

УТВЕРЖДАЮ:

Ректор ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ» (НИУ),  
доктор технических наук, профессор



А.Л. Шестаков

2015 г.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения  
высшего профессионального образования  
«Южно-Уральский государственный университет»  
(национальный исследовательский университет)

Диссертация «Аналитическое и численное исследования оптимального управления в полулинейных моделях гидродинамики и упругости» выполнена на кафедре уравнений математической физики.

В период подготовки диссертации соискатель Манакова Наталья Александровна работала: в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Челябинский государственный университет» в должностях ассистента кафедры математического анализа – с сентября 2002 г. по август 2005 г., старшего преподавателя кафедры математического анализа – с сентября 2005 г. по май 2006 г., доцента кафедры математического анализа – с июня 2006 г. по август 2006 г.; в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет) в должности доцента кафедры уравнений математической физики с сентября 2006 г. по настоящее время. Является докторантом кафедры уравнений математической физики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет) с 1 августа 2013 г. по настоящее время.

В 2000 г. окончила Челябинский государственный университет и получила степень бакалавра математики по направлению «Математика». В 2002 г. окончила Челябинский государственный университет и получила степень магистра математики по направлению «Математика».

Диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему «Исследование задач оптимального управления для неклассических уравнений математической физики» по специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ защитила в 2005 г. в диссертационном совете, созданном на базе Челябинского государственного университета.

Научный консультант – Свиридюк Георгий Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет), заведующий кафедрой уравнений математической физики.

Тема диссертации утверждена Ученым советом Южно-Уральского государственного университета 21 июня 2013 г., протокол № 10.

По результатам рассмотрения диссертации «Аналитическое и численное исследования оптимального управления в полулинейных моделях гидродинамики и упругости» принято следующее заключение:

*Актуальность темы и направленность исследования*

Диссертация Н.А. Манаковой посвящена разработке новых аналитических и численных методов исследования оптимального управления в полулинейных моделях гидродинамики и упругости. Актуальность изучения такого рода моделей обусловлена необходимостью исследования важных прикладных задач, в гидродинамике, геологии при изучении фильтрации жидкости, в нефтедобыче, в теории упругости, электродинамике и других областях. Именно развитие теории оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа позволило поставить вопрос об аналитическом и численном исследовании как существующих задач, так и новых в рамках

сложившихся направлений математического моделирования, например, в гидродинамике, геологии при изучении фильтрации жидкости, в нефтедобыче, в теории упругости, электродинамике и других предметных областях.

Исследованию задач оптимального управления для распределенных систем и уравнений посвящены работы как отечественных, так и зарубежных исследователей. Неклассические модели математической физики появляются в приложениях все чаще, однако в современной математической литературе представлены результаты, в основном касающиеся невырожденного случая. Исследование задач оптимального управления для полулинейных неклассических моделей носят разрозненный частный характер и, в первую очередь, относятся к невырожденным линейным или линеаризованным моделям. В связи с этим, считаем, что исследования, представленные в данной диссертации, являются актуальными.

#### *Личное участие автора в полученных научных результатах*

В ходе диссертационного исследования Н.А. Манаковой были получены следующие основные результаты:

В рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей получены:

1. Достаточные условия существования оптимального управления в математической модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости с начальным условием Шоуолтера – Сидорова;

2. Достаточные условия существования оптимального управления в математической модели Осколкова нелинейной фильтрации с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши; необходимые условия существования оптимального управления;

3. Достаточные условия существования оптимального управления в обобщенной математической модели Хоффа с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши; необходимые условия существования оптимального управления;

4. Достаточные условия существования оптимального управления в обобщенной математической модели деформации конструкции из двутавровых балок с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши;

5. Достаточные условия существования оптимального управления в математической модели распределения потенциала электрического поля в полупроводнике с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши; необходимые условия существования оптимального управления;

6. Достаточные условия существования оптимального управления в обобщенной математической фильтрационной модели Буссинеска с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши; необходимые условия существования оптимального управления;

7. Достаточные условия существования оптимального управления в математических моделях, основанных на полулинейном уравнении соболевского типа с  $s$ -монотонным и  $p$ -коэрцитивным оператором, с билинейным оператором.

В рамках разработки, обоснования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий получены:

8. Сходимость численного метода приближенного решения математических моделей как задач Коши или Шоуолтера – Сидорова для полулинейного уравнения соболевского типа с  $s$ -монотонным и  $p$ -коэрцитивным оператором;

9. Алгоритм численного метода исследования математических моделей на основе полулинейного уравнения соболевского типа с  $s$ -монотонным и  $p$ -коэрцитивным оператором;

10. Алгоритм численного метода исследования задачи оптимального управления для математических моделей с  $s$ -монотонным и  $p$ -коэрцитивным оператором на основе метода декомпозиции;

11. Алгоритм численного метода исследования задачи оптимального управления для математических моделей с  $s$ -монотонным и  $p$ -коэрцитивным оператором на основе метода многошагового покоординатного спуска с памятью.

В рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов получены:

12. Комплекс программ, реализующий алгоритмы численного метода исследования математических моделей на основе полулинейного уравнения соболевского типа с  $s$ -монотонным и  $p$ -коэрцитивным оператором на отрезке, на графе, в прямоугольнике, в круге;

13. Комплекс программ, реализующий алгоритмы численного метода исследования задачи оптимального управления для математических моделей с  $s$ -монотонным и  $p$ -коэрцитивным оператором на основе метода декомпозиции;

14. Комплекс программ, реализующий алгоритмы численного метода исследования задачи оптимального управления для математических моделей с  $s$ -монотонным и  $p$ -коэрцитивным оператором на основе метода многошагового покоординатного спуска с памятью.

Все исследования, связанные с пунктами 1–14, были выполнены Н.А. Манаковой единолично.

#### *Степень достоверности результатов проведенных исследований*

Все аналитические результаты, приведенные в диссертационной работе, сформулированы в виде теорем, снабженных подробными доказательствами. Достоверность полученных результатов проиллюстрирована большим количеством вычислительных экспериментов.

#### *Научная новизна результатов*

В диссертационной работе впервые проведено аналитическое и численное исследования полулинейных математических моделей, описывающих процессы упругости, гидродинамики, электрического поля, основанных на полулинейных уравнениях соболевского типа, и оптимального управления в них. Создана теоретическая основа для численного исследования изучаемых моделей: доказаны теоремы существования и единственности решений задачи Коши и задачи Шоуолтера – Сидорова для полулинейного уравнения соболевского типа с  $s$ -монотонным и  $p$ -коэрцитивным оператором, билиней-

ным оператором, устанавливающие сходимость приближенных решений к точному. Полученные теоретические результаты развивают и обобщают метод Галеркина – Петрова.

Впервые предложен общий метод исследования задачи оптимального управления для рассматриваемого класса математических моделей; приведены необходимые условия существования оптимального управления для них. Полученные теоретические результаты позволяют системно исследовать класс изучаемых моделей и могут быть применены к обширному классу задач математической физики.

На основе развития методов Галеркина – Петрова и декомпозиции, Галеркина – Петрова и многомерного покоординатного спуска с памятью разработаны новые алгоритмы численных методов, позволяющие находить приближенные решения задач оптимального управления для изучаемых полулинейных моделей математической физики. В области программного обеспечения разработан комплекс программ, позволяющий проводить вычислительные эксперименты.

#### *Практическая значимость полученных результатов*

Данная работа создает основу для развития аналитических и численных методов исследования для полулинейных моделей математической физики и задач оптимального управления для них. Построенная теория позволяет исследовать различные прикладные аспекты изучаемых моделей. Разработанные численные методы решения задачи оптимального управления могут быть применимы к широкому кругу задач математической физики. Результаты, полученные при исследовании математических моделей Осколкова и Буссинеска, могут быть использованы в гидродинамике, геологии при изучении фильтрации жидкости, в нефтедобыче. Результаты, полученные при исследовании математических моделей Хоффа, моделей деформации конструкции из двутавровых балок, могут быть использованы в теории упругости. Результаты, полученные при исследовании математической модели распределения потенциала электрического поля в полупроводнике, могут быть востребованы в электродинамике. Данные математические модели относятся к различ-

ным предметным областям, их объединяют единые методы и подходы исследования, которые могут быть применены и к другим математическим моделям. Разработанные алгоритмы численных методов реализованы в виде комплекса программ (Maple 18.0, C++), с помощью которых были проведены вычислительные эксперименты. Программы построены на модульной основе и могут быть модифицированы для исследования различных математических моделей.

### *Ценность научных работ соискателя*

Ценность научных работ соискателя заключается в том, что полученные результаты развивают теории уравнений соболевского типа, оптимального управления, дифференциальных уравнений в частных производных и являются законченным исследованием в области теории оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа. Получены достаточные условия однозначной разрешимости задач Коши и Шоуолтера – Сидорова, достаточные условия существования оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа с  $s$ -монотонным и  $r$ -коэрцитивным, билинейным оператором. Эти результаты использованы для аналитического исследования полулинейных вырожденных математических моделей гидродинамики и упругости и легли в основу разработанных численных методов.

Материалы диссертации полно представлены в работах, опубликованных соискателем. Все основные положения диссертационного исследования полностью опубликованы в 57 научных работах, из них 28 статей.

*Статьи, опубликованные в рецензируемых научных журналах и изданиях, определенных ВАК*

1. Манакова, Н.А. Регулярные возмущения одного класса линейных уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 3. – С. 423–425.
2. Манакова, Н.А. Фазовое пространство задачи Коши – Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 9. – С. 36–41.

3. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. 8, № 2. – С. 144–151.

4. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185–1192.

5. Манакова, Н.А. Об одной гипотезе Г.А. Свиридюка / Н.А. Манакова // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 87–93.

6. Манакова, Н.А. Об одной задаче оптимального управления с функционалом качества общего вида / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – № 4. – С. 18–24.

7. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – № 17 (234), вып. 8. – С. 113–114.

8. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для одной эволюционной модели / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Математические заметки ЯГУ. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 111–127.

9. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейной модели Хоффа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Математические заметки. – 2013. – Т. 94, № 2. – С. 225–236.

10. Манакова, Н.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоултера – Сидорова и аддитивными шумами / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 90–103.

11. Манакова, Н.А. О решении задачи Дирихле – Коши для уравнения Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Известия Иркут-

ского государственного университета. Серия: Математика. – 2014. – Т. 7, [№ 1]. – С. 52–60.

12. Манакова, Н.А. Метод декомпозиции в задаче оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа / Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 133–137.

13. Манакова, Н.А. Математические модели и оптимальное управление процессами фильтрации и деформации / Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 3. – С. 5–24.

14. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 3. – С. 22–29.

15. Manakova, N.A. The Asymptotics of Eigenvalues of a Differential Operator in the Stochastic Models with «White Noise» / G.A. Zakirova, N.A. Manakova, G.A. Sviridyuk // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – V. 8, № 175. – P. 8747–8754.

16. Manakova, N.A. An Optimal Control of the Solutions of the Initial-Final Problem for Linear Sobolev Type Equations with Strongly Relatively p-Radial Operator / N.A. Manakova, G.A. Sviridyuk // Semigroups of Operators – Theory and Applications. – Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015. – P. 213–224.

#### *Свидетельства о регистрации программ*

17. Численное моделирование процесса нелинейной диффузии: Свидетельство № 2015616525 / Манакова Н.А., Селиванова А.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2015616525; заявл. 23.04.2015; зарегистр. 11.06.2015, реестр программ для ЭВМ.

18. Численное моделирование неравновесной противоточной капиллярной пропитки в круге: Свидетельство № 2015617080 / Богатырева Е.А.,

Манакова Н.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2015617080; заявл. 15.05.2015; зарегистрир. 30.07.2015, реестр программ для ЭВМ.

19. Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей фильтрации: Свидетельство № 2015615719 / Манакова Н.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2015619266; заявл. 29.06.2015; зарегистрир. 27.08.2015, реестр программ для ЭВМ.

20. Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа: Свидетельство № 2015615720 / Манакова Н.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2015619265; заявл. 29.06.2015; зарегистрир. 27.08.2015, реестр программ для ЭВМ.

#### *Монографии*

21. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.

#### *Другие научные публикации*

22. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Н.А. Манакова // Вестник МаГУ. Математика. Вып. 8. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. ун-та, 2005. – С. 113–122.

23. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения нелинейной диффузии / Н.А. Манакова // Оптимизация, управление, интеллект. – 2005. – № 3. – С. 90–98.

24. Манакова, Н.А. Необходимые и достаточные условия существования оптимального управления для динамических полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова // Вестник МаГУ. Математика. Вып. 9. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. ун-та, 2006. – С. 70–80.

25. Манакова, Н.А. Об одной модели оптимального управления уравнением Осколкова / Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математиче-

ское моделирование и программирование. – 2008. – № 27 (127), вып. 2. – С. 63–70.

26. Манакова, Н.А. Об одной модели оптимального управления уравнением электрического поля в полупроводнике / Н.А. Манакова // Обзорные прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т. 16, № 5. – С. 891–892.

27. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера – Сидорова для одного уравнения соболевского типа / Н.А. Манакова, Е.А. Богонос // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 42–53.

28. Манакова, Н.А. О начально-краевой задаче для уравнения Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Кононова // Обзорные прикладной и промышленной математики. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 270–271.

29. Манакова, Н.А. Численное исследование процессов в модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Вестник МаГУ. Математика. Вып. 15. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. ун-та, 2013. – С. 58–67.

30. Манакова, Н.А. Задача Коши для одного класса стохастических уравнений соболевского типа в пространстве «дифференцируемых шумов» / Н.А. Манакова // Вырожденные полугруппы и пропагаторы уравнений соболевского типа. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2014. – С. 52–58.

31. Манакова, Н.А. Стохастическая модель Девиса в пространстве «дифференцируемых шумов» / Н.А. Манакова // Обзорные прикладной и промышленной математики. – 2014. – Т. 21, № 4. – С. 379–380.

32. Манакова, Н.А. Задача стартового управления и финального наблюдения для модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Обзорные прикладной и промышленной математики. – 2015. – Т. 22, № 1. – С. 79–80.

33. Manakova, N.A. An Optimal Control to Solutions of the Showalter – Sidorov Problem for the Hoff Model of the Geometrical Graph / N.A. Manakova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – V. 1, № 1. – P. 26–33.

В работах 1–3, 10, 15, 16 Г.А. Свиридюку принадлежит общая постановка задач, а Н.А. Манаковой – все основные полученные результаты. Из остальных работ, выполненных в соавторстве, в диссертацию включены только те результаты, которые были получены лично Н.А. Манаковой и не затрагивают интересов других соавторов.

*Специальность, которой соответствует диссертация*

В представленной Манаковой Натальей Александровной диссертации исследовано оптимальное управление в математических моделях, основанных на полулинейных уравнениях соболевского типа, а также разработаны численные методы нахождения приближенного решения задач оптимального управления, для таких моделей, реализованные в виде комплекса программ для проведения вычислительных экспериментов. Это позволяет сделать вывод о том, что работа содержит оригинальные результаты одновременно из трех областей – математического моделирования, численных методов и комплексов программ. Кроме того, предлагаемые методы могут быть использованы в различных предметных областях – гидродинамике, теории упругости, геологии. Диссертационное исследование соответствует следующим пунктам паспорта специальности: 2 – развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей, 3 – разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий, 4 – реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов. Таким образом, диссертация соответствует паспорту специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Диссертация «Аналитическое и численное исследования оптимального управления в полулинейных моделях гидродинамики и упругости» Манаковой Натальи Александровны является законченным, самостоятельно выполненным научным исследованием, содержит новые научные результаты и рекомендуется к защите на соискание ученой степени доктора физико-

математических наук по специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

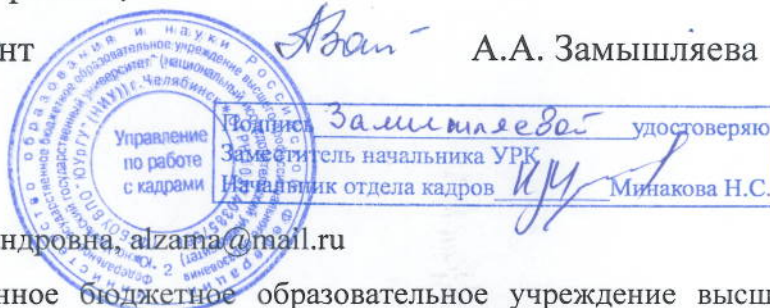
ПРИСУТСТВОВАЛИ: зав. кафедрой Г.А. Свиридюк, д.ф.-м.н., профессор; А.А. Замышляева, д.ф.-м.н., доцент; Г.А. Закирова, к.ф.-м.н., доцент; Д.Е. Шафранов, к.ф.-м.н., доцент; П.О. Москвичева, к.ф.-м.н.; О.Н. Цыпленкова, к.ф.-м.н.; Е.В. Бычков, к.ф.-м.н.; А.Б. Самаров, к.ф.-м.н., доцент; М.А. Загребин, к.ф.-м.н., доцент.

ПРИГЛАШЕНЫ: М.Ю. Ковалев, д.ф.-м.н., профессор; А.А. Келлер, д.ф.-м.н., доцент; С.А. Загребина, д.ф.-м.н., доцент; В.М. Адуков, д.ф.-м.н., доцент; В.В. Карачик, д.ф.-м.н., с.н.с.; В.Л. Дильман, д.ф.-м.н., доцент; М.А. Сагадеева, к.ф.-м.н., доцент.

Заключение принято на заседании кафедры уравнений математической физики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).  
Результаты голосования: «за» – 16 чел., «против» – нет, «воздержалось» – нет, протокол № 1 от 31 августа 2015 г.

Заметитель заведующего кафедрой  
уравнений математической физики,  
доктор физ.-мат. наук, доцент

*А.А. Замышляева* А.А. Замышляева



Замышляева Алена Александровна, [alzama@mail.ru](mailto:alzama@mail.ru)

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет), Россия, 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, д. 76, <http://susu.ac.ru/>, телефон: +7 351 267-93-39.