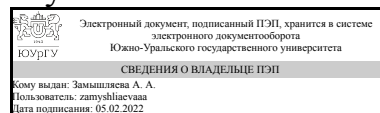


# ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ:  
Директор института  
Институт естественных и точных  
наук



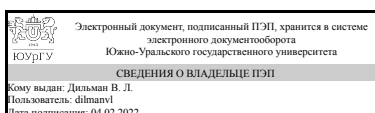
А. А. Замышляева

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины 1.О.16 Функциональный анализ  
для направления 01.03.03 Механика и математическое моделирование  
уровень Бакалавриат  
форма обучения очная  
кафедра-разработчик Математический анализ и методика преподавания  
математики

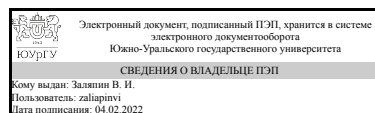
Рабочая программа составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование, утверждённым приказом Минобрнауки от 10.01.2018 № 10

Зав.кафедрой разработчика,  
д.физ.-мат.н., доц.



В. Л. Дильман

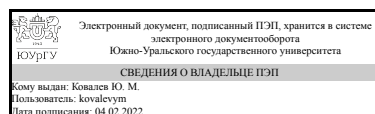
Разработчик программы,  
к.физ.-мат.н., доц., профессор



В. И. Заляпин

СОГЛАСОВАНО

Руководитель направления  
д.физ.-мат.н., проф.



Ю. М. Ковалев

## 1. Цели и задачи дисциплины

Сформировать у слушателя понимание обобщенного подхода к основным понятиям и методам элементарных глав математического анализа и смежных областей алгебры и геометрии. С единой точки зрения изучить различные проблемы из специальных аналитических дисциплин (анализа, алгебры, дифференциальных уравнений, вариационного исчисления) и установить связи между далекими на первый взгляд математическими теориями и тем самым способствовать более глубокому пониманию основных математических конструкций.

## Краткое содержание дисциплины

Метрические пространства; открытые и замкнутые множества; компактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа; полнота и пополнение; теорема о стягивающих шарах; принцип сжимающих отображений; топологические пространства; примеры. Множества, алгебра множеств; мощность, счетные и континуальные множества. Линейные пространства. Линейные комбинации. Зависимость. Размерность. Определение линейного нормированного пространства; примеры норм; банаховы пространства; сопряженное пространство, его полнота; теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала; общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах; линейные операторы; норма оператора; сопряженный оператор; принцип равномерной ограниченности; обратный оператор; спектр и резольвента; теорема Банаха об обратном операторе; компактные операторы; компактность интегральных операторов; Скалярное произведение; неравенство Коши – Буняковского – Шварца; ортогональные системы; неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема об изоморфизме, ортогональное дополнение; общий вид линейного функционала; самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы; ортопроекторы; спектр эрмитова и унитарного оператора; функциональное исчисление; приведение оператора к виду умножения на функцию; спектральная теорема;

## 2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

| Планируемые результаты освоения<br>ОП ВО (компетенции)                                                                                       | Планируемые результаты<br>обучения по дисциплине                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОПК-1 Способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности | Знает: структуру функциональных пространств и операторов, структуру функционалов, свойства инвариантности основных функциональных структур<br>Умеет: анализировать конкретные функциональные пространства, строить ортонормированные базисы в гильбертовых пространствах, вычислять интегралы Лебега, устанавливать изоморфизм различных конкретных пространств<br>Имеет практический опыт: исследования операторов и функционалов в гильбертовых пространствах, дифференциальных операторов, интегральных уравнений |

### 3. Место дисциплины в структуре ОП ВО

| Перечень предшествующих дисциплин, видов работ учебного плана                                                    | Перечень последующих дисциплин, видов работ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 1.О.22 Линейная алгебра и аналитическая геометрия,<br>1.О.32 Комплексный анализ,<br>1.О.15 Математический анализ | Не предусмотрены                            |

Требования к «входным» знаниям, умениям, навыкам студента, необходимым при освоении данной дисциплины и приобретенным в результате освоения предшествующих дисциплин:

| Дисциплина                                        | Требования                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.О.32 Комплексный анализ                         | Знает: основные понятия и теоремы теории функции комплексной переменной Умеет: применять навыки дифференцирования и интегрирования функции комплексной переменной, формулировать основные идеи доказательства утверждения Имеет практический опыт: применения методов теории функций комплексной переменной, различных приемов доказательств утверждений                   |
| 1.О.22 Линейная алгебра и аналитическая геометрия | Знает: основные положения и методологию линейной алгебры и аналитической геометрии Умеет: решать типовые задачи линейной алгебры и аналитической геометрии Имеет практический опыт: использования теории матриц и их определителей при решении типовых и прикладных задач, решения алгебраических уравнений, систем уравнений и других классических задач линейной алгебры |
| 1.О.15 Математический анализ                      | Знает: объекты, понятия, теоремы и методы математического анализа Умеет: решать задачи и упражнения математического анализа на основе знания понимания утверждений и методов математического анализа Имеет практический опыт: решения содержательных и прикладных задач, требующих знания утверждений и методов математического анализа                                    |

### 4. Объём и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 з.е., 108 ч., 54,25 ч. контактной работы

| Вид учебной работы            | Всего часов | Распределение по семестрам в часах |
|-------------------------------|-------------|------------------------------------|
|                               |             | Номер семестра                     |
|                               |             | 6                                  |
| Общая трудоёмкость дисциплины | 108         | 108                                |
| Аудиторные занятия:           | 48          | 48                                 |

|                                                                             |       |       |
|-----------------------------------------------------------------------------|-------|-------|
| Лекции (Л)                                                                  | 32    | 32    |
| Практические занятия, семинары и (или) другие виды аудиторных занятий (ПЗ)  | 16    | 16    |
| Лабораторные работы (ЛР)                                                    | 0     | 0     |
| Самостоятельная работа (СРС)                                                | 53,75 | 53,75 |
| с применением дистанционных образовательных технологий                      | 0     |       |
| Освоение основных теоретических положений и конструкций. Работа с учебником | 16    | 16    |
| Освоение практической части курса. Выполнение текущих заданий               | 30    | 30    |
| Подготовка к зачету                                                         | 7,75  | 7.75  |
| Консультации и промежуточная аттестация                                     | 6,25  | 6,25  |
| Вид контроля (зачет, диф.зачет, экзамен)                                    | -     | зачет |

## 5. Содержание дисциплины

| № раздела | Наименование разделов дисциплины                   | Объем аудиторных занятий по видам в часах |   |    |    |
|-----------|----------------------------------------------------|-------------------------------------------|---|----|----|
|           |                                                    | Всего                                     | Л | ПЗ | ЛР |
| 1         | Метрические пространства                           | 14                                        | 8 | 6  | 0  |
| 2         | Линейные пространства. Нормированные пространства. | 8                                         | 6 | 2  | 0  |
| 3         | Пространства со скалярным произведением            | 8                                         | 6 | 2  | 0  |
| 4         | Отображения. Операторы и функционалы               | 12                                        | 8 | 4  | 0  |
| 5         | Элементы спектральной теории                       | 6                                         | 4 | 2  | 0  |

### 5.1. Лекции

| № лекции | № раздела | Наименование или краткое содержание лекционного занятия                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Кол-во часов |
|----------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1-2      | 1         | Метрические пространства; открытые и замкнутые множества; сходимость в метрических пространствах Полнота и пополнение; теорема о вложенных шарах Счетные и несчетные множества. Сепарабельные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений; Непрерывные отображения метрических пространств. Компактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа. | 4            |
| 3-4      | 1         | Компактность. Компактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа. Критерии компактности. Полнота. Сепарабельность. Пополнение метрических пространств. Теорема Боля-Брауэра. Теорема Шаудера                                                                                                                                                                | 4            |
| 5-6-7    | 2         | Линейные векторные пространства. Линейная зависимость. Размерность. Понятие о базисе. Базис в конечномерных и бесконечномерных пространствах. Базис Гамеля. Базис Шаудера. Линейные нормированные пространства. Неравенства Гельдера и Минковского. Банаховы пространства. Примеры.                                                                                           | 6            |
| 8-9-10   | 3         | Скалярное произведение в линейных пространствах. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Евклидовы, унитарные и гильбертовы пространства. Примеры. Ортонормированные базисы в гильбертовых пространствах. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Процедура ортогонализации. Ряды Фурье. Неравенство                                 | 6            |

|       |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |   |
|-------|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
|       |   | Бесселя. Полнота и замкнутость ортогональных систем. Равенство Парсеваля. Базис Шаудера в сепарабельных гильбертовых пространствах. Наилучшие приближения в гильбертовых пространствах.                                                                                                                                                            |   |
| 11-12 | 4 | Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Норма линейного оператора. Пространство линейных операторов. Точечная и равномерная сходимости последовательности линейных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза. Обратные операторы. Условия обратимости и непрерывной обратимости линейного оператора. Теорема Банаха об обратном операторе. | 4 |
| 13-14 | 4 | Линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейных непрерывных функционалов в некоторых конкретных нормированных пространствах. Сопряженные пространства и сопряженные операторы. Ограниченность сопряженного оператора.                                                                                                                | 4 |
| 15-16 | 5 | Введение в спектральную теорию. Конечномерные операторы. Вполне непрерывные операторы. Спектр и резольвента. Введение в спектральную теорию. Самосопряженные операторы. Спектральные свойства самосопряженных операторов.                                                                                                                          | 4 |

## 5.2. Практические занятия, семинары

| № занятия | № раздела | Наименование или краткое содержание практического занятия, семинара                                                                                                                                                                                                                          | Кол-во часов |
|-----------|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1         | 1         | Числовые множества. Мощность числовых множеств. Счетность множеств, . Несчетность промежутка $[0;1]$ и . Непосредственное установление эквивалентности точечных множеств.                                                                                                                    | 2            |
| 2-3       | 1         | Примеры метрических пространств; открытые и замкнутые множества; сходимости в метрических пространствах Полные метрические пространства. Счетные и несчетные множества. Сепарабельные метрические пространства                                                                               | 4            |
| 4         | 2         | Линейные пространства. Базисы. Координаты. Канонический изоморфизм конечномерных пространств. Нормированные пространства. Пополнение по норме. Банаховы пространства                                                                                                                         | 2            |
| 5         | 3         | Скалярное произведение. Ортогональность. Базисы и координаты в сепарабельных гильбертовых пространствах. Ортогонализация Шмидта.                                                                                                                                                             | 2            |
| 6-7       | 4         | Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Норма линейного оператора. Обратные операторы. Свойства обратных операторов. Линейные функционалы в нормированных пространствах. Непрерывность и ограниченность. Общий вид линейного функционала в евклидовых (унитарных) пространствах. | 4            |
| 8         | 5         | Сопряженные пространства и сопряженные операторы.                                                                                                                                                                                                                                            | 2            |

## 5.3. Лабораторные работы

Не предусмотрены

## 5.4. Самостоятельная работа студента

| Выполнение СРС                                                    |                                                                               |         |              |
|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|---------|--------------|
| Подвид СРС                                                        | Список литературы (с указанием разделов, глав, страниц) / ссылка на ресурс    | Семестр | Кол-во часов |
| Освоение основных теоретических положений и конструкций. Работа с | Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. гл.1,с. 11-53, | 6       | 16           |

|                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |   |      |
|------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|------|
| учебником                                                        | гл.2, с.57-77, гл.3, с.122-161, гл.4, с. 173-196, гл.6, с. 261-268. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. гл.1, \$1,2,3, гл.2. \$1,2,3,7, гл.3 , \$1, 3,4, гл.4. \$ 1,2,5,6                                                                               |   |      |
| Освоение практической части курса.<br>Выполнение текущих заданий | Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. гл.1,с. 11-53, гл.2, с.57-77, гл.3, с.122-161, гл.4, с. 173-196, гл.6, с. 261-268. Треногин В.А. Функциональный анализ, гл.1, \$1-6, гл.3, \$10-15                                                                                  | 6 | 30   |
| Подготовка к зачету                                              | Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. гл.1,с. 11-53, гл.2, с.57-77, гл.3, с.122-161, гл.4, с. 173-196, гл.6, с. 261-268. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. гл.1, \$1,2,3, гл.2. \$1,2,3,7, гл.3 , \$1, 3,4, гл.4. \$ 1,2,5,6 | 6 | 7,75 |

## 6. Текущий контроль успеваемости, промежуточная аттестация

Контроль качества освоения образовательной программы осуществляется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе оценивания результатов учебной деятельности обучающихся.

### 6.1. Контрольные мероприятия (КМ)

| № КМ | Се-местр | Вид контроля     | Название контрольного мероприятия        | Вес | Макс. балл | Порядок начисления баллов                                                                                                       | Учитывается в ПА |
|------|----------|------------------|------------------------------------------|-----|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| 1    | 6        | Текущий контроль | Элементы теории множеств                 | 10  | 10         | Всего в задании 10 обязательных задач. Количество баллов от 0 до 10 определяется количеством правильно и в срок решенных задач. | зачет            |
| 2    | 6        | Текущий контроль | Метрические пространства-1               | 10  | 10         | Всего в задании 10 обязательных задач. Количество баллов от 0 до 10 определяется количеством правильно и в срок решенных задач. | зачет            |
| 3    | 6        | Текущий контроль | Метрические пространства-2               | 10  | 10         | Всего в задании 10 обязательных задач. Количество баллов от 0 до 10 определяется количеством правильно и в срок решенных задач. | зачет            |
| 4    | 6        | Текущий контроль | Линейные нормированные пространства.     | 10  | 10         | Всего в задании 10 обязательных задач. Количество баллов от 0 до 10 определяется количеством правильно и в срок решенных задач. | зачет            |
| 5    | 6        | Текущий контроль | Пространства со скалярным произведением. | 10  | 10         | Всего в задании 10 обязательных задач. Количество баллов от 0 до 10 определяется количеством правильно и в срок решенных задач. | зачет            |
| 6    | 6        | Текущий контроль | Линейные операторы и                     | 10  | 30         | Баллы за задание начисляются по результатам устного собеседования и                                                             | зачет            |

|   |   |                          |                |   |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |       |
|---|---|--------------------------|----------------|---|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
|   |   |                          | функционалы.   |   |     | письменной контрольной работы: 0 - отсутствует ответ на поставленные вопросы, 5 - верно решены и объяснены 2 задачи , из предложенных для решения, 10 - верно решены и объяснены 3 задачи , из предложенных для решения, 15 -верно решены и объяснены 4 задачи , из предложенных для решения , 20 - верно решены и объяснены 5 задач , из предложенных для решения, 25 - верно решены и объяснены 6 задач , из предложенных для решения, 30 - верно решены и объяснены 7 задач , из предложенных для решения. |       |
| 7 | 6 | Бонус                    | Другие заслуги | - | 15  | За участие в конференциях, совещаниях, олимпиадах и т.п. начисляется от 0 до 15%, в зависимости от уровня успешности участия в мероприятии.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | зачет |
| 8 | 6 | Промежуточная аттестация | зачет          | - | 100 | Зачетное задание содержит 7 задач, каждая из которых приносит студенту от 0 до 20 баллов: 0 - задача не решена, 10 - предложен, но не реализован, путь решения задачи, 15 - предложен путь решения задачи, реализованный с ошибками, 20 - задача решена верно.                                                                                                                                                                                                                                                | зачет |

## 6.2. Процедура проведения, критерии оценивания

| Вид промежуточной аттестации | Процедура проведения                                                                                                                                                                                                                                          | Критерии оценивания                     |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| зачет                        | Зачет реализуется в форме письменной контрольной работы, на которую отводится 2 акад. часа. Результаты контрольной работы учитываются в итоговой оценке за курс. Возможно получение зачета без прохождения зачетной процедуры согласно положению о БРС ЮУрГУ. | В соответствии с пп. 2.5, 2.6 Положения |

## 6.3. Оценочные материалы

| Компетенции | Результаты обучения                                                                                                                                                                                               | № КМ |   |   |   |   |   |   |   |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|---|---|---|---|---|---|---|
|             |                                                                                                                                                                                                                   | 1    | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ОПК-1       | Знает: структуру функциональных пространств и операторов, структуру функционалов, свойства инвариантности основных функциональных структур                                                                        | +    |   |   | + |   |   |   | + |
| ОПК-1       | Умеет: анализировать конкретные функциональные пространства, строить ортонормированные базисы в гильбертовых пространствах, вычислять интегралы Лебега, устанавливать изоморфизм различных конкретных пространств |      | + |   |   | + |   |   | + |
| ОПК-1       | Имеет практический опыт: исследования операторов и функционалов в гильбертовых пространствах, дифференциальных операторов, интегральных уравнений                                                                 |      |   | + |   |   | + | + | + |

Фонды оценочных средств по каждому контрольному мероприятию находятся в приложениях.

## 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### Печатная учебно-методическая документация

#### а) основная литература:

1. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа Учеб. для мат. спец. ун-тов. - 6-е изд., испр. - М.: Наука, 1989. - 623 с. ил.
2. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. - 2-е изд., перераб. - М.: Наука, 1965. - 520 с. черт.

#### б) дополнительная литература:

1. Треногин, В. А. Задачи и упражнения по функциональному анализу Текст В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. - М.: Наука, 1984. - 256 с.

#### в) отечественные и зарубежные журналы по дисциплине, имеющиеся в библиотеке:

1. Функциональный анализ и его приложения,  
<http://www.mathnet.ru/faa>

#### г) методические указания для студентов по освоению дисциплины:

1. М.Л. Катков, Л.В. Матвеева, Л.Д. Менихес. Сборник задач по функциональному анализу. Изд. ЮУрГУ, Челябинск, 1999
2. Бескачко В.П., Заляпин В.И. Математические основы квантовой механики

#### из них: учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студента:

1. Бескачко В.П., Заляпин В.И. Математические основы квантовой механики

### Электронная учебно-методическая документация

| № | Вид литературы            | Наименование ресурса в электронной форме          | Библиографическое описание                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---|---------------------------|---------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Основная литература       | Электронно-библиотечная система издательства Лань | Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. [Электронный ресурс] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2009. — 572 с. — Режим доступа: <a href="http://e.lanbook.com/book/2206">http://e.lanbook.com/book/2206</a> — Загл. с экрана. |
| 2 | Основная литература       | Электронно-библиотечная система издательства Лань | Треногин, В.А. Функциональный анализ. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2007. — 488 с. — Режим доступа: <a href="http://e.lanbook.com/book/59471">http://e.lanbook.com/book/59471</a>                                                                              |
| 3 | Дополнительная литература | Электронно-библиотечная система издательства Лань | Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу. [Электронный ресурс] / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2005. — 240 с. — Режим доступа: <a href="http://e.lanbook.com/book/2342">http://e.lanbook.com/book/2342</a>     |

Перечень используемого программного обеспечения:

Нет

Перечень используемых профессиональных баз данных и информационных справочных систем:

Нет

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Не предусмотрено