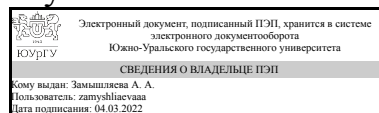


# ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ:  
Директор института  
Институт естественных и точных  
наук



А. А. Замышляева

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины П.1.В.07.04 Экстремальные задачи и выпуклый анализ. Вариационные принципы

для направления 01.06.01 Математика и механика

уровень аспирант тип программы

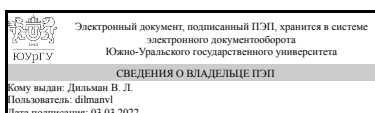
направленность программы

форма обучения очная

кафедра-разработчик Математический анализ и методика преподавания математики

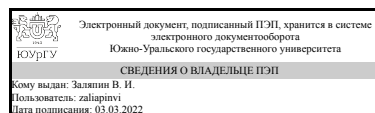
Рабочая программа составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, утверждённым приказом Минобрнауки от 29.07.2014 № 866

Зав.кафедрой разработчика,  
д.физ.-мат.н., доц.



В. Л. Дильман

Разработчик программы,  
к.физ.-мат.н., доц., профессор



В. И. Заляпин

## 1. Цели и задачи дисциплины

Курс "Экстремальные задачи и выпуклый анализ. Вариационные принципы" является фундаментальным курсом, в котором изучаются общие свойства выпуклых множеств и выпуклых функций в банаховых пространствах. Знание общих положений курса дает возможность исследовать решения различных задач, связанных с поиском минимумов и максимумов выпуклых функций, определенных на выпуклых множествах. К таким задачам относятся задачи линейного и выпуклого программирования, вариационного исчисления и оптимального управления. Цель курса - дать слушателям навыки исследования негладких выпуклых множеств, основы применения теории двойственности выпуклых функций, теории субдифференциального исчисления выпуклых и слабо выпуклых функций, овладение методом Лагранжа и его обоснование для решения выпуклых экстремальных задач. Курс обеспечивает теоретическую подготовку для таких курсов, как «Методы оптимизации», "Теория экстремумов", "Вариационное исчисление и др., в которых проводится детализация конкретных методов решения экстремальных задач.

### Краткое содержание дисциплины

1. Выпуклые множества в банаховом пространстве. Выпуклая оболочка множества, выпуклые комбинации точек этого множества, их связь. Теорема Каратеодори о выпуклой оболочке множеств в  $R^n$ . 2. Метрика Хаусдорфа для множеств, ее свойства. Теорема о полноте метрического (с хаусдорфовой метрикой) пространства компактов из банахова пространства. 3. Операции Минковского с множествами: сумма, разность, умножение на скаляр. 4. Понятия нижнего и верхнего касательных конусов к множеству в точке, их свойства. 5. Касательный конус Кларка, его выпуклость. 6. Понятия эффективного множества и надграфика функции. 7. Выпуклые функции. Неравенство Иенсена. Функция Минковского и опорная функция множества. Их свойства. Выпуклая оболочка функции, ее свойства. 8. Непрерывность выпуклой функции. 9. Отделимость (простая, сильная, строгая) выпуклых множеств в гильбертовом пространстве. Опорная гиперплоскость, ее существование в любой граничной точке выпуклого множества в  $R^n$ . 10. Теорема об отделимости выпуклых множеств из банахова пространства. 11. Преобразование Лежандра–Юнга–Фенхеля. Теорема Фенхеля–Моро о второй сопряженной функции. 12. Инфимальная конволюция функций. Теорема о двойственности инфимальной конволюции и суммы функций при преобразовании Лежандра–Юнга–Фенхеля. 13. Представление выпуклых множеств через пересечение полупространств. 14. Производная по направлениям выпуклой функции, ее представление через инфинум. Непрерывность производной по направлениям. Связь производной по направлениям с касательным конусом надграфика. 15. Субдифференциал выпуклой функции. Теорема Дубовицкого–Милютина о субдифференциале максимума двух выпуклых функций. 16. Теорема Моро–Рокафеллара о субдифференциале суммы функций. 17. Поляра множества и ее свойства. 18. Задача выпуклого программирования. Метод множителей Лагранжа в задаче выпуклого программирования. 19. Локально выпуклые функции. Слабо и сильно выпуклые функции,  $r$ -выпуклые функции. Задача  $r$ -выпуклого программирования. Необходимые условия экстремума.

## 2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Планируемые результаты освоения ОП ВО (компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (ЗУНы)
<p>ПК-1.1 способностью проводить исследования в области локальных и глобальных свойств функций действительных переменных, их представлений и приближений; отображений бесконечномерных пространств (функционалов, операторов); аналитических функций одного и многих комплексных переменных, их свойств, аналитических продолжений, граничных свойств аналитических функций, различных классов и пространств аналитических функций, представления аналитических функций (ряды, непрерывные дроби, интегральные представления и т. п.), приближений аналитическими функциями (многочленами, рациональными функциями, экспоненциальными многочленами и т. п.), геометрической теории функций одного и многих комплексных переменных, конформных отображений и их обобщений (квазиконформные, биголоморфные и т. п.), краевых задач для аналитических функций, приложения теории потенциала в комплексном анализе и комплексной теории потенциала</p>	<p>Знать: классические методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также базовые методы разработки и реализации алгоритмов их решения;</p>
	<p>Уметь: применять классические методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также базовые методы разработки и реализации алгоритмов их решения;</p>
	<p>Владеть: базовыми навыками выбора методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также методов разработки и реализации алгоритмов их решения.</p>
<p>ОПК-2 готовностью к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования</p>	<p>Знать: классические методологические приемы для доказательства фактов и анализа задач в области математики и информатики;</p>
	<p>Уметь: воспроизводить и объяснять логику доказательств классических фактов в области математики и информатики;</p>
	<p>Владеть: базовыми навыками выбора оптимальных методов доказательств фактов и анализа задач в области математики и информатики</p>
<p>ОПК-1 способностью самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий</p>	<p>Знать: основные методы математического анализа классических задач в области естественных наук, экономики и информационно-коммуникационных технологий;</p>
	<p>Уметь: применять классические методы построения математических моделей, а также стандартные аналитические и численные методы их анализа;</p>
	<p>Владеть: базовыми навыками определения границ применимости математических моделей и интерпретации результатов их анализа, навыками использования стандартных программных комплексов для решения математических задач и визуализации результатов.</p>

## 3. Место дисциплины в структуре ОП ВО

Перечень предшествующих дисциплин, видов работ учебного плана	Перечень последующих дисциплин, видов работ
Нет	Подготовка научно-квалификационной работы (диссертации) на соискание ученой степени кандидата наук (7 семестр)

Требования к «входным» знаниям, умениям, навыкам студента, необходимым при освоении данной дисциплины и приобретенным в результате освоения предшествующих дисциплин:

Нет

#### 4. Объём и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 з.е., 108 ч.

Вид учебной работы	Всего часов	Распределение по семестрам в часах	
		Номер семестра	
		5	
Общая трудоёмкость дисциплины	108	108	
<i>Аудиторные занятия:</i>	38	38	
Лекции (Л)	38	38	
Практические занятия, семинары и (или) другие виды аудиторных занятий (ПЗ)	0	0	
Лабораторные работы (ЛР)	0	0	
<i>Самостоятельная работа (СРС)</i>	70	70	
Выполнение заданий	20	20	
Работа с учебником	30	30	
Подготовка к экзамену	20	20	
Вид итогового контроля (зачет, диф.зачет, экзамен)	-	экзамен	

#### 5. Содержание дисциплины

№ раздела	Наименование разделов дисциплины	Объем аудиторных занятий по видам в часах			
		Всего	Л	ПЗ	ЛР
1	Выпуклые множества	12	12	0	0
2	Выпуклые функции	4	4	0	0
3	Отделимость в банаховых пространствах	10	10	0	0
4	Элементы субдифференциального исчисления	8	8	0	0
5	Выпуклое программирование и его приложения.	4	4	0	0

##### 5.1. Лекции

№ лекции	№ раздела	Наименование или краткое содержание лекционного занятия	Кол-во часов
----------	-----------	---	--------------

1	1	Выпуклые множества в банаховом пространстве. Выпуклая оболочка множества, выпуклые комбинации точек этого множества, их связь. Теорема Каратеодори о выпуклой оболочке множеств в $R^n$ .	2
2	1	Метрика Хаусдорфа для множеств, ее свойства. Теорема о полноте метрического (с хаусдорфовой метрикой) пространства компактов из банахова пространства.	2
3	1	Операции Минковского с множествами: сумма, разность, умножение на скаляр. Свойства этих операций	2
4	1	Понятия конуса и выпуклой конической оболочки. Понятия нижнего и верхнего касательных конусов к множеству в точке, их свойства.	2
5	1	Касательный конус Кларка, его выпуклость. Верхний и нижний асимптотические касательные конусы, их выпуклость и связь с другими касательными конусами.	2
6	1	Понятия эффективного множества и надграфика функции. Собственные полунепрерывные снизу функции, их связь с замкнутостью надграфика и лебеговых множеств уровня. Понятие замыкания функции. Теорема Вейерштрасса о достижении своего минимального значения собственной полунепрерывной снизу функцией на компакте из банахова пространства.	2
9	3	Отделимость (простая, сильная, строгая) выпуклых множеств в гильбертовом пространстве. Существование и единственность проекции на выпуклое замкнутое множество. Теорема о строгой отделимости точки и выпуклого замкнутого множества. Теорема о сильной отделимости компакта от выпуклого замкнутого множества.	2
10	3	Теорема об отделимости выпуклых множеств из банахова пространства. О совпадении замыканий выпуклых множеств в сильной и слабой топологиях.	2
11	3	Преобразование Лежандра–Юнга–Фенхеля функции (сопряженные функции). Теорема о представлении выпуклой полунепрерывной снизу функции как поточечного супремума аффинных функций. Теорема Фенхеля–Моро о второй сопряженной функции.	2
12	3	Инфинимальная конволюция функций. Теорема о двойственности инфинимальной конволюции и суммы функций при преобразовании Лежандра–Юнга–Фенхеля.	2
13	3	Представление выпуклых множеств через пересечение полупространств. Связь собственных выпуклых положительно однородных полунепрерывных снизу функций с опорными функциями множеств.	2
14	4	Производная по направлениям выпуклой функции, ее представление через инфинум. Непрерывность производной по направлениям, вычисляемой в точке непрерывности исходной выпуклой функции. Связь производной по направлениям с касательным конусом надграфика.	2
15	4	Субдифференциал выпуклой функции. Связь условия непустоты субдифференциала функции с условием полунепрерывности снизу в нуле производной по направлениям. Теорема Дубовицкого–Милютинина о субдифференциале максимума двух выпуклых функций.	2
16	4	Теорема Моро–Рокафеллара о субдифференциале суммы функций. Лемма о нормальном конусе пересечения выпуклых множеств.	2
17	4	Поляра множества и ее свойства. Касательный и нормальный конусы множества, заданного системой неравенств из выпуклых функций.	2
18	5	Задача выпуклого программирования. Метод множителей Лагранжа в задаче выпуклого программирования.	2
19	5	Локально выпуклые функции. Слабо и сильно выпуклые функции, $g$ -выпуклые функции. Задача $g$ -выпуклого программирования. Необходимые условия экстремума.	2
7	2	Выпуклые функции. Неравенство Йенсена. Функция Минковского и опорная	2

		функция множества. Их свойства. Выпуклая оболочка функции, ее свойства. Опорная функция суммы и разности (по Минковскому) выпуклых множеств. Формула хаусдорфа расстояния между ограниченными множествами через их опорные функции.	
8	2	Непрерывность выпуклой функции, ограниченной на некотором открытом множестве.	2

## 5.2. Практические занятия, семинары

Не предусмотрены

## 5.3. Лабораторные работы

Не предусмотрены

## 5.4. Самостоятельная работа студента

Выполнение СРС		
Вид работы и содержание задания	Список литературы (с указанием разделов, глав, страниц)	Кол-во часов
Работа с учебником	Рокафеллар, гл.1, §§1-5, гл.3, §§11-15, гл.5, §§23-25, гл.6, §§27-32 Экланд, Темам, ч.1, гл.1, §§1-6, гл.3, §§1-6, ч.2, гл.4, §§1-5	30
Выполнение заданий	Половинкин Е.С., Выпуклый анализ, сс. 25-51, Алексеев, В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи	20
Подготовка к экзамену	Половинкин Е.С., Выпуклый анализ, сс. 51-55, Рокафеллар, гл.5, §§23-25, гл.6, §§27-32 Экланд, Темам, ч.3, гл.8, §1-4, гл.9, §§3-4,	20

## 6. Инновационные образовательные технологии, используемые в учебном процессе

Не предусмотрены

## Собственные инновационные способы и методы, используемые в образовательном процессе

Не предусмотрены

Использование результатов научных исследований, проводимых университетом, в рамках данной дисциплины: нет

## 7. Фонд оценочных средств (ФОС) для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

### 7.1. Паспорт фонда оценочных средств

Наименование разделов дисциплины	Контролируемая компетенция ЗУНы	Вид контроля (включая текущий)	№№ заданий
----------------------------------	---------------------------------	--------------------------------	------------

Выпуклые множества	ПК-1.1 способностью проводить исследования в области локальных и глобальных свойств функций действительных переменных, их представлений и приближений; отображений бесконечномерных пространств (функционалов, операторов); аналитических функций одного и многих комплексных переменных, их свойств, аналитических продолжений, граничных свойств аналитических функций, различных классов и пространств аналитических функций, представления аналитических функций (ряды, непрерывные дроби, интегральные представления и т. п.), приближений аналитическими функциями (многочленами, рациональными функциями, экспоненциальными многочленами и т. п.), геометрической теории функций одного и многих комплексных переменных, конформных отображений и их обобщений (квазиконформные, биголоморфные и т. п.), краевых задач для аналитических функций, приложения теории потенциала в комплексном анализе и комплексной теории потенциала	Текущий	1
Выпуклые функции	ОПК-1 способностью самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	Текущий	2
Отделимость в банаховых пространствах	ПК-1.1 способностью проводить исследования в области локальных и глобальных свойств функций действительных переменных, их представлений и приближений; отображений бесконечномерных пространств (функционалов, операторов); аналитических функций одного и многих комплексных переменных, их свойств, аналитических продолжений, граничных свойств аналитических функций, различных классов и пространств аналитических функций, представления аналитических функций (ряды, непрерывные дроби, интегральные представления и т. п.), приближений аналитическими функциями (многочленами, рациональными функциями, экспоненциальными многочленами и т. п.), геометрической теории функций одного и многих комплексных переменных, конформных отображений и их обобщений (квазиконформные, биголоморфные и т. п.), краевых задач для аналитических функций, приложения теории потенциала в комплексном анализе и комплексной теории	Текущий	3

	потенциала		
Элементы субдифференциального исчисления	ПК-1.1 способностью проводить исследования в области локальных и глобальных свойств функций действительных переменных, их представлений и приближений; отображений бесконечномерных пространств (функционалов, операторов); аналитических функций одного и многих комплексных переменных, их свойств, аналитических продолжений, граничных свойств аналитических функций, различных классов и пространств аналитических функций, представления аналитических функций (ряды, непрерывные дроби, интегральные представления и т. п.), приближений аналитическими функциями (многочленами, рациональными функциями, экспоненциальными многочленами и т. п.), геометрической теории функций одного и многих комплексных переменных, конформных отображений и их обобщений (квазиконформные, биголоморфные и т. п.), краевых задач для аналитических функций, приложения теории потенциала в комплексном анализе и комплексной теории потенциала	Текущий	4,5
Выпуклое программирование и его приложения.	ОПК-2 готовностью к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования	Текущий	6-7
Все разделы	ОПК-1 способностью самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	Промежуточная аттестация	1-7
Все разделы	ОПК-2 готовностью к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования	Промежуточная аттестация	1-7
Все разделы	ПК-1.1 способностью проводить исследования в области локальных и глобальных свойств функций действительных переменных, их представлений и приближений; отображений бесконечномерных пространств (функционалов, операторов); аналитических функций одного и многих комплексных переменных, их свойств, аналитических продолжений, граничных свойств аналитических функций, различных классов и пространств аналитических функций, представления аналитических функций (ряды, непрерывные дроби, интегральные представления и т. п.), приближений аналитическими функциями (многочленами, рациональными функциями,	Промежуточная аттестация	1-7



	экспоненциальными многочленами и т. п.), геометрической теории функций одного и многих комплексных переменных, конформных отображений и их обобщений (квазиконформные, биголоморфные и т. п.), краевых задач для аналитических функций, приложения теории потенциала в комплексном анализе и комплексной теории потенциала		
--	--	--	--

## 7.2. Виды контроля, процедуры проведения, критерии оценивания

Вид контроля	Процедуры проведения и оценивания	Критерии оценивания
Текущий	Каждое задание текущего контроля оценивается по количеству предложенных в этом задании задач и упражнений: за каждую верно решенную задачу слушателю начисляется 1 балл, в противном случае - 0 баллов. Всего в течение семестра слушателю, по результатам текущей аттестации может быть начислено 56 баллов.. Экзаменационная оценка выставляется по результатам текущей аттестации и результатам прохождения промежуточной аттестации в соответствии с индивидуальным рейтингом слушателя (БРС).	Отлично: Индивидуальный рейтинг слушателя превышает 85% Хорошо: Индивидуальный рейтинг слушателя более 75%, но менее 85% Удовлетворительно: Индивидуальный рейтинг слушателя более 60%, но менее 75% Неудовлетворительно: Индивидуальный рейтинг слушателя менее 60%
Промежуточная аттестация	Промежуточная аттестация реализуется в форме письменного экзамена. Экзаменационный билет содержит шесть заданий, на выполнение которых слушателю отводится 2 часа (120 мин.) Каждое задание приносит экзаменуемому от 0 до 4 баллов, в зависимости от правильности, полноты и обоснованности ответа. Итоговая оценка за курс выставляется на основании индивидуального рейтинга слушателя, который, в соответствии с БРС, подсчитывается по результатам текущей и промежуточной аттестации. Прохождение промежуточной аттестации обязательно.	Отлично: Индивидуальный рейтинг слушателя превышает 85% Хорошо: Индивидуальный рейтинг слушателя более 75%, но менее 85% Удовлетворительно: Индивидуальный рейтинг слушателя более 60%, но менее 75% Неудовлетворительно: Индивидуальный рейтинг слушателя менее 60%

## 7.3. Типовые контрольные задания

Вид контроля	Типовые контрольные задания
Текущий	work_4.pdf; work_5.pdf; work_3.pdf; work_7.pdf; work_1.pdf; work_6.pdf; work_2.pdf
Промежуточная аттестация	sample_ex_1.pdf; sample_ex_2.pdf

## 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### Печатная учебно-методическая документация

а) основная литература:

1. Рокафеллар, Р. Т. Выпуклый анализ [Текст] Р. Т. Рокафеллар ; пер. с англ. А. Д. Иоффе и др. - М.: Мир, 1973. - 469 с.
2. Половинкин, Е. С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. - М.: Физматлит, 2004. - 415 с.
3. Вариационное исчисление и вариационные принципы [Электронный ресурс] 20 кн. в PDF-формате. - Б. м.: Регулярная и хаотическая динамика, 2004

*б) дополнительная литература:*

1. Экланд, И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы [Текст] пер. с англ. В. М. Тихомирова. - М.: Мир, 1979. - 399 с.
2. Алексеев, В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи [Текст] учеб. пособие для вузов по мат. направлениям и специальностям В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - Изд. 2-е, перераб. доп. - М.: Физматлит, 2007. - 255 с.
3. Ванько, В. И. Вариационное исчисление и оптимальное управление [Текст] учеб. для высш. техн. учеб. заведений В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. - 3-е изд. - М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. - 487 с. ил.

*в) отечественные и зарубежные журналы по дисциплине, имеющиеся в библиотеке:*  
Не предусмотрены

*г) методические указания для студентов по освоению дисциплины:*

1. Е.С. Половинкин. Выпуклый анализ.

*из них: учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студента:*

1. Е.С. Половинкин. Выпуклый анализ.

**Электронная учебно-методическая документация**

№	Вид литературы	Наименование ресурса в электронной форме	Библиографическое описание
1	Методические пособия для преподавателя	Электронно-библиотечная система издательства Лань	Алексеев, В. М. Оптимальное управление : учебно-методическое пособие / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. — 2-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 384 с. — ISBN 5-9221-0589-2. — <a href="https://e.lanbook.com/book/48177">https://e.lanbook.com/book/48177</a> .
2	Методические пособия для самостоятельной работы студента	Электронно-библиотечная система издательства Лань	Алексеев, В.М. , Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров, Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. — М. : Физматлит, 2011. — 256 с. <a href="http://e.lanbook.com/book/2097">http://e.lanbook.com/book/2097</a>

**9. Информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса**

Перечень используемого программного обеспечения:

Нет

Перечень используемых информационных справочных систем:

Нет

**10. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Не предусмотрено