На правах рукописи

ЗАКИРОВА Галия Амрулловна

ОБРАТНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ДРОБНОЙ СТЕПЕНЬЮ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2009

Работа выполнена в Магнитогорском государственном университете.

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент
СЕДОВ Андрей Иванович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
СВИРИДЮК Георгий Анатольевич

доктор физико-математических наук, профессор
ЮРКО Вячеслав Анатольевич

Ведущая организация:
Башкирский государственный университет

Защита состоится 11 февраля 2009 г. в 12 ч. 00 м. на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина,76.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Автореферат разослан 31 декабря 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Л. Б. Соколинский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Цель и задачи исследования. В пространстве $L_2(\Pi)$, где Π — заданный N–мерный параллелепипед, рассмотрим оператор Лапласа T_0, определенный краевой задачей Дирихле:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Pi} = 0, \quad \Delta \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}. \tag{1}$$

Введем оператор $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, являющийся степенью оператора T_0. Здесь $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора T_0, $\beta \geq \frac{N}{2}$. Пусть P — оператор умножения на комплекснозначную функцию $p \in \mathrm{L}_2(\Pi)$, называемую потенциалом. Данная диссер-

[redacted]

направлении принадлежит В.А. Амбарцумяну[1]. Он доказал, что если собственные значения краевой задачи

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0,$$

где q — действительная непрерывная функция, суть $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, \ldots$, то $q \equiv 0$. Однако, результат В.А. Амбарцумяна является скорее исключением — позднее Г. Борг[2] показал, что оператор Штурма – Лиувилля в общем случае однозначно не определяется одним спектром. В связи с этим, в дальнейших исследованиях применялись методы, использовавшие дополнительные спектральные характеристики: метод операторов преобразования, метод спектральных отображений, метод Борга и т.д. Отметим здесь работы Р. Билса, Г. Борга, М.Г. Гасымова, М.Г. Крейна, Б.М. Левитана, Н. Левинсона, З.Л. Лейбензона, В.А. Марченко, И.С. Саргсяна, Л.А. Сахновича, И.Г. Хачатряна, В.А. Юрко. В частности, В.А. Юрко[3] разработал еще один метод — метод эталонных моделей, позволяющий строить конструктивные решения для широкого класса обратных задач. Значительно более сложными для изучения являются обратные спектральные задачи для операторов с частными производными. В этом направлении чаще всего исследуется оператор Лапласа. Обратные задачи для уравнений с частными производными исследовались в работах Ю.А. Анникова, А.Л. Бухгейма, М.М. Лаврентьева, Л.П. Нижника, А.И. Прилепко, А.Г. Рамма, В.Г.Романова, К.Шадана, Л.Д. Фаддеева и других математиков. Впервые обратная задача для оператора Лапласа с потенциалом была поставлена Ю.М. Березанским[4]

Данная диссертация примыкает к работам школы В.А. Садовничего. В 1979 г. работе В.А. Садовничего, В.В. Дубровского[5] была по-

[1] *Ambarzumian, V. A. Über* eine Frage der Eigenwerttheorie / Ambarzumian V. A. // Zs. F. Phys. – 1929. – V. 53. P. 690 - 695.

[2] *Borg, G.* Eine Umkehrung der Sturm – Liouvilleschen Eigenwertaufgabe / G. Borg // Acta Math. – 1946. – Bd. 78. №1. – S. 1 – 90.

[3] *Юрко, В.А.* Восстановление дифференциальных операторов высших порядков / В.А. Юрко // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. № 9. – С. 1540 – 1550.

[4] *Березанский, Ю.М.* О теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера / Ю.М. Березанский // Труды Моск. математ. о-ва.– 1958.– Т. 7.– С.3 – 51.

[5] *Садовничий, В.А.* О некоторых свойствах операторов с дискретным спек-

казана возможность восстановления возмущающего оператора только по спектру оператора. Начиная с 1990 года В.В. Дубровский со своими учениками (А.С. Великих, А.И. Седов, Л.В. Смирнова) занимался разработкой данного метода — метода регуляризованных следов, опирающегося на работы В.В. Дубровского, В.Е. Подольского, В.А. Садовничего, З.Ю. Фазуллина. Впервые метод был теоретически обоснован в работах В.В. Дубровского, А.В. Нагорного[6]. Необходимо отметить, что в вышеперечисленных работах рассматривались различные краевые задачи для степени оператора Лапласа только с простым спектром на прямоугольных областях[7]. Хотя в настоящее время наиболее активно исследуются модели с целыми степенями операторов, в частности, с оператором Лапласа и би–Лапласа, в последнее время в приложениях[8] возникают математические модели с дробными степенями оператора Лапласа. В данной диссертации впервые исследуются краевые задачи для дробной степени оператора Лапласа с кратным спектром.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1) Впервые исследованы обратные задачи для оператора Лапласа с кратным спектром. Доказаны теоремы существования решения обратных спектральных задач

— для возмущенной степени оператора Лапласа с ядерной резольвентой, заданного краевой задачей Дирихле либо Неймана на N–мерном параллелепипеде;

тром / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 7. – С.1206 – 1211.

[6] *Дубровский, В.В.* К обратной задаче для оператора Лапласа с непрерывным потенциалом / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 9. – С.1563 – 1567. *Дубровский, В.В.* Обратная задача для степени оператора Лапласа с потенциалом из L^2 / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 9. – С.1552 – 1561.

[7] *Дубровский, В.В.* Теорема о существовании решения обратной задачи спектрального анализа для степени оператора Лапласа / В.В. Дубровский, А.С. Великих // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1998. – Т. 3, № 5. – С.6 – 9. *Смирнова, Л.В.* Математическая модель восстановления гладких потенциалов в обратных задачах спектрального анализа: дис. ... канд. физ.–мат. наук / Л.В. Смирнова. – Челябинск, 2002.

[8] *Шамолин М.В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики / М.В. Шамолин. – М.: Экзамен, 2007. – 318 с.

— для возмущенной степени оператора Лапласа с неядерной резольвентой, заданного краевой задачей Дирихле либо Неймана на N–мерном параллелепипеде;

— для оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике.

В частном случае, когда спектр невозмущенного оператора однократный, полученные результаты совпадают с результатами Е.А. Пузанковой[9] и В.В. Дубровского (мл.)[10].

2) Впервые получено приближенное решение обратной спектральной задачи для возмущенного оператора Лапласа.

3) Созданы программные продукты в среде Maple 6 для реализации алгоритма численного нахождения приближенного решения обратной задачи для оператора Лапласа.

Теоретическая ценность диссертации состоит в доказательстве теорем существования решения поставленных обратных задач. **Практическая ценность** заключается в том, что предложенный алгоритм решения обратных спектральных задач может быть применен для восстановления потенциала в математических моделях с оператором Лапласа. Создана программа численной реализации данного алгоритма.

Методы исследования. Основным в работе является так называемый резольвентный метод, предложенный В.А. Садовничим и В.В. Дубровским. Используются методы теории возмущений, принцип сжимающего оператора и методы вычислительной математики.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы, алгоритмы и результаты вычислительных экспериментов докладывались автором на следующих научных конференциях и научно-исследовательских семинарах:

– на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения — XVIII"(г. Воронеж, ВГУ, 2007 г.);

– на Международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", посвященной 100–летию со дня

[9] *Пузанкова Е.А.* Некоторые вопросы спектральной теории дифференциальных операторов в частных производных: дисс. ... канд. физ. - мат. наук: 01.01.01. - Екатеринбург, 2003.

[10] *Дубровский В.В. (мл.)* Обратные задачи спектрального анализа для некоторых дифференциальных операторов в частных производных: дис. ...канд. физ. - мат. наук: 01.01.02 . - Стерлитамак, 2006.

рождения академика И.Н. Векуа (г. Новосибирск, 2007 г.);

– на 14 – ой Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения"(г. Саратов, СГУ, 2008 г.);

– на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения — XIX"(г. Воронеж, ВГУ, 2008 г.);

– на Международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы"(г. Стерлитамак, СГПА, 2008 г.);

– на Международной конференции по математической физике и ее приложениям (г. Самара, 2008 г.);

– на региональных научно-практических конференциях в Магнитогорском государственном университете (Магнитогорск, 2003 - 2008 гг.);

– на научно-исследовательском семинаре под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора Свиридюка Г.А. в Южно-Уральском государственном университете;

– на научно-исследовательском семинаре под руководством кандидата физ.-мат. наук, доцента Седова А.И. в Магнитогорском государственном университете;

– на научно-исследовательском семинаре под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора Фазуллина З.Ю. в Башкирском государственном университете.

Публикации. Основные научные результаты диссертации опубликованы в 12 печатных работах, приведенных в конце автореферата. Статья [1] опубликована в научном журнале, рекомендованном ВАК. В статьях, совместных с научным руководителем, Седову А.И. принадлежит постановка задач, Закировой Г.А. принадлежат все полученные результаты.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, приложения и списка литературы из 112 наименований. Общий объем работы составляет 84 страниц, набранных в редакторе LaTeX.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, определяются цели работы, дается обзор литературы по исследуемой проблематике, кратко излагаются основные результаты диссертации.

Первая глава посвящена доказательству некоторых вспомогательных утверждений, полученных диссертантом, и состоит из трех параграфов. В параграфе 1.1 приводятся необходимые сведения из теории симметрично-нормированных идеалов компактных операторов. В параграфе 1.2 получена оценка суммы некоторых числовых рядов. В параграфе 1.3 доказывается замкнутость множеств функций со специальными свойствами.

Вторая глава содержит основные теоретические результаты диссертации и посвящена обратным спектральным задачам для возмущенного оператора Лапласа и его степеней на N–мерном параллелепипеде и равнобедренном прямоугольном треугольнике.

В **§2.1** доказываются некоторые спектральные тождества для абстрактного дискретного дифференциального оператора, используемые в дальнейшем.

В **§2.2** доказывается существование решения обратной задачи для возмущенной степени оператора Лапласа на N–мерном параллелепипеде $\Pi = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \ : \ 0 \leq x_j \leq a_j, j = 1, \ldots, N\}$, $a_j > 0$ с объемом $V = \prod\limits_{j=1}^{n} a_j$. Обозначим через T степень оператора T_0, порожденного краевой задачей Дирихле (1). Упорядоченные по возрастанию собственные числа оператора T , т.е. $\lambda_m = \left(\sum\limits_{j=1}^{N} \dfrac{\pi^2 m_j^2}{a_j^2}\right)^{\beta}$, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_N)$, $m_j \in \mathbb{N}$ будем нумеровать одним нижним и одним верхним натуральными индексами, при этом верхний индекс будет отвечать за кратность собственного числа λ_t, т.е. $\lambda_t = \lambda_t^k$, $k = \overline{1, \nu_t}$.

Положим:

$r_t = \dfrac{1}{2} \min\{\lambda_{t+1} - \lambda_t; \lambda_t - \lambda_{t-1}\}$, $r_0 = \inf\limits_t r_t$;

$\gamma_{r_t} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda_t - \lambda| = r_t\}$;

$s = \left(\sum\limits_{t=1}^{\infty} r_t^2 \max\limits_{\lambda \in \gamma_{r_t}} \|R_0(\lambda)\|_2^4\right)^{1/2}$; $r \in (0, \min\{r_0, \frac{1}{s\sqrt{2^N}}\})$.

Теорема 1. Пусть $\beta > \dfrac{3N}{4}$. Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^k\}$ выполняется неравенство:

$$\sqrt{2^N V} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} |\xi_t^k - \lambda_t|^2\right)^{1/2} < \frac{r}{2}(1 - \omega),$$

где $\omega = \sqrt{2^N} sr < 1$, то существует потенциал $p \in L_2(\Pi)$ такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k = \sum_{k=1}^{\nu_t} \mu_t^k, \tag{2}$$

где $\{\mu_t^k\} = \sigma(T + P)$.

Следствие 1. Пусть a_j^2/a_k^2 — иррациональное число, $k \neq j$. Пусть P — оператор найденный в теореме 1. Если $r < \frac{\sqrt{V}}{2^{N+2}s}$, то этот оператор единственный.

Теорема 1 с небольшими изменениями справедлива и в случае задачи Неймана.

Теорема 2. Пусть $\beta > \dfrac{3N}{4}$. Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^k\}$ выполняется неравенство:

$$\sqrt{2^N V} \left({\sum_{t=1}^{\infty}}' \sum_{k=1}^{\nu_t} |\xi_t^k - \lambda_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{r}{2}(1 - \omega),$$

где $\omega = \sqrt{2^N} sr < 1$, то существует потенциал $p \in L_2(\Pi)$ такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k = \sum_{k=1}^{\nu_t} \mu_t^k,$$

где $\{\mu_t^k\} = \sigma(T + P)$.

Штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется по тем t, для которых у чисел λ_t все $m_j > 0$.

В **§2.3** доказываются теоремы существования решения обратной задачи для возмущенной степени оператора Лапласа ($\beta \geq \frac{3N}{4}$) на N–мерном параллелепипеде, определенного краевыми задачами Дирихле или Неймана.

Пусть функции $f_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ таковы, что $f_t(\lambda_k) = \delta_{tk}$, где δ_{tk} — символ Кронекера и пусть $\beta_t = \sup\limits_{\operatorname{Re}\lambda > 0} (|\lambda|^2 \cdot |f_t(\lambda)|) < \infty$. Обозначим:

$$g_t(\lambda) = \int_0^{\lambda} f_t(z)dz; \; a_t = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = \frac{\lambda_{t+1} + \lambda_t}{2}\};$$

$$\Omega_{r_t} = \{\lambda : |\lambda_t - \lambda| \geq r_0\}; \; \Omega = \bigcap_{t=1}^{\infty} \Omega_{r_t}.$$

Теорема 3. Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^k\}$ существует подпоследовательность $\{c_t\} \subset \{a_t\}$ такая, что выполняются следующие неравенства:

(i) $\omega = 2^{N-1} r_0 \max\limits_{\lambda \in \Omega} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \sum\limits_{t=1}^{\infty} \dfrac{\beta_t}{c_t} < 1,$

(ii) $2^N \sum\limits_{t=1}^{\infty} \left| \sum\limits_{\lambda_j < c_t} \sum\limits_{k=1}^{\nu_j} \left(g_t(\xi_j^k) - g_t(\lambda_j) \right) \right| < \dfrac{r_0}{2}(1-\omega),$

то существует потенциал p, такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\lambda_j < c_t} \sum_{k=1}^{\nu_j} g_t(\mu_j^k) = \sum_{\lambda_j < c_t} \sum_{k=1}^{\nu_j} g_t(\xi_j^k).$$

В случае задачи Неймана теорема выглядит следующим образом:

Теорема 4. Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^k\}$ существует подпоследовательность $\{c_t\} \subset \{a_t\}$ такая, что выполняются следующие неравенства:

(i) $\omega = 2^{N-1} r_0 \max\limits_{\lambda \in \Omega} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \sum\limits_{t=1}^{\infty} \dfrac{\beta_t}{c_t} < 1,$

(ii) $2^N {\sum\limits_{t=1}^{\infty}}' \left| \sum\limits_{\lambda_j < c_t} \sum\limits_{k=1}^{\nu_j} \left(g_t(\xi_j^k) - g_t(\lambda_j) \right) \right| < \dfrac{r_0}{2}(1-\omega),$

то существует потенциал p, такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\lambda_j < c_t} \sum_{k=1}^{\nu_j} g_t(\mu_j^k) = \sum_{\lambda_j < c_t} \sum_{k=1}^{\nu_j} g_t(\xi_j^k).$$

Как и прежде, штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется по тем t, для которых у чисел λ_t все $m_j > 0$.

В **§2.4** доказана теорема существования решения обратной задачи для степени оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике $K = \{(x, y) : 0 \le x \le y \le \pi\}$.

Положим:

$$s_\triangle = \sum_{m>n>0} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^{2k}} r_{2^k(m+n),2^k(m-n)} \max_{\lambda \in \gamma_{2^k(m+n),2^k(m-n)}} \|R_0(\lambda)\|_2^2 +$$

$$+\tfrac{1}{2^{2k+1}} r_{2^{k+1}m,2^{k+1}n} \max_{\lambda\in\gamma_{2^{k+1}m,2^{k+1}n}} \|R_0(\lambda)\|_2^2\Big);$$

$r \in (0, \min\{r_0, \frac{1}{3\sqrt{2}s_\Delta}\})$.

Теорема 5. Пусть $\beta > 2$. Если для комплексной последовательности $\{\xi_{mn}\}$ выполняется неравенство:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m>n>0}\Big|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}(\xi_{2^k(m+n),2^k(m-n)} - \lambda_{2^k(m+n),2^k(m-n)}) -$$

$$-\frac{1}{2^{2k+1}}(\xi_{2^{k+1}m,2^{k+1}n} - \lambda_{2^{k+1}m,2^{k+1}n})\Big| < \frac{r}{2}(1-\omega),$$

где $\omega = 3\sqrt{2}s_\Delta r < 1$, то существует функция $p \in L_\infty(K)$ такая, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m^2+n^2=\lambda_t}(\mu_{mn} - \frac{1}{2}\mu_{m+n,m-n}) = \sum_{m^2+n^2=\lambda_t}(\xi_{mn} - \frac{1}{2}\xi_{m+n,m-n}),$$

где $\{\mu_{mn}\} = \sigma(T+P)$.

Третья глава посвящена приближенному решению исследованных во второй главе обратных задач. В § 3.1 формулы, использованные для доказательства теорем существования, преобразованы в более удобный для построения алгорима вид. Предложен алгоритм численного нахождения приближенного решения нелинейного функционально-операторного уравнения. В § 3.2 приведено описание программы, созданной в среде Maple 6, реализующий предложенный алгоритм. § 3.3 посвящен численному эксперименту по демонстрации разработанного алгоритма.

Далее приведем **пример**, иллюстрирующий работу программы.

Пусть T — степень оператора T_0 ($\beta = 5/2$), определенного краевой задачей Дирихле (1) на прямоугольнике Π со сторонами $a = 1$, $b = \sqrt[4]{3}$. Оператор T_0— дискретный, самосопряженный, положительный. Пусть далее, $\xi_{mn} = \lambda_{mn} + 0.0001$, $m, n \le 3$. По теореме 1 существует потенциал $p \in L_2(\Pi)$ такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$ выполнено свойство (2).

Приближенный потенциал, восстановленный в предложенной программе по первым трем членам последовательности $\{\xi_{mn}\}$, имеет вид:

$$\widetilde{p}(x,y) = 0.0004006101099 + 0.0003996020352\cos(4.774188417y)+$$

$$+0.0003999764584\cos(9.548376831y)+0.0003999963294\cos(14.32256525y)+$$

$$+0.0003998709158\cos(6.283185308x)+$$

$$+0.0003999661512\cos(6.283185308x)+$$

$$+0.0003999943750\cos(6.283185308x)\cos(9.548376831y)+$$

$$+0.0003999987614\cos(6.283185308x)\cos(14.32256525y)+$$

$$+0.0003999948648\cos(12.56637062x)+$$

$$+0.0003999956908\cos(12.56637062x)\cos(4.774188417y)+$$

$$+0.00003999972752\cos(12.56637062x)\cos(9.548376831y)+$$

$$+0.0003999988398\cos(12.56637062x)\cos(14.32256525y)+$$

$$+0.0004000001236\cos(18.84955592x)+$$

$$+0.0003999988488\cos(18.84955592x)\cos(4.774188417y)+$$

$$+0.0003999994667\cos(18.84955592x)\cos(9.548376831y)+$$

$$+0.0003999997508\cos(18.84955592x)\cos(14.32256525y).$$

Основные результаты диссертационной работы

На защиту выносятся следующие новые научные результаты.

1) Доказаны теоремы существования решения обратных спектральных задач для возмущенной степени оператора Лапласа с ядерной и неядерной резольвентой, заданного краевой задачей Дирихле либо Неймана на N–мерном параллелепипеде, а также для оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике.

2) Разработан алгоритм, позволяющий восстанавливать потенциал в обратных спектральных задачах с дробной степенью оператора Лапласа.

3) Создана программа в среде Maple 6 для реализации предложенного алгоритма.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в научных журналах из списка ВАК

1. *Закирова, Г.А.* Приближенное решение обратной спектральной задачи для оператора Лапласа / Г.А. Закирова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.– мат. науки. – 2008. – № 2(17). – С. 250 – 253.

Другие публикации

2. *Закирова, Г.А.* Приближенное решение обратной спектральной задачи для оператора Лапласа / Г.А. Закирова // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. – Вып. 2. –№ 27(127). – 2008. – С. 19 – 27.

3. *Закирова, Г.А.* Обратная спектральная задача для оператора Лапласа и ее приближенное решение / Г.А. Закирова, А.И. Седов // Вестник МаГУ. Математика. – Вып. 9. Магнитогорск: МаГУ. – 2006. – С. 145 – 149.

4. *Закирова, Г.А.* Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом на параллелепипеде / Г.А. Закирова, А.И. Седов // Математика. Механика. Информатика: Материалы Всерос. науч. конф., Челябинск, 19-22 сент. 2006 г. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2007. – С. 160 – 167.

5. *Закирова, Г.А.* О существовании решения обратной задачи спектрального анализа для оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике / Г.А. Закирова, А.И. Седов // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XVIII". – Воронеж: Воронежский государственный университет. – 2007. – С. 144 – 145.

6. *Закирова, Г.А.* Об обратной задаче спектрального анализа для возмущенной степени оператора Лапласа на параллелепипеде / Г.А. Закирова, А.И. Седов // Материалы международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", Новосибирск, 28 мая – 2 июня 2007 г. – Новосибирск. – 2007. – С. 292 – 293

6. *Закирова, Г.А.* Об обратной задаче спектрального анализа для возмущенной степени оператора Лапласа на параллелепипеде / Г.А. Закирова, А.И. Седов // Материалы международной конференции

"Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", Новосибирск, 28 мая – 2 июня 2007 г. – Новосибирск. – 2007. – С. 292 – 293

7. *Закирова, Г.А.* О восстановлении оператора Лапласа на треугольнике по его спектру / Г.А. Закирова, А.И. Седов // Современные проблемы науки и образования: материалы XLV внутривузовской научной конференции преподавателей МаГУ. – Магнитогорск: МаГУ, 2007. – С.259 – 260.

8. *Закирова, Г.А.* Обратная задача спектрального анализа для возмущенной степени оператора Лапласа в случае задачи Неймана на параллелепипеде / Г.А. Закирова, А.И. Седов // Вестник ЧелГУ. Математика. Механика. Информатика. Выпуск 10. – 2008. – № 6(107). – С. 63 – 68

9.*Закирова, Г.А.* Об обратной задаче спектрального анализа для степени оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике / Г.А. Закирова, А.И. Седов // 14 Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теории функций и их приложения", Саратов, 28 января 2008 – 4 февраля 2008 г. – С. 170.

10. *Закирова, Г.А.* О существовании решения обратной спектральной задачи для степени оператора Лапласа на N-мерном параллелепипеде / Г.А. Закирова, А.И. Седова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XIX". - Воронеж: Воронежский государственный университет, 2008. – С. 193.

11. *Закирова, Г.А.* Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике / Г.А. Закирова, А.И. Седов // Вестник СамГУ - Естественнонаучная серия. – 2008. – №2(61). – С 34 – 42.

12. *Закирова, Г.А.* Об обратной задаче спектрального анализа для степени оператора Лапласа на n- мерном параллелепипеде / Г.А. Закирова, А.И. Седов // Труды Международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы", Стерлитамак. – Уфа: Гилем, 2008. – Т. II. – С. 46 – 48.

Подписано в печать 26.12.08. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 0,93. Уч.-изд. л. 0,7.
Тираж 100 экз. Заказ №750. Бесплатно.

455038, г. Магнитогорск, пр. Ленина, 114
Типография Магнитогорского государственного университета