

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Южно-Уральский государственный университет  
Кафедра прикладной математики

519.1(07)  
Э157

А. Ю. Эвнин

# ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Челябинск  
Издательский центр ЮУрГУ  
2013

УДК 510.6(075.8)+519.1(075.8)+511(075.8)  
Э157

Одобрено учебно-методической комиссией  
механико-математического факультета

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук *М. М. Кипнис*, ЧГПУ,  
доктор физ.-мат. наук *С. М. Воронин*, ЧелГУ

**Эвнин, А. Ю.**

Э157

Индивидуальные задания по дискретной математике:  
учебное пособие / А. Ю. Эвнин. – Челябинск: Издательский  
центр ЮУрГУ, 2013. – 35 с.

Учебное пособие содержит индивидуальные задания для типовых расчётов по различным разделам дискретной математики (алгебра высказываний, теория чисел, комбинаторика, теория графов). Необходимый теоретический материал и примеры решения задач — в учебнике [2] и учебных пособиях [10–15]. Дополнительная информация — в книгах [1] и [3–9].

УДК 510.6(075.8)+519.1(075.8)+511(075.8)

© Эвнин А. Ю., 2013

© Издательский центр ЮУрГУ, 2013

## Глава 1

# Алгебра высказываний

### Задача 1

С помощью равносильных преобразований упростить формулу

- 1)  $\overline{A}\overline{B} \vee \overline{A}\overline{C} \vee \overline{B}\overline{C} \vee C$ ;
- 2)  $(A \vee \overline{A}\overline{B} \vee \overline{A}\overline{B})(A \vee \overline{A}\overline{C} \vee \overline{A}\overline{B} \vee \overline{A}\overline{B}\overline{C})$ ;
- 3)  $(A \vee B \vee C(\overline{A} \vee \overline{B}) \vee B(\overline{A} \vee \overline{D}))(A \vee C\overline{A} \vee \overline{A}BC)$ ;
- 4)  $(\overline{A}B \vee \overline{A}\overline{B}\overline{C} \vee \overline{A}\overline{C})(A \vee C\overline{A} \vee B(\overline{A} \vee \overline{C}))$ ;
- 5)  $(\overline{A} \vee \overline{A}B \vee \overline{B}CD \vee AD)(B \vee \overline{B}D \vee BC(A \vee D))$ ;
- 6)  $(\overline{A} \vee B \vee C)ABC(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C})(A \vee BC)(AB \vee CD)$ ;
- 7)  $(\overline{A} \vee \overline{A}BC \vee \overline{C})ABC(\overline{A}\overline{C} \vee C\overline{D} \vee D)(AC \vee BD)$ ;
- 8)  $(\overline{A} \vee \overline{A}B \vee B(C \vee D))(BD \vee \overline{A} \overline{B} \overline{D} \vee \overline{A}D \vee AB)BC$ ;
- 9)  $(\overline{A} \vee \overline{A}\overline{B} \vee \overline{B}CD \vee AD)(\overline{B} \vee BD \vee \overline{B}C(A \vee D))$ ;
- 10)  $\overline{A} \overline{B}C \vee \overline{A}\overline{B}\overline{C} \vee \overline{A}BC \vee \overline{A}\overline{B}C$ ;
- 11)  $AB \vee \overline{A}\overline{B}C \vee \overline{A}\overline{B} \overline{C} \vee \overline{A}\overline{C}$ ;
- 12)  $\overline{A} \overline{B}C \vee \overline{A}\overline{B}\overline{C} \vee \overline{A}\overline{B} \overline{C} \vee \overline{A}BC \vee \overline{A} \overline{C}$ ;
- 13)  $\overline{A}C\overline{D} \vee \overline{C}D \vee AC \vee \overline{A}CD$ ;
- 14)  $\overline{A}\overline{B} \overline{C} \vee \overline{A}BC \vee \overline{B}CD \vee BC \vee \overline{B}C\overline{D}$ ;
- 15)  $(AC \vee \overline{A}\overline{B} \overline{C} \vee \overline{A}BC \vee \overline{A}C)(CD \vee C\overline{D} \vee \overline{A}BC)$ ;
- 16)  $(\overline{A}BC \vee \overline{A}BC \vee BC \vee \overline{A}BC)(A \vee \overline{A}B \vee \overline{A} \overline{B}C)$ ;
- 17)  $(\overline{A}B \vee \overline{A}C \vee AB \vee \overline{A} \overline{B} \overline{C})(\overline{A} \overline{B} \vee \overline{B}AC \vee \overline{A}CD \vee \overline{A}C\overline{D})$ ;
- 18)  $(AB \vee \overline{A}B \vee \overline{B}C)(\overline{A}BC \vee \overline{A}BC \vee \overline{B})$ ;
- 19)  $(AB \vee \overline{A}BC \vee \overline{B}AC)(\overline{A}BC \vee \overline{A}BC \vee \overline{A}BC)$ ;
- 20)  $(\overline{A} \vee \overline{A}B \vee \overline{B}C\overline{D} \vee \overline{A}D)(B \vee \overline{B} \overline{D} \vee BC(A \vee \overline{D}))$ ;
- 21)  $(\overline{B}C \vee \overline{A}BC \vee C\overline{A} \overline{B})(\overline{A}\overline{B} \vee \overline{A} \overline{B} \vee \overline{A}BC)$ ;
- 22)  $(AB \vee \overline{A}BC \vee \overline{B}C \vee C)(\overline{C} \vee AC \vee \overline{A}BC)$ ;
- 23)  $(BC \vee \overline{A}BC \vee \overline{A}C)(AB \vee \overline{C} \vee AC)$ ;

- 24)**  $(\overline{B} \overline{C} \vee AC \vee ABC \vee \overline{A}BC)(A \vee \overline{A}C \vee \overline{B} \overline{C});$   
**25)**  $(BD \vee A\overline{D} \vee A\overline{B}D \vee \overline{A} \overline{B}D)(A \vee \overline{A} \overline{D} \vee BD);$   
**26)**  $(B\overline{C} \vee AC \vee A\overline{B} \overline{C} \vee \overline{A} \overline{B} \overline{C})(A \vee \overline{A} C \vee B\overline{C});$   
**27)**  $(\overline{B}C \vee A\overline{C} \vee ABC \vee \overline{A}BC)(A \vee \overline{A} \overline{C} \vee \overline{B}C);$   
**28)**  $(BC \vee \overline{A} \overline{C} \vee \overline{A} \overline{B}C \vee A\overline{B}C)(\overline{A} \vee A\overline{C} \vee BC);$   
**29)**  $(\overline{B}D \vee \overline{A} \overline{D} \vee \overline{A}BD \vee ABD)(\overline{A} \vee A\overline{D} \vee \overline{B}D);$   
**30)**  $(B\overline{C} \vee \overline{A}C \vee \overline{A} \overline{B} \overline{C} \vee A \overline{B} \overline{C})(\overline{A} \vee AC \vee B\overline{C});$   
**31)**  $(\overline{B} \overline{C} \vee \overline{A}C \vee \overline{A}BC \vee ABC)(\overline{A} \vee AC \vee \overline{B} \overline{C});$   
**32)**  $(A \vee \overline{A}B \vee \overline{B}CD \vee \overline{A}D)(B \vee \overline{B}D \vee BC(\overline{A} \vee D)).$

## Задача 2

Привести формулу алгебры высказываний к СДНФ, СКНФ, сокращённой ДНФ; найти для этой формулы все тупиковые и минимальные ДНФ.

- 1)  $((\overline{C} \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow B(\overline{C} \sim A);$
- 2)  $((AB \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow A\overline{B})) \rightarrow AB;$
- 3)  $(A \rightarrow (\overline{B} \sim (A \vee C))) \rightarrow ((B \rightarrow A \vee C) \rightarrow AC);$
- 4)  $(\overline{A} \rightarrow B(A \rightarrow C)) \rightarrow (\overline{A} \vee B \sim C)B;$
- 5)  $((B \rightarrow C) \rightarrow A) \rightarrow (((\overline{C} \vee B) \rightarrow \overline{A}) \rightarrow BC);$
- 6)  $(A \rightarrow (\overline{C} \sim (A \vee B))) \rightarrow ((A \vee B) \sim BC);$
- 7)  $((C\overline{B} \sim A) \rightarrow C) \rightarrow ((\overline{A} \vee C) \sim C)B;$
- 8)  $((A \sim BC) \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee C) \sim B);$
- 9)  $((A \sim (B \vee \overline{C})) \rightarrow (\overline{A} \vee C)) \rightarrow ((A\overline{C} \vee B) \rightarrow \overline{A} \overline{B});$
- 10)  $(C \rightarrow (\overline{A} \sim (B \vee C))) \rightarrow ((AC \vee B) \rightarrow ABC);$
- 11)  $((A\overline{B} \rightarrow C) \rightarrow B) \rightarrow (A\overline{C} \sim (A \vee B);$
- 12)  $(\overline{A}C \rightarrow (C \sim \overline{B})) \rightarrow ((\overline{A} \vee \overline{B}) \rightarrow A\overline{C});$
- 13)  $((B \vee C) \sim AC) \rightarrow \overline{B} \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow A\overline{B});$
- 14)  $((B\overline{C} \rightarrow A) \rightarrow C) \rightarrow A(C \sim B);$
- 15)  $((B \sim C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow \overline{A} \overline{C})) \rightarrow \overline{B\overline{C}} \rightarrow \overline{A};$
- 16)  $(A \rightarrow ((\overline{B} \vee C) \sim \overline{A})) \rightarrow B(C \sim A\overline{B});$
- 17)  $((A \vee \overline{B} \overline{C}) \rightarrow \overline{A} \vee \overline{C}) \rightarrow \overline{B \rightarrow A \vee C};$

- 18)  $((B \vee C) \sim AC) \rightarrow \overline{AB} \rightarrow \overline{B \rightarrow \overline{A}};$
- 19)  $((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow \overline{BC}) \rightarrow \overline{BC} \rightarrow B(A \sim C));$
- 20)  $(\overline{AC} \rightarrow (C \sim \overline{B})) \rightarrow ((\overline{A} \vee \overline{B}) \rightarrow \overline{A \rightarrow B \vee C});$
- 21)  $(B \vee C \rightarrow \overline{A}) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow AC);$
- 22)  $(AB \rightarrow ((A \vee B\overline{C}) \rightarrow \overline{B})) \rightarrow ((A \vee C) \sim (B \vee \overline{C})).$
- 23)  $((C \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow B(C \sim A);$
- 24)  $((AB \rightarrow \overline{C}) \rightarrow ((A \vee \overline{C}) \rightarrow A\overline{B})) \rightarrow AB;$
- 25)  $(A \rightarrow (\overline{B} \sim (A \vee \overline{C}))) \rightarrow ((B \rightarrow A \vee \overline{C}) \rightarrow A\overline{C});$
- 26)  $(\overline{A} \rightarrow B(A \rightarrow \overline{C})) \rightarrow (\overline{A} \vee B \sim \overline{C})B;$
- 27)  $((B \rightarrow \overline{C}) \rightarrow A) \rightarrow (((C \vee B) \rightarrow \overline{A}) \rightarrow B\overline{C});$
- 28)  $(A \rightarrow (C \sim (A \vee B))) \rightarrow ((A \vee B) \sim B\overline{C});$
- 29)  $((\overline{CB} \sim A) \rightarrow \overline{C}) \rightarrow ((\overline{A} \vee \overline{C}) \sim \overline{C})B;$
- 30)  $((A \sim B\overline{C}) \rightarrow \overline{C}) \rightarrow ((A \vee \overline{C}) \sim B);$
- 31)  $((A \sim (B \vee C)) \rightarrow (\overline{A} \vee \overline{C})) \rightarrow ((AC \vee B) \rightarrow \overline{A} \overline{B});$
- 32)  $(\overline{C} \rightarrow (\overline{A} \sim (B \vee \overline{C}))) \rightarrow ((A\overline{C} \vee B) \rightarrow AB\overline{C}).$

### Задача 3

С помощью теоремы Поста из множества логических функций выделить всевозможные базисы.

- 1)  $\{x\overline{y} \vee \overline{x}y, xy + z, (x + y) \sim z, xy \vee yz \vee zx\};$
- 2)  $\{xy, x + y, x \sim y, x \vee \overline{y}\};$
- 3)  $\{\overline{x}y, x + y, x \sim y, x \vee \overline{y}\};$
- 4)  $\{xy, x + y + 1, x \sim y, x \vee \overline{y}\};$
- 5)  $\{xy, x + y, \overline{x} \sim y, x \vee \overline{y}\};$
- 6)  $\{x\overline{y}, x + y, x \sim y, x \vee \overline{y}\};$
- 7)  $\{\overline{x}y, x + y + 1, x \sim y, x \vee \overline{y}\};$
- 8)  $\{\overline{x}, x + y, x \sim y, x \vee y\};$
- 9)  $\{x \rightarrow y, x + y, x \sim y, x \vee \overline{y}\};$
- 10)  $\{\overline{x} \rightarrow y, x + y, x \sim y, x \vee \overline{y}\};$
- 11)  $\{x \rightarrow y, x + y + 1, x \sim y, x \vee \overline{y}\};$
- 12)  $\{x \rightarrow y, x + y, \overline{x} \sim y, x \vee \overline{y}\};$

- 13)  $\{x \rightarrow \bar{y}, x + y, x \sim y, x \vee \bar{y}\};$
- 14)  $\{\bar{x} \rightarrow y, x + y + 1, x \sim y, x \vee \bar{y}\};$
- 15)  $\{\bar{x}, x + y, x \rightarrow y, x \vee y\};$
- 16)  $\{x + y + z, xy, 0, 1, \bar{x}\};$
- 17)  $\{\bar{x} \vee y, x + y, 0, 1\};$
- 18)  $\{x + y, xy, 0, 1, \bar{x}\};$
- 19)  $\{x \vee y, x + y + 1, 0, 1\};$
- 20)  $\{x + y, x \vee y, 0, 1\};$
- 21)  $\{x \rightarrow y, x + y, 0, 1\};$
- 22)  $\{x + y + z, xy, 0, 1, \bar{x}\};$
- 23)  $\{x \rightarrow y, x + y, 0, 1\};$
- 24)  $\{x + y, x \vee y, 1, \bar{x}\};$
- 25)  $\{\bar{x} \vee y, x + y, 0, 1\};$
- 26)  $\{xy, 1, \bar{x}\};$
- 27)  $\{x \rightarrow y, x + y, 0, 1\};$
- 28)  $\{x + y + z, xy, 0, 1, \bar{x}\};$
- 29)  $\{x \rightarrow y, x + y, 0, 1\};$
- 30)  $\{x\bar{y} \vee \bar{x}y, xy + z, x \sim z, xy \vee yz \vee zx\};$
- 31)  $\{x\bar{y} \vee \bar{x}y, xy + z, (x + y) \rightarrow z, xy \vee yz \vee zx\};$
- 32)  $\{x\bar{y} \vee \bar{x}y, xy + xz, (x + y) \sim z, xy \vee yz \vee zx\}.$

## Задача 4

Доказать тождество булевой алгебры (явно указав использованные свойства: ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность, идемпотентность и т.д.).

- 1)  $(A + B)(A + C)(B + D)(C + D) = AD + BC;$
- 2)  $AB + A\bar{B}D = AD + AB\bar{D};$
- 3)  $A(A + C)(B + C) = AB + AC;$
- 4)  $A + AC + BC = (A + B)(A + C);$
- 5)  $(A + B)(B + C)(C + A) = AB + BC + CA;$
- 6)  $(A + B)(B + C)(C + D) = AC + BC + BD;$

- 7)  $(A + B + C)(B + C + D)(C + D + A) = AB + AD + BD + C;$
- 8)  $ABC + BCD + CDA = (A + B)(A + D)(B + D)C;$
- 9)  $(A + D)(B + D)(C + D) = ABC + D;$
- 10)  $(\overline{A} \overline{C} + C + \overline{C} D + AB)(\overline{C} \overline{D} + D + A \overline{D} + \overline{C} \overline{D} \overline{B}) = C + D + AB + \overline{A} \overline{B};$
- 11)  $A + \overline{A} B = A + B;$
- 12)  $(A + B)(A + \overline{B}) = A;$
- 13)  $AB + \overline{B}(A + C) = A + C \overline{B};$
- 14)  $(\overline{A} \overline{C} + C \overline{D} + D + AB)(C + \overline{C} D + A \overline{D} + \overline{C} \overline{D} \overline{B}) = AB + \overline{A} \overline{B} + C + D;$
- 15)  $\overline{(A + B)(A + C)} + A + B + C = I;$
- 16)  $\overline{A} \overline{B} \overline{C}(A + B + C) = O;$
- 17)  $(\overline{A} \overline{C} + C + D + AB)(\overline{C} \overline{D} + D + A \overline{D} + \overline{C} \overline{D} \overline{B}) = C + D + AB + \overline{A} \overline{B};$
- 18)  $A(A + B)(A + \overline{B} + C) = A;$
- 19)  $(BD + A \overline{D} + A \overline{B} D + \overline{A} \overline{B} D)(A + \overline{A} \overline{D} + BD) = A + BD;$
- 20)  $(\overline{A} \overline{C} + C + \overline{C} D + AB)(C + \overline{C} D + A \overline{D} + \overline{C} \overline{D} \overline{B}) = C + D + AB + \overline{A} \overline{B};$
- 21)  $AB + A \overline{B} C = AC + A \overline{B} \overline{C};$
- 22)  $(\overline{A} \overline{C} + C \overline{D} + D + AB)(\overline{C} \overline{D} + D + A \overline{D} + \overline{C} \overline{D} \overline{B}) = C + D + AB + \overline{A} \overline{B};$
- 23)  $(A \overline{C} + C + D + \overline{A} \overline{B})(\overline{C} \overline{D} + D + \overline{A} \overline{D} + \overline{C} \overline{D} \overline{B}) = C + D + AB + \overline{A} \overline{B};$
- 24)  $A(A + \overline{B})(A + B + C) = A;$
- 25)  $(BC + A \overline{C} + A \overline{B} C + \overline{A} \overline{B} C)(A + \overline{A} \overline{C} + BC) = A + BC;$
- 26)  $(\overline{A} C + \overline{C} + C D + AB)(\overline{C} + C D + A \overline{D} + C \overline{D} \overline{B}) = \overline{C} + D + AB + \overline{A} \overline{B};$
- 27)  $(A + D)(A + C)(B + D)(B + C) = AB + CD;$
- 28)  $BD + \overline{B} C D = CD + B \overline{C} D;$
- 29)  $(\overline{A} + \overline{C})C(\overline{C} + D)(A + B) + (C + \overline{D})D(A + \overline{D})(\overline{C} + \overline{B} + \overline{D}) = CD(A + B)(\overline{A} + \overline{B});$
- 30)  $(A + B)(A + \overline{B} + C) = (A + C)(A + B + \overline{C});$
- 31)  $AB + A \overline{B} \overline{C} = A \overline{C} + ABC.$
- 32)  $(\overline{A} + \overline{C})C(B + \overline{C})(A + D) + (C + \overline{B})B(A + \overline{B})(\overline{C} + \overline{B} + \overline{D}) = CB(A + D)(\overline{A} + \overline{D}).$

## Глава 2

# Теория чисел

### Задача 1

Доказать двумя способами (математической индукцией и с помощью сравнений по модулю), что при любом натуральном  $n$

- |  |   |
|--|---|
| 1) $2 \cdot 7^n + 3 \cdot (-3)^n - 5 \div 30;$   | 17) $3 \cdot 6^n + 5 \cdot (-2)^n - 8 \div 120;$    |
| 2) $4^{2n} - 3^{2n} - 7 \div 84;$                | 18) $5 \cdot 4^n + 3 \cdot (-4)^n - 8 \div 120;$    |
| 3) $18^n + (-17)^n - 1 \div 306;$                | 19) $3 \cdot 12^n + 11 \cdot (-2)^n - 14 \div 462;$ |
| 4) $2 \cdot 4^n + 3 \cdot (-1)^n - 5 \div 30;$   | 20) $2 \cdot 12^n + 11 \cdot (-1)^n - 13 \div 286;$ |
| 5) $32^n + (-31)^n - 1 \div 992;$                | 21) $11 \cdot 6^n + 5 \cdot (-10)^n - 16 \div 880;$ |
| 6) $14^n + (-13)^n - 1 \div 182;$                | 22) $7 \cdot 12^n + 11 \cdot (-6)^n - 18 \div 693;$ |
| 7) $3^n + (-1)^{n+1} \cdot 2^n - 5 \div 30;$     | 23) $11 \cdot 3^n + 2 \cdot (-10)^n - 13 \div 286;$ |
| 8) $46^n + (-45)^n - 1 \div 2070;$               | 24) $11 \cdot 4^n + 3 \cdot (-10)^n - 14 \div 462;$ |
| 9) $24^n + (-23)^n - 1 \div 552;$                | 25) $3 \cdot 8^n + 7 \cdot (-2)^n - 10 \div 210;$   |
| 10) $2 \cdot 6^n + 5 \cdot (-1)^n - 7 \div 70;$  | 26) $11 \cdot 8^n + 7 \cdot (-10)^n - 18 \div 693;$ |
| 11) $5 \cdot 3^n + 2 \cdot (-4)^n - 7 \div 70;$  | 27) $7 \cdot 4^n + 3 \cdot (-6)^n - 10 \div 210;$   |
| 12) $22^n + (-21)^n - 1 \div 462;$               | 28) $7 \cdot 6^n + 5 \cdot (-6)^n - 12 \div 420;$   |
| 13) $19^n + (-18)^n - 1 \div 342;$               | 29) $5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) \div 91;$        |
| 14) $26^n + (-25)^n - 1 \div 650;$               | 30) $5 \cdot 8^n + 7 \cdot (-4)^n - 12 \div 420;$   |
| 15) $2 \cdot 8^n + 7 \cdot (-1)^n - 9 \div 126;$ | 31) $3 \cdot 11^n + 5 \cdot (-5)^n - 8 \div 120;$   |
| 16) $7 \cdot 3^n + 2 \cdot (-6)^n - 9 \div 126;$ | 32) $5 \cdot 12^n + 11 \cdot (-4)^n - 16 \div 880.$ |



## Задача 2

Решить уравнение в целых числах; среди всех его решений  $(x, y)$  выделить такое, для которого сумма  $|x| + |y|$  минимальна.

- |                        |                         |
|------------------------|-------------------------|
| 1) $5x - 12y = 3;$     | 17) $43x - 40y = 1;$    |
| 2) $67x - 64y = 1;$    | 18) $7x + 3y = 1;$      |
| 3) $27x + 24y = 3;$    | 19) $257x + 18y = 175;$ |
| 4) $40x + 37y = 1;$    | 20) $56x + 53y = 2;$    |
| 5) $113x + 58y = 1;$   | 21) $52x - 127y = 1;$   |
| 6) $52x + 49y = 2;$    | 22) $57x - 54y = 1;$    |
| 7) $89x - 144y = 1;$   | 23) $37x + 34y = 1;$    |
| 8) $113x - 37y = 1;$   | 24) $40x + 43y = 2;$    |
| 9) $7x + 23y = 131;$   | 25) $52x - 27y = 2;$    |
| 10) $171x - 113y = 1;$ | 26) $57x - 54y = 3;$    |
| 11) $46x + 43y = -1;$  | 27) $342x - 177y = 1;$  |
| 12) $49x - 46y = 1;$   | 28) $342x + 477y = 2;$  |
| 13) $5x - 7y = 1;$     | 29) $37x - 34y = 1;$    |
| 14) $7x - 5y = 2;$     | 30) $7x + 4y = 3;$      |
| 15) $13x - 15y = 16;$  | 31) $58x - 55y = 1;$    |
| 16) $171x - 56y = 1;$  | 32) $55x - 52y = 1.$    |

## Задача 3

Найти фундаментальное решение уравнения Пелля

$$x^2 - my^2 = 1$$

при  $m$ , равном

- |          |         |         |          |          |          |
|----------|---------|---------|----------|----------|----------|
| 1) 328;  | 2) 326; | 3) 322; | 4) 320;  | 5) 260;  | 6) 258;  |
| 7) 254;  | 8) 252; | 9) 200; | 10) 198; | 11) 194; | 12) 192; |
| 13) 148; | 14) 83; | 15) 82; | 16) 80;  | 17) 79;  | 18) 66;  |
| 19) 65;  | 20) 63; | 21) 62; | 22) 50;  | 23) 48;  | 24) 47;  |
| 25) 45;  | 26) 44; | 27) 39; | 28) 38;  | 29) 37;  | 30) 34;  |
| 31) 33;  | 32) 28. |         |          |          |          |

## Задача 4

Решить в целых числах уравнение

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| 1) $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13;$               | 17) $x^3 + 7y = y^3 + 7x;$      |
| 2) $\sqrt{9x^2 - 16x - 80} = 3x - 8y;$     | 18) $2^x + 1 = y^2;$            |
| 3) $3600x^2 = y^2 - 20736;$                | 19) $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2;$ |
| 4) $2x^2 - 2xy + 9x + y = 2;$              | 20) $xy = 1993 + x + y;$        |
| 5) $(2x + y - 1)y = 3984;$                 | 21) $2xy + 4x = 23 + y;$        |
| 6) $2x^2 - 10xy + 12y^2 = 20y - 7x - 3;$   | 22) $xy = 1996 + x + y;$        |
| 7) $4y + \sqrt{x^2 - 1024} = 0;$           | 23) $16x^2 = y^2 - 1024;$       |
| 8) $2x^2 - 3xy + y^2 - 5x + 4y - 1 = 0;$   | 24) $144x^2 = y^2 - 4096;$      |
| 9) $x^2 + 5y^2 = 20z + 2;$                 | 25) $xy = 1992 + x + y;$        |
| 10) $13x^2 + 9y^2 = 10327;$                | 26) $16x^2 = y^2 + 64;$         |
| 11) $x^3 - x^2y + x - y = 102;$            | 27) $144(x^2 - 1) = 25y^2;$     |
| 12) $\sqrt{9x^2 + 160x + 800} = 3x - 16y;$ | 28) $16x^2 = 9y^2 + 256;$       |
| 13) $\sqrt{9x^2 + 224x + 1416} = 4y - 3x;$ | 29) $5y = 12\sqrt{x^2 - 1};$    |
| 14) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3;$                | 30) $x^2 + 9y^2 = 3z + 2;$      |
| 15) $60y + \sqrt{x^2 - 20736} = 0;$        | 31) $3y = 4\sqrt{x^2 - 16};$    |
| 16) $\sqrt{9x^2 + 80x - 40} = 3x - 20y;$   | 32) $x^2y = 35x + y.$           |

## Задача 5

Найти общее решение системы сравнений

$$x \equiv a(\bmod m); \quad x \equiv b(\bmod n); \quad x \equiv c(\bmod k)$$

при заданных  $m$ ,  $n$  и  $k$ .

| Вариант   | $m$ | $n$ | $k$ |
|-----------|-----|-----|-----|
| <b>1</b>  | 7   | 22  | 25  |
| <b>2</b>  | 7   | 25  | 51  |
| <b>3</b>  | 7   | 25  | 41  |
| <b>4</b>  | 8   | 13  | 17  |
| <b>5</b>  | 8   | 13  | 25  |
| <b>6</b>  | 8   | 13  | 27  |
| <b>7</b>  | 8   | 17  | 25  |
| <b>8</b>  | 8   | 17  | 27  |
| <b>9</b>  | 8   | 17  | 59  |
| <b>10</b> | 8   | 27  | 35  |
| <b>11</b> | 11  | 13  | 17  |
| <b>12</b> | 11  | 13  | 27  |
| <b>13</b> | 11  | 17  | 25  |
| <b>14</b> | 11  | 17  | 27  |
| <b>15</b> | 11  | 17  | 59  |
| <b>16</b> | 13  | 14  | 17  |

| Вариант   | $m$ | $n$ | $k$ |
|-----------|-----|-----|-----|
| <b>17</b> | 13  | 14  | 25  |
| <b>18</b> | 13  | 14  | 27  |
| <b>19</b> | 13  | 16  | 17  |
| <b>20</b> | 13  | 16  | 25  |
| <b>21</b> | 13  | 16  | 27  |
| <b>22</b> | 13  | 25  | 31  |
| <b>23</b> | 13  | 27  | 31  |
| <b>24</b> | 14  | 17  | 25  |
| <b>25</b> | 14  | 17  | 27  |
| <b>26</b> | 14  | 17  | 59  |
| <b>27</b> | 16  | 17  | 25  |
| <b>28</b> | 16  | 17  | 27  |
| <b>29</b> | 16  | 17  | 59  |
| <b>30</b> | 17  | 25  | 31  |
| <b>31</b> | 17  | 27  | 31  |
| <b>32</b> | 17  | 31  | 59  |

## Задача 6

Решить сравнение

- 1)  $x^4 + 2x^2 + 8x + 9 \equiv 0 \pmod{15}$ ;
- 2)  $x^4 + 2x^2 + 8x + 9 \equiv 0 \pmod{21}$ ;
- 3)  $x^4 + 2x^2 + 8x + 9 \equiv 0 \pmod{30}$ ;
- 4)  $x^4 + 2x^2 + 8x + 9 \equiv 0 \pmod{35}$ ;
- 5)  $x^4 + x^3 + 8x^2 + 9 \equiv 0 \pmod{15}$ ;
- 6)  $x^4 + x^3 + 8x^2 + 9 \equiv 0 \pmod{21}$ ;
- 7)  $x^4 + x^3 + 8x^2 + 9 \equiv 0 \pmod{30}$ ;
- 8)  $x^4 + x^3 + 8x^2 + 9 \equiv 0 \pmod{35}$ ;
- 9)  $x^4 + 2x^3 + 8x + 9 \equiv 0 \pmod{15}$ ;
- 10)  $x^4 + 2x^3 + 8x + 9 \equiv 0 \pmod{21}$ ;

- 11)**  $x^4 + 2x^3 + 8x + 9 \equiv 0 \pmod{30}$ ;
- 12)**  $x^4 + 2x^3 + 8x + 9 \equiv 0 \pmod{35}$ ;
- 13)**  $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 9 \equiv 0 \pmod{15}$ ;
- 14)**  $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 9 \equiv 0 \pmod{21}$ ;
- 15)**  $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 9 \equiv 0 \pmod{30}$ ;
- 16)**  $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 9 \equiv 0 \pmod{35}$ ;
- 17)**  $x^5 + 2x^4 - x^3 + 8x + 7 \equiv 0 \pmod{15}$ ;
- 18)**  $x^5 + 2x^4 - x^3 + 8x + 7 \equiv 0 \pmod{21}$ ;
- 19)**  $x^5 + 2x^4 - x^3 + 8x + 7 \equiv 0 \pmod{30}$ ;
- 20)**  $x^5 + 2x^4 - x^3 + 8x + 7 \equiv 0 \pmod{35}$ ;
- 21)**  $x^6 + x^4 - x^3 + 8x + 7 \equiv 0 \pmod{15}$ ;
- 22)**  $x^6 + x^4 - x^3 + 8x + 7 \equiv 0 \pmod{21}$ ;
- 23)**  $x^6 + x^4 - x^3 + 8x + 7 \equiv 0 \pmod{30}$ ;
- 24)**  $x^6 + x^4 - x^3 + 8x + 7 \equiv 0 \pmod{35}$ ;
- 25)**  $x^6 + 2x^4 - x^3 + 8x + 7 \equiv 0 \pmod{15}$ ;
- 26)**  $x^6 + 2x^4 - x^3 + 8x + 7 \equiv 0 \pmod{21}$ ;
- 27)**  $x^6 + 2x^4 - x^3 + 8x + 7 \equiv 0 \pmod{30}$ ;
- 28)**  $x^6 + 2x^4 - x^3 + 8x + 7 \equiv 0 \pmod{35}$ ;
- 29)**  $x^6 + 2x^5 - x^3 + 8x + 7 \equiv 0 \pmod{15}$ ;
- 30)**  $x^6 + 2x^5 - x^3 + 8x + 7 \equiv 0 \pmod{21}$ ;
- 31)**  $x^6 + 2x^5 - x^3 + 8x + 7 \equiv 0 \pmod{30}$ ;
- 32)**  $x^6 + 2x^5 - x^3 + 8x + 7 \equiv 0 \pmod{35}$ .

## Задача 7

Решить сравнение

- |     |                           |     |                           |
|-----|---------------------------|-----|---------------------------|
| 1)  | $x^2 \equiv 2 \pmod{19};$ | 17) | $x^2 \equiv 5 \pmod{19};$ |
| 2)  | $x^2 \equiv 2 \pmod{23};$ | 18) | $x^2 \equiv 5 \pmod{23};$ |
| 3)  | $x^2 \equiv 2 \pmod{29};$ | 19) | $x^2 \equiv 5 \pmod{29};$ |
| 4)  | $x^2 \equiv 2 \pmod{31};$ | 20) | $x^2 \equiv 5 \pmod{31};$ |
| 5)  | $x^2 \equiv 2 \pmod{37};$ | 21) | $x^2 \equiv 5 \pmod{37};$ |
| 6)  | $x^2 \equiv 2 \pmod{41};$ | 22) | $x^2 \equiv 5 \pmod{41};$ |
| 7)  | $x^2 \equiv 2 \pmod{43};$ | 23) | $x^2 \equiv 5 \pmod{43};$ |
| 8)  | $x^2 \equiv 2 \pmod{47};$ | 24) | $x^2 \equiv 5 \pmod{47};$ |
| 9)  | $x^2 \equiv 2 \pmod{53};$ | 25) | $x^2 \equiv 5 \pmod{53};$ |
| 10) | $x^2 \equiv 2 \pmod{59};$ | 26) | $x^2 \equiv 5 \pmod{59};$ |
| 11) | $x^2 \equiv 2 \pmod{61};$ | 27) | $x^2 \equiv 5 \pmod{61};$ |
| 12) | $x^2 \equiv 2 \pmod{67};$ | 28) | $x^2 \equiv 5 \pmod{67};$ |
| 13) | $x^2 \equiv 2 \pmod{71};$ | 29) | $x^2 \equiv 5 \pmod{71};$ |
| 14) | $x^2 \equiv 2 \pmod{73};$ | 30) | $x^2 \equiv 5 \pmod{73};$ |
| 15) | $x^2 \equiv 2 \pmod{79};$ | 31) | $x^2 \equiv 5 \pmod{79};$ |
| 16) | $x^2 \equiv 2 \pmod{83};$ | 32) | $x^2 \equiv 5 \pmod{83}.$ |

## Задача 8

Пользуясь квадратичным законом взаимности и свойствами символа Якоби, найти число решений сравнения

- |     |                              |     |                               |
|-----|------------------------------|-----|-------------------------------|
| 1)  | $x^2 \equiv 111 \pmod{541};$ | 17) | $x^2 \equiv 111 \pmod{751};$  |
| 2)  | $x^2 \equiv 337 \pmod{541};$ | 18) | $x^2 \equiv 337 \pmod{751};$  |
| 3)  | $x^2 \equiv 412 \pmod{541};$ | 19) | $x^2 \equiv 412 \pmod{751};$  |
| 4)  | $x^2 \equiv 111 \pmod{563};$ | 20) | $x^2 \equiv 111 \pmod{761};$  |
| 5)  | $x^2 \equiv 337 \pmod{563};$ | 21) | $x^2 \equiv 337 \pmod{761};$  |
| 6)  | $x^2 \equiv 412 \pmod{563};$ | 22) | $x^2 \equiv 412 \pmod{761};$  |
| 7)  | $x^2 \equiv 111 \pmod{571};$ | 23) | $x^2 \equiv 111 \pmod{797};$  |
| 8)  | $x^2 \equiv 337 \pmod{571};$ | 24) | $x^2 \equiv 337 \pmod{797};$  |
| 9)  | $x^2 \equiv 412 \pmod{571};$ | 25) | $x^2 \equiv 412 \pmod{797};$  |
| 10) | $x^2 \equiv 111 \pmod{601};$ | 26) | $x^2 \equiv 111 \pmod{1847};$ |
| 11) | $x^2 \equiv 337 \pmod{601};$ | 27) | $x^2 \equiv 337 \pmod{1847};$ |
| 12) | $x^2 \equiv 412 \pmod{601};$ | 28) | $x^2 \equiv 412 \pmod{1847};$ |
| 13) | $x^2 \equiv 111 \pmod{701};$ | 29) | $x^2 \equiv 111 \pmod{2003};$ |
| 14) | $x^2 \equiv 337 \pmod{701};$ | 30) | $x^2 \equiv 337 \pmod{2003};$ |
| 15) | $x^2 \equiv 412 \pmod{701};$ | 31) | $x^2 \equiv 412 \pmod{2003};$ |
| 16) | $x^2 \equiv 602 \pmod{751};$ | 32) | $x^2 \equiv 602 \pmod{5987}.$ |

## Задача 9

Найти наименьший первообразный корень числа

- |         |          |           |           |
|---------|----------|-----------|-----------|
| 1) 25;  | 9) 289;  | 17) 841;  | 25) 2209; |
| 2) 49;  | 10) 338; | 18) 961;  | 26) 2738; |
| 3) 50;  | 11) 343; | 19) 1058; | 27) 2809; |
| 4) 98;  | 12) 361; | 20) 1369; | 28) 3362; |
| 5) 121; | 13) 529; | 21) 1681; | 29) 3481; |
| 6) 169; | 14) 578; | 22) 1682; | 30) 3698; |
| 7) 242; | 15) 686; | 23) 1849; | 31) 3721; |
| 8) 250; | 16) 722; | 24) 1922; | 32) 4489. |

## Задача 10

Разложить в произведение циклических подгрупп мультипликативную группу классов вычетов по модулю

- |        |         |         |          |
|--------|---------|---------|----------|
| 1) 15; | 9) 46;  | 17) 58; | 25) 82;  |
| 2) 20; | 10) 48; | 18) 60; | 26) 87;  |
| 3) 24; | 11) 50; | 19) 62; | 27) 90;  |
| 4) 30; | 12) 51; | 20) 63; | 28) 93;  |
| 5) 40; | 13) 52; | 21) 72; | 29) 96;  |
| 6) 42; | 14) 54; | 22) 74; | 30) 120; |
| 7) 44; | 15) 55; | 23) 75; | 31) 123; |
| 8) 45; | 16) 56; | 24) 80; | 32) 150. |

## Глава 3

# Комбинаторика

### Задача 1

Найти коэффициент при  $x^k$  в разложении многочлена

- |                                      |                                       |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $(x^2 + x - 2)^7, k = 8;$         | 17) $(2x^3 + x^2 - 2x + 1)^6, k = 5;$ |
| 2) $(2x^3 + x^2 + x - 2)^5, k = 5;$  | 18) $(x^3 - x^2 + 2x - 1)^5, k = 7;$  |
| 3) $(x^2 - 2x + 2)^8, k = 7.$        | 19) $(x^3 - x^2 + 2x + 1)^6, k = 7;$  |
| 4) $(x^3 - x^2 - 2x - 1)^6, k = 7;$  | 20) $(x^3 - x^2 - 2x - 1)^5, k = 7;$  |
| 5) $(x^2 + 2x - 2)^8, k = 7;$        | 21) $(x^3 + x^2 - 2x + 1)^6, k = 7;$  |
| 6) $(x^3 - x^2 + 2x + 1)^6, k = 8;$  | 22) $(x^3 + x^2 + x - 2)^5, k = 7;$   |
| 7) $(x^2 - x + 2)^8, k = 7;$         | 23) $(x^3 + x^2 - 2x + 1)^6, k = 6;$  |
| 8) $(x^3 + x^2 - 2x + 1)^6, k = 8;$  | 24) $(x^3 + x^2 + x - 2)^5, k = 6;$   |
| 9) $(x^2 + x - 2)^8, k = 7;$         | 25) $(x^3 + x^2 - 2x + 2)^6, k = 6;$  |
| 10) $(x^3 - x^2 + 2x - 1)^6, k = 8;$ | 26) $(x^3 + x^2 + x - 3)^5, k = 6;$   |
| 11) $(x^2 - 2x + 2)^7, k = 8;$       | 27) $(x^3 + x^2 - 2x + 3)^6, k = 5;$  |
| 12) $(x^3 - x^2 - 2x - 1)^6, k = 8;$ | 28) $(x^3 + x^2 + x + 3)^5, k = 6;$   |
| 13) $(x^2 + 2x - 2)^7, k = 8;$       | 29) $(x^3 + 2x^2 - x + 1)^6, k = 6;$  |
| 14) $(x^3 - x^2 + 2x + 1)^5, k = 7;$ | 30) $(x^3 + 2x^2 + x - 2)^5, k = 6;$  |
| 15) $(x^2 - x + 2)^7, k = 8;$        | 31) $(x^3 - x^2 + 2x - 1)^6, k = 5;$  |
| 16) $(x^3 + x^2 - 2x + 1)^5, k = 7;$ | 32) $(x^3 - x^2 + x - 2)^5, k = 5.$   |

### Задача 2

1. У англичан иногда детям дают несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дают не более трёх имен из возможных 300 имен, а порядок имен существен?

2. Сколько имеется 7-значных чисел, в десятичной записи которых 1 встречается дважды, а 0 — трижды?

**3.** В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из четырёх человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

**4.** На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 11 точек. Сколько существует а) треугольников; б) четырёхугольников с вершинами в этих точках?

**5.** Сколькими способами можно составить комиссию из 3 человек, выбирая ее членов из 4 супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

**6.** В классе, в котором учатся Петя и Ваня, 31 человек. Сколькими способами можно выбрать из класса футбольную команду (11 человек) так, чтобы Петя и Ваня не входили в команду одновременно?

**7.** Найти число свободных от квадратов натуральных делителей числа  $10!$ .

**8.** Сколькими способами можно переставить буквы "эпиграф" так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?

**9.** Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из пяти человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более трёх юношей?

**10.** а) Сколькими способами можно разбить 15 человек на три команды по 5 человек в каждой? б) Сколькими способами можно выбрать из 15 человек две команды по 5 человек в каждой?

**11.** Сколькими способами можно выстроить 9 человек разного роста в колонну по три человека, если в каждой шеренге люди выстраиваются по росту?

**12.** Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы  
а) среди них был ровно один туз?  
б) среди них был хотя бы один туз?

**13.** Сколько существует 6-значных чисел, у которых по три чётных и нечётных цифры?

**14.** Сколько существует 10-значных чисел, сумма цифр которых равна а) 2; б) 3; в) 4?



**15.** Человек имеет 6 друзей и в течение 5 дней приглашает к себе в гости каких-то троих из них так, чтобы компания ни разу не повторялась. Сколькими способами он может это сделать?

**16.** Найти число всех натуральных делителей числа  $10!$ .

**17.** Докажите, что из  $n$  предметов чётное число предметов можно выбрать  $2^{n-1}$  способами.

**18.** Поезду, в котором находится  $m$  пассажиров, предстоит сделать  $n$  остановок.

а) Сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках?

б) Решите ту же задачу, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.

**19.** В кошельке лежит по 10 монет достоинством в 1, 2, 5 и 10 рублей. Сколькими способами можно из этих 40 монет выбрать 10? 11? 20?

**20.** Сколькими способами 3 человека могут разделить между собой 6 одинаковых яблок, один апельсин, одну сливу и один мандарин?

**21.** Каких 6-значных чисел больше: тех, в записи которых есть 6, или остальных?

**22.** Сколькими способами 4 черных шара, 4 белых шара и 4 синих шара можно разложить в 6 различных ящиков?

**23.** Найти число свободных от квадратов натуральных делителей числа 90 000.

**24.** Общество из  $n$  членов выбирает из своего состава одного представителя.

а) Сколькими способами может произойти открытое голосование, если каждый голосует за одного человека (быть может, и за себя)?

б) Решите ту же задачу, если голосование — тайное, т.е. учитывается лишь число голосов, поданных за каждого кандидата, и не учитывается, кто за кого голосовал персонально.

**25.** Сколькими способами можно выложить в ряд 5 красных, 5 синих и 5 зелёных шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

**26.** Найти число всех натуральных делителей числа  $13!$ .

**27.** Сколькими способами можно выбрать из полной колоды, содержащей 52 карты, 6 карт так, чтобы среди них были представители всех четырёх мастей?

**28.** Сколькими способами можно выбрать из полной колоды, содержащей 52 карты, 6 карт так, чтобы среди них были представители только двух мастей?

**29.** Сколько имеется 7-значных чисел, в десятичной записи которых 1 встречается трижды, а 0 — дважды?

**30.** Найти число свободных от квадратов натуральных делителей числа 12!.

**31.** Каких 7-значных чисел больше: тех, в записи которых есть 1, или остальных?

**32.** Сколькими способами можно выбрать из колоды в 52 карты 5 карт так, чтобы среди них было не более двух карт одной масти?

### Задача 3

**1.** Сколькими способами можно переставить буквы слова "идемпотентность", чтобы две буквы "т" не шли подряд?

**2.** Сколькими способами можно переставить буквы слова "перешеек" так, чтобы четыре буквы "е" не шли подряд?

**3.** Сколькими способами можно переставить буквы слова "перестройка" так, чтобы буква "е" шла непосредственно за "п"?

**4.** Сколькими способами можно переставить буквы слова "дефолт", чтобы между двумя гласными буквами были две согласные?

**5.** Сколькими способами можно переставить буквы слова "университет" так, чтобы две буквы "т" не шли подряд?

**6.** Сколькими способами можно переставить буквы слова "каракули" так, чтобы никакие две гласные не стояли рядом?

**7.** Сколькими способами можно переставлять буквы слова "порошок" так, чтобы три буквы "о" не стояли рядом?

**8.** Сколькими способами можно переставить буквы слова "кофеварка" так, чтобы гласные и согласные буквы чередовались?

**9.** Сколькими способами можно переставить буквы слова "самовар" так, чтобы гласные и согласные буквы чередовались?

**10.** Сколькими способами можно переставить буквы в слове "каркас" так, чтобы одинаковые буквы не шли друг за другом?

**11.** Сколькими способами можно переставить буквы в слове "пурпур" так, чтобы одинаковые буквы не шли друг за другом?

**12.** Сколькими способами можно выбрать 4 буквы из слова "тар-тар", если не учитывать порядка выбранных букв? Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр числа 112233?

**13.** Найти сумму 5-значных чисел, полученных при всевозможных перестановках цифр 1, 2, 2, 3, 4.

**14.** Найти сумму 5-значных чисел, полученных при всевозможных перестановках цифр 1, 1, 2, 2, 2.

**15.** Найти сумму 5-значных чисел, полученных при всевозможных перестановках цифр 1, 1, 2, 2, 3.

**16.** Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, ..., 9, если каждое число должно состоять из трёх чётных и трёх нечётных цифр, причем никакие две цифры в нем не повторяются?

**17.** Сколько 4-значных чисел можно составить из цифр числа 1122334?

**18.** Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 11122334?

**19.** Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 111223345?

**20.** Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 11122334 так, чтобы три цифры 1 не шли друг за другом?

**21.** Сколько различных десятизначных чисел можно написать, пользуясь тремя цифрами 1, 2, 3 при дополнительном условии, что цифра 3 применяется в каждом числе ровно два раза? Сколько написанных чисел делится на 9?

**22.** Сколькими способами можно переставить буквы слова "змеед" так, чтобы 3 буквы "е" не шли подряд?

**23.** Сколькими способами можно переставить буквы слова "институт", чтобы две буквы "т" не шли подряд?

**24.** Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифры 0, 1, 2, 3 стоят подряд (в произвольном порядке)?

**25.** Сколько 4-значных чисел, делящихся на 9, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в каждом числе каждая цифра встречается не более одного раза?

**26.** Сколькими способами можно переставить буквы слова "политкорректность", чтобы никакие две гласные буквы не стояли рядом?

**27.** Сколькими способами можно переставить буквы слова "индустриализация", чтобы две буквы "и" не шли подряд?

**28.** Сколькими способами можно переставить буквы слова "пастух", чтобы между двумя гласными буквами были две согласные?

**29.** Сколькими способами можно разложить 19 различных предметов по 5 ящикам так, чтобы в 4 ящика легло по 4 предмета, а в оставшийся — 3 предмета?

**30.** Сколькими способами можно разложить 19 различных предметов по 5 ящикам так, чтобы в 4 ящика легло по 3 предмета, а в оставшийся — 7 предметов?

**31.** Сколько существует шестизначных чисел, которые состоят из трёх различных чётных и трёх различных нечётных цифр?

**32.** Сколькими способами можно переставить буквы слова "оборонспособность", чтобы две буквы "о" не шли подряд?

## Задача 4

**1.** В течение недели студент каждый день заходил в гости к какому-нибудь одному из четырёх своих друзей. Сколькими способами он мог это сделать, если известно, что он посетил всех четырёх?

**2.** Сколько существует чисел, не превосходящих 1000, которые  
а) делятся одновременно на 6 и на 15;  
б) делятся на 6 или на 15?

**3.** Сколько существует чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся ни на 9, ни на 10, ни на 30?

**4.** Сколько существует чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся ни на 5, ни на 7, ни на 11?

**5.** На каждой стороне треугольника  $ABC$  отмечено по 9 точек, разбивающих ее на 10 равных частей. Рассмотрим всевозможные треугольники с вершинами в отмеченных точках (по одной на каждой стороне). Сколько среди этих треугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна сторонам треугольника  $ABC$ ?

**6.** Во сколько натуральных чисел, не превосходящих 1000, входит цифра 9? Во сколько чисел она входит дважды?

**7.** Во сколько целых чисел от 0 до 1000 входит цифра 0? Во сколько чисел она входит дважды?

8. Во сколько целых чисел от 0 до 1000 входит цифра 8? Во сколько чисел она входит дважды?
9. Сколько чисел от 1 до 1000 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?
10. "Ранним утром улыбающийся Игорь мчался босиком на рыбалку". Сколько различных осмысленных предложений можно составить, используя часть слов этого предложения, но не изменяя порядок их следования?
11. "Четыре усталых молчаливых путника долго пережидали внезапно разразившуюся грозу". Сколько различных осмысленных предложений можно составить, используя часть слов этого предложения, но не изменяя порядок их следования?
12. "Ранним утром улыбающийся Игорь мчался босиком на рыбалку". Из этого предложения будем вычеркивать одно за другим слова так, чтобы всякий раз получалось осмысленное предложение. Каким числом способов можно прийти к предложению, из которого уже нельзя вычеркнуть ни одного слова?
13. "Четыре усталых молчаливых путника долго пережидали внезапно разразившуюся грозу". Из этого предложения будем вычеркивать одно за другим слова так, чтобы всякий раз получалось осмысленное предложение. Каким числом способов можно прийти к предложению, из которого уже нельзя вычеркнуть ни одного слова?
14. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы никакие две из них не били друг друга и чтобы ни одна ладья не стояла ни в одной угловой клетке?
15. Сколькими способами можно представить число  $10^6$  в виде произведения трёх натуральных множителей, если разложения, отличающиеся порядком множителей, считаются различными?
16. Сколькими способами можно построить в одну шеренгу 22 игрока двух футбольных команд так, чтобы при этом два футболиста одной команды не стояли рядом?
17. На каждой стороне треугольника  $ABC$  отмечено по 7 точек, разбивающих ее на 8 равных частей. Рассмотрим всевозможные треугольники с вершинами в отмеченных точках (по одной на каждой стороне). Сколько среди этих треугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна сторонам треугольника  $ABC$ ?

**18.** Лифт, в котором находится 9 пассажиров, может останавливаться на 10 этажах. Пассажиры выходят группами в 2, 3 и 4 человека. Сколькими способами это может произойти?

**19.** Сколько существует 8-значных чисел, сумма цифр которых нечётна?

**20.** Сколько есть 5-значных чисел, в десятичной записи которых есть одинаковые цифры?

**21.** Сколько целых чисел от 0 до 1 000 000 содержат каждую из цифр 1, 2, 3? Сколько чисел состоит только из этих цифр?

**22.** Сколькими способами можно посадить за круглым столом 7 мужчин и 7 женщин так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом?

**23.** Сколько есть нечётных 5-значных чисел, в десятичной записи которых нет одинаковых цифр?

**24.** Сколько чисел от 1 до 10000 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?

**25.** Сколькими способами можно представить число  $10^5$  в виде произведения трёх натуральных множителей, если разложения, отличающиеся порядком множителей, считаются различными?

**26.** Сколько существует четырёхзначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

**27.** Сколько существует пятизначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

**28.** Сколько существует шестизначных чисел, у которых каждая следующая цифра не меньше предыдущей?

**29.** Сколько существует семизначных чисел, у которых каждая следующая цифра не больше предыдущей?

**30.** Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 6 одинаковых ладей так, чтобы никакие две из них не били друг друга?

**31.** Сколько существует девятизначных чисел, кратных 11, в десятичной записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 8?

**32.** Сколько существует десятизначных чисел, кратных 11, в десятичной записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

## Задача 5

Найти общее решение рекуррентного соотношения; выделить частное решение по заданным начальным условиям.

- |     |  |                                 |
|-----|--|---------------------------------|
| 1)  | $a_{n+3} = 5a_{n+2} - 7a_{n+1} + 3a_n;$      | $a_0 = 1, a_1 = 6, a_2 = 19;$   |
| 2)  | $a_{n+3} = a_{n+2} + 5a_{n+1} + 3a_n;$       | $a_0 = 3, a_1 = 3, a_2 = 23;$   |
| 3)  | $a_{n+3} + a_{n+2} - 5a_{n+1} + 3a_n = 0;$   | $a_0 = 3, a_1 = 0, a_2 = 13;$   |
| 4)  | $a_{n+3} = 5a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n;$      | $a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 7;$    |
| 5)  | $a_{n+3} + 5a_{n+2} + 8a_{n+1} + 4a_n = 0;$  | $a_0 = 3, a_1 = -5, a_2 = 11;$  |
| 6)  | $a_{n+3} + 4a_{n+2} + 5a_{n+1} + 2a_n = 0;$  | $a_0 = 3, a_1 = -8, a_2 = 16;$  |
| 7)  | $a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_{n+1} - 3a_n = 0;$   | $a_0 = 6, a_1 = -4, a_2 = 22;$  |
| 8)  | $a_{n+3} = 8a_{n+2} - 21a_{n+1} + 18a_n;$    | $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 13;$   |
| 9)  | $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 4a_n;$                 | $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 13;$   |
| 10) | $a_{n+3} = 3a_{n+1} + 2a_n;$                 | $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 7;$    |
| 11) | $a_{n+3} = 8a_{n+2} - 13a_{n+1} + 6a_n;$     | $a_0 = 3, a_1 = 12, a_2 = 71;$  |
| 12) | $a_{n+3} = 7a_{n+2} - 16a_{n+1} + 12a_n;$    | $a_0 = 0, a_1 = 4, a_2 = 18;$   |
| 13) | $a_{n+3} + 8a_{n+2} + 13a_{n+1} + 6a_n = 0;$ | $a_0 = -1, a_1 = -5, a_2 = 36;$ |
| 14) | $a_{n+3} = a_{n+2} + 8a_{n+1} - 12a_n;$      | $a_0 = 1, a_1 = -6, a_2 = 22;$  |
| 15) | $a_{n+3} + a_{n+2} - 8a_{n+1} - 12a_n = 0;$  | $a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 5;$    |
| 16) | $a_{n+3} + a_{n+2} - 4a_{n+1} - 4a_n = 0;$   | $a_0 = 3, a_1 = 1, a_2 = 3;$    |
| 17) | $a_{n+3} + a_{n+2} - 9a_{n+1} - 9a_n = 0;$   | $a_0 = 2, a_1 = 4, a_2 = 2;$    |
| 18) | $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n;$      | $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 9;$    |
| 19) | $a_{n+3} = 3a_{n+1} - 2a_n;$                 | $a_0 = 3, a_1 = 2, a_2 = 10;$   |
| 20) | $a_{n+3} = 3a_{n+1} + 2a_n;$                 | $a_0 = 5, a_1 = -3, a_2 = 10;$  |
| 21) | $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n;$     | $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 6;$    |
| 22) | $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 5a_{n+1} - 6a_n;$      | $a_0 = 2, a_1 = 9, a_2 = 15;$   |
| 23) | $a_{n+3} = 7a_{n+1} - 6a_n;$                 | $a_0 = 2, a_1 = 8, a_2 = 0;$    |
| 24) | $a_{n+3} + 4a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 0;$   | $a_0 = 5, a_1 = -6, a_2 = 24;$  |
| 25) | $a_{n+3} + 6a_{n+2} + 11a_{n+1} + 6a_n = 0;$ | $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -4;$   |
| 26) | $a_{n+3} + 2a_{n+2} - 5a_{n+1} - 6a_n = 0;$  | $a_0 = 4, a_1 = 0, a_2 = 18;$   |
| 27) | $a_{n+3} = 4a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n;$       | $a_0 = 5, a_1 = 10, a_2 = 32;$  |

- 28)  $a_{n+4} = -2a_{n+3} + 2a_{n+1} + a_n$ ;  $a_0 = a_1 = 2, a_2 = 10, a_3 = -14$ ;  
 29)  $a_{n+4} = 2a_{n+3} - 2a_{n+1} + a_n$ ;  $a_0 = 5, a_1 = 0, a_2 = 9, a_3 = 8$ ;  
 30)  $a_{n+4} = 8a_{n+2} - 16a_n$ ;  $a_0 = 2, a_1 = 4, a_2 = 24, a_3 = 16$ ;  
 31)  $a_{n+4} = 5a_{n+2} - 4a_n$ ;  $a_0 = 8, a_1 = 0, a_2 = 26, a_3 = 0$ ;  
 32)  $a_{n+4} = 2a_{n+2} - a_n$ ;  $a_0 = -2, a_1 = 3, a_2 = 12, a_3 = 9$ .

## Задача 6

**1 – 6.** Сколькими способами можно раскрасить рёбра куба, который может свободно вращаться в пространстве, так, чтобы получилось  $x$  красных,  $y$  синих и  $z$  зелёных рёбер?

- 1)  $x = 3, y = 4, z = 5$ ;    2)  $x = y = z = 4$ ;  
 3)  $x = 1, y = 5, z = 6$ ;    4)  $x = y = 2, z = 8$ ;  
 5)  $x = 2, y = 4, z = 6$ ;    6)  $x = y = 3, z = 6$ .

**7 – 12.** Составляются ожерелья из  $x$  красных,  $y$  зелёных и  $z$  синих бусин. Сколько всего таких ожерелий, если не различать ожерелья, получающиеся друг из друга поворотом в пространстве?

- 7)  $x = y = 2, z = 3$ ;    8)  $x = y = 2, z = 4$ ;  
 9)  $x = 1, y = z = 4$ ;    10)  $x = y = 3, z = 4$ ;  
 11)  $x = y = z = 3$ ;    12)  $x = 2, y = 3, z = 4$ .

**13 – 18.** Составляются ожерелья из  $x$  красных,  $y$  зелёных и  $z$  синих бусин. Сколько всего таких ожерелий, если не различать ожерелья, получающиеся друг из друга поворотом в плоскости?

- 13)  $x = y = 2, z = 3$ ;    14)  $x = y = 2, z = 4$ ;  
 15)  $x = 1, y = z = 4$ ;    16)  $x = y = 3, z = 4$ ;  
 17)  $x = y = z = 3$ ;    18)  $x = 2, y = 3, z = 4$ .

**19.** Сколькими способами можно раскрасить в  $k$  цветов вершины икосаэдра, который может свободно вращаться в пространстве?

**20.** Сколькими способами можно раскрасить в  $k$  цветов рёбра икосаэдра, который может свободно вращаться в пространстве?



**21.** Сколькими способами можно раскрасить в  $k$  цветов грани икосаэдра, который может свободно вращаться в пространстве?

**22.** Сколькими способами можно раскрасить в  $k$  цветов рёбра додекаэдра, который может свободно вращаться в пространстве?

**23.** Сколькими способами можно раскрасить в  $k$  цветов грани додекаэдра, который может свободно вращаться в пространстве?

**24 – 32.** Найти число существенно различных способов размещения  $x$  одинаковых пометок на клетчатом поле размера  $y \times y$ . Два способа разметки считаются существенно различными, если их нельзя преобразовать друг в друга вращением поля или отражением относительно любой из четырёх осей симметрии.

**24)**  $x = y = 4$ ;      **25)**  $x = 6, y = 5$ ;      **26)**  $x = 8, y = 4$ ;

**27)**  $x = 7, y = 5$ ;      **28)**  $x = y = 5$ ;      **29)**  $x = 5, y = 4$ ;

**30)**  $x = 6, y = 4$ ;      **31)**  $x = 7, y = 4$ ;      **32)**  $x = y = 6$ .

## Глава 4

# Теория графов

### Задача 1

В графе (рис. 1а для вариантов 1–16 и рис.1б для вариантов 17–32)

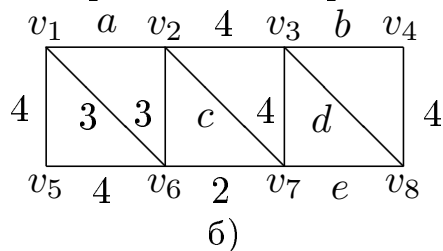
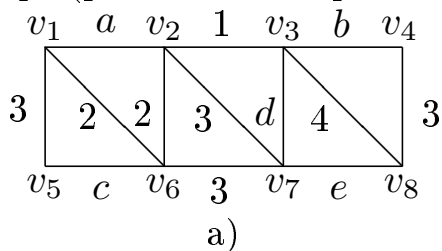


Рис. 1

с помощью алгоритма Прима найти стягивающее дерево минимального веса (в таблице указаны веса некоторых рёбер).

| Вариант   | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| <b>1</b>  | 1   | 2   | 1   | 2   | 1   |
| <b>2</b>  | 1   | 4   | 7   | 2   | 2   |
| <b>3</b>  | 1   | 6   | 1   | 7   | 3   |
| <b>4</b>  | 2   | 5   | 1   | 2   | 4   |
| <b>5</b>  | 2   | 3   | 1   | 2   | 5   |
| <b>6</b>  | 4   | 5   | 8   | 9   | 1   |
| <b>7</b>  | 6   | 7   | 1   | 8   | 2   |
| <b>8</b>  | 5   | 7   | 1   | 2   | 3   |
| <b>9</b>  | 1   | 2   | 8   | 2   | 4   |
| <b>10</b> | 1   | 4   | 8   | 2   | 5   |
| <b>11</b> | 1   | 6   | 1   | 8   | 1   |
| <b>12</b> | 2   | 5   | 1   | 2   | 2   |
| <b>13</b> | 2   | 3   | 1   | 9   | 3   |
| <b>14</b> | 4   | 5   | 9   | 2   | 4   |
| <b>15</b> | 6   | 7   | 2   | 9   | 5   |
| <b>16</b> | 5   | 7   | 8   | 2   | 1   |

| Вариант   | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| <b>17</b> | 4   | 2   | 2   | 1   | 1   |
| <b>18</b> | 1   | 4   | 6   | 4   | 2   |
| <b>19</b> | 1   | 6   | 9   | 7   | 3   |
| <b>20</b> | 2   | 5   | 9   | 7   | 4   |
| <b>21</b> | 2   | 3   | 9   | 4   | 1   |
| <b>22</b> | 4   | 5   | 9   | 4   | 2   |
| <b>23</b> | 6   | 7   | 9   | 1   | 3   |
| <b>24</b> | 5   | 7   | 9   | 1   | 4   |
| <b>25</b> | 1   | 2   | 7   | 9   | 1   |
| <b>26</b> | 1   | 4   | 7   | 9   | 2   |
| <b>27</b> | 1   | 6   | 7   | 4   | 3   |
| <b>28</b> | 2   | 5   | 7   | 4   | 4   |
| <b>29</b> | 2   | 3   | 7   | 1   | 1   |
| <b>30</b> | 4   | 5   | 7   | 1   | 2   |
| <b>31</b> | 6   | 7   | 4   | 9   | 3   |
| <b>32</b> | 5   | 7   | 4   | 9   | 4   |

## Задача 2

В графе (рис. 2а для вариантов 1–16 и рис.2б для вариантов 17–32)

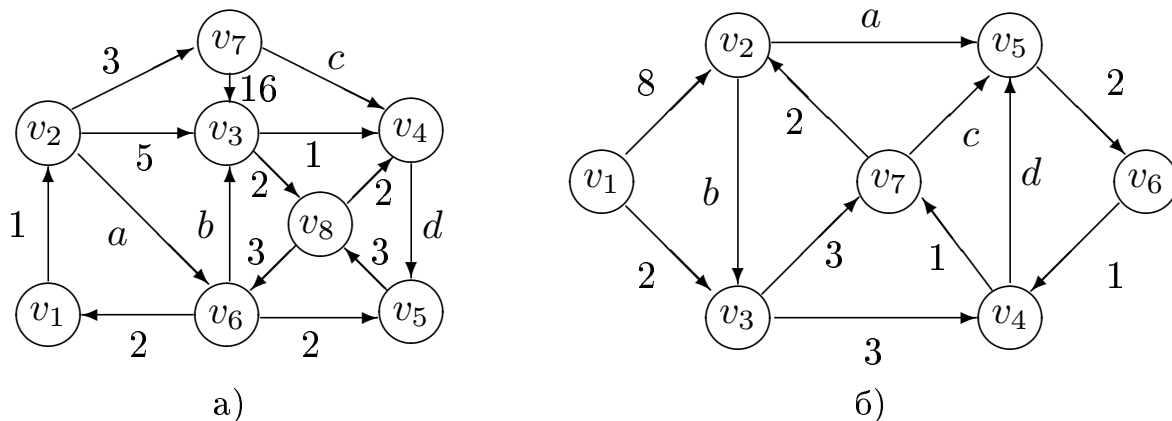


Рис. 2

с помощью алгоритма Дейкстры найти кратчайший путь от  $i$ -й вершины до всех остальных (в таблице указаны номер  $i$  и веса некоторых дуг).

| Вариант   | $i$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| <b>1</b>  | 7   | 1   | 2   | 3   | 4   |
| <b>2</b>  | 2   | 7   | 2   | 3   | 4   |
| <b>3</b>  | 3   | 1   | 7   | 3   | 2   |
| <b>4</b>  | 6   | 1   | 2   | 7   | 4   |
| <b>5</b>  | 8   | 1   | 2   | 3   | 7   |
| <b>6</b>  | 7   | 3   | 9   | 3   | 4   |
| <b>7</b>  | 2   | 1   | 8   | 1   | 4   |
| <b>8</b>  | 3   | 1   | 2   | 8   | 3   |
| <b>9</b>  | 6   | 3   | 2   | 1   | 4   |
| <b>10</b> | 8   | 3   | 2   | 3   | 3   |
| <b>11</b> | 7   | 1   | 8   | 3   | 2   |
| <b>12</b> | 2   | 1   | 2   | 2   | 3   |
| <b>13</b> | 3   | 1   | 9   | 7   | 8   |
| <b>14</b> | 6   | 3   | 2   | 2   | 3   |
| <b>15</b> | 8   | 3   | 9   | 3   | 8   |
| <b>16</b> | 7   | 3   | 9   | 1   | 2   |

| Вариант   | $i$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| <b>17</b> | 2   | 4   | 2   | 2   | 1   |
| <b>18</b> | 3   | 6   | 4   | 2   | 1   |
| <b>19</b> | 7   | 9   | 7   | 4   | 1   |
| <b>20</b> | 1   | 9   | 7   | 1   | 4   |
| <b>21</b> | 4   | 9   | 4   | 7   | 1   |
| <b>22</b> | 2   | 9   | 4   | 1   | 7   |
| <b>23</b> | 3   | 9   | 1   | 4   | 7   |
| <b>24</b> | 7   | 9   | 1   | 7   | 4   |
| <b>25</b> | 1   | 7   | 9   | 1   | 4   |
| <b>26</b> | 4   | 7   | 9   | 4   | 1   |
| <b>27</b> | 2   | 7   | 4   | 1   | 9   |
| <b>28</b> | 3   | 7   | 4   | 9   | 1   |
| <b>29</b> | 7   | 7   | 1   | 9   | 4   |
| <b>30</b> | 1   | 7   | 1   | 4   | 9   |
| <b>31</b> | 4   | 4   | 9   | 7   | 1   |
| <b>32</b> | 2   | 4   | 9   | 1   | 7   |

### Задача 3

Пусть проект описывается взвешенным графом (рис. 3а для вариантов 1–16 и рис.3б для вариантов 17–32) где дуги соответствуют операциям (этапам) проекта, а вес дуги обозначает время выполнения соответствующей операции.

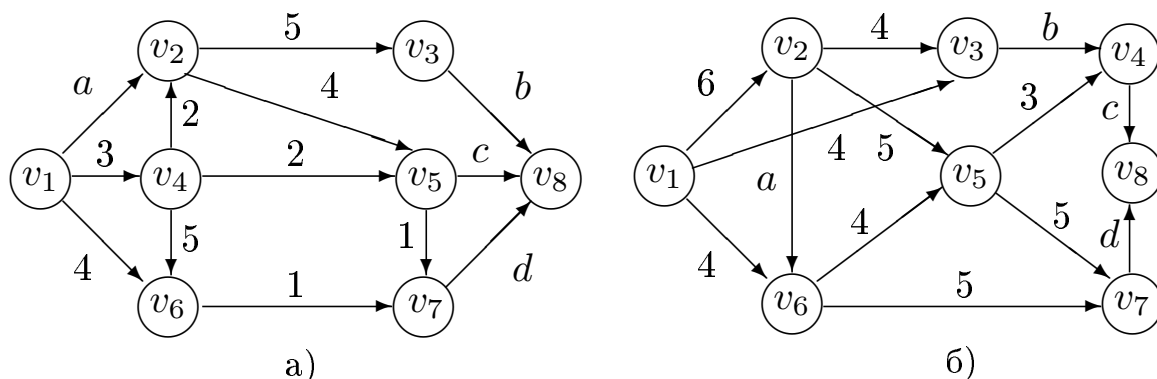


Рис. 3

Найти наименьшее время выполнения проекта, критические пути и резерв времени для выполнения операции  $v_i \rightarrow v_j$  (в таблице указаны номера  $i$  и  $j$  и веса некоторых дуг).

| Вариант   | $i$ | $j$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | Вариант   | $i$ | $j$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| <b>1</b>  | 1   | 2   | 4   | 2   | 2   | 1   | <b>17</b> | 1   | 2   | 1   | 2   | 3   | 4   |
| <b>2</b>  | 1   | 4   | 6   | 4   | 2   | 1   | <b>18</b> | 1   | 4   | 7   | 2   | 3   | 4   |
| <b>3</b>  | 1   | 6   | 9   | 7   | 4   | 1   | <b>19</b> | 1   | 6   | 1   | 7   | 3   | 4   |
| <b>4</b>  | 2   | 5   | 9   | 7   | 1   | 4   | <b>20</b> | 2   | 5   | 1   | 2   | 7   | 4   |
| <b>5</b>  | 2   | 3   | 9   | 4   | 7   | 1   | <b>21</b> | 2   | 3   | 1   | 2   | 3   | 7   |
| <b>6</b>  | 4   | 5   | 9   | 4   | 1   | 7   | <b>22</b> | 4   | 5   | 8   | 9   | 3   | 4   |
| <b>7</b>  | 6   | 7   | 9   | 1   | 4   | 7   | <b>23</b> | 6   | 7   | 1   | 8   | 9   | 4   |
| <b>8</b>  | 5   | 7   | 9   | 1   | 7   | 4   | <b>24</b> | 5   | 7   | 1   | 2   | 8   | 9   |
| <b>9</b>  | 1   | 2   | 7   | 9   | 1   | 4   | <b>25</b> | 1   | 2   | 8   | 2   | 9   | 4   |
| <b>10</b> | 1   | 4   | 7   | 9   | 4   | 1   | <b>26</b> | 1   | 4   | 8   | 2   | 3   | 9   |
| <b>11</b> | 1   | 6   | 7   | 4   | 1   | 9   | <b>27</b> | 1   | 6   | 1   | 8   | 3   | 9   |
| <b>12</b> | 2   | 5   | 7   | 4   | 9   | 1   | <b>28</b> | 2   | 5   | 1   | 2   | 8   | 9   |
| <b>13</b> | 2   | 3   | 7   | 1   | 9   | 4   | <b>29</b> | 2   | 3   | 1   | 9   | 7   | 8   |
| <b>14</b> | 4   | 5   | 7   | 1   | 4   | 9   | <b>30</b> | 4   | 5   | 9   | 2   | 9   | 8   |
| <b>15</b> | 6   | 7   | 4   | 9   | 7   | 1   | <b>31</b> | 6   | 7   | 8   | 9   | 3   | 8   |
| <b>16</b> | 5   | 7   | 4   | 9   | 1   | 7   | <b>32</b> | 5   | 7   | 8   | 9   | 9   | 2   |

## Задача 4

Найти максимальный поток и минимальный разрез в транспортной сети (рис. 4). Число рядом с дугой есть её пропускная способность.

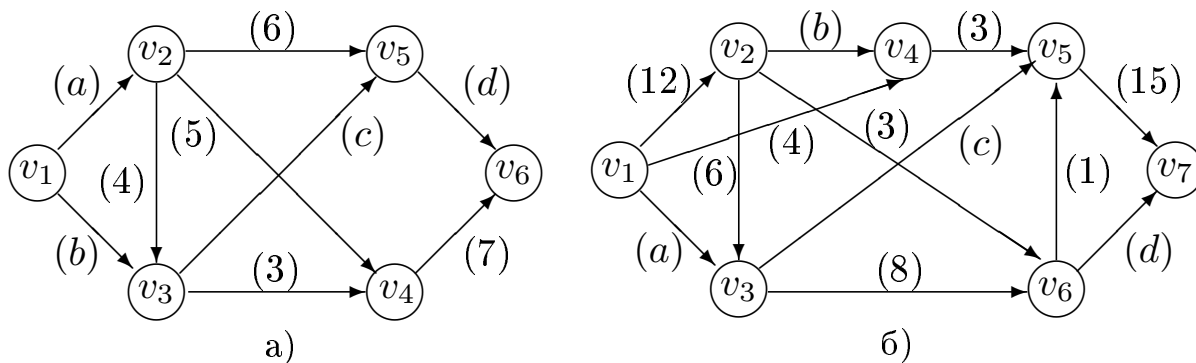


Рис. 4

В таблице указаны пропускные способности некоторых дуг.

| Вариант   | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|-----------|-----|-----|-----|-----|
| <b>1</b>  | 4   | 2   | 2   | 1   |
| <b>2</b>  | 1   | 4   | 6   | 4   |
| <b>3</b>  | 1   | 6   | 9   | 7   |
| <b>4</b>  | 2   | 5   | 9   | 7   |
| <b>5</b>  | 2   | 3   | 9   | 4   |
| <b>6</b>  | 4   | 5   | 9   | 4   |
| <b>7</b>  | 6   | 7   | 9   | 1   |
| <b>8</b>  | 5   | 7   | 9   | 1   |
| <b>9</b>  | 1   | 2   | 7   | 9   |
| <b>10</b> | 1   | 4   | 7   | 9   |
| <b>11</b> | 1   | 6   | 7   | 4   |
| <b>12</b> | 2   | 5   | 7   | 4   |
| <b>13</b> | 2   | 3   | 7   | 1   |
| <b>14</b> | 4   | 5   | 7   | 1   |
| <b>15</b> | 6   | 7   | 4   | 9   |
| <b>16</b> | 5   | 7   | 4   | 9   |

| Вариант   | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|-----------|-----|-----|-----|-----|
| <b>17</b> | 1   | 2   | 1   | 2   |
| <b>18</b> | 1   | 4   | 7   | 2   |
| <b>19</b> | 1   | 6   | 1   | 7   |
| <b>20</b> | 2   | 5   | 1   | 2   |
| <b>21</b> | 2   | 3   | 1   | 2   |
| <b>22</b> | 4   | 5   | 8   | 9   |
| <b>23</b> | 6   | 7   | 1   | 8   |
| <b>24</b> | 5   | 7   | 1   | 2   |
| <b>25</b> | 1   | 2   | 8   | 2   |
| <b>26</b> | 1   | 4   | 8   | 2   |
| <b>27</b> | 1   | 6   | 1   | 8   |
| <b>28</b> | 2   | 5   | 1   | 2   |
| <b>29</b> | 2   | 3   | 1   | 9   |
| <b>30</b> | 4   | 5   | 9   | 2   |
| <b>31</b> | 6   | 7   | 8   | 9   |
| <b>32</b> | 5   | 7   | 8   | 9   |

## Задача 5

Восстановить дерево по коду Прюфера

- |                             |                                |                                |
|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| <b>1)</b> (1, 2, 2, 7, 4);  | <b>12)</b> (1, 2, 8, 7, 6, 1); | <b>23)</b> (2, 8, 2, 4, 6, 2); |
| <b>2)</b> (1, 2, 1, 6, 1);  | <b>13)</b> (3, 2, 2, 2, 5, 2); | <b>24)</b> (5, 2, 3, 2, 5, 2); |
| <b>3)</b> (2, 2, 4, 6, 4);  | <b>14)</b> (3, 8, 7, 2, 2, 5); | <b>25)</b> (1, 6, 5, 6, 1, 5); |
| <b>4)</b> (3, 2, 2, 7, 3);  | <b>15)</b> (3, 2, 1, 2, 7, 3); | <b>26)</b> (3, 2, 3, 4, 2, 5); |
| <b>5)</b> (1, 2, 2, 4, 4);  | <b>16)</b> (8, 1, 2, 2, 7, 4); | <b>27)</b> (3, 2, 7, 2, 2, 5); |
| <b>6)</b> (2, 2, 4, 6, 1);  | <b>17)</b> (2, 2, 4, 8, 8, 4); | <b>28)</b> (1, 6, 1, 2, 6, 1); |
| <b>7)</b> (3, 5, 2, 7, 3);  | <b>18)</b> (3, 2, 3, 2, 5, 3); | <b>29)</b> (2, 2, 4, 6, 7, 4); |
| <b>8)</b> (2, 2, 4, 6, 5);  | <b>19)</b> (1, 6, 1, 6, 1, 2); | <b>30)</b> (1, 2, 1, 7, 6, 1); |
| <b>9)</b> (3, 2, 1, 2, 7);  | <b>20)</b> (3, 2, 7, 2, 5, 3); | <b>31)</b> (2, 8, 2, 4, 6, 2); |
| <b>10)</b> (7, 1, 2, 2, 7); | <b>21)</b> (1, 2, 4, 6, 1, 1); | <b>32)</b> (3, 6, 1, 2, 6, 1). |
| <b>11)</b> (2, 2, 4, 6, 2); | <b>22)</b> (3, 2, 3, 4, 2, 5); |                                |

## Задача 6

Найти наибольшее паросочетание и наименьшее вершинное покрытие в двудольном графе с матрицей смежности

- |   |   |
|---|---|
| <b>1)</b> $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$ | <b>2)</b> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$ |
| <b>3)</b> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$ | <b>4)</b> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$ |
| <b>5)</b> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$ | <b>6)</b> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$ |







$$31) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 32) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Задача 7

Решить задачу о назначениях для двудольного графа с матрицей

веса

$$\begin{aligned} 1) & \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 5 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 8 & 1 \\ 6 & 7 & 9 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 & 7 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 6 & 9 & 3 \\ 9 & 2 & 1 & 5 & 2 \\ 8 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 8 & 8 & 6 & 8 & 9 \\ 1 & 8 & 4 & 9 & 3 \\ 8 & 2 & 8 & 2 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 5 & 6 \\ 2 & 9 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}; \\ 4) & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 9 & 7 \\ 4 & 9 & 6 & 6 & 2 \\ 3 & 8 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}; \quad 5) \begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 3 & 8 & 6 \\ 7 & 2 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad 6) \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \\ 7) & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 8 \\ 8 & 4 & 8 & 5 & 4 \\ 7 & 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 8) \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 1 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \\ 9 & 6 & 2 & 8 & 1 \\ 7 & 6 & 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}; \quad 9) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 8 & 8 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 8 & 6 \\ 8 & 7 & 1 & 1 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \\ 10) & \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 9 & 6 \\ 7 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 9 \\ 9 & 9 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}; \quad 11) \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 5 & 8 \\ 8 & 6 & 8 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 9 & 4 & 4 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}; \quad 12) \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 9 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 8 & 6 \\ 9 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \\ 13) & \begin{pmatrix} 9 & 6 & 8 & 4 & 1 \\ 7 & 9 & 8 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 2 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 2 & 2 & 9 \\ 5 & 8 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad 14) \begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 2 & 2 \\ 8 & 9 & 6 & 9 & 4 \\ 7 & 7 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad 15) \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & 1 & 8 \\ 1 & 7 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}; \\ 16) & \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 5 & 7 \\ 9 & 3 & 9 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 7 & 5 & 9 \\ 4 & 5 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}; \quad 17) \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 7 & 7 & 3 \\ 6 & 1 & 6 & 8 & 2 \\ 7 & 8 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}; \quad 18) \begin{pmatrix} 4 & 4 & 9 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 7 & 8 & 7 & 7 \\ 9 & 4 & 8 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{19)} \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \mathbf{20)} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 9 & 9 \\ 4 & 1 & 7 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 9 & 2 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}; \mathbf{21)} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & 8 & 3 & 9 \\ 6 & 2 & 6 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 4 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 8 & 1 & 8 \end{pmatrix}; \\
& \mathbf{22)} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 9 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 9 & 6 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 9 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}; \mathbf{23)} \begin{pmatrix} 9 & 8 & 9 & 5 & 9 \\ 1 & 6 & 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 3 & 9 & 2 \\ 2 & 9 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}; \mathbf{24)} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 9 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \\
& \mathbf{25)} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 8 & 3 & 6 \end{pmatrix}; \mathbf{26)} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 7 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 8 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \mathbf{27)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 7 & 6 \\ 8 & 1 & 9 & 5 & 5 \\ 8 & 9 & 7 & 9 & 9 \end{pmatrix}; \\
& \mathbf{28)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 4 & 9 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{29)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 8 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 2 & 5 & 1 \\ 8 & 8 & 7 & 9 & 2 \\ 7 & 1 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{30)} \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 4 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 9 & 8 & 7 \\ 8 & 4 & 9 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}; \\
& \mathbf{31)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 9 & 8 \\ 4 & 7 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 9 & 8 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}; \mathbf{32)} \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 & 2 & 4 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 6 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 8 \\ 5 & 5 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

# Библиографический список

1. Виленкин, Н. Я. *Комбинаторика* / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. — 400 с.
2. *Вся высшая математика: учебник* / М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко и др. — М.: КомКнига, 2012. — Т.7 — 208 с.
3. Деза, Е. И. *Основы дискретной математики* / Е. И. Деза, Д. Л. Модель. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. — 224 с.
4. Деза, Е. И. *Сборник задач по теории чисел* / Е. И. Деза, Л. В. Котова. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. — 224 с.
5. Зуев, Ю. А. *По океану дискретной математики: в 2 т.* / Ю. А. Зуев. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. — Т. 1. — 274 с.; Т. 2. — 368 с.
6. Ландо, С. К. *Введение в дискретную математику* / С. К. Ландо. — М.: МЦНМО, 2012. — 265 с.
7. Нестеренко, Ю. В. *Теория чисел* / Ю. В. Нестеренко. — М.: Издательский центр «Академия», 2008. — 272 с.
8. Сизый, С. В. *Лекции по теории чисел* / С. В. Сизый. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 192 с.
9. *Теория графов в задачах и упражнениях* / В. А. Емеличев, И. Э. Зверович, О. И. Мельников и др. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 416 с.
10. Эвнин, А. Ю. *Вокруг теоремы Холла* / А. Ю. Эвнин. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. — 88 с.
11. Эвнин, А. Ю. *Дискретная математика: Конспект лекций* / А. Ю. Эвнин. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 1998. — 176 с.
12. Эвнин, А. Ю. *Задачник по дискретной математике. 2-е изд., перераб. и доп.* / А. Ю. Эвнин. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2002. — 164 с.
13. Эвнин, А. Ю. *Задачник по дискретной математике. 5-е изд.* / А. Ю. Эвнин. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. — 264 с.
14. Эвнин, А. Ю. *Элементы теории чисел* / А. Ю. Эвнин. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. — 54 с.
15. Эвнин, А. Ю. *Элементы дискретной оптимизации* / А. Ю. Эвнин. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. — 92 с.

**Эвнин Александр Юрьевич**

**ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ  
ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ**

Учебное пособие

Техн. редактор *А. В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского  
государственного университета

Подписано в печать 24.09.2013. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 2,09. Тираж 100 экз. Заказ 343/12.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.  
454080, г. Челябинск, пр. им. В. И. Ленина, 76.