На правах рукописи

Замышляева Алена Александровна

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2013

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО "Южно-Уральский государственный университет" (Национальный исследовательский университет).

Научный консультант:

доктор физико-математических наук,
профессор Свиридюк Георгий Анатольевич.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Лакеев Анатолий Валентинович,
ведущий научный сотрудник Института динамики систем и теории управления СО РАН;

доктор физико-математических наук,
профессор Ковалев Юрий Михайлович,
заведующий кафедрой вычислительной механики сплошных сред ФГБОУ ВПО "Южно-Уральский государственный университет"(НИУ);

доктор физико-математических наук,
профессор Гликлих Юрий Евгеньевич,
профессор кафедры алгебры и топологических методов анализа ФГБОУ ВПО "Воронежский государственный университет".

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО "Югорский государственный университет"

Защита состоится 25 декабря 2013 года в 9.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Автореферат разослан «   » ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, доцент А. В. Келлер

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена разработке новых аналитических и численных методов исследования математических моделей на основе уравнений соблевского типа высокого порядка. Актуальность изучения такого рода моделей обусловлена необходимостью исследования важных прикладных задач, в частности, в области физики атмосферы, физики плазмы, теории электрических цепей, теории ползучести металлов, динамики колебаний стратифицированной жидкости, теории фильтрации, биологии и других. Именно развитие теории уравнений соболевского типа позволило поставить вопрос об аналитическом и численном исследовании как существующих задач, так и новых в рамках сложившихся направлений математического моделирования, например, в теории звуковых и молекулярных волн, гидродинамике, теории упругости и др., описываемых уравнениями высокого порядка.

Несмотря на то, что первые исследования уравнений неразрешенных относительно старшей производной по времени появились еще в работах А.Пуанкаре в 1885 году, а систематическое изучение начально-краевых задач для таких уравнений началось в 40-х годах прошлого столетия с работ С. Л. Соболева, в настоящее время теория уравнений соболевского типа активно развивается и переживает пору бурного расцвета. В этой области активно работают Р.Е. Шоуолтер, А.Фавини, А.Яги, Г.В. Демиденко, С.В. Успенский, Н.В. Сидоров, М.В. Фалалеев, М.О. Корпусов, И.В. Мельникова, С.Г. Пятков, А.И. Кожанов, Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева, В.Е. Федоров и др. Сформировались научные направления, вокруг которых сложились научные школы.

Данная диссертационная работа выполнена в рамках направления, возглавляемого Г.А. Свиридюком, и посвящена исследованию математических моделей на основе неклассических уравнений математической физики высокого порядка:

Математическая модель de Gennes линейных волн в смектиках. Уравнение линейных волн в смектиках, впервые полученное P.G.de Gennes и имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3 u = \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Delta_2 u,\ \alpha_1 > 0,$$

где $\Delta_3 = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2},\ \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

Исходная модель имеет смысл в цилиндрической области по переменным $\{z, x_1, x_2\} \in [a, b] \times \Omega$. В случае установившихся звуковых колебаний $u(x_1, x_2, z, t) = v(x_1, x_2, z)\exp(-i\omega t)$ в смектике исходное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\Delta_2 v + \alpha_2 v) + \alpha_2 \Delta_2 v = 0,\ \ \alpha_2 = \omega^2 \alpha_1^{-1} \tag{1}$$

и вместе с начально-краевыми условиями представляет математическую модель de Gennes.

Математическая модель колебаний в молекуле ДНК. В работе исследуется математическая модель:

$$\begin{matrix} u(x,0) = u_0(x), & \dot{u}(x,0) = u_1(x), \\ v(x,0) = v_0(x), & \dot{v}(x,0) = v_1(x), \end{matrix} \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t) = v(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\begin{cases} (b+\Delta)\ddot{u} = a\Delta u + f(u,v) + w_1, \\ (b+\Delta)\ddot{v} = d\Delta v + g(u,v) + w_2. \end{cases} \tag{4}$$

Коэффициенты $a, b, d \in \mathbb{R}$ связывают размеры молекулы, линейную плотность и силу межмолекулярного взаимодействия, функции u и v определяют продольную и поперечную деформацию. функции w_1, w_2 задают внешнее воздействие на молекулу, детерминированное или случайное. Система уравнений (4) при $n = 1$ моделирует колебания в крупных молекулах, в том числе в молекулах ДНК. При $n = 1$ данная математическая модель была предложена P.L. Christiansen[1].

Математическая модель распространения волн на мелкой воде. Пусть Ω ограниченная область из $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим математическую модель распространения волн на мелкой воде при условии потенциальности движения и сохранения массы в слое:

$$(\lambda - \Delta)\ddot{u} = \alpha^2 \Delta u + f, \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}. \tag{7}$$

Функция $u(x,t)$ определяет высоту волны в момент времени t в точке x. Коэффициенты λ, α связывают глубину, гравитационную постоянную и число Бонда. Уравнение (5) впервые получено J.V. Boussinesque[2].

Линеаризованная математическая модель Benney – Luke. В цилиндре $[0,l] \times \mathbb{R}$ рассмотрим линеаризованное уравнение Benney – Luke[3]

$$u_{tt} - u_{xx} + au_{xxxx} - bu_{xxtt} = 0, \tag{8}$$

---

[1] *Cristiansen, P.L.* On a Toda lattice model with a transversal degree of freedom / P.L. Cristiansen, V. Muto, P.S. Lomdahl // Nonlinearity. - 1990. – № 4. P. 477–501.

[2] *Boussinesq, J.V.* Essai sur la théorie des eaux courantes, Mém. Pésentés Divers Savants Acad. Sci. Inst. France. – 1877. – № 23. – P. 1–680.

[3] *Benney, D.J.* Interactions of permanent waves of finite amplitude / D.J. Benney, J.C. Luke // J. Math. Phys. – 1964. – № 43. – P. 309–313.

с краевыми условиями Бенара

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \tag{9}$$

Математическая модель (8), (9) с тем или иным начальным условием описывает двустороннее распространение длинных волн на мелкой воде с учетом поверхностного натяжения.

Математические модели линейных волн в плазме. Уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{B_i}^2\right)(\Delta_3\Phi - \frac{1}{r_D^2}\Phi) + \omega_{p_i}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3\Phi + \omega_{B_i}^2\omega_{p_i}^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} = 0, \tag{10}$$

полученное впервые Ю.Д. Плетнером[4], описывает линейные волны в плазме во внешнем магнитном поле. Функция Φ представляет обобщенный потенциал электрического поля, константы $\omega_{B_i}^2$, $\omega_{p_i}^2$ и r_D^2 характеризуют ионную гирочастоту, частоту Ленгмюра и радиус Дебая соответственно. Обобщением (10) является уравнение

$$(\Delta - \lambda)v_{tttt} + (\Delta - \lambda')v_{tt} + \alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = 0. \tag{11}$$

Заметим, что уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta\Phi - \Phi) + \Delta\Phi = 0 \tag{12}$$

описывает линейные волны в "незамагниченной"
плазме[5]. В работе исследуется более общая математическая модель линейных волн в плазме

$$(\lambda - \Delta)\Phi_{tt} = \beta(\Delta - \lambda'')\Phi + f(t), \tag{13}$$

с различными начально-краевыми условиями.

Математическая модель колебаний в конструкции. Пусть $G = G(\mathcal{V};\mathcal{E})$ - конечный связный ориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^m$ - множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}_{j=1}^n$ - множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и толщину $d_j > 0$. На графе G рассмотрим уравнения

$$\lambda u_{jtt} - u_{jxxtt} = \alpha(u_{jxxt} - \lambda' u_{jt}) + \beta(u_{jxx} - \lambda'' u_j) \text{ для всех } x \in (0,l_j),\ t \in \mathbb{R}, j = \overline{1,n}. \tag{14}$$

[4]Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д.Плетнер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

[5]*Габов, С.А.* Новые задачи математической теории волн / С.А. Габов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1998.

Для уравнений (14) в каждой вершине $V_i, \ i = \overline{1,m}$ зададим краевые условия

$$\sum_{j:E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{k:E_k \in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0, \tag{15}$$

$$u_s(0,t) = u_j(0,t) = u_k(l_k,t) = u_m(l_m,t), \tag{16}$$

для всех $E_s, E_j \in E^{\alpha}(V_i), \ E_k, E_m \in E^{\omega}(V_i)$. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i. Если дополнить (15), (16) начальными условиями

$$u_j(x,0) = u_{0j}(x), \ u_{jt}(x,0) = u_{1j}(x), \ \text{ для всех } x \in (0,l_j), \ j = \overline{1,n}, \tag{17}$$

то получим математическую модель, представляющую процессы колебаний в конструкции из тонких упругих стержней. Функции $u_j(x,t)$ определяют продольное смещение в точке x в момент времени t на j-м элементе конструкции. Параметры $\lambda, \lambda', \lambda'', \alpha$ и β характеризуют материал из которого изготовлены стержни.

Математические модели Буссинеска – Лява[6]. Уравнение

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda^{'})u_t + \beta(\Delta - \lambda^{''})u + g, \tag{18}$$

описывает продольные колебания в упругом стержне с учетом инерции и при внешней нагрузке. Параметры $\lambda, \lambda', \lambda'', \alpha$ и β характеризуют материал из которого изготовлен стержень, и связывают между собой плотность, модуль Юнга, коэффициенты Пуассона и упругости.

Математические модели (2)–(4), (8)–(9), (5)–(7), и на основе уравнений (1), (12) с тем или иным начальным (начально-конечным) условием в подходящих банаховых пространствах могут быть редуцированы к соответствующим задачам для неполного уравнения соболевского типа высокого порядка

$$Lu^{(n)} = Mu + f \tag{19}$$

с относительно p-ограниченным или относительно p-секториальным оператором в правой части.

Разработанная автором теория полных уравнений соболевского типа высокого порядка

$$Au^{(n)} = B_{n-1}u^{(n-1)} + ... + B_0 u + f \tag{20}$$

с относительно полиномиально ограниченным пучком операторов позволяет исследовать математические модели на основе (10), (18), и (14)–(17).

---

[6] *Ляв, А.* Математическая теория упругости /А. Ляв; пер. с англ. Б.В. Булгаков, В.Я. Натанзон. – Москва; Ленинград: ОНТИ, 1935.

Стандартной задачей для уравнений (19), (20)является задача Коши

$$u^{(m)}(0) = u_m, m = 0, ..., n-1. \tag{21}$$

Наряду с задачей (21) для уравнений соболевского типа ставится задача Шоуолтера – Сидорова

$$L(u^{(m)}(0) - u_m) = 0, m = 0, ..., n-1. \tag{22}$$

Обе задачи в зависимости от методов исследования могут пониматься в различных смыслах (классическом, обобщенном, ослабленном, сильном и т.д.), однако очевидно, что задача (22) более общая, нежели (21). В тривиальном случае (существование обратного оператора L) обе задачи совпадают, а значит, совпадают и их решения. Однако, задача Шоуолтера – Сидорова для уравнений соболевского типа более естественна, нежели задача Коши. В данной работе рассматривается задача Шоуолтера – Сидорова в более общей постановке:

$$P(u^{(m)}(0) - u_m) = 0, m = 0, ..., n-1, \tag{23}$$

где P – спектральный проектор. При проведении вычислительных экспериментов условия Шоуолтера – Сидорова предпочтительнее, нежели условия Коши, так как не возникает необходимости проверки принадлежности начальных значений фазовому пространству уравнения.

Естественным обобщением задачи (23) является начально-конечная задача

$$P_{in}(u^{(m)}(0) - u_m^0) = 0, \ P_{fin}(u^{(m)}(T) - u_m^T) = 0, \ m = 0, ..., n-1. \tag{24}$$

Здесь P_{in} и P_{fin} – специальным образом построенные относительно спектральные проекторы. Термин "начально-конечная задача" появился относительно недавно, и отражает тот факт, что для уравнения (19) или (20) часть данных задается в начале временно́го промежутка [0,T], а другая часть – в конце. Первоначально она называлась "задачей сопряжения" и рассматривалась как обобщение задачи с данными на свободной поверхности. Именно в этом контексте была построена теория таких задач для линейных уравнений соболевского типа первого порядка и разработаны приложения этой теории[7]. В данной диссертационной работе эти идеи и методы распространены на случай уравнений соболевского типа высокого порядка.

Большое число исследований посвящено детерминированным уравнениям и системам. Однако в натурных экспериментах возникают случайные

[7] *Загребина, С.А.* / С.А.Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – №2, вып. 6. – С. 5–24.

возмущения, например, в виде белого шума. Поэтому в последнее время все чаще появляются исследования, посвященные стохастическим математическим моделям. Стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения с различными аддитивными случайными процессами сейчас активно изучаются[8]. Первенствует здесь традиционный подход Ито–Стратоновича–Скорохода. В работе исследованы стохастическое модели, сводящиеся к задаче Коши

$$\xi^{(m)}(0) = \xi_m,\ m = 0, \ldots, n-1 \tag{25}$$

для уравнения соболевского типа высокого порядка с аддитивным белым шумом

$$Ld\xi^{(n-1)}(t) = (M\xi(t) + g)dt + Ndw, \tag{26}$$

где Ndw представляет обобщенный дифференциал от K-винеровского процесса.

Целью работы является разработка и реализация в виде программного комплекса методов аналитического и численного исследования линейных математических моделей соболевского типа высокого порядка. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Разработать аналитический метод исследования математических моделей как начальных (начально-конечной) задач для неполного уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно p-ограниченным оператором;
2. Исследовать математическую модель de Gennes линейных волн в смектиках как задачу Коши для неполного уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно p-ограниченным оператором;
3. Исследовать математическую модель колебаний в молекуле ДНК как задачу Коши для стохастического неполного уравнения соболевского типа высокого порядка;
4. Исследовать математическую модель линейных волн в "незамагниченной" плазме как начально-конечную задачу для неполного уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно p-ограниченным оператором;
5. Разработать аналитический метод исследования математических моделей как начальных (начально-конечной) задач для неполного уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно p-секториальным оператором;
6. Исследовать линеаризованную математическую модель Benney – Luke как задачу Коши для неполного уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно p-секториальным оператором;

[8] *Gliklikh, Yu.E.* Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London; Dordrecht; Heidelberg; N.-Y.: Springer, 2011.

7. Исследовать стохастическую модель распространения волн на мелкой воде как задачу Коши для стохастического неполного уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно p-секториальным оператором;
8. Разработать аналитический метод исследования математических моделей как начальных (начально-конечной) задач для полного уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно полиномиально ограниченным пучком операторов;
9. Исследовать математическую модель линейных волн в плазме во внешнем магнитом поле и математическую модель колебаний в конструкции из стержней как задачи Коши для полного уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно полиномиально ограниченным операторным пучком;
10. Исследовать детерминированную и стохастическую модели Буссинеска – Лява в области как задачу Коши для детерминированного и стохастического полного уравнения соболевского типа высокого порядка;
11. Разработать и обосновать алгоритм метода численного исследования математических моделей на основе уравнений соболевского типа высокого порядка;
12. Реализовать в виде программного комплекса алгоритмы компьютерного моделирования волн Буссинеска–Лява на отрезке, на графе, в прямоугольнике, в круге, базирующиеся на разработанном методе численного исследования;
13. Разработать алгоритм метода численного исследования стохастической модели колебаний в молекуле ДНК с последующей реализацией в виде программы для ЭВМ.

Научная новизна. В диссертационной работе впервые проведено аналитическое и численное исследование широкого класса вырожденных математических моделей с помощью разработанной автором теории уравнений соболевского типа высокого порядка: представлены постановки задач, соответствующих математическим моделям, доказаны теоремы о существовании и единственности решения, разработаны и обоснованы численные методы решения. Отметим, что предлагаемые в данной работе алгоритмы могут быть адаптированы к исследованию других математических моделей соболевского типа. Разработан программный комплекс, позволяющий проведение вычислительных экспериментов.

Все результаты, выносимую на защиту, являются новыми и получены автором лично. Достоверность полученных результатов обеспечена полными доказательствами всех утверждений, причем математическая строгость доказательств соответствует современному уровню.

Теоретическая и практическая значимость
Теоретическая значимость полученных в диссертации результатов и разработанных методов исследования заключается в том, что они развивают теории уравнений соболевского типа, дифференциальных уравнений на графах, стохастических дифференциальных уравнений и являются законченным исследованием в области уравнений соболевского типа высокого порядка. Получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши (начально-конечной задачи) для уравнений соболевского типа высокого порядка с относительно p-ограниченным, относительно p-секториальным оператором, относительно полиномиально ограниченным операторным пучком. Эти результаты использованы для аналитического исследования указанных математических моделей и легли в основу разработанных численных методов.

Данная работа создает основу для развития аналитических и численных исследований других неклассических моделей математической физики, кроме того, результаты применимы для решения новых задач для рассмотренных математических моделей, например, задачи оптимального управления. Для проведения вычислительных экспериментов численные методы и алгоритмы реализованы в виде программного комплекса (Maple 15.0), причем использованы такие подходы, которые в дальнейшем позволят использовать модули как составные части других программных комплексов.

Результаты, полученные при исследовании математических моделей распространения волн на мелкой воде полезны в гидродинамике, в геологии при изучении фильтрации воды в почве. Результаты исследования математической модели колебаний в молекуле ДНК применимы в биоинженерии и биологии, математической модели продольных колебаний в упругом стержне и конструкции – в теории упругости, гидродинамике, математических моделей ионно-звуковых волн – в электродинамике. Таким образом, практическая значимость заключается в применении результатов исследований в различных предметных областях. Кроме того разработанный программный комплекс позволяет проводить вычислительные эксперименты по моделированию волн различной природы.

Методы исследования. В диссертации разработаны как аналитические, так и численные методы исследования указанных математических моделей. Особенность аналитического исследования заключается в том, что они в подходящим образом подобранных банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ редуцируются к начальным (начально-конечным) задачам для линейных неполных (19) либо полных (20) уравнений соболевского типа высокого порядка.

При проведении редукции используется стандартная техника, возникшая на стыке функционального анализа и теории уравнений в частных производных, основы которой заложены С.Л. Соболевым, К.О. Фридрихсом и Ж. Лере. Отметим, что при обосновании редукции особой трудностью является доказательство (L, p)-ограниченности ((L, p)-секториальности) оператора M, (A, p)-ограниченности пучка $\vec{B}$ и выполнения дополнительных условий на введенные операторы.

Основным методом исследования абстрактных задач является метод фазового пространства, основы которого заложили Г.А. Свиридюк и Т.Г. Сукачева. Суть метода исследования заключается в редукции сингулярного уравнения к регулярному, определенному, однако, не на всем банаховом пространстве $\mathfrak{U}$, а на некотором его подпространстве $\mathcal{P}$, которое мы понимаем как фазовое пространство исходного уравнения. В диссертации этот метод распространен на случай уравнений соболевского типа высокого порядка с относительно p-ограниченным, относительно p-секториальным оператором или относительно полиномиально ограниченным операторным пучком (в случае полного уравнения).

Кроме основного в данной диссертации метода фазового пространства используется теория линейных уравнений соболевского типа первого порядка и порождаемых ими вырожденных групп и полугрупп операторов[9]. Эти идеи и методы легли в основу теории пропагаторов – операторов-решений однородного уравнения (вырожденных косинус и синус-оператор-функций, вырожденных M, N-функций). В основе численных исследований лежит метод Галеркина решения начально-краевых задач для уравнений математической физики.

Результаты, выносимые на защиту.
1. Аналитический метод исследования математических моделей как начальных (или начально-конечной) задач для неполного уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно p-ограниченным оператором;
2. Для математической модели de Gennes линейных волн в смектиках доказана однозначная разрешимость соответствующей задачи Коши – Дирихле и получен аналитический вид решения;
3. Для математической модели колебаний в молекуле ДНК доказана разрешимость соответствующей задачи Коши – Дирихле для стохастического уравнения и получен аналитический вид решения;
4. Для математической модели линейных волн в "незамагниченной" плазме доказана однозначная разрешимость соответствующей краевой задачи с начально-конечным условием и получен аналитический вид решения;
5. Аналитический метод исследования математических моделей как началь-

[9] *Sviridyuk, G. A.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov.– Utrecht: VSP, 2003.

ных (или начально-конечной) задач для неполного уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно p-секториальным оператором;
6. Для линеаризованной математической модели Benney – Luke доказана однозначная разрешимость соответствующей задачи Коши – Дирихле и получен аналитический вид решения;
7. Для стохастической модели распространения волн на мелкой воде доказана разрешимость соответствующей задачи Коши – Дирихле и получен аналитический вид решения;
8. Аналитический метод исследования математических моделей как начальных (или начально-конечной) задач для полного уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно полиномиально ограниченным пучком операторов;
9. Для математических моделей линейных волн в плазме во внешнем магнитом поле и колебаний в конструкции из стержней доказана однозначная разрешимость соответствующих задач Коши – Дирихле и получен аналитический вид решений;
10. Для детерминированной и стохастической моделей Буссинеска – Лява в области доказана разрешимость соответствующих задач Коши – Дирихле и и получен аналитический вид решений;
11. Алгоритм численного метода исследования математических моделей на основе уравнений соболевского типа высокого порядка;
12. Программный комплекс, реализующий алгоритмы компьютерного моделирования волн Буссинеска–Лява на отрезке, на графе, в прямоугольнике, в круге, базирующиеся на разработанном методе численного исследования;
13. Алгоритм метода численного исследования стохастической модели колебаний в молекуле ДНК с реализацией в виде программы.

Полученные результаты соответствуют следующим областям исследования специальности:

1) разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (п.1);

2) развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п.2);

3) реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов (п.4).

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации были представлены на Всероссийской конференции "Алгоритмический анализ некорректных задач" (г. Екатеринбург, 1998), Воронежских весенних математических школах "Понтрягинские чтения - IX,X" (г. Воронеж,1998,1999), Третьем и Четвертом Сибирских Конгрессах по прикладной и индустриальной математике "ИНПРИМ - 98, 2000" (г. Новосибирск, 1998,2000), Международной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения" (г. Одесса, 2000), Всероссийской конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" (г. Екатеринбург, 2001, 2004, 2011), Международной конференции"Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели" (г. Челябинск, 2002), Международной конференции "Ill-posed and in-verse problems" (Novosibirsk, 2002), Всероссийской конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и механики" (г. Екатеринбург, 2003), Международной конференции "Kolmogorov and contemporary mathematics" (Moscow, 2003), Международной конференции "Nonlinear partial differential equations" (Alushta, 2003), Международной школе-семинаре по геометрии и анализу (г. Ростов-на-Дону, 2004), Международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения посвященной 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа (г. Новосибирск, 2007), Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы" (г. Стерлитамак, 2008), Воронежской зимней математической школе (г. Воронеж, 2010, 2012), Всероссийском научном семинаре "Неклассические уравнения математической физики посвященном 65-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова (г. Якутск, 2010), Международной конференции "Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко (г. Новосибирск, 2011), Всероссийской конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения СамДиф - 2011, 2013 (г. Самара, 2011,2013), Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева "Обратные и некорректные задачи математической физики" (г. Новосибирск, 2012), Международной научно-практической конференции "Измерения: состояние, перспективы, развитие"(г. Челябинск, 2012), Международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Белгород, 2013), Международной конференции "Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова" (Одесса, 2013).

Результаты неоднократно докладывались на областном семинаре, посвященном уравнениям соболевского типа профессора Г.А. Свиридюка (г. Челябинск), на семинаре ИПУ РАН под руководством профессора А.П. Курдюкова (г. Москва), кафедр математического моделирования ВГУ профессора Ю.И.Сапронова (г. Воронеж), прикладной математики и вычислительной техники МаГУ профессора С.И. Кадченко (г. Магнитогорск) и математического моделирования Стерлитамакского филиала БашГУ профессора С.А. Мустафиной (г. Стерлитамак).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 69 научных работах, из них 31 статья, их список приведен в конце автореферата, в том числе 15 – в изданиях, включенных в перечень российских рецензируемых научных журналов ВАК РФ, 3 свидетельства о регистрации программ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка литературы и приложений. Объем диссертации составляет 276 страниц. Библиография содержит 215 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность темы, определяется цель работы, дается обзор литературы по исследуемой проблематике.

Первая глава посвящена аналитическому исследованию детерминированных и стохастических математических моделей распространения волн в смектиках, плазме и молекулах ДНК и состоит из девяти параграфов. В первом параграфе приводятся некоторые определения, теоремы и леммы теории относительно ограниченных операторов.

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы L, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ называется L-резольвентным множеством оператора M. Множество $\mathbb{C}\backslash\rho^L(M) = \sigma^L(M)$ называется L-спектром оператора M.

Оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ называются, соответственно, L-резольвентой, правой L-резольвентой, левой L-резольвентой оператора M.

Определение 1 Оператор M называется (L,p)-ограниченным, если

$$\exists a > 0\ \forall \mu \in \mathbb{C} : (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M))$$

и ∞ является полюсом порядка p L-резольвенты оператора M.

Если оператор M (L,p)-ограничен. Тогда операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^L_\lambda(M)d\lambda \text{ и } Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} L^L_\lambda(M)d\lambda$$

являются проекторами, расщепляющими пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Здесь $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r > a\}$. Действия операторов L, M также расщепляются.

Во втором параграфе вводятся и строятся пропагаторы неполного уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно p-ограниченным оператором.

Теорема 1 (1.2.1)[10] *Пусть оператор $M(L,p)$-ограничен. Тогда формулы*

$$V_m^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \mu^{n-m-1}(\mu^n L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu \tag{27}$$

определяют пропагаторы уравнения (19) *при всех* $t \in \mathbb{R}$.

Здесь же строятся и исследуются наиболее часто используемые в приложениях косинус и синус оператор-функции. Третий параграф содержит исследование морфологии фазового пространства однородного уравнения.

Определение 2 Подпространство $\mathcal{P} \subset \mathfrak{U}$ называется фазовым пространством уравнения (19), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (19) лежит в $\mathcal{P}$, т.е. $u(t) \in \mathcal{P} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(ii) при любых $u_m \in \mathcal{P}, m = 0, ..., n-1$ существует единственное решение задачи (19),(21).

Доказано, что фазовым пространством является подпространство $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$. В четвертом параграфе получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно p-ограниченным оператором.

Теорема 2 (1.4.1) *Пусть оператор $M(L,p)$-ограничен. Пусть вектор-функция $f : (-\tau,\tau) \to \mathfrak{F}$ такова, что $f^0 = (\mathbb{I} - Q)f \in C^{n(p+1)}((-\tau,\tau);\mathfrak{F}^0)$, и $f^1 = Qf \in C((-\tau,\tau);\mathfrak{F}^1)$. Пусть начальные значения удовлетворяют соотношениям*

$$(I - U_0^0)u_m = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} \frac{d^{nq+m}}{dt^{nq+m}} f^0(0), \quad m = 0, 1, ..., n-1.$$

Тогда существует единственное решение задачи (19), (21), которое представимо в виде

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) f^{(qn)}(t) + \sum_{m=0}^{n-1} V_m^t u_m^1 + \int\limits_0^t V_{n-1}^{t-s} L_1^{-1} Q f(s) ds.$$

[10] В скобках указана нумерация в диссертации.

Пятый параграф содержит аналитическое исследование математической модели de Gennes линейных волн в смектиках. Проводится и обосновывается редукция математической модели к абстрактной задаче Коши. Доказана

Теорема 3 (1.5.1) *(i) Пусть $\alpha \notin \sigma(\Delta)$. Тогда при любых $v_0, v_1 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение задачи*

$$\begin{gathered} v(x,0) = v_0(x), \quad v_z(x,0) = v_1(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \\ v(x,z) = 0, \quad (x,z) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \end{gathered} \tag{28}$$

для уравнения (1), которое к тому же имеет вид

$$\begin{gathered} v(z) = \sum_{\alpha<\lambda_k} < v_0, \varphi_k > \varphi_k ch\sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda_k - \alpha}} z + \sum_{\alpha>\lambda_k} < v_0, \varphi_k > \varphi_k cos\sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\alpha - \lambda_k}} z + \\ + \sum_{\alpha<\lambda_k} < v_1, \varphi_k > \varphi_k \sqrt{\frac{\lambda_k - \alpha}{\alpha\lambda_k}} sh\sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda_k - \alpha}} z + \\ + \sum_{\alpha>\lambda_k} < v_1, \varphi_k > \varphi_k \sqrt{\frac{\alpha - \lambda_k}{\alpha\lambda_k}} sin\sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\alpha - \lambda_k}} z. \end{gathered} \tag{29}$$

(ii) Пусть ($\alpha \in \sigma(\Delta)$). Тогда при любых

$$v_0, v_1 \in \mathfrak{U}^1 = \{v \in \mathfrak{U} :< v, \varphi_k >= 0, \lambda = \lambda_k\}$$

существует единственное решение задачи (28),(1), имеющее вид (29).

В шестом параграфе рассматривается абстрактное уравнение с более общими условиями Шоуолтера – Сидорова или начально-конечными условиями. Доказывается однозначная разрешимость такой задачи при произвольных начальных (начально-конечных) данных. В п.7 абстрактные результаты применяются для аналитического исследования математической модели линейных волн в "незамагниченной" плазме с начально-конечным условием.

Теорема 4 (1.7.3) *При любых $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ таком, что либо $\lambda \notin \{\lambda_k\}$, либо $\lambda \in \{\lambda_k\}$, $\lambda \neq \lambda''$ и любых $T \in \mathbb{R}_+, u_k^0,\ u_k^T \in \mathfrak{U}, k = 0, 1$, существует единственное решение задачи* (13),(24) *с однородным условием Дирихле на границе, которое к тому же имеет вид*

$$\Phi(x,t) = -M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) f(t) +$$

$$+V_{0(fin)}^{t-T}u_0^T + V_{1(fin)}^{t-T}u_1^T + V_{0(in)}^{t}u_0^0 + V_{1(in)}^{t}u_1^0 +$$

$$+\int_0^t V_{1(in)}^{t-s}L_{in}^{-1}f^{in}(s)ds - \int_t^T V_{1(fin)}^{t-s}L_{fin}^{-1}f^{fin}(s)ds.$$

Пропагаторы $V_{k(in)}^t, V_{k(fin)}^t$ строятся специальным образом в зависимости от проекторов $P_{in(fin)}$. Восьмой параграф посвящен задаче Коши для абстрактного стохастического уравнения соболевского типа высокого порядка. Здесь же формализуется понятие K-винеровского процесса[11], приводятся его свойства. Доказана

Теорема 5 (1.8.1) *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$. Пусть $w \in L_2^0(\mathbb{R}_+ \times \Omega; \mathfrak{F}^1)$ – $\mathfrak{F}^1$-значный K-винеровский процесс. Тогда для любых попарно независимых $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1} \in L_2(\Omega; \mathfrak{V}^1)$, независимых с w при каждом фиксированном t, существует решение задачи* (25), (26)*:*

$$\xi(t) = \sum_{m=0}^{n-1} V_m^t \xi_m - I(t). \tag{30}$$

где $I(t) = \int\limits_0^t V_{n-2}^{t-s} L_1^{-1N} w(s)ds$ интеграл Римана по отрезку $[0,t]$ от непрерывной функции $V_{n-2}^{t-s}L_1^{-1}w(s,\omega)$.

В последнем параграфе первой главы исследуется детерминированная и стохастическая модели колебаний в молекуле ДНК с помощью редукции к абстрактной задаче Коши с применением результатов, полученных в п. 4 и п. 8 данной главы.

Вторая глава содержит пять параграфов и посвящена математическим моделям соболевского типа, которые можно свести к абстрактным неполным линейным уравнениям соболевского типа высокого порядка с относительно p-секториальным оператором. В первом параграфе вводится понятие относительно p-секториального оператора и проводится его обобщение на случай уравнения высокого порядка. Построим множества $\sigma_n^L(M) = \{\mu^n : \mu \in \sigma^L(M)\}, \rho_n^L(M) = \mathbb{C} \setminus \sigma_n^L(M)$.

Определение 3 Оператор M называется (L,n,p)-секториальным, если существуют константы $K > 0$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$ такие, что множество

$$S_{\theta,n}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu^n)| < \theta, \quad \mu \neq 0\} \subset \rho_n^L(M), \tag{31}$$

[11] *Da Prato, G.* Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J Zabczyk. - Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

причем

$$\max\left\{\|R^L_{(\mu^n,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})}, \|L^L_{(\mu^n,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{G})}\right\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}|\mu_k^n|} \tag{32}$$

$$\forall \mu_k \in S^L_{\theta,n}(M), \quad k=\overline{0,p}.$$

Доказано существование пропагаторов однородного уравнения, исследованы их свойства.

Лемма 1 (2.1.2) *Пусть оператор M (L,n,p)-секториален. Тогда интегралы типа Данфорда-Шварца*

$$U^t_m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu^{n-m-1}(\mu^n L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu, \tag{33}$$

где $t \in \mathbb{R}_+, m = 0,1,...,n-1$, а $\gamma \subset \rho^L_n(M)$-контур, образованный лучами, выходящими из начала координат под углами θ и $-\theta$, определяют пропагаторы однородного уравнения (19).

Положим $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} U_0^\cdot = \{u \in \mathfrak{U} : \lim\limits_{t\to 0+} U_0^t u = u\}$, $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} F_0^\cdot = \{f \in \mathfrak{F} : \lim\limits_{t\to 0+} F_0^t f = f\}$ и через L_1 (M_1) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{U}^1 \cap \operatorname{dom} M)$. В дальнейшем нам потребуются две гипотезы:

$$\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U} \ (\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}), \tag{34}$$

$$\text{существует оператор} \quad L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1). \tag{35}$$

Гипотеза (34) имеет место, например, в случае рефлексивности пространства $\mathfrak{U}$ $(\mathfrak{F})$ (теорема Яги – Федорова). Гипотеза (35) справедлива, если выполнено (34) и $\operatorname{im} L_1 = \mathfrak{F}^1$ (теорема Банаха). Заметим еще, что из (34) вытекает существование проекторов $P = s-\lim\limits_{t\to 0+} U_0^t$ и $Q = s-\lim\limits_{t\to 0+} F_0^t$ в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно.

Второй параграф посвящен исследованию разрешимости задачи Коши и начально-конечной задачи для абстрактного неполного уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно p-секториальным оператором.

Теорема 6 (2.2.1) *Пусть оператор M (L,n,p)-секториален, выполнены условия* (34), (35). *Тогда для любых*

$u_k \in \mathcal{M}^k_f = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I}-P)u = -\sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)f^{(nq+k)}(0)\}, k = 0,...,n-1$ *и вектор-функции $f = f(t)$, $t \in [0,T]$, такой, что* $f^0 = (\mathbb{I}-Q)f \in$

$C^{n(p+1)}([0,T];\mathfrak{F}^0)$ *и* $f^1 = Qf \in C([0,T];\mathfrak{F}^1)$, *существует единственное решение задачи* (21), (19), *которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} f^{0(nq)}(t) + \sum_{m=0}^{n-1} V_m^t v_m + \int\limits_0^t V_{n-1}^{t-s} L_1^{-1} f^1(s)ds.$$

В третьем параграфе линеаризованная модель Benney – Luke редуцируется к задаче Коши для абстрактного уравнения. Показывается выполнение всех условий абстрактной теоремы, следовательно имеет место

Теорема 7 (2.3.1) *При любых* $a, b \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u_k \in \mathfrak{U}^1$, *существует единственное решение задачи (8), (9),* (21).

Четвертый параграф содержит результаты о разрешимости задачи Коши для стохастического уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно p-секториальным оператором. В пятом параграфе эти результаты применяются для аналитического исследования стохастической модели распространения волн на мелкой воде:

Теорема 8 (2.4.1) *Пусть* $w \in L_2^0(\mathbb{R}_+ \times \Omega; \mathfrak{F}^1)$ – $\mathfrak{F}^1$*-значный* K*-винеровский процесс. (В качестве* K *возьмем оператор Грина* $-\Delta^{-1}$, *который будет ядерным, если* $n = 1$.) *Тогда при любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}_+$, *для любых независимых* $\xi_0, \xi_1 \in L_2(\Omega; \mathfrak{U}^1)$, *независимых с* w *при каждом фиксированном* t, *существует решение уравнения*

$$(\lambda - \Delta_x) d_t \xi_t = \alpha \Delta_x \xi dt + dw \tag{36}$$

с однородным условием Дирихле и (25) *которое к тому же имеет вид:*

$$\xi(t) = V_0^t \xi_0 + V_1^t \xi_1 + \int\limits_0^t V_1^{t-s} L_1^{-1} dw(s).$$

Третья глава посвящена математическим моделям, которые можно свести к абстрактным полным линейным уравнениям соболевского типа высокого порядка с относительно полиномиально ограниченным пучком операторов, и содержит девять параграфов. Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы A, $B_0, ..., B_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. В первом параграфе вводится определение и изучаются свойства относительных резольвент пучка операторов $\vec{B}$.

Определение 4 Оператор-функцию комплексной переменной $R_\mu^A(\vec{B}) = (\mu^n A - \mu^{n-1} B_{n-1} - ... - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ будем называть *A-резольвентой пучка* $\vec{B}$.

Определение 5 Пучок операторов $\vec{B}$ называется полиномиально A-ограниченным, если $\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (R^A_\mu(\vec{B}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U}))$.

Во втором параграфе, в предположении относительно полиномиальной ограниченности пучка и выполнении условия

$$\int\limits_\gamma \mu^k R^A_\mu(\vec{B})d\mu \equiv \mathbb{O},\ k = 0, 1, ..., n-2, \qquad (A)$$

где контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$, построены проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^A_\mu(\vec{B})\mu^{n-1}Ad\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu^{n-1}AR^A_\mu(\vec{B})d\mu,$$

расщепляющие пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ в прямую сумму подпространств, доказана теорема о расщеплении действия всех операторов. Здесь же определяются $\vec{B}$-присоединенные векторы оператора A и исследуется их связь с относительными резольвентами пучка $\vec{B}$, а также получен критерий относительно полиномиальной ограниченности пучка в случае фредгольмова оператора A. Третий параграф посвящен пропагаторам однородного уравнения (20).

Лемма 2 (3.3.1)*При любом $k = 0, 1, ..., n-1$ оператор-функция $V^t_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^A_\mu(\vec{B})(\mu^{n-k-1}A - \mu^{n-k-2}B_{n-1} - ... - B_{k+1})e^{\mu t}d\mu$ является пропагатором однородного уравнения (20).*

Здесь также построено семейство вырожденных M, N-функций уравнения (20) при $n = 2$ и доказываются их свойства. В четвертом параграфе исследуется фазовое пространство уравнения (20) как множества допустимых начальных значений, содержащего траектории всех решений уравнения. Доказано, что фазовым пространством уравнения (20) является образ построенного проектора P. В пятом параграфе получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения соболевского типа с относительно полиномиально ограниченным пучком.

Теорема 9 (3.5.1) *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, выполнено (A), причем ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\vec{B}$. Пусть вектор-функция $f : (-\tau, \tau) \to \mathfrak{F}$ такова, что $f^0 = (\mathbb{I} - Q)f \in C^{p+n}((-\tau, \tau); \mathfrak{F}^0)$, и $f^1 = Qf \in C((-\tau, \tau); \mathfrak{F}^1)$. Тогда при любых $u_k \in \mathcal{M}^k_f,\ k =$*

$0, 1, ..., n-1$ *существует единственное решение задачи (20), (21), представимое в виде*

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} K_q^n (B_0^0)^{-1} \frac{d^q}{dt^q} f^0(t) + \sum_{k=0}^{n-1} V_k^t (\mathbb{I} - P) u_k + \int_0^t V_{n-1}^{t-s} (A^1)^{-1} f^1(s) ds.$$

Шестой параграф содержит аналитическое исследование математической модели линейных волн в плазме во внешнем магнитном поле, которую удается редуцировать к задаче Коши для уравнения соболевского типа четвертого порядка. Доказана

Теорема 10 (3.6.1) *Пусть* $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ *или* $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda')$. *Тогда при любых* $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathfrak{U}^1$ *существует единственное решение задачи (21), (11) с однородным условием Дирихле.*

В седьмом параграфе абстрактные результаты п.5 применяются для исследования математической модели колебаний в конструкции из стержней, которая рассматривается как начально-краевая задача для уравнения соболевского типа второго порядка на графе.

Теорема 11 (3.7.2) *Пусть* $\alpha, \lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и* $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ *или* $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$. *Тогда фазовым пространством уравнений (14) является пространство* $\mathfrak{U}^1$, *т.е. для любых* $u_0, u_1 \in \mathfrak{U}^1$ *существует единственное решение* $u \in C^2(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ *задачи (15)-(17) для уравнений (14), которое имеет вид* $u(t) = M(t)u_0 + N(t)u_1$.

Восьмой параграф посвящен задаче Коши для абстрактного стохастического уравнения соболевского типа с относительно полиномиально ограниченным пучком. Основным результатом является

Теорема 12 (3.8.1) *Пусть пучок операторов* $\vec{B}$ (A, p)*-ограничен, выполнено условие (A),* $w \in L_2^0(\mathbb{R}_+ \times \Omega; \mathfrak{F}^1)$ – $\mathfrak{F}^1$*-значный* K*-винеровский процесс, оператор* $N \in L(\mathfrak{F}^1)$. *Тогда для любых попарно независимых* $\xi_0, ..., \xi_{n-1} \in L_2(\Omega; \mathfrak{U}^1)$, *независимых с* w *при каждом фиксированном* t, *существует решение задачи* (25) *для стохастического уравнения соболевского типа высокого порядка*

$$Ad\xi^{(n-1)} = B_{n-1} d\xi^{(n-2)} + ... + B_{n-1} d\xi + (B_0 \xi + f) dt + T dw, \qquad (37)$$

представимое в виде

$$\xi(t)=\sum_{k=0}^{n-1}V_k^t\xi_k-\int_0^t\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(\mu^nA-\mu^{n-1}B_{n-1}-...-B_0)^{-1}\mu e^{\mu(t-s)}d\mu Tw(s)ds. \tag{38}$$

В последнем параграфе главы абстрактные результаты, полученные в п. 5 и п. 8 применяются для исследования детерминированной и стохастической моделей Буссинеска – Лява в области.

Четвертая глава состоит из пяти параграфов и посвящена описанию разработанных численных методов исследования математических моделей. Первые два параграфа содержат описание алгоритмов численных методов исследования математических моделей Буссинеска – Лява в области и на графе соответственно. Представлены блок-схемы разработанных алгоритмов. В третьем параграфе описан алгоритм численного метода исследования стохастической модели колебаний в молекуле ДНК. Представлена блок-схема алгоритма. В четвертом параграфе приведено описание программного комплекса "Моделирование волн Буссинеска – Лява", в котором реализованы алгоритмы из п. 1 и 2 данной главы. Пятый параграф посвящен описанию программы "Моделирование колебаний в молекуле ДНК реализующей алгоритм п. 3.

В **пятой главе** приведены результаты ряда вычислительных экспериментов. Для всех примеров построены графики моделируемых волн и показано изменение волны с течением времени. В первом параграфе содержатся результаты вычислительного эксперимента для математической модели продольных колебаний в стержне, проведенного с помощью программного комплекса "Моделирование волн Буссинеска – Лява" (модуль "решение на отрезке"). Рассмотрены различные комбинации параметров. Приведем один из них.

Пример 1 Рассмотрим математическую модель

$$(\lambda-\Delta)u_{tt}=\alpha(\lambda'-\Delta)u_t+\beta(\lambda''-\Delta)u,$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0$$

$$u(x,0)=x(\pi-x)-\pi/8\sin x, u_t(x,0)=x(\pi-x)-\pi/8\sin x,$$

где $\lambda=-1,\quad\lambda'=-1,\quad\lambda''=0,\quad\alpha=\beta=1,\quad x\in[0,\pi],\quad t\in[0,1]$.
Так как $\lambda\in\sigma(\Delta)$ и $(\lambda=\lambda')$, то математическая модель вырождена. Условие

$$<v_0,\varphi_1>=<v_1,\varphi_1>=0 \tag{39}$$

выполнено, следовательно v_0 и v_1 принадлежат фазовому пространству и решение существует:

$$u(x,t) = (2+\sqrt(22))e^{1/4(2+\sqrt{22})t} + (-2+\sqrt{22})e^{1/4(2-\sqrt{22})t}\sin(3x)$$

График решения представлен на рисунке 1.

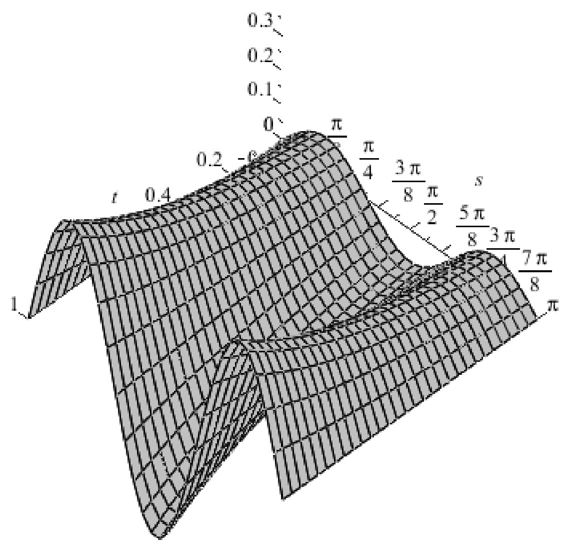

Рис. 1: Решение задачи из примера 1

Замечание 1 Для задачи, рассмотренной в примере 1, при различных количествах галеркинских приближений N получены оценки вычислительной точности $\delta_{k,m} = \|u_k - u_m\|^2$ (таблица).

Таблица

Вычислительная точность решений

$\delta_{3,5}$	$\delta_{5,7}$	$\delta_{7,9}$	$\delta_{9,11}$	$\delta_{11,13}$	$\delta_{13,15}$
0.08259	0.03000	0.01409	0.00771	0.00467	0.00304

Из данной таблицы видна вычислительная сходимость приближенный решений.

Второй параграф содержит результаты вычислительного эксперимента для математической модели продольных колебаний в конструкции из тонких упругих стержней в невырожденном и вырожденном случаях, проведенного с помощью программного комплекса "Моделирование волн Буссинеска – Лява", (модуль "решение на графе").

Пример 2 Требуется найти решение задачи (14)-(17) на ориентированном графе $\mathbf{G}$ при заданных параметрах $\lambda = 0$, $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 1$, $\alpha = \beta = 1$ $d_1{=}1$, $d_2{=}\,1$, $l_1{=}\pi$, $l_2{=}\pi/2$, $N{=}2$ и начальных функциях

$$u_{01}(x) = 2\cos(2x/3),\ u_{02}(x) = -2\sin(2x/3 + \pi/6);$$

$$u_{11}(x) = -\cos(4x/3),\ u_{12}(x) = \cos(\pi/3 + 4x/3).$$

Так как $\lambda \in \sigma(\Delta)$ и $\lambda \neq \lambda'$, то математическая модель вырождена. При этом начальные функции удовлетворяют соотношению

$$< u_0, \varphi_0 > \mu_0 =< u_1, \varphi_0 >,$$

так как $< u_0, \varphi_0 >=< u_1, \varphi_0 >= 0$, следовательно, решение существует.

$$u_1(x,t) = \cos((2/3)x)[\sqrt{377}/29(e^{(13-\sqrt{377})t/8} - e^{(13+\sqrt{377})t/8})+$$
$$+e^{(13+\sqrt{377})t/8]}) + e^{(13-\sqrt{377})t/8}]+$$
$$16 + \sqrt{89}/445\cos((4/3)x)[e^{5/32(5-\sqrt{89})t} - e^{5/32(5+\sqrt{89})t}]$$
$$u_2(x,t) = -\sin((2/3)x + \pi/6)[\sqrt{377}/29(e^{(13-\sqrt{377})t/8} - e^{(13+\sqrt{377})t/8})+$$
$$+e^{(13+\sqrt{377})t/8]}) + e^{(13-\sqrt{377})t/8}]-$$
$$-16\sqrt{89}/445\cos((4/3)x + \pi/3)[e^{5/32(5-\sqrt{89})t} - e^{5/32(5+\sqrt{89})t}]$$

На рисунке 2 представлены графики решения при $t \in [0,1]$ с шагом 0.2. Колебания в первом ребре изображены красным, во втором – зеленым.

В третьем параграфе приведены результаты вычислительного эксперимента для математической модели линейных волн в плазме в прямоугольной области, проведенного с помощью программного комплекса "Моделирование волн Буссинеска – Лява" (модуль "решение в прямоугольнике").

Пример 3 Рассмотрим математическую модель линейных волн в плазме в прямоугольной области, описываемую системой:

$$\begin{array}{l}(\lambda - \Delta)u_{tt}(x,y,t) = \alpha(\Delta - \lambda')u_t(x,y,t) + \beta(\Delta - \lambda'')u(x,y,t),\\ u(0,y,t) = u(l_1,y,t) = u(x,l_2,t) = u(x,0,t) = 0,\\ u(x,y,0) = u_0(x,y),\ u_t(x,y,0) = u_1(x,y),\ x \in (0,l_1),\ y \in (0,l_2),\end{array} \quad (40)$$

в прямоугольнике Π при заданных параметрах:

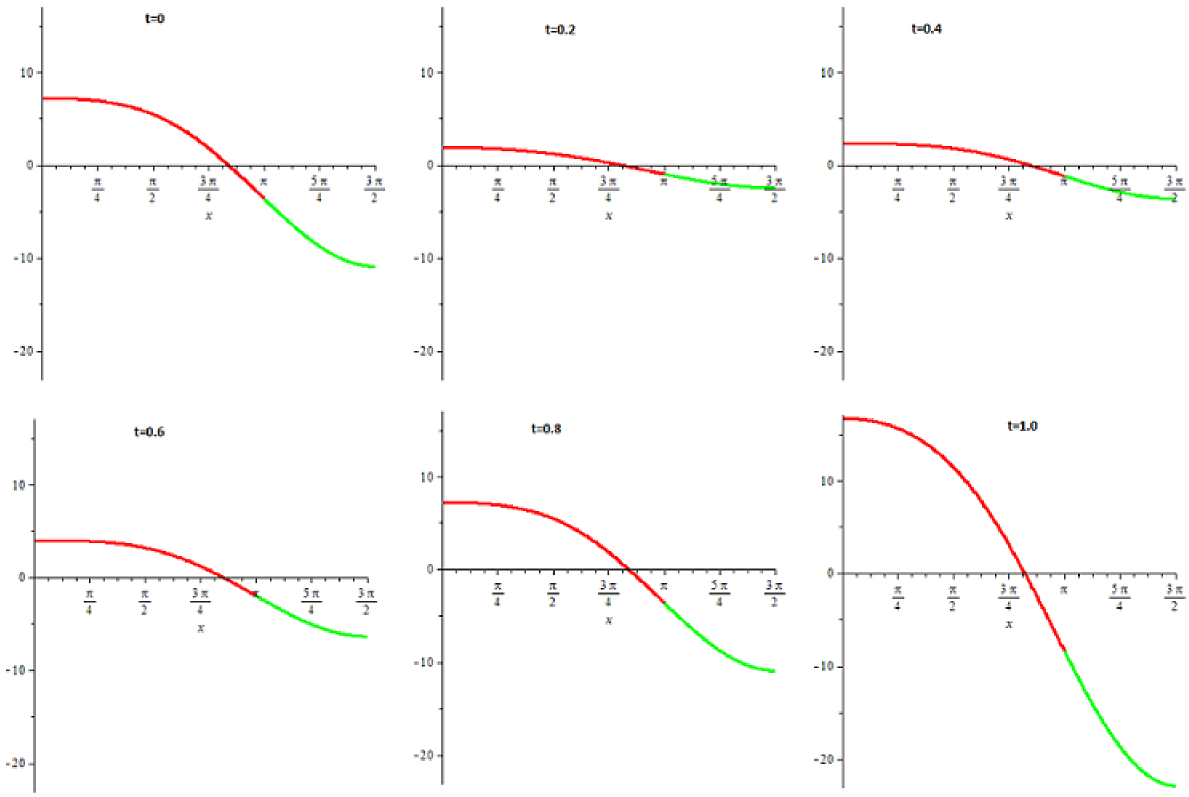

Рис. 2: Графики решения задачи из примера 2

$\lambda = -5,\ \lambda' = -3,\ \lambda'' = -1,\ \alpha = \beta = 1,\ l_1 = l_2 = \pi\ N = 2$ и начальных функциях

$$u_0(x, y) = \sin(x)\sin(y) + 5\sin(2x)\sin(2y),$$

$$u_1(x, y) = \sin(x)\sin(y) - 3\sin(2x)\sin(2y).$$

Так как $\lambda \in \sigma(\Delta)$ ($\lambda = \lambda_{12} = \lambda_{21} = -5$ – собственное значение кратности 2), то математическая модель вырождена. Согласно алгоритму из п.4.1, так как начальные функции удовлетворяют соотношениям

$$< u_0, \varphi_{12} > \mu_{12} =< u_1, \varphi_{12} >, < u_0, \varphi_{21} > \mu_{21} =< u_1, \varphi_{22} >,$$

решение существует:

$$u(x, y, t) = \frac{2\sqrt{13}}{52}\sin(x)\sin(y)[(\sqrt{13} + 7)e^{\frac{(-1+\sqrt{13})t}{6}} + (-7 + \sqrt{13})e^{-\frac{(1+\sqrt{13})t}{6}}]+$$

$$+2\sin(2x)\sin(2y)[(7/118)\sqrt{(}59)e^{-5/6t}\sin(\sqrt{59}t/6) + 5/2e^{-5/6t}\cos(\sqrt{59}t/6)].$$

На рисунке 3 представлены графики решения при $t \in [0, 1.25]$ с шагом 0.25. Далее с течением времени "купол" волны неограниченно растет.

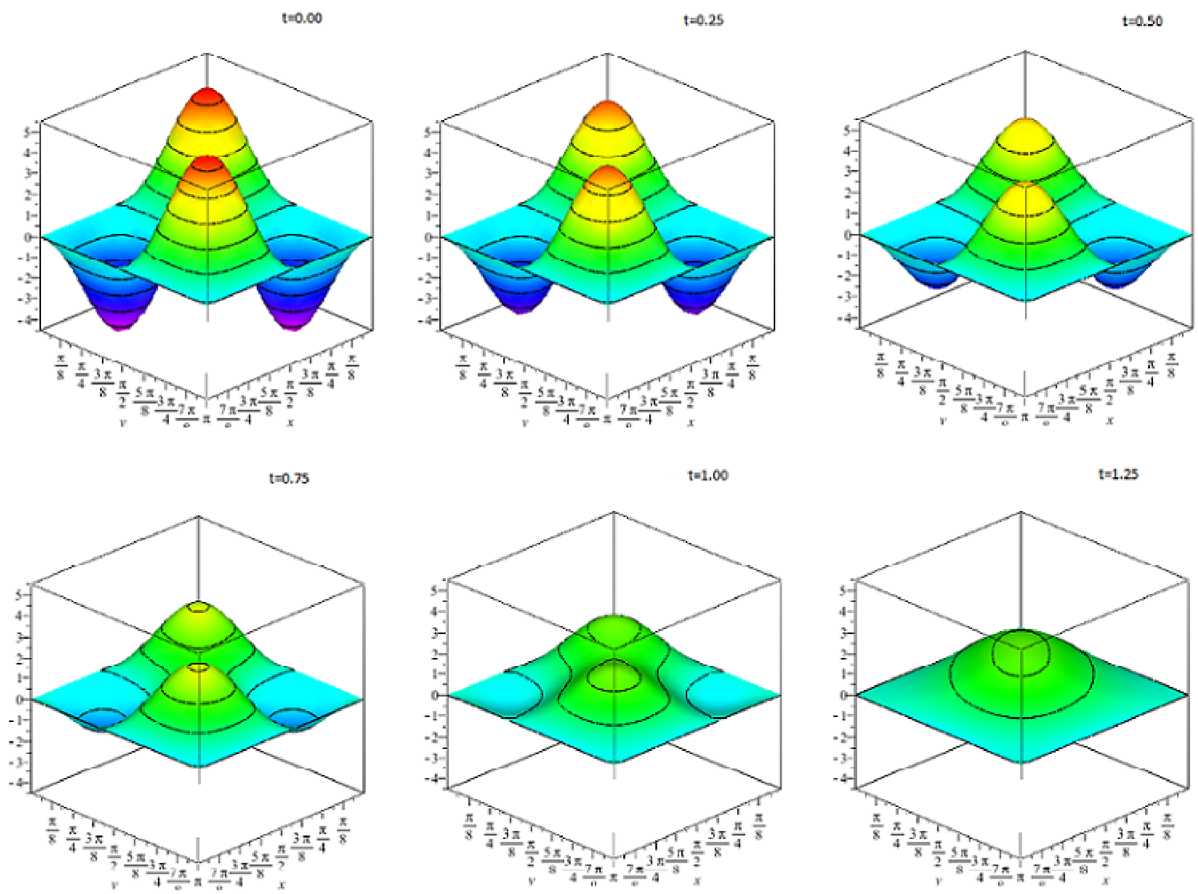

Рис. 3: Графики решения задачи из примера 3

Результаты вычислительного эксперимента для математической модели распространения волн на мелкой воде в круге, проведенного с помощью программного комплекса "Моделирование волн Буссинеска – Лява приведены в четвертом параграфе.

Пример 4 Рассмотрим математическую модель распространения волн на мелкой воде или в диспергирующих средах в круге $\{r < r_0\}$, описываемую системой

$$\begin{aligned} &(\lambda - \Delta)u_{tt}(r,\varphi,t) = \alpha(\Delta - \lambda')u_t(r,\varphi,t) + \beta(\Delta - \lambda'')u(r,\varphi,t), \\ &u(r_0,\varphi,t) = 0, \\ &u(r,\varphi,0) = u_0,\ u_t = u_1\ r \in (0,r_0),\ \varphi \in (0,2\pi) \end{aligned} \tag{41}$$

при заданных параметрах $\lambda = -3,\ \lambda' = 0,\ \lambda'' = -1,\ \alpha = \beta = 1,\ r_0 = 5,\ H = 1$ и начальных функциях

$$u_0 = -H(r/r0)^2 + H,\ u_1 = 0.$$

Так как $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, то математическая модель невырождена. Согласно алгоритму из п.4.1 решение существует. Ввиду громоздкости формул, явный вид решения не приводится. На рисунке 4 представлены графики решения при $t \in [0, 8]$ при $N = 2$.

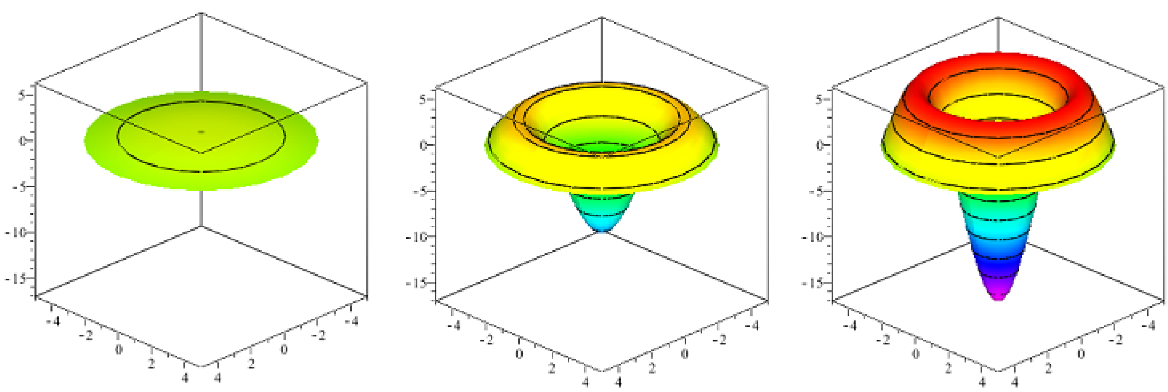

Рис. 4: Графики решения задачи из примера 4 при $N = 2$

На рисунке 5 представлены графики решения при $t \in [0, 0.02]$ при $N = 3, 4, ...$. Далее с течением времени волна распространяется вверх виде "купола" с резко увеличивающейся амплитудой. Следует отметить, что общий вид и поведение волны при $N > 2$ не зависит от количества слагаемых в галеркинской сумме. Вычислительный эксперимент подтверждает, что в данном случае минимальное количество слагаемых должно быть равным 3, что соответствует нашему критерию выбора количества галеркинских слагаемых N: $\lambda_N < \lambda$ (в даном случае $\lambda_2 > -3$, а $\lambda_3 < -3$).

Пятый параграф содержит вычислительный эксперимент для стохастической модели колебаний в молекуле ДНК.

Пример 5 Рассмотрим стохастическую математическую модель (2) – (4). при следующих условиях: $\Omega = [0, \pi]$, $u_0 = 2\sin(x) + 3\sin(2x)$, $u_1 = 2\sin(x) +$

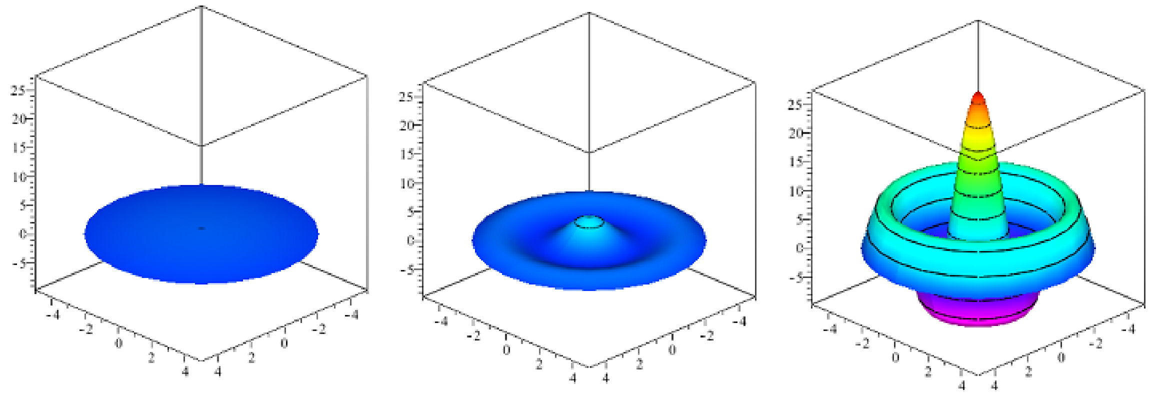

Рис. 5: Графики решения задачи из примера 4 при $N = 3, 4, ...$

$2\sin(2x)$, $v_0 = \sin(3x)$, $v_1 = \sin(x) + \sin(2x)$, $b = 1$, $a = 1$, $d = 0$, $f(u, v) = v$, $g(u, v) = u$, w_1, w_2 – случайные внешние возмущения молекулы, $N = 4$.

Искомые функции мы представляем в виде галеркинских сумм:

$$\tilde{u}(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(u_1(t)\sin(x) + u_2(t)\sin(2x) + u_3(t)\sin(3x)) + u_4(t)\sin(4x)),$$

$$\tilde{v}(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(v_1(t)\sin(x) + v_2(t)\sin(2x) + v_3(t)\sin(3x)) + v_4(t)\sin(4x)).$$

Сгенерируем случайные процессы w_1, w_2 в виде

$$w_i(x,t) = \sum_{k=1}^{N} A_{ik} \sin \omega_i(t) \varphi_k(x), \; i = 0, 1,$$

где A_{ik} – гауссовы случайные величины ($\sim N(1, 0.5)$), $\omega_1 = 5$, $\omega_2 = 4$. Возникает вопрос, как изменяются траектории решения в зависимости от случая. На рисунке 6 изображены графики двух траекторий (черным и красным цветами) приближенного решения задачи.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Замышляева, А.А.* Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычислит. технол. – 2003. – Т. 8, №4. – С. 45–54.

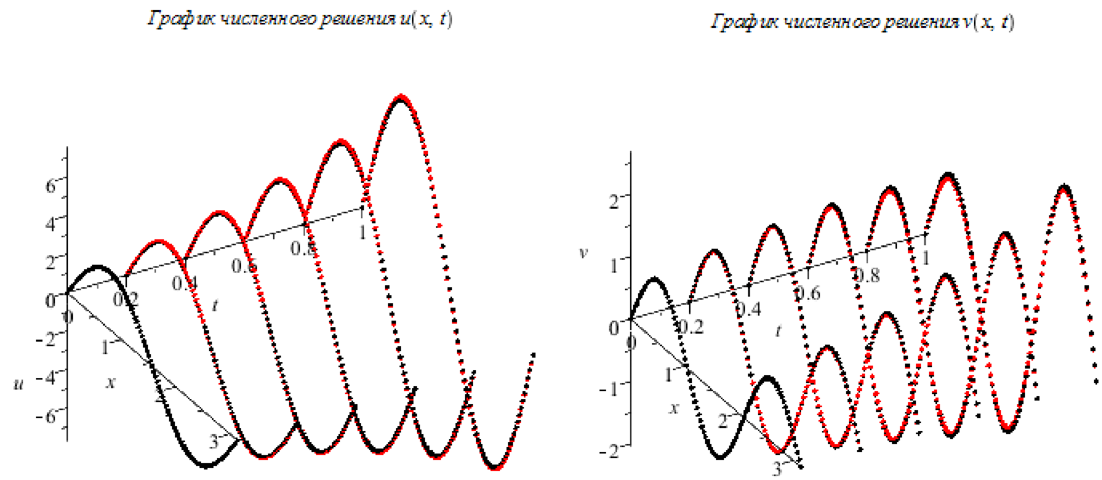

Рис. 6: Графики траекторий решения при $N = 4$

2. *Свиридюк, Г.А.* Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка / Г.А. Свиридюк, А.А. Замышляева // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т.42, №2. – С. 252–260.

3. *Замышляева, А.А.* Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева, А.В. Юзеева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 27 (127), вып. 5. – С. 23–31.

4. *Замышляева, А.А.* Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – №37 (254), вып. 10. – С. 22–29.

5. *Замышляева, А.А.* Фазовое пространство уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. "Математика". – 2011. – Т.4, №4. – С. 45–57.

6. *Замышляева, А.А.* Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – №5 (264), вып. 11. – С. 13–24.

7. *Замышляева, А.А.* Фазовое пространство модифицированного уравнения Буссинеска / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 18(277), вып. 12. – С. 13–19.

8. *Замышляева, А.А.* Уравнения соболевского типа второго порядка с относительно диссипативным пучком операторов / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Вестник Самарского государственного технического универ-

ситета. Серия: Физико-математические науки. – 2012. – №2. – С. 26–33.

9. *Замышляева, А.А.* Стохастические неполные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка с аддитивным белым шумом / А.А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – №40(299), вып. 14. – С. 73–82.

10. *Замышляева, А.А.* О численном исследовании математической модели распространения волн на мелкой воде / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20, №1. – С. 27–34.

11. *Zamyshlyaeva, A.A.* Strongly continuous operator semigroups. Alternative approach / A.A. Zamyshlyaeva // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – №2, вып. 6. – С. 40–48.

12. *Замышляева, А.А.* Аналитическое исследование математической модели Буссинеска - Лява с аддитивным белым шумом / А.А. Замышляева // Глобальный научный потенциал (Раздел математические методы и модели). – 2013.– №7 (28). – С.44-50.

13. *Замышляева, А.А.* Стохастическая математическая модель ионно-звуковых волн в плазме / А.А. Замышляева // Естественные и технические науки (Раздел математическое моделирование, численные методы и комплексы программ). – 2013. – №4. – С.284–292.

14. *Замышляева, А.А.* Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера-Сидорова-Дирихле для уравнения Буссинеска-Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49. – №11. – С. 1390–1398.

15. *Замышляева, А.А.* Об алгоритме численного моделирования волн Буссинеска -Лява / А.А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2013. – Т. 13. – №4. – С. 24–29.

Монография:

16. *Замышляева, А.А.* Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012.

Свидетельства о регистрации программ:

17. *Замышляева, А.А.* Программа для нахождения решения начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска – Лява: свидетельство №2012619933/ Замышляева А.А., Цыпленкова О.Н. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО "Южно-Уральский государственный университет" (НИУ). – 20126179003; заявл. 20.09.2012; зарегистр. 02.11.2012, реестр программ для ЭВМ.

18. *Замышляева, А.А.* Моделирование колебаний в молекуле ДНК: Свидетельство №2013611741 / Замышляева А.А., Бычков Е.В. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО "Южно-Уральский государственный университет" (НИУ). – 2012661363; заявл. 19.12.2012; зарегистр. 04.02.2013, реестр программ для ЭВМ.

19. *Замышляева, А.А.* Программный комплекс "Моделирование волн Буссинеска – Лява": Свидетельство №2013617901 / Замышляева А.А.(RU); правообладатель ФГБОУ ВПО "Южно-Уральский государственный университет" (НИУ). – 2013616071; заявл. 15.07.2013; зарегистр. 27.08.2013, реестр програм для ЭВМ.

Другие научные публикации:

20. *Замышляева А.А.* Неполные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка // Рук. деп. ВИНИТИ, 1998, № 2001-В98. 33 с.

21. *Замышляева А.А.* Задача Коши для линейного уравнения соболевского типа второго порядка // Уравнения соболевского типа. Сб. науч. работ. ЧелГУ. 2002. С. 16-29.

22. *Замышляева, А.А.* Регулярные пучки матриц / А.А. Замышляева, О.Ю. Бородина // Вестник ЧелГУ. Матем., мех. и информат. – 2003. – №1. – С. 22–33.

23. *Замышляева, А.А.* Достаточные условия полиномиальной ограниченности пучка операторов / А.А. Замышляева, А.В. Уткина // Вестник ЧелГУ. Матем., мех. и информат. – 2003. – №1. – С. 66–73.

24. *Замышляева, А.А.* Относительно присоединенные векторы в исследовании фазового пространства уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Вестник МаГУ. Серия: Математика. – 2006. – №9. – С. 28–40.

25. *Замышляева, А.А.* Уравнение Буссинеска – Лява на графе / А.А. Замышляева // Известия Челябинского научного центра. 2007, 4 с. (электронная)

26. *Замышляева, А.А.* Об одном уравнении соболевского типа на графе / А.А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2008. – №27(127), вып. 2. – С. 45–49.

27. *Замышляева, А.А.* Решение одного уравнения соболевского типа на графе / А.А. Замышляева // Обозрение приклад. и пром. математики. – 2009. – Т.16, вып. 2. – С. 332–333.

28. *Замышляева, А.А.* Уравнение de Gennes звуковых волн в смектиках / А.А. Замышляева // Обозрение приклад. и пром. математики. – 2009. – Т.16, вып. 4. – С.655–656.

29. *Замышляева, А.А.* Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска - Лява на графе / А.А. Замышляева, А.В. Юзеева // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. "Математика". – 2010. – Т.3, №2. – С.18–29.

30.*Замышляева, А.А.* Начально-конечная задача для одного уравнения соболевского типа на графе / А.А. Замышляева // Обозрение приклад. и пром. математики. – 2010. – Т.17, вып. 5. – С.675–676.

31. *Замышляева, А.А.* Задача оптимального управления для уравнения соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ / под ред. А.И. Кожанова. – Новосибирск, 2010. – С. 95–101.

32. *Замышляева, А.А.* Фазовое пространство полулинейного уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Обозрение приклад. и пром. математики. – 2012. – Т.19, вып. 2. – С. 256–257.

33. *Замышляева, А.А.* Вырожденные косинус и синус оператор-функции / А.А. Замышляева // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ / под ред. А.И. Кожанова. – Новосибирск, 2012. – С.105–117.

34. *Свиридюк, Г.А.* Морфология фазовых пространств одного класса линейных уравнений типа Соболева высокого порядка / Г.А. Свиридюк, А.А. Замышляева // Вестник ЧелГУ. Матем. и мех. Челябинск. – 1999, №2. – С. 87–102.

35. *Zamyshlyaeva, A.A.* The Cauchy problem for the second order semilinear Sobolev type equation / A.A. Zamyshlyaeva, E.V. Bychkov // Global and Stochastic Analysis.– 2012. – Vol. 2, No. 1. – P. 159–166.

Типография «Два комсомольца»

Подписано в печать 24.09.2013. Формат 60 × 84 1/16.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1,87. Уч.-изд. л. 2.
Тираж 150 экз. Заказ 142/456

Отпечатано в типографии «Два комсомольца».
454008, г. Челябинск, Комсомольский пр., 2