

Решения задач по двузначной логике

Ф.Г. Кораблев

Задача 1. Для функции

$$f(x, y, z) = ((x \rightarrow \bar{y}) \vee (x \sim z)) \rightarrow (z \rightarrow \bar{x})$$

найти существенные и фиктивные переменные, произвести операцию исключения фиктивных переменных.

Решение. Построим таблицу для функции $f(x, y, z)$:

x	y	z	\bar{y}	$x \rightarrow \bar{y}$	$x \sim z$	$(x \rightarrow \bar{y}) \vee (x \sim z)$	\bar{x}	$z \rightarrow \bar{x}$	$f(x, y, z)$
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0

Для каждой переменной x, y и z необходимо проверить фиктивна она или нет. Начнем с переменной x . Будем перебирать все пары наборов, соседних по первой координате, и сравнивать значения функции $f(x, y, z)$ на них. Сразу обнаруживается, что наборы $(0, 0, 1)$ и $(1, 0, 1)$ являются соседними по первой координате, но $f(0, 0, 1) = 1$ и $f(1, 0, 1) = 0$. Следовательно переменная x является существенной для функции $f(x, y, z)$.

Перебирая все пары наборов, соседних по второй координате, получаем, что значения функции на каждой паре совпадают. В самом деле:

$$f(0, 0, 0) = f(0, 1, 0) = 1$$

$$\begin{aligned}f(0, 0, 1) &= f(0, 1, 1) = 1 \\f(1, 0, 0) &= f(1, 1, 0) = 1 \\f(1, 0, 1) &= f(1, 1, 1) = 0\end{aligned}$$

Следовательно, переменная y является фиктивной.

Переменная z существенна, так как наборы $(1, 1, 0)$ и $(1, 1, 1)$ являются соседними по третьей координате, но $f(1, 1, 0) = 1$ и $f(1, 1, 1) = 0$.

Исключив фиктивную переменную y , получим следующую функцию:

x	z	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Это функция штрих Шеффера $f(x, z) = x|z$.

Ответ. Переменные x и z существенные, переменная y фиктивна.

□

Задача 2. Эквивалентными преобразованиями доказать эквивалентность формул

$$(\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (x + y) \text{ и } x|y.$$

Решение. Штрих Шеффера допускает представление через конъюнкцию и отрицание следующим образом:

$$x|y = \overline{x \wedge y}.$$

Основная идея доказательства эквивалентности данных формул состоит в представлении первой функции тоже только через конъюнкцию и отрицание.

Дана формула $(\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (x + y)$. Замени обе импликации:

$$(\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (x + y) = \overline{(\bar{x} \rightarrow y)} \vee (x + y) = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \vee (x + y) =$$

Воспользуемся эквивалентностью $x + y = \overline{x \sim y} = \overline{(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)}$, получим:

$$= \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \vee \overline{(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)} =$$

Теперь применим правило де Моргана:

$$= (\overline{\bar{x} \vee \bar{y}}) \wedge (\overline{(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)}) =$$

Под отрицанием раскрываем скобки по дистрибутивности конъюнкции и дизъюнкции:

$$= \overline{(x \wedge ((\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y))) \vee (y \wedge ((\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)))} = \\ = \overline{(x \wedge \bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)} =$$

Так как $x \wedge \bar{x} = 0$, то первое и третье слагаемое под отрицанием можно убрать (дизъюнкция с нулем не меняет функции). Также одно из двух одинаковых слагаемых можно отбросить, так как $a \vee a = a$ для любой функции a . В итоге получим:

$$= \overline{x \wedge y} = x|y. \text{ Эквивалентность доказана. } \square$$

Задача 3. С помощью таблицы построить СКНФ и СДНФ для следующей функции, заданной формулой:

$$f(x, y) = ((x + y) \sim (\bar{y} \rightarrow x)) \wedge ((\overline{x \wedge y} \rightarrow y) \vee (x \sim \bar{y})).$$

Решение. Построим таблицу данной функции:

x	y	$\bar{y} \rightarrow x$	$(x + y) \sim (\bar{y} \rightarrow x)$	$\overline{x \wedge y}$	$\overline{x \wedge y} \rightarrow y$	$x \sim \bar{y}$	$f(x, y)$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0

СДНФ функции строится по тем наборам, на которых функция принимает значение 1. В нашем случае таких набора два: $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Первому набору $(0, 1)$ сопоставляется элементарная конъюнкция $\bar{x} \wedge y$, а второму набору $(1, 0)$ сопоставляется элементарная конъюнкция $x \wedge \bar{y}$. Таким образом СДНФ данной функции имеет следующий вид:

$$f(x, y) = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$$

Для построения СКНФ также используются два набора: $(0, 0)$ и $(1, 1)$, это те наборы, на которых функция $f(x, y)$ принимает значение 0. Первому набору $(0, 0)$ сопоставляется элементарная дизъюнкция $x \vee y$, второму набору $(1, 1)$ сопоставляется $\bar{x} \vee \bar{y}$. СКНФ выглядит следующим образом:

$$f(x, y) = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}).$$

Ответ. $f(x, y) = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$;
 $f(x, y) = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$.

□

Задача 4. С помощью элементарных преобразований построить СКНФ функции, заданной формулой:

$$f(x, y, z) = (x \sim y) \vee (x \wedge \bar{z}).$$

Решение. В общем случае построить СКНФ функции можно, выполнив три шага

Шаг 1. Заменяем все функции, входящие в данную формулу, на их эквивалентные выражения через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

В нашем случае достаточно заменить только эквивалентность.

$$f(x, y, z) = (x \sim y) \vee (x \wedge \bar{z}) = ((x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)) \vee (x \wedge \bar{z}) =$$

Шаг 2. Приводим формулу к виду “почти” СКНФ, то есть к виду, когда некие дизъюнкции (не обязательно элементарные) соединены конъюнкциями. Делается это с использованием свойства дистрибутивности конъюнкции и дизъюнкции.

$$= (((x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)) \vee x) \wedge (((x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)) \vee \bar{z}) =$$

В каждой из двух скобок снова раскрываем скобки

$$= (x \vee x \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{x} \vee y) \wedge (\bar{z} \vee x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{z} \vee \bar{x} \vee y) =$$

скобки, содержащие $x \vee \bar{x}$ можно исключить из формулы, так как $x \vee \bar{x} = 1$, а конъюнктивное добавление единицы не меняет функции.

$$= (x \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) =$$

Шаг 3. В каждую из скобок добавляем недостающие переменные. Для случая, когда к формуле a надо добавить переменную x , совершаем следующие преобразования:

$$a = a \vee 0 = a \vee (x \wedge \bar{x}) = (a \vee x) \wedge (a \vee \bar{x}).$$

В нашем случае необходимо только к первой скобке добавить переменную z .

$$= (x \vee \bar{y} \vee 0) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) =$$

$$= (x \vee \bar{y} \vee (z \wedge \bar{z})) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) =$$

$$= (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}). \text{ СКНФ построена.}$$

Ответ. $f(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$.

□

Задача 5. С помощью таблицы и метода неопределенных коэффициентов построить полином Жегалкина для функции $f(x, y, z)$, заданной формулой:

$$f(x, y, z) = (x \vee y) \sim \bar{z}.$$

Решение. Построим таблицу функции $f(x, y, z)$:

x	y	z	$x \vee y$	\bar{z}	$(x \vee y) \sim \bar{z}$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Будем искать полином Жегалкина функции $f(x, y, z)$ в виде

$$f(x, y, z) = a_1xyz + a_2xy + a_3xz + a_4yz + a_5x + a_6y + a_7z + a_8.$$

Неопределенные коэффициенты a_1, \dots, a_8 найдем, используя известные значения функции $f(x, y, z)$ на всех возможных наборах аргументов. Необходимо найти восемь значений неизвестных, при этом и всевозможных наборов аргументов тоже восемь.

$$f(0, 0, 0) = a_8 = 0$$

$$f(0, 0, 1) = a_7 + a_8 = 1$$

$$f(0, 1, 0) = a_6 + a_8 = 1$$

$$f(0, 1, 1) = a_4 + a_6 + a_7 + a_8 = 0$$

$$f(1, 0, 0) = a_5 + a_8 = 1$$

$$f(1, 0, 1) = a_3 + a_5 + a_7 + a_8 = 0$$

$$f(1, 1, 0) = a_2 + a_5 + a_6 + a_8 = 1$$

$$f(1, 1, 1) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 0$$

Последовательно, от первого к восьмому уравнению, находим все неизвестные:

$$a_8 = 0, a_7 = 1, a_6 = 1, a_4 = 0, a_5 = 1, a_3 = 0, a_2 = 1, a_1 = 0.$$

Теперь можно выписать полином Жегалкина для функции $f(x, y, z)$, подставив найденные значения неизвестных a_1, \dots, a_8 в общий вид полинома:

$$f(x, y, z) = xy + x + y + z.$$

Ответ. $f(x, y, z) = xy + x + y + z$

□

Задача 6. С помощью элементарных преобразований найти полином Жегалкина для функции $f(x, y, z)$, заданной формулой:

$$f(x, y, z) = \overline{x \vee y} \rightarrow z.$$

Решение. Построение полинома Жегалкина для произвольной функции можно в общем случае разбить на два шага.

Шаг 1. С помощью элементарных преобразований приводим формулу функции $f(x, y, z)$ к виду, в котором используются только две функции: конъюнкция и отрицание. Общий метод такого приведения заключается в выражении всех функций формулы через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание, и последующем применении правила де Моргана.

$$f(x, y, z) = \overline{x \vee y} \rightarrow z = x \vee y \vee z = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \vee z = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}} =$$

Шаг 2. Применяем основную эквивалентность $\overline{x} = x + 1$, после чего раскрываем скобки, используя свойство дистрибутивности конъюнкции и сложения:

$$\begin{aligned} &= ((x + 1) \wedge (y + 1)) \wedge (z + 1) + 1 = \\ &= (xy + x + y + 1)(z + 1) + 1 = xyz + xy + xz + yz + x + y + z. \end{aligned}$$

Ответ. $f(x, y, z) = xyz + xy + xz + yz + x + y + z.$

□

Задача 7. Сведением к заведомо полной системе доказать полноту системы функций :

$$\{x \wedge y + z, (x \sim y) + z\}.$$

Решение. Обозначим $f_1(x, y, z) = x \wedge y + z$ и $f_2(x, y, z) = (x \sim y) + z$. Если с самого начала не ясно, какую систему функций использовать в качестве заведомо полной, надо попытаться выразить как можно больше функций через две данные, а потом уже из выраженных функций попытаться сконструировать заведомо полную систему.

С помощью функции $f_1(x, y, z)$ получим тождественный ноль:

$$0 = x + x = x \wedge x + x = f_1(x, x, x)$$

Теперь, используя вторую функцию $f_2(x, y, z)$ и полученный тождественный ноль, сконструлируем вторую константу 1:

$$1 = x \sim x = x \sim x + 0 = f_2(x, x, 0)$$

Снова используем первую функцию $f_1(x, y, z)$, и получаем конъюнкцию:

$$x \wedge y = x \wedge y + 0 = f_1(x, y, 0)$$

Наконец строим отрицание, используя вторую функцию $f_2(x, y, z)$:

$$\bar{x} = x + 1 = (x \sim x) + x = f_2(x, x, x)$$

Мы выразили функции заведомо полной системы $\{\bar{x}, x \wedge y\}$ через данные две функции $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$. Таким образом данная система функций полна. \square

Задача 8. По критерию полноты проверить полноту системы функций в P_2 :

$$\{x \sim (\bar{y} \rightarrow z), \bar{x} \wedge ((y \wedge \bar{z}) \rightarrow (\bar{x} \wedge z))\}.$$

Решение. Обозначим $f_1(x, y, z) = x \sim (\bar{y} \rightarrow z)$ и $f_2(x, y, z) = \bar{x} \wedge ((y \wedge \bar{z}) \rightarrow (\bar{x} \wedge z))$. Построим таблицу для каждой функции. Функция $f_1(x, y, z)$:

Функция $f_2(x, y, z)$:

Для доказательства полноты системы по критерию необходимо проверить, что обе функции $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ не лежат одновременно ни в одном из пяти классов T_0, T_1, S, M и L . Проверим принадлежность функций каждому классу по-отдельности.

1. Класс T_0 . Из таблицы функции $f_1(x, y, z)$ видно, что $f_1(0, 0, 0) = 1$. Следовательно $f_1(x, y, z) \notin T_0$.

x	y	z	\bar{y}	$\bar{y} \rightarrow z$	$x \sim (\bar{y} \rightarrow z)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

x	y	z	\bar{z}	$y \wedge \bar{z}$	\bar{x}	$\bar{x} \wedge z$	$(y \wedge \bar{z}) \rightarrow (\bar{x} \wedge z)$	$\bar{x} \wedge ((y \wedge \bar{z}) \rightarrow (\bar{x} \wedge z))$
0	0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0

2. Класс T_1 . Из таблицы функции $f_2(x, y, z)$ следует, что $f_2(1, 1, 1) = 0$, и следовательно $f_2(x, y, z) \notin T_1$.

3. Класс S . $f_1(x, y, z) \notin S$, так как $f(0, 0, 0) = 1$ и $f(1, 1, 1) = 1$, а функция самодвойственна, если она на любой паре противоположных наборов принимает противоположные значения.

4. Класс M . $f_2(x, y, z) \notin M$, так как набор $(0, 0, 0)$ предшествует набору $(1, 1, 1)$, но $f_2(0, 0, 0) = 1 > 0 = f_2(1, 1, 1)$.

5. Класс L . Построим полином Жегалкина для функции $f_2(x, y, z)$. Построение будем осуществлять с помощью элементарных преобразований.

$$\begin{aligned}
f_2(x, y, z) &= \bar{x} \wedge ((y \wedge \bar{z}) \rightarrow (\bar{x} \wedge z)) = \bar{x}(\overline{y\bar{z}} \vee \bar{x}z) = \bar{x}(\overline{(y\bar{z})} \wedge \overline{\bar{x}z}) = \\
&= (x+1)(y(z+1)((x+1)z+1)+1) = \\
&= (x+1)((yz+y)(xz+z+1)+1) = \\
&= (x+1)(xyz+yz+yz+xyz+yz+y+1) = \\
&= (x+1)(yz+y+1) = \\
&= xyz+xy+x+yz+y+1 = \\
&= xyz+xy+yz+x+y+1.
\end{aligned}$$

Полином Жегалкина функции $f_2(x, y, z)$ оказывается нелинейным, а значит $f_2(x, y, z) \notin L$. Таким образом данная система функций

$$\{f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)\}$$

не содержится ни в одном из пяти классов. Следовательно, эта система полна.

Ответ. Система полна.

□

Задача 9. Доказать, что класс L является предполным.

Решение. По определению надо проверить, что:

1. Система L не является полной;
2. Для любой функции $f \in P_2$ такой, что $f \notin L$, система $L \cup \{f\}$ полна в P_2 .

Первое утверждение очевидно по критерию полноты. В самом деле, так как класс L целиком содержится в классе линейных функций, то он не является полным.

Для доказательства второго утверждения по критерию полноты достаточно проверить, что для каждого из пяти классов T_0, T_1, L, S и M найдется функция из множества $L \cup \{f\}$, не лежащая в этом классе. Напомним, что про функцию f известно только то, что она не является линейной. Никакую конкретную функцию в качестве f брать нельзя.

Класс T_0 . Очевидным образом, так как тождественная единица линейна, то $1 \in L \cup \{f\}$, но эта функция не сохраняет ноль, следовательно $1 \notin T_0$.

Класс T_1 . Аналогично предыдущему случаю $0 \in L \cup \{f\}$, но $0 \notin T_1$.

Класс L . По определению функция f не линейна $f \notin L$, но в свою очередь $f \in L \cup \{f\}$.

Класс S . Тождественная единица линейна $1 \in L \cup \{f\}$, но не является самодвойственной $1 \notin S$.

Класс M . В качестве искомой функции подойдет отрицание \bar{x} . В самом деле, $\bar{x} = x + 1 \in L \cup \{f\}$, но функция \bar{x} не монотонна, так как на предшествующем наборе 0 она принимает большее значение, чем на наборе 1.

Таким образом, так как класс $L \cup \{f\}$ не содержится ни в одном из пяти классов T_0, T_1, L, S и M , то он является полным.

□