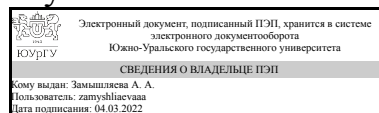


ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ:
Директор института
Институт естественных и точных
наук



А. А. Замышляева

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины П.1.В.07.04 Экстремальные задачи и выпуклый анализ. Вариационные принципы

для направления 01.06.01 Математика и механика

уровень аспирант тип программы

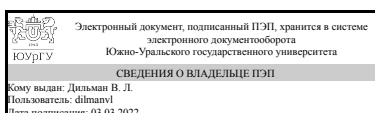
направленность программы

форма обучения очная

кафедра-разработчик Математический анализ и методика преподавания математики

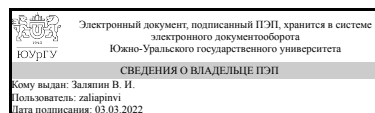
Рабочая программа составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, утверждённым приказом Минобрнауки от 29.07.2014 № 866

Зав.кафедрой разработчика,
д.физ.-мат.н., доц.



В. Л. Дильман

Разработчик программы,
к.физ.-мат.н., доц., профессор



В. И. Заляпин

1. Цели и задачи дисциплины

Курс "Экстремальные задачи и выпуклый анализ. Вариационные принципы" является фундаментальным курсом, в котором изучаются общие свойства выпуклых множеств и выпуклых функций в банаховых пространствах. Знание общих положений курса дает возможность исследовать решения различных задач, связанных с поиском минимумов и максимумов выпуклых функций, определенных на выпуклых множествах. К таким задачам относятся задачи линейного и выпуклого программирования, вариационного исчисления и оптимального управления. Цель курса - дать слушателям навыки исследования негладких выпуклых множеств, основы применения теории двойственности выпуклых функций, теории субдифференциального исчисления выпуклых и слабо выпуклых функций, овладение методом Лагранжа и его обоснование для решения выпуклых экстремальных задач. Курс обеспечивает теоретическую подготовку для таких курсов, как «Методы оптимизации», "Теория экстремумов", "Вариационное исчисление и др., в которых проводится детализация конкретных методов решения экстремальных задач.

Краткое содержание дисциплины

1. Выпуклые множества в банаховом пространстве. Выпуклая оболочка множества, выпуклые комбинации точек этого множества, их связь. Теорема Каратеодори о выпуклой оболочке множеств в R^n . 2. Метрика Хаусдорфа для множеств, ее свойства. Теорема о полноте метрического (с хаусдорфовой метрикой) пространства компактов из банахова пространства. 3. Операции Минковского с множествами: сумма, разность, умножение на скаляр. 4. Понятия нижнего и верхнего касательных конусов к множеству в точке, их свойства. 5. Касательный конус Кларка, его выпуклость. 6. Понятия эффективного множества и надграфика функции. 7. Выпуклые функции. Неравенство Иенсена. Функция Минковского и опорная функция множества. Их свойства. Выпуклая оболочка функции, ее свойства. 8. Непрерывность выпуклой функции. 9. Отделимость (простая, сильная, строгая) выпуклых множеств в гильбертовом пространстве. Опорная гиперплоскость, ее существование в любой граничной точке выпуклого множества в R^n . 10. Теорема об отделимости выпуклых множеств из банахова пространства. 11. Преобразование Лежандра–Юнга–Фенхеля. Теорема Фенхеля–Моро о второй сопряженной функции. 12. Инфимальная конволюция функций. Теорема о двойственности инфимальной конволюции и суммы функций при преобразовании Лежандра–Юнга–Фенхеля. 13. Представление выпуклых множеств через пересечение полупространств. 14. Производная по направлениям выпуклой функции, ее представление через инфинум. Непрерывность производной по направлениям. Связь производной по направлениям с касательным конусом надграфика. 15. Субдифференциал выпуклой функции. Теорема Дубовицкого–Милютина о субдифференциале максимума двух выпуклых функций. 16. Теорема Моро–Рокафеллара о субдифференциале суммы функций. 17. Поляра множества и ее свойства. 18. Задача выпуклого программирования. Метод множителей Лагранжа в задаче выпуклого программирования. 19. Локально выпуклые функции. Слабо и сильно выпуклые функции, r -выпуклые функции. Задача r -выпуклого программирования. Необходимые условия экстремума.

2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Планируемые результаты освоения ОП ВО (компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (ЗУНы)
<p>ПК-1.1 способностью проводить исследования в области локальных и глобальных свойств функций действительных переменных, их представлений и приближений; отображений бесконечномерных пространств (функционалов, операторов); аналитических функций одного и многих комплексных переменных, их свойств, аналитических продолжений, граничных свойств аналитических функций, различных классов и пространств аналитических функций, представления аналитических функций (ряды, непрерывные дроби, интегральные представления и т. п.), приближений аналитическими функциями (многочленами, рациональными функциями, экспоненциальными многочленами и т. п.), геометрической теории функций одного и многих комплексных переменных, конформных отображений и их обобщений (квазиконформные, биголоморфные и т. п.), краевых задач для аналитических функций, приложения теории потенциала в комплексном анализе и комплексной теории потенциала</p>	<p>Знать: классические методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также базовые методы разработки и реализации алгоритмов их решения;</p>
	<p>Уметь: применять классические методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также базовые методы разработки и реализации алгоритмов их решения;</p>
	<p>Владеть: базовыми навыками выбора методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также методов разработки и реализации алгоритмов их решения.</p>
<p>ОПК-2 готовностью к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования</p>	<p>Знать: классические методологические приемы для доказательства фактов и анализа задач в области математики и информатики;</p>
	<p>Уметь: воспроизводить и объяснять логику доказательств классических фактов в области математики и информатики;</p>
	<p>Владеть: базовыми навыками выбора оптимальных методов доказательств фактов и анализа задач в области математики и информатики</p>
<p>ОПК-1 способностью самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий</p>	<p>Знать: основные методы математического анализа классических задач в области естественных наук, экономики и информационно-коммуникационных технологий;</p>
	<p>Уметь: применять классические методы построения математических моделей, а также стандартные аналитические и численные методы их анализа;</p>
	<p>Владеть: базовыми навыками определения границ применимости математических моделей и интерпретации результатов их анализа, навыками использования стандартных программных комплексов для решения математических задач и визуализации результатов.</p>

3. Место дисциплины в структуре ОП ВО

Перечень предшествующих дисциплин, видов работ учебного плана	Перечень последующих дисциплин, видов работ
Нет	Подготовка научно-квалификационной работы (диссертации) на соискание ученой степени кандидата наук (7 семестр)

Требования к «входным» знаниям, умениям, навыкам студента, необходимым при освоении данной дисциплины и приобретенным в результате освоения предшествующих дисциплин:

Нет

4. Объём и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 з.е., 108 ч.

Вид учебной работы	Всего часов	Распределение по семестрам в часах	
		Номер семестра	
		5	
Общая трудоёмкость дисциплины	108	108	
<i>Аудиторные занятия:</i>	38	38	
Лекции (Л)	38	38	
Практические занятия, семинары и (или) другие виды аудиторных занятий (ПЗ)	0	0	
Лабораторные работы (ЛР)	0	0	
<i>Самостоятельная работа (СРС)</i>	70	70	
Выполнение заданий	20	20	
Работа с учебником	30	30	
Подготовка к экзамену	20	20	
Вид итогового контроля (зачет, диф.зачет, экзамен)	-	экзамен	

5. Содержание дисциплины

№ раздела	Наименование разделов дисциплины	Объем аудиторных занятий по видам в часах			
		Всего	Л	ПЗ	ЛР
1	Выпуклые множества	12	12	0	0
2	Выпуклые функции	4	4	0	0
3	Отделимость в банаховых пространствах	10	10	0	0
4	Элементы субдифференциального исчисления	8	8	0	0
5	Выпуклое программирование и его приложения.	4	4	0	0

5.1. Лекции

№ лекции	№ раздела	Наименование или краткое содержание лекционного занятия	Кол-во часов
----------	-----------	---	--------------

1	1	Выпуклые множества в банаховом пространстве. Выпуклая оболочка множества, выпуклые комбинации точек этого множества, их связь. Теорема Каратеодори о выпуклой оболочке множеств в R^n .	2
2	1	Метрика Хаусдорфа для множеств, ее свойства. Теорема о полноте метрического (с хаусдорфовой метрикой) пространства компактов из банахова пространства.	2
3	1	Операции Минковского с множествами: сумма, разность, умножение на скаляр. Свойства этих операций	2
4	1	Понятия конуса и выпуклой конической оболочки. Понятия нижнего и верхнего касательных конусов к множеству в точке, их свойства.	2
5	1	Касательный конус Кларка, его выпуклость. Верхний и нижний асимптотические касательные конусы, их выпуклость и связь с другими касательными конусами.	2
6	1	Понятия эффективного множества и надграфика функции. Собственные полунепрерывные снизу функции, их связь с замкнутостью надграфика и лебеговых множеств уровня. Понятие замыкания функции. Теорема Вейерштрасса о достижении своего минимального значения собственной полунепрерывной снизу функцией на компакте из банахова пространства.	2
9	3	Отделимость (простая, сильная, строгая) выпуклых множеств в гильбертовом пространстве. Существование и единственность проекции на выпуклое замкнутое множество. Теорема о строгой отделимости точки и выпуклого замкнутого множества. Теорема о сильной отделимости компакта от выпуклого замкнутого множества.	2
10	3	Теорема об отделимости выпуклых множеств из банахова пространства. О совпадении замыканий выпуклых множеств в сильной и слабой топологиях.	2
11	3	Преобразование Лежандра–Юнга–Фенхеля функции (сопряженные функции). Теорема о представлении выпуклой полунепрерывной снизу функции как поточечного супремума аффинных функций. Теорема Фенхеля–Моро о второй сопряженной функции.	2
12	3	Инфинимальная конволюция функций. Теорема о двойственности инфинимальной конволюции и суммы функций при преобразовании Лежандра–Юнга–Фенхеля.	2
13	3	Представление выпуклых множеств через пересечение полупространств. Связь собственных выпуклых положительно однородных полунепрерывных снизу функций с опорными функциями множеств.	2
14	4	Производная по направлениям выпуклой функции, ее представление через инфинум. Непрерывность производной по направлениям, вычисляемой в точке непрерывности исходной выпуклой функции. Связь производной по направлениям с касательным конусом надграфика.	2
15	4	Субдифференциал выпуклой функции. Связь условия непустоты субдифференциала функции с условием полунепрерывности снизу в нуле производной по направлениям. Теорема Дубовицкого–Милютинина о субдифференциале максимума двух выпуклых функций.	2
16	4	Теорема Моро–Рокафеллара о субдифференциале суммы функций. Лемма о нормальном конусе пересечения выпуклых множеств.	2
17	4	Поляра множества и ее свойства. Касательный и нормальный конусы множества, заданного системой неравенств из выпуклых функций.	2
18	5	Задача выпуклого программирования. Метод множителей Лагранжа в задаче выпуклого программирования.	2
19	5	Локально выпуклые функции. Слабо и сильно выпуклые функции, g -выпуклые функции. Задача g -выпуклого программирования. Необходимые условия экстремума.	2
7	2	Выпуклые функции. Неравенство Йенсена. Функция Минковского и опорная	2

		функция множества. Их свойства. Выпуклая оболочка функции, ее свойства. Опорная функция суммы и разности (по Минковскому) выпуклых множеств. Формула хаусдорфа расстояния между ограниченными множествами через их опорные функции.	
8	2	Непрерывность выпуклой функции, ограниченной на некотором открытом множестве.	2

5.2. Практические занятия, семинары

Не предусмотрены

5.3. Лабораторные работы

Не предусмотрены

5.4. Самостоятельная работа студента

Выполнение СРС		
Вид работы и содержание задания	Список литературы (с указанием разделов, глав, страниц)	Кол-во часов
Работа с учебником	Рокафеллар, гл.1, §§1-5, гл.3, §§11-15, гл.5, §§23-25, гл.6, §§27-32 Экланд, Темам, ч.1, гл.1, §§1-6, гл.3, §§1-6, ч.2, гл.4, §§1-5	30
Выполнение заданий	Половинкин Е.С., Выпуклый анализ, сс. 25-51, Алексеев, В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи	20
Подготовка к экзамену	Половинкин Е.С., Выпуклый анализ, сс. 51-55, Рокафеллар, гл.5, §§23-25, гл.6, §§27-32 Экланд, Темам, ч.3, гл.8, §1-4, гл.9, §§3-4,	20

6. Инновационные образовательные технологии, используемые в учебном процессе

Не предусмотрены

Собственные инновационные способы и методы, используемые в образовательном процессе

Не предусмотрены

Использование результатов научных исследований, проводимых университетом, в рамках данной дисциплины: нет

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7.1. Паспорт фонда оценочных средств

Наименование разделов дисциплины	Контролируемая компетенция ЗУНы	Вид контроля (включая текущий)	№№ заданий
----------------------------------	---------------------------------	--------------------------------	------------

Выпуклые множества	ПК-1.1 способностью проводить исследования в области локальных и глобальных свойств функций действительных переменных, их представлений и приближений; отображений бесконечномерных пространств (функционалов, операторов); аналитических функций одного и многих комплексных переменных, их свойств, аналитических продолжений, граничных свойств аналитических функций, различных классов и пространств аналитических функций, представления аналитических функций (ряды, непрерывные дроби, интегральные представления и т. п.), приближений аналитическими функциями (многочленами, рациональными функциями, экспоненциальными многочленами и т. п.), геометрической теории функций одного и многих комплексных переменных, конформных отображений и их обобщений (квазиконформные, биголоморфные и т. п.), краевых задач для аналитических функций, приложения теории потенциала в комплексном анализе и комплексной теории потенциала	Текущий	1
Выпуклые функции	ОПК-1 способностью самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	Текущий	2
Отделимость в банаховых пространствах	ПК-1.1 способностью проводить исследования в области локальных и глобальных свойств функций действительных переменных, их представлений и приближений; отображений бесконечномерных пространств (функционалов, операторов); аналитических функций одного и многих комплексных переменных, их свойств, аналитических продолжений, граничных свойств аналитических функций, различных классов и пространств аналитических функций, представления аналитических функций (ряды, непрерывные дроби, интегральные представления и т. п.), приближений аналитическими функциями (многочленами, рациональными функциями, экспоненциальными многочленами и т. п.), геометрической теории функций одного и многих комплексных переменных, конформных отображений и их обобщений (квазиконформные, биголоморфные и т. п.), краевых задач для аналитических функций, приложения теории потенциала в комплексном анализе и комплексной теории	Текущий	3

	потенциала		
Элементы субдифференциального исчисления	ПК-1.1 способностью проводить исследования в области локальных и глобальных свойств функций действительных переменных, их представлений и приближений; отображений бесконечномерных пространств (функционалов, операторов); аналитических функций одного и многих комплексных переменных, их свойств, аналитических продолжений, граничных свойств аналитических функций, различных классов и пространств аналитических функций, представления аналитических функций (ряды, непрерывные дроби, интегральные представления и т. п.), приближений аналитическими функциями (многочленами, рациональными функциями, экспоненциальными многочленами и т. п.), геометрической теории функций одного и многих комплексных переменных, конформных отображений и их обобщений (квазиконформные, биголоморфные и т. п.), краевых задач для аналитических функций, приложения теории потенциала в комплексном анализе и комплексной теории потенциала	Текущий	4,5
Выпуклое программирование и его приложения.	ОПК-2 готовностью к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования	Текущий	6-7
Все разделы	ОПК-1 способностью самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	Промежуточная аттестация	1-7
Все разделы	ОПК-2 готовностью к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования	Промежуточная аттестация	1-7
Все разделы	ПК-1.1 способностью проводить исследования в области локальных и глобальных свойств функций действительных переменных, их представлений и приближений; отображений бесконечномерных пространств (функционалов, операторов); аналитических функций одного и многих комплексных переменных, их свойств, аналитических продолжений, граничных свойств аналитических функций, различных классов и пространств аналитических функций, представления аналитических функций (ряды, непрерывные дроби, интегральные представления и т. п.), приближений аналитическими функциями (многочленами, рациональными функциями,	Промежуточная аттестация	1-7

	экспоненциальными многочленами и т. п.), геометрической теории функций одного и многих комплексных переменных, конформных отображений и их обобщений (квазиконформные, биголоморфные и т. п.), краевых задач для аналитических функций, приложения теории потенциала в комплексном анализе и комплексной теории потенциала		
--	--	--	--

7.2. Виды контроля, процедуры проведения, критерии оценивания

Вид контроля	Процедуры проведения и оценивания	Критерии оценивания
Текущий	Каждое задание текущего контроля оценивается по количеству предложенных в этом задании задач и упражнений: за каждую верно решенную задачу слушателю начисляется 1 балл, в противном случае - 0 баллов. Всего в течение семестра слушателю, по результатам текущей аттестации может быть начислено 56 баллов.. Экзаменационная оценка выставляется по результатам текущей аттестации и результатам прохождения промежуточной аттестации в соответствии с индивидуальным рейтингом слушателя (БРС).	Отлично: Индивидуальный рейтинг слушателя превышает 85% Хорошо: Индивидуальный рейтинг слушателя более 75%, но менее 85% Удовлетворительно: Индивидуальный рейтинг слушателя более 60%, но менее 75% Неудовлетворительно: Индивидуальный рейтинг слушателя менее 60%
Промежуточная аттестация	Промежуточная аттестация реализуется в форме письменного экзамена. Экзаменационный билет содержит шесть заданий, на выполнение которых слушателю отводится 2 часа (120 мин.) Каждое задание приносит экзаменуемому от 0 до 4 баллов, в зависимости от правильности, полноты и обоснованности ответа. Итоговая оценка за курс выставляется на основании индивидуального рейтинга слушателя, который, в соответствии с БРС, подсчитывается по результатам текущей и промежуточной аттестации. Прохождение промежуточной аттестации обязательно.	Отлично: Индивидуальный рейтинг слушателя превышает 85% Хорошо: Индивидуальный рейтинг слушателя более 75%, но менее 85% Удовлетворительно: Индивидуальный рейтинг слушателя более 60%, но менее 75% Неудовлетворительно: Индивидуальный рейтинг слушателя менее 60%

7.3. Типовые контрольные задания

Вид контроля	Типовые контрольные задания
Текущий	work_4.pdf; work_5.pdf; work_3.pdf; work_7.pdf; work_1.pdf; work_6.pdf; work_2.pdf
Промежуточная аттестация	sample_ex_1.pdf; sample_ex_2.pdf

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Печатная учебно-методическая документация

а) основная литература:

1. Рокафеллар, Р. Т. Выпуклый анализ [Текст] Р. Т. Рокафеллар ; пер. с англ. А. Д. Иоффе и др. - М.: Мир, 1973. - 469 с.
2. Половинкин, Е. С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. - М.: Физматлит, 2004. - 415 с.
3. Вариационное исчисление и вариационные принципы [Электронный ресурс] 20 кн. в PDF-формате. - Б. м.: Регулярная и хаотическая динамика, 2004

б) дополнительная литература:

1. Экланд, И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы [Текст] пер. с англ. В. М. Тихомирова. - М.: Мир, 1979. - 399 с.
2. Алексеев, В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи [Текст] учеб. пособие для вузов по мат. направлениям и специальностям В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - Изд. 2-е, перераб. доп. - М.: Физматлит, 2007. - 255 с.
3. Ванько, В. И. Вариационное исчисление и оптимальное управление [Текст] учеб. для высш. техн. учеб. заведений В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. - 3-е изд. - М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. - 487 с. ил.

в) отечественные и зарубежные журналы по дисциплине, имеющиеся в библиотеке:
Не предусмотрены

г) методические указания для студентов по освоению дисциплины:

1. Е.С. Половинкин. Выпуклый анализ.

из них: учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студента:

1. Е.С. Половинкин. Выпуклый анализ.

Электронная учебно-методическая документация

№	Вид литературы	Наименование ресурса в электронной форме	Библиографическое описание
1	Методические пособия для преподавателя	Электронно-библиотечная система издательства Лань	Алексеев, В. М. Оптимальное управление : учебно-методическое пособие / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. — 2-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 384 с. — ISBN 5-9221-0589-2. — https://e.lanbook.com/book/48177 .
2	Методические пособия для самостоятельной работы студента	Электронно-библиотечная система издательства Лань	Алексеев, В.М. , Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров, Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. — М. : Физматлит, 2011. — 256 с. http://e.lanbook.com/book/2097

9. Информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса

Перечень используемого программного обеспечения:

Нет

Перечень используемых информационных справочных систем:

Нет

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Не предусмотрено