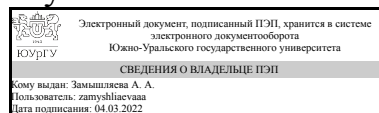


# ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ:  
Директор института  
Институт естественных и точных  
наук



А. А. Замышляева

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

**дисциплины П.1.В.06.04** Дополнительные главы теории случайных процессов  
для направления 01.06.01 Математика и механика

**уровень аспирант тип программы**

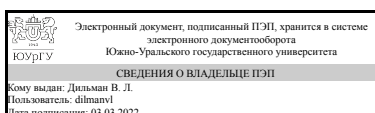
**направленность программы**

**форма обучения очная**

**кафедра-разработчик** Математический анализ и методика преподавания математики

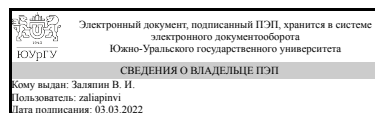
Рабочая программа составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, утверждённым приказом Минобрнауки от 29.07.2014 № 866

Зав.кафедрой разработчика,  
д.физ.-мат.н., доц.



В. Л. Дильман

Разработчик программы,  
к.физ.-мат.н., доц., профессор



В. И. Заляпин

## 1. Цели и задачи дисциплины

Целями освоения дисциплины "Дополнительные главы теории случайных процессов" являются: фундаментальная подготовка в области построения и анализа сложных стохастических моделей, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в разнообразных приложениях. Задачами дисциплины является приобретение навыков исследования процессов и явлений случайной природы.

### Краткое содержание дисциплины

Определение случайного процесса, конечномерные распределения; траектории; теорема Колмогорова о существовании процесса с заданным семейством конечномерных распределений (без доказательства). Классы случайных процессов: гауссовские, марковские, стационарные, точечные с независимыми приращениями; примеры; соотношения между классами. Свойства многомерных гауссовских процессов; существование гауссовского процесса с заданным средним и корреляционной матрицей; свойства симметрии и согласованности. Винеровский процесс; Теорема Пэли - Винера – Зигмунда о недифференцируемости траекторий винеровского процесса. Критерий Колмогорова непрерывности траектории; следствие для гауссовских процессов. Пуассоновский процесс; построение пуассоновского процесса по последовательности независимых показательных распределений; определение А.Я. Хинчина пуассоновского процесса. Среднеквадратическая теория: необходимые и достаточные условия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости; стохастический интеграл; процессы с ортогональными приращениями. Примеры стационарного, гауссовского, марковского процесса; примеры стационарных в широком смысле процессов. Построение броуновского движения. Мартингалы. Субмартингалы. Задача об остановке. Задача о разорении игрока. Цепи Маркова с непрерывным временем; уравнение Колмогорова-Чепмэна; прямые и обратные дифференциальные уравнения Колмогорова; время пребывания процесса в данном состоянии. Эргодическая теорема. Интеграл Ито. Формула Ито. Стохастические дифференциальные уравнения.

## 2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Планируемые результаты освоения ОП ВО (компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (ЗУНы)
УК-5 способностью планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития	Знать: основные направления развития наук о случайности
	Уметь: формулировать проблематику современной теории вероятностей и её приложений, использовать полученные знания для анализа этой проблематики
	Владеть: техническими навыками получения новой научной и методической информации, с использованием современных методов поиска информации
УК-2 способностью проектировать и	Знать: Основные этапы развития теории

осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки	вероятностей
	Уметь:Формулировать основные задачи стохастического описания прикладных проблем в смежных областях
	Владеть:Техникой анализа случайных структур и явлений
ОПК-2 готовностью к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования	Знать:базовые понятия в области фундаментальной математики;
	Уметь:формулировать и доказывать теоремы, самостоятельно решать классические задачи математики;
	Владеть:навыками практического использования математических методов при анализе различных задач;
УК-1 способностью к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	Знать:современное состояние науки
	Уметь:формулировать проблемы, возникающие при исследовании теоретических и прикладных задач
	Владеть:аппаратом анализа возникающих проблем в междисциплинарных областях
ОПК-1 способностью самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	Знать:определения и свойства основных объектов теории случайных процессов, а также формулировки наиболее важных утверждений, методы их доказательств, возможные сферы приложений.
	Уметь:решать задачи вычислительного и теоретического характера в области теории случайных процессов, устанавливать взаимосвязи между вводимыми понятиями, доказывать как излагавшиеся утверждения, так и родственные им новые.
	Владеть:математическим аппаратом, подбирая сочетания различных методов для описания и анализа сложных стохастических моделей.
УК-3 готовностью участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач	Знать:основные направления развития современной науки,
	Уметь:формулировать проблематику научных и научно-образовательных задач
	Владеть:техникой исследования прикладных научных и научно-образовательных задач в смежных областях

### 3. Место дисциплины в структуре ОП ВО

Перечень предшествующих дисциплин, видов работ учебного плана	Перечень последующих дисциплин, видов работ
Нет	П.1.В.04 Математическое моделирование, П.1.В.07.03 Методы энтропийного моделирования многомерных стохастических систем

Требования к «входным» знаниям, умениям, навыкам студента, необходимым при освоении данной дисциплины и приобретенным в результате освоения предшествующих дисциплин:

Нет

#### 4. Объём и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 з.е., 108 ч.

Вид учебной работы	Всего часов	Распределение по семестрам в часах	
		Номер семестра	
		2	
Общая трудоёмкость дисциплины	108	108	
<i>Аудиторные занятия:</i>	40	40	
Лекции (Л)	40	40	
Практические занятия, семинары и (или) другие виды аудиторных занятий (ПЗ)	0	0	
Лабораторные работы (ЛР)	0	0	
<i>Самостоятельная работа (СРС)</i>	68	68	
Выполнение заданий	28	28	
Работа с учебником, подготовка к экзамену	40	40	
Вид итогового контроля (зачет, диф.зачет, экзамен)	-	экзамен	

#### 5. Содержание дисциплины

№ раздела	Наименование разделов дисциплины	Объем аудиторных занятий по видам в часах			
		Всего	Л	ПЗ	ЛР
1	Основные понятия	4	4	0	0
2	Элементы стохастического анализа (среднеквадратическая теория)	8	8	0	0
3	Стационарные процессы	8	8	0	0
4	Стохастический интеграл	6	6	0	0
5	Марковские процессы	6	6	0	0
6	Стохастические уравнения	8	8	0	0

##### 5.1. Лекции

№ лекции	№ раздела	Наименование или краткое содержание лекционного занятия	Кол-во часов
1 - 2	1	Основные понятия. Примеры случайных процессов. Основные классы процессов: процессы с независимыми приращениями, стационарные, марковские (в том числе диффузионные) гауссовские. Сечения и траектории процесса Конечномерные распределения. Теорема Колмогорова. Корреляционные функции и их свойства.	4
3 - 4	2	Элементы анализа случайных процессов, стохастический анализ и анализ в среднем. Предел, непрерывность, производная и интеграл от случайного	4

		процесса.	
5 - 6	2	Линейные преобразования стационарных случайных процессов. Корреляционная теория.	4
7 - 8	3	Стационарные (в широком и в узком смысле) случайные процессы. Дифференцирование и интегрирование стационарных случайных процессов. Корреляционные функции. Характеризация корреляционной функции. Теорема Бохнера-Хинчина. Спектральные функции и плотности. Спектральное представление стационарного случайного процесса.	4
9 - 10	3	Среднеквадратический анализ случайных процессов. Дифференцирование и интегрирование. Процессы, удовлетворяющие закону больших чисел. Эргодичность. Разложение случайного процесса в ортогональный ряд. Пример: разложение броуновского движения.	4
11 - 12 - 13	4	Винеровский процесс и его свойства. Непрерывность траекторий винеровского процесса. Недифференцируемость винеровского процесса и его траекторий. Стохастический интеграл Ито. Его свойства. Стохастический дифференциал Ито. Ф-ла Ито. Модель диффузии. Диффузионные процессы.	6
14 - 15 -16	5	Марковские процессы. Переходные вероятности. Уравнение Колмогорова-Чепмена. Прямое и обратное уравнения Колмогорова. Марковские цепи. Стохастические матрицы. Стационарные режимы. Процессы с не более чем счетным числом состояний. Прямая и обратная система уравнений Колмогорова. Стационарные режимы. Предельные вероятности состояний.	6
17 - 18	6	Стохастические дифференциальные уравнения. Общие сведения.	4
19 - 20	6	Разрешимость стохастических дифференциальных уравнений. Примеры	4

## 5.2. Практические занятия, семинары

Не предусмотрены

## 5.3. Лабораторные работы

Не предусмотрены

## 5.4. Самостоятельная работа студента

Выполнение СРС		
Вид работы и содержание задания	Список литературы (с указанием разделов, глав, страниц)	Кол-во часов
Изучение материала в учебнике, выполнение задания №4	Вентцель, гл.2, с.43-47, гл.12, с.219-230, Розанов, Ч.II, §8, с. 158-159	13
Изучение материала в учебнике, выполнение задания №2	Розанов, Ч.II, §2, §3, с.90-110, §9, §10, с.169-180,	20
Изучение материала в учебнике, выполнение задания №3	Вентцель, гл.1, с.13-33, Вентцель, Гл.2, с.33-47	15
Изучение материала в учебнике, выполнение задания №1	Вентцель, Гл.3, с.48-57, гл.4, с.66-71	20

## 6. Инновационные образовательные технологии, используемые в учебном процессе

Не предусмотрены

## Собственные инновационные способы и методы, используемые в образовательном процессе

Не предусмотрены

Использование результатов научных исследований, проводимых университетом, в рамках данной дисциплины: нет

### 7. Фонд оценочных средств (ФОС) для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

#### 7.1. Паспорт фонда оценочных средств

Наименование разделов дисциплины	Контролируемая компетенция ЗУНы	Вид контроля (включая текущий)	№№ заданий
Все разделы	ОПК-1 способностью самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	текущий	1 - 4
Все разделы	ОПК-2 готовностью к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования	текущий	1 - 4
Все разделы	УК-1 способностью к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	текущий	1 - 4
Все разделы	УК-2 способностью проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки	текущий	1 - 4
Все разделы	УК-3 готовностью участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач	текущий	1 - 4
Все разделы	УК-5 способностью планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития	текущий	1 - 4
Все разделы	УК-2 способностью проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки	промежуточный	1 - 25

#### 7.2. Виды контроля, процедуры проведения, критерии оценивания

Вид контроля	Процедуры проведения и оценивания	Критерии оценивания
текущий	Каждое из заданий (№№ 1,2 и 3) содержит 10 задач. Задание выполняется обучающимися	Отлично: по результатам выполнения и защиты заданий

	самостоятельно и подлежит публичной защите в течение месяца, после выдачи задания преподавателем. Каждая из задач, по результатам защиты, оценивается 1 баллом, в случае, если она решена и объяснена верно, и 0 баллов, если она не решена, решена неверно и/или ход её решения не объяснен. Задание №4 содержит 5 задач, каждая из которых оценивается 2 баллами, в случае если она решена и объяснена верно, 1 баллом, если в ходе решения/объяснения обучающимся допущены незначительные погрешности, не влияющие на , в целом, верный результат, и 0 баллов, если решение задачи неверно, или объяснение хода её решения использует принципиально неверные аргументы.	обучающийся набрал не менее 34 баллов из 40 возможных Хорошо: по результатам выполнения и защиты заданий обучающийся набрал не менее 30 но не более 34 баллов Удовлетворительно: по результатам выполнения и защиты заданий обучающийся набрал не менее 24 но не более 30 баллов Неудовлетворительно: по результатам выполнения и защиты заданий обучающийся набрал менее 24 баллов
промежуточный	<p>Если уровень оценки знаний обучающегося, определенный в результате текущего контроля в течение семестра, по каким-то причинам обучающегося не удовлетворяет, ему предоставляется возможность пройти процедуру промежуточного контроля по правилам и в соответствии с балльно-рейтинговой системой, принятой в ЮУрГУ. Процедура промежуточного контроля проходит в форме традиционного устного экзамена (собеседования).</p> <p>Экзаменуемому предлагается экзаменационный билет, содержащий теоретический вопрос и задачу. На подготовку к ответу отводится 1 акад. час. Каждая позиция экзаменационного билета приносит экзаменуемому от 0 до 50 баллов, в зависимости от полноты, правильности и аргументированности ответа экзаменуемого.</p> <p>Итоговая оценка за курс выставляется в соответствии с индивидуальным рейтингом обучающегося, который подсчитывается по формуле <math>I=1,5 S1+0,4 S2</math>, где <math>S1</math> - баллы, набранные обучающимся в результате текущих аттестаций (всего от 0 до 40), <math>S2</math> - баллы, набранные обучающимся в результате прохождения экзаменационной процедуры (всего от 0 до 100).</p>	<p>Отлично: <math>S1</math> не менее 85 баллов или <math>I</math> не менее 34 баллов Хорошо: <math>S1</math> не менее 75 баллов но не более 85 или <math>I</math> не менее 30 баллов но не более 34 Удовлетворительно: <math>S1</math> не менее 60 баллов но не более 75 или <math>I</math> не менее 24 баллов но не более 30 Неудовлетворительно: <math>S1</math> менее 60 баллов и <math>I</math> менее 24 баллов</p>

### 7.3. Типовые контрольные задания

Вид контроля	Типовые контрольные задания
текущий	<p>Вопросы для самоконтроля</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Дайте определение случайного процесса. Что такое сечение и траектория случайного процесса?</li> <li>2. Опишите числовые характеристики случайного процесса.</li> <li>3. Опишите конструкцию и свойства следующих классов случайных процессов: <ul style="list-style-type: none"> <li>- с независимыми приращениями,</li> <li>- стационарного,</li> <li>- гауссовского,</li> <li>- винеровского,</li> </ul> </li> </ol>

	- марковского, - диффузионного, - феллеровского. 4. Основные положения стохастического анализа - непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайного процесса. 5. Спектральная теория стационарных случайных процессов. Теорема Бохнера-Хинчина. 6. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. 7. Стохастический интеграл Ито. Стохастический интеграл Стратоновича. Формула Ито. 8. Стохастические дифференциальные уравнения. Основные понятия. 9. Оценивание, прогнозирование и фильтрация случайных процессов. 10. Фильтр Калмана-Бьюси. Stokh_1.pdf; Stokh_4.pdf; Stokh_2.pdf; Stokh_3.pdf
промежуточный	exam_stokh_22_2 sem.pdf

## 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### Печатная учебно-методическая документация

#### а) основная литература:

1. Вентцель, А. Д. Курс теории случайных процессов Учеб. пособие для мех.-мат. ф-тов ун-тов. - М.: Наука, 1975. - 319 с.
2. Булинский, А. В. Теория случайных процессов А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. - М.: Физматлит и др., 2003. - 399 с. ил.
3. Розанов, Ю. А. Случайные процессы Краткий курс: Учеб. пособие для физ.-мат. и физ.-техн. специальностей вузов Ю. А. Розанов. - М.: Наука, 1971. - 286 с. ил.
4. Гихман, И. И. Введение в теорию случайных процессов Учеб. пособие для физ.-мат. спец-тей вузов. - 2-е изд., перераб. - М.: Наука, 1977. - 567 с. ил.

#### б) дополнительная литература:

1. Вентцель, А. Д. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. - М.: Наука, 1979. - 424 с. ил.
2. Гихман, И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения АН УССР, Ин-т математики. - Киев: Наукова думка, 1982. - 611 с. ил.
3. Ито Киеси Диффузионные процессы и их траектории [Текст] Ито Киеси, Г. П. Маккин ; под ред. Е. Б. Дынкина ; пер. с англ. А. Д. Вентцеля. - М.: Мир, 1968. - 394 с. черт.; 1 л. ил.

#### в) отечественные и зарубежные журналы по дисциплине, имеющиеся в библиотеке:

Не предусмотрены

#### г) методические указания для студентов по освоению дисциплины:

1. Лифшиц, М. А. Случайные процессы — от теории к практике : учебное пособие для вузов / М. А. Лифшиц. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 308 с



из них: учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студента:

1. Лифшиц, М. А. Случайные процессы — от теории к практике : учебное пособие для вузов / М. А. Лифшиц. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 308 с

### Электронная учебно-методическая документация

№	Вид литературы	Наименование ресурса в электронной форме	Библиографическое описание
1	Основная литература	Электронно-библиотечная система издательства Лань	Бородин, А. Н. Случайные процессы : учебное пособие / А. Н. Бородин. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 640 с. <a href="https://e.lanbook.com/book/168542">https://e.lanbook.com/book/168542</a>
2	Дополнительная литература	Электронно-библиотечная система издательства Лань	Лифшиц, М. А. Лекции по гауссовским процессам : учебное пособие для вузов / М. А. Лифшиц. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 192 с <a href="https://e.lanbook.com/book/183102">https://e.lanbook.com/book/183102</a>
3	Дополнительная литература	Образовательная платформа Юрайт	Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 2. Основы стохастического анализа : учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 280 с. <a href="https://urait.ru/bcode/490917">https://urait.ru/bcode/490917</a> (дата обращения: 08.01.2022).

### 9. Информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса

Перечень используемого программного обеспечения:

Нет

Перечень используемых информационных справочных систем:

Нет

### 10. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Вид занятий	№ ауд.	Основное оборудование, стенды, макеты, компьютерная техника, предустановленное программное обеспечение, используемое для различных видов занятий
Лекции	708а (1)	Мультимедийное оборудование