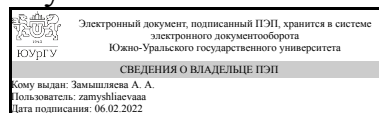


# ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ:  
Директор института  
Институт естественных и точных  
наук



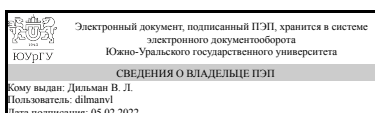
А. А. Замышляева

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины ФД.07 Функциональный анализ  
для направления 01.03.03 Механика и математическое моделирование  
уровень Бакалавриат  
форма обучения очная  
кафедра-разработчик Математический анализ и методика преподавания  
математики

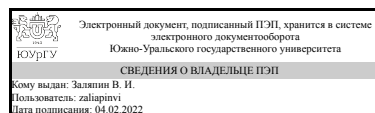
Рабочая программа составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование, утверждённым приказом Минобрнауки от 10.01.2018 № 10

Зав.кафедрой разработчика,  
д.физ.-мат.н., доц.



В. Л. Дильман

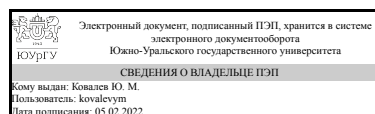
Разработчик программы,  
к.физ.-мат.н., доц., профессор



В. И. Заляпин

СОГЛАСОВАНО

Руководитель направления  
д.физ.-мат.н., проф.



Ю. М. Ковалев

## 1. Цели и задачи дисциплины

Сформировать у слушателя понимание обобщенного подхода к основным понятиям и методам элементарных глав математического анализа и смежных областей алгебры и геометрии. С единой точки зрения изучить различные проблемы из специальных аналитических дисциплин (анализа, алгебры, дифференциальных уравнений, вариационного исчисления) и установить связи между далекими на первый взгляд математическими теориями и тем самым способствовать более глубокому пониманию основных математических конструкций.

## Краткое содержание дисциплины

Метрические пространства; открытые и замкнутые множества; компактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа; полнота и пополнение; теорема о стягивающих шарах; принцип сжимающих отображений; топологические пространства; примеры. Множества, алгебра множеств; мощность, счетные и континуальные множества. Линейные пространства. Линейные комбинации. Зависимость. Размерность. Определение линейного нормированного пространства; примеры норм; банаховы пространства; сопряженное пространство, его полнота; теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала; общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах; линейные операторы; норма оператора; сопряженный оператор; принцип равномерной ограниченности; обратный оператор; спектр и резольвента; теорема Банаха об обратном операторе; компактные операторы; компактность интегральных операторов; Скалярное произведение; неравенство Коши – Буняковского – Шварца; ортогональные системы; неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема об изоморфизме, ортогональное дополнение; общий вид линейного функционала; самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы; ортопроекторы; спектр эрмитова и унитарного оператора; функциональное исчисление; приведение оператора к виду умножения на функцию; спектральная теорема;

## 2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Планируемые результаты освоения ОП ВО (компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 Способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности	Знает: структуру функциональных пространств и операторов, структуру функционалов, свойства инвариантности основных функциональных структур Умеет: анализировать конкретные функциональные пространства, строить ортонормированные базисы в гильбертовых пространствах, вычислять интегралы Лебега, устанавливать изоморфизм различных конкретных пространств Имеет практический опыт: исследования операторов и функционалов в гильбертовых пространствах, дифференциальных операторов, интегральных уравнений

### 3. Место дисциплины в структуре ОП ВО

Перечень предшествующих дисциплин, видов работ учебного плана	Перечень последующих дисциплин, видов работ
1.О.14 Математический анализ, 1.О.20 Линейная алгебра и аналитическая геометрия, 1.О.16 Дифференциальные уравнения, 1.О.29 Комплексный анализ	Не предусмотрены

Требования к «входным» знаниям, умениям, навыкам студента, необходимым при освоении данной дисциплины и приобретенным в результате освоения предшествующих дисциплин:

Дисциплина	Требования
1.О.20 Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Знает: основные положения и методологию линейной алгебры и аналитической геометрии Умеет: решать типовые задачи линейной алгебры и аналитической геометрии Имеет практический опыт: использования теории матриц и их определителей при решении типовых и прикладных задач, решения алгебраических уравнений, систем уравнений и других классических задач линейной алгебры
1.О.16 Дифференциальные уравнения	Знает: основные понятия теории дифференциальных уравнений, формулировки теорем и методы их доказательства Умеет: решать классические задачи дифференциальных уравнений Имеет практический опыт: применения математического аппарата дифференциальных уравнений к решению прикладных задач
1.О.14 Математический анализ	Знает: объекты, понятия, теоремы и методы математического анализа Умеет: решать задачи и упражнения математического анализа на основе знания понимания утверждений и методов математического анализа Имеет практический опыт: решения содержательных и прикладных задач, требующих знания утверждений и методов математического анализа
1.О.29 Комплексный анализ	Знает: основные понятия и теоремы теории функции комплексной переменной Умеет: применять навыки дифференцирования и интегрирования функции комплексной переменной, формулировать основные идеи доказательства утверждения Имеет практический опыт: применения методов теории функций комплексной переменной, различных приемов доказательств утверждений

### 4. Объём и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 з.е., 108 ч., 54,25 ч.  
контактной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Распределение по семестрам в часах	
		Номер семестра	
		6	
Общая трудоёмкость дисциплины	108	108	
<i>Аудиторные занятия:</i>	48	48	
Лекции (Л)	32	32	
Практические занятия, семинары и (или) другие виды аудиторных занятий (ПЗ)	16	16	
Лабораторные работы (ЛР)	0	0	
<i>Самостоятельная работа (СРС)</i>	53,75	53,75	
с применением дистанционных образовательных технологий	0		
Освоение основных теоретических положений и конструкций. Работа с учебником	16	16	
Подготовка к зачету	7,75	7.75	
Освоение практической части курса. Выполнение текущих заданий	30	30	
Консультации и промежуточная аттестация	6,25	6,25	
Вид контроля (зачет, диф.зачет, экзамен)	-	зачет	

## 5. Содержание дисциплины

№ раздела	Наименование разделов дисциплины	Объем аудиторных занятий по видам в часах			
		Всего	Л	ПЗ	ЛР
1	Метрические пространства	14	8	6	0
2	Линейные пространства. Нормированные пространства.	8	6	2	0
3	Пространства со скалярным произведением	8	6	2	0
4	Отображения. Операторы и функционалы	12	8	4	0
5	Элементы спектральной теории	6	4	2	0

### 5.1. Лекции

№ лекции	№ раздела	Наименование или краткое содержание лекционного занятия	Кол-во часов
1-2	1	Метрические пространства; открытые и замкнутые множества; сходимости в метрических пространствах Полнота и пополнение; теорема о вложенных шарах Счетные и несчетные множества. Сепарабельные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений; Непрерывные отображения метрических пространств. Компактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа.	4
3-4	1	Компактность. Компактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа. Критерии компактности. Полнота. Сепарабельность. Пополнение метрических пространств. Теорема Боля-Брауэра. Теорема Шаудера	4

5-6-7	2	Линейные векторные пространства. Линейная зависимость. Размерность. Понятие о базисе. Базис в конечномерных и бесконечномерных пространствах. Базис Гамеля. Базис Шаудера. Линейные нормированные пространства. Неравенства Гельдера и Минковского. Банаховы пространства. Примеры.	6
8-9-10	3	Скалярное произведение в линейных пространствах. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Евклидовы, унитарные и гильбертовы пространства. Примеры. Ортонормированные базисы в гильбертовых пространствах. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Процедура ортогонализации. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя. Полнота и замкнутость ортогональных систем. Равенство Парсевала. Базис Шаудера в сепарабельных гильбертовых пространствах. Наилучшие приближения в гильбертовых пространствах.	6
11-12	4	Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Норма линейного оператора. Пространство линейных операторов. Точечная и равномерная сходимости последовательности линейных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза. Обратные операторы. Условия обратимости и непрерывной обратимости линейного оператора. Теорема Банаха об обратном операторе.	4
13-14	4	Линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейных непрерывных функционалов в некоторых конкретных нормированных пространствах. Сопряженные пространства и сопряженные операторы. Ограниченность сопряженного оператора.	4
15-16	5	Введение в спектральную теорию. Конечномерные операторы. Вполне непрерывные операторы. Спектр и резольвента. Введение в спектральную теорию. Самосопряженные операторы. Спектральные свойства самосопряженных операторов.	4

## 5.2. Практические занятия, семинары

№ занятия	№ раздела	Наименование или краткое содержание практического занятия, семинара	Кол-во часов
1	1	Числовые множества. Мощность числовых множеств. Счетность множеств, несчетность промежутка $[0;1]$ и . Непосредственное установление эквивалентности точечных множеств.	2
2-3	1	Примеры метрических пространств; открытые и замкнутые множества; сходимость в метрических пространствах Полные метрические пространства. Счетные и несчетные множества. Сепарабельные метрические пространства	4
4	2	Линейные пространства. Базисы. Координаты. Канонический изоморфизм конечномерных пространств. Нормированные пространства. Пополнение по норме. Банаховы пространства	2
5	3	Скалярное произведение. Ортогональность. Базисы и координаты в сепарабельных гильбертовых пространствах. Ортогонализация Шмидта.	2
6-7	4	Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Норма линейного оператора. Обратные операторы. Свойства обратных операторов. Линейные функционалы в нормированных пространствах. Непрерывность и ограниченность. Общий вид линейного функционала в евклидовых (унитарных) пространствах.	4
8	5	Сопряженные пространства и сопряженные операторы.	2

## 5.3. Лабораторные работы

Не предусмотрены

## 5.4. Самостоятельная работа студента

Выполнение СРС			
Подвид СРС	Список литературы (с указанием разделов, глав, страниц) / ссылка на ресурс	Семестр	Кол-во часов
Освоение основных теоретических положений и конструкций. Работа с учебником	Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. гл.1,с. 11-53, гл.2, с.57-77, гл.3, с.122-161, гл.4, с. 173-196, гл.6, с. 261-268. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. гл.1, §1,2,3, гл.2. §1,2,3,7, гл.3, §1, 3,4, гл.4. § 1,2,5,6	6	16
Подготовка к зачету	Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. гл.1,с. 11-53, гл.2, с.57-77, гл.3, с.122-161, гл.4, с. 173-196, гл.6, с. 261-268. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. гл.1, §1,2,3, гл.2. §1,2,3,7, гл.3, §1, 3,4, гл.4. § 1,2,5,6	6	7,75
Освоение практической части курса. Выполнение текущих заданий	Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. гл.1,с. 11-53, гл.2, с.57-77, гл.3, с.122-161, гл.4, с. 173-196, гл.6, с. 261-268. Треногин В.А. Функциональный анализ. , гл.1,§§1-6, гл.3, §§10-15	6	30

## 6. Текущий контроль успеваемости, промежуточная аттестация

Контроль качества освоения образовательной программы осуществляется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе оценивания результатов учебной деятельности обучающихся.

### 6.1. Контрольные мероприятия (КМ)

№ КМ	Се-местр	Вид контроля	Название контрольного мероприятия	Вес	Макс. балл	Порядок начисления баллов	Учитывается в ПА
1	6	Текущий контроль	Элементы теории множеств	10	10	Всего в задании 10 обязательных задач. Количество баллов от 0 до 10 определяется количеством правильно и в срок решенных задач.	зачет
2	6	Текущий контроль	Метрические пространства-1	10	10	Всего в задании 10 обязательных задач. Количество баллов от 0 до 10 определяется количеством правильно и в срок решенных задач.	зачет
3	6	Текущий контроль	Метрические пространства-2	10	10	Всего в задании 10 обязательных задач. Количество баллов от 0 до 10 определяется количеством правильно и в срок решенных задач.	зачет

4	6	Текущий контроль	Линейные нормированные пространства.	10	10	Всего в задании 10 обязательных задач. Количество баллов от 0 до 10 определяется количеством правильно и в срок решенных задач.	зачет
5	6	Текущий контроль	Пространства со скалярным произведением.	10	10	Всего в задании 10 обязательных задач. Количество баллов от 0 до 10 определяется количеством правильно и в срок решенных задач.	зачет
6	6	Текущий контроль	Линейные операторы и функционалы.	10	30	Баллы за задание начисляются по результатам устного собеседования и письменной контрольной работы: 0 - отсутствует ответ на поставленные вопросы, 5 - верно решены и объяснены 2 задачи, из предложенных для решения, 10 - верно решены и объяснены 3 задачи, из предложенных для решения, 15 - верно решены и объяснены 4 задачи, из предложенных для решения, 20 - верно решены и объяснены 5 задач, из предложенных для решения, 25 - верно решены и объяснены 6 задач, из предложенных для решения, 30 - верно решены и объяснены 7 задач, из предложенных для решения.	зачет
7	6	Бонус	Другие заслуги	-	15	За участие в конференциях, совещаниях, олимпиадах и т.п. начисляется от 0% до 15%, в зависимости от уровня успешности участия в мероприятии.	зачет
8	6	Промежуточная аттестация	зачет	-	100	Зачетное задание содержит 7 задач, каждая из которых приносит студенту от 0 до 20 баллов: 0 - задача не решена, 10 - предложен, но не реализован, путь решения задачи, 15 - предложен путь решения задачи, реализованный с ошибками, 20 - задача решена верно. Сдающему зачет предлагается решить на выбор любые 5 из предложенных 7 задач.	зачет

## 6.2. Процедура проведения, критерии оценивания

Вид промежуточной аттестации	Процедура проведения	Критерии оценивания
зачет	Зачет реализуется в форме письменной контрольной работы, на которую отводится 2 акад. часа. Результаты контрольной работы учитываются в итоговой оценке за курс. Возможно получение зачета без прохождения зачетной процедуры согласно положению о БРС ЮУрГУ.	В соответствии с пп. 2.5, 2.6 Положения

## 6.3. Оценочные материалы

Компетенции	Результаты обучения	№ КМ							
		1	2	3	4	5	6	7	8
ОПК-1	Знает: структуру функциональных пространств и операторов, структуру	+			+				+

	функционалов, свойства инвариантности основных функциональных структур								
ОПК-1	Умеет: анализировать конкретные функциональные пространства, строить ортонормированные базисы в гильбертовых пространствах, вычислять интегралы Лебега, устанавливать изоморфизм различных конкретных пространств		+		+				+
ОПК-1	Имеет практический опыт: исследования операторов и функционалов в гильбертовых пространствах, дифференциальных операторов, интегральных уравнений			+			+	+	+

Фонды оценочных средств по каждому контрольному мероприятию находятся в приложениях.

## 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### Печатная учебно-методическая документация

#### а) основная литература:

1. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа Учеб. для мат. спец. ун-тов. - 6-е изд., испр. - М.: Наука, 1989. - 623 с. ил.
2. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа Учеб. пособие для ун-тов по спец. "Математика". - М.: Высшая школа, 1982. - 271 с.

#### б) дополнительная литература:

1. Треногин, В. А. Задачи и упражнения по функциональному анализу Текст В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. - М.: Наука, 1984. - 256 с.
2. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. - 2-е изд., перераб. - М.: Наука, 1965. - 520 с. черт.

#### в) отечественные и зарубежные журналы по дисциплине, имеющиеся в библиотеке:

1. Функциональный анализ и его приложения,  
<http://www.mathnet.ru/faa>

#### г) методические указания для студентов по освоению дисциплины:

1. Бескачко В.П., Заляпин В.И. Математические основы квантовой механики
2. М.Л. Катков, Л.В. Матвеева, Л.Д. Менихес. Сборник задач по функциональному анализу. Изд. ЮУрГУ, Челябинск, 1999

#### из них: учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студента:

1. Бескачко В.П., Заляпин В.И. Математические основы квантовой механики

### Электронная учебно-методическая документация

№	Вид литературы	Наименование ресурса в электронной форме	Библиографическое описание
1	Основная литература	Электронно-библиотечная	Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. [Электронный ресурс] / А.Н.



		система издательства Лань	Колмогоров, С.В. Фомин. — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2009. — 572 с. — Режим доступа: <a href="http://e.lanbook.com/book/2206">http://e.lanbook.com/book/2206</a> — Загл. с экрана.
2	Основная литература	Электронно-библиотечная система издательства Лань	Треногин, В.А. Функциональный анализ. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2007. — 488 с. — Режим доступа: <a href="http://e.lanbook.com/book/59471">http://e.lanbook.com/book/59471</a>
3	Дополнительная литература	Электронно-библиотечная система издательства Лань	Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу. [Электронный ресурс] / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2005. — 240 с. — Режим доступа: <a href="http://e.lanbook.com/book/2342">http://e.lanbook.com/book/2342</a>

Перечень используемого программного обеспечения:

Нет

Перечень используемых профессиональных баз данных и информационных справочных систем:

Нет

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Не предусмотрено