

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)
Кафедра Теории управления и оптимизации

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРО- ИЗВОДНЫХ 1-ГО ПОРЯДКА

Методические указания для студентов направления подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Составитель: Алеева Сюзанна Рифхатовна, к. ф.–м. н., доцент кафедры ТУиО

ЧЕЛЯБИНСК 2021

1. Первые интегралы

Первые интегралы применяются при исследовании и решении систем дифференциальных уравнений. Знание одного первого интеграла позволяет уменьшить число неизвестных функций в данной системе. Знание n независимых первых интегралов системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \\ \left((t, x_1, \dots, x_n) \in D_0, \quad f_1, \dots, f_n \in C^1 \right)\end{aligned} \quad (1)$$

позволяет получить решение этой системы без интегрирования.

В прикладных задачах первые интегралы часто имеют физический смысл: закон сохранения энергии, закон сохранения количества движения – это первые интегралы уравнений движения механической системы.

Определение 1: *Первым интегралом* системы (1) в области $D \subset D_0$ называется функция $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1$, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой проходящей в D интегральной кривой системы.

Замечание 1: Иногда первым интегралом называют не функцию $v(t, x_1, \dots, x_n)$, а соотношение $v(t, x_1, \dots, x_n) = c$, где c – произвольная постоянная.

Утверждение 1 (Геометрический смысл первого интеграла): Пусть $\frac{\partial v}{\partial x_i} \neq 0$

для некоторого i и c – любое из значений, принимаемых функцией v в области D . Тогда равенство $v(t, x_1, \dots, x_n) = c$ определяет в пространстве переменных t, x_1, \dots, x_n n -мерную поверхность, целиком состоящая из интегральных кривых системы (1). То есть через каждую точку поверхности проходит интегральная кривая, лежащая на поверхности.

Утверждение 2 (Критерий первого интеграла): Требование, чтобы функция v из класса C^1 сохраняла постоянные значения вдоль интегральных кривых системы (1), равносильно тому, что ее полная производная в силу системы (1) равна нулю, то есть

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1(t, x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial v}{\partial x_2} f_2(t, x_1, \dots, x_n) + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n(t, x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (2)$$

Любой первый интеграл системы (1) удовлетворяет уравнению (2).

Для любой функции $\varphi \in C^1$ и первого интеграла v (или нескольких первых интегралов v_1, \dots, v_k) сложная функция $\varphi(v(t, x_1, \dots, x_n))$ (или $\varphi(v_1, \dots, v_k)$) тоже постоянна вдоль каждой интегральной кривой системы, значит, является первым интегралом. Поэтому первых интегралов бесконечно много.

Определение 2: Первые интегралы v_1, \dots, v_k системы (1) называются *функционально независимыми* (или *независимыми*) в области D , если в каждой точке этой области ранг матрицы

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad (i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n) \text{ равен } k.$$

Функциональная независимость отличается от линейной независимости. Из линейной зависимости функций v_1, \dots, v_k следует их функциональная зависимость: тогда строки матрицы линейно зависимы и ее ранг меньше k . Обратное неверно, например, функции $v_1 = t - x_1$, $v_2 = (t - x_1)^2$ функционально зависимы, но линейно независимы в любой области.

Теорема 1 (Существование n независимых первых интегралов): В окрестности любой точки $M(t_0, x_{01}, \dots, x_{0n})$ в области D_0 существует n независимых первых интегралов.

Теорема 2 (Получение решения с помощью первых интегралов): Пусть v_1, \dots, v_n – независимые первые интегралы системы (1) в области D . Пусть точка $M(t_0, x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$ и $c_i = v_i(M)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда решение системы (1) с начальными условиями $x_i(t_0) = x_{0i}$, $i = 1, \dots, n$, определяется, как неявная функция, системой уравнений:

$$v_i(t, x_1, \dots, x_n) = c_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Теорема 3: Пусть v_1, \dots, v_n – независимые первые интегралы системы (1) в окрестности U точки $M^*(t_0, x_{*1}, \dots, x_{*n})$, то любой первый интеграл w системы (1) в некоторой окрестности точки M^* является функций от них, то есть $w = F(v_1, \dots, v_n)$, $F \in C^1$.

2. Первые интегралы автономных систем

Первые интегралы автономных систем имеют особенности, которые рассмотрены ниже. Система

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad f_1, \dots, f_n \in C^1 \quad (4)$$

удовлетворяет условиям Теоремы 1 и поэтому в окрестности любой точки имеет n независимых первых интегралов вида (3). Так как в системе (4) функции f_i не зависят от t , то часто бывают нужны первые интегралы, не содержащие t .

Теорема 4(Существование $n-1$ независимых первых интегралов): В окрестности любой неособой точки система (4) имеет $n-1$ независимых первых интегралов, не содержащих t , то есть имеющих вид $v_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n-1$.

В данной формулировке нельзя отбросить «в окрестности неособой точки». Например, при $n = 2$ в окрестности узла или фокуса не существует ни одного первого интеграла $v(x_1, x_2)$, у такой точки P есть окрестность $W \subset R^2$, через каждую точку которой проходит траектория, стремящаяся к P при $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$). Предположим, что в некоторой окрестности $U \subset W$ существует первый интеграл $v(x_1, x_2)$. Тогда $v(x_1, x_2) = c = const$ на траектории, стремящейся к P . По непрерывности $v(P) = c$. Значит, на всех траекториях, стремящихся к P , имеем $v(x_1, x_2) = c = v(P)$, то есть $v \equiv c$ в окрестности P .

Тогда $\frac{\partial v}{\partial x_j} \equiv 0$, $j = 1, 2$, ранг матрицы $\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) = rang(0, 0) = 0 < 1$ и пер-

вый интеграл $v(x_1, x_2) = c$ не является независимым.

3. О решении нелинейных систем

Определение 3: Симметрическая форма системы дифференциальных уравнений – это такая запись системы, в которой ни одно из переменных не взято за независимое переменное, поэтому в уравнения входят не производные, в дифференциалы.

Например,

$$\frac{dx_0}{f_0(x_0, x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_1}{f_1(x_0, x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_0, x_1, \dots, x_n)} \quad (5)$$

– система в симметричной форме. Если обозначить общую величину всех дробей через dt , то система (5) приведет к автономной системе

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_0, x_1, \dots, x_n), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

В области, где какая-либо из функций f_i не равна нулю, система (5) равно-

сильна системе $\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{f_j(x_0, x_1, \dots, x_n)}{f_i(x_0, x_1, \dots, x_n)}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad j \neq i (i \text{ фиксировано, } f_i(x_0, x_1, \dots, x_n) \neq 0).$

Обратно, систему (1) нормального вида можно записать в симметричной форме (5), взяв $x_0 = t$, $f_0 \equiv 1$.

Симметрическая запись системы часто облегчает отыскание первых интегралов.

Отыскать решение с помощью конечного числа действий удастся лишь для некоторых несложных систем. При исключении неизвестных непосредственно из данной системы получается уравнение с производными более высокого порядка, решать которое бывает не легче, чем данную систему.

Чаще удастся решить систему путем отыскания интегрируемых комбинаций.

Определение 4: Интегрируемая комбинация – это или комбинация уравнений системы, содержащая только две переменные величины и представляющая собой дифференциальное уравнение, которое можно решить, или такая комбинация, обе части которой являются полными дифференциалами.

Из каждой интегрируемой комбинации получается первый интеграл данной системы. При исключении неизвестных из данной системы с помощью первых интегралов порядок производных не повышается.

4. Примеры решения нелинейных систем

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2(x_1^2 + x_2^2)t, \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1x_2t \end{cases} \quad (6)$$

Решение. Складывая почленно оба уравнения, получаем первую интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x_1 + x_2)}{dt} = 2(x_1 + x_2)^2 t,$$

откуда

$$-\frac{1}{x_1 + x_2} = t^2 - c_1 \text{ или } \frac{1}{x_1 + x_2} + t^2 = c_1.$$

Вычитая почленно из первого уравнения второе, получаем вторую интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 2(x_1 - x_2)^2 t,$$

откуда

$$\frac{1}{x_1 - x_2} + t^2 = c_2.$$

Итак, найдены два первых интеграла данной системы

$$v_1(t, x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 + x_2} + t^2 = c_1,$$

$$v_2(t, x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 - x_2} + t^2 = c_2,$$

которые являются независимыми, так как якобиан отличен от нуля:

$$\frac{D(v_1, v_2)}{D(x_1, x_2)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{(x_1 + x_2)^2} & -\frac{1}{(x_1 + x_2)^2} \\ -\frac{1}{(x_1 - x_2)^2} & -\frac{1}{(x_1 - x_2)^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{(x_1 + x_2)^2} & -\frac{1}{(x_1 + x_2)^2} \\ -\frac{1}{(x_1 - x_2)^2} & -\frac{1}{(x_1 - x_2)^2} \end{vmatrix}} = -\frac{2}{(x_1^2 - x_2^2)^2} \neq 0.$$

Общий интеграл системы (6)

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1 + x_2} + t^2 = c_1, \\ \frac{1}{x_1 - x_2} + t^2 = c_2 \end{cases} \quad (7)$$

Разрешая систему (7) относительно неизвестных функций, получаем общее решение системы (6):

$$x_1 = \frac{c_1 + c_2 - 2t^2}{2(c_1 - t^2)(c_2 - t^2)}, \quad x_2 = \frac{c_2 - c_1}{2(c_1 - t^2)(c_2 - t^2)}.$$

Пример 2. Найти частное решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 1 - \frac{1}{x_2}, & x_1(0) = 1 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{x_1 - t}, & x_2(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} x_2 \left(\frac{dx_1}{dt} - 1 \right) = -1, \\ (x_1 - t) \frac{dx_2}{dt} = 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 \frac{d(x_1 - t)}{dt} = -1, \\ (x_1 - t) \frac{dx_2}{dt} = 1. \end{cases}$$

Складывая почленно последние уравнения, получаем интегрируемую комбинацию:

$$x_2 \frac{d(x_1 - t)}{dt} + (x_1 - t) \frac{dx_2}{dt} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} [(x_1 - t)x_2] = 0.$$

Отсюда находим первый интеграл $v_1(t, x_1, x_2) = (x_1 - t)x_2 = c_1$. Так как $x_1 - t = \frac{c_1}{x_2}$, то второе уравнение системы примет вид $\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{c_1}$, откуда $x_2 = c_2 e^{t/c_1}$. Итак,

$$(x_1 - t)x_2 = c_1, \quad x_2 = c_2 e^{t/c_1}.$$

Откуда получаем общее решение

$$x_1 = t + \frac{c_1}{c_2} e^{-t/c_1}, \quad x_2 = c_2 e^{t/c_1}.$$

Полагая $t = 0$ в этих равенствах, найдем $1 = \frac{c_1}{c_2}$, $1 = c_2$, то есть $c_1 = c_2 = 1$, и

искомым частным решением будет

$$x_1 = t + e^t, \quad x_2 = e^t.$$

Для нахождения интегрируемых комбинаций в системах вида (5) используют производные пропорции

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_m}{b_m} = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_m b_m}, \quad (8)$$

где коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ произвольны и их выбирают так, чтобы числитель был дифференциалом знаменателя, либо числитель был полным дифференциалом, а знаменатель был равен нулю.

Пример 3. Решить систему

$$\frac{dt}{2x_1} = \frac{dx_1}{-\ln t} = \frac{dx_2}{\ln t - 2x_1} \quad (9)$$

Решение. Первая интегрируемая комбинация $\frac{dt}{2x_1} = \frac{dx_1}{-\ln t}$. Разделяя переменные и интегрируя, найдем первый интеграл

$$v_1(t, x_1, x_2) = t(\ln t - 1) + x_1^2 = c_1. \quad (10)$$

Вторую интегрируемую комбинацию получим, используя производные пропорции (8). Для этого сложим числители и знаменатели дробей системы (9):

$$\frac{dt}{2x_1} = \frac{dx_1}{-\ln t} = \frac{dx_2}{\ln t - 2x_1} = \frac{dt + dx_1 + dx_2}{0},$$

здесь $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$. Отсюда $dt + dx_1 + dx_2 = 0$, или $d(t + x_1 + x_2) = 0$ и, значит,

$$v_2(t, x_1, x_2) = t + x_1 + x_2 = c_2. \quad (11)$$

Первые интегралы (10) и (11) являются независимыми, так как якобиан отличен от нуля:

$$\frac{D(v_1, v_2)}{D(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x_1 \neq 0 \text{ на решении системы (9)}$$

и дают общее решение системы (9)

$$x_1 = \pm \sqrt{c_1 + t(\ln t - 1)}, \quad x_2 = c_2 - t \mp \sqrt{c_1 + t(\ln t - 1)}.$$

Пример 4. Решить систему

$$\frac{dt}{4x_2 - 5x_1} = \frac{dx_1}{5t - 3x_2} = \frac{dx_2}{3x_1 - 4t} \quad (12)$$

Решение. Умножая в системе (12) числители и знаменатели соответственно на 3, 4, 5 и складывая числители и знаменатели, получим в силу (8)

$$\frac{3dt}{12x_2 - 15x_1} = \frac{4dx_1}{20t - 12x_2} = \frac{5dx_2}{15x_1 - 20t} = \frac{3dt + 4dx_1 + 5dx_2}{0},$$

здесь $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$. Отсюда $3dt + 4dx_1 + 5dx_2 = 0$ или $d(3t + 4x_1 + 5x_2) = 0$, а значит $v_1(t, x_1, x_2) = 3t + 4x_1 + 5x_2 = c_1$ – первый интеграл системы (12).

Умножая в системе (12) числители и знаменатели дробей соответственно на $\lambda_1 = 2t$, $\lambda_2 = 2x_1$, $\lambda_3 = 2x_2$ и складывая числители и знаменатели, получаем в силу (8)

$$\frac{2tdt}{8tx_2 - 10tx_1} = \frac{2x_1dx_1}{10tx_1 - 6x_1x_2} = \frac{2x_2dx_2}{6x_1x_2 - 8tx_2} = \frac{2tdt + 2x_1dx_1 + 2x_2dx_2}{0},$$

отсюда $2tdt + 2x_1dx_1 + 2x_2dx_2 = 0$, или $d(t^2 + x_1^2 + x_2^2) = 0$, и значит второй первый интеграл будет $v_2(t, x_1, x_2) = t^2 + x_1^2 + x_2^2 = c_2$.

Первые интегралы и являются независимыми, так как якобиан отличен от нуля:

$$\frac{D(v_1, v_2)}{D(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{vmatrix} = 2(4x_2 - 5x_1) \neq 0 \text{ на решении системы}$$

и дают общее решение системы (12)

$$3t + 4x_1 + 5x_2 = c_1, \quad t^2 + x_1^2 + x_2^2 = c_2.$$

5. Уравнения с частными производными первого порядка

Такие уравнения рассматриваются в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений потому, что их решение сводится к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения с частными производными более высокого порядка рассматриваются в отдельном курсе.

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \quad (13)$$

где $z(x_1, \dots, x_n)$ – искомая функция, а a_1, \dots, a_n – известные функции от переменных x_1, \dots, x_n . Считаем, что $a_i \in C^1$ ($i = 1, \dots, n$), $a_1^2 + \dots + a_n^2 \neq 0$.

Теорема 5: Функция $z \in C^1$ является решением уравнения (13) тогда и только тогда, когда она является не содержащим t первым интегралом системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (14)$$

Теорема 6: Если $v_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, n-1$) – независимые первые интегралы системы (14) в области D , то в окрестности любой точки $M \in D$ общее решение уравнения (13) имеет вид

$$z = F(v_1(x_1, \dots, x_n), \dots, v_{n-1}(x_1, \dots, x_n)), \quad (15)$$

где F – произвольная функция класса C^1 . То есть в этой окрестности формула (15) содержит все решения уравнения (13) и только их.

Определение 5: Квазилинейным называется уравнение

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = b \quad (16)$$

где $z(x_1, \dots, x_n)$ – искомая функция, а a_1, \dots, a_n, b – известные функции класса C^1 от переменных x_1, \dots, x_n, z в области D . Считаем, что $a_1^2 + \dots + a_n^2 \neq 0$ в области D .

Уравнение (16) связано с автономной системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \dots, x_n, z), \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, \dots, x_n, z), \\ \dot{z} = b(x_1, \dots, x_n, z). \end{cases} \quad (17)$$

Определение 6: Траектории системы (17) в пространстве переменных x_1, \dots, x_n, z – это линии, называемые *характеристиками* уравнения (16), а решения уравнения (16) изображается n -мерной поверхностью $z = f(x_1, \dots, x_n)$. Считаем, что $f \in C^1$ в области $D_0 \subset R^n$, а точка $(x_1, \dots, x_n, z) \in D \subset R^{n+1}$.

Теорема 7: Поверхность $z = f(x_1, \dots, x_n)$ является решением уравнения (16) тогда и только тогда, когда целиком состоит из характеристик. То есть через

каждую точку поверхности проходит характеристика, целиком лежащая на поверхности.

Теорема 8: Если $v(x_1, \dots, x_n, z)$ – первый интеграл системы (17) в области D , и в точке $M \in D$ имеем $v = c$, $\partial v / \partial z \neq 0$, то равенство $v(x_1, \dots, x_n, z) = c$ в окрестности точки M определяет неявную функцию $z(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющую уравнению (16).

Теорема 9 (Об общем решении квазилинейного уравнения): Пусть $v_i(x_1, \dots, x_n, z)$, $i = 1, \dots, n$ – какие-либо независимые первые интегралы системы (17). Функция $z(x_1, \dots, x_n)$ является решением уравнения (16) в окрестности точки M своего графика, тогда и только тогда она удовлетворяет равенству

$$F(v_1(x_1, \dots, x_n, z), \dots, v_n(x_1, \dots, x_n, z)) = 0$$

при какой-либо $F \in C^1$ такой, что $F = 0$, $F'_z \neq 0$ в точке M .

Замечание: В случае, когда z входит только в один из первых интегралов, например, только в v_n , вместо (18) можно написать

$$v_n(x_1, \dots, x_n, z) = H(v_1(x_1, \dots, x_n, z), \dots, v_{n-1}(x_1, \dots, x_n, z)), \quad (19)$$

где $H \in C^1$ – произвольная функция. Разрешая, если возможно, это уравнение относительно z , получим общее решение уравнения (16) в явном виде.

6. Задача Коши для квазилинейного уравнения

Ограничимся случаем, когда искомая функция z зависит только от двух переменных x_1 и x_2 .

Требуется найти поверхность $z = f(x_1, x_2)$, удовлетворяющую уравнению

$$a_1(x_1, x_2, z) \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, z) \frac{\partial z}{\partial x_2} = b(x_1, x_2, z)$$

и проходящую через линию $L = \{x_1 = \psi_1(s), x_2 = \psi_2(s), z = \psi_3(s)\}$.

Предполагаем, что данные функции $a_1, a_2, b, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ класса C^1 . Пользуясь геометрическим смыслом характеристик, можно предположить такой способ построения решения задачи Коши. Через каждую точку линии L надо провести характеристику. Если из этих характеристик составится гладкая поверхность $z = f(x_1, x_2) \in C^1$, то она будет решением задачи Коши.

Теорема 10: Пусть на дуге L_1 ($s_1 \leq s \leq s_2$) линии L

$$\begin{vmatrix} a_1 & \psi'_1 \\ a_2 & \psi'_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (20)$$

Тогда в некоторой окрестности каждой точки дуги L_1 существует единственное решение задачи Коши.

Геометрический смысл условия (20): Вектор (a_1, a_2, b) касается характеристики, а вектор $(\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3)$ касается линии L . Условие (20) означает, что проекции (a_1, a_2) и (ψ'_1, ψ'_2) этих векторов на плоскости x_1, x_2 не коллинеарны. Следовательно, проекции линии L и пересекающих ее характеристик не должны касаться друг друга.

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} = z - x_1^2 - x_2^2, \quad (21)$$

а также поверхность $z = \varphi(x_1, x_2)$, удовлетворяющую этому уравнению и проходящую через линию

$$z + x_1^2 = 2x_1, \quad x_1 + x_2 = 1 \quad (22)$$

Решение. Запишем в симметрической форме систему уравнений, определяющую характеристики

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dz}{z - x_1^2 - x_2^2}.$$

Находим независимые первые интегралы

$$v_1(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1} = c_1, \quad v_2(z, x_1, x_2) = \frac{z + x_1^2 + x_2^2}{x_1} = c_2. \quad (23)$$

Согласно (19), общее решение уравнения (21) можно написать в виде

$$\frac{z + x_1^2 + x_2^2}{x_1} = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \quad z = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 f\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

$f \in C^1$ – произвольная функция.

Чтобы найти поверхность, проходящую через линию (22), надо сначала из уравнений (21) и (22) исключить z , x_1 , x_2 и получить равенство, которое может содержать только c_1 и c_2 . Для этого можно, например, из уравнений (22) выразить x_2 и z через x_1 и подставить эти выражения в (23)

$$x_2 = 1 - x_1, \quad z = 2x_1 - x_1^2; \quad \frac{1 - x_1}{x_1} = c_1, \quad \frac{1 + x_1^2}{x_1} = c_2.$$

Исключая x_1 из последних двух равенств, получаем

$$c_2 = c_1 + 1 + \frac{1}{c_1 + 1}.$$

Подставляя сюда вместо c_1 и c_2 первые интегралы (23), после упрощений получаем искомое решение:

$$z = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + x_2 + \frac{x_1^2}{x_1 + x_2} \quad (x_1 + x_2 > 0).$$

7. Задачи для самостоятельного решения

1. Решить следующие системы дифференциальных уравнений:

$$1.1. \frac{dt}{x_1 x_2} = \frac{dx_1}{tx_2} = \frac{dx_2}{tx_1}$$

$$1.2. \frac{dt}{x_1} = -\frac{dx_1}{t} = \frac{dx_2}{x_3} = -\frac{dx_3}{x_2}$$

$$1.3. \frac{dt}{x_1 x_2} = \frac{dx_1}{tx_1} = -\frac{dx_2}{tx_2}$$

$$1.4. \frac{dt}{t - x_1^2 - x_2^2} = \frac{dx_1}{2tx_1} = \frac{dx_2}{2tx_2}$$

$$1.5. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{3t - 4x_2}{2x_2 - 3x_1} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{4x_1 - 2t}{2x_2 - 3x_1} \end{cases}$$

$$1.6. \begin{cases} tdx_1 = (t - 2x_1)dt \\ tdx_2 = (tx_1 + tx_2 + 2x_1 - t)dt \end{cases}$$

$$1.7. \frac{tdt}{x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2} = \frac{dx_1}{x_1 + x_2} = \frac{dx_2}{x_1 - x_2}$$

2. Найти общее решение уравнения, а также решение задачи Коши:

$$2.1. x_1 x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_1 z \frac{\partial z}{\partial x_2} = x_2 z, \text{ при } z = 1 + x_2^2, x_1 = 1$$

$$2.2. \frac{\partial z}{\partial x_1} + (z - x_1^2) \frac{\partial z}{\partial x_2} = 2x_1, \text{ при } z = x_1^2 + x_1, x_2 = 2x_1^2$$

$$2.3. x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_1 z \frac{\partial z}{\partial x_2} = x_2 z, \text{ при } z = -x_2^2, x_1 = 0$$

$$2.4. x_1 z \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 z \frac{\partial z}{\partial x_2} = x_1^3 + x_2, \text{ при } z = 4x_2^3, x_1 = 3x_2^2$$

$$2.5. x_2^2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_1 x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} = x_1^3 z, \text{ при } z = e^{x_2^2/2}, x_1 = 2x_2$$

$$2.6. \quad x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + z \frac{\partial z}{\partial x_2} = z + x_1^2, \text{ при } z = x_1, \quad x_2 = \frac{1}{4} - x_1^2$$

$$2.7. \quad x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} = x_1 + x_2 + z, \text{ при } z = x_1 + x_2, \quad x_2 = x_1 + 1$$

Литература

1. Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] : учебное пособие / Л. С. Понтрягин. — 5-е изд. — Москва : Наука, 1982. — 331 с.
2. Филиппов, А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений [Текст] : учебник / А. Ф. Филиппов. — Москва : Ленанд, 2015. — 239 с.
3. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст] / А. Ф. Филиппов. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2000. — 176 с.
4. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения [Текст] : учебник / Л.Э. Эльсгольц. — 6-е изд. — Москва : КомКнига, 2006. — 309 с.