

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Южно-Уральский государственный университет  
Кафедра математического и компьютерного моделирования

517.9(07)  
З-144

С.А. Загребина, Е.А. Деркунова

**СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ**

Учебное пособие

Челябинск  
Издательский центр ЮУрГУ  
2020

*Одобрено  
учебно-методической комиссией  
Института естественных и точных наук*

*Рецензенты:  
д-р физ.-мат. наук, проф. Т.Г. Сукачева,  
д-р физ.-мат. наук, проф. М.В. Фалалеев*

**Загребина, С.А.**

3-144 Системы линейных дифференциальных уравнений в упражнениях и задачах: учебное пособие / С.А. Загребина, Е.А. Деркунова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2020. – 115 с.

Пособие посвящено рассмотрению некоторых глав теории дифференциальных уравнений, в частности, систем линейных уравнений, уравнений высших порядков и связанных с ними задач. Структура и содержание каждого из разделов пособия позволяет читателю ознакомиться с основными положениями теории, постановками и методами исследования дифференциальных систем и уравнений, и решить самостоятельно приведенные задачи. Предназначено прежде всего для студентов, обучающихся по направлениям 01.03.01 – Математика, 01.03.02 – Прикладная математика и информатика, 01.03.03 – Механика и математическое моделирование, 01.03.04 – Прикладная математика, 02.03.01 – Математика и компьютерные науки, но может быть полезно и всем интересующимся указанной областью знаний.

УДК 517.956(076.5)

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> . . . . .	5
<b>1. Общие вопросы линейных систем дифференциальных уравнений</b>	
1.1. Теорема существования и единственности для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений . . . .	6
1.2. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	10
1.3. Линейные дифференциальные уравнения произвольного порядка . . . . .	13
1.4. Определитель Вронского . . . . .	16
1.5. Фундаментальная система решений . . . . .	20
1.6. Построение линейного однородного уравнения по фундаментальной системе решений . . . . .	24
1.7. Фундаментальная матрица системы . . . . .	28
<b>2. Линейные однородные системы и уравнения</b>	
2.1. Формула Лиувилля – Остроградского	
2.1.1. Решение систем линейных уравнений . . . . .	32
2.1.2. Решение линейного однородного дифференциального уравнения . . . . .	36
2.2. Понижение порядка линейного однородного уравнения при известном частном решении . . . . .	41
2.3. Линейная однородная система дифференциальных уравнений в матричной форме . . . . .	44
2.4. Решение линейной однородной системы в общем случае . .	48
2.5. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .	56
2.5.1. Случай простых корней . . . . .	57
2.5.2. Случай кратных корней . . . . .	61
<b>3. Линейные неоднородные системы</b>	
3.1. Теоремы об общем решении линейной неоднородной системы . . . . .	68
3.2. Метод Лагранжа вариации постоянных	
3.2.1. Решение систем линейных неоднородных уравнений	70
3.2.2. Решение линейного неоднородного уравнения $n$ -го порядка . . . . .	73
3.2.3. Метод вариации постоянных для линейного неоднородного уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	76

3.3. Метод неопределенных коэффициентов для систем линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . .	78
3.4. Метод неопределенных коэффициентов решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .	83
3.5. Метод исключения переменных для линейных систем с постоянными коэффициентами . . . . .	91
<b>4. Линейные уравнения второго порядка . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>5. Краевые задачи . . . . .</b>	<b>104</b>
<b>Библиографический список . . . . .</b>	<b>115</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие возникло как ответ на запросы времени, касающиеся качества и объема современного фундаментального образования. В быстро меняющейся ситуации происходит непрерывная трансформация от классического экстенсивного подхода с его незыблемыми устоями, ссылкой на авторитет и законченностью характера исследований к интенсивно развивающимся формам образования, имеющим тот недостаток, что на личностном уровне не вовлеченными оказываются интерес к предмету изучения, творческий элемент и осмысление в процессе поиска результата целей тех задач, которые ставятся перед обучающимися.

Авторы пособия стремились, с одной стороны, в полноте изложить теорию, поэтому, наряду с определениями встречающихся понятий, приводя строгие формулировки необходимых утверждений, проводят и подробные доказательства последних. Это делает возможным для читателя, не прибегая к другим источникам, ознакомиться с тем минимумом знаний, который позволяет без труда разобраться с приведенными примерами решения задач и приобрести навык самостоятельной работы.

С другой стороны, нужные пояснения зачастую имеют вид неких схем, снабжены различными значками, что приближает изложение к типу конспекта лекций, что прослеживается так же и в структуре пособия. Сделать учебу увлекательной помогают не только приемы высказывания, но и открывающаяся возможность получить результат решения задач, вынесенных в качестве упражнений в конце разделов.

Авторы надеются на отклик в студенческой среде, всегда будут благодарными к указанию на возможные ошибки и опечатки, не замеченные ими при оформлении текста пособия.

# 1. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 1.1. Теорема существования и единственности для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную систему нормального вида

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \dots + a_{in}(t)x_n + f_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.1)$$

или в векторной записи

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad (1.2)$$

где вектор-функция  $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$ , вектор-функция  $f = \text{col}(f_1, \dots, f_n)$ , матрица

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $t \in (\alpha, \beta)$ ;  $a_{ij}(t), f_i(t)$  непрерывны на интервале  $(\alpha, \beta)$ ,  $a_{ij}(t) : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}, i, j = \overline{1, n}$ .

Система (1.1) или (1.2) называется *линейной однородной*, если все  $f_i(t) \equiv 0, i = \overline{1, n}$ , и *линейной неоднородной* в противном случае.



**Лемма 1.1.** Если матрица  $A(t)$  вещественна, то

(i) действительная и мнимая части любого комплексного решения системы

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1.3)$$

являются вещественными решениями этой системы;

(ii) действительная и мнимая части решения  $x = u + iv$  системы (1.2) с  $f(t) = g(t) + ih(t)$  являются решениями систем

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A(t)u + g(t), \\ \dot{v} &= A(t)v + h(t); \end{aligned} \quad (1.4)$$

(iii) если  $u, v$  – решения систем (1.4), то  $x = u + iv$  – решение системы (1.2) с  $f(t) = g(t) + ih(t)$ .

*Доказательство.*

(ii) Поскольку вектор-функция  $x = u + iv$  по условию является решением системы (1.2), следовательно при подстановке её в (1.2) получаем верное тождество

$$(u + iv)' = A(t)(u + iv) + g(t) + ih(t).$$

Вычислим производную суммы слева и перегруппируем выражения справа

$$\dot{u} + i\dot{v} = A(t)u + g(t) + i(A(t)v + h(t)).$$

Поскольку многочлены равны, следовательно равны коэффициенты при соответствующих степенях  $i$ .

$$\begin{aligned} i^1 : & \quad \dot{v} = A(t)v + h(t), \\ i^0 : & \quad \dot{u} = A(t)u + g(t), \end{aligned} \quad \text{получили (1.4).}$$

(iii) Рассмотрим систему (1.4)

$$\begin{cases} \dot{u} = A(t)u + g(t), \\ \dot{v} = A(t)v + h(t). \end{cases}$$

Умножим второе уравнение системы на  $i$  и сложим с первым уравнением

$$\underbrace{\dot{u} + i\dot{v}}_x = A(t) \underbrace{(u + iv)}_x + \underbrace{g(t) + ih(t)}_f(t).$$

Получим

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),$$

следовательно  $x$  – решение системы (1.2).

(i) Если в (1.4) положить  $g \equiv h = 0$ , то имеем

$$\begin{cases} \dot{u} = A(t)u, \\ \dot{v} = A(t)v. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение системы на  $i$  и сложим с первым уравнением

$$\dot{x} = (u + iv)' = \dot{u} + i\dot{v} = A(t)(u + iv) = A(t)x,$$

следовательно  $x$  – решение системы (1.3).●



**Теорема 1.1.** При любом начальном условии

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.5)$$

система (1.2) имеет единственное решение. Все ее решения продолжаются на весь интервал  $(\alpha, \beta)$ .

*Доказательство.*

(1) Рассмотрим случай, когда вектор-функции  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in \mathbb{R}^n$  – действительные (вещественные). По теореме о существовании и единственности решения системы ОДУ<sup>1</sup> задача (1.2), (1.5) имеет единственное решение.

Обозначим

$$a(t) = \|A(t)\| = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$b(t) = |f(t)| = \sqrt{|f_1(t)|^2 + |f_2(t)|^2 + \dots + |f_n(t)|^2}.$$

Эти функции непрерывны и таковы, что выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |A(t)x + f(t)| &\leq |A(t)x| + |f(t)| \leq \\ &\leq \|A(t)\| \cdot |x| + |f(t)| \leq a(t) \cdot |x| + b(t). \end{aligned}$$

Тогда по теореме о продолжении решения на весь заданный интервал<sup>2</sup> уравнения (1.2) продолжаются на весь интервал  $(\alpha, \beta)$ .

(2) Рассмотрим случай, когда вектор-функции  $x_0 = u_0 + iv_0$ ,  $f(t) = g(t) + ih(t)$  – комплексные решения. Тогда в силу леммы 1.1 системы (1.4) с начальными условиями  $u(t_0) = u_0$ ,  $v(t_0) = v_0$  имеют решения на интервале  $(\alpha, \beta)$ . Тогда  $x = u + iv$  при  $\alpha < t < \beta$  – решение задачи (1.2), (1.5).

Пусть  $y = u^* + iv^*$  – другое решение этой задачи (1.2), (1.5). Введем вспомогательную функцию  $z(t) = x(t) - y(t)$ . Тогда функция

$$z = u + iv - (u^* + iv^*) = (u - u^*) + i(v - v^*)$$

<sup>1</sup> **Теорема о существовании и единственности решения системы ОДУ.** Пусть в области  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  вектор-функция и ее производные  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , непрерывны. Тогда для любой точки  $(t_0, x_0) \in D$  задача  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  имеет единственное решение на отрезке  $I = [t_0 - d; t_0 + d]$ , где  $d = \frac{r}{\sqrt{m^2 + 1}} > 0$ , а  $r$  такое, что  $D \supset B_r(t_0, x_0) = \{(t, x) : (t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 \leq r^2\}$ ,  $m = \max_{B_r(t_0, x_0)} |f|$ .

<sup>2</sup> **Теорема о продолжении решения на весь заданный интервал.** Пусть вектор-функция  $f(t, x)$  непрерывна и  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  непрерывны в области  $\alpha < t < \beta$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  (возможно  $\alpha = -\infty$ ,  $\beta = +\infty$ ), причем  $|f(t, x)| \leq a(t) \cdot |x| + b(t)$ , где функции  $a(t)$  и  $b(t)$  непрерывны. Тогда каждое решение уравнения  $\dot{x} = f(t, x)$ , проходящее в этой области, можно продолжить на весь интервал  $(\alpha, \beta)$ .



является решением системы (1.2), т.к. тождество

$$\dot{z} = A(t)z$$

верно, поскольку выполнены равенства

$$\begin{aligned}\dot{z} &= (u - u^*)' + i(v - v^*)' = \dot{u} - \dot{u}^* + i\dot{v} - i\dot{v}^* = \\ &= A(t)u - A(t)u^* + iA(t)v - iA(t)v^* = A(t)((u - u^*) + i(v - v^*))\end{aligned}$$

в силу равенств  $\dot{u} = A(t)u$ ,  $\dot{u}^* = A(t)u^*$ ,  $\dot{v} = A(t)v$ ,  $\dot{v}^* = A(t)v^*$  (по определению решений). По условию  $y = u^* + iv^*$  является решением задачи (1.2), (1.5), поэтому имеет место равенство

$$y(t_0) = x_0 = u^*(t_0) + iv^*(t_0).$$

Кроме того,

$$x(t_0) = x_0 = u(t_0) + iv(t_0),$$

поскольку  $x$  – решение задачи (1.2), (1.5). Тогда  $z(t_0) = x(t_0) - y(t_0) = x_0 - x_0 = 0$ . Однако  $z(t) = 0$  – тоже решение, а других вещественных решений нет, следовательно  $u - u^* \equiv v - v^* = 0$ , тогда  $u = u^*$  и  $v = v^*$ , поэтому  $x = u + iv$  – единственное решение. •



**Пример 1.1.** Проиллюстрируем теорему существования и единственности на примере следующей начальной задачи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{2} \sec t \cdot x_2 + 1, \\ \dot{x}_2 = 2 \cos t \cdot x_1 - \operatorname{tg} t \cdot x_2 - 2t \cos t, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}. \quad (1.6)$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0. \quad (1.7)$$

Нетрудно показать, что решениями системы (1.6) будут функции  $x_1(t) = t + \cos t$  и  $x_2(t) = \sin 2t$ . Действительно, используя выражения для производных  $\dot{x}_1 = 1 - \sin t$  и  $\dot{x}_2 = 2 \cos 2t$ , убеждаемся в выполнении равенств на указанном промежутке. Функции  $x_1$  и  $x_2$  удовлетворяют также и начальному условию (1.7). В силу теоремы существования и единственности других решений нет.



### • Упражнения для самостоятельной работы

1. Перейти к матричному виду (1.2) для нормальной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -t \cdot x_1 + \sin t \cdot x_3 + 3, \\ \dot{x}_2 = t^2 \cdot x_2 - 2, \\ \dot{x}_3 = \cos t \cdot x_1 - t^3 \cdot x_3 + 1 \end{cases}$$

2. Перейти к виду (1.1) для системы, записанной в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^t & -1 & 2t^3 \\ 4\sqrt{t} & -1 & 2\ln t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cos 3t \\ 0 & 1 & \operatorname{arctg} t^2 & \operatorname{tg} 5t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{th} 2t \\ 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Проверить, что функции  $x_1$  и  $x_2$  являются единственными решениями задачи Коши.

3.1.  $x_1(t) = 1 + t, \quad x_2(t) = t^2 - t,$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 - t^2, \\ \dot{x}_2 = tx_1 - x_2 - 1, \end{cases} \quad 0 < t < 3.$$

$$x_1(1) = 0, \quad x_2(1) = 2.$$

3.2.  $x_1(t) = \operatorname{sh} t, \quad x_2(t) = e^t,$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + \frac{1}{2}e^{-t}, \end{cases} \quad 0 < t < 1.$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1.$$

## 1.2. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему (1.2)  $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ . Перенесем первое слагаемое  $A(t)x$  влево и обозначим левую часть  $Lx = \dot{x} - A(t)x$ . Тогда  $Lx = f$ . Здесь  $x$  и  $f$  – элементы линейного пространства, причем  $x$  – непрерывная и дифференцируемая вектор-функция,  $f$  – непрерывная вектор-функция

на интервале  $t \in (\alpha, \beta)$ ;  $L$  – линейный непрерывный оператор, т.е. отображение, для которого верны следующие свойства:

$$(i) \forall u, v \in \text{dom } L \quad L(u + v) = Lu + Lv,$$

$$(ii) \forall u, v \in \text{dom } L, \forall \gamma \in \mathbb{R} \quad L(\gamma u) = \gamma(Lu).$$

I. Если  $x^1, \dots, x^k$  – решения линейного однородного уравнения  $Lx = 0$ , где верхний индекс – номер решения,  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  – числа, то

$$x^1 + x^2, x^1 - x^2, \gamma_1 x^1 + \dots + \gamma_k x^k -$$

решения этого же уравнения. Таким образом, множество решений линейного однородного уравнения (или системы) есть линейное пространство.

II. Если  $x^1, \dots, x^k$  – решения линейных неоднородных уравнений, т.е. верно

$$Lx^i = f^i, \quad i = \overline{1, k},$$

а  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  – числа, то

$$x = \gamma_1 x^1 + \dots + \gamma_k x^k -$$

решение уравнения

$$\begin{aligned} Lx &= L(\gamma_1 x^1 + \dots + \gamma_k x^k) = L(\gamma_1 x^1) + \dots + L(\gamma_k x^k) = \\ &= \gamma_1 Lx^1 + \dots + \gamma_k Lx^k = \gamma_1 f^1 + \dots + \gamma_k f^k. \end{aligned}$$

В частности, если

$$\left. \begin{array}{l} u - \text{решение } Lu = 0, \\ v - \text{решение } Lv = f, \end{array} \right\} \Rightarrow L(u + v) = Lu + Lv = 0 + f = f.$$


Если

$$\left. \begin{array}{l} v^1 - \text{решение } Lv^1 = f, \\ v^2 - \text{решение } Lv^2 = f, \end{array} \right\} \Rightarrow L(v^1 - v^2) = f - f = 0.$$

Таким образом,


*сумма* решений линейного однородного и линейного неоднородного уравнения с одним и тем же оператором  $L$ , есть решение того же неоднородного уравнения;

*разность* решений линейного неоднородного уравнения есть решение линейного однородного уравнения.

 **Определение 1.1.** Вектор-функции  $x^1, \dots, x^k$  называются *линейно зависимыми на интервале (или на множестве  $M$ )*, если найдутся такие постоянные числа  $c_1, \dots, c_k$ , из которых хотя бы одно не равно нулю, что

$$\forall t \in M \quad c_1 x^1(t) + \dots + c_k x^k(t) \equiv 0. \quad (1.8)$$

Вектор-функции *линейно независимы на  $M$* , если они не являются линейно зависимыми на  $M$ , т.е. если равенство (1.8) ( $\forall t \in M$  одновременно) возможно лишь в случае  $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ .

 **Замечание 1.1.** Если вектор-функции  $x^1, \dots, x^k$  линейно зависимы на  $M$ , то при  $\forall t \in M$  их значения являются линейно зависимыми векторами, это следует из (1.8). Обратное неверно.



**Пример 1.2.** Исследовать линейную зависимость вектор-функций  $x^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; x^2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ .

Рассмотрим векторы, получаемые при  $\forall t \in M$ . Например, при  $t = t_1$  имеем  $c_1 x^1(t_1) + c_2 x^2(t_1) = 0$ , т.е.

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

иначе

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 t_1 \\ c_2 t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

по свойству матриц

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_2 t_1 \\ c_1 + c_2 t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда  $c_1 = -c_2 t_1$ . Если  $c_1 = t_1$ , то  $c_2 = -1 \neq 0$ , следовательно векторы  $x^1(t_1)$  и  $x^2(t_1)$  – линейно зависимы.

Рассмотрим вектор-функции на  $(\alpha, \beta)$ , т.к.

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_1 + c_2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

на всем интервале  $(\alpha, \beta)$  только при  $c_1 = c_2 = 0$ , то  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  линейно независимы.

### 1.3. Линейные дифференциальные уравнения произвольного порядка

Пусть  $t \in (\alpha, \beta)$ , а функции  $f(t) \in C(\alpha, \beta)$ ,  $a_i(t) \in C(\alpha, \beta)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , причем  $a_0(t) \neq 0$ , для любого  $t \in (\alpha, \beta)$ . Рассмотрим уравнение

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = f(t). \quad (1.9)$$

Разрешим уравнение (1.9) относительно  $y^{(n)}$ , получим

$$y^{(n)} = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}y^{(n-1)} - \frac{a_2(t)}{a_0(t)}y^{(n-2)} - \dots - \frac{a_n(t)}{a_0(t)}y + \frac{f(t)}{a_0(t)}. \quad (1.10)$$

Введем замену

$$\begin{cases} x_1 = y, \\ x_2 = \dot{y}, \\ x_3 = \ddot{y}, \\ \dots\dots\dots, \\ x_{n-1} = y^{(n-2)}, \\ x_n = y^{(n-1)}. \end{cases} \quad (1.11)$$

С учетом равенства (1.10), преобразуем уравнение (1.9) к системе нормального вида, продифференцировав каждое уравнение (1.11)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2, \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3, \\ \dots\dots\dots, \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n, \\ \dot{x}_n = y^{(n)} = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}y^{(n-1)} - \frac{a_2(t)}{a_0(t)}y^{(n-2)} - \dots - \frac{a_n(t)}{a_0(t)}y + \frac{f(t)}{a_0(t)}, \end{cases}$$

или более детально,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_{n-1} + 0 \cdot x_n + 0, \\ \dot{x}_2 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_{n-1} + 0 \cdot x_n + 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \dot{x}_{n-2} = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_{n-1} + 0 \cdot x_n + 0, \\ \dot{x}_{n-1} = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_{n-1} + 1 \cdot x_n + 0, \\ \dot{x}_n = -\frac{a_n(t)}{a_0(t)}x_1 - \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)}x_2 - \dots - \frac{a_2(t)}{a_0(t)}x_{n-1} - \frac{a_1(t)}{a_0(t)}x_n + \frac{f(t)}{a_0(t)}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Таким образом, каждое решение уравнения (1.9) с помощью замены (1.11) переходит в решение  $x_1, x_2, \dots, x_n$  системы (1.12). Обратно, для каждого

решения системы (1.12) в силу замены (1.11) существует решение уравнения (1.9).

Так как система (1.12) линейна, а функции  $\frac{a_i(t)}{a_0(t)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\frac{f(t)}{a_0(t)}$  непрерывны, как частные непрерывных функций, причем знаменатель  $a_0(t) \neq 0$  для любого  $t \in (\alpha, \beta)$ , то эта система обладает свойствами систем, рассмотренных в параграфах 1.1 и 1.2.

- Каждое решение уравнения (1.9) может быть продолжено на интервал  $(\alpha, \beta)$ .
- При любых начальных условиях в  $t_0 \in (\alpha, \beta)$

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad y''(t_0) = y''_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (1.13)$$

уравнение (1.9) имеет единственное решение для любого  $t \in (\alpha, \beta)$ .

- Если  $y_1, y_2, \dots, y_k$  – решения линейного однородного уравнения, соответствующего (1.9), а  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  – числа, то линейная комбинация  $\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \dots + \gamma_k y_k$  – решение того же уравнения.
- Если обозначить левую часть уравнения (1.9) с помощью линейного оператора  $Ly \equiv a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y$ ; причем имеют место следующие соотношения:  $u$  – решение однородного уравнения  $Lu = 0$ ;  $v_1$  – решение неоднородного уравнения  $Lv_1 = f$ ;  $v_2$  – решение неоднородного уравнения  $Lv_2 = f$ , тогда  $u + v_1$  – решение неоднородного уравнения  $L(u + v_1) = f$ ;  $v_1 - v_2$  – решение однородного уравнения  $L(v_1 - v_2) = 0$ .

Рассмотрим теперь линейное однородное уравнение, соответствующее (1.9), т.е.

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0 \quad (1.14)$$

с коэффициентами  $a_i(t) \in C(\alpha, \beta)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , причем  $a_0(t) \neq 0$  для любого  $t \in (\alpha, \beta)$ .



**Лемма 1.2.** При замене (1.11) линейно зависимые решения уравнения (1.14) переходят в линейно зависимые решения системы (1.12) (где  $f(t) \equiv 0$ ) и наоборот.

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ ) Пусть решения  $y_1, y_2, \dots, y_k$  уравнения (1.14) линейно зависимы, тогда по определению найдутся такие константы  $c_1, \dots, c_k = \text{const}$ , одновременно не равные нулю ( $c_i \neq 0$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $c_1^2 + \dots + c_k^2 > 0$ ), такие, что выполняется равенство

$$c_1 y_1 + \dots + c_k y_k \equiv 0. \quad (1.15)$$

Продифференцируем  $(n - 1)$  раз уравнение (1.15) и получим систему

[illegible]

Таким образом, после замены (1.11) равенства (1.15), (1.16) можно записать в виде одного векторного равенства


$$\begin{aligned}
& c_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y'_1 \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_2 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)} \end{pmatrix} + \dots + c_k \begin{pmatrix} y_k \\ y'_k \\ \vdots \\ y_k^{(n-1)} \end{pmatrix} = \\
& = c_1 \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix} + \dots + c_k \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix} = \\
& c_1 x^1 + c_2 x^2 + \dots + c_k x^k = 0.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Поскольку по построению константы  $c_1, \dots, c_k$ , одновременно не равны нулю ( $c_i \neq 0, i = \overline{1, k}, c_1^2 + \dots + c_k^2 > 0$ ), то вектор-функции  $x^i = \text{col}(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i), i = \overline{1, k}$ , являющиеся решением системы (1.12), где  $f(t) \equiv 0$ , будут линейно зависимыми.

( $\Leftarrow$ ) Обратно, пусть решения  $x^1, x^2, \dots, x^k$  системы линейно зависимы, тогда имеет место (1.17). Возьмем из каждого вектора  $x^i = \text{col}(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ , первую координату  $x_1^i$ , которая в силу замены (1.11) совпадает с  $i$ -ым решением  $y_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , и получим тождество

$$c_1 y_1 + \dots + c_k y_k \equiv 0, \text{ где } c_1^2 + \dots + c_k^2 > 0.$$

Таким образом решения уравнения (1.14) линейно зависимы. •

 **Замечание 1.2.** Из леммы следует, что линейно независимые решения уравнения переходят в линейно независимые решения системы и наоборот. Кроме того, по лемме 1.2 замена (1.11) сохраняет линейную зависимость (или независимость) решений, следовательно из свойств решений системы следуют аналогичные свойства решений уравнения (1.14).



### • Упражнения для самостоятельной работы

1. Записать следующие уравнения в виде нормальной системы:

1.1.  $ty^{IV} - (t+1)^2 y''' + (t-2)y'' + t^3 y' - y = te^t$ ;

1.2.  $2y^V + 5y''' - y' + y = \operatorname{ch} t$ .

2. Записать следующие нормальные системы в виде уравнений соответствующего порядка, произведя замену вида (1.11).

$$2.1. \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = x_5, \\ \dot{x}_5 = -\frac{1}{\ln t} x_4 + \frac{t^2}{\ln t} x_3 - \frac{e^{2t}}{\ln t} x_2 + \frac{2+t}{\ln t} x_1 - \ln t. \end{cases}$$

$$2.2. \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = 2x_3 - x_1 - t^2 e^{-t}. \end{cases}$$

## 1.4. Определитель Вронского



**Определение 1.2.** *Определитель Вронского (иначе, вронскиан) для  $n$ -мерных вектор-функций  $x^1, \dots, x^n$  – это определитель  $n$ -го порядка, столбцы которого состоят из координат этих вектор-функций*

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \dots & x_2^n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{vmatrix}. \quad (1.18)$$



**Лемма 1.3.** *Если вектор-функции  $x^1, \dots, x^n$  линейно зависимы, то их вронскиан  $W(t) \equiv 0$ .*

*Доказательство.* Если столбцы определителя линейно зависимы (координаты линейно зависимых вектор-функций), то по свойству определителей  $W(t) \equiv 0$ . •





● **Следствие 1.1.** Если вронскиан  $W(t) \neq 0$ , то вектор-функции  $x^1(t), \dots, x^n(t)$  линейно независимы.



**Лемма 1.4.** Если вектор-функции  $x^1, \dots, x^n$  являются решениями системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.19)$$

с непрерывной матрицей  $A(t)$ , и если существует хотя бы одно значение  $t_1$ , такое что  $W(t_1) = 0$ , то эти вектор-функции линейно зависимы и  $W(t) \equiv 0$ .

*Доказательство.* Пусть существует  $t_1$ , при котором  $W(t_1) = 0$ , тогда по свойству определителя, равного нулю, его столбцы линейно зависимы, отсюда следует линейная зависимость векторов  $x^1(t_1), \dots, x^n(t_1)$ , т.е. найдутся такие константы  $c_1, \dots, c_n = \text{const}$ , одновременно не равные нулю ( $c_i \neq 0, i = \overline{1, n}, c_1^2 + \dots + c_n^2 > 0$ ), такие, что выполняется равенство

$$c_1 x^1(t_1) + \dots + c_n x^n(t_1) = 0. \quad (1.20)$$

Возьмем эти константы  $c_i, i = \overline{1, n}$ , и построим, используя их, вектор-функцию

$$x(t) = c_1 x^1(t) + \dots + c_n x^n(t). \quad (1.21)$$


Эта вектор-функция является решением системы (1.19), как линейная комбинация решений, причем в силу (1.20)  $x(t_1) = 0$ .

Рассмотрим тривиальное решение, вектор-функцию  $z(t) = 0$ , она удовлетворяет этому уравнению (1.19) и начальному условию  $z(t_1) = 0$  (т.к.  $\dot{z}(t) = 0$ , то  $0 = \dot{z} = A(t) \cdot z = A(t) \cdot 0 = 0$ ).

По теореме о единственности решения 1.1 имеем, что  $x(t) \equiv z(t) \equiv 0$ . Итак, вектор-функция (1.20) всюду равна нулю, причем по построению хотя бы одна  $c_i \neq 0$ , следовательно  $x^1, \dots, x^n$  линейно зависимы. ●



**Замечание 1.3.** Для вектор-функций, не являющихся решением (1.19), утверждение леммы 1.4 неверно. В частности, для вектор-функций примера 1.2 имеем  $W(t) \equiv 0$ , а они линейно независимы.


 **Определение 1.3.** *Определителем Вронского (иначе, вронскиан) для  $n$  функций  $y_1, \dots, y_n \in C^{n-1}(\alpha, \beta)$  называется определитель  $n$ -го порядка*

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & \dots & y_n''(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}. \quad (1.22)$$



**Лемма 1.5.** *Если функции  $y_1, \dots, y_n$  линейно зависимы, то их вронскиан  $W(t)$  тождественно равен нулю.*

*Доказательство.* Поскольку столбцы определителя линейно зависимы по условию, то по свойству определителей  $W(t) \equiv 0$ . •

 **Замечание 1.4.** При замене (1.11) определитель (1.22) переходит во вронскиан (1.18).




**Лемма 1.6.** *Если функции  $y_1, \dots, y_n$  являются решениями уравнения*

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0, \quad (1.23)$$

*и если существует хотя бы одно значение  $t_1 \in (\alpha, \beta)$ , такое что  $W(t_1) = 0$ , то эти решения линейно зависимы и  $W(t) \equiv 0$  для всех  $t \in (\alpha, \beta)$ .*

При доказательстве этой леммы достаточно воспользоваться результатами леммы 1.4, используя замену (1.11).

 **Замечание 1.5.** Если же функции  $y_1, \dots, y_n$  не являются решениями уравнения (1.23), или их число меньше порядка уравнения, то из того, что  $W(t_1) = 0$ , не следует линейная зависимость функций.



**Пример 1.3.** Выяснить, являются ли функции  $y_1 = t^3$ ,  $y_2 = |t^3|$  при любых  $t \in (\alpha, \beta)$ , линейно зависимыми или линейно независимыми.

*Решение.* Для начала вычислим производную  $|t^3|'$ , воспользовавшись определением модуля,

$$|t^3| = \begin{cases} t^3, & \text{при } t \geq 0, \\ -t^3, & \text{при } t \leq 0, \end{cases} \quad |t^3|' = \begin{cases} 3t^2 = 3t \cdot t, & \text{при } t \geq 0, \\ -3t^2 = 3t \cdot (-t), & \text{при } t \leq 0, \end{cases}$$

отсюда  $|t^3|' = 3t|t|$ .

Тогда значение определителя Вронского

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^3 & |t^3| \\ 3t^2 & 3t|t| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^3 & t^2|t| \\ 3t^2 & 3t|t| \end{vmatrix} = 3t^4|t| - 3t^4|t| = 0$$

позволяет нам предположить о линейной зависимости исходных функций.

Однако, рассмотрим условия, при которых равенство  $c_1 t^3 + c_2 |t^3| \equiv 0$  имеет место.

$$0 \equiv c_1 t^3 + c_2 |t^3| = \begin{cases} c_1 t^3 + c_2 t^3, & \text{при } t \geq 0, \\ c_1 t^3 - c_2 t^3, & \text{при } t \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Следовательно, функции  $y_1 = t^3$ ,  $y_2 = |t^3|$  при любых  $t \in (\alpha, \beta)$ , являются линейно независимыми.



**Пример 1.4.** Выяснить, являются ли решения  $y_1 = t$ ,  $y_2 = t^2$  уравнения  $y''' = 0$  при любых  $t \in (\alpha, \beta)$ , линейно зависимыми или линейно независимыми.

*Решение.* Вычислим определитель Вронского для заданных функций

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t^2 - t^2 = t^2.$$

$$W(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

При этом  $W(t) \neq 0$  для всех остальных  $t \in (\alpha, \beta)$ , поэтому они линейно независимы.



### • Упражнения для самостоятельной работы

1. Известно, что для функций  $y_1, \dots, y_n$  определитель Вронского в точке  $t_0$  равен нулю, а в точке  $t_1$  не равен нулю. Можно ли что-нибудь

сказать о линейной зависимости (или независимости) этих функций на отрезке  $[t_0, t_1]$ ?

2. Определитель Вронского для функций  $y_1, \dots, y_n$  равен нулю при всех  $t$ . Могут ли быть эти функции линейно зависимыми? Линейно независимыми?

3. Что можно сказать об определителе Вронского функций  $y_1, \dots, y_n$ , если только известно, а) что они линейно зависимы? б) что они линейно независимы?

4. Функции  $y_1 = t$ ,  $y_2 = t^7$ ,  $y_3 = |t^7|$  удовлетворяют уравнению  $t^2 y'' - 7ty' + 7y = 0$ . Являются ли они линейно зависимыми на интервале  $(-1; 1)$ ? Объясните ответ.

5. Исследовать, являются ли данные функции линейно зависимыми. Функции рассматриваются в той области, где они определены.


1)  $2t + 1$ ,  $2t - 1$ ; 2)  $12t - 9$ ,  $16t - 12$ ; 3)  $\sin t$ ,  $\cos(t + \pi)$ ; 4)  $3$ ,  $x^2$ ,  $2x^3$ ; 5)  $2 - t$ ,  $6t + 5$ ,  $4t + 3$ ; 6)  $t^2 + t$ ,  $5t^2 - 1$ ,  $3t + 2$ ; 7)  $t^2 + 2t + 3$ ,  $t^2 - 3$ ,  $t + 3$ ; 8)  $e^{-t}$ ,  $e^2 t$ ,  $e^{-2t}$ ; 9)  $t$ ,  $\cos t$ ,  $t \cos t$ ; 10)  $2$ ,  $2 \cos^2 t$ ,  $\cos 2t$ ; 11)  $\operatorname{sh} t$ ,  $\operatorname{ch} t$ ,  $e^{-t} - e^t$ ; 12)  $\ln t^3$ ,  $\ln 2t$ ,  $t$ .

6. Установить, при каком условии на коэффициенты данные функции будут а) линейно зависимыми, б) линейно независимыми. Приведите примеры. 1)  $at^2 + bt$ ,  $t^2 + c$ ,  $dt + e$ ; 2)  $at^2 + bt + c$ ,  $dt^2 + e$ ,  $ft + g$ ; 3)  $\sin(\alpha_1 t + \beta_1)$ ,  $\cos(\alpha_2 t + \beta_2)$ ; 4)  $at + b$ ,  $(ct + d)e^t$ ,  $e^t$ ; 5)  $\ln t^\alpha$ ,  $\ln \beta t$ ,  $at + b$ .

## 1.5. Фундаментальная система решений

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.24)$$

 **Определение 1.4.** Фундаментальной системой решений уравнения (1.24) называется любая система  $n$  ее линейно независимых решений.



**Лемма 1.7.** Фундаментальная система существует.

*Доказательство.* Возьмем  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  и любые  $n$  линейно независимых векторов  $b^1, b^2, \dots, b^n \in \mathbb{R}^n$ . Рассмотрим систему (1.24) с начальными условиями

$$x^1(t_0) = b^1, \quad x^2(t_0) = b^2, \quad \dots, \quad x^n(t_0) = b^n. \quad (1.25)$$

Тогда решениями поставленной задачи будут вектор-функции  $x^1, x^2, \dots, x^n$ .

По построению  $b^i, i = \overline{1, n}$ , – линейно независимые векторы, поэтому при  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  выполняется равенство  $c_1 b^1 + c_2 b^2 + \dots + c_n b^n = 0$ . Подставим в него значения  $b^i, i = \overline{1, n}$ , определенные условиями (1.25), и получим

$$c_1 x^1(t_0) + c_2 x^2(t_0) + \dots + c_n x^n(t_0) = 0.$$

Поэтому и при произвольном  $t$  это равенство имеет место, т.е.

$$c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) + \dots + c_n x^n(t) = 0,$$

где  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ . Отсюда следует линейная независимость вектор-функций  $x^1, \dots, x^n$ , которые будут определять фундаментальную систему решений. •



**Определение 1.5.** Общим решением системы дифференциальных уравнений называют множество функций, содержащее все решения этой системы и только их (или формулу, представляющую это множество при всевозможных значениях произвольных постоянных).



**Теорема 1.2 (Об общем решении системы).** Пусть  $x^1(t), \dots, x^n(t)$  – какие-нибудь  $n$  линейно независимых решений системы (1.24). Тогда функция

$$x(t) = c_1 x^1(t) + \dots + c_n x^n(t), \quad (1.26)$$

где  $c_1, \dots, c_n$  – произвольные постоянные, является общим решением системы.

*Доказательство.* По свойству линейных уравнений и систем функция (1.26) при любых  $c_1, \dots, c_n$  является решением как линейная комбинация решений. Покажем, что любое решение  $x(t)$  системы (1.24) выражается формулой (1.26).

Возьмем  $t_0 \in (\alpha, \beta)$ . Поскольку  $x^1, \dots, x^n$  – линейно независимые, поэтому в силу следствия 1.3,

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} x_1^1(t_0) & x_1^2(t_0) & \dots & x_1^n(t_0) \\ x_2^1(t_0) & x_2^2(t_0) & \dots & x_2^n(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1(t_0) & x_n^2(t_0) & \dots & x_n^n(t_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$


Для нахождения коэффициентов  $c_1, \dots, c_n$  распишем (1.26) по координатам с учетом точки  $t_0$  и получим систему

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t_0) = c_1x_1^1(t_0) + \dots + c_nx_1^n(t_0), \\ x_2(t_0) = c_1x_2^1(t_0) + \dots + c_nx_2^n(t_0), \\ ..... \\ x_n(t_0) = c_1x_n^1(t_0) + \dots + c_nx_n^n(t_0). \end{array} \right.$$

Эта система имеет единственное решение  $c_1, \dots, c_n$ , поскольку определитель матрицы системы по условию

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^1(t_0) & x_1^2(t_0) & \dots & x_1^n(t_0) \\ x_2^1(t_0) & x_2^2(t_0) & \dots & x_2^n(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1(t_0) & x_n^2(t_0) & \dots & x_n^n(t_0) \end{vmatrix} = W(t_0) \neq 0.$$

С этими  $c_1, \dots, c_n$  для решения  $x(t)$  при  $t = t_0$  справедливо равенство (1.26). Обе части этого равенства – решение системы (1.24). По теореме 1.1 они должны совпадать при всех  $t$ . Таким образом, любые решения (1.24) представимо в виде (1.26). •

 **Замечание 1.6.** Эта теорема означает, что множество решений системы (1.24) есть  $n$ -мерное линейное пространство. Базис в этом пространстве — любая фундаментальная система решений, а (1.26) это представление любого элемента этого пространства в виде линейной комбинации элементов базиса.

Рассмотрим теперь уравнение высокого порядка

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0. \quad (1.27)$$

Используя замену (1.11) сведем уравнение (1.27) к линейной однородной системе

[illegible]

Эта система в силу теоремы 1.2 об общем решении системы имеет  $n$  линейно независимых решений

$$x^1, x^2, \dots, x^n,$$

а так же общее решение

$$x = c_1 x^1 + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n.$$

Следовательно, уравнение (1.27) имеет  $n$  линейно независимых решений  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Более того, в силу теоремы 1.2 и замены (1.11) справедлива



**Теорема 1.3 (Об общем решении уравнения).** Пусть  $y_1, \dots, y_n$  – какие-нибудь  $n$  линейно независимых решений уравнения (1.27), а  $c_1, \dots, c_n$  – произвольные постоянные. Тогда общее решение уравнения (1.27) есть линейная комбинация этих линейно независимых решений

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t). \quad (1.29)$$



• **Следствие 1.2.** Любые  $m$  ( $m > n$ ) решений уравнения (1.27) линейно зависимы.

*Доказательство.* Предположим, что решения  $y_1, \dots, y_m$  – линейно независимы. Однако  $y_1, \dots, y_n$  так же линейно независимые. Тогда в силу (1.29) можно записать решение  $y_{n+1} = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ . Поскольку решение  $y_{n+1}$  выражается через линейно независимые решения, значит оно линейно зависимое. Полученное противоречие доказывает утверждение. •



### • Упражнения для самостоятельной работы

1. Показать, что система  $\dot{x} = (t)x$  с данной матрицей имеет следующую фундаментальную систему решений:

$$1.1. \quad C(t) = \frac{1}{t-1} \begin{pmatrix} -t-1 & -1 & -1 \\ t^2+t & t & t+1 \\ -1+1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x^1(t) = \frac{1}{t-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x^2(t) = \frac{1}{t-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad x^3(t) = \frac{1}{t-1} \begin{pmatrix} -2t+2 \\ t^2+2t-2 \\ t^2-2t \end{pmatrix}.$$

$$1.2. \quad C(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & t \\ -1 & 0 & -2t \\ -t & -1 & 2-t \end{pmatrix}, \quad x^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^3(t) = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1-t-2t^2 \\ t+2 \end{pmatrix}.$$

$$1.3. \quad C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \sin t - \cos t \sin t & -\cos t \\ 0 & \sin t & 1 \\ 0 & -(\sin^2 t + \cos t + 1) & -\sin t \end{pmatrix}, \quad x^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^2(t) = e^t \begin{pmatrix} \sin t - \cos^2 t \\ \cos t \\ -(\sin t \cos t + \sin t) \end{pmatrix}, \quad x^3(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \cos t \\ -\sin t \\ \sin^2 t - \cos t \end{pmatrix}.$$

2. Может ли фундаментальная система матричного уравнения (1.24)  $n$ -го порядка иметь меньше, чем  $n$  решений? Может ли матричное уравнение (1.24) иметь больше, чем  $n$  решений?

## 1.6. Построение линейного однородного уравнения по фундаментальной системе решений



**Лемма 1.8.** Пусть известны функции  $u_1, \dots, u_n \in C^n(\alpha, \beta)$  и их вронскиан  $W(t) \neq 0$  при любом  $t \in (\alpha, \beta)$ . Тогда исконое уравнение с неизвестной функцией  $y$  можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n & y \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.30)$$



*Доказательство.* Разложим определитель (1.30) по элементам последнего столбца. Обозначим через  $a_n(t)$  алгебраическое дополнение

$$a_n(t) = (-1)^{1+n+1} \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Аналогично, алгебраическое дополнение (коэффициент  $a_{n-1}(t)$ ) при переменной  $y'$

$$a_{n-1}(t) = (-1)^{1+n+2} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u''_1 & u''_2 & \dots & u''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Продолжим выписывать коэффициенты  $a_i(t)$  до тех пор, пока не дойдем до переменной  $y^{(n)}$ , т.е.

$$a_0(t) = (-1)^{2(1+n)} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Из последнего равенства видим, что  $a_0(t)$  совпадает с вронскианом  $W(t)$ , который по условию отличен от нуля, т.е.  $a_0(t) = W(t) \neq 0$  при любом  $t \in (\alpha, \beta)$ .

Таким образом (1.30) с учетом обозначений примет вид (1.27), т.е. будет линейным однородным уравнением  $n$ -го порядка, где по построению для любого  $t \in (\alpha, \beta)$  коэффициенты  $a_i(t) \in C(\alpha, \beta)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , причем  $a_0(t) \neq 0$ .

Проверим теперь, что функции  $u_1, \dots, u_n$  являются решениями уравнения (1.27) или (1.30). Предположим, что искомая функция  $y = y(t)$  совпадает с одной из набора  $u_1, \dots, u_n$ . Пусть это будет функция  $u_j(t) = y$ ,

стоящая в  $j$ -том столбце. Тогда последний столбец (1.30) совпадает с  $j$ -тым столбцом, а по свойству определителей это свидетельствует о равенстве нулю этого определителя. Таким образом тождество верно для всех функции  $u_1, \dots, u_n$ , следовательно они являются решениями уравнения (1.27) или (1.30). •



**Пример 1.5.** Пусть известны функции  $e^x, e^{2x}$ , найти линейное дифференциальное уравнение с неизвестной функцией  $y = y(x)$  (возможно меньшего порядка), имеющего данные частные решения.

*Решение.* Для начала проверим, являются ли решения линейно независимыми, для этого вычислим вронскиан. Если обозначить  $u_1 = e^x$ ,  $u_2 = e^{2x}$ , то

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Из этого равенства можно сделать однозначный вывод о линейной независимости решений.

Искомое уравнение с неизвестной функцией  $y = y(x)$  в соответствии с формулой (1.30) можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & y \\ u_1' & u_2' & y' \\ u_1'' & u_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & y \\ e^x & 2e^{2x} & y' \\ e^x & 4e^{2x} & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель слева

$$e^{3x}y'' - 3e^{3x}y' + 2ye^{3x} = 0$$

и сократив на  $e^{3x} \neq 0$ , получим уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Легко проверить подстановкой, что функции  $e^x, e^{2x}$  являются решениями полученного уравнения.



**Пример 1.6.** Пусть известны функции  $5$ ,  $\cos^2 x$ ,  $\sin^2 x$ , найти линейное дифференциальное уравнение с неизвестной функцией  $y = y(x)$  (возможно меньшего порядка), имеющего данные частные решения.

*Решение.* Для начала проверим, являются ли решения линейно независимыми, для этого вычислим вронскиан. Если обозначить  $u_1 = 5$ ,  $u_2 = \cos^2 x$ ,  $u_3 = \sin^2 x$ , то

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & \cos^2 x & \sin^2 x \\ 0 & -\sin 2x & \sin 2x \\ 0 & -2 \cos 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Из этого равенства можно сделать предварительный вывод о линейной зависимости решений. Удостоверимся в этом, для этого проверим линейную зависимость по определению. Тождество  $5c_1 + c_2 \cos^2 x + c_3 \sin^2 x \equiv 0$  имеет место при  $c_1 = -0,2$ ,  $c_2 = c_3 = 1$ , т.е. нашлись такие константы  $c_i$ , одновременно не равные нулю, при которых линейная комбинация исходных функций обращается в нуль, следовательно, функции действительно являются линейно зависимыми.

Для построения фундаментальной системы решений нам требуется, тем не менее, на основе исходных с помощью их линейной комбинации, подобрать такие функции, чтобы они были линейно независимыми. Например,  $v_1 = 5 + \cos^2 x$ ,  $v_2 = \sin^2 x$ . Тогда вронскиан будет иметь вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 + \cos^2 x & \sin^2 x \\ -\sin 2x & \sin 2x \end{vmatrix} =$$

$$= \sin 2x(5 + \cos^2 x + \sin^2 x) = 6 \sin 2x \neq 0$$

для любого  $x \neq \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Искомое уравнение с неизвестной функцией  $y = y(x)$  в соответствии с формулой (1.30) можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & y \\ v_1' & v_2' & y' \\ v_1'' & v_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 + \cos^2 x & \sin^2 x & y \\ -\sin 2x & \sin 2x & y' \\ -2 \cos 2x & 2 \cos 2x & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель слева, получим уравнение

$$6 \sin 2xy'' - 12 \cos 2xy' = 0.$$

Легко проверить подстановкой, что функции  $5 + \cos^2 x$ ,  $\sin^2 x$  являются решениями полученного уравнения.



### • Упражнения для самостоятельной работы

Построить линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно меньшего порядка), имеющее данные частные решения:

- 1)  $\operatorname{tg}^2 t$ ,  $\frac{1}{\cos^2 t}$ ; 2)  $1$ ,  $\operatorname{tg} t$ ; 3)  $1$ ,  $t$ ,  $\operatorname{tg} t$ ; 4)  $3$ ,  $\ln t$ ,  $\ln^3 t$ ; 5)  $\frac{1}{t}$ ,  $\ln t$ ; 6)  $1$ ,  $\ln t$ ; 7)  $2$ ,  $\ln 3t$ ; 8)  $2$ ,  $2t$ ,  $t^2$ ; 9)  $e^{2t}$ ,  $te^{2t}$ .

## 1.7. Фундаментальная матрица системы



**Определение 1.6.** Фундаментальной матрицей системы (1.24) называется матрица  $X(t)$ , столбцы которой составляют фундаментальную систему решений.

Поскольку такие решения линейно независимы, то по лемме 1.6

$$\det X(t) = W(t) \neq 0.$$

С помощью фундаментальной матрицы  $X(t)$  общее решение записывается в виде

$$x(t) = X(t) \cdot c, \text{ где } c = \operatorname{col}(c_1, \dots, c_n).$$

Это будет вектор-функция размерности

$$X_{n \times n} \cdot c_{n \times 1} = x_{n \times 1}.$$

Поскольку столбцы фундаментальной матрицы являются решениями системы (1.24), то она в свою очередь есть решение системы

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t).$$



**Пример 1.7.** Найти фундаментальную матрицу системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0, \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} \dot{x} = 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ \dot{y} = 0 \cdot x + 0 \cdot y, \end{cases} \quad \sim$$

$$\sim \dot{u} = A(t)u, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u = \text{col}(x, y).$$

*Решение.* Из второго уравнения системы найдем функцию  $y$ , т.е.  $\dot{y} = 0 \Rightarrow y = c_1$ . Подставим полученное  $y$  в первое уравнение системы  $\dot{x} = c_1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = c_1 \Rightarrow \int dx = c_1 \int dt$ . Отсюда решение  $x = c_1 t + c_2$ .

Таким образом общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x = c_1 t + c_2, \\ y = c_1. \end{cases}$$

Найдем какие-нибудь два частных решения, задав конкретные значения  $c_1$  и  $c_2$ .

$$\begin{aligned} 1) \ c_1 = 1, \ c_2 = 0 &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = t, \\ y_1 = 1, \end{cases} \\ 2) \ c_1 = 0, \ c_2 = 1 &\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 0, \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow W(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Следовательно, эти решения линейно независимы, и фундаментальная матрица системы имеет вид  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

*Проверка.* Найдем  $A(t) \cdot X(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . С другой стороны,  $\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Таким образом, тождество  $\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t)$  верно.



**Теорема 1.4. (Переход от одной фундаментальной матрицы к другой).** Пусть  $X(t)$  – фундаментальная матрица системы (1.24),  $C$  – невырожденная матрица порядка  $n$  ( $\det C \neq 0$ ),  $Y(t) = X(t) \cdot C$  – фундаментальная матрица этой же системы. Подбрав матрицу  $C$ , из данной фундаментальной матрицы  $X(t)$  можно получить любую фундаментальную матрицу  $Y(t)$ .

*Доказательство.*

1) Пусть  $c^i$  и  $y^i$  –  $i$ -ые столбцы матрицы  $C$  и  $Y(t)$ . Из равенства  $Y(t) = X(t) \cdot C$  по правилу умножения матриц

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} y_1^1(t) & y_1^2(t) & \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & y_2^2(t) & \dots & y_2^n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^1(t) & y_n^2(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \dots & x_2^n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n^1 & c_n^2 & \dots & c_n^n \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} x_1^1(t)c_1^1 + x_1^2(t)c_2^1 + \dots + x_1^n(t)c_n^1 & \dots & x_1^1(t)c_1^n + x_1^2(t)c_2^n + \dots + x_1^n(t)c_n^n \\ x_2^1(t)c_1^1 + x_2^2(t)c_2^1 + \dots + x_2^n(t)c_n^1 & \dots & x_2^1(t)c_1^n + x_2^2(t)c_2^n + \dots + x_2^n(t)c_n^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1(t)c_1^1 + x_n^2(t)c_2^1 + \dots + x_n^n(t)c_n^1 & \dots & x_n^1(t)c_1^n + x_n^2(t)c_2^n + \dots + x_n^n(t)c_n^n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

следует, что  $y^i = X(t)c^i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Значит,  $y^i$  – решение той же системы (1.24).

2)  $\det Y(t) = \det X(t) \cdot \det C$ , причем  $\det X(t) \neq 0$  (как определитель фундаментальной матрицы) и  $\det C \neq 0$  (по условию), следовательно,  $\det Y(t) \neq 0$ , поэтому  $y^i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , – линейно независимые решения, а матрица  $Y(t)$ , составленная из них, является фундаментальной.

Пусть теперь  $X(t)$  и  $Y(t)$  – фундаментальные матрицы системы (1.24). Из равенства  $Y(t) = X(t) \cdot C$  найдем  $C$ . Пусть  $t = t_0$ , умножим слева равенство  $Y(t_0) = X(t_0) \cdot C$  на матрицу  $X^{-1}(t_0)$ , получим

$$X^{-1}(t_0) \cdot Y(t_0) = X^{-1}(t_0) \cdot X(t_0) \cdot C.$$

Поскольку  $X^{-1}(t_0) \cdot X(t_0) = \mathbb{E}$ , то  $C = X^{-1}(t_0)Y(t_0)$ .

Покажем теперь, что найденная матрица  $C$  позволит найти именно  $Y(t)$ . Рассмотрим матрицу  $Z(t) = X(t) \cdot C = X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot Y(t_0)$ , такую,

что столбцы этой матрицы  $Z(t)$  есть решения той же системы. Очевидно, что при  $t = t_0$  матрица

$$Z(t_0) = X(t_0) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot Y(t_0) = Y(t_0).$$

Отсюда, по теореме 1.1 о единственности решения каждый столбец совпадает со столбцом матрицы  $Y(t)$ . Таким образом,  $Y(t) \equiv Z(t) \equiv X(t) \cdot C$ , где  $C = X^{-1}(t_0)Y(t_0)$ ,  $\det C = \det X^{-1}(t_0) \cdot \det Y(t_0) \neq 0$ . •



### • Упражнения для самостоятельной работы

1. Для следующих систем найти фундаментальную матрицу и сделать проверку:

$$1.1. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = 0 \end{cases}; \quad 1.2. \begin{cases} \dot{x} = tz \\ \dot{y} = t^3x + tz \\ \dot{z} = tz \end{cases}; \quad 1.3. \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y \\ \dot{z} = ty - z \end{cases}.$$

2. Найти фундаментальную матрицу  $X(t)$ , если известно, что другая фундаментальная матрица  $Y(t) = X(t) \cdot C$ , причем

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} 5t + 8 & 1 - 3t \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Найти постоянную матрицу  $C$ , если известно, что две фундаментальные матрицы  $X(t)$  и  $Y(t)$  связаны соотношением  $Y(t) = X(t) \cdot C$ , причем

$$X(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t & 1 \\ t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 2 & 2t & 2t^2 + t + 1 \\ t & 2 & 2t + 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

## 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ И УРАВНЕНИЯ

### 2.1. Формула Лиувилля – Остроградского

#### 2.1.1. Решение систем линейных уравнений



**Лемма 2.1 (Правило дифференцирования определителя).** Пусть  $D$  – определитель порядка  $n$ . Тогда производная определителя  $D' = D_1 + \dots + D_n$ , где  $D_i, i = \overline{1, n}$ , – определители, получающиеся заменой всех элементов  $i$ -ой строки на их производные.

*Доказательство.* Формула вычисления определителя  $n$ -го порядка имеет вид

$$D = \sum (\pm) b_{1j_1} \cdot b_{2j_2} \cdot \dots \cdot b_{ij_i} \cdot \dots \cdot b_{nj_n}. \quad (2.1)$$

Здесь  $b_{ij}$  – элемент  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца определителя  $D$ . Сумма берется по всем  $n!$  перестановкам чисел  $1, \dots, n$ . Если перестановка четная (нечетная), то берется знак  $+$  ( $-$ ).

По правилу производной произведения  $n$  множителей

$$\begin{aligned} (b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n)' &= \\ &= b_1' \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n + b_1 \cdot b_2' \cdot \dots \cdot b_n + \dots + b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n', \end{aligned} \quad (2.2)$$

т.е. в  $i$ -ом слагаемом на производную заменяется  $i$ -ый множитель  $b_i$ .

Таким образом, при вычислении производной определителя  $D$ , нужно вычислить производную каждого слагаемого в формуле (2.1) по формуле (2.2) перегруппировать полученные произведения, и получить требуемую формулу производной определителя. •



**Пример 2.1.** Вычислим производную определителя третьего порядка, составленного из функций  $a_{ij} = a_{ij}(t)$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$ . При всех преобразованиях переменную  $t$  будем опускать.

*Решение.*

$$(\Delta)' = \left( \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right)' = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33})' +$$



$$\begin{aligned}
& + (a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13})' + (a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{12})' - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13})' - (a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})' - (a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11})' = \\
& = a'_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a'_{22} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{22} \cdot a'_{33} + a'_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{21} \cdot a'_{32} \cdot a_{13} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a'_{13} + \\
& + a'_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{12} + a_{23} \cdot a'_{31} \cdot a_{12} + a_{23} \cdot a_{31} \cdot a'_{12} - a'_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{31} \cdot a'_{22} \cdot a_{13} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a'_{13} - \\
& - a'_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{21} \cdot a'_{12} \cdot a_{33} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a'_{33} - a'_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{23} \cdot a'_{32} \cdot a_{11} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a'_{11}.
\end{aligned}$$

Сгруппируем теперь слагаемые следующим образом. Сначала выберем все слагаемые, у которых под знаком производной стоят элементы первой строки (т.е.  $a_{1j}$ ,  $j = \overline{1, 3}$ ). Потом аналогично выбираем слагаемые, у которых под знаком производной стоят элементы второй строки (т.е.  $a_{2j}$ ,  $j = \overline{1, 3}$ ). Потом группируем оставшиеся слагаемые.

$$\begin{aligned}
& (a'_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a'_{13} + a_{23} \cdot a_{31} \cdot a'_{12} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a'_{13} - a_{21} \cdot a'_{12} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a'_{11}) + \\
& + (a_{11} \cdot a'_{22} \cdot a_{33} + a'_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a'_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{12} - a_{31} \cdot a'_{22} \cdot a_{13} - a'_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a'_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}) + \\
& + (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a'_{33} + a_{21} \cdot a'_{32} \cdot a_{13} + a_{23} \cdot a'_{31} \cdot a_{12} - a'_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a'_{33} - a_{23} \cdot a'_{32} \cdot a_{11}) =
\end{aligned}$$

Запишем полученные суммы в виде суммы определителей

$$= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = D_1 + D_2 + D_3 = (\Delta)'.$$



**Теорема 2.1. (Формула Лиувилля – Остроградского решений линейной однородной системы).** Пусть  $W(t)$  – вронскиан любых  $n$  решений линейной однородной системы

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.3)$$

Тогда для любых  $t_0, t \in (\alpha, \beta)$  вронскиан имеет вид

$$W(t) = W(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t s(\tau) d\tau \right), \quad s(\tau) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(\tau). \quad (2.4)$$

*Доказательство.* По определению столбцы вронскиана  $W(t)$  являются решениями системы (2.3), кроме того, в силу леммы 2.1

$$(W(t))' = D_1 + \dots + D_n, \quad (2.5)$$

где  $D_i$  получается из вронскиана заменой всех элементов  $i$ -ой строки на их производные, т.е.

$$x_i^j \rightarrow (x_i^j)', \quad j = \overline{1, n}.$$

Поскольку  $x_i^j$  –  $i$ -ая координата  $j$ -го решения системы (2.3), то  $i$ -ая строка в  $D_i$  имеет вид

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k^1 \dots \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k^n,$$

а остальные строки, как у исходного вронскиана  $W(t)$ .

Вычтем из  $i$ -ой строки первую, умноженную на  $a_{i1}$ ; вторую, умноженную на  $a_{i2}$ , и так далее до  $(i-1)$ -ой строки. Пропускаем  $i$ -ую строку. Далее, продолжаем вычитать  $(i+1)$ -ую строку, умноженную на  $a_{i(i+1)}$ , и так далее, в конце вычитаем  $n$ -ую строку, умноженную на  $a_{in}$ . Величина определителя  $D_i$  от этого не меняется, при этом  $i$ -ая строка принимает вид  $a_{ii}x_i^1 \dots a_{ii}x_i^n$ . Вынося множитель  $a_{ii}$  за знак определителя, находим  $D_i = a_{ii}W(t)$ .

Преобразовав каждое слагаемое в формуле (2.5) получим

$$(W(t))' = a_{11}W(t) + a_{22}W(t) + \dots + a_{nn}W(t) = s(t)W(t),$$

где  $s(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$  – след матрицы  $A(t)$ .

Решим уравнение

$$W'(t) = s(t)W(t) \Leftrightarrow \frac{dW(t)}{dt} = s(t)W(t).$$

$$\frac{dW(t)}{W(t)} = s(t)dt \Leftrightarrow \int_{t_0}^t \frac{dW(\tau)}{W(\tau)} = \int_{t_0}^t s(\tau)d\tau.$$

$$\ln |W(t)| \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t s(\tau)d\tau.$$

По формуле Ньютона – Лейбница получим

$$\ln |W(t)| - \ln |W(t_0)| = \int_{t_0}^t s(\tau)d\tau, \text{ где } W(t_0) \neq 0.$$

$$\ln \left| \frac{W(t)}{W(t_0)} \right| = \int_{t_0}^t s(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{W(t)}{W(t_0)} = \exp \int_{t_0}^t s(\tau)d\tau.$$

В итоге получаем

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp \int_{t_0}^t s(\tau)d\tau.$$

Если же  $W(t_0) = 0$ , то  $W(t) \equiv 0$  в силу леммы 1.4. •



**Пример 2.2.** Найти все решения системы, используя формулу Лиувилля – Остроградского.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \cdot x + 1 \cdot y, \\ \dot{y} = -1 \cdot x + 0 \cdot y. \end{cases}$$

*Решение.* Отсюда имеем

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 0.$$

Подберем одно решение исходной системы, например,  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ . Легко проверить, что это действительно решение системы.

Обозначим второе решение системы  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ . Предположим также, что это решение удовлетворяет условию  $\varphi(0) = -1$ ,  $\psi(0) = 0$ . Согласно формуле Лиувилля – Остроградского получим

$$W(t) = \begin{vmatrix} \sin t & \varphi(t) \\ \cos t & \psi(t) \end{vmatrix} = W(0) \exp \int (a_{11} + a_{22}) d\tau = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \exp \int 0 d\tau.$$

Отсюда получим равенство

$$\psi(t) \sin t - \varphi(t) \cos t = 1 \cdot e^0 = 1,$$

с учетом которого  $\psi(t) = \frac{1 + \varphi(t) \cos t}{\sin t}$ .

Поскольку  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  – решение системы, следовательно, при подстановке его в систему получим верное тождество, а именно,

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = \psi(t), \\ \dot{\psi}(t) = -\varphi(t). \end{cases}$$

Подставим в первое уравнение системы найденное выше выражение  $\psi(t)$ , получим

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1 + \varphi(t) \cos t}{\sin t}$$

и перепишем в виде

$$\dot{\varphi}(t) = \varphi(t) \operatorname{ctgt} + \frac{1}{\sin t}.$$

Это линейное уравнение первого порядка, решим его с помощью подстановки Бернулли. Обозначим искомую функцию  $\varphi(t) = u \cdot v$ , тогда  $\dot{\varphi}(t) = \dot{u} \cdot v + u \cdot \dot{v}$ . Подставим в уравнение, получим

$$\dot{u} \cdot v + u \cdot \dot{v} = u \cdot v \operatorname{ctgt} + \frac{1}{\sin t}.$$

Отсюда получим, что  $u = \sin t$ , а для нахождения  $v$  требуется решить уравнение

$$\sin t \cdot \dot{v} = \frac{1}{\sin t}.$$

Итак,  $v = \int \frac{1}{\sin^2 t} dt = -\operatorname{ctg} t + C$ , возьмем  $C = 0$ , т.к. ищем частное решение.

Таким образом, функция  $\varphi(t) = u \cdot v = \sin t \cdot (-\operatorname{ctg} t) = -\cos t$ , а функция  $\psi(t) = \dot{\varphi}(t) = (-\cos t)' = \sin t$ . В результате получим фундаментальную матрицу системы

$$\begin{pmatrix} -\cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

на основе которой составим общее решение системы

$$\begin{cases} x = -C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{cases}$$

### 2.1.2. Решение линейного однородного дифференциального уравнения



**Теорема 2.2. (Формула Лиувилля – Остроградского решения линейного однородного уравнения высокого порядка).** Пусть  $W(t)$  – вронскиан любых  $n$  решений линейного однородного уравнения

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0. \quad (2.6)$$

Тогда для любых  $t_0, t \in (\alpha, \beta)$  вронскиан имеет вид


$$W(t) = W(t_0) \exp \left( - \int_{t_0}^t \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)} d\tau \right). \quad (2.7)$$

*Доказательство.* Вронскиан  $W(t)$  для решений уравнений (2.6) тот же, что и для решений системы (2.3) в силу замены (1.11). Ранее доказано, что для линейной однородной системы имеет место формула Лиувилля – Остроградского (2.4). В системе (1.28) коэффициенты  $a_{ii} = 0, i = \overline{1, n-1}$ ,

$a_{nn} = -\frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)}$ , тогда

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}(\tau) = 0 + 0 + \dots + 0 - \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)} = s(\tau).$$

Подставим функцию  $s(\tau)$  в формулу (2.4) и получим требуемое. •

 **Замечание 2.1.** Пусть уравнение (2.6) второго порядка ( $n = 2$ ), тогда если удастся подобрать частное решение  $y_1 = y_1(x)$ , то воспользовавшись формулой (2.7) можно найти  $y_2 = y_2(x)$ . Частное решение  $y_1$  может быть представлено либо в виде многочлена  $y_1(x) = x^n + A_1 \cdot x^{n-1} + \dots + A_n \cdot 1$ , либо в виде экспоненты  $y_1(x) = e^{\alpha x}$ .

Кроме того, можно записать (2.7) в виде

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1' = W(x_0) \exp \left( - \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx \right).$$

Разделим обе части равенства на  $y_1^2 \neq 0$ , воспользуемся формулой производной частного, обозначим  $W(x_0) = C$  и получим

$$\frac{C}{y_1^2} \exp \left( - \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx \right) = \frac{y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'}{y_1^2} = \left( \frac{y_2}{y_1} \right) '.$$

Проинтегрируем обе части равенства, умножим на  $y_1$ , в результате получим так называемую *формулу Абеля*

$$y_2 = C \cdot y_1 \int \frac{\exp \left( - \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx \right)}{(y_1)^2} dx + C_1 \cdot y_1. \quad (2.8)$$



**Пример 2.3.** Решить дифференциальное уравнение

$$xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0.$$

*Решение.* Из условия имеем  $a_0(x) = x$ ,  $a_1(x) = -(2x + 1)$ ,  $a_2(x) = (x + 1)$ . Предположим, что частное решение имеет экспоненциальный вид  $y_1(x) = e^{\alpha x}$ . Поскольку по предположению  $y_1$  – решение, то при подстановке в исходное уравнений получим верное тождество, из которого сможем найти степень  $\alpha$ . Найдем  $y_1' = \alpha e^{\alpha x}$ ,  $y_1'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$ , подставим функцию  $y_1$  и ее производные в исходное уравнение и получим тождество

$$\alpha^2 x e^{\alpha x} - \alpha(2x + 1)e^{\alpha x} + (x + 1)e^{\alpha x} \equiv 0.$$

После сокращения на  $e^{\alpha x}$  будем иметь

$$(\alpha^2 - 2\alpha + 1)x + (1 - \alpha) = 0.$$

Последнее тождественно выполняется лишь при  $\alpha = 1$ , т.е.  $y_1 = e^x$ .

Отметим, что для нахождения  $\alpha$  мы воспользовались линейной независимостью функций  $x$  и  $1$ . Если бы не нашлось такого значения  $\alpha$ , при котором оба коэффициента при  $x$  и  $1$  были бы равны нулю, то частное решение исходного дифференциального уравнения нельзя было бы представить в виде экспоненты.

Воспользуемся (2.8), поскольку порядок дифференциального уравнения  $n = 2$ .

$$\begin{aligned} y_2 &= C \cdot e^x \int \frac{\exp\left(-\int \frac{-(2x+1)}{x} dx\right)}{(e^x)^2} dx + C_1 \cdot e^x = \\ &= C \cdot e^x \int \frac{\exp\left(\int \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx\right)}{e^{2x}} dx + C_1 \cdot e^x = \\ &= C \cdot e^x \int \frac{e^{2x} \cdot e^{\ln|x|}}{e^{2x}} dx + C_1 \cdot e^x = C \cdot e^x \int \frac{e^{2x} \cdot x}{e^{2x}} dx + C_1 \cdot e^x = \\ &= C \cdot e^x \int x dx + C_1 \cdot e^x = C \cdot e^x x^2 + C_1 \cdot e^x = e^x (Cx^2 + C_1). \end{aligned}$$

Ответ:  $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^x x^2$ .



**Пример 2.4.** Решить дифференциальное уравнение

$$(x^2 + 1)y'' - 2y = 0.$$

*Решение.* Из условия имеем  $a_0(x) = (x^2 + 1)$ ,  $a_1(x) = 0$ ,  $a_2(x) = -2$ .

Предположим, что частное решение имеет вид экспоненты  $y_1(x) = e^{\alpha x}$ . Найдем  $y_1' = \alpha e^{\alpha x}$ ,  $y_1'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$ , подставим функцию  $y_1$  и ее производные в исходное уравнение и получим тождество

$$\alpha^2(x^2 + 1)e^{\alpha x} - 2e^{\alpha x} = 0.$$

Сократив обе части равенства на  $e^{\alpha x}$ , будем иметь

$$\alpha^2 x^2 + (\alpha^2 - 2) = 0.$$

Отсюда ясно, что должно выполняться

$$\begin{cases} \alpha^2 = 0, \\ \alpha^2 - 2 = 0, \end{cases}$$

но эта система не имеет решения, значит частное решение исходного дифференциального уравнения нельзя представить в виде экспоненты.

Предположим теперь, что частное решение представлено в виде многочлена  $y_1(x) = x^n + A_1 \cdot x^{n-1} + \dots + A_{n-2} \cdot x^2 + A_{n-1} \cdot x + A_n \cdot 1$ . Поскольку по предположению  $y_1$  – решение, то при подстановке в исходное уравнений получим верное тождество, из которого сможем найти степень многочлена  $n$ . Для того, чтобы подставить функцию  $y_1$  и ее производные в исходное уравнение, найдем

$$y_1'(x) = nx^{n-1} + A_1 \cdot (n-1)x^{n-2} + \dots + 2A_{n-2} \cdot x + A_{n-1} \cdot 1 + A_n \cdot 0,$$

$$y_1''(x) = n(n-1)x^{n-2} + A_1 \cdot (n-1)(n-2)x^{n-3} + \dots + 2A_{n-2} \cdot 1 + A_{n-1} \cdot 0.$$

Подставим найденные функции в исходное уравнение, причем, поскольку нас интересует значение  $n$  нам достаточно подставить в уравнение слагаемые с максимальной степенью, получим

$$(x^2 + 1)(n(n-1)x^{n-2} + \dots) - 2(x^n + \dots) = 0.$$

Раскроем скобки

$$n(n-1)x^n + n(n-1)x^{n-2} + \dots - 2x^n + \dots = 0$$

и приведем подобные слагаемые

$$(n(n-1) - 2)x^n + n(n-1)x^{n-2} + \dots = 0.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов и приравняем коэффициенты при  $x^n$ , поскольку

$$(n(n-1) - 2)x^n + n(n-1)x^{n-2} + \dots = 0 \cdot x^n + 0 \cdot \dots$$

Отсюда  $(n(n-1) - 2) = 0 \Leftrightarrow n^2 - n - 2 = 0$ . Решениями этого квадратного уравнения будут  $n_1 = 2$  и  $n_2 = -1$ . Поскольку нас интересует только одно частное решение, возьмем  $n = 2$ . Поскольку мы нашли только степень многочлена, являющегося решением представим его с помощью неопределенных коэффициентов в виде  $y_1(x) = x^2 + A \cdot x + B \cdot 1$ . Требуется еще найти числа  $A$  и  $B$ . Для этого, поскольку  $y_1(x)$  является решением, подставив его и его производные в исходное дифференциальное уравнение, получим верное тождество. Имеем,  $y_1'(x) = 2x + A$ ,  $y_1''(x) = 2$ , тогда уравнение будет иметь вид

$$(x^2 + 1)2 - 2(x^2 + A \cdot x + B \cdot 1) = 2 - 2A \cdot x - 2B = 0.$$

Найдем  $A$  и  $B$  из системы, которую сформулируем на основании уравнения  $Ax + B = 1$ ,

$$\begin{cases} A = 0, \\ B = 1, \end{cases} \Rightarrow y_1(x) = x^2 + 1.$$

Воспользуемся формулой Абеля, чтобы найти второе решение уравнения

$$\begin{aligned} y_2 &= C \cdot (x^2 + 1) \int \frac{\exp\left(-\int \frac{0}{(x^2 + 1)} dx\right)}{(x^2 + 1)^2} dx + C_1 \cdot (x^2 + 1) = \\ &= C \cdot (x^2 + 1) \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx + C_1 \cdot (x^2 + 1). \end{aligned}$$

Таким образом, для того чтобы найти  $y_2$ , достаточно найти интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx &= \left[ \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \cos^{-2} t dt \\ t = \operatorname{arctg} x \end{array} \right] = \int \frac{dt}{\cos^2 t (\operatorname{tg}^2 t + 1)^2} = \\ &= \int \frac{\cos^4 t dt}{\cos^2 t} = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + c = \\ &= \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} \right) + c = \frac{1}{2} \left( \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2} \right) + c. \end{aligned}$$

Вернемся теперь к нашему решению, обозначив  $\frac{C}{2} = C_2$ , окончательно получим общее решение вида:

$$y = c_1 \cdot (x^2 + 1) + c_2 \cdot (x^2 + 1) \left( \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2} \right).$$



### • Упражнения для самостоятельной работы

1. Известно одно решение  $x_1(t)$  и  $y_1(t)$  системы. Найти другое, используя формулу Лиувилля – Остроградского.

1.1.  $x_1(t) = -e^{-t}$ ,  $y_1(t) = 2e^{-t}$ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$



$$1.2. x_1(t) = \frac{e^t}{t}, \quad y_1(t) = -te^t,$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{t-1}{t} \cdot x, \\ \dot{y} = (t^2 - t) \cdot x + 2 \cdot y. \end{cases}$$

$$1.3. x_1(t) = \operatorname{tg} t, \quad y_1(t) = \cos t,$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg} t \cdot x + \frac{1}{\cos t} \cdot y, \\ \dot{y} = -\cos t \cdot x. \end{cases}$$

2. Решить уравнения: 2.1.  $(x+3)^2 y'' - (2x+6)y' + 2y = 0$ ,  
 2.2.  $xy'' + (x-1)y' - y = 0$ , 2.3.  $(x+2)y'' + xy' - 2y = 0$ ,  
 2.4.  $4xy'' - 8y' + (4-x)y = 0$ , 2.5.  $x^2 y'' \ln x - xy' + y = 0$ ,  
 2.6.  $(x^2 - 1)y'' - (x+1)y' + y = 0$ .

## 2.2. Понижение порядка линейного однородного уравнения при известном частном решении

Пусть для уравнения (2.6) известно частное решение  $y_1 \neq 0, t \in (\alpha, \beta)$ . Покажем, что в этом случае уравнение (2.6) можно свести к линейному уравнению  $(n-1)$ -го порядка. Введем замену искомой функции  $y = y_1 z$ , где  $z = z(t)$ .

Воспользуемся формулой Лейбница для вычисления производной  $k$ -го порядка произведения, а именно, для любого  $k = \overline{1, n}$

$$y^{(k)} = (y_1 z)^{(k)} = C_k^0 \cdot y_1 \cdot z^{(k)} + C_k^1 \cdot y_1' \cdot z^{(k-1)} + \dots + C_k^{k-1} \cdot y_1^{(k-1)} \cdot z' + C_k^k \cdot y_1^{(k)} \cdot z,$$

Таким образом, поскольку  $C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}$ , то

$$y' = y_1' \cdot z + y_1 \cdot z',$$

$$y'' = (y_1 \cdot z)'' = C_2^0 \cdot y_1 \cdot z'' + C_2^1 \cdot y_1' \cdot z' + C_2^2 \cdot y_1'' \cdot z = y_1 \cdot z'' + 2y_1' \cdot z' + y_1'' \cdot z.$$

Подставим эти выражения в уравнение (2.6). Так как  $z, z', \dots, z^{(n)}$  войдут в уравнение (2.6) только в первой степени, то после алгебраических преобразований получится линейное однородное уравнение

$$b_0(t)z^{(n)} + b_1(t)z^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(t)z' + b_n(t)z = 0. \quad (2.9)$$

Поскольку уравнение (2.6) имело частное решение  $y = y_1$ , то при замене  $y = y_1 \cdot z$  будет справедливо тождество  $z \equiv 1$ , причем эта функция

$z$  будет являться решением (2.9). Следовательно, для нее  $z^{(k)} = 0$ ,  $k = \overline{1, n}$ , поэтому  $b_n(t) \equiv 0$ , а уравнение (2.9) будет иметь вид

$$b_0(t)(z')^{(n-1)} + b_1(t)(z')^{(n-2)} + \dots + b_{n-1}(t)z' = 0.$$

Сделаем замену  $z' = v$  в последнем уравнении и получим уравнение  $(n-1)$ -го порядка

$$b_0(t)v^{(n-1)} + b_1(t)v^{(n-2)} + \dots + b_{n-1}(t)v = 0. \quad (2.10)$$

Если же для уравнения (2.6) известно два или более линейно независимых частных решений, то с помощью указанной выше замены можно последовательно понижать порядок уравнения, получая одно или более частных решений уравнения (2.10).



**Пример 2.5.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0,$$

если известны два его частных решения  $y_1 = x^2$ ,  $y_2 = x^3$ .

*Решение.* Из условия имеем  $a_0(x) = x^3$ ,  $a_1(x) = -3x^2$ ,  $a_2(x) = 6x$ ,  $a_3 = -6$ . Для начала покажем линейную независимость решений  $y_1$  и  $y_2$ . Вычислим определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4 \neq 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Поэтому  $y_1, y_2$  – линейно независимые на всей числовой прямой.

Понизим теперь порядок уравнения заменой неизвестной функции  $y = y_1 \cdot z = x^2 \cdot z$ , где  $z = z(x)$  – неизвестная функция, причем  $z = \left(\frac{y}{y_1}\right)$ . Тогда  $y' = 2x \cdot z + x^2 \cdot z'$ ,  $y'' = 2z + 2x \cdot z' + 2x \cdot z' + x^2 \cdot z'' = 2z + 4x \cdot z' + x^2 \cdot z''$ ,  $y''' = 2z' + 4z' + 4x \cdot z'' + 2x \cdot z'' + x^2 \cdot z''' = 6z' + 6x \cdot z'' + x^2 \cdot z'''$ . Подставим найденные производные в уравнение и получим

$$\begin{aligned} & x^3(6z' + 6x \cdot z'' + x^2 \cdot z''') - 3x^2(2z + 4x \cdot z' + x^2 \cdot z'') + 6x(2x \cdot z + x^2 \cdot z') - 6x^2 \cdot z = \\ & = x^5 \cdot z''' + (6x^4 - 3x^4) \cdot z'' + (6x^3 - 12x^3 + 6x^3) \cdot z' + (-6x^2 + 12x^2 - 6x^2) \cdot z = \\ & = x^5 \cdot z''' + 3x^4 z'' = 0. \end{aligned}$$

Сделаем вторую замену  $z' = v$ , причем  $z = \int v dx$ , с другой стороны  $\frac{y}{y_1} = z = \int v dx$ , таким образом,  $\left(\frac{y}{y_1}\right)' = v$ . Получим уравнение с переменными коэффициентами

$$x^5 \cdot v'' + 3x^4 v' = 0 \Leftrightarrow v'' + 3x^{-1} v' = 0, \text{ где } a_0(x) = 1, a_1(x) = 3x^{-1},$$

которое решим по формуле Абеля (2.8)

$$\begin{aligned} v_2 &= C \cdot v_1 \int \frac{\exp\left(-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx\right)}{(v_1)^2} dx + C_1 \cdot v_1 = \\ &= C \cdot v_1 \int \frac{\exp\left(-\int \frac{3x^{-1}}{1} dx\right)}{(v_1)^2} dx + C_1 \cdot v_1 = \\ &= C \cdot v_1 \int \frac{\exp\left(-\int \frac{3}{x} dx\right)}{(v_1)^2} dx + C_1 \cdot v_1 = C \cdot v_1 \int \frac{\exp(-3 \ln |x|)}{(v_1)^2} dx + C_1 \cdot v_1 = \\ &= C \cdot v_1 \int \frac{x^{-3}}{(v_1)^2} dx + C_1 \cdot v_1. \end{aligned}$$

Чтобы найти  $v_1$ , воспользуемся соотношением  $v = \left(\frac{y}{y_1}\right)' = \left(\frac{y}{x^2}\right)'$ , но поскольку  $y_2 = x^3$  – решение, мы можем его подставить вместо  $y$ , таким образом, получим  $v_1 = \left(\frac{x^3}{x^2}\right)' = x' = 1$ .

Вернемся теперь к формуле Абеля (2.8), получим, что общее решение

$$v = C \cdot 1 \int \frac{x^{-3}}{1} dx + C_1 \cdot 1 = \frac{C \cdot x^{-2}}{-2} + C_1.$$

Отсюда, общее решение

$$\begin{aligned} y &= y_1 \cdot z = x^2 \cdot z = x^2 \cdot \int v dx = x^2 \cdot \int \left(\frac{C \cdot x^{-2}}{-2} + C_1\right) dx = \\ &= x^2 \cdot \left(\int \frac{C \cdot x^{-2}}{-2} dx + \int C_1 dx\right) = x^2 \cdot \left(-\frac{C}{2} \int x^{-2} dx + C_1 \int dx\right) = \\ &= \frac{C \cdot x^{-1}}{2} \cdot x^2 + C_1 \cdot x \cdot x^2 + C_2 \cdot x^2 = \frac{C \cdot x}{2} + C_1 \cdot x^3 + C_2 \cdot x^2. \end{aligned}$$



## Упражнения для самостоятельной работы

1. Найти общее решение уравнения, если известны его частные решения  $y_1, y_2$ .

1.1.  $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1 = x, \quad y_2 = x^2.$

1.2.  $x^3 \ln xy'' + x^2(3 \ln x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x}.$

1.3.  $(x^2 + 2x + 2)y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$

## 2.3. Линейная однородная система дифференциальных уравнений в матричной форме

Рассмотрим линейную однородную систему в векторной записи

$$\dot{x} = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad (2.11)$$

когда  $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ ,  $a_{ij}$  – любые числа,  $i, j = \overline{1,n}$ , причем  $A$  имеет  $n$  линейно независимых собственных векторов.

Напомним некоторые сведения из курса алгебры. Число  $\lambda$  называется *собственным значением матрицы  $A$* , если существует ненулевой вектор  $v \in \mathbb{R}^n$  ( $v \neq 0$ ) такой, что

$$Av = \lambda v,$$

при этом вектор  $v$  называется *собственным вектором матрицы  $A$* , а  $\lambda$  – *собственным значением  $A$* , соответствующим собственному вектору  $v$ .

Матрица  $A$  имеет  $n$  линейно независимых собственных векторов, когда

- уравнение  $|A - \lambda E| = 0$  не имеет кратных корней  $\lambda$ ;
- ранг матрицы  $\text{rang}(A - \lambda E) = n - k = r$  для каждого кратного корня  $\lambda$ , где  $k$  – кратность этого корня.

Пусть  $\lambda$  – собственное значение, а  $v$  – собственный вектор матрицы  $A$ . Тогда  $x = e^{\lambda t}v$  – частное решение уравнения (2.11), т.к. производная этого решения есть  $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}v$ , поэтому, если само решение и его производную подставить в (2.11), то получим верное тождество

$$\lambda e^{\lambda t}v = A e^{\lambda t}v = e^{\lambda t} \underbrace{Av}_{\lambda v} \quad (\text{по определению собственного значения}).$$

Если собственные векторы  $v^1, \dots, v^n$  ( $v^j = \text{col}(v_1^j, v_2^j, \dots, v_n^j)$ ,  $j = \overline{1,n}$ ) линейно независимы, то имеем решения системы  $e^{\lambda_1 t}v^1, \dots, e^{\lambda_n t}v^n$ . Эти решения линейно независимы, поскольку определитель Вронского

$$W(0) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 0} v_1^1 & \dots & \dots & e^{\lambda_n 0} v_1^n \\ v_2^1 & \dots & \dots & v_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n^1 & \dots & \dots & v_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

не обращается в нуль в силу линейной независимости его столбцов. Следовательно, общее решение системы (2.11) имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} v^n,$$

где  $C_1, \dots, C_n$  – произвольные постоянные.



**Лемма 2.2.** Если  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ , где  $\beta \neq 0$ , – собственное значение вещественной матрицы  $A$ , а  $v^1 = \text{col}(v_1^1, \dots, v_n^1)$  – собственный вектор для  $\lambda_1$ , то  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$  – собственное значение, а  $v^2 = \overline{v^1} = \text{col}(\overline{v_1^1}, \dots, \overline{v_n^1})$  – собственный вектор для  $\lambda_2$ . Для вещественных  $\lambda_p$  собственный вектор  $v^p$  – вещественный.

*Доказательство.* 1) По условию  $v^1$  – собственный вектор матрицы  $A$ , соответствующий собственному значению  $\lambda_1$ , тогда имеет место равенство

$$Av^1 = \lambda_1 v^1. \quad (2.12)$$

Заменим в (2.12)  $v^1$  на  $\overline{v^1}$ ,  $\lambda_1$  на  $\overline{\lambda_1}$ , тогда равенство (2.12) не нарушится, и имеет место равенство

$$Av^2 = \lambda_2 v^2,$$

т.е.  $v^2$  – собственный вектор, соответствующий собственному значению  $\lambda_2$  матрицы  $A$ .

2) Пусть теперь  $\lambda_p \in \mathbb{R}$ . Найдем координаты собственного вектора из системы

$$(A - \lambda_p E)v = 0, \text{ где } |A - \lambda_p E| = 0,$$

а коэффициенты являются вещественными, следовательно, вектор  $v$  можно взять вещественным,  $v \neq 0$ . •

Общее решение системы (2.11) с вещественной матрицей  $A$  можно выразить через вещественные функции. Для этого нужно взять собственные значения, как в лемме 2.2, затем каждую пару комплексно сопряженных решений заменить парой вещественных решений

$$\begin{cases} x^1 = e^{\lambda_1 t} v_1, \\ x^2 = e^{\lambda_2 t} v_2, \end{cases} \quad \begin{matrix} (\lambda_1 = \alpha + i\beta) \\ (\lambda_2 = \alpha - i\beta) \end{matrix} \quad \text{заменяем} \Rightarrow \begin{cases} u^1 = \frac{x^1 + x^2}{2}, \\ u^2 = \frac{x^1 - x^2}{2i}. \end{cases}$$

В самом деле,  $u^1$  и  $u^2$  являются решениями как линейные комбинации решений. Остальные  $x^p = e^{\lambda_p t} v_p$  переобозначим  $u^p = x^p$ .

Получим вещественную фундаментальную систему решений и выразим через нее общее решение.



**Пример 2.6.** Решить линейную однородную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

*Решение.* Приведем систему к матричному виду  $\dot{u} = Au$ , обозначив

$$u = \text{col}(x, y), \quad \dot{u} = \text{col}(\dot{x}, \dot{y}), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix},$$

определитель которой равен

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5.$$

Найдем значения  $\lambda$ , при которых определитель матрицы  $A - \lambda E$  обращается в нуль

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Для этого найдем дискриминант

$$D = 16 - 4 \cdot 5 = -4,$$

тогда корни уравнения будут равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i,$$

которые будут комплексно-сопряженными собственными значениями матрицы  $A$ . Найдем собственный вектор для собственного значения  $\lambda_1 = 2 + i$  в виде  $v^1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . В этом случае матрица

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 3 - 2 - i & -2 \\ 1 & 1 - 2 - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - i & -2 \\ 1 & -1 - i \end{pmatrix}.$$

Решим уравнение

$$(A - \lambda_1 E)v^1 = 0,$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} 1-i & -2 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или в виде системы

$$\begin{cases} (1-i)a - 2b = 0, \\ 1 \cdot a - (1+i)b = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выразим

$$a = (1+i)b.$$

Поскольку система имеет бесконечное множество решений, то найдем одно ее частное решение. Для этого зададим конкретное значение  $b$ , например  $b = 1$ , тогда

$$\begin{cases} b = 1, \\ a = 1+i. \end{cases}$$

В этом случае одно из решений исходной системы дифференциальных уравнений примет вид

$$u = e^{\lambda_1 t} v_1 = e^{(2+i)t} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Расписав полученное векторное уравнение в виде системы, имеем

$$\begin{cases} x = (1+i)e^{(2+i)t} = (1+i)e^{2t}(\cos t + i \sin t), \\ y = 1 \cdot e^{(2+i)t} = e^{2t}(\cos t + i \sin t), \end{cases}$$

таким образом получим

$$\begin{cases} x = e^{2t}(\cos t - \sin t) + ie^{2t}(\cos t + \sin t), \\ y = e^{2t} \cos t + ie^{2t} \sin t. \end{cases}$$

Выделим действительную и мнимую часть полученного решения и получим пару решений  $u_1$  и  $u_2$ , соответствующую паре комплексно сопряженных собственных значений матрицы  $A$ .

$$\begin{cases} x_1 = e^{2t}(\cos t - \sin t), \\ y_1 = e^{2t} \cos t, \\ u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = e^{2t}(\cos t + \sin t), \\ y_2 = e^{2t} \sin t, \\ u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Окончательно получим

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 u_1 + C_2 u_2 = C_1 \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos t - \sin t) \\ e^{2t} \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos t + \sin t) \\ e^{2t} \sin t \end{pmatrix}.$$



### Упражнения для самостоятельной работы

1. При каком соотношении между вещественными коэффициентами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  система

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dt \end{cases}$$

имеет следующие корни характеристического уравнения:

1.1.  $\lambda_1 = 3 + 2i$ ,  $\lambda_2 = 3 - 2i$ ;

1.2.  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 0$ ;

1.3.  $\lambda_{1,2} = 5i$ ,  $\lambda_2 = -5i$ ?

Приведите примеры.

2. Решить систему уравнений методом подстановки:

2.1.  $\begin{cases} \dot{x} = x + y - 9e^{-t}, \\ \dot{y} = 2x + 2t^2 - 3; \end{cases}$       2.4.  $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + \cos 3t, \\ \dot{y} = x + y + 3t; \end{cases}$

2.2.  $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + 2 \sin 2t, \\ \dot{y} = 2x - 3y + 4te^{-t}; \end{cases}$       2.5.  $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + t \sin 2t, \\ \dot{y} = 2x - 3y + 2e^{-t}; \end{cases}$

2.3.  $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + t \sin 2t, \\ \dot{y} = 2x - 3y + 2e^{-t}; \end{cases}$       2.6.  $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y + \sin 4t, \\ \dot{y} = 5x - 3y + 5e^{4t} + t^2. \end{cases}$

3. Найти общее решение однородной системы:

3.1.  $\begin{cases} \dot{x} = -2y, \\ \dot{y} = 5x - 6y; \end{cases}$       3.4.  $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 6x + 3y; \end{cases}$

3.2.  $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = y; \end{cases}$       3.5.  $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = -x - y; \end{cases}$

3.3.  $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$


### 2.4. Решение линейной однородной системы в общем случае

Рассмотрим систему в векторной форме

$$\dot{x} = Ax. \quad (2.13)$$

Упростим (2.13), приведя матрицу  $A$  к жордановой форме.



 **Определение 2.1.** Для любой квадратной матрицы  $A$  существует неособая матрица  $C$  такая, что  $B = C^{-1}AC$  – жорданова, т.е.

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{K_1} & & & \mathbb{O} \\ & \boxed{K_2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & \boxed{K_s} \end{pmatrix}, \text{ где } K_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \mathbb{O} \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Здесь  $K_i = (\lambda_i)$  – клетки, в каждой из которых на главной диагонали стоит одно и то же число  $\lambda_i$ , а выше главной диагонали стоят единицы. В разных клетках числа  $\lambda_i$  могут быть различны или одинаковы. Клетки  $K_i$  могут быть любых размеров.

Рассмотрим матрицу

$$\left. \begin{aligned} B - \lambda E &= C^{-1}AC - \lambda E = C^{-1}AC - \lambda EC^{-1}C = C^{-1}(A - \lambda E)C \\ \text{по свойству обратной матрицы } |C^{-1}| \cdot |C| &= \frac{1}{|C|}|C| = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$|B - \lambda E| = |C^{-1}(A - \lambda E)C| = |C^{-1}| \cdot |(A - \lambda E)| \cdot |C| = |(A - \lambda E)|.$$

Поэтому матрицы  $B = C^{-1}AC$  и  $A$  имеют одно и то же характеристическое уравнение, следовательно, одни и те же корни  $\lambda_i$  с теми же кратностями.

Применим к системе (2.13) линейное преобразование координат

$$x = C \cdot y,$$

т.е.

$$x_i = C_{i1}y_1 + \dots + C_{in}y_n \quad (i = \overline{1, n}), \quad (2.14)$$

где  $C = (c_{ij})_{n \times n}$ , см. выше. Получаем

$$\dot{x} = C\dot{y} = Ax = ACy \quad | \cdot \text{ слева на } C^{-1},$$

$$C^{-1}C\dot{y} = C^{-1}ACy.$$

Получим

$$\dot{y} = By, \quad (2.15)$$

где матрица  $B$  – жорданова.

Предположим следующее:

- первая клетка имеет размер  $k \times k$ , тогда в первые  $k$  уравнений системы (2.15) входят только  $y_1, \dots, y_k$ ,
- следующая клетка имеет размер  $l \times l$ , тогда в следующие  $l$  уравнений системы (2.15) входят  $y_{k+1}, \dots, y_{k+l}$ ,
- и т.д.

Таким образом, система распалась на подсистемы, каждую из которых решим отдельно.

I подсистема, где  $\lambda = \lambda_1$ .

[illegible]

ПОСКОЛЬКУ

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Другие подсистемы аналогичны, отличаются только параметрами  $\lambda$  и  $k$ .

Решим подсистему (2.16), сделав замену

$$y_i = e^{\lambda t} z_i, \quad i = \overline{1, k}. \quad (2.17)$$

Таким образом,

$$y_1 = e^{\lambda t} z_1 \Rightarrow \dot{y}_1 = \lambda e^{\lambda t} z_1 + e^{\lambda t} \dot{z}_1.$$

Подставим её в первое уравнение системы (2.16)

$$\lambda e^{\lambda t} z_1 + e^{\lambda t} \dot{z}_1 = \lambda e^{\lambda t} z_1 + e^{\lambda t} z_2 \Rightarrow \dot{z}_1 = z_2.$$

Теперь

$$y_2 = e^{\lambda t} z_2 \Rightarrow \dot{y}_2 = \lambda e^{\lambda t} z_2 + e^{\lambda t} \dot{z}_2.$$

Подставим её во второе уравнение системы (2.16)

$$\lambda e^{\lambda t} z_2 + e^{\lambda t} \dot{z}_2 = \lambda e^{\lambda t} z_2 + e^{\lambda t} z_3 \Rightarrow \dot{z}_2 = z_3.$$

Аналогично преобразуем все следующие уравнения до  $k - 1$ -го, т.е.

$$\dot{z}_{k-1} = z_k.$$

Тогда последнее уравнение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} y_k &= e^{\lambda t} z_k \Rightarrow \dot{y}_k = \lambda e^{\lambda t} z_k + e^{\lambda t} \dot{z}_k \Rightarrow \\ \lambda e^{\lambda t} z_k + e^{\lambda t} \dot{z}_k &= \lambda e^{\lambda t} z_k \Rightarrow \dot{z}_k = 0. \end{aligned}$$

Решим полученную систему, начиная с последнего уравнения. Т.к.

$$\begin{aligned} \dot{z}_k &= 0 \Rightarrow z_k = C_k, \\ \dot{z}_{k-1} &= z_k \Rightarrow \dot{z}_{k-1} = C_k \Rightarrow z_{k-1} = C_k t + C_{k-1}, \\ &\dots \\ z_1 &= C_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + C_{k-1} \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \dots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1. \end{aligned}$$

Т.к.


$$y_k = e^{\lambda t} z_k \Rightarrow y_k = C_1 e^{\lambda t},$$

и т.д., умножаем все решения системы на  $e^{\lambda t}$ , получим

$$\begin{aligned} y_{k-1} &= (C_k t + C_{k-1}) e^{\lambda t}, \\ &\dots \\ y_1 &= \left( C_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + C_{k-1} \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \dots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1 \right) e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

где  $\lambda = \lambda_1$ .

Полученное решение является общим, т.к. оно найдено из системы (2.16) с помощью тождественных преобразований.

 **Замечание 2.2.** Решения других подсистем имеют подобный вид, только числа  $\lambda = \lambda_j$  и  $k = k_j$  и произвольные постоянные  $C_i$  будут другими ( $\lambda_j$  – число  $\lambda$  в  $j$ -ой клетке,  $k_j$  – размер  $j$ -ой клетки).


Собрав вместе решения всех подсистем, получим общее решение всей системы (2.15). Делаем обратную замену от  $y$  к  $x$  и, в силу (2.14), получаем следующий результат.



**Теорема 2.3.** Общее решение системы (2.13) – это вектор-функция, каждая координата которой имеет вид

$$x_i = P_{i1}(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + P_{im}(t)e^{\lambda_m t}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.18)$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  – различные собственные значения матрицы  $A$ ,  $P_{ij}$  – алгебраический многочлен, степень которого на единицу меньше размера наибольшей из жордановых клеток, содержащих  $\lambda_j$ . Коэффициенты многочленов  $P_{ij}(t)$ , где  $i, j = \overline{1, m}$ , зависят от  $n$  произвольных постоянных.

 **Замечание 2.3.** Решение системы (2.13) в частном случае можно получить и без приведения матрицы  $A$  к жордановой форме. Для этого достаточно найти все собственные значения  $\lambda$  матрицы  $A$  из уравнения  $|A - \lambda E| = 0$  и  $\forall \lambda$  найти число  $m$  линейно независимых собственных векторов по формуле  $m = n - r$ , где  $n$  – порядок матрицы  $A - \lambda E$  и  $r = \text{rang}(A - \lambda E)$ .

- Если  $m = k$ , где  $k$  – кратность корня  $\lambda$ , то такому корню соответствует решение


$$x = C_1 e^{\lambda t} b^1 + \dots + C_k e^{\lambda t} b^k,$$

где  $b^1, \dots, b^k$  – линейно независимые собственные векторы.

- Если  $m < k$ , то решение есть  $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$ , где

$$\begin{cases} x_1 = (At^s + Bt^{s-1} + \dots + Ct + D)e^{\lambda t}, \\ \dots \\ x_n = (at^s + bt^{s-1} + \dots + ct + d)e^{\lambda t}, \end{cases} \quad \text{где } s = k - m. \quad (2.19)$$

Подставим эти выражения с неопределенными коэффициентами в данную систему, сокращая на  $e^{\lambda t}$ , находим неопределенные коэффициенты, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях.

 **Замечание 2.4.** Если матрица  $A$  – вещественная, то описанное выше нужно проделать только для вещественных корней и для одного корня из пары комплексно сопряженных корней и от полученного решения взять действительную и мнимую части.



**Пример 2.7.**

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y, \\ \dot{y} = -y + z, \\ \dot{z} = 2x - z. \end{cases}$$

*Решение.* Здесь матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы  $A$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & 1 \\ 2 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0.$$

Для этого решим уравнение  $-\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0$  подбором. Предположим, что корень  $\lambda_1 = 1$ . Поскольку  $-1^3 + 3 \cdot 1 - 2 = 0$ , следовательно  $\lambda = 1$  – корень.

$$\begin{array}{r} - \frac{-\lambda^3 + 3\lambda - 2}{-\lambda^3 + \lambda^2} \left| \frac{\lambda - 1}{-\lambda^2 - \lambda + 2} \right. \\ \hline - \frac{-\lambda^2 + 3\lambda}{-\lambda^2 + \lambda} \\ \hline - \frac{2\lambda - 2}{2\lambda - 2} \\ \hline 0 \end{array}$$

Найдем корни частного. Для этого решим квадратное уравнение

$$-\lambda^2 - \lambda + 2 = 0,$$

дискриминант которого

$$D = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 9.$$

Тогда корни квадратного уравнения

$$\lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -2.$$

Поскольку  $\lambda_3 = -2$  является простым корнем, то для нахождения собственного вектора

$$v^3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

ему соответствующего, решим уравнение

$$(A - \lambda_3 E)v^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2+2 & -2 & 0 \\ 0 & -1+2 & 1 \\ 2 & 0 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Или в виде системы

$$\begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 0, \\ \beta + \gamma = 0, \\ 2\alpha + \gamma = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha = 2\beta, \\ \beta - 2\alpha = 0, \\ \gamma = -2\alpha, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2\alpha, \\ \gamma = -2\alpha. \end{cases}$$

Если  $\alpha = C_3$ , тогда  $\beta = 2C_3$ , а  $\gamma = -2C_3$ , и частное решение

$$e^{-2t}v^3 = u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} C_3 \\ 2C_3 \\ -2C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_3 e^{-2t} \\ 2C_3 e^{-2t} \\ -2C_3 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь корень  $\lambda_{1,2} = \lambda = 1$ , кратность которого  $k = 2$ .

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{rang}(A - \lambda E) = 2 = r.$$

Найдем значение  $m$  из замечания 2.3

$$m = n - r = 3 - 2 = 1.$$

Тогда в силу этого же замечания получим степень многочлена при  $e^{\lambda t}$

$$s = k - m = 2 - 1 = 1.$$

Тогда решение будет выражено через неопределенные коэффициенты по формуле (2.19)

$$\begin{cases} x = (A + Bt)e^t, \\ y = (C + Dt)e^t, \\ z = (F + Gt)e^t, \end{cases} \quad \text{причем} \quad \begin{cases} \dot{x} = (A + B + Bt)e^t, \\ \dot{y} = (C + D + Dt)e^t, \\ \dot{z} = (F + G + Gt)e^t. \end{cases}$$

Подставим полученные выражения в исходную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} (A + B + Bt)e^t = 2(A + Bt)e^t - 2(C + Dt)e^t, \\ (C + D + Dt)e^t = -(C + Dt)e^t + (F + Gt)e^t, \\ (F + G + Gt)e^t = 2(A + Bt)e^t - (F + Gt)e^t. \end{cases}$$

Разделим полученную систему на  $e^t \neq 0$

$$\begin{cases} A + B + Bt = 2A - 2C + 2Bt - 2Dt, \\ C + D + Dt = F - C + (G - D)t, \\ F + G + Gt = 2A - F + (2B - G)t \end{cases}$$

и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях в каждом уравнении системы

$$\begin{cases} A + B = 2A - 2C, \\ B = 2B - 2D, \\ C + D = F - C, \\ D = G - D, \\ G + F = 2A - F, \\ G = 2B - G, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2D = B, \\ G = 2D, \\ G = B, \\ A = B + 2C, \\ 2C + D = F, \\ G = 2A - 2F. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = G = 2D, \\ A - F = B - D = 2D - D = D, \\ A = B + 2C, \\ G = 2A - 2F = 2D, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = G = 2D, \\ A - F = D, \\ A = B + 2C, \\ A - F = D. \end{cases}$$

Получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A & -B & -2C & & & = 0, \\ A & & & -D & -F & = 0, \\ & & & 2D & & -G = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A & -B & -2C & & & = 0, \\ & B & +2C & -D & -F & = 0, \\ & & & 2D & & -G = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2D = G = B, \\ 2D + 2C - D - F = 0, \\ A - B - 2C = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2D = G = B, \\ D + 2C = F, \\ A - 2C = B. \end{cases}$$

Обозначим

$$D = C_1, \quad C = C_2, \text{ тогда } G = B = 2C_1, \quad F = C_1 + 2C_2, \quad A = 2C_1 + 2C_2.$$

Построим частное решение, соответствующее собственному значению  $\lambda_{1,2} = 1$  кратности  $k = 2$

$$u_{1,2} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2C_1 + 2C_2 + 2C_1t)e^t \\ (C_2 + C_1t)e^t \\ (C_1 + 2C_2 + 2C_1t)e^t \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение исходной системы

$$u(t) = \begin{pmatrix} (2C_1 + 2C_2 + 2C_1t)e^t + C_3e^{-2t} \\ (C_2 + C_1t)e^t + 2C_3e^{-2t} \\ (C_1 + 2C_2 + 2C_1t)e^t - 2C_3e^{-2t} \end{pmatrix}.$$



### • Упражнения для самостоятельной работы

1. Решить системы однородных уравнений:

$$1.1. \begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z, \\ \dot{z} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z; \end{cases} \quad 1.5. \begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y - 4z, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z, \\ \dot{z} = x - 2y + 3z; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
1.2. \quad & \begin{cases} \dot{x} = 2x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, \\ \dot{y} = -\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}z, \\ \dot{z} = -\frac{1}{2}x - \frac{11}{4}y + \frac{3}{4}z; \end{cases} & 1.6. \quad & \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = \frac{1}{2}x + 2y - z, \\ \dot{z} = \frac{1}{2}y + 2z; \end{cases} \\
1.3. \quad & \begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x + y - 2z, \\ \dot{z} = y + z; \end{cases} & 1.7. \quad & \begin{cases} \dot{x} = x + y - z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = x - y + z; \end{cases} \\
1.4. \quad & \begin{cases} \dot{x} = x + 2y - 3z, \\ \dot{y} = 2x + y + 2z, \\ \dot{z} = 3x + 2y + z. \end{cases}
\end{aligned}$$

## 2.5. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (2.20)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — любые числа,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{0, n}$ , причем  $a_0 \neq 0$ . Обозначим

$$L(y) \equiv a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y.$$

Будем искать решения уравнения (2.20) в экспоненциальном виде  $y = e^{\lambda t}$ . Поскольку по нашему предположению эта функция является решением, то при подстановке ее и ее производных в (2.20) получится верное тождество. Найдем производные до  $n$ -го порядка включительно  $y' = \lambda e^{\lambda t}$ ,  $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda t}$ . Подставив их в (2.20)

$$a_0(t)\lambda^n e^{\lambda t} + a_1(t)\lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_n(t)e^{\lambda t} = 0,$$

и сократив на  $e^{\lambda t} \neq 0$  получим

$$a_0(t)\lambda^n + a_1(t)\lambda^{n-1} + \dots + a_n(t) = 0. \quad (2.21)$$

Полученное уравнение называется характеристическим для уравнения (2.20).

Введем следующее обозначение левой части (2.21)

$$M(\lambda) = a_0(t)\lambda^n + a_1(t)\lambda^{n-1} + \dots + a_n(t), \quad (2.22)$$

тогда  $M(\lambda) = 0$ .





**Лемма 2.3.** Функция  $y = e^{\lambda t}$  удовлетворяет (2.20) тогда и только тогда, когда  $\lambda$  – корень уравнения (2.21).

В силу основной теоремы алгебры многочлен, стоящий в левой части уравнения (2.21) имеет  $n$  нулей, в том числе кратных и комплексно сопряженных в  $\mathbb{C}$ .

### 2.5.1. Случай простых корней



**Теорема 2.4.** Если все корни уравнения (2.21) различные (простые), то уравнение (2.20) имеет  $n$  различных решений  $y_j = e^{\lambda_j t}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , причем эти решения линейно независимы. При этом, если среди корней уравнения (2.21) существуют простые комплексно сопряженные  $\lambda_k = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  и  $\lambda_{k+1} = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$ ,  $\beta \neq 0$ , то соответствующие им решения уравнения (2.20) имеют вид  $y_k = e^{\alpha x} \cos \beta x$ ,  $y_{k+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x$ .

*Доказательство.* Докажем линейную независимость решений  $y_j = e^{\lambda_j t}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Для этого составим вронскиан

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}.$$

По свойству определителя, вынесем общие множители столбцов

$$W = e^{\lambda_1 t} \begin{vmatrix} 1 & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}}_{\text{определитель Вандермонда}} \neq 0. \bullet$$

Из алгебры известно, что определитель Вандермонда не равен нулю тогда и только тогда, когда все числа  $\lambda_j$  различны. Поскольку это выполняется в силу условия теоремы, то можно сделать вывод о линейной независимости решений  $y_j = e^{\lambda_j t}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Отсюда по теореме об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения общее решение (2.20) имеет вид

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}. \quad (2.23)$$

Рассмотрим 2 случая простых корней.

Если  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ , то  $y$  – вещественное общее решение (2.23) при  $C_j \in \mathbb{R}$ .

Если  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ , то  $\exists \bar{\lambda}_j = \overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta = \lambda_{j+1}$ , где  $\beta \neq 0$ .

Пусть  $j = k$ , тогда  $\lambda_k = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_{k+1} = \alpha - i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ . Этим  $\lambda_{k,k+1}$  соответствуют комплексные решения

$$\begin{cases} y_k = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} & \stackrel{\text{по}}{\underset{\text{формуле}}{=}} e^{\alpha t} \cdot (\cos \beta t + i \sin \beta t), \\ y_{k+1} = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{-i\beta t} & \stackrel{\text{Эйлера}}{=} e^{\alpha t} \cdot (\cos(-\beta)t + i \sin(-\beta)t). \end{cases}$$

Таким образом получим

$$\begin{cases} y_k = e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t + i e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t = u_k + i u_{k+1}, \\ y_{k+1} = e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t - i e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t = u_k - i u_{k+1}, \end{cases}$$

Рассмотрим функции

$$\begin{cases} u_k = e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t = \frac{y_k + y_{k+1}}{2}, \\ u_{k+1} = e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t = \frac{y_k - y_{k+1}}{2i}. \end{cases} \quad (2.24)$$

Они являются решениями (2.20) как линейные комбинации решений.

Рассмотрим теперь фундаментальную систему решений (ФСР)

$$y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n,$$

т.е. любую систему  $n$  линейно независимых решений.

Заменим пару комплексно сопряженных решений  $y_1$  и  $y_2$  на пару вещественных решений  $u_1$  и  $u_2$  по формуле (2.24). Аналогично, все остальные комплексно сопряженные решения заменим на соответствующие вещественные решения по формуле (2.24). Исходные вещественные решения  $y_j = e^{\lambda_j t}$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ , переобозначим, т.е.

$$u_j = y_j. \quad (2.25)$$

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & y_2 & \dots & y_k & y_{k+1} & \dots & y_n \\ \Downarrow & \Downarrow & \dots & \Downarrow & \Downarrow & \dots & \Downarrow \\ u_1 & u_2 & \dots & u_k & u_{k+1} & \dots & u_n \end{array}$$

Получим  $n$  вещественных решений  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n$ . Покажем, что они линейно независимы на любом  $(\alpha, \beta)$ . Для этого рассмотрим их линейную комбинацию, т.е. существуют  $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n$  – числа (действительные или комплексные) такие, что

$$b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_k u_k + b_{k+1} u_{k+1} + \dots + b_n u_n \equiv 0, \quad t \in (\alpha, \beta). \quad (2.26)$$

Вернемся к функциям  $y_j, j = \overline{1, n}$ . Подставим в (2.26) формулы (2.24) в случае комплексно сопряженных решений и формулы (2.25) в случай вещественных решений. Получим

$$\begin{aligned}
& b_1 \frac{y_1 + y_2}{2} + b_2 \frac{y_1 - y_2}{2i} + \dots + b_{2p-1} \frac{y_{2p-1} + y_{2p}}{2} + b_{2p} \frac{y_{2p-1} - y_{2p}}{2i} + \\
& + b_{2p+1} y_{2p+1} + \dots + b_n y_n = \frac{b_1}{2} y_1 + \frac{b_1}{2} y_2 + \frac{b_2}{2i} y_1 - \frac{b_2}{2i} y_2 + \dots + \\
& + \frac{b_{2p-1}}{2} y_{2p-1} - \frac{b_{2p-1}}{2} y_{2p} + \frac{b_{2p}}{2i} y_{2p-1} - \frac{b_{2p}}{2i} y_{2p} + b_{2p+1} y_{2p+1} + \dots + \\
& + b_n y_n = \frac{b_1}{2} y_1 - \frac{b_2 \cdot i}{2} y_1 + \frac{b_1}{2} y_2 + \frac{b_2 \cdot i}{2} y_2 + \dots + \\
& + \frac{b_{2p-1}}{2} y_{2p-1} - \frac{b_{2p} \cdot i}{2} y_{2p-1} - \frac{b_{2p-1}}{2} y_{2p} - \frac{b_{2p} \cdot i}{2} y_{2p} + \dots + \\
& b_{2p+1} y_{2p+1} + \dots + b_n y_n = \underbrace{\frac{b_1 - b_2 \cdot i}{2}}_{d_1} y_1 + \underbrace{\frac{b_1 + b_2 \cdot i}{2}}_{d_2} y_2 + \dots + \\
& + \underbrace{\frac{b_{2p-1} - b_{2p} \cdot i}{2}}_{d_{2p-1}} y_{2p-1} - \underbrace{\frac{b_{2p-1} + b_{2p} \cdot i}{2}}_{d_{2p}} y_{2p} + \underbrace{b_{2p+1}}_{d_{2p+1}} y_{2p+1} + \dots + \underbrace{b_n}_{d_n} y_n
\end{aligned}$$

Тогда для  $p$  комплексно сопряженных пар решений получим

$$\begin{array}{cccccc}
u_1 & u_2 & \dots & u_{2p-1} & u_{2p} & \\
\Downarrow & \Downarrow & \dots & \Downarrow & \Downarrow & \\
y_1 & y_2 & \dots & y_{2p-1} & y_{2p} & 
\end{array}$$

коэффициенты

$$d_1 = \frac{b_1 - ib_2}{2}, d_2 = \frac{b_1 + ib_2}{2}, \dots, d_{2p-1} = \frac{b_{2p-1} - ib_{2p}}{2}, d_{2p} = \frac{b_{2p-1} + ib_{2p}}{2},$$

для вещественных решений

$$\begin{array}{cccc}
u_{2p+1} & \dots & u_n & \\
\Downarrow & \dots & \Downarrow & \\
y_{2p+1} & \dots & y_n & 
\end{array}$$

коэффициенты

$$d_{2p+1} = b_{2p+1}, \dots, d_n = b_n.$$

Тождество (2.26) примет вид

$$d_1 y_1 + \dots + d_n y_n \equiv 0.$$

Если найдется хотя бы одно  $b_j \neq 0$ , то существует  $d_k \neq 0$ , поэтому  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$  – линейно зависимы, а это противоречит доказанному ранее, следовательно, все  $b_j = 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ , отсюда  $u_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , – линейно независимы. •



• **Следствие 2.1.** В случае простых корней  $\lambda_j$  существует фундаментальная система решений, состоящая из функций  $e^{\lambda_j t}$  для любого  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  и пары функций  $e^{\alpha t} \cos \beta t$ ,  $e^{\alpha t} \sin \beta t$  для каждой пары комплексно сопряженных корней  $\alpha \pm i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ .



**Пример 2.8.** Решить уравнение

$$y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0.$$

*Решение.* Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = 0.$$

Для начала предположим, что  $\lambda_1 = 1$ . Поскольку  $1^3 + 3 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 13 = 0$ , то  $\lambda_1 = 1$  – простой корень характеристического уравнения. Отсюда  $y_1 = e^{1 \cdot t} = e^t$ .

Для того, чтобы найти остальные корни характеристического уравнения, разделим характеристический многочлен на  $(\lambda - 1)$ .

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 & \lambda - 1 \\ \lambda^3 - \lambda^2 & \lambda^2 + 4\lambda + 13 \\ \hline 4\lambda + 9\lambda & \\ 4\lambda - 4\lambda & \\ \hline 13\lambda - 13 & \\ 13\lambda - 13 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

В силу результатов деления получим

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = 0.$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0.$$

$$D = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36 = (6i)^2,$$

Поэтому  $\lambda_{2,3} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$ , тогда  $y_2 = e^{-2t} \cos 3t$ ,  $y_3 = e^{-2t} \sin 3t$ .

Ответ:  $y = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} \cos 3t + C_3 e^{-2t} \sin 3t$ .

### 2.5.2. Случай кратных корней



**Лемма 2.4.** Если  $\lambda = \gamma$  не является корнем уравнения (2.21), то будем считать его кратность  $k$  равной нулю ( $k = 0$ ), если же  $\lambda = \gamma$  — корень уравнения (2.21), то его кратность  $k \geq 1$ .

Тогда

$$L(t^s e^{\gamma t}) = \begin{cases} 0 & s \leq k-1, \\ (d_0 t^m + d_1 t^{m-1} + \dots + d_m) e^{\gamma t}, & s \geq k, d_0 \neq 0, m = s - k, \end{cases} \quad (2.27)$$

где  $L(y) = a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y$ .

*Доказательство.* Обозначив  $\varphi_\gamma^{(s)} = \frac{\partial^s \varphi}{\partial \gamma^s}$ , вычислим производную  $p$ -го порядка по переменной  $t$  функции  $t^s e^{\gamma t}$ , где для любого  $s \in \mathbb{Z}$ ,  $s \geq 0$

$$(t^s e^{\gamma t})_t^{(p)} = \left( (e^{\gamma t})_\gamma^{(s)} \right)_t^{(p)} = \left( (e^{\gamma t})_t^{(p)} \right)_\gamma^{(s)} = (\gamma^p e^{\gamma t})_\gamma^{(s)}.$$

Таким образом, получили равенство

$$(t^s e^{\gamma t})_t^{(p)} = (\gamma^p e^{\gamma t})_\gamma^{(s)}. \quad (2.28)$$

Умножим правую и левую части полученного равенства (2.28) на  $a_{n-p}$

$$(t^s e^{\gamma t})_t^{(p)} = (\gamma^p e^{\gamma t})_\gamma^{(s)}, \quad | \cdot a_{n-p}, p = \overline{0, n},$$

в частности, при

$$\begin{array}{ll} p = 0 & \text{получим} \quad a_{n-0} (t^s e^{\gamma t})_t^{(0)} = a_{n-0} (\gamma^0 e^{\gamma t})_\gamma^{(s)}, \\ p = 1 & a_{n-1} (t^s e^{\gamma t})'_t = a_{n-1} (\gamma^1 e^{\gamma t})_\gamma^{(s)}, \\ \dots & \dots \\ p = n & a_{n-n} (t^s e^{\gamma t})_t^{(n)} = a_{n-n} (\gamma^n e^{\gamma t})_\gamma^{(s)}, \end{array}$$

таким образом, при

$$\begin{array}{ll} p = 0 & \text{получим} \quad a_n (t^s e^{\gamma t}) = a_n (\gamma^0 e^{\gamma t})_\gamma^{(s)}, \\ p = 1 & a_{n-1} (t^s e^{\gamma t})'_t = a_{n-1} (\gamma^1 e^{\gamma t})_\gamma^{(s)}, \\ \dots & \dots \\ p = n & a_0 (t^s e^{\gamma t})_t^{(n)} = a_0 (\gamma^n e^{\gamma t})_\gamma^{(s)}. \end{array}$$

Просуммируем по  $p$ ,  $p = \overline{0, n}$ , получим

$$\begin{aligned}
& a_0(t^s e^{\gamma t})_t^{(n)} + \dots + a_{n-1}(t^s e^{\gamma t})'_t + a_n(t^s e^{\gamma t}) = L(t^s e^{\gamma t}) = \\
& = a_0 (\gamma^n e^{\gamma t})_\gamma^{(s)} + a_1 (\gamma^{n-1} e^{\gamma t})_\gamma^{(s)} + \dots + a_{n-1} (\gamma^1 e^{\gamma t})_\gamma^{(s)} + a_n (\gamma^0 e^{\gamma t})_\gamma^{(s)} = \\
& = (a_0 \gamma^n e^{\gamma t} + a_1 \gamma^{n-1} e^{\gamma t} + \dots + a_{n-1} \gamma^1 e^{\gamma t} + a_n \gamma^0 e^{\gamma t})_\gamma^{(s)} = \\
& = \left( \underbrace{(a_0 \gamma^n + a_1 \gamma^{n-1} + \dots + a_{n-1} \gamma^1 + a_n \gamma^0)}_{M(\gamma)} e^{\gamma t} \right)_\gamma^{(s)}.
\end{aligned}$$

Итак, получили

$$L(t^s e^{\gamma t}) = (M(\gamma) e^{\gamma t})_\gamma^{(s)}. \quad (2.29)$$

Вычислим правую часть формулы (2.29). Для этого по правилу Лейбница найдем производную  $s$ -го порядка от правой части по  $\gamma$

$$\begin{aligned}
& (M(\gamma) e^{\gamma t})_\gamma^{(s)} = C_s^0 M^{(0)}(\gamma) (e^{\gamma t})_\gamma^{(s)} + C_s^1 M^{(1)}(\gamma) (e^{\gamma t})_\gamma^{(s-1)} + \dots + \\
& + C_s^{k-1} M^{(k-1)}(\gamma) (e^{\gamma t})_\gamma^{(s-k+1)} + C_s^k M^{(k)}(\gamma) (e^{\gamma t})_\gamma^{(s-k)} + \dots + C_s^s M^{(s)}(\gamma) (e^{\gamma t})_\gamma^{(s-s)} = \\
& = M(\gamma) (e^{\gamma t})_\gamma^{(s)} + C_s^1 M'(\gamma) (e^{\gamma t})_\gamma^{(s-1)} + \dots + C_s^{k-1} M^{(k-1)}(\gamma) (e^{\gamma t})_\gamma^{(s-k+1)} + \\
& + C_s^k M^{(k)}(\gamma) (e^{\gamma t})_\gamma^{(s-k)} + \dots + M^{(s)}(\gamma) e^{\gamma t} = \\
& = e^{\gamma t} \left( M(\gamma) t^s + C_s^1 M'(\gamma) t^{s-1} + \dots + C_s^{k-1} M^{(k-1)}(\gamma) t^{s-k+1} + \right. \\
& \left. + C_s^k M^{(k)}(\gamma) t^{s-k} + \dots + M^{(s)}(\gamma) \right) = L(t^s e^{\gamma t}).
\end{aligned}$$

Пусть  $\lambda = \gamma$  – корень многочлена  $M(\lambda)$  кратности  $k$  ( $k$  может принимать значения  $\underbrace{0 \ 1 \ 2 \ \dots \ s}_{1 \text{ случай}} \underbrace{s+1 \ \dots}_{2 \text{ случай}}$ )

1 случай. Пусть  $k \geq s+1$  ( $k-1 \geq s$ ), тогда <sup>3</sup>

$$M(\gamma) = M'(\gamma) = \dots = M^{(k-1)}(\gamma) = 0, \quad M^{(k)}(\gamma) \neq 0.$$

Тогда

$$L(t^s e^{\gamma t}) = e^{\gamma t} \left( \underbrace{M(\gamma)}_{=0} t^s + C_s^1 \underbrace{M'(\gamma)}_{=0} t^{s-1} + \dots + C_s^{k-1} \underbrace{M^{(k-1)}(\gamma)}_{=0} t^{s-k+1} + \right.$$

---

<sup>3</sup>Например,  $\gamma = 1$  – корень кратности  $k = 2$  многочлена  $M(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \Leftrightarrow M(1) = 0$ .  
 $M'(\lambda) = 2\lambda - 2 \Leftrightarrow M'(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$ ,  $M''(\lambda) = 2 \Leftrightarrow M''(1) = 2 \neq 0$ .

$$+ \underbrace{C_s^k M^{(k)}(\gamma) t^{s-k} + \dots + M^{(s)}(\gamma)}_{\text{слагаемые отсутствуют при } s \leq k-1, \text{ т.е. при корне кратности } k} = 0.$$

2 случай. Пусть  $\lambda = \gamma$  – корень кратности  $k \leq s$  ( $k-1 > s$ ), тогда

$$M(\gamma) = M'(\gamma) = \dots = M^{(k-1)}(\gamma) = 0, \quad M^{(k)}(\gamma) = \dots = M^{(s)}(\gamma) \neq 0,$$

причем максимальная степень  $t^{s-k}$  содержится в слагаемом при  $M^{(k)}(\gamma)$ .

Обозначим  $s - k = m$ , тогда последние  $s - k$  слагаемых можно представить в виде

$$d_0 t^m + d_1 t^{m-1} + \dots + d_m.$$

Если  $\lambda = \gamma$  не корень многочлена  $M(\lambda)$ , т.е.  $k = 0$ , то  $M(\gamma) \neq 0$  и случай сводится к предыдущему. •



**Теорема 2.5.** Для каждого действительного корня  $\lambda$  кратности  $k \geq 1$  многочлена (2.22) функции

$$e^{\lambda t}, t^1 e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t} \quad (2.30)$$

являются решениями уравнения (2.20). Если же корни многочлена (2.21)  $\alpha \pm i\beta$  являются комплексно сопряженными и имеют кратность  $k, k \geq 1$ , то функции

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, t e^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \cos \beta t, \\ e^{\alpha t} \sin \beta t, t e^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \sin \beta t$$

решения уравнения (2.20). Выписав такие функции для всех корней характеристического многочлена  $M(\lambda)$ , получаем фундаментальную систему решений.

**Доказательство.** В силу леммы 2.3 такие функции являются решениями (см. случай 1 формулы (2.26)). Для каждого корня многочлена  $M(\lambda)$  число таких решений равно кратности корня. Т.к. сумма кратностей всех корней равна  $n$ , то всего имеем  $n$  решений вида  $t^s e^{\lambda t}$  (это не противоречит случаю простых корней, т.к. для простого корня  $k = 1$ , т.е.  $s + 1 \geq k$ ,  $s = k - 1$ ). Покажем, что эти  $k$  решений линейно независимы на любом интервале  $(\alpha, \beta)$ .

Предположим противное, пусть решения линейно зависимы, т.е. существуют такие числа, из которых хоть одно не равно нулю. Умножим решения на эти числа, сложим и вынесем одинаковые  $e^{\lambda_i t}$  за скобки, получим

$$p_1(t) e^{\lambda_1 t} + p_2(t) e^{\lambda_2 t} + \dots + p_m(t) e^{\lambda_m t} \equiv 0, \quad t \in (\alpha, \beta), \quad (2.31)$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \lambda_m, p_1(t), \dots, p_m(t) -$$

алгебраические многочлены.

Пусть нумерация такова, что многочлен  $p_m(t)$  содержит ненулевой коэффициент. Упростим равенство (2.31), разделив его на  $e^{\lambda_1 t} \neq 0$ , получим

$$e^{\lambda_1 t} \left( p_1(t) + p_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \dots + p_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_1)t} \right) =$$

$$p_1(t) + p_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \dots + p_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_1)t} \equiv 0. \quad (2.32)$$

Продифференцируем обе части равенства по  $t$  на один раз больше, чем степень многочлена  $p_1(t)$ . Тогда первый член суммы исчезнет, а остальные многочлены заменятся другими тех же степеней. Например,

$$\frac{d}{dt}[(at^s + bt^{s-1} + \dots)e^{\gamma t}] = [sat^{s-1} + (s-1)bt^{s-2} + \dots]e^{\gamma t} + \gamma e^{\gamma t}[at^s + bt^{s-1} + \dots] =$$

$$= e^{\gamma t}[sat^{s-1} + (s-1)bt^{s-2} + \dots + \gamma at^s + \gamma bt^{s-1} + \dots] =$$

$$= e^{\gamma t}[\gamma at^s + (sa + \gamma b)t^{s-1} + (s-1)bt^{s-2} + \dots].$$

Т.к. в каждом слагаемом (2.32)  $\gamma_i = \lambda_i - \lambda_1 \neq 0$  ( $i = \overline{2, m}$ ), то степень многочлена сохраняется. После выполненных действий получим равенство, подобное (2.32), но содержащее на один член меньше. С ним поступаем, как с (2.31). И так до тех пор, пока не получим равенство с одним членом

$$r_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_{m-1})t} \equiv 0.$$

Многочлен  $r_m(t)$  той же степени, что и  $p_m(t)$ , значит он содержит ненулевой коэффициент. Поэтому  $r_m(t) \neq 0$  для любого  $t \in (\alpha, \beta)$ , а последнее равенство невозможно, т.к. в этом случае равенства нулю не будет. Следовательно, найденные  $n$  решений линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений.

При наличии комплексно сопряженных корней  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ , эти корни имеют одинаковую кратность  $k_1$ . Тогда, как и в случае простых корней, каждые два комплексно сопряженных решения

$$t^s e^{(\alpha + i\beta)t}, t^s e^{(\alpha - i\beta)t}, \quad 0 \leq s \leq k_1 - 1$$

можно заменить вещественными решениями

$$t^s e^{\alpha t} \cos \beta t, t^s e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad 0 \leq s \leq k_1 - 1.$$

Все решения такого рода вместе с решениями вида (2.30) для вещественных корней  $\lambda$  образуют фундаментальную систему решений. •





**Пример 2.9.** Решить уравнение

$$y^{VI} - 16y''' + 64y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^6 - 16\lambda^3 + 64 = 0,$$

которое можно записать в виде

$$(\lambda^3)^2 - 2 \cdot 8(\lambda^3) + 8^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^3 - 8)^2 = 0.$$

Применим формулу разности кубов

$$((\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4))^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 4)^2 = 0.$$

Отсюда

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 4)^2 = 0$$

$$\text{или } (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Дискриминант квадратного уравнения,  
стоящего в основании степени,  
имеет вид

$$D = 4 - 4 \cdot 4 = -12, \text{ тогда}$$

$$\lambda_{1-4} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}i}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2},$$

$$\lambda_{1,2} = -1 + \sqrt{3}i, \quad \lambda_{3,4} = -1 - \sqrt{3}i.$$

$$\lambda_{5,6} = 2 \text{ кратности } 2.$$

Для каждого полученного собственного значения выпишем соответствующие ему решения исходного дифференциального уравнения. Линейная комбинация всех полученных решений

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} \cos \sqrt{3}t + (C_3 + C_4 t)e^{-t} \sin \sqrt{3}t + (C_5 + C_6 t)e^{2t}$$

является общим решением дифференциального уравнения.

Таким образом сформулируем **алгоритм решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами.**

Для решения уравнения (2.20) необходимо составить характеристическое уравнение с  $a_0 \neq 0$ ,  $n \geq 1$ ,

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (2.33)$$

Уравнение (2.33) является линейным алгебраическим уравнением  $n$ -ой степени. По основной теореме алгебры многочлен, стоящий в левой части уравнения (2.33) имеет  $n$  нулей (с учетом кратности) в  $\mathbb{C}$ .

Имеют место следующие возможности:

1) если все корни уравнения (2.33) различны (простые), то уравнение (2.20) имеет  $n$  различных решений, причем,

- если собственное значение характеристического уравнения  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ , то соответствующее ему решение уравнения имеет вид  $y_j = e^{\lambda_j x}$ ;
- если же собственные значения характеристического уравнения  $\lambda_k = \alpha + i\beta$ , а  $\lambda_{k+1} = \alpha - i\beta$  являются комплексно сопряженными корнями, то соответствующие им решения уравнения имеют вид  $y_k = e^{\alpha x} \cos \beta x$ ,  $y_{k+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x$ .

2) Для каждого корня кратности  $k$ ,  $k \geq 1$ , уравнения (2.33), уравнение (2.20) имеет  $k$  различных решений. Причем,

- если собственное значение характеристического уравнения  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  кратности  $k$ ,  $k \geq 1$ , то соответствующие ему решения уравнения имеют вид  $e^{\lambda_j x}$ ,  $x^1 e^{\lambda_j x}$ ,  $\dots$ ,  $x^{k-1} e^{\lambda_j x}$ ;
- если же собственные значения характеристического уравнения  $\lambda_k = \alpha + i\beta$ , а  $\lambda_{k+1} = \alpha - i\beta$  являются комплексно сопряженными корнями и имеют кратность  $k$ ,  $k \geq 1$ , то соответствующие им решения уравнения имеют вид  $e^{\alpha x} \cos \beta x$ ,  $x e^{\alpha x} \cos \beta x$ ,  $\dots$ ,  $x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$  для первого комплексно сопряженного корня, и  $e^{\alpha x} \sin \beta x$ ,  $x e^{\alpha x} \sin \beta x$ ,  $\dots$ ,  $x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$  для второго комплексно сопряженного корня.

После нахождения всех решений уравнения (2.20) необходимо для представления его общего решения уравнения записать линейную комбинацию всех полученных решений.



### • Упражнения для самостоятельной работы

Проинтегрировать следующие уравнения и, где указано, решить задачу Коши.

1.  $y'' - y = 0$  ;
2.  $3y'' - 2y' - 8y = 0$  ;
3.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = 3$  ;
4.  $y'' + 2y' + y = 0$  ;
5.  $y'' - 4y' + 3y = 0$ ,  $y(0) = 6$ ,  $y'(0) = 10$  ;
6.  $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$  ;
7.  $y'' - 2y' - 2y = 0$  ;
8.  $y^{VI} + 2y^V + y^{IV} = 0$  ;
9.  $4y'' - 8y' + 5y = 0$  ;

10.  $y''' - 8y = 0$  ;
11.  $y^{IV} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$  ;
12.  $y'' - 2y' + 2y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  ;
13.  $y'' - 2y' + 3y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$  ;
14.  $y^{IV} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$  ;
15.  $y^V + 4y^{IV} + 5y''' - 6y' - 4y = 0$  ;
16.  $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$  ;
17.  $y''' - 2y'' + 2y' = 0$  ;
18.  $y^{IV} - y = 0$  ;
19.  $y^X = 0$  ;
20.  $y''' - 3y' - 2y = 0$  ;
21.  $2y''' - 3y'' + y' = 0$  ;
22.  $y''' + y'' = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 1$ .

### 3. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

В данной главе будет идти речь о линейной неоднородной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad (3.1)$$

где вектор-функции  $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $f = \text{col}(f_1, \dots, f_n)$ ,  $f_i \in C(\alpha, \beta)$ , а матрица  $A(t) = (a_{ij})_{n \times n}$ , причем функции  $a_{ij} \in C(\alpha, \beta)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

#### 3.1. Теоремы об общем решении линейной неоднородной системы



**Теорема 3.1.** *Общее решение линейной неоднородной системы (3.1) есть сумма её частного решения и общего решения соответствующей линейной однородной системы*

$$\dot{u} = A(t)u, \quad (3.2)$$

т.е.

$$x_{o.n.} = x_{ч.н.} + u_{o.o.} \quad (3.3)$$

*Доказательство.* Ранее доказывалось, что если

$$\left. \begin{array}{l} u - \text{решение уравнения } Lu = 0 \\ v - \text{решение уравнения } Lv = f \end{array} \right\} \Rightarrow L(u + v) = Lu + Lv = 0 + f = f,$$

поэтому формула (3.3) определяет *только* решения неоднородной системы (3.1). Покажем, что (3.3) содержит *все* решения.

Пусть

$$\left. \begin{array}{l} v - \text{любое решение системы (3.1)} \\ \omega - \text{частное решение, входящее в формулу (3.3)} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (v - \omega) - \text{решение } L(v - \omega) = 0 \Rightarrow (v - \omega) \text{ содержится в } u_{o.o.} \text{ (т.е., } (v - \omega) \subset u_{o.o.}) \Rightarrow v \subset (u_{o.o.} + \omega) \text{ содержится в правой части (3.3).} \bullet$$



**Теорема 3.2.** *Общее решение линейного неоднородного уравнения*

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = f(t), \quad (3.4)$$

где  $a_i \in C(\alpha, \beta)$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $f \in C(\alpha, \beta)$ , причем  $a_0(t) \neq 0$ , есть сумма его частного решения и общего решения соответствующего линейного однородного уравнения

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0, \quad (3.5)$$

т.е.

$$y_{o.n.} = y_{ч.н.} + u_{o.o.} \quad (3.6)$$

*Доказательство* аналогично доказательству теоремы 3.1 об общем решении линейной неоднородной системы, поскольку (3.4) сводится к системе (3.1) заменой (1.11). •



**Пример 3.1.** Известны 3 решения линейного неоднородного уравнения 2-го порядка

$$y_1 = t + 2, \quad y_2 = t^2 - 1, \quad y_3 = t^2 + t.$$

- а) Найти общее решение этого уравнения.
- б) Выписать это уравнение.

*Решение.*

а) Общее решение линейного неоднородного уравнения в силу теоремы 3.2 представимо в виде

$$y_{o.n.} = y_{ч.н.} + u_{o.o.}$$

Найдем

$$u_{o.o.} = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

где  $u_1, u_2$  – линейно независимые решения линейного однородного уравнения. Воспользуемся тем, что если  $v_1$  и  $v_2$  – решения  $Lv = f$ , то  $L(v_1 - v_2) = f - f = 0$ , т.е.  $(v_1 - v_2)$  – решение однородного уравнения. К примеру, возьмем

$$u_1 = y_3 - y_2 = t + 1$$

и

$$u_2 = y_3 - y_1 = t^2 + t - t - 2 = t^2 - 2.$$

Проверим линейную независимость построенных решений. Поскольку

$$W(t) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & t^2-2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t^2 + 2t - t^2 + 2 = t^2 + 2t + 2 \neq 0,$$

т.к.  $D < 0$ , следовательно,  $u_1$  и  $u_2$  – линейно независимые решения линейного однородного уравнения. Тогда

$$u_{o.o.} = c_1 u_1 + c_2 u_2 = c_1(t + 1) + c_2(t^2 - 2).$$

Для построения общего решения уравнения в качестве частного решения неоднородного уравнения возьмем  $y_{ч.н.} = y_1$ , тогда

$$y_{o.n.} = y_{ч.н.} + u_{o.o.} = t + 2 + c_1(t + 1) + c_2(t^2 - 2).$$

б) Составим однородное уравнение на основе решений  $u_1 = t + 1$ ,  $u_2 = t^2 - 2$  (см. параграф 1.6),

$$\begin{vmatrix} t+1 & t^2-2 & y \\ 1 & 2t & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y''(t^2 + 2t + 2) - y'(2t + 2) + 2y = 0.$$

Найдем линейное неоднородное уравнение с такой же левой частью и частным решением  $y_1 = t + 2$ . Поскольку  $y_1' = 1$  и  $y_1'' = 0$ , то

$$0 \cdot (t^2 + 2t + 2) - 1 \cdot (2t + 2) + 2(t + 2) = 0,$$

$$-2t - 2 + 2t + 4 = 2 = f(t).$$

Тогда искомое уравнение имеет вид

$$(t^2 + 2t + 2)y'' - (2t + 2)y' + 2y = 2.$$

## 3.2. Метод Лагранжа вариации постоянных

### 3.2.1. Решение систем линейных неоднородных уравнений

Если общее решение линейной однородной системы (3.2) в силу теоремы об общем решении однородной системы представимо в виде

$$x(t) = c_1 x^1(t) + \dots + c_n x^n(t), \text{ где } c_1, \dots, c_n = \text{const}, \quad (3.7)$$

то можно найти решение линейной неоднородной системы (3.1).

Для этого в формуле (3.7) заменим постоянные  $c_1, \dots, c_n$  на неизвестные пока функции  $c_1(t), \dots, c_n(t)$  и получим

$$x(t) = c_1(t)x^1(t) + \dots + c_n(t)x^n(t).$$

Подставив это выражение в систему (3.1) найдем функции  $c_1(t), \dots, c_n(t)$ .

Докажем возможность отыскания функций  $c_1(t), \dots, c_n(t)$ .

*Доказательство.* Общее решение линейной однородной системы (3.2) запишем через фундаментальную матрицу  $X(t)$ , т.е.

$$x = X(t)c \quad (3.8)$$

где  $c = \text{col}(c_1, \dots, c_n)$ , а столбцы  $X(t)$  – линейные независимые решения – компоненты вектор-функций  $x^1(t), \dots, x^n(t)$ .

В (3.8) заменим

$$c = \text{col}(c_1, \dots, c_n) \text{ на } c(t) = \text{col}(c_1(t), \dots, c_n(t)),$$

тогда (3.8) примет вид  $x(t) = X(t)c(t)$ . При подстановке этого выражения в систему (3.1) используя, что  $X(t)$  – фундаментальная матрица (т.е. выполнено  $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ ), а так же воспользовавшись соотношением

$$\dot{x}(t) = \dot{X}(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t),$$

получим

$$\dot{X}(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t) = \underbrace{A(t)X(t)}_{\dot{x}(t)} c(t) + f(t).$$

Приведем подобные, тогда

$$X(t)\dot{c}(t) = f(t) \quad | \cdot X^{-1}(t) \text{ слева.}$$

Заметим, что  $X^{-1}(t)$  существует при любом  $t$ , т.к.  $\det X(t) \neq 0$ ,  $X(t)$  – квадратная матрица размерности  $n$ .

Таким образом,

$$\underbrace{X^{-1}(t)X(t)}_{\mathbb{E}} \dot{c}(t) = X^{-1}(t)f(t),$$

$$\mathbb{E} \cdot \dot{c}(t) = \dot{c}(t) = X^{-1}(t)f(t).$$

Проинтегрируем в пределах от  $t_0$  до  $t$


$$\int_{t_0}^t \dot{c}(s)ds = \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds,$$

$$c(t) = \underbrace{c(t_0)}_{c^0} + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds,$$

где  $c(t_0) = c^0$  – произвольный постоянный вектор.

Подставим найденное  $c(t)$  в (3.8), получим

$$x(t) = X(t)c(t) = X(t)c^0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds. \bullet$$

 **Замечание 3.1.** При решении конкретных систем, чтобы избежать лишних выкладок (т.е. чтобы не выписывать члены, которые должны взаимно уничтожаться), можно применить следующий прием.

1. Найти решение однородной системы  $X(t) \cdot c$ , где  $X(t)$  – фундаментальная матрица,  $c$  – постоянный вектор.

2. Найти  $X(t)$ , а затем координаты вектора  $\dot{c}(t)$  определить из системы

$$X(t)\dot{c}(t) = f(t). \quad (3.9)$$



**Пример 3.2.** Решение однородной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \cdot x + y, \\ \dot{y} = -x + 0 \cdot y, \end{cases}$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) = c_1 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0, \\ \dot{y} = -1 \cdot x + 0 \cdot y + \frac{1}{\sin t}, \end{cases} \Rightarrow f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin t} \end{pmatrix},$$

где  $0 < t < \pi$ .

*Решение.* Сделаем замену в (3.10) следующим образом:  $c_1 \rightarrow c_1(t)$  и  $c_2 \rightarrow c_2(t)$ . Выпишем формулу (3.9), составив фундаментальную матрицу по (3.10)

$$X(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}.$$

Получим

$$X(t)\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \sin t + \dot{c}_2 \cos t \\ \dot{c}_1 \cos t - \dot{c}_2 \sin t \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin t} \end{pmatrix}.$$



$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \dot{c}_1 \sin t + \dot{c}_2 \cos t = 0, \\ \dot{c}_1 \cos t - \dot{c}_2 \sin t = \frac{1}{\sin t}. \end{cases} \\
\Rightarrow & \begin{cases} \dot{c}_1 = -\dot{c}_2 \cdot \frac{\cos t}{\sin t}, \\ -\dot{c}_2 \frac{\cos^2 t}{\sin t} - \dot{c}_2 \sin t = \frac{1}{\sin t}, \quad |\cdot \sin t| > 0, \text{ т.к. } 0 < t < \pi. \end{cases} \\
& -\dot{c}_2 \cos^2 t - \dot{c}_2 \sin^2 t = 1, \\
& -\dot{c}_2 = 1, \\
& \dot{c}_2 = -1 \Rightarrow c_2(t) = -\int dt = -t + C_{21}. \\
& \dot{c}_1 = -\dot{c}_2 \frac{\cos t}{\sin t} = 1 \cdot \frac{\cos t}{\sin t} \Rightarrow c_1(t) = \int \frac{\cos t}{\sin t} dt = \int \frac{d \sin t}{\sin t} = \ln |\sin t| + C_{11}. \\
& \begin{cases} c_1(t) = \ln |\sin t| + C_{11}, \\ c_2(t) = -t + C_{21}. \end{cases} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Подставим (3.11) в (3.10), получим решение линейной неоднородной системы

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (\ln |\sin t| + C_{11}) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + (-t + C_{21}) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \sin t \cdot \ln |\sin t| + C_{11} \sin t \\ \cos t \cdot \ln |\sin t| + C_{11} \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \cos t + C_{21} \cos t \\ t \sin t - C_{21} \sin t \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \sin t \cdot \ln |\sin t| - t \cos t \\ \cos t \cdot \ln |\sin t| + t \sin t \end{pmatrix} + C_{11} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_{21} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

### 3.2.2. Решение линейного неоднородного уравнения $n$ -го порядка

Если известно общее решение

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n, \tag{3.12}$$

однородного уравнения (3.5), где  $y_1, \dots, y_n$  — линейно независимые решения (3.5),  $c_1, \dots, c_n$  — произвольные постоянные, то можно найти решение линейного неоднородного уравнения (3.4). Для этого в формуле (3.12) заменяем  $c_1, \dots, c_n$  на  $c_1(t), \dots, c_n(t)$ . Ранее было показано, что уравнение (3.4) заменой (1.11) сводится к системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -\frac{a_n(t)}{a_0(t)}x_1 - \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)}x_2 - \frac{a_{n-2}(t)}{a_0(t)}x_3 - \dots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)}x_n + \frac{f(t)}{a_0(t)}, \end{array} \right. \quad (3.13)$$

поэтому можно воспользоваться методом вариации постоянных для линейных систем, т.е. искать производные  $\dot{c}_1(t), \dots, \dot{c}_n(t)$  из линейной алгебраической системы


$$X(t)\dot{c}(t) = f^0(t). \quad (3.14)$$

Здесь  $X(t)$  – фундаментальная матрица однородной ( $f \equiv 0$ ) системы (3.13)

$$X(t) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

$\dot{c}(t) = \text{col}(\dot{c}_1(t), \dots, \dot{c}_n(t))$ ,  $f^0(t) = \text{col}\left(0, 0, \dots, \frac{f(t)}{a_0(t)}\right)$ . Найдя из системы (3.14) функции  $c'_i(t)$ , проинтегрировав и затем подставив  $c_i(t)$  в (3.12), получим решение уравнения (3.4).



 **Пример 3.3.** Решить линейное неоднородное уравнение второго порядка методом Лагранжа

$$(t^2 + 1)y'' - 2ty' + 2y = 6(t^2 + 1)^2.$$

*Решение.* Зная общее решение  $y = c_1 t + c_2(t^2 - 1)$  однородного уравнения, можем выписать два его частных решения, причем они будут линейно независимыми

$$y_1 = t, \ y_2 = t^2 - 1 \Rightarrow y_1' = 1, \ y_2' = 2t.$$

Тогда фундаментальная матрица будет иметь вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 - 1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}.$$

Запишем формулу (3.14)

$$X(t)\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 - 1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6(t^2 + 1)^2}{t^2 + 1} \end{pmatrix} = f^0.$$

Или в виде системы

$$\begin{cases} \dot{c}_1 t + \dot{c}_2(t^2 - 1) = 0, \\ \dot{c}_1 \cdot 1 + 2t \cdot \dot{c}_2 = 6(t^2 + 1). \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы

$$\dot{c}_1 = -\dot{c}_2 \frac{(t^2 - 1)}{t}.$$

Тогда

$$\frac{-\dot{c}_2(t^2 - 1)}{t} + 2t \cdot \dot{c}_2 = 6(t^2 + 1). \quad \Big| \cdot t \neq 0$$

Получим

$$\begin{aligned} -\dot{c}_2(t^2 - 1) + 2t^2 \cdot \dot{c}_2 &= 6t(t^2 + 1), \\ \dot{c}_2 - \dot{c}_2 \cdot t^2 + 2t^2 \cdot \dot{c}_2 &= 6t(t^2 + 1), \\ \dot{c}_2 + \dot{c}_2 \cdot t^2 &= 6t(t^2 + 1). \end{aligned}$$

После всех преобразований система примет вид

$$\begin{cases} \dot{c}_2 = 6t, \\ \dot{c}_1 = -6t \frac{(t^2 - 1)}{t} = 6 - 6t^2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} c_2 &= \int 6t \, dt = 3t^2 + C_{21}, \\ c_1 &= \int (6 - 6t^2) \, dt = 6t - 2t^3 + C_{11}. \end{aligned}$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$\begin{aligned} y &= c_1(t)t + c_2(t)(t^2 - 1) = (6t - 2t^3 + C_{11})t + (3t^2 + C_{21})(t^2 - 1) = \\ &= 6t^2 - 2t^4 + 3t^4 - 3t^2 + C_{11}t + C_{21}(t^2 - 1) = t^4 + 3t^2 + C_{11}t + C_{21}(t^2 - 1). \end{aligned}$$

### 3.2.3. Метод вариации постоянных для линейного неоднородного уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим

$$L(y) \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(t), \quad (3.15)$$

где  $a_0 \neq 0$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $f \in C(\alpha, \beta)$ .

Поскольку уравнения с постоянными коэффициентами являются частным случаем уравнений с переменными коэффициентами, то все результаты имеют место и в этом случае.



**Пример 3.4.** Решить уравнение

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$$

1) Найдем общее решение однородного уравнения.

$$y'' - 2y' - 3y = 0,$$

характеристическим для него будет уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

имеем квадратное уравнение, для которого найдем дискриминант

$$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16,$$

тогда корни

$$\lambda_1 = \frac{2+4}{2} = 3, \quad \lambda_2 = \frac{2-4}{2} = -1.$$

Отсюда общее решение однородного уравнения будет иметь вид  $y_{o.o.}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$ , где  $C_1, C_2$  – константы.

2) Считаем, что  $C_1 = C_1(x)$  и  $C_2 = C_2(x)$ , т.е.  $y(x) = C_1(x)e^{3x} + C_2(x)e^{-x}$  – общее решение исходного неоднородного уравнения. Подставим это решение в уравнение, получим верное тождество

$$\begin{aligned} y' &= C_1'(x)e^{3x} + 3C_1(x)e^{3x} + C_2'(x)e^{-x} - C_2(x)e^{-x} = \\ &= (C_1'(x)e^{3x} + C_2'(x)e^{-x}) + (3e^{3x}C_1(x) - e^{-x}C_2(x)). \end{aligned}$$

Приравняем первую скобку, содержащую  $C_1'(x)$ , к нулю,  $C_1'(x)e^{3x} + C_2'(x)e^{-x} = 0$ . Тогда

$$y' = 3e^{3x}C_1(x) - e^{-x}C_2(x),$$

$$y'' = 9e^{3x}C_1(x) + 3e^{3x}C_1'(x) + e^{-x}C_2(x) - e^{-x}C_2'(x).$$

Подставляем в исходное уравнение

$$\begin{aligned} 9e^{3x}C_1(x) + 3e^{3x}C_1'(x) + e^{-x}C_2(x) - e^{-x}C_2'(x) - 6e^{3x}C_1(x) + \\ + 2e^{-x}C_2(x) - 3e^{3x}C_1(x) - 3C_2(x)e^{-x} = e^{4x}, \\ 3e^{3x}C_1'(x) - e^{-x}C_2'(x) = e^{4x}. \end{aligned}$$

Получаем систему

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{3x} + C_2'(x)e^{-x} = 0, \\ 3e^{3x}C_1'(x) - e^{-x}C_2'(x) = e^{4x}, \end{cases}$$

которую можно свести к эквивалентной системе двух уравнений.

Для начала найдем сумму двух уравнений и получим

$$4e^{3x}C_1'(x) = e^{4x},$$

отсюда

$$C_1'(x) = \frac{e^x}{4} \Rightarrow C_1(x) = \frac{1}{4} \int e^x dx = \frac{1}{4}e^x + C_{11}.$$

Далее умножим первое уравнение на 3 и вычтем из полученного уравнения второе уравнение системы, в этом случае получим

$$-4e^{-x}C_2'(x) = e^{4x}.$$

Отсюда

$$C_2'(x) = \frac{e^{5x}}{-4} \Rightarrow C_2(x) = -\frac{1}{4} \int e^{5x} dx = -\frac{1}{20}e^{5x} + C_{21}.$$

Ответ:

$$\begin{aligned} y &= \left( \frac{1}{4}e^x + C_{11} \right) e^{3x} + \left( -\frac{1}{20}e^{5x} + C_{21} \right) e^{-x} = \\ &= \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{20}e^{4x} + C_{11}e^{3x} + C_{21}e^{-x} = \frac{1}{5}e^{4x} + C_{11}e^{3x} + C_{21}e^{-x}. \end{aligned}$$

### 3.3. Метод неопределенных коэффициентов для систем линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейную систему нормального вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t), \end{cases} \quad (3.16)$$

где  $a_{ij}$  – любые числа и  $f_i(t)$  – известные функции,  $i, j = \overline{1, n}$ .

Если ввести обозначения  $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$  – неизвестная вектор-функция,  $f = \text{col}(f_1, \dots, f_n)$  – известная вектор-функция,  $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ , тогда система (3.16) может быть представлена в векторной записи

$$\dot{x} = Ax + f. \quad (3.17)$$

Если в системе (3.17)  $f(t)$  – специальная правая часть, которая является суммой и / или произведением функций

$$at^m, e^{\gamma t}, \cos \beta t, \sin \beta t, \quad (3.18)$$

то имеет место метод неопределенных коэффициентов. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + f^1(t) + \dots + f^r(t). \quad (3.19)$$

Тогда решение является суммой решений систем

$$\dot{x}^j = Ax^j + f^j(t), \quad j = \overline{1, r}. \quad (3.20)$$

Поскольку каждая из функций (3.18) и их сумма / произведение может быть представлена в виде

$$p(t)e^{\gamma t}, \quad \text{где } p(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \dots + a_0,$$

где  $a_0, \dots, a_m$  – векторы, то (3.20) можно представить в виде

$$\dot{x} = Ax + p(t)e^{\gamma t}. \quad (3.21)$$

Приведем систему (3.21), используя жорданову форму матрицы  $A$ . С помощью каждой жордановой клетки упростим (3.21), чтобы эта система распалась на подсистемы. Рассмотрим одну из подсистем, где  $\lambda$  – собственное значение и  $p_i^*(t)$  – многочлены степени не выше  $m$  (т.к.  $p(t)$  – многочлен степени  $m$ , см. ранее).

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 + p_1^*(t)e^{\gamma t}, \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_3 + p_2^*(t)e^{\gamma t}, \\ \dots \\ \dot{y}_{k-1} = \lambda y_{k-1} + y_k + p_{k-1}^*(t)e^{\gamma t}, \\ \dot{y}_k = \lambda y_k + p_k^*(t)e^{\gamma t}. \end{cases} \quad (3.22)$$

Сделаем замену  $y_i = e^{\lambda t} z_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , см. замену (2.17) в параграфе 2.4. Получим

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + p_1^*(t)e^{(\gamma-\lambda)t}, \\ \dots \\ \dot{z}_{k-1} = z_k + p_{k-1}^*(t)e^{(\gamma-\lambda)t}, \\ \dot{z}_k = p_k^*(t)e^{(\gamma-\lambda)t}. \end{cases}$$

Из этой подсистемы найдем последовательно  $z_k, z_{k-1}, \dots, z_2, z_1$ .

1 случай. Если  $\gamma - \lambda \neq 0$ , то из последнего

$$z_k = \int p_k^*(t)e^{(\gamma-\lambda)t} dt = q_k^*(t)e^{(\gamma-\lambda)t},$$

где  $q_k^*(t)$  – многочлен той же степени, что и  $p_k^*(t)$ . Здесь и далее постоянные интегрирования будем считать равными нулю, поскольку ищем частные решения.

Аналогично, находим  $z_{k-1}, \dots, z_1$ . Получим  $z_i = q_i^*(t)e^{(\gamma-\lambda)t}$ ,  $i = \overline{1, k}$ , где  $q_i^*(t)$  – многочлены степени не выше  $m$ .

2 случай. Если  $\gamma - \lambda = 0$ , то  $e^{(\gamma-\lambda)t} = 1$  и

$$z_k = \int p_k^*(t) dt = q_{k+1}^*(t).$$

После каждого интегрирования получаем многочлены  $q_i^*(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , степени не выше  $m + k$ . Найдем все  $z_i$ , сделаем обратную замену к  $y_i$ , потом – замену к  $x_i$ . Тогда система будет иметь частное решение вида

$$x_i = q_i(t)e^{\gamma t}, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $q_i(t)$  –

- а) многочлен степени не выше  $m$ , если  $\gamma$  не совпадает ни с одним корнем  $\lambda_j$ ,
- б) многочлен степени не выше  $m + k_j$ , если  $\gamma$  совпадает с корнем  $\lambda_j$ , где  $k_j$  – число, равное размеру наибольшей из жордановых клеток, содержащих  $\lambda_j$ , поэтому  $k_j$  на единицу больше наибольшей степени многочленов, умноженных на  $e^{\lambda_j t}$  в общем решении однородной системы.



**Пример 3.5.** Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + te^{2t}, \\ \dot{y} = x + y + 4e^{2t} \cos t. \end{cases}$$

*Решение.* Представим систему в векторной форме. Для этого запишем линейную однородную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases}$$

в которой обозначим

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в неоднородности имеем различные  $\gamma_1 = 2$  и  $\gamma_2 = 2 + i$ , следовательно, разбиваем её на две функции

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4e^{2t} \cos t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система в векторной записи примет вид

$$\dot{u} = Au + f_1(t) + f_2(t).$$

(1) Решим однородную систему. Для этого найдем собственные значения матрицы  $A$ .

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 2 + 3.$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c = 4 - 1 \cdot 5 = -1,$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}} = 2 \pm i.$$

Тогда

$$u^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos t - \sin t) \\ e^{2t} \cos t \end{pmatrix}, \quad u^2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos t + \sin t) \\ e^{2t} \sin t \end{pmatrix}.$$



См. детали в примере 2.6.

(2) Найдем частное решение для первой неоднородной системы

$$\dot{u} = Au + f_1(t), \text{ где } f_1(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m = 1, \quad u_{\text{ч.н.}}^1 = ?$$

$$\gamma = 2 + i \cdot 0 \neq \lambda_j, \quad j = 1, 2, \text{ т.е. } \gamma - \lambda \neq 0.$$

Используем многочлены степени не выше  $m = 1$  в общем виде.

$$\begin{cases} x_1 = (At + B)e^{2t}, \\ y_1 = (Ct + D)e^{2t}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = (A + 2B + 2At)e^{2t}, \\ \dot{y}_1 = (C + 2D + 2Ct)e^{2t}. \end{cases}$$

Подставим найденные выражения

$$\begin{cases} (A + 2B + 2At)e^{2t} = 3(At + B)e^{2t} - 2(Ct + D)e^{2t} + te^{2t}, \\ (C + 2D + 2Ct)e^{2t} = (At + B)e^{2t} + (Ct + D)e^{2t} + 0. \end{cases}$$

Составим равенства для неопределенных коэффициентов

$$\begin{cases} A + 2B = 3B - 2D, \\ 2A = 3A - 2C + 1, \\ C + 2D = B + D, \\ 2C = A + C, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = A, \\ C + D = B, \\ A = B - 2D, \\ 2C - A = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ C = 1, \\ 1 + D = B, \\ 1 = B - 2D, \\ D = 0, \\ B = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$u_{\text{ч.н.}}^1 = \begin{pmatrix} (t + 1)e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}.$$

(3) Найдем частное решение для второй неоднородной системы

$$\dot{u} = Au + f_2(t).$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + 0, \\ \dot{y} = x + y + 4e^{2t} \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + 0, \\ \dot{y} = x + y + 4e^{\overbrace{2}^{\alpha} t} \cos \overbrace{1}^{\beta} t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + 0, \\ \dot{y} = \operatorname{Re} 4e^{(2+i)t} + x + y. \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{Поскольку } \gamma = 2 + i = \lambda_1 \Rightarrow k = 1 - \text{кратность корня } \gamma \\ &p_k^*(t) = 4 \Rightarrow \text{степень искомого многочлена } m = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

в частном решении второй неоднородной системы степень многочлена будет  $m + k = 1$ .

$$\begin{cases} x_2^* = (pt + q)e^{(2+i)t}, \\ y_2^* = (rt + s)e^{(2+i)t}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2^* = (p + (2+i)q + (2+i)pt)e^{(2+i)t}, \\ \dot{y}_2^* = (r + (2+i)s + (2+i)rt)e^{(2+i)t}. \end{cases}$$

Подставим решение в систему (3.23).

$$\begin{cases} p + (2+i)q + (2+i)pt = 3pt + 3q - 2rt - 2s, \\ r + (2+i)s + (2+i)rt = pt + q + rt + s + 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p + 2q + 2pt + i(q + pt) = (3p - 2r)t + 3q - 2s, \\ r + 2s + 2rt + i(s + rt) = (p + r)t + q + s + 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p + 2q + qi = 3q - 2s, \\ (2+i)p = 3p - 2r, \\ r + (2+i)s = q + s + 4, \\ (2+i)r = p + r. \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q(1-i) = p + 2s, \\ 2r = (1-i)p, \\ p = (1+i)r \quad | \cdot (1-i), \\ r + (1+i)s = q + 4. \end{array} \right\} \text{ эквивалентные равенства}$$

Эта система имеет бесконечно много решений. Найдём одно частное решение, например, при  $s = 0$ . Тогда

$$\begin{cases} (1-i)q = p, \\ (1-i)p = 2r, \\ q + 4 = r. \end{cases}$$

Подставим во второе уравнение системы переменную  $p$  из первого, а переменную  $r$  из третьего уравнений. Получим

$$(1-i)(1-i)q = 2(q+4) \Leftrightarrow (1-2i-1)q = 2q+8,$$

или

$$(-2i-2)q = 8 \Leftrightarrow q = \frac{8}{-2i-2} = 2i-2.$$

Тогда

$$r = 2i-2+4 = 2i+2, \text{ а } p = (1-i)(2i-2) = 4i.$$

Выпишем решения

$$x_2^* = (4it + (2i-2))e^{(2+i)t} = e^{2t}(4it + 2i-2)(\cos t + i \sin t), \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
x_2^* &= e^{2t}((-2 \cos t - 4t \sin t - 2 \sin t) + i((4t + 2) \cos t - 2 \sin t)). \\
y_2^* &= ((2i + 2)t + 0)e^{(2+i)t} = (2it + 2t)(\cos t + i \sin t)e^{2t}, \Rightarrow \\
y_2^* &= e^{2t}(2t \cos t - 2t \sin t + i(2t \cos t + 2t \sin t)).
\end{aligned}$$

Тогда

$$u_{\text{ч.н.}}^2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} x_2^* \\ \operatorname{Re} y_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(-2 \cos t - (4t + 2) \sin t) \\ e^{2t}(2t \cos t - 2t \sin t) \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= C_1 u^1 + C_2 u^2 + u_{\text{ч.н.}}^1 + u_{\text{ч.н.}}^2 = \\
&= C_1 \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos t - \sin t) \\ e^{2t} \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos t + \sin t) \\ e^{2t} \sin t \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} (t + 1)e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t}(-2 \cos t - (4t + 2) \sin t) \\ e^{2t}(2t \cos t - 2t \sin t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

### 3.4. Метод неопределенных коэффициентов решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение высокого порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(t),$$

где  $a_0 \neq 0$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{0, n}$ , а  $f \in C(\alpha, \beta)$ . Обозначим

$$L(y) \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(t). \quad (3.24)$$

Если функция  $f(t)$  выражается через суммы и / или произведения функций вида

$$t^m, e^{at}, \cos bt, \sin bt \quad (m \geq 0, m \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{R}),$$

то для решения уравнения (3.24) целесообразно применять *Метод неопределенных коэффициентов*.

Поскольку решение  $y$  уравнения  $L(y) = f_1 + f_2$  равно сумме решений  $y_1$  и  $y_2$  уравнений  $L(y_1) = f_1$  и  $L(y_2) = f_2$ , соответственно (т.е.  $y = y_1 + y_2$ ), кроме того, по формулам Эйлера можно синусы и косинусы выразить через показательные функции, то достаточно рассмотреть случай, когда в (3.24) неоднородность в правой части имеет вид

$$f(t) = p(t)e^{\gamma t}, \quad p(t) = b_0 t^m + \dots + b_m, \quad m \geq 0, m \in \mathbb{Z}. \quad (3.25)$$



**Теорема 3.3.** Если  $f(t)$  в уравнении (3.24) имеет вид (3.25), то частное решение уравнения (3.24) имеет вид

$$y = t^k(q_0 t^m + \dots + q_m)e^{\gamma t}, \quad (3.26)$$

где  $k = 0$ , если  $\gamma$  не является корнем характеристического уравнения (2.21) соответствующего однородного уравнения (2.20), и  $k > 0$  совпадает с кратностью корня  $\gamma$  характеристического уравнения (2.21) соответствующего однородного уравнения (2.20).

*Доказательство.* Пусть решение имеет вид

$$y_1 = q_0 t^{m+k} e^{\gamma t}. \quad (3.27)$$

Тогда, по лемме 2.4, в формуле (2.27), т.к.  $s = m + k \geq k$ ,  $s - k = m$ , имеем

$$\begin{aligned} L(y_1) &= L(q_0 t^{m+k} e^{\gamma t}) \stackrel{d_0 \neq 0}{=} q_0 (d_0 t^m + d_1 t^{m-1} + \dots + d_m) e^{\gamma t} = \\ &= (q_0 d_0 t^m + \underbrace{(d_1 t^{m-1} + \dots + d_m) q_0}_{r(t)}) e^{\gamma t} = (q_0 d_0 t^m + r(t)) e^{\gamma t}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Методом математической индукции найдем  $y_1$ .

*База индукции.* Если  $m = 0$ , то  $r(t) \equiv 0$ .

Подставим выражение (3.27), в котором  $m = 0$ , в уравнение (3.24) с неоднородностью (3.25), получим

$$L(q_0 t^k e^{\gamma t}) = (q_0 d_0 t^0 + \underbrace{r(t)}_{=0}) e^{\gamma t} = e^{\gamma t} b_0 t^0 : e^{\gamma t} \neq 0,$$

$$q_0 d_0 = b_0 \Rightarrow q_0 = \frac{b_0}{d_0},$$

$$y_1 = \frac{b_0}{d_0} t^k e^{\gamma t}.$$

*Посыл индукции.* Пусть  $m \geq 1$ , тогда  $r(t) = d_1 t^{m-1} + \dots + d_m$  — многочлен степени  $m - 1$ .

Предположим, что условия теоремы выполняются, если в (3.25) степень многочлена ниже  $m$ , т.е.  $b_0 = 0$  (т.к. в этом случае коэффициент при  $t^m$  должен быть равен нулю).

*Шаг индукции.* Докажем, что теорема верна и при  $b_0 \neq 0$ .

Сделаем замену в (3.24), положив  $y = y_1 + z$ , где  $y_1 = t^{m+k}e^{\gamma t}q_0$ .  
Получим

$$L(y) = L(y_1 + z) = L(y_1) + L(z) \stackrel{\text{по (3.28)}}{=} (q_0 d_0 t^m + r(t))e^{\gamma t} + L(z) =$$

$$\stackrel{\text{пр. часть (3.24)}}{=} e^{\gamma t} (b_0 t^m + \underbrace{b_1 t^{m-1} + \dots + b_m}_{p_1(t)}) = e^{\gamma t} (b_0 t^m + p_1(t))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L(z) &= e^{\gamma t} (b_0 t^m + p_1(t)) - (q_0 d_0 t^m + r(t))e^{\gamma t} = \\ &= e^{\gamma t} (b_0 t^m - \frac{b_0}{d_0} d_0 t^m + p_1(t) - r(t)) \\ \Rightarrow L(z) &= (p_1(t) - r(t))e^{\gamma t}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Здесь  $p_1(t) - r(t)$  – многочлен степени ниже  $m$  по построению.

В силу посыла индукции, уравнение (3.29) имеет частное решение  $z = t^k q^*(t)e^{\gamma t}$ , где  $q^*(t)$  – многочлен степени ниже  $m$ .

Поэтому  $y = y_1 + z = t^k \left( \frac{b_0}{d_0} t^m + q^*(t) \right) e^{\gamma t}$ . •



**Пример 3.6.** Решить уравнение

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = \underbrace{e^{-2t}}_{f_1, \text{ где } \gamma_1 = -2} + \underbrace{te^t}_{f_2, \text{ где } \gamma_2 = 1}.$$

1) Решим линейное однородное уравнение, соответствующее исходному, т.е.

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0.$$

Характеристическое уравнение в этом случае будет иметь вид

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 8 = 0.$$

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\lambda^2(\lambda + 2) - 4(\lambda + 2) = 0,$$

тогда уравнение преобразуется к виду

$$(\lambda^2 - 4)(\lambda + 2) = 0,$$

или

$$(\lambda - 2)(\lambda + 2)^2 = 0.$$

Отсюда имеем

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = -2.$$

Первому корню, кратность которого  $k = 1$ , будет соответствовать решение  $e^{2t}$ . Другому корню, имеющему кратность  $k = 2$ , будут соответствовать два решения  $e^{-2t}$ ,  $te^{-2t}$ . Таким образом общее решение однородного уравнения, соответствующего исходному, будет иметь вид

$$y_{\text{o.o.}} = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + C_3 t e^{-2t}.$$

2) Рассмотрим случай

$$L(y) = f_1,$$

т.е. уравнение

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = e^{-2t} t^0,$$

здесь  $\gamma_1 = -2$ , его кратность  $k(\gamma_1) = 2$ ,  $m = 0$ . Выразим, опираясь на формулу (3.26), решение уравнения через неопределенные коэффициенты

$$y_1 = t^2 e^{-2t} (At^0 + 0) = At^2 e^{-2t}.$$

Для нахождения неопределенного коэффициента воспользуемся определением решения дифференциального уравнения и подставим его и его производные в уравнение, получив при этом тождество. Вычислим производную первого порядка

$$y_1' = A (2te^{-2t} - 2t^2 e^{-2t}) = 2A (te^{-2t} - t^2 e^{-2t}),$$

тогда

$$\begin{aligned} y_1'' &= 2A (e^{-2t} - 2te^{-2t} - 2te^{-2t} + 2t^2 e^{-2t}) = \\ &= 2A (e^{-2t} - 4te^{-2t} + 2t^2 e^{-2t}) \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} y_1''' &= 2A (-2e^{-2t} - 4e^{-2t} + 8te^{-2t} + 4te^{-2t} - 4t^2 e^{-2t}) = \\ &= -4A (e^{-2t} + 2e^{-2t} - 6te^{-2t} + 2t^2 e^{-2t}) = -4A (3e^{-2t} - 6te^{-2t} + 2t^2 e^{-2t}). \end{aligned}$$

Подставим найденные функции в рассматриваемое уравнение и получим

$$\begin{aligned} e^{-2t}(-8At^2 + 24At - 12A) + 2e^{-2t}(4At^2 - 8At + 2A) - \\ - 4e^{-2t}(2At - 2At^2) - 8e^{-2t}At^2 = e^{-2t}. \end{aligned}$$

Разделив обе части равенства на  $e^{-2t} \neq 0$  для нахождения  $A$  решим уравнение

$$(-8A + 8A + 8A - 8A)t^2 + (24A - 16A - 8A)t + (-12A + 4A) = 1,$$

которое после приведения подобных примет вид

$$-8A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{8}.$$

Тогда частное решение первого неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y_{1_{\text{ч.н.}}} = -\frac{t^2}{8}e^{-2t}.$$

3) Перейдем теперь к нахождению второго неоднородного уравнения

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = t^1 e^t,$$

где  $\gamma_2 = 1$ , кратность которого  $k(\gamma_2) = 0$ ,  $m = 1$ . В силу формулы (3.26), решение этого уравнения выразим через неопределенные коэффициенты

$$y_2 = (Bt + C)e^{t^0} = (Bt + C)e^t.$$

Аналогично предыдущему случаю найдем первую

$$y_2' = Be^t + (Bt + C)e^t = (Bt + B + C)e^t,$$

вторую

$$y_2'' = Be^t + (Bt + B + C)e^t = (Bt + 2B + C)e^t,$$

и третью

$$y_2''' = Be^t + (Bt + 2B + C)e^t = (Bt + 3B + C)e^t$$

производные решения  $y_2$ . Подставим их в уравнение и получим

$$e^t(Bt + 3B + C) + 2e^t(Bt + 2B + C) - 4(Bt + B + C)e^t + e^t(Bt + C)(-8) = e^t t.$$

Разделим обе части полученного равенства на  $e^t \neq 0$ ,

$$Bt + 3B + C + 2Bt + 4B + 2C - 4Bt - 4B - 4C - 8Bt - 8C = t,$$

после приведения подобных

$$-9Bt + 3B - 9C = t.$$

Поскольку многочлены с обеих сторон равенства равны, следовательно равны коэффициенты при соответствующих степенях. Поэтому, для нахождения неопределенных коэффициентов  $B$  и  $C$ , составим систему

$$\begin{cases} -9B = 1, \\ 3B - 9C = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{9}, \\ 3 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = 9C, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{9}, \\ C = -\frac{1}{27}. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение второго неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y_{2_{\text{ч.н.}}} = -\frac{1}{9}te^t - \frac{1}{27}e^t.$$

Просуммируем все полученные решения, получим

$$y = y_{0.0.} + y_{1_{\text{ч.н.}}} + y_{2_{\text{ч.н.}}} = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + C_3te^{-2t} - \frac{1}{8}t^2e^{-2t} - \frac{1}{9}te^t - \frac{1}{27}e^t.$$



**Лемма 3.1.** Если в уравнении (3.24) коэффициенты вещественны и

$$f(t) = e^{\alpha t} (P(t) \cos \beta t + Q(t) \sin \beta t), \quad (3.30)$$

где  $P(t) = P_{m_1}(t)$  – многочлен степени  $m_1$ ,  $Q(t) = Q_{m_2}(t)$  – многочлен степени  $m_2$ , то существует вещественное частное решение вида

$$y = t^k e^{\alpha t} (R(t) \cos \beta t + S(t) \sin \beta t), \quad (3.31)$$

где  $k$  – кратность корня  $\lambda = \alpha + \beta i$  уравнения (2), причем  $k = 0$  если число  $\lambda = \alpha + \beta i$  не является корнем уравнения (2),  $R(t)$  и  $S(t)$  – многочлены степени  $m = \max\{m_1, m_2\}$ .

*Доказательство.* Поскольку  $\cos \beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2}$  и  $\sin \beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}$ , то в (3.30)  $f = f_1 + f_2$ , где  $f_1$  и  $f_2$  – функции вида (3.25) с  $\gamma = \alpha + i\beta$  и  $\gamma = \alpha - i\beta$ , соответственно. Решение уравнения  $L(y) = f_1 + f_2$  есть  $y_1 + y_2$ , где  $L(y_1) = f_1$ ,  $L(y_2) = f_2$ .

Существуют частные решения  $y_1$  и  $y_2$  вида (3.26) с одной и той же кратностью  $k$  (т.к. комплексно сопряженные корни  $\alpha \pm i\beta$  всегда имеют одинаковую кратность). Переходя от  $e^{(\alpha \pm i\beta)t}$  к  $e^{\alpha t} \cos \beta t$  и  $e^{\alpha t} \sin \beta t$ , получаем (3.31). •





### Пример 3.7. Решить уравнение

$$y'' + y = \underbrace{2 \cos t}_{f_1} - \underbrace{8t \sin t}_{f_2}.$$

*Решение.*

1) Решим линейное однородное уравнение, соответствующее исходному, т.е.

$$y'' + y = 0.$$

В этом случае характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Решая его, получим

$$\lambda = \pm i,$$

т.е.  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ . Таким образом,  $y_{o.o.}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ .

2) Поскольку аргументы тригонометрических функций справа в уравнении совпадают, то можем рассмотреть неоднородное уравнение

$$y'' + y = 2 \cos t - 8t \sin t.$$

Тогда имеем  $P_1(t) = 2$ , т.е.  $m_1 = 0$ , а  $Q_1(t) = -8t$ , т.е.  $m_2 = 1$ . Поскольку множитель  $e^{\alpha t} = 1$ , то  $\alpha = 0$ , далее из аргументов тригонометрических функций найдем  $\beta = 1$ , тогда  $\gamma = 0 + i$ ,  $k(\gamma) = 1$ . В силу формулы (3.31) решение, поскольку  $m = \max\{m_1, m_2\} = \max\{0, 1\} = 1$ , будет иметь вид

$$y = te^{0t}((At + B) \cos t + (Ct + D) \sin t).$$

Найдем производную

$$y' = ((At + B) \cos t + (Ct + D) \sin t) +$$

$$+ t(A \cos t + (At + B)(-\sin t) + C \sin t + (Ct + D) \cos t),$$

и вторую производную

$$y'' = A \cos t + C \sin t + (At + B)(-\sin t) +$$

$$+ (Ct + D) \cos t + A \cos t - (At + B) \sin t + C \sin t + (Ct + D) \cos t +$$

$$+ t(-A \sin t + C \cos t - A \sin t - C \cos t - (At + B) \cos t - (Ct + D) \sin t).$$

Упростим полученное выражение

$$y'' = 2A \cos t + 2C \sin t - 2(At + B) \sin t + 2(Ct + D) \cos t + \\ + t(-2A \sin t - (At + B) \cos t - (Ct + D) \sin t)$$

Подставив найденные выражения в уравнение, получим тождество

$$\cos t(2A + 2Ct + 2D - At^2 - Bt) + \sin t(2C - 2B - 4At - Ct^2 - Dt) + \\ + \cos t(At^2 + Bt) + \sin t(Ct^2 + Dt) = 2 \cos t - 8t \sin t.$$

Приравняем коэффициенты с косинусами и синусами соответственно. Получим

$$\begin{cases} 2A + 2Ct + 2D - At^2 - Bt + At^2 + Bt = 2, \\ 2C - 2B - 4At - Ct^2 - Dt + Ct^2 + Dt = -8t. \end{cases}$$

Преобразуем систему

$$\begin{cases} 2(A + D) + 2Ct = 2, \\ 2(C - B) - 4At = -8t. \end{cases}$$

Поскольку многочлены с обеих сторон каждого равенства равны, следовательно равны коэффициенты при соответствующих степенях, таким образом система примет вид

$$\begin{cases} A + D = 1, \\ C = 0, \\ C - B = 0, \\ -4A = -8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0, \\ B = 0, \\ A = 2, \\ D = -1. \end{cases}$$

Таким образом частное решение неоднородного уравнения примет вид

$$y_{\text{ч.н.}} = 2t^2 \cos t - t \sin t.$$

Просуммируем найденные решения и получим

$$y = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}} = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2t^2 \cos t - t \sin t.$$

### 3.5. Метод исключения переменных для линейных систем с постоянными коэффициентами

Метод исключения переменных используется для самых простых систем, которые путем исключения неизвестных можно свести к одному уравнению или эквивалентной системе нескольких уравнений с одной неизвестной функцией в каждом. Для этого из какого-либо уравнения выражаем одно неизвестное через остальные, подставляем его и его производную в остальные уравнения системы. В результате, получаем систему с меньшим числом неизвестных, с которой поступаем аналогично.



#### Пример 3.8.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + t, \\ \dot{y} = x - 2e^t. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения переменную  $y = \dot{x} - t$ , найдем ее производную  $\dot{y} = \ddot{x} - 1$ . Полученное выражение подставим во второе уравнение

$$\ddot{x} - 1 = x - 2e^t.$$

В результате мы получили линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} - x = -2e^t + 1,$$

которое решим с помощью характеристического многочлена.

1) Решим для начала однородное уравнение, соответствующее заданному, т.е.  $\ddot{x} - x = 0$ . Будем искать его решение в виде  $y = e^{\lambda t}$ , тогда  $y' = \lambda e^{\lambda t}$  и  $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$ . Подставим в уравнение и сократим на  $e^{\lambda t}$ . Приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Решив его, получим

$$\lambda = \pm 1.$$

Тогда общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$x_{o.o.}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

2) Найдем теперь частное решение неоднородного уравнения со специальной правой частью

$$\ddot{x} - x = -2e^t.$$

Как будет ясно из дальнейшего, его вид будет представлять собой следующее выражение

$$t^k e^{\gamma t} P_m(t),$$

где  $k$  – кратность корня  $\gamma$  характеристического уравнения,  $m$  – степень многочлена, присутствующего множителем при экспоненте в правой части неоднородного уравнения. Выпишем параметры правой части

$$\gamma = 1, k = 1, P_m(t) = -2 \Rightarrow m = 0.$$

Исходя из этого, решение с неопределенными коэффициентами будет иметь вид

$$x_1(t) = t^1 e^{1t} A.$$

Найдем его производные

$$\dot{x}_1(t) = t e^t A + e^t A,$$

$$\ddot{x}_1(t) = t e^t A + e^t A + e^t A = e^t (At + 2A),$$

которые подставим в исходное уравнение

$$e^t (At + 2A) - e^t At = -2e^t : e^t \neq 0.$$

Из полученного алгебраического уравнения найдем коэффициент  $A$  и неизвестную функцию  $x_1$ ,

$$At + 2A - At = -2 \Rightarrow A = -1 \Rightarrow x_1(t) = -te^t.$$

3) Найдем теперь частное решение неоднородного уравнения со второй специальной правой частью

$$\ddot{x} - x = 1e^{0t}.$$

Выпишем параметры и этой правой части

$$\gamma = 0, k = 0, P_m(t) = 1, m = 0.$$

Исходя из этого, решение с неопределенными коэффициентами представимо в виде

$$x_2(t) = t^0 e^{0t} (A) = A,$$

а его производные

$$\dot{x}_2 = \ddot{x}_2 = 0.$$

Подставим решение и его производные в исходное уравнение и получим коэффициент  $A$

$$0 - A = 1 \Rightarrow A = -1,$$

а также вид решения

$$x_2(t) = -1.$$

4) Найдем сумму найденных в пп.1 – 3 решений, получим

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1 - t e^t.$$

5) Поскольку  $y(t) = \dot{x} - t$ , то окончательно имеем

$$y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 0 - e^t - t e^t - t = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - e^t(1 + t) - t.$$

Ответ:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1 - t e^t, \\ y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - e^t(1 + t) - t. \end{cases}$$



### • Упражнения для самостоятельной работы

Решить неоднородные системы дифференциальных уравнений.

1.  $\begin{cases} \dot{x} = -2y + 3e^{-3t} \sin t + 2, \\ \dot{y} = 5x - 6y + 5t + t^2 e^{2t}. \end{cases}$
2.  $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + 2e^{2t}, \\ \dot{y} = 2x - 3y + t e^{-t} - 1. \end{cases}$
3.  $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 3t^2 - 2t, \\ \dot{y} = x + y - 1 - 2 \sin t. \end{cases}$
4.  $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - t e^{-t} \cos 2t, \\ \dot{y} = -2x - y + t(\sin t - \cos t). \end{cases}$
5.  $\begin{cases} \dot{x} = x + y + t^2 + 2 \sin 2t, \\ \dot{y} = x + y - 3t. \end{cases}$
6.  $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y + e^{3t} - 2, \\ \dot{y} = 5x - 3y - 8e^{3t} \sin 2t. \end{cases}$
7.  $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + t^3 - 5 \cos 2t, \\ \dot{y} = 6x + 3y - 2t. \end{cases}$
8.  $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y + t e^{-2t}, \\ \dot{y} = -x - y - 3 + e^{2t}(4t + 1). \end{cases}$
9.  $\begin{cases} \dot{x} = -y + e^t, \\ \dot{y} = x + 3t \cos t - 2 \sin t. \end{cases}$

10.  $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$
11.  $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y + e^t. \end{cases}$
12.  $\begin{cases} \dot{x} = x + y - \cos t, \\ \dot{y} = -2x - y + \sin t + \cos t. \end{cases}$
13.  $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2y + e^t, \\ \dot{y} = x + 6y + e^{-2t}. \end{cases}$
14.  $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + t, \\ \dot{y} = 3x - 4y. \end{cases}$

## 4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линейное однородное уравнение второго порядка имеет вид

$$p_0(t)y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = 0. \quad (4.1)$$

У многих таких уравнений (например, у уравнения  $y'' + t^\alpha y = 0$ ,  $\alpha = \text{const} > 0$ ) решения не выражаются через элементарные функции и неопределенные интегралы. Ниже излагаются некоторые методы исследования свойств решений уравнений вида (4.1) без отыскания самих решений.

1. Уравнение (4.1) можно привести к простейшему виду

$$y'' + q(t)y = 0 \quad (4.2)$$

многими способами, из которых выделим два основных.

**1 способ. Линейная замена искомой функции.** Подставим функцию  $y = a(t) \cdot u$  (а так же ее производные до второго порядка включительно, т.е.  $y' = a'(t) \cdot u + a(t) \cdot u'$ ,  $y'' = a''(t) \cdot u + a'(t) \cdot u' + a'(t) \cdot u' + a(t) \cdot u'' = a''(t) \cdot u + 2a'(t) \cdot u' + a(t) \cdot u''$ ) в (4.1) и в предположении, что  $p_0, p_1 \in C^1$ , приведем подобные и сгруппируем слагаемые

$$p_0(t)a(t)u'' + 2p_0(t)a'(t)u' + p_1(t)a(t)u' + \\ + p_0(t)a''(t)u + p_1(t)a'(t)u + p_2(t)a(t)u = 0.$$

Положим  $2p_0(t)a'(t) + p_1(t)a(t) = 0$ , для того чтобы отсутствовали слагаемые с  $u'$ , поскольку в уравнении (4.2) таких слагаемых нет. Отсюда

$$a'(t) = -\frac{p_1(t)a(t)}{2p_0(t)} \Leftrightarrow a(t) = C \cdot \exp \left( -\int \frac{p_1(t)dt}{2p_0(t)} \right),$$

берем  $C \neq 0$ .



**Пример 4.1.** Привести уравнение

$$y'' - 2ty' + (t+1)^2y = 0. \quad (4.3)$$

к простейшему виду (4.2).

*Решение.* По условию задачи  $p_0(t) = 1$ ,  $p_1(t) = -2t$  и  $p_2(t) = (t + 1)^2$ . Находим  $a(t) = C \exp \left( - \int \left( \frac{-2t}{2} \right) dt \right) = C \exp \left( \frac{t^2}{2} \right)$ . Первая и вторая производные от  $a(t)$  есть  $a'(t) = Ct \exp \left( \frac{t^2}{2} \right)$ ,  $a''(t) = C(1 + t^2) \exp \left( \frac{t^2}{2} \right)$ . Подставляя в уравнение  $y = a(t) \cdot u$ , придем к уравнению

$$C e^{\frac{t^2}{2}} u'' + \left( (1 + t^2) C e^{\frac{t^2}{2}} + (-2t) t C e^{\frac{t^2}{2}} + (t + 1)^2 C e^{\frac{t^2}{2}} \right) u = 0,$$

после деления на  $C e^{\frac{t^2}{2}} \neq 0$  и приведения подобных членов имеем

$$u'' + 2(t + 1)u = 0.$$

Это уравнение вида (4.2) с  $q(t) = 2(t + 1)$ .

**2 способ. Замена независимого переменного.** Будем считать, что  $x = \varphi(t)$ . Находим по правилу производной сложной функции  $y'_t = y'_x x'_t = y'_x \varphi'_t$ ,  $y''_{tt} = y''_{xx} x'_t \varphi'_t + y''_{xt} \varphi''_t = y''_{xx} (\varphi'_t)^2 + y''_{xt} \varphi''_t$ . Подставим в (4.1) и получим

$$p_0 y''_{xx} (\varphi'_t)^2 + p_0 y'_{xt} \varphi''_t + p_1 y'_x \varphi'_t + p_2 y = 0.$$

Положим  $p_0 y''_{tt} + p_1 \varphi'_t = 0$ . Понизим порядок дифференциального уравнения заменой  $\varphi'_t = z$ , тогда  $p_0 z' + p_1 z = 0$ . Находим сначала

$$z(t) = C \cdot \exp \left( - \int \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right),$$

берем  $C \neq 0$ , затем находим

$$\varphi(t) = C \cdot \int \exp \left( - \int \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right) dt + C_1.$$

Другие способы приведения к виду (4.2) являются комбинациями этих двух. Например, можно сделать в (4.1) замену вида  $x = \varphi(t)$  с какой-либо функцией  $\varphi \in C^2$ ,  $\varphi' \neq 0$ , а затем в полученном уравнении уничтожить член с  $y'_x$  заменой  $y = a(x)u$ .

## 2. Исследование выпуклости графиков решений и нулей решений.


Если в уравнении (4.2) множитель  $q(t) < 0$  для любого  $t \in (\alpha, \beta)$ , то  
– в области  $y > 0$ ,  $t \in (\alpha, \beta)$ , имеем  $y'' = -q(t)y > 0$ . Поэтому там графики всех решений выпуклы вниз;

– в области  $y < 0$ ,  $t \in (\alpha, \beta)$ , имеем  $y'' = -q(t)y < 0$ , и графики выпуклы вверх.

Если в уравнении (4.2) множитель  $q(t) > 0$  для любого  $t \in (\gamma, \delta)$ , то  
– в области  $y > 0$ ,  $t \in (\gamma, \delta)$ , имеем  $y'' = -qy < 0$  и графики выпуклы вверх;

– в области  $y < 0$ ,  $t \in (\gamma, \delta)$ , имеем  $y'' = -qy > 0$  и графики выпуклы вниз.



 **Определение 4.1.** Нулями решения  $y$  называются такие  $t$ , при которых  $y(t) = 0$ .



**Лемма 4.1.** Если  $y(t) \neq 0$  – решение уравнения (4.1),  $y(t_0) = 0$ , то  $y'(t_0) \neq 0$ .

*Доказательство.* Предположим противное, пусть  $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ . При этих начальных условиях существовало бы два решения, а именно, данное решение  $y(t)$  и нулевое решение  $y_1(t) \equiv 0$ . Это противоречит теореме единственности. •



**Лемма 4.2.** Ненулевое решение  $y(t) \neq 0$  уравнения (4.1) не может иметь бесконечно много нулей на конечном отрезке.

*Доказательство.* Пусть на отрезке  $[a, b]$  решение  $y(t) \neq 0$  имеет бесконечное множество нулей. Выберем из них сходящуюся последовательность  $t_1, t_2, \dots \rightarrow t_0$ . Поскольку  $y(t)$  – непрерывна и  $y(t_k) = 0, k \in \mathbb{Z}$ , то  $y(t_0) = 0, t_0 \in [a, b]$ .

Решение  $y(t)$  имеет производную  $y'(t)$ . Следовательно, существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y(t_k) - y(t_0)}{t_k - t_0} = y'(t_0).$$

Числитель равен нулю, значит,  $y'(t_0) = 0$ . Это противоречит лемме 4.1. •



**Теорема 4.1.** Пусть  $q(t) \leq 0$  для любого  $t \in [\alpha, \beta]$ . Тогда существует единственная точка  $t_1 \in [\alpha, \beta]$ , такая, что для решения  $y(t) \neq 0$  уравнения (4.2)  $y(t_1) = 0$ .

*Доказательство.* Предположим, что существует два нуля  $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ , причем  $t_1 < t_2$ , т.е.  $y(t_1) = y(t_2) = 0$ . На отрезке  $[t_1, t_2]$  по лемме 4.2 будет только конечное число нулей. Возьмем из этого конечного числа два соседних нуля  $t = a$  и  $t = b > a$  ( $y(a) = y(b) = 0$ ).

При  $t \in (a, b)$  функция  $y(t)$  не меняет знак. Возьмем для определенности  $y(t) > 0$ . Тогда  $y(a) = y(b) = 0$  и по лемме 4.1  $y'(a) \neq 0$ . Так как  $y(t) > 0$  для любого  $t \in (a, b)$ , то  $y'(a) > 0$ , а  $y'' = (y')' = -q(t)y \geq 0 \forall t \in (a, b)$ . Значит,  $y'(t)$  не убывает и из  $y'(a) > 0$  следует  $y'(t) > 0$  на  $(a, b)$ . Тогда  $y(t)$  возрастает на  $[a, b]$  и из  $y(a) = 0$  следует  $y(b) > 0$  в противоречии с выбором точки  $b$ .

Доказательство аналогично, если предположить, что  $y(t) < 0$ . Тогда вместо  $y(t)$  нужно рассмотреть решение  $y_1(t) = -y(t) > 0$ . •



**Теорема 4.2 (о чередовании нулей).** Нули двух любых линейно независимых решений уравнения (4.1) строго чередуются. То есть в промежутке между любыми двумя соседними нулями любого из этих решений содержится ровно один нуль другого решения.

*Доказательство.* Во-первых. Поскольку  $y_1$  и  $y_2$  по условию являются линейно независимыми решениями, то у них нет общих нулей. Иначе, если бы существовал общий нуль, например,  $t^*$ , т.е.  $y_1(t^*) = y_2(t^*) = 0$ , тогда вронскиан

$$W(t^*) = \begin{vmatrix} y_1(t^*) & y_2(t^*) \\ y_1'(t^*) & y_2'(t^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ y_1'(t^*) & y_2'(t^*) \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно решения были бы линейно зависимы.

Во-вторых. Пусть  $t_1, t_2$  – соседние нули решения  $y_2$ , причем на интервале  $(t_1, t_2)$  нет больше никаких нулей никакого решения, т.е.  $y_1(t) \neq 0 \forall t \in [t_1, t_2]$ . Кроме того, определитель Вронского  $W(t) \neq 0$  в силу линейной независимости решений.

Тогда производная

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{y_2}{y_1} \right) \equiv \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} \equiv \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}{y_1^2} \equiv \frac{W}{y_1^2}$$

сохраняет знак, следовательно функция  $\frac{y_2(t)}{y_1(t)}$  строго монотонна на  $[t_1, t_2]$ .

Но это невозможно, так как  $y_2(t_1) = y_2(t_2) = 0$ .

Значит, наше предположение об отсутствии нулей неверно, поэтому в промежутке  $(t_1, t_2)$  есть нули решения  $y_1$ , причем их – конечное число по лемме 4.2. Если их более одного, то в промежутках между ними не было бы ни одного нуля решения  $y_2$ , а это невозможно по доказанному. Следовательно, в  $(t_1, t_2)$  есть ровно один нуль решения  $y_1$ . •



**Теорема 4.3 (Штурма, теорема сравнения).** Рассмотрим два уравнения

$$y'' + q(t)y = 0, \quad (a)$$

$$z'' + Q(t)z = 0, \quad (б)$$

где  $Q(t) \geq q(t)$ , функции  $Q(t)$  и  $q(t)$  непрерывны. Тогда в промежутке  $(a, b)$ , где  $y(a) = y(b) = 0$ , два соседних нуля для решения  $y \neq 0$  уравнения

(а) имеется по меньшей мере один нуль любого решения  $z \neq 0$  уравнения (б), или же  $z(a) = z(b) = 0$ ,  $Q(t) \equiv q(t)$  для  $t \in [a, b]$ .

*Доказательство.* Предположим, что для решений  $y$  и  $z$  имеем  $y(a) = y(b) = 0$ ,  $y(t) \neq 0$ ,  $z(t) \neq 0$  для  $t \in (a, b)$ . Предположим для определенности, что для любого  $t \in (a, b)$  имеем  $y(t) > 0$ ,  $z(t) > 0$  (аналогично предыдущей теореме, если  $y(t) < 0$ ,  $z(t) < 0$ , то вместо  $y$  и  $z$  можно рассмотреть решения  $y_1 = -y$ ,  $z_1 = -z$ ). Умножая уравнение (а) на  $z$ , (б) – на  $y$  и вычитая, имеем

$$y''z - z''y + (q - Q)yz = 0. \quad (4.4)$$

Так как  $y''z - z''y \equiv (y'z - yz')'$ , то интегрируя (4.4) от  $t = a$  до  $t = b$ , получаем

$$(y'z - yz')_{t=b} - (y'z - yz')_{t=a} = \int_a^b (Q(t) - q(t))yz dt. \quad (4.5)$$

Имеем  $y(a) = y(b) = 0$ , поэтому левая часть равна  $y'z|_{t=b} - y'z|_{t=a}$ . Учитывая лемму 4.1 и неравенство  $y(t) > 0$  на  $(a, b)$ , имеем  $y'(a) > 0$ ,  $y'(b) < 0$ . Так как  $z(t) > 0$  на  $(a, b)$ , то в силу непрерывности функции  $z$  имеем  $z(a) \geq 0$ ,  $z(b) \geq 0$ . Значит, левая часть в (4.5) неположительна.

В правой части  $Q \geq q$ ,  $yz > 0$  на  $(a, b)$ , поэтому она неотрицательна.

Если хотя бы одно из равенств  $z(a) = 0$ ,  $z(b) = 0$ ,  $Q(t) \equiv q(t)$  на  $(a, b)$  не выполняется, получаем противоречие. Теорема доказана. •



**Пример 4.2.** Оценить сверху и снизу расстояние между соседними нулями для решений уравнения

$$y'' + q(t)y = 0 \quad (4.6)$$

на таком отрезке, на котором  $0 < m^2 \leq q(t) \leq M^2$ .

*Решение.* Сравниваем уравнение (4.6) с уравнением

$$z'' + M^2z = 0,$$

имеющим решения

$$z = c_1 \cos Mt + c_2 \sin Mt \equiv d_1 \sin M(t + d_2), \quad (4.7)$$

где  $c_i, d_i$  ( $i = 1, 2$ ) – произвольные постоянные. Пусть  $t_0, t_1$  – соседние нули решения  $y(t)$ . Беря в (4.7)  $d_2 = -t_0$ , имеем  $z(t_0) = 0$ . Из теоремы 4.3 получаем, что следующий нуль  $t_2$  решения  $z$  лежит на полуинтервале  $(t_0, t_1]$ . Так как в силу (4.7)  $t_2 = t_0 + \frac{\pi}{M}$ , то  $t_1 - t_0 \geq t_2 - t_0 = \frac{\pi}{M}$ .

Сравниваем уравнение (4.6) с уравнением  $u'' + m^2 u = 0$ , имеющим решения

$$u = c_1 \cos mt + c_2 \sin mt = d_3 \sin m(t + d_4). \quad (4.8)$$

Беря  $d_4 = -t_0$ , получаем из (4.8) соседние нули  $t_0$  и  $t_3 = t_0 + \frac{\pi}{m}$ . Так как  $q(t) \geq m^2$ , то из теоремы 4.3 следует, что нуль  $t_1$  решения  $y(t)$  лежит в полуинтервале  $(t_0, t_3]$ . Значит,  $t_1 - t_0 \leq \frac{\pi}{m}$ .

Итак, получена оценка  $\frac{\pi}{M} \leq t_1 - t_0 \leq \frac{\pi}{m}$ .



**Пример 4.3.** Оценить сверху и снизу расстояние между соседними нулями для решений уравнения

$$y'' + 2ty = 0 \quad (4.9)$$

на таком отрезке, на котором

$$20 \leq t \leq 45.$$

*Решение.* Поскольку  $q(t) = 2t$  (см. теорему 4.3), то в этом примере  $0 < 40 \leq q(t) \leq 90$ . Напомним, что для получения тождества (4.7), воспользовались формулой

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi). \end{aligned}$$

Выберем  $Q(t)$ , таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $q(t) \leq Q(t)$ , возьмем  $Q(t) = 90$ , тогда уравнение (б) будет иметь вид  $z'' + 90z = 0$ . Решим это линейное и однородное уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическим для него будет

уравнение  $\lambda^2 + 90 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3\sqrt{10}i$ . Тогда решение этого уравнения

$$\begin{aligned}
 z &= C_1 \cos 3\sqrt{10}t + C_2 \sin 3\sqrt{10}t \equiv \\
 &\equiv \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left( \underbrace{\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}}_{\cos \varphi} \sin 3\sqrt{10}t + \underbrace{\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}}_{\sin \varphi} \cos 3\sqrt{10}t \right) \equiv \\
 &\equiv \sqrt{c_1^2 + c_2^2} (\cos \varphi \sin 3\sqrt{10}t + \sin \varphi \cos 3\sqrt{10}t) \equiv \\
 &\equiv \underbrace{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}_{d_1} \left( \sin(3\sqrt{10}t + \underbrace{\varphi}_{\frac{d_2}{3\sqrt{10}}}) \right) \equiv \\
 &\equiv d_1 \sin 3\sqrt{10}(t + d_2),
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

где  $c_i, d_i$  ( $i = 1, 2$ ) – произвольные постоянные.

Пусть  $t_0, t_1$  – соседние нули решения  $y(t)$  задачи (4.9), т.е.  $y(t_0) = y(t_1) = 0$ . Беря в (4.10)  $d_2 = -t_0$ , имеем  $z(t_0) = 0$ . Из теоремы 4.3 получаем, что следующий нуль  $t_2$  решения  $z$  лежит на полуинтервале  $(t_0, t_1]$ . Так как в силу (4.10)  $t_2 = t_0 + \frac{\pi}{3\sqrt{10}}$ , то  $t_1 - t_0 \geq t_2 - t_0 = \frac{\pi}{3\sqrt{10}}$ .

Сравниваем уравнение (4.9) с уравнением  $u'' + 40u = 0$ , имеющим решения

$$u = c_1 \cos 2\sqrt{10}t + c_2 \sin 2\sqrt{10}t = d_3 \sin 2\sqrt{10}(t + d_4). \tag{4.11}$$

Беря  $d_4 = -t_0$ , получаем из (4.11) соседние нули  $t_0$  и  $t_3 = t_0 + \frac{\pi}{2\sqrt{10}}$ . Так как  $q(t) \geq 40$ , то из теоремы 4.3 следует, что нуль  $t_1$  решения  $y(t)$  лежит в полуинтервале  $(t_0, t_3]$ . Значит,  $t_1 - t_0 \leq \frac{\pi}{2\sqrt{10}}$ .

Итак, получена оценка  $\frac{\pi}{3\sqrt{10}} \leq t_1 - t_0 \leq \frac{\pi}{2\sqrt{10}}$ .



**Пример 4.4.** Доказать, что в случае  $q(t) > 0$  для любого решения уравнения  $y'' + q(t)y = 0$  отношение  $\frac{y'(t)}{y(t)}$  убывает при возрастании  $t$  на интервале, где  $y(t) \neq 0$ .

*Решение.* Рассмотрим уравнение  $y'' + q(t)y = 0$  на указанном промежутке. Так как  $y(t) \neq 0$ , то уравнение примет вид

$$\frac{y''}{y} + q(t) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{y''y - (y')^2}{y^2} + \frac{(y')^2}{y^2} + q(t) = 0.$$

Откуда имеем

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = -q(t) - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 < 0,$$

поэтому  $\frac{y'}{y}$  убывает, что и требовалось доказать. •

Из теоремы 4.1 следует, что в случае  $q(t) \leq 0$  при  $t_1 \leq t \leq \infty$  любое ненулевое решение уравнения (4.2) имеет на интервале  $(t_1, \infty)$  не более одного нуля, то есть является *неколеблющимся*. В случае  $q(t) \geq m^2 > 0$  ( $t_1 \leq t < \infty$ ) из теоремы 4.3 и примера 4.3 следует, что любое решение уравнения (4.2) имеет на интервале  $(t_1, \infty)$  бесконечно много нулей, т.е. является *колеблющимся*.



**Теорема 4.4 (Кнезера).** Пусть в уравнении (б)  $t > 0$  и  $Q(t) \leq \frac{1}{4t^2}$ . Тогда любое отличное от тождественного нуля решение уравнения (б) не может иметь более двух нулей.



**Теорема 4.5.** Пусть в уравнении (б), где  $t > 0$ ,  $Q(t) \geq \frac{1 + \varepsilon}{4t^2}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда любое решение уравнения (б) имеет бесконечное множество нулей.

Рассмотрим уравнение

$$y'' + (1 + q(t))y = 0, \quad t \geq 0. \quad (4.12)$$



**Теорема 4.6 (об асимптотике).** Пусть в уравнении (4.12)  $q(t) \leq \frac{c}{t^{1+\gamma}}$ ,  $\gamma = \text{const} > 0$ . Тогда  $y(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + \varphi(t)$ , где  $\varphi(t) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow +\infty$ .



### • Упражнения для самостоятельной работы

1. Доказать, что в случае  $q(t) \leq 0$  все решения уравнения  $y'' + q(t)y = 0$  с положительными начальными условиями  $y(t_0) > 0$ ,  $y'(t_0) > 0$  остаются положительными при всех  $t > t_0$ .

2. Доказать, что решение уравнения  $y'' - t^2y = 0$  с начальными условиями  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  есть четная функция, всюду положительная.

3. Найти расстояние между двумя соседними нулями любого (не тождественно равного нулю) решения уравнения  $y'' + m^2y = 0$ , где  $m = \text{const}$ . Сколько нулей может содержаться на отрезке  $a \leq t \leq b$ ?

4. Используя результат предыдущей задачи и теорему сравнения 4.3, оценить сверху и снизу расстояние между двумя соседними нулями любого (не тождественно равного нулю) решения следующих уравнений на заданном отрезке (в пп. 2, 3) предварительно сведя уравнение к виду (4.2)).

4.1.  $ty'' + y = 0$ ,  $25 \leq t \leq 100$ .

4.2.  $y'' - 2ty' + (t+1)^2y = 0$ ,  $4 \leq t \leq 19$ .

4.3.  $y'' - 2e^ty' + e^{2t} = 0$ ,  $2 \leq t \leq 6$ .

## 5. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Для уравнения  $n$ -го порядка относительно скалярной функции  $y$

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = f(t) \quad (5.1)$$

будем рассматривать задачу совместно с условиями при двух (или более) значениях  $t$ . Такие условия называются краевыми, а соответствующая задача – краевой. Здесь будут рассматриваться только линейные краевые задачи, в которых дифференциальное уравнение и краевые условия линейны. Левые части краевых условий – линейные комбинации значений искомой функции и ее производных в заданных точках  $t_i$ , а правые части – заданные постоянные числа.

Примеры линейных краевых условий:

- а)  $y(t_1) = a$  – условие первого рода;
- б)  $y'(t_1) = b$  – условие второго рода;
- в)  $\alpha y(t_2) + \beta y'(t_2) = c$ ; ( $\alpha$  и  $\beta$  заданы,  $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ ) – условие третьего рода;
- г)  $y(t_0) - y(t_1) = d$ ;
- д)  $y'(t_0) - y'(t_1) = h$ ; возможны и другие виды условий.

Если постоянная в правой части краевого условия равна нулю, то условие называется однородным, если не равна нулю – неоднородным.

Для уравнения  $n$ -го порядка задаются  $n$  условий. В разных точках  $t_i$  условия могут быть одного типа или разных типов. Краевая задача называется однородной, если дифференциальное уравнение и краевые условия линейны и однородны.

В отличие от задачи с начальными условиями краевая задача может иметь одно или бесконечное множество решений, а может и не иметь решений. Например, задача  $y'' + y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$  имеет единственное решение  $y = a \sin t$ , а задача  $y'' + y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi) = b$  в случае  $b \neq 0$  не имеет решений (так как все решения уравнения, для которых  $y(0) = 0$ , имеют вид  $y = c \sin t$  и при  $t = \pi$  они равны нулю), а в случае  $b = 0$  имеет бесконечно много решений  $y = c \sin t$ ,  $c$  – любое.



**Теорема 5.1 (об альтернативе).** Рассмотрим уравнение

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = f(t) \quad (n \geq 2) \quad (5.2)$$

(все  $a_i(t)$  и  $f(t)$  непрерывны,  $a_0(t) \neq 0$ ) с  $n$  линейными краевыми условиями. Возможны только два случая.



(i) Задача имеет единственное решение при любых правых частях в уравнении и краевых условиях.

(ii) Однородная задача (левые части те же, а правые заменяются нулями) имеет бесконечно много решений, а неоднородная задача при некоторых правых частях имеет бесконечно много решений, а при всех других – не имеет решений.

*Доказательство.* Общее решение уравнения (5.2) имеет вид

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + v, \quad (5.3)$$

где  $y_1, \dots, y_n$  – линейно независимые решения однородного уравнения,  $v$  – частное решение уравнения (5.2),  $c_1, \dots, c_n$  – произвольные постоянные. Подставляя (5.3) в краевые условия и перенося  $v$  в правую часть, получаем систему  $n$  линейных алгебраических уравнений относительно  $c_1, \dots, c_n$ . Коэффициенты системы зависят только от значений  $y, y', \dots$  в заданных точках  $t$  и не зависят от правых частей уравнения и краевых условий. Если данная задача однородна, то правые части алгебраических уравнений равны нулю.

Возможны только два следующих случая.

1. Если детерминант системы не равен нулю, то система имеет единственное решение  $c_1, \dots, c_n$  при любых правых частях (в случае однородной системы только тривиальное, в случае неоднородной – нетривиальное). Подставляя эти  $c_1, \dots, c_n$  в (5.3), получаем единственное решение краевой задачи.

2. Если детерминант системы равен нулю, то однородная система (т.е. при правых частях, равных нулю) имеет бесконечное множество решений относительно  $c_1, \dots, c_n$ . Действительно, ранг матрицы такой системы меньше числа неизвестных, а нули в правой части не позволяют рангу расширенной матрицы стать больше ранга основной матрицы. Поэтому вступает в силу теорема разрешимости линейной системы алгебраических уравнений. Что касается неоднородной системы, то она имеет решение не при любых правых частях. Действительно, в случае, когда в правых частях системы присутствуют ненулевые значения все зависит от их соотношения. Может оказаться, что правая часть такова, что ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы, и тогда рассматриваемая система имеет решение. Его структура включает общее решение соответствующей однородной системы и аддитивно входящее частное решение исследуемой (неоднородной) системы. Решений тогда бесконечно много, так как к этому решению всегда можно прибавить любое решение однородной системы, умноженное на любую постоянную. Может быть, однако, что правая часть вызывает неравенство ранга расширенной матрицы

рангу основной матрицы. Это последний случай альтернативы: система не имеет решения.

Для любого набора постоянных  $c_1, \dots, c_n$ , удовлетворяющего системе, формула (5.3) дает решение краевой задачи. Для разных наборов  $c_1, \dots, c_n$  эти решения различны, так как функции  $y_1, \dots, y_n$  линейно независимы.

Из 1 и 2 следует утверждение теоремы. •



**Пример 5.1.** Найти наименьшее из таких чисел  $b > 0$ , что задача

$$y'' + b^2 y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y(1) = -5, \quad (5.4)$$

не имеет решений.

*Решение.* По теореме 5.1 задача (5.4) не имеет решений тогда, когда однородная задача  $y'' + b^2 y = 0, y(0) = 0, y(1) = 0$  имеет ненулевое решение. Функции, для которых  $y'' + b^2 y = 0, y(0) = 0$ , имеют вид  $y = c \sin bt$ . Чтобы при  $c \neq 0$  было  $y(1) = 0$ , надо  $\sin b = 0$ , то есть  $b = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ . При этих  $b$  имеем 2-й случай альтернативы, значит, при этих  $b$  задача (5.4) или не имеет решений, или имеет бесконечно много решений. Какая из этих возможностей осуществится, надо проверить.

При  $b = \pi$  общее решение уравнения есть  $y = c_1 \cos \pi t + c_2 \sin \pi t$ . Значит,  $y(0) = c_1, y(1) = -c_1$ . При  $c_1 = 5$  и любом  $c_2$  функция  $y(t)$  – решение задачи (5.4). Но требуется, чтобы решение не существовало. При  $b = 2\pi$  общее решение  $y = c_1 \cos 2\pi t + c_2 \sin 2\pi t$ . Тогда  $y(0) = c_1, y(1) = c_1$  и удовлетворить обоим условиям  $y(0) = 5, y(1) = -5$  невозможно. Значит, решений нет.

Ответ:  $b = 2\pi$ .



**Пример 5.2.** Установить, при каком соотношении между  $\alpha$  и  $\beta$  краевая задача

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = \alpha, \quad y' \left( \frac{\pi}{2} \right) = \beta \quad (5.5)$$

имеет решение и при каком – не имеет решения.

*Решение.* Применим алгоритм доказательства теоремы 5.1. Общее решение уравнения (5.5) имеет вид  $y = c_1 \sin t + c_2 \cos t + 1$ , при этом

$y' = c_1 \cos t - c_2 \sin t$ . Подставим решение и его производную в краевые условия. Получим систему двух линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} 0 \cdot c_1 + c_2 + 1 &= \alpha, \\ 0 \cdot c_1 - c_2 &= \beta. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ее ранг (равный единице) меньше числа неизвестных (равного двум). Поэтому такая система либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений. Из сравнения двух уравнений для неизвестных  $c_1$  и  $c_2$  заключаем, что  $c_1 = c$  – любое число, а  $c_2$  существует лишь при соотношении  $\alpha + \beta = 1$  и решение  $y = c \sin t - \beta \cos t + 1$ . Если же последнее равенство не выполняется, то краевая задача не имеет решения.

Ответ: При  $\alpha + \beta = 1$  решение существует; при  $\alpha + \beta \neq 1$  нет решений.



**Пример 5.3.** Установить, при каком соотношении между  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  и  $\varepsilon$  краевая задача

$$y''' + y'' + \pi^2 y' + \pi^2 y = 0, \quad \alpha y(0) + \beta y'(0) = \gamma, \quad y' \left( \frac{1}{2} \right) = \delta, \quad y(1) = \varepsilon \quad (5.7)$$

имеет решение и при каком – не имеет решения.

*Решение.* Найдем общее решение уравнения (5.7). Оно будет иметь вид  $y = c_1 e^{-t} + c_2 \sin \pi t + c_3 \cos \pi t$ , продифференцируем, получим  $y' = -c_1 e^{-t} + c_2 \pi \cos \pi t - c_3 \pi \sin \pi t$ . Подставим в краевые условия

$$\begin{cases} (\alpha - \beta)c_1 + \beta \pi c_2 + \alpha c_3 = \gamma, \\ -\frac{1}{\sqrt{e}}c_1 & -\pi c_3 = \delta, \\ \frac{1}{e}c_1 - & \pi c_2 = \varepsilon. \end{cases} \quad (5.8)$$

1) Пусть определитель системы (5.8) отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} (\alpha - \beta) & \beta \pi & \alpha \\ -\frac{1}{\sqrt{e}} & 0 & -\pi \\ \frac{1}{e} & -\pi & 0 \end{vmatrix} = \frac{\pi}{\sqrt{e}}\alpha - \frac{\pi^2}{e}\beta - \pi^2(\alpha - \beta) \neq 0$$

Последнее условие приводит нас к соотношению:

$$\left( \frac{1}{\sqrt{e}} + \pi \right) \alpha \neq \pi \left( \frac{1}{e} - 1 \right) \beta.$$

Это условие существования единственного решения краевой задачи (5.7) при любых правых частях краевых условий.

2) Рассмотрим случай, когда краевая задача имеет бесконечное множество решений. При

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \pi\right) \alpha = \pi \left(\frac{1}{e} - 1\right) \beta. \quad (5.9)$$

система (5.8) имеет ранг не меньший, чем два, так как существует заведомо отличный от нуля минор при неизвестных  $c_3$  и  $c_2$  во втором и третьем уравнении, равный  $-\pi^2 \neq 0$ . Построим на нем решение. Имеем

$$\begin{aligned} c_1 &= c - \text{любое}, \\ c_2 &= \frac{1}{\pi e} c - \frac{\varepsilon}{\pi} \\ c_3 &= -\frac{1}{\pi \sqrt{e}} c - \frac{\delta}{\pi}. \end{aligned}$$

Подставим выражения для  $c_2$  и  $c_3$  в первое уравнение системы (5.8)

$$\left(\alpha - \beta + \frac{\beta}{e} - \frac{\alpha}{\pi \sqrt{e}}\right) c - \beta \varepsilon + \frac{\alpha}{\pi} \delta = \gamma.$$

Отсюда видно, что условием произвольности постоянных  $c$  является выполнение соотношения (5.9), то есть равенство нулю определителя системы (5.8). Кроме того, следует, что

$$\frac{\delta}{\pi} \alpha - \beta \varepsilon = \gamma. \quad (5.10)$$

Равенство (5.10) наряду с (5.9) устанавливают связь между параметрами задачи  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\varepsilon$ , при которых она имеет множество решений.

Ответ: Решение существует при  $\sqrt{e}(1 - \pi\sqrt{e})\alpha = \pi(1 - e)\beta$  и любых  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\varepsilon$  (если  $\gamma = 0$ ,  $\delta = 0$  и  $\varepsilon = 0$  только тривиальное), а также при  $\sqrt{e}(1 - \pi\sqrt{e})\alpha \neq \pi(1 - e)\beta$  и  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\varepsilon$ , подчиняющимися соотношению

$\frac{\delta}{\pi} \alpha - \beta \varepsilon = \gamma$ . При  $\sqrt{e}(1 - \pi\sqrt{e})\alpha \neq \pi(1 - e)\beta$  и  $\frac{\delta}{\pi} \alpha - \beta \varepsilon \neq \gamma$  решений нет.

Далее рассматривается краевая задача на отрезке  $t_1 \leq t \leq t_2$

$$\begin{aligned} Ly &\equiv a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = f(t), \\ \alpha y'(t_1) + \beta y(t_1) &= 0, \\ \gamma y'(t_2) + \delta y(t_2) &= 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где  $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ ,  $|\gamma| + |\delta| \neq 0$ . Частными случаями таких краевых условий являются условия вида  $y(t_i) = 0$  и  $y'(t_j) = 0$ .

Функцией Грина этой задачи называется такая функция двух переменных  $G(t, s)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $s \in (t_1, t_2)$ , что выполнены следующие условия.

- (i) Для каждого  $s = \text{const}$  функция  $y(t) = G(t, s)$  при  $t \neq s$  удовлетворяет уравнению  $Ly = 0$ .
- (ii) При  $t = t_1$  и  $t = t_2$  функция  $y(t) = G(t, s)$  удовлетворяет краевым условиям из (5.11).
- (iii) При  $t = s$  она непрерывна по  $t$ , а ее производная по  $t$  имеет скачок, равный  $\frac{1}{a_0(s)}$ , то есть

$$G|_{t=s+0} = G|_{t=s-0}, \quad G'_t|_{t=s+0} = G'_t|_{t=s-0} + \frac{1}{a_0(s)}. \quad (5.12)$$

Следующая теорема устанавливает условия существования функции Грина и дает способ ее построения.



**Теорема 5.2.** Если на отрезке  $[t_1, t_2]$  функции  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  непрерывны,  $a_0 \neq 0$ , и если при  $f(t) \equiv 0$  краевая задача (5.11) имеет только нулевое решение, то функция Грина существует и имеет вид

$$G(t, s) = \begin{cases} y_1(t)u(s) & (t_1 \leq t \leq s), \\ y_2(t)v(s) & (s \leq t \leq t_2). \end{cases} \quad (5.13)$$

где  $y_1$  и  $y_2$  – ненулевые решения уравнения  $Ly = 0$ , удовлетворяющие соответственно первому и второму краевым условиям из (5.11), множители  $u(s)$  и  $v(s)$  определяются из требования, чтобы функция (5.13) удовлетворяла условиям (5.12), то есть

$$y_1(s)u(s) = y_2(s)v(s), \quad y'_2(s)v(s) = y'_1(s)u(s) + \frac{1}{a_0(s)}. \quad (5.14)$$

*Доказательство.* Пусть  $y_1$ ,  $y_2$  – решения уравнения  $Ly = 0$ , для которых

$$y_1(t_1) = \alpha, \quad y'_1(t_1) = -\beta, \quad y_2(t_2) = \gamma, \quad y'_2(t_2) = -\delta.$$

Они удовлетворяют соответственно первому и второму краевым условиям в (5.11). Если бы  $y_1$  и  $y_2$  были линейно зависимы, то выполнялось бы тождество  $y_1(t) \equiv cy_2(t)$ , и решение  $y_2(t)$  ( $y_2 \neq 0$ , так как  $|\gamma| + |\delta| \neq 0$ ) удовлетворяло бы обоим краевым условиям в (5.11), что противоречит условию теоремы. Значит,  $y_1$  и  $y_2$  линейно независимы, и любое решение

уравнения  $Ly = 0$  имеет вид  $y = c_1y_1 + c_2y_2$ . Так как первому из краевых условий в (5.11) удовлетворяет только  $y_1$ , а второму – только  $y_2$ , то из требований (i) и (ii) вытекает, что функция  $G$  должна иметь вид (5.13). Из требования (iii) вытекают уравнения (5.14). Система (5.14) разрешима относительно  $u(s)$  и  $v(s)$ , так как ее детерминант равен

$$\begin{vmatrix} y_1(s) & -y_2(s) \\ -y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix} = W(s) \neq 0$$

(напомним, что решения  $y_1, y_2$  линейно независимы). Итак, при выполнении условий теоремы найдутся  $u(s)$  и  $v(s)$ , удовлетворяющие (5.14), а тогда функция (5.13) удовлетворяет требованиям (i) – (iii). •



• **Следствие 5.1.** Функция Грина имеет следующий вид:

$$G(t, s) = \frac{1}{W(t)a_0(t)} \begin{cases} y_1(t)y_2(s) & (t_1 \leq t \leq s), \\ y_2(t)y_1(s) & (s \leq t \leq t_2). \end{cases}$$



**Замечание 5.1.** При выполнении условий теоремы функция Грина определяется однозначно. Хотя решения  $y_1$  и  $y_2$  можно заменить решениями  $cy_1$  и  $dy_2$ , но с учетом (5.14) это не изменит произведений  $ay_1$  и  $by_2$  в (5.13).



**Теорема 5.3.** Если выполнены условия теоремы 5.2 и  $f(t)$  непрерывна при  $t_1 \leq t \leq t_2$ , то решение краевой задачи (5.11) выражается формулой

$$y(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t, s)f(s)ds. \quad (5.15)$$

*Доказательство.* Разбиваем интеграл на части  $t_1 < s < t$  и  $t < s < t_2$ . Учитывая (5.13), имеем

$$y'(t) = y_2'(t) \int_{t_1}^t b(s)f(s)ds + y_1'(t) \int_t^{t_2} a(s)f(s)ds \quad (5.16)$$

(образующиеся при дифференцировании члены  $b(t)y_2(t)$  и  $-a(t)y_1(t)$  взаимно уничтожаются в силу (5.14)). Подставляем выражения для  $y(t)$  и  $y'(t)$  в краевые условия. Так как  $y_1$  удовлетворяет первому, а  $y_2$  – второму

краевому условию, то  $y(t)$  удовлетворяет обоим условиям. Дифференцируя (5.16) еще раз, получаем

$$y''(t) = y_2''(t) \int_{t_1}^t b(s)f(s)ds + b(t)y_2'(t)f(t) + \\ + y_1''(t) \int_t^{t_2} a(s)f(s)ds - a(t)y_1'(t)f(t).$$

Сумма внеинтегральных членов в силу (5.14) равна  $\frac{f(t)}{a_0(t)}$ . Умножая полученные выражения для  $y''$ ,  $y'$ ,  $y$  на  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  и складывая, находим, что  $Ly \equiv a_0y'' + a_1y' + a_2y$  равно

$$(a_0y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) \int_{t_1}^t b(s)f(s)ds + (a_0y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) \int_t^{t_2} a(s)f(s)ds + f(t).$$

Так как  $Ly_2 = 0$ ,  $Ly_1 = 0$ , то  $Ly = f(t)$ . Итак  $y(t)$  – решение задачи (5.11). •



**Пример 5.4.** Найти функцию Грина краевой задачи

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0. \quad (5.17)$$

*Решение.* Из однородного уравнения  $y'' + y = 0$  при  $y(0) = 0$  получаем  $y = c \sin t$ . Так как  $y'(\pi) = -c$ , то при  $f(t) \equiv 0$  задача (5.17) имеет только нулевое решение, то есть выполнено условие существования функции Грина. Функции  $y_1 = \sin t$ ,  $y_2 = \cos t$  удовлетворяют уравнению  $y'' + y = 0$  и условиям  $y_1(0) = 0$ ,  $y_2'(\pi) = 0$ . Поэтому согласно (5.13)

$$G(t, s) = \sin tu(s) \quad (0 \leq t \leq s), \\ G(t, s) = \cos tv(s) \quad (s \leq t \leq \pi). \quad (5.18)$$

Теперь из условия (5.12) или, что то же самое, (5.14) имеем

$$\sin su = \cos sv, \quad -\sin sv = \cos su + 1.$$

Из этой системы находим  $u(s) = -\cos s$ ,  $v(s) = -\sin s$ . Теперь из (5.18)

$$G(t, s) = -\sin t \cos s \quad (0 \leq t \leq s), \\ G(t, s) = -\cos t \sin s \quad (s \leq t \leq \pi).$$

Рассмотрим теперь краевую задачу для уравнения с параметром  $\lambda$

$$Ly - \lambda y = 0, \quad \alpha y'(t_1) + \beta y(t_1) = 0, \quad \gamma y'(t_2) + \delta y(t_2) = 0, \quad (5.19)$$

где  $Ly$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  те же, что в (5.11). Значения  $\lambda$ , при которых задача (5.19) имеет ненулевое решение, называются *собственными значениями* этой задачи, а сами ненулевые решения – *собственными функциями*. При тех  $\lambda$ , которые являются собственными значениями, имеет место второй случай альтернативы, а при остальных – первый.



**Пример 5.5.** Найти собственные значения и собственные функции задачи

$$y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(d) = 0.$$

*Решение.* В силу теоремы 4.1 ненулевые решения этой задачи могут существовать только при  $\lambda < 0$ . Полагаем  $\lambda = -a^2$ ,  $a > 0$ . Из уравнения и условия  $y(0) = 0$  получаем  $y = c \sin at$ . Из условия  $y(d) = 0$  следует  $c \sin ad = 0$ . Чтобы было  $y \neq 0$ , надо  $c \neq 0$ ,  $ad = \pi k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Поэтому

$$a = a_k = \frac{\pi k}{d}, \quad \lambda_k = -a_k^2 = -\left(\frac{\pi k}{d}\right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Числа  $\lambda_k$  – собственные значения, а функции  $y = c \sin \frac{\pi kt}{d}$  – собственные функции.



**Пример 5.6.** Найти собственные значения и собственные функции задачи

$$y'' - \lambda y = 0, \quad \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0, \quad \alpha_2 y(l) + \beta_2 y'(l) = 0.$$

*Решение.* 1) Для начала рассмотрим случай, когда  $\lambda = a^2$ ,  $a > 0$ . Решая уравнение в рамках этого предположения, имеем

$$y(t) = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at},$$



где  $c_1$  и  $c_2$  – пока неизвестные константы. Подставляя в краевые условия, получим систему

$$\begin{cases} (\alpha_1 + \beta_1 a)c_1 + (\alpha_1 - \beta_1 a)c_2 = 0, \\ (\alpha_2 + \beta_2 a)e^{al}c_1 + (\alpha_2 - \beta_2 a)e^{-al}c_2 = 0. \end{cases} \quad (5.20)$$

Система (5.20) однородная, поэтому имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, то есть

$$(\alpha_1 + \beta_1 a)(\alpha_2 - \beta_2 a)e^{-al} - (\alpha_1 - \beta_1 a)(\alpha_2 + \beta_2 a)e^{al} = 0.$$

Откуда путем тождественных преобразований приходим к уравнению

$$(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)a \operatorname{cth} la = \beta_1\beta_2 a^2 - \alpha_1\alpha_2. \quad (5.21)$$

Уравнение (5.21) может иметь решение или не иметь решений. Все зависит от соотношения коэффициентов  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\beta_2$ . Пусть (5.21) имеет решение  $a = a_0$ , тогда из системы (5.20) находим значения постоянных  $c_1$  и  $c_2$ :

$$c_1 = \frac{\alpha_1 - \beta_1 a}{\alpha_1 + \beta_1 a} c, \quad c_2 = -c,$$

где  $c$  – любое число. Тогда собственные функции, соответствующие собственному числу  $a_0$ , есть  $y_0(t) = c \left( \frac{\alpha_1 - \beta_1 a_0}{\alpha_1 + \beta_1 a_0} e^{a_0 t} - e^{-a_0 t} \right)$ ,  $c \neq 0$ .

2) В случае  $a = 0$  решение дает  $y(t) = c \neq 0$  – константа. Краевые условия выполняются лишь при  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$  и любых  $\beta_1$  и  $\beta_2$  (не равных нулю). Последнее означает, что в рассматриваемом случае только задача при условиях второго рода имеет собственную функцию.

3) Пусть теперь  $\lambda = -a^2$ ,  $a > 0$ . Решим уравнение, получим

$$y(t) = c_1 \cos at + c_2 \sin at,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – пока неизвестны. Подставим в краевые условия:

$$\begin{cases} \alpha_1 c_1 + \beta_1 a c_2 = 0, \\ (\alpha_2 \cos al + \beta_2 a \sin al)c_1 + (\alpha_2 \sin al - \beta_2 a \cos al)c_2 = 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

Равенство нулю определителя системы (5.22) приводит к уравнению для  $a$

$$(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) \operatorname{tg} al = -\alpha_1\beta_2 a - \alpha_2\beta_1. \quad (5.23)$$

Исследуем (5.23).

а) Пусть  $\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 \neq 0$ . Тогда решением уравнения (5.23) будет счетный набор значений  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , собственными значениями

$\lambda_k = -a_k^2$  и собственными функциями –  $y_k(t) = c(\frac{\beta_1}{\alpha_1} a_k \cos a_k t - \sin a_k t)$ , где  $c \neq 0$ .

б) Пусть  $\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 = 0$  (вырожденный случай). Тогда при  $\alpha_1 \neq 0$  и  $\beta_2 \neq 0$  существует одно решение уравнения (5.23), а когда  $\alpha_1 = 0$  и  $\beta_2 = 0$ , и одновременно с этим  $\alpha_2 \neq 0$  и  $\beta_1 \neq 0$ , не существует решения. В первой из перечисленных ситуаций собственные функции и собственные значения исследуемой задачи строятся аналогично пункту а).



### • Упражнения для самостоятельной работы

1. Найти, при каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  существует решение задач для уравнения  $y'' + \pi^2 y = 2$ .

а)  $y'(0) = \alpha, y(1) = \beta$ ; б)  $y'(0) = \alpha, y\left(\frac{1}{2}\right) = \beta$ ;

в)  $y(0) + y'(0) = \alpha, y\left(\frac{1}{4}\right) - y'\left(\frac{1}{4}\right) = \beta$ ;

г)  $y(1) + y'(1) = \alpha, y(2) + y'(2) = \beta$ .

2. Существует ли нетривиальное решение задачи  $y'' - y = 0$ ,  $y(0) = 0, y(1) = 0$ , задачи  $y'' - y = 1$ ,  $y(0) = 0, y(1) = 0$ ?

3. При каких коэффициентах  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  задача

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad \beta y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad y(1) + y'(1) = \gamma$$

имеет решение, при каких – не имеет решения?

4. Решить краевые задачи:

1)  $y'' = f(t)$ , а)  $y(0) = 0, y(1) = 0$ ; б)  $y'(0) = 0, y(1) = 0$ ;

в)  $y(0) = 0, y'(1) = 0$ .

2)  $y'' + y = f(t)$ , а)  $y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ; б)  $y'(0) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ;

в)  $y(0) = 0, y'(\pi) = 0$ ; г)  $y'(0), y(\pi) = 0$ .

3)  $y'' - k^2 y = f(t), k > 0$ , а)  $y(-1) = 0, y(1) = 0$ ;

б)  $y'(-1) = 0, y'(1) = 0$ ;

в)  $y(-1) = 0, y'(1) = 0$ ; г)  $y'(-1) = 0, y(1) = 0$ .

4)  $xy'' - y' = f(t)$ , а)  $y(1) = 0, y(2) = 0$ ; б)  $y(1) = 0, y'(2) = 0$ ;

в)  $y'(1) = 0, y(2) = 0$ .

5)  $y'' = f(t), y(a) = 0, y(b) = 0$ .

5. Найти собственные значения и собственные функции краевых задач:

1)  $y'' - \lambda y = 0$ , а)  $y'(0) = 0, y'(l) = 0$ ; б)  $y(0) = 0, y'(l) = 0$ ;

в)  $y'(0) = 0, y(l) = 0$ ;

г)  $y(0) - y'(0) = 0, y(l) + y'(l) = 0$ ;  $y(0) + 2y'(0) = 0, y(l) - 2y'(l) = 0$ ;

д)  $2y(0) + y'(0) = 0, 2y(l) + y'(l) = 0$ ; е)  $y(0) - y'(0) = 0, y(l) - y'(l) = 0$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – 2-е изд., стер. – М.: Наука, 1975. – 239 с.
2. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие / А.Б. Васильева, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов, Т.А. Уразгильдина. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 432 с.
3. Краснов, М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учебное пособие для втузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – 3-е изд. – М.: Высш. школа, 1978. – 287 с.
4. Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебник / И.Г. Петровский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 208 с.
5. Понтрягин, Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения / Л.С. Понтрягин. – 2-е изд., стер. – М.: URSS, 2004. – 206 с.
6. Просветов, Г.И. Дифференциальные уравнения: задачи и решения: учебно-практическое пособие / Г. И. Просветов. – М.: Альфа-Пресс, 2011. – 88 с.
7. Самойленко, А.М. Дифференциальные уравнения. Практический курс: учебное пособие / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. – 3-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 2006. – 383 с.
8. Сикорский, Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями их к некоторым техническим задачам / Ю.С. Сикорский; под ред. С. Г. Михлина. – 2-е изд., стер. – М.: URSS, 2005. – 154 с.
9. Тихонов, А.Н. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для физических специальностей и специальности «Прикладная математика» / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. – 4-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 253 с.
10. Филиппов, А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: учебник / А.Ф. Филиппов. – М.: URSS, 2004. – 240 с.
11. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – 7-е изд., стер. – М.: URSS, 2015. – 240 с.
12. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
13. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения: учебник / Л.Э. Эльсгольц. – Изд. 6-е. – М.: КомКнига, 2006. – 309 с.

*Учебное издание*

**Загребина** Софья Александровна,  
**Деркунова** Елена Анатольевна

**СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ В УПРАЖНЕНИЯХ  
И ЗАДАЧАХ**

Учебное пособие

Техн. редактор *А.В. Миних*  
Дизайн обложки *А.В. Коноваловой*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 17.12.2020. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 6,74. Тираж 100 экз. Заказ 401/58.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.  
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.