(z - 2)$  (двумя способами).

8. Разложить следующие функции в ряд Тейлора в точке  $z_0 = 0$ , используя разложение функции  $g(z) = \frac{1}{1-z}$ . В каждом случае найти радиус сходимости полученного ряда:

(1)  $\frac{1}{1+z}$ ;

(2)  $\frac{1}{1-z^2}$ ;

(3)  $\frac{1}{1+z^2}$ ;

(4)  $\frac{1}{z-4}$ ;

(5)  $\operatorname{Ln}(z-1)$ ;

(6)  $\operatorname{arctg} z$ .

9. Пусть  $\gamma$  – это граница треугольника  $\{0 < y < 1-x, 0 < x < 1\}$ , ориентированная положительно (т.е. против ч.с.). Вычислить следующие интегралы:

(a)  $\int_{\gamma} \operatorname{Re} z \, dz$ ;

(б)  $\int_{\gamma} \operatorname{Im} z \, dz$ ;

(в)  $\int_{\gamma} z \, dz$ .

10. Используя интегральную формулу Коши, вычислить следующие интегралы:

(1)  $\oint_{|z|=2} \frac{z^n}{z-1} dz, n \geq 0$ ;

(2)  $\oint_{|z|=1} \frac{z^n}{z-2} dz, n \geq 0$ ;

(3)  $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz$ ;

(4)  $\oint_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z^3} dz$ ;

(5)  $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^m} dz, -\infty < m < \infty$ ;

(6)  $\oint_{|z-1-i|=5/4} \frac{\operatorname{Ln} z}{(z-1)^2} dz$ ;

(7)  $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2(z^2-4)e^z}$ ;

(8)  $\oint_{|z-1|=3} \frac{dz}{z(z^2-4)e^z}$ .

11. (1) Показать, что  $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ .

(2) Изобразить на  $\mathbb{C}$  множество точек, где данное неравенство обращается в равенство.

(3) Показать, что уравнение  $|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z) + |a|^2 = r^2$  образует на  $\mathbb{C}$  окружность с центром в  $a$  и радиусом  $r$ .

12. (1) Доказать:  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$  и  $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ .

(2) Доказать:  $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$ .

(3) Используя (2), доказать неравенство треугольника:  $|z+w| \leq |z| + |w|$ .

13. Пусть  $a, z \in \mathbb{C}$  и  $|z| = 1$ . Доказать:  $\frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|} = 1$ , если  $1 - \bar{a}z \neq 0$ .

14. Показать, что  $u = \sin x \sinh y$  и  $v = \cos x \cosh y$  удовлетворяют условиям Коши-Римана. Как можно восстановить формулу  $f(z)$ , если  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ?
15. Показать, что если  $f$  аналитична в области  $D$ , и  $f' \equiv 0$  в  $D$ , то  $f \equiv \text{const}$  в  $D$ .
16. Показать, что если и  $f$  и  $\bar{f}$  аналитичны в области  $D$ , то  $f \equiv \text{const}$  в  $D$ .
17. Показать, что если  $f$  аналитична в области  $D$  и является в  $D$  вещественнозначной (т.е. принимает только действительные значения), то  $f \equiv \text{const}$  в  $D$ .
18. Показать, что если  $f$  аналитична в области  $D$  и  $|f| \equiv \text{const}$  в  $D$ , то  $f \equiv \text{const}$  в  $D$ .  
(Указание: записать  $\bar{f} = \frac{|f|^2}{f}$ ).

### Домашнее задание.

\*Каждая из 7 предложенных задач стоит 3 балла.

Пусть:

$M$  – количество букв в Вашем имени,  $m = 1 + (M \bmod 4)$ ,

$N$  – количество букв в Вашей фамилии,  $n = 1 + (N \bmod 6)$ ,

$P$  – количество букв в Вашем отчестве,  $p = 1 + (P \bmod 4)$ ,  $Q = m + n$ ,  $R = m + p$ .

#### №1. (Множество на плоскости $\mathbb{C}$ ).

(а) Решить задачу № 1, часть  $Q$ . (б) Решить задачу № 2, часть  $R$ .

#### №2. (Элементарные функции и их свойства).

(а) Решить задачу 3, часть  $n$ .

(б) Решить задачу 3, часть  $n$ , если  $p$  – чётное; решить задачу 4, часть  $m$ , если  $p$  – нечётное.

#### №3. (Производные).

Решить задачу №6, часть  $2n - p$ .

#### №4. (Ряды Тейлора).

Решить задачу № 7, часть  $Q$ , если  $Q \leq 4$ ; решить задачу №8, часть  $11 - Q$ , если  $Q \geq 5$ .

#### №5 (Интегралы и теорема Коши).

(а) Решить задачу №9, часть №  $1 + (M \bmod 3)$ ; (б) Решить задачу № 10, часть №  $R$ .

#### №6 (Доказательная, на свойство комплексных чисел).

Выполнить задачу № $f(R)$ , где значения функции  $f(R)$  заданы таблицей:

$R$	1 или 8	2	3	4	5	6	7
$f(R)$	11 (1)	11(2)	11(3)	12(1)	12(2)	12(3)	13

#### №7 (Доказательная, на использование условий Коши-Римана).

Решить задачу №  $14 + (M \bmod 5)$ .