ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»

УДК 519.63

На правах рукописи

Ушаков Андрей Леонидович

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРУГОСТИ МЕТОДАМИ ИТЕРАЦИОННЫХ ФАКТОРИЗАЦИЙ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент С.А. Загребина

Челябинск – 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Различные физические явления в природе и технике в таких областях, как гидродинамика, механика, теплотехника, электротехника и т.д. могут быть описаны математическими моделями, полученными на основе уравнений в частных производных. При этом стационарные, установившиеся процессы зачастую моделируются с помощью эллиптических уравнений второго и четвёртого порядков.

Уравнение Пуассона моделирует перемещения мембран под действиями давлений, потенциалы электростатических полей в зависимости от плотностей статических зарядов, стационарные распределения температур от тепловых источников, скорости течения жидкости и т.д. Эти модели изучали, например, В.Н. Кризский [31], Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц [36], А.В. Ряжских [64]. Экранированное уравнение Пуассона моделирует перемещения мембран под действиями давлений при наличии упругих оснований. Эти модели рассматривали Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц [36], Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец [60], С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер [77] и др.

В теории упругости уже более 200 лет известно уравнение Софи Жермен – Лагранжа, оно же бигармоническое уравнение, возникающее при математическом моделировании перемещений пластин под действиями давлений, а ему аналогичные уравнения лежат в основе математических моделей перемещений пластин под действиями давлений на упругих основаниях. Такие модели исследовали, например, Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц [36], В.И. Соломин [72], С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер [77]. Дополнительно можно отметить, что однородное бигармоническое уравнение с неоднородными граничными условиями возникает при математическом моделировании в плоских задачах теории упругости.

При рассмотрении различных граничных условий на краях пластин, возникает множество, вообще говоря, разнообразных математических моделей, зачастую существенно различающихся по методам решений и сложности, возникающих в них задач. К решению таких задач могут, сводиться решения задач, например, возникающих в математических моделях гидродинамики, нелинейных моделях теории упругости, которые решали Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц [36], Дж. Хаппель, Г. Бреннер [78] и др.

В работе рассматриваются математические модели перемещений прямоугольных мембран без упругого основания и на упругом основании под действиями давлений, закреплённые на двух смежных сторонах. Перечисленные модели строятся на основе уравнений Пуассона и экранированного уравнения Пуассона в прямоугольной области, где на двух смежных сторонах задано главное однородное краевое условие, а на двух других сторонах выполняется естественное однородное краевое условие. Отметим, что, решение каждой задачи из указанных краевых задач существует и единственно. Вопросы существования и единственности решения таких задач изучали, например, Ж.П. Обэн. [59], Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец [60].

Далее предлагается рассмотреть математическую модель перемещений прямоугольной пластины на упругом основании под действиями давлений, где на двух смежных сторонах однородные условия шарнирного опирания, а на двух других сторонах однородные условия симметрии. Это эллиптическое уравнение четвертого порядка в прямоугольной области, где на двух смежных сторонах задано первое главное однородное краевое условие и на двух других сторонах задано второе главное однородное краевое условие, а остальные соответствующие краевые условия естественные однородные. Можно отметить, что решение указанной краевой задачи существует и единственно. Вопрос существования и единственности решения такой задачи рассматривали Ж.П. Обэн. [59], Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец [60] и др.

Рассматриваются математические модели перемещений пластин на упругих основаниях под действиями давлений, где на соответствующих краях заданы однородные условия жёсткой заделки, шарнирного опирания, симметрии и свободного опирания. Это эллиптическое уравнение четвертого порядка в ограниченных областях на плоскости при соответствующих краевых условиях указанных четырёх типов и их различных комбинациях. Постановки таких краевых задач приводят, например, Л.Б. Масловская [45], Ж.П. Обэн. [59], Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец [60]. Краевые задачи рассматриваются при обычных предположениях обеспечивающих каждой задаче существование и единственность её решения. Условия существования и единственности решения приводят Ж.П. Обэн. [59], Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец [60].

В работе используются редукции математических моделей в вариационном виде к математическим моделям в дискретном виде, что автоматически, достаточно адекватно и точно сохраняет свойства исходных моделей на разностном уровне, на основе методов сумматорных тождеств и конечных элементов. Такие подходы использовали Р. Курант, Д. Гильберт [33], О.А. Ладыженская [34], О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева [35], Г.И. Марчук [40], С.Г. Михлин [54], А.А. Самарский [67], А.А. Самарский, В.Б. Андреев [68].

Построения эффективных методов оптимальных или квазиоптимальных, логарифмически оптимальных по числу арифметических операций для нахождений решений с заранее задаваемыми достаточно малыми погрешностями существенно усложняется с увеличением порядков уравнений, замечает Е.Г. Дьяконов [17]. Указывают, что численное решение бигармонического уравнения и ему аналогичных, даже в квадратной области, при главных краевых условиях, недостаточно освоено, т.е. есть определённые трудности в решении таких задач Н.Н. Анучина, К.И. Бабенко С.К. Годунов и др. [76]. Там же отмечается, что Р. Беллман, Э. Энджел [3] не довели до получения практически эффективных численных методов подходы, основанные на сведении решений краевых задач к минимизации соответствующих функционалов. В.И. Ряжских, М.И. Слюсарев, М.И. Попов [65] также отмечают, что, несмотря на линейный характер бигармонического уравнения, интегрирование, этих задач вызывает ряд трудностей. Но известна необходимость в эффективных методах решения таких, выходит, признано проблемных задач на современных ЭВМ. А к численному решению этих задач могут, сводиться численные решения, ещё более сложных задач, например, как отмечалось, возникающих в нелинейных моделях теории упругости.

Учитывая, что указанные задачи четвертого порядка признаются проблемными и для их решения требуются новые подходы, является актуальным построение эффективных и программируемых методов вычислений перемещений мембран и пластин на упругих основаниях, при различных однородных краевых условиях. В данном случае под эффективными и программируемыми методами понимаются методы асимптотически оптимальные или квазиоптимальные, логарифмически оптимальные по количеству арифметических операций затрачиваемых при решении рассматриваемых задач и имеющие простую реализацию на ЭВМ в соответствии с работой Е.Г. Дьяконова [17].

Для исследуемых математических моделей актуально сведение вычислений перемещений мембран и пластин к решению систем линейных алгебраических уравнений с треугольными матрицами, в которых количество ненулевых элементов в каждой строке не более трёх, а как решать такие системы известно и просто. И в настоящей работе математическое моделирование перемещений мембран и пластин просто сводится к численным решениям уравнений типа Пуассона и Софи Жермен – Лагранжа и в конечном итоге к решениям простых систем линейных алгебраических уравнений с треугольными матрицами, которые имеют не более трех ненулевых элементов в каждой строке. Теорию, свойства таких матриц достаточно полно излагают, например, Ф.Р. Гантмахер [7], П. Ланкастер [37].

А давно признано актуальным простое сведение сложных задач к простым задачам. Для задач математической физики это называется редукцией, когда эти задачи в конечном итоге обычно сводятся к алгебраическим уравнениям определённой структуры, как пишет Г.И. Марчук [40].

Также актуально, когда постоянно выдерживается логически простая методика исследования, когда рассматриваемые в работе проблемные задачи, требующие для своих решений новых знаний и подходов, фиктивно продолжаются, помещаются во множество формально более общих задач, которые затем эффективно решаются на основе предлагаемых итерационных методов.

Конечно, если согласиться с тем, что для очень сложных задач лучше подходят статистические методы, для сложных задач численные итерационные методы, а для простых задач прямые методы, то можно заключить, что для рассматриваемых задач предпочтительно строить численные итерационные методы решения и о таком варианте пишет С.В. Непомнящих [56]. Для приближённого решения разностных и вариационно-разностных аналогов рассматриваемых задач зачастую и применяются итерационные методы, занимающие промежуточное положение, являющиеся гибридными между прямыми и статистическими методами.

В настоящее время уже есть проекты по решению аналогичных уравнений даже на основе статистических методов, например, используя метод Монте-Карло, что делают В.Л. Лукинов, Г.А. Михайлов [38], Г.А. Михайлов, В.Л. Лукинов[53], К.К. Сабельфельд [66]. Для эллиптических уравнений метод Монте-Карло не является оптимальным, логарифмически оптимальным по количеству арифметических операций, как пишут Е.Г. Дьяконов [17], Г.И. Марчук [40]. А с другой стороны, очевидно, что получение аналитических и практически приемлемых прямых решений таких уравнений в конечном виде, вообще говоря, невозможно.

При численном решении этих уравнений, если возникает система линейных алгебраических уравнений с N неизвестными, то в прямом методе Гаусса требуется порядка N^3 арифметических операций для её решения. Такие вычислительные затраты при решении получающейся системы, конечно будут не экономичными по затратам машинного времени, расходам материальных средств и ресурсов. Не экономичные, не эффективные методы для решения такой задачи в первую очередь могут оказаться, несовместимы с мощностью ЭВМ, не смотря на стремительный прогресс в области вычислительной техники, а поэтому неприемлемы, практически не пригодны, по сути это замечает С.В. Непомнящих [56]. Ведь, оптимальное количество арифметических операций для решения такой задачи имеет порядок N, если учитывать её специфику. Асимптотика $O(N)$ оптимальна, по количеству арифметических операций, т.к. является не улучшаемой, как отмечает Дьяконов [17].

Увеличения требований к точностям моделирований рассматриваемых явлений ведёт к повышениям размеров, систем линейных алгебраических уравнений и увеличениям количеств арифметических операций для их решений, почти теми же словами об этом пишет С.В. Непомнящих [56]. Следовательно, возникает практическая необходимость именно в эффективных, экономичных численных методах оптимальных или хотя бы почти оптимальных по вычислительным затратам.

К историографии вопроса. Не претендуя на полноту охвата всех методов решения бигармонического уравнения, можно отметить некоторые из подходов, изучаемых в настоящее время. Предварительно можно заметить, что существует обширная литература, где рассматриваются математические модели, в основе которых лежат обычно дифференциальные уравнения в частных производных не выше второго порядка, а, например, бигармоническое уравнение уже встречается реже. Но есть стремление и к его эффективному решению, например у P. Bjorstad [80]. И при этом часто используются уже эффективные многосеточные методы, которые системно рассматривают, изучают, например, Г.И. Марчук, В.В. Шайдуров [44]. Применяют многосеточные итерационные алгоритмы для дискретного аналога бигармонического уравнения Л.В. Гилёва, В.В. Шайдуров [8]. При этом не отменяется важность эффективного решения рассматриваемых задач на каждой из используемых сеток.

Указывают на необходимость в методах понижения порядка бигармонического уравнения С.П. Павлов, М.В. Жигалов [61]. Например, С.Б. Сорокин [75] решение бигармонического уравнения в прямоугольнике, когда на трёх сторонах заданы условия шарнирного опирания, а на оставшейся стороне условия свободного опирания, сводит к решению последовательности задач для этого же уравнения, но с краевыми условиями шарнирного опирания, допускающими расщепление на две задачи Дирихле для уравнения Пуассона. При продолжении задачи через границу с естественными краевыми условиями в методах типа фиктивных компонент вычислительные затраты обычно оптимальны, если оптимально решаются задачи, возникающие на каждом шаге итерационного процесса, как в данной работе. С.Б. Сорокин [73, 74] также численное решение бигармонического уравнения сводит к численному решению задач Дирихле для уравнения Пуассона. С.Б. Сорокин [73] для численного решения бигармонического уравнения в прямоугольной области с главными краевыми условиями на границе предложил итерационный процесс, который не является логарифмически оптимальным.

Известен подход, не претендующий на логарифмическую оптимальность, который развивают Р. Гловинский, О. Пиронно [9], P.G. Ciarlet, R. Glowinski [81]. В этих, предыдущих и последующих работах эллиптическая краевая задача четвёртого порядка в области сводится к решению эллиптических задач второго порядка в той же области и решению некоторого интегрального уравнения на границе области. В.В. Карачик, Н.А. Антропова [25–27] построили полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре. А.Н. Потапов [63] использует сведение решения бигармонического уравнения к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Конечно, время не стоит на месте и количество работ по данной тематике увеличивается, а это косвенно и свидетельствует, том, что численное решение таких задач имеет определённые сложности и эти задачи остаются ещё проблемными, т.е. для их решений требуются новые подходы, знания и продолжения исследований, естественно опирающихся на предыдущие достижения. Наличие достаточно большого количества работ по решению уравнения Софи Жермен – Лагранжа в рамках возможно иррациональной логики можно прокомментировать так: много значит видимо чего – то не хватает.

Пожалуй, ещё гораздо большее количество работ по решению уравнения Пуассона, к решению, которого часто сводят решение бигармонического уравнения, может свидетельствовать как о достоинствах, так и возможных недоработках в методах его решения, а, следовательно, в необходимости и возможности их улучшения.

Для численных решений эллиптических краевых задач второго порядка в прямоугольных областях есть прямые методы оптимальные или логарифмически оптимальные по количеству арифметических операций. Об этом пишут Е.Г. Дьяконов [17], И.Е. Капорин [21, 24], Е.С. Николаев [57], А.А. Самарский, И.Е. Капорин, А.Б. Кучеров, Е.С. Николаев [69], R.E. Bank, D.J. Rose [79], P.N. Swarztrauber [84, 85], P.A. Sweet[86]. Прямые маршевые методы оптимальны, но бывают численно неустойчивыми к ошибкам округления при вычислениях на ЭВМ. Такие методы описывают И.Е. Капорин [21, 24], А.А. Самарский, И.Е. Капорин, А.Б. Кучеров, Е.С. Николаев [69], R.E. Bank, D.J. Rose [79]. К сожалению, вопросы устойчивости по отношению к ошибкам округления для этих методов также достаточно остры, отмечает Е.Г. Дьяконов [17].

Конечно в общих случаях уравнения Пуассона и Софи Жермен – Лагранжа вряд ли, когда-то раз и навсегда будут оптимально решены, даже только учитывая, что это не две задачи, а множество задач в различных областях и при различных краевых условиях. И возникают и ставятся вопросы, предлагаются варианты по возможности удачного сочетания эффективности, оптимальности по количеству арифметических операций методов решения, простоты их реализации на ЭВМ и если это и не звучит, то обычно естественно при этом предполагается вычислительная устойчивость методов к ошибкам округления. Хотя в настоящее время уже существуют и подходы безошибочного решения систем линейных алгебраических уравнений, которые предлагают А.В. Панюков, М.И. Германенко [62].

В настоящей работе предлагается развитие идей из указываемых далее работ. Можно отметить, что известны в одномерном случае эллиптические уравнения второго порядка, операторы, которых при определённых краевых условиях факторизуются, как и их конечно-разностные аналоги, о чем пишет, например, Г.И. Марчук [40]. В двумерном случае для эллиптических уравнений второго порядка также известен метод уже неполной факторизации Булеева, который развивали Н.И. Булеев [4], Е.Г. Дьяконов [17], В.П. Ильин [18, 19, 20], Г.И. Марчук [40], T. Manteuffel [82]. Этот метод по количеству операций сравним с логарифмически оптимальными вариантами метода переменных направлений, как отмечает Г.И. Марчук [40].

В свое время академиком РАН С.П. Новиковым и его учеником И.А. Дынниковым была обнаружена комплексная факторизация оператора Лапласа вместе с его разностным аналогом на треугольных сетках и указано на отсутствие факторизации на обычно используемых прямоугольных сетках. Это описывают П.Г. Гриневич, С.П. Новиков [10, 11], С.П. Новиков, И.А. Дынников [58]. Но возможность комплексной факторизации при аппроксимации оператора Лапласа только на треугольных сетках не была известна автору. Что, видимо, ему и позволило получить итерационную комплексную факторизацию при аппроксимации оператора Лапласа на прямоугольных сетках [88, 90] для частных задач, указанных им в [96, 99], и использовать её для их асимптотически оптимального решения.

Активно рассматривал факторизованные модели в задачах математической физики на Всесоюзной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» в Новосибирске в 1987 году А.Н. Коновалов [28, 29]. А.М. Мацокин [50] реализует идею факторизации в двумерном случае, разностного оператора, возникающего при аппроксимации уравнения эллиптического типа четвёртого порядка в прямоугольнике, на границе которого заданы условия шарнирного опирания. Если на каждом шаге итерационного процесса в указанной работе применять не как предполагается логарифмически оптимальный прямой метод, а предложенный автором [88] метод итерационных факторизаций для задачи со смешанными краевыми условиями, то получится выигрыш в количестве арифметических операций.

При получении эффективных методов часто используется спектральная, энергетическая эквивалентность операторов, получающихся при аппроксимации эллиптических уравнений при определённых краевых условиях по методу конечных элементов и по методу конечных разностей, о чем пишет Е.Г. Дьяконов [12–17]. Е.Г. Дьяконов [17] для модельной эллиптической задачи четвертого порядка в прямоугольнике при главных краевых условиях строит логарифмически оптимальный метод. В настоящей работе базисные, модельные эллиптические задачи в прямоугольнике предлагается рассматривать при определенных смешанных краевых условиях, и эти задачи асимптотически оптимально решаются на основе предложенных автором [88, 89, 90] методов итерационных факторизаций.

В диссертационной работе уже для достаточно произвольных областей строятся методы решения эллиптических уравнений четвертого порядка логарифмически оптимальные при продолжении через границу с главными краевыми условиями и асимптотически оптимальные при продолжении задачи через границу с естественными краевыми условиями на основе модификаций соответствующих известных методов фиктивных компонент. Используется метод конечных элементов на параболических восполнениях, который в частности описывает Ж.П. Обэн [59]. Хотя такие авторы, как С.Г. Маргенов, Р.Д. Лазаров[39] написали работу, использующую параболические сплайны для численного решения эллиптических уравнений четвёртого порядка, где вычислительные затраты явно не оптимальные.

Популярным является подход к решению эллиптических уравнений, основанный на методе Шварца, который применяют, например, Г.П. Астраханцев [2], А.М. Мацокин [46, 48,49,51], С.В. Непомнящих [56], X. Zhang [87]. При этом зачастую устанавливается, что исходная задача эффективно сводится к серии задач, про которые предполагается, что они для уравнений второго порядка оптимально решаются известными маршевыми методами.

Имеется масса достаточно сложных работ об итерационных решениях эллиптических уравнений четвёртого порядка у В.Г. Корнеева, например, [30], а также предыдущие и последующие работы. Вебер, В.Г. Корнеев [5] для уравнения четвертого порядка при естественных краевых условиях на основе методов фиктивных компонент и быстрого дискретного преобразования Фурье строят логарифмически оптимальный метод. Для аналогичных задач предложенные автором [88, 89, 90, 91] методы итерационных факторизаций в сочетании с модифицированным методом фиктивных компонент дают методы асимптотически оптимальные.

Даже без указания конкретных работ таких авторов как Г.П. Астраханцев [1], И.Е. Капорин, Е.С. Николаев [22, 23], Ю.А. Кузнецов, А.М. Мацокин [32], Г.И. Марчук, Ю.А. Кузнецов [43], А.М. Мацокин [46, 47, 48], А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих [52], G.I. Marchuk, Yu.A. Kuznetsov, A.M. Matsokin [83], которые предложили, исследовали и оптимизировали методику фиктивных компонент, в теоретическом плане в качестве точек опоры для данной работы, можно считать работы известных авторов в развитии методов фиктивных компонент: Г.П. Астраханцева, И.Е. Капорина, Ю.А. Кузнецова, Г.И. Марчука, А.М. Мацокина, С.В. Непомнящих, Е.С. Николаева. А использование предложенных автором [88, 89, 90, 91] модификаций этой методики и методов итерационных факторизаций, в конечном итоге, позволяет получать эффективные по количеству арифметических операций численные итерационные методы для вычислений перемещений пластин в различных математических моделях, получаемых на основе теории упругости.

Можно заметить существенное продвижение в развитии метода фиктивных компонент у А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих в [52], которые используют операторы, дающие продолжение дискретных функций с сохранением нормы. Метод будет асимптотически оптимальным по количеству арифметических операций, если использовать не быстрое дискретное преобразование Фурье, а методы итерационных факторизаций, предложенные автором [88]. Таким образом, методы итерационных факторизаций могут более эффективно применяться в сочетании с методом фиктивного пространства для численного решения эллиптических краевых задач второго порядка в достаточно произвольных областях, сложной геометрической формы.

На исходных стадиях в данной работе автором [88, 89, 90] указываются базисные, модельные задачи второго и четвертого порядков в прямоугольной области и предлагаются новые асимптотически оптимальные методы их решений, основываясь на специальных свойствах этих задач. Автор [88] предлагает замещения оптимальных маршевых методов, но порою неустойчивых, которые описывают И.Е. Капорин [21, 24], А.А. Самарский, И.Е. Капорин, А.Б. Кучеров, Е.С. Николаев [69], R.E. Bank, D.J. Rose [79], на асимптотически оптимальные методы итерационных факторизаций. На заключительных стадиях в работе автором [91] предлагаются модификации методов, которые предложили и развивали Г.П. Астраханцев [1], А.М. Мацокин [46–49], для сведений решений рассматриваемых задач четвертого порядка в достаточно произвольных областях к решению указанных базисных, модельных задач в прямоугольной области. В некоторых случаях у автора [91, 94, 95, 97, 98, 103, 104, 105] для уравнений четвертого порядка при главных краевых условиях, в отличие от уравнений второго порядка, которые рассматривают А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих [52], имеет место только логарифмическая оптимальность, но конечно всегда сохраняется более простая реализация. Указанное и иногда встречающееся отличие, вообще говоря, уже не заложено в модификациях применяемых методов, но последняя разница между оптимальностью и почти оптимальностью, квазиоптимальностью, как несущественная, может жертвоваться, в частности, ради простоты практической реализации и автоматизации применения численных методов для решения рассматриваемых задач в различных областях. В соответствии с работой Г.И. Марчука [40], при достаточно естественном и реальном предположении, что модуль логарифма относительной погрешности применяемого итерационного процесса одного порядка с логарифмом от числа неизвестных решаемой системы линейных алгебраических уравнений, рассматриваемые итерационные процессы методов фиктивных компонент из асимптотически оптимальных методов превращаются в логарифмически оптимальные методы.

Таким образом, предложенные автором новые подходы к решению рассматриваемых задач завершаются получением эффективных численных методов, базирующихся на замещениях исходных математических моделей их фиктивными продолжениями, на новых и асимптотических оптимальных численных методах, что теоретически доказывается. Теоретические результаты экспериментально подтверждаются при вычислениях по программам для ЭВМ, которые зарегистрированным автором одна совместно с И.Ю. Бухарин [92], а другая совместно с Н.О. Артесом [93].

Цель и задачи исследования. Цель данной работы исследование математических моделей теории упругости методами итерационных факторизаций. Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи:**

1. Разработать приближенный аналитический метод для вычислений перемещений прямоугольной пластины и модифицировать методы фиктивных компонент для вычислений пластин на непрерывном уровне.
2. Разработать асимптотически оптимальные численные методы для вычислений перемещений прямоугольных мембран, пластин и модифицировать численные методы фиктивных компонент для вычислений перемещений пластин.
3. Реализовать в виде программ на ЭВМ алгоритмы асимптотически оптимальных методов. Провести расчеты на ЭВМ и подтвердить экспериментально асимптотическую оптимальность этих методов.

Методы исследования. В работе использовались методы теории упругости, математического моделирования, математической физики, вычислительной математики, линейной алгебры, математического анализа, функционального анализа, теории функций комплексного переменного, дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, теории оптимизации, методы итерационных факторизаций и модификации методов фиктивных компонент.

Научная новизна

В области математического моделирования:

Разработан аналитический приближенный метод для вычислений перемещений прямоугольной пластины при шарнирном закреплении на двух смежных сторонах и условиях симметрии на двух других сторонах. Модифицированы на непрерывном уровне методы фиктивных компонент для вычислений перемещений пластин. Получены оценки сходимости приближенных решений к точным решениям.

В области численных методов:

Разработаны новые численные методы итерационных факторизаций асимптотически оптимальные по количеству арифметических операций для вычислений перемещений прямоугольных мембран и пластин при найденных и указанных смешанных краевых условиях. Эффективно модифицированы численные методы фиктивных компонент для вычислений перемещений пластин. Установлена геометрическая скорость сходимости итерационных решений к точным решениям.

В области комплексов программ:

Разработан комплекс программ для вычислений перемещений прямоугольных мембран и пластин. Расчеты на ЭВМ подтверждают при вычислительных экспериментах асимптотическую оптимальность реализованных численных методов итерационных факторизаций.

Теоретическая значимость. Полученные методы итерационных факторизаций и модифицированные методы фиктивных компонент вносят вклад в развитие методов решения краевых задач для эллиптических уравнений второго и четвёртого порядков.

Практическая значимость. Разработанные численные методы могут использоваться при вычислениях перемещений мембран и пластин. Использование этих численных методов предоставляет возможности экономии материальные ресурсов и средств, времени вычислений на ЭВМ. Результаты работы могут быть использованы в процессе обучения в высших учебных заведениях на механико-математических и физико-технических специальностях и направлениях.

Положения, выносимые на защиту:

Полученные результаты соответствуют следующим областям исследований специальности:

В рамках «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей» (п. 2 паспорта специальности) получены:

1. Приближенный аналитический метод итерационных факторизаций для вычислений перемещений прямоугольной пластины.
2. Модификации методов фиктивных компонент на непрерывном уровне для вычислений перемещений пластин.

В рамках «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных технологий» (п. 3 паспорта специальности) получены:

3. Асимптотически оптимальные численные методы итерационных факторизаций для вычислений перемещений прямоугольных мембран и пластин.
4. Модификации методов фиктивных компонент на дискретном уровне для вычислений перемещений пластин.

В рамках «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента» (п. 4 паспорта специальности) получены:

5. Программы для ЭВМ, реализующие методы итерационных факторизаций асимптотически оптимальные по количеству арифметических операций для вычислений перемещений прямоугольных мембран и пластин в базисных, модельных краевых задачах для уравнений Пуассона и Софи Жермен – Лагранжа.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты работы опубликованы и научно обоснованы, т.е. проведены их математические доказательства. Вычислительные эксперименты подтвердили теоретические результаты работы, а именно асимптотическую оптимальность предложенных численных методов. Для большей объективности, чистоты экспериментального подтверждения полученных теоретических результатов проводились и независимые испытания по написанным программам на ЭВМ.

Результаты работы докладывались на 5 Школе молодых математиков Сибири и Дальнего востока (Новосибирск, 10-16 декабря 1990 года), на 64, 65 и 66 научных конференциях профессорско-преподавательского состава ЮУрГУ (Челябинск, апрель 2012, 2013 и 2014 годов). По докладам на этих конференциях ЮУрГУ были опубликованы статьи в Вестнике Южно-Уральского государственного университета в Серии Математика. Механика. Физика. Результаты докладывались на 7-й научной конференции аспирантов и докторантов ЮУрГУ (г. Челябинск, 9-14 февраля 2015 года), на областном семинаре «Уравнения Соболевского типа» профессора Г.А. Свиридюка (г. Челябинск, 28 февраля 2015 года, 26 ноября 2016 года), на семинаре кафедры прикладной математики и информатики МГТУ профессора С.И. Кадченко (г. Магнитогорск, 11 марта 2015 года), на семинаре профессора Ю.И. Сапронова на кафедре математического моделирования ВГУ (г. Воронеж, 23 марта 2015 года) и на 67 научной конференции профессорско-преподавательского состава ЮУрГУ (г. Челябинск, апрель 2015 года).

Результаты работы апробированы на XVI Международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора В.П. Дьяконова «Системы компьютерной математики и их приложения» (г. Смоленск, 15-17 мая 2015 года); Международной научно-практической конференции «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий» (г. Сочи, 15-24 мая 2015 года); Международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (г. Улан-Уде, оз. Байкал, 22-27 июня 2015 года).

Результаты диссертационного исследования (на соискании ученой степени кандидата физико-математических наук) представлялись на ШЕСТНАДЦАТОМ ВСЕРОСИЙСКОМ СИМПОЗИУМЕ по прикладной и промышленной математике (летняя сессия) в г. Челябинск, 21-27 июня 2015 года.

Публикации автора по теме диссертации. По теме диссертации опубликована 20 работ, из них 2 свидетельства о государственной регистрации программ на ЭВМ, написанных в соавторстве со студентами, 3 работы опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК [88, 89, 90], 1 работа в издании цитируемом Scopus [91].

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы, списка обозначений и приложения. Объём диссертации составляет 122 страницы. Список литературы содержит 107 наименований.

Краткое содержание диссертации

Первая глава посвящается исследованию двух эллиптических уравнений второго порядка в прямоугольной области при однородных смешанных краевых условиях методами итерационных факторизаций. Рассматривающиеся два эллиптических уравнения второго порядка в прямоугольной области при смешанных краевых условиях, возникают в математических моделях из теории упругости. Их численные решения с помощью итерационных факторизаций в фиктивно продолженных моделях сводятся к решениям систем линейных уравнений с треугольными матрицами, в которых количество ненулевых элементов в каждой строке не более трёх.

В параграфе 1.1 приводятся две математические модели перемещений прямоугольных мембран, уравнения Пуассона и экранированное уравнение Пуассона в прямоугольной области при однородных смешанных краевых условиях. Приводятся первая и вторая непрерывные задачи в вариационных постановках. Рассматриваются две вариационные задачи, обобщённые математические модели перемещений двух прямоугольных мембран без упругого основания и на упругом основании при смешанных краевых условиях.

В параграфе 1.2 приводятся первая и вторая дискретные задачи. Рассматриваются $СЛАУ$ – системы линейных алгебраических уравнений, получающиеся при дискретизации задач из параграфа 1.1 на основе метода сумматорных тождеств [34, 35, 67, 68, 76], численные модели перемещений прямоугольных мембран без упругого основания и на упругом основании при смешанных краевых условиях.

В параграфе 1.3. рассматриваются фиктивные продолжения дискретных задач и их решений. Предлагаются фиктивные продолжения для задач из параграфа 1.2., фиктивно продолженные численные модели перемещений двух прямоугольных мембран.

В параграфе 1.4 предлагаются итерационные факторизации на фиктивных продолжениях. Для решения задач из параграфа 1.3. предлагаются итерационные процессы, численные методы для приближённых вычислений перемещений двух прямоугольных мембран. В итерационных процессах возникают задачи с факторизованным оператором.

По результатам первой главы получается вывод: для решения задач из параграфа 1.2 с N неизвестными предложенными итерационными процессами из параграфа 1.4, где итерационные параметры могут выбираться с помощью подходящих вариационных методов [42, 67, 70], для достижения необходимой точности с относительными погрешностями ε требуется не более чем $O(N|\ln\varepsilon|)$ арифметических операций.

В параграфе 1.5 приводятся алгоритмы, реализующие методы итерационных факторизаций с выбором итерационных параметров на основе скорейшего спуска и минимальных поправок.

В параграфе 1.6 приводится алгоритм, реализующий метод итерационных факторизаций с выбором итерационных параметров на основе скорейшего спуска для конкретной задачи. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие асимптотическую независимость числа итераций от параметров дискретизации для достижения заданной относительной погрешности.

Вторая глава посвящается исследованию эллиптического уравнения четвёртого порядка в прямоугольной области при однородных смешанных краевых условиях методом итерационных факторизаций. Рассматривающееся эллиптическое уравнение четвёртого порядка в прямоугольной области при смешанных краевых условиях, возникает в математических моделях из теории упругости. Его решение основывается на итерационных факторизациях операторов энергетически эквивалентных операторам решаемых задач. Дискретизация исходной задачи производится по методу конечных элементов, а переобуславливатель выбирается на основе метода конечных разностей, при этом скорость сходимости итерационного процесса не зависит от параметров дискретизации.

В параграфе 2.1 приводится математическая модель перемещения прямоугольной пластины на упругом основании: эллиптическое уравнение четвертого порядка в прямоугольной области при однородных смешанных краевых условиях. Приводится непрерывная задача в вариационной постановке. Рассматривается вариационная задача, обобщённая математическая модель перемещения прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях.

В параграфе 2.2 исследуется итерационное решение непрерывной задачи из параграфа 2.1 в вариационной постановке. Предлагается итерационный процесс, метод приближённых вычислений перемещений прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях на непрерывном уровне. На каждом шаге итерационного процесса возникает задача, содержащая факторизованный оператор, которая записывается, как система эллиптических уравнений второго порядка при смешанных и однородных краевых условиях.

В параграфе 2.3 приводится дискретная задача в виде системы линейных алгебраических уравнений. Производится дискретизация задачи из параграфа 2.1 по методу конечных элементов на параболических восполнениях [59], рассматривается вариационно-разностная модель перемещения прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях, *СЛАУ* – система линейных алгебраических уравнений соответствующая задаче из параграфа 2.1, численная модель перемещения прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях.

В параграфе 2.4 предлагается решение дискретной задачи при итерационных факторизациях переобуславливателя. Предлагается итерационный процесс, численный метод приближённых вычислений перемещений прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях. На каждом шаге итерационного процесса возникает задача, для которой возможно расщепление на две однотипные задачи, рассмотренные в главе 1. Для решения этих задач можно применять методы, приводимые в главе 1. Предполагается использование двухступенчатых итерационных процессов, где итерационные параметры могут выбираться с помощью наиболее подходящих в каждом случае вариационных методов для достижения необходимой точности в решениях рассматриваемых задач [67, 70].

Результаты второй главы позволяют сделать следующий вывод: для решения рассматриваемой задачи из параграфа 2.3 с N неизвестными на основании предложенного итерационного процесса из параграфа 2.4 с относительной погрешностью ε, требуется не более чем $\mathrm{O}(N \ln^2 \varepsilon)$ арифметических операций.

В параграфе 2.5 приводится алгоритм, реализующий метод итерационных факторизаций из параграфа 2.4 с выбором итерационных параметров на основе минимальных поправок.

В параграфе 2.6 приводится алгоритм, реализующий метод итерационных факторизаций с выбором итерационных параметров на основе скорейшего спуска для численного решения конкретной задачи из параграфа 2.1. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие асимптотическую независимость числа итераций от параметров дискретизации для достижения заданной относительной погрешности.

Третья глава посвящается исследованию эллиптического уравнения четвёртого порядка в прямоугольной области при однородных смешанных краевых условиях методом итерационных факторизаций на фиктивном продолжении. Рассматриваемое эллиптическое уравнение четвёртого порядка в прямоугольной области при смешанных краевых условиях, возникает в математических моделях из теории упругости. Его численное решение с помощью итерационных факторизаций на фиктивном продолжении сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с треугольными матрицами, в которых количество ненулевых элементов в каждой строке не более трёх.

В параграфе 3.1 приводится математическая модель перемещения прямоугольной пластины на упругом основании: эллиптическое уравнение четвертого порядка в прямоугольной области при однородных смешанных краевых условиях для продолжения. Приводится непрерывная задача в вариационной постановке. Рассматривается вариационная задача, обобщённая математическая модель перемещения прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях для продолжения.

В параграфе 3.2 рассматривается дискретная аппроксимация рассматриваемой задачи. Производится дискретизация задачи из параграфа 3.1 по методу конечных элементов на параболических восполнениях, рассматривается вариационно-разностная модель перемещения прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях, $\textit{СЛАУ}$ – система линейных алгебраических уравнений соответствующая задаче из параграфа 3.1, численная модель перемещения прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях для продолжения.

В параграфе 3.3 предлагается фиктивное продолжение дискретной задачи и её решения, т.е. предлагается фиктивное продолжение дискретной задачи из параграфа 3.2, фиктивно продолженная численная модель перемещения прямоугольной пластины.

В параграфе 3.4 исследуются итерационные факторизации на фиктивном продолжении дискретной задачи. Для решения задачи из параграфа 3.3 предлагается итерационный процесс, численный метод приближённого вычисления перемещения прямоугольной пластины. В этом итерационном процессе возникают задачи с факторизованным оператором и при этом возможно расщепление на более простые задачи.

По результатам третьей главы делается вывод: для решения задачи из параграфа 3.2 с N неизвестными, на основании приведенного итерационного процесса из параграфа 3.4 с относительной погрешностью ε , требуется не более чем $O(N|\ln\varepsilon|)$ арифметических операций. Для выбора итерационных параметров и ускорения сходимости итерационного процесса из параграфа 3.4 можно использовать известные вариационные методы и рекомендовать, например, метод минимальных поправок [67, 70].

В параграфе 3.5 приводится алгоритм, реализующий метод итерационных факторизаций из параграфа 3.4 с выбором итерационных параметров на основе минимальных поправок.

В параграфе 3.6 приводятся алгоритм, реализующий метод итерационных факторизаций с выбором итерационных параметров на основе минимальных поправок для численного решения конкретной задачи из параграфа 3.1. Приводятся явные формулы для вычислений решений возникающих систем линейных алгебраических уравнений.

Четвёртая глава посвящается исследованию эллиптических уравнений четвёртого порядка в ограниченных областях на плоскости при однородных смешанных краевых условиях модифицированными методами фиктивных компонент. Рассматриваемые эллиптические дифференциальные уравнения четвёртого порядка при смешанных краевых условиях возникают в математических моделях из теории упругости. Решения этих задач с помощью метода конечных элементов и модификаций методов фиктивных компонент сводятся к решениям вариационно-разностных аналогов эллиптических уравнений четвёртого порядка в прямоугольной области при смешанных краевых условиях.

В параграфе 4.1 приводятся математические модели перемещений пластин на упругих основаниях: эллиптические уравнения четвёртого порядка в ограниченных областях на плоскости при однородных смешанных краевых условиях. Приводятся непрерывные задачи в вариационных постановках, т.е. рассматриваются вариационные задачи, обобщённые математические модели перемещений пластин на упругих основаниях при смешанных краевых условиях.

В параграфе 4.2 предлагаются фиктивные продолжения непрерывных задач и их решений, т.е. предлагаются продолжения вариационных задач и их решений из параграфа 4.1, фиктивно продолженные обобщённые математические модели перемещений пластин на упругих основаниях при смешанных краевых условиях. Предлагаются модификации методов фиктивных компонент, т.е. предлагаются итерационные процессы, методы приближённых вычислений перемещений пластин на упругих основаниях при смешанных краевых условиях на непрерывном уровне.

В параграфе 4.3 проводятся дискретизации фиктивно продолженных задач из параграфа 4.2. Возникают задачи, решение которых рассматривается в главах 2, 3. Рассматриваются $СЛАУ$ – системы линейных алгебраических уравнений, получающихся при дискретизации задач предложенных в параграфе 4.2 на основе метода конечных элементов, фиктивно продолженные численные модели перемещений пластин на упругом основании при смешанных краевых условиях. Предлагается модификации методов фиктивных компонент на дискретном уровне, т.е. предлагаются итерационные процессы, численные методы приближённых вычислений перемещений пластин на упругом основании при смешанных краевых условиях, модификации методов фиктивных компонент на матричном уровне.

Результаты четвертой главы позволяют сделать следующий вывод: для решения задач из параграфа 4.3 с N неизвестными предложенными итерационными процессами из параграфа 4.3 с относительной погрешностью ε, требуется не более чем $O(N(\ln N + |\ln\varepsilon|)|\ln\varepsilon|)$ арифметических операций при продолжении через границу с условиями Дирихле и не более чем $O(N\ln^2\varepsilon)$ арифметических операций при продолжении через границу с условиями Неймана.

Для выбора итерационных параметров и ускорения сходимости итерационных процессов из параграфа 4.3 можно использовать известные вариационные методы и рекомендовать, например, методы скорейшего спуска и минимальных поправок [42, 67, 70].

В параграфе 4.4 приводятся алгоритмы, реализующие модифицированные методы фиктивных компонент с выбором итерационных параметров на основе скорейшего спуска и минимальных поправок.

В **заключении** формулируются основные результаты работы.

Благодарности

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность исключительно научному руководителю доктору физико-математических наук Софье Александровне Загребиной за участие, помощь и терпение при подготовке данной работы; всем с кем жил, учился, работал в Зауралье, Сибири, на Кубани, Южном Урале за то, что они были, есть…

ГЛАВА 1

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МЕМБРАН ПРИ ИТЕРАЦИОННЫХ ФАКТОРИЗАЦИЯХ НА ПРОДОЛЖЕНИЯХ

Данная глава посвящается математическому моделированию перемещений прямоугольных мембран без упругого основания и на упругом основании, при специально выбранных краевых условиях с применением фиктивных продолжений. Рассматриваются эллиптические дифференциальные уравнения второго порядка в прямоугольной области со сторонами параллельными осям координат. При этом на двух смежных сторонах прямоугольной области задано главное краевое условие, а на двух других сторонах выполняется естественное краевое условие. При достаточно гладких данных, гладких решениях эти дифференциальные уравнения сводятся к уравнению Пуассона, экранированному уравнению Пуассона. Для разностных аналогов этих уравнений в виде систем линейных алгебраических уравнений приводится факторизованный переобуславливатель попеременно треугольного вида при модификациях [101]. Эта методика в некотором смысле аналогична модификации метода фиктивных компонент, предложенной и изучаемой в [98]. Хотя в предлагаемых методах используются комплексные числа, а в методах фиктивных компонент они не применяются. Дискретные задачи такого вида могут быть также, и получены в методе типа фиктивных компонент при решении более сложных задач в [52, 98]. Решаемые в работе разностные уравнения получаются и при численном решении эллиптического дифференциального уравнения уже четвертого порядка в [102].

1.1. Математические модели перемещений прямоугольных мембран

Из линейной теории изгибания мембран, используя, например, [60] энергии двух деформированных прямоугольных мембран каждая из которых закреплена на двух смежных сторонах могут быть записаны в следующем виде:

$$\breve{E}_\alpha(\breve{u}_\alpha) = \frac{1}{2}\hat{T}_\alpha \int_\Omega (\breve{u}_{\alpha x}^2 + \breve{u}_{\alpha y}^2) d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega \breve{K}_\alpha \breve{u}_\alpha^2 d\Omega - \int_\Omega \breve{P}_\alpha \breve{u}_\alpha d\Omega,\ \alpha = 1, 2,$$

где $\alpha = 1$ соответствует отсутствию упругого основания, $\alpha = 2$ его наличию, $\breve{P}_\alpha$– давления, $\breve{K}_\alpha$– коэффициенты жёсткости упругих оснований $\breve{K}_2 \ge \breve{K}_1 = 0$, $\hat{T}_\alpha$– коэффициенты натяжения мембран, $\Omega = (0;b_1)\times(0;b_2)$– плоская область, $\breve{u}_\alpha$– искомые перемещения. Если приравнять к нулю вариации энергий

$$\delta\breve{E}_\alpha(\breve{u}_\alpha) = \hat{T}_\alpha \int_\Omega (\breve{u}_{\alpha x}\breve{v}_{\alpha x} + \breve{u}_{\alpha y}\breve{v}_{\alpha y}) d\Omega + \int_\Omega \breve{K}_\alpha \breve{u}_\alpha \breve{v}_\alpha d\Omega - \int_\Omega \breve{P}_\alpha \breve{v}_\alpha d\Omega = 0,$$

где $\breve{v}_\alpha = \delta\breve{u}_\alpha$, то, при $\kappa_\alpha = \breve{K}_\alpha \big/ \hat{T}_\alpha$, $\breve{f}_\alpha = \breve{P}_\alpha \big/ \hat{T}_\alpha$ получается, что

$$\int_\Omega (\breve{u}_{\alpha x}\breve{v}_{\alpha x} + \breve{u}_{\alpha y}\breve{v}_{\alpha y} + \kappa_\alpha \breve{u}_\alpha \breve{v}_\alpha) d\Omega = \int_\Omega \breve{f}_\alpha \breve{v}_\alpha d\Omega.$$

После интегрирования по частям устанавливается

$$\int_\Omega (-\Delta\breve{u}_\alpha + \kappa_\alpha \breve{u}_\alpha)\breve{v}_\alpha d\Omega + \int_s \frac{\partial \breve{u}_\alpha}{\partial \vec{n}} \breve{v}_\alpha ds = \int_\Omega \breve{f}_\alpha \breve{v}_\alpha d\Omega,$$

где

$\partial\Omega = \overline{s}$, $s = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, $\Gamma_1 = \{b_1\}\times(0;b_2)\bigcup(0;b_1)\times\{b_2\}$, $\Gamma_2 = \{0\}\times(0;b_2)\bigcup(0;b_1)\times\{0\}$, $\vec{n}$– внешняя нормаль к $\partial\Omega$,

$$\breve{u}_\alpha\Big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial \breve{u}_\alpha}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = 0.$$

Таким образом, получаются задачи при смешанных краевых условиях, а именно при главных и естественных краевых условиях

$$-\Delta\breve{u}_\alpha + \kappa_\alpha \breve{u}_\alpha = \breve{f}_\alpha,\ u_\alpha\Big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = 0,\ \alpha = 1, 2.$$

Рассматриваются математические модели перемещений прямоугольных мембран в вариационном виде. Это две вариационные задачи, обобщённые математические модели перемещений двух прямоугольных мембран без упругого основания $\alpha = 1$ и на упругом основании $\alpha = 2$ при смешанных краевых условиях

$$\breve{u}_\alpha \in \breve{W}_\alpha : \mathrm{A}_\alpha(\breve{u}_\alpha, \breve{v}) = \breve{g}_\alpha(\breve{v}) \ \forall \breve{v} \in \breve{W}_\alpha, \ \breve{g}_\alpha \in \breve{W}'_\alpha, \tag{1.1.1}$$

где соболевские пространства функций

$$\breve{W}_\alpha = \breve{W}_\alpha(\Omega) = \left\{ \breve{v}_\alpha \in W_2^1(\Omega) : \breve{v}_\alpha \big|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$$

на прямоугольной области

$$\Omega = (0;b_1) \times (0;b_2), \text{ с } \Gamma_1 = \left\{b_1\right\} \times (0;b_2) \cup (0;b_1) \times \left\{b_2\right\},$$

билинейные формы

$$\mathrm{A}_\alpha(\breve{u}_\alpha, \breve{v}_\alpha) = \int_\Omega (\breve{u}_{\alpha x}\breve{v}_{\alpha x} + \breve{u}_{\alpha y}\breve{v}_{\alpha y} + \kappa_\alpha \breve{u}_\alpha \breve{v}_\alpha) d\Omega$$

и заданны константы $b_1, b_2 > 0, \kappa_2 \geq \kappa_1 = 0.$

Заметим, основываясь на [59, 60, 71], что решение каждой задачи из (1.1.1) существует и единственно.

Если

$$\breve{g}_\alpha(\breve{v}) = \int_\Omega \breve{f}_\alpha \breve{v} d\Omega, \quad \Gamma_2 = \left\{0\right\} \times (0;b_2) \cup (0;b_1) \times \left\{0\right\},$$

где $\breve{f}_\alpha$ – заданные, $\breve{u}_\alpha$ – искомые достаточно гладкие функции, то задачи из (1.1.1) представляются, как и ранее в следующем виде

$$-\Delta \breve{u}_\alpha + \kappa_\alpha \breve{u}_\alpha = \breve{f}_\alpha, \ \breve{u}_\alpha \big|_{\Gamma_1} = 0, \ \frac{\partial \breve{u}_\alpha}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_2} = 0, \ \alpha = 1, 2, \tag{1.1.2}$$

где, как и ранее $\vec{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Можно отметить, что в (1.1.2) уравнения с точностью до знака совпадают с уравнением Пуассона, когда $\alpha = 1$, экранированным уравнением Пуассона, когда $\alpha = 2$.

1.2. Математические модели перемещений прямоугольных мембран в дискретном виде

Рассматриваются $СЛАУ$ – системы линейных алгебраических уравнений, получающиеся при дискретизации задач из (1.1.1), (1.1.2) на основе метода сумматорных тождеств, численные модели перемещений прямоугольных мембран без упругого основания $\alpha = 1$ и на упругом основании $\alpha = 2$ при смешанных краевых условиях

$$\overline{u}_\alpha \in \mathbb{R}^N: \ \mathrm{A}_\alpha \overline{u}_\alpha = \overline{f}_\alpha, \ \overline{f}_\alpha \in \mathbb{R}^N, \qquad (1.2.1)$$

где, вообще говоря, векторы таковы

$$\overline{v}_\alpha \in \mathbb{R}^N: \ \overline{v}_\alpha = (v_{\alpha,1}, ..., v_{\alpha,N})', \ N = m \cdot n, \ m, \ n \in \mathbb{N},$$

при этом считается, что

$$v_{\alpha,m(i-1)+j} = v_{\alpha,i,j}, \ i = 1,...,m, \ j = 1,...,n,$$

а $v_{\alpha,i,j}$ являются значениями функций дискретных аргументов соответствующих узлам сетки $(x_i, y_j) = \left((i-0,5)h_1, (j-0,5)h_2\right)$, шаги сетки $h_1 = b_1/(m+0,5)$, $h_2 = b_2/(n+0,5)$, состоящей из указанных выше узлов, а матрицы A_α размерности $N \times N$, определяются следующим образом:

$$\left\langle \mathrm{A}_\alpha \overline{u}_\alpha, \overline{v}_\alpha \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} [(u_{\alpha,i+1,j} - u_{\alpha,i,j})(v_{\alpha,i+1,j} - v_{\alpha,i,j})h_1^{-2} +$$

$$+(u_{\alpha,i,j+1} - u_{\alpha,i,j})(v_{\alpha,i,j+1} - v_{\alpha,i,j})h_2^{-2} + \kappa_\alpha u_{\alpha,i,j} v_{\alpha,i,j}]h_1 h_2,$$

$$u_{\alpha,i,n+1} = v_{\alpha,i,n+1} = 0, \ i = 1,...,m, \ u_{\alpha,m+1,j} = v_{\alpha,m+1,j} = 0, \ j = 1,...,n.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов следующего вида

$$\left\langle \overline{u}_\alpha, \overline{v}_\alpha \right\rangle = (\sum_{k=1}^{N} u_{\alpha,k} v_{\alpha,k}) h_1 h_2 \ \ \forall \overline{u}_\alpha, \overline{v}_\alpha \in \mathbb{R}^N.$$

Если функции $\breve{f}_\alpha$ непрерывны в области Ω, то возможно положить

$$f_{\alpha,i,j} = \breve{f}_\alpha(x_i, y_j), \ i = 1,...,m, \ j = 1,...,n.$$

Решение каждой задачи из (1.2.1) существует и единственно, т.к. $\mathrm{A}_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2$, т.е. возникающие матрицы положительно определенные. Можно отметить, что при достаточной гладкости решений задач из (1.1.2) они аппроксимируются соответствующими решениями задач из (1.2.1), как обычно в таких случаях, со вторым порядком. Можно сразу сказать, что выбор используемой сетки с соответствующими сдвигами у частей границы с естественным краевым условием удобен при совместном рассмотрении в дальнейшем уравнений второго и четвёртого порядков при условиях симметрии на это части границы у последних уравнений. Отметим, что при аппроксимации рассматриваемых задач используется обычный в таких случаях пятиточечный шаблон. Приведем значения ненулевых коэффициентов используемых разностных схем в узлах стандартного шаблона:

$$\begin{array}{cccc}
 & j-1 & j & j+1 \\
i-1 & & -1/h_1^2 & \\
i & -1/h_2^2 & 2/h_1^2 + 2/h_2^2 & -1/h_2^2 \\
i+1 & & -1/h_1^2 &
\end{array}$$

Таким образом, ненулевые элементы возникающих матриц A_α $\alpha = 1, 2$ получаются из обычно используемых разностных схем уже с учетом заданных краевых условий.

1.3. Продолжения в дискретных моделях для прямоугольных мембран при построении численных методов

Предлагаются фиктивные продолжения для (1.2.1), фиктивно продолженные численные модели перемещений двух прямоугольных мембран без упругого основания и на упругом основании при смешанных краевых условиях

$$\vec{\bar{u}} \in \mathbb{R}^{2N}: \ \hat{D}\vec{\bar{u}} = \vec{\bar{f}}\,,\ \vec{\bar{f}} \in \mathbb{R}^{2N},\ \bar{f}_{3-\alpha} = \bar{0}\,,\ \alpha = 1, 2, \tag{1.3.1}$$

где, вообще говоря, векторы таковы

$$\vec{\bar{v}} \in \mathbb{R}^{2N}: \ \vec{\bar{v}} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2')',$$

блочная, верхнетреугольная матрица $\hat{D}$ размерности $2N \times 2N$ такова, что

$$\hat{D}_{11} = A = \mathrm{A}_1,\ \hat{D}_{12} = -\theta,\ \hat{D}_{21} = 0,\ \hat{D}_{22} = \mathrm{A} = \mathrm{A}_2,$$

т.е.

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} A & -\theta \\ 0 & \mathrm{A} \end{pmatrix},$$

матрицы

$$\mathrm{A} = A + \kappa_2 E,\ \theta = \nabla_x{}'\nabla_y - \nabla_y{}'\nabla_x,\ A = \nabla_x{}'\nabla_x + \nabla_y{}'\nabla_y,$$

здесь E единичная матрица размерности $N \times N$, а матрицы ∇_x, ∇_y размерности $N \times N$ определяются следующим образом

$$\left\langle \nabla_x \overline{u}_\alpha, \overline{v}_\alpha \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (-(u_{\alpha,i+1,j} - u_{\alpha,i,j}) h_1^{-1} v_{\alpha,i,j}) h_1 h_2,\ u_{\alpha,m+1,j} = v_{\alpha,m+1,j} = 0,\ j = 1,\dots,n,$$

$$\left\langle \nabla_y \overline{u}_\alpha, \overline{v}_\alpha \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (-(u_{\alpha,i,j+1} - u_{\alpha,i,j}) h_2^{-1} v_{\alpha,i,j}) h_1 h_2,\ u_{\alpha,i,n+1} = v_{\alpha,i,n+1} = 0,\ i = 1,\dots,m.$$

Ненулевые элементы возникающих матриц ∇_x, ∇_y $\alpha = 1, 2$ получаются по соответствующим шаблонам:

$$\begin{array}{cc} & j \\ i-1 & -1/h_1 \\ i & 1/h_1 \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} & j-1 & j \\ i & -1/h_2 & 1/h_2 \end{array}$$

с учетом заданных краевых условий

Введём в пространстве $\mathbb{R}^{2N}$ подпространства векторов:

$$\vec{\vec{W}}_1 = \left\{ \vec{\vec{v}} = (\overline{v}_1', \overline{v}_2')' : \overline{v}_2 = \overline{0} \right\},\ \vec{\vec{W}}_2 = \left\{ \vec{\vec{v}} = (\overline{v}_1', \overline{v}_2')' : A\overline{v}_1 - \theta\overline{v}_2 = \overline{0} \right\}.$$

И теперь можно привести следующее важное, но достаточно очевидное утверждение

Утверждение 1.3.1. *Решение каждой задачи из (1.3.1) $\vec{\vec{u}} \in \vec{\vec{W}}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, существует и единственно.*

1.4. Численные методы итерационных факторизаций для прямоугольных мембран

Определим блочную матрицу $\hat{C}$ размерности $2N \times 2N$ такую, что

$$\hat{C}_{11} = \hat{C}_{22} = A,\ \hat{C}_{12} = -\theta,\ \hat{C}_{21} = \theta,$$

т.е.

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} A & -\theta \\ \theta & A \end{pmatrix}.$$

Для решения задач из (1.3.1) предлагаются итерационные процессы, численные методы для приближённых вычислений перемещений двух прямоугольных мембран без упругого основания и на упругом основании при смешанных краевых условиях:

$$\vec{\bar{u}}^k \in \mathbb{R}^{2N}:\ \hat{C}(\vec{\bar{u}}^k - \vec{\bar{u}}^{k-1}) = -\tau_k(\hat{D}\vec{\bar{u}}^{k-1} - \vec{\bar{f}}),$$

$$\tau_k > 0,\ k \in \mathbb{N}\ \ \forall \vec{\bar{u}}^0 \in \vec{\bar{W}}_\alpha,\ \alpha = 1, 2. \qquad (1.4.1)$$

Заметим, что в итерационных процессах из (1.4.1) возникают задачи с факторизованным оператором следующего вида

$$\bar{U} \in \mathbb{C}^N:\ LL^*\bar{U} = \bar{F},\ \bar{F} \in \mathbb{C}^N,$$

при этом возможно расщепление на более простые задачи

$$\bar{Q} \in \mathbb{C}^N:\ L\bar{Q} = \bar{F},\ \bar{F} \in \mathbb{C}^N,$$

$$\bar{U} \in \mathbb{C}^N:\ L^*\bar{U} = \bar{Q},\ \bar{Q} \in \mathbb{C}^N,$$

где матрицы $(\mathrm{i}^2 = -1)$:

$$L = \nabla_x{}' - \mathrm{i}\nabla_y{}',\ L^* = \bar{L}' = \nabla_x + \mathrm{i}\nabla_y,$$

$$LL^* = (\nabla_x{}' - \mathrm{i}\nabla_y{}')(\nabla_x + \mathrm{i}\nabla_y) = A + \mathrm{i}\theta,$$

тогда

$$(A + \mathrm{i}\theta)(\bar{u}_1 + \mathrm{i}\bar{u}_2) = \bar{f}_1 + \mathrm{i}\bar{f}_2,$$

что равносильно:

$$\begin{cases} A\overline{u}_1 - \theta\overline{u}_2 = \overline{f}_1, \ \overline{u}_1 + \mathrm{i}\overline{u}_2 = \overline{U}, \\ \theta\overline{u}_1 + A\overline{u}_2 = \overline{f}_2, \ \ \overline{f}_1 + \mathrm{i}\overline{f}_2 = \overline{F} \end{cases}$$

и действительно на каждом шаге итерационных процессов из (1.4.1) возникают задачи типа

$$\hat{C}\vec{\overline{u}} = \vec{\overline{f}}, \ \vec{\overline{u}} = (\overline{u}_1', \overline{u}_2')', \ \vec{\overline{f}} = (\overline{f}_1', \overline{f}_2')'.$$

Заметим, что ненулевые элементы матриц L, L^* получаются по соответствующим шаблонам:

$$\begin{array}{ccc} & j-1 & j \\ i-1 & & -1/h_1 \\ i & \mathrm{i}/h_2 & 1/h_1 - \mathrm{i}/h_2 \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} & j & j+1 \\ i & 1/h_1 + \mathrm{i}/h_2 & -\mathrm{i}/h_2 \\ i+1 & -1/h_1 & \end{array}$$

с учетом заданных краевых условий.

Утверждение 1.4.1. *Если в итерационных процессах из (1.4.1)* $\exists k \in \mathbb{N}: \ \vec{\overline{u}}^{k-1} = \vec{\overline{u}}$, *то* $\vec{\overline{u}}^k = \vec{\overline{u}}$.

Пусть $\vec{\overline{u}}^k = \vec{\overline{u}} + \vec{\overline{\psi}}^k \ \ \forall k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Утверждение 1.4.2. *В итерационных процессах из (1.4.1)*

$$A\overline{\psi}_1^k - \theta\overline{\psi}_2^k = (1-\tau_k)\left(A\overline{\psi}_1^{k-1} - \theta\overline{\psi}_2^{k-1}\right),$$

если $\alpha = 1, \ \tau_1 = 1$, *то* $\vec{\overline{\psi}}^k \in \vec{\overline{W}}_2 \ \ \forall k \in \mathbb{N}$, *если* $\alpha = 2$, *то* $\vec{\overline{\psi}}^k \in \vec{\overline{W}}_2 \ \ \forall k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Введём нормы

$$\|\overline{v}_\alpha\|_{\mathrm{A}_\alpha} = \sqrt{\langle \mathrm{A}_\alpha \overline{v}_\alpha, \overline{v}_\alpha \rangle}, \ \alpha = 1, 2.$$

Замечание 1.4.1. *Имеют место неравенства*

$$\exists \delta_2 \in [1; +\infty): \ A \le \mathrm{A} \le \delta_2 A,$$

где

$$\delta_2 = 1 + \kappa_2 \lambda_0^{-1}, \ \lambda_0 = 2{,}25(b_1^{-2} + b_2^{-2}) = \lambda_{1,1}(1,1) \le \lambda_{1,1}(m,n) < \lim_{m,n\to\infty} \lambda_{1,1}(m,n) = \frac{\pi^2}{9}\lambda_0,$$

а собственные числа матрицы A *[88]:*

$$\lambda_{i,j}(m,n) = \left(\frac{2m+1}{b_1}\right)^2 \sin^2\left(\frac{(2i-1)\pi}{2(2m+1)}\right) + \left(\frac{2n+1}{b_2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{(2j-1)\pi}{2(2n+1)}\right).$$

Утверждение 1.4.3. *Имеет место равенство*

$$\left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}}\right\rangle = \left\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\right\rangle - \left\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\right\rangle \ \forall\, \vec{\vec{\psi}} \in \vec{\vec{W}}_2,$$

где

$$\left\langle \vec{\vec{u}},\vec{\vec{v}}\right\rangle = (\vec{\vec{u}},\vec{\vec{v}})h_1h_2 = \left\langle \overline{u}_1,\overline{v}_1\right\rangle + \left\langle \overline{u}_2,\overline{v}_2\right\rangle = (\overline{u}_1,\overline{v}_1)h_1h_2 + (\overline{u}_2,\overline{v}_2)h_1h_2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} u_{1,k}v_{1,k}h_1h_2 + \sum_{k=1}^{N} u_{2,k}v_{2,k}h_1h_2 = \sum_{k=1}^{2N} u_k v_k h_1h_2 \ \forall \vec{\vec{u}},\vec{\vec{v}} \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Доказательство. Учитывая, что

$$A\overline{\psi}_1 - \theta\overline{\psi}_2 = 0,\ \theta' = -\theta,$$

получается

$$\left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}}\right\rangle = \left\langle \theta\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2\right\rangle + \left\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\right\rangle = \left\langle \overline{\psi}_1\theta'\overline{\psi}_2\right\rangle + \left\langle A\overline{\psi}_2\overline{\psi}_2\right\rangle =$$
$$= \left\langle A\overline{\psi}_2\overline{\psi}_2\right\rangle - \left\langle \theta\overline{\psi}_2\overline{\psi}_1\right\rangle = \left\langle A\overline{\psi}_2\overline{\psi}_2\right\rangle - \left\langle A\overline{\psi}_1\overline{\psi}_1\right\rangle.$$

Чтобы подчеркнуть важность следующего положения оно формулируется вначале в виде предположения, а уже затем приводятся его обоснования

Предположение 1.4.1. *(О фиктивном продолжении мнимой части на действительную часть) Имеет место неравенство*

$$\exists \alpha_1 \in (0;1):\ \left\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\right\rangle \le \alpha_1\left\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\right\rangle \ \ \forall\, \vec{\vec{\psi}} \in \vec{\vec{W}}_2.$$

Можно отметить ($\gamma = (1-\alpha_1)^{-1}$ или $\alpha_1 = 1-\gamma^{-1}$), что

$$\exists \gamma \in (1;+\infty):\ \left\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\right\rangle \le \gamma\left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}}\right\rangle = \gamma\left(\left\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\right\rangle - \left\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\right\rangle\right) \ \forall\, \vec{\vec{\psi}} \in \vec{\vec{W}}_2,$$

т.к. матрица $A > 0$, а из [6] и матрица $\hat{C} > 0$. А именно в нашем случае выводится, что

$$(\hat{C}\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}}) = (\nabla_x\overline{\psi}_1 - \nabla_y\overline{\psi}_2)^2 + (\nabla_y\overline{\psi}_1 + \nabla_x\overline{\psi}_2)^2 > 0 \ \ \forall\, \vec{\vec{\psi}} \ne 0,$$

последнее, т.к. $(\nabla_x + \mathrm{i}\nabla_y)(\overline{\psi}_1 + \mathrm{i}\,\overline{\psi}_2) \ne 0 \ \ \forall\, \vec{\vec{\psi}} \ne 0$. Также отметим, что

$$\exists \lambda_0^{-1} \in (0;+\infty):\ 0 \le \left\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\right\rangle = \left\langle \theta\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_1\right\rangle = \left\langle A^{-1}\theta\overline{\psi}_2,\theta\overline{\psi}_2\right\rangle \le \lambda_0^{-1}\left\langle \theta\overline{\psi}_2,\theta\overline{\psi}_2\right\rangle \to 0,$$

при $h_1,h_2 \to 0$, где опять $\lambda_0 = \lambda_{1,1}(1,1) = 2,25(b_1^{-2} + b_2^{-2})$, т.е. $\left\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\right\rangle \to 0$, $\overline{\psi}_1 \to \overline{0}$, т.к. $\theta\overline{\psi}_2 = \left(\nabla_x{}'\nabla_y - \nabla_y{}'\nabla_x\right)\overline{\psi}_2 \to \overline{0}$, при $h_1,h_2 \to 0 \ \ \forall\, \vec{\vec{\psi}} \in \vec{\vec{W}}_2$, по формуле Тейлора, если $\bar{\psi}_2$ – дискретные аналоги достаточно гладких функций.

Утверждение 1.4.4. *Имеют место неравенства*

$$\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\left\langle A\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_1\right\rangle \le (1-\alpha_1)\left\langle A\bar{\psi}_2,\bar{\psi}_2\right\rangle \le \left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}},\vec{\bar{\psi}}\right\rangle \quad \forall\,\vec{\bar{\psi}}\in\vec{\bar{W}}_2.$$

Доказательство. Используя, что

$$\left\langle A\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_1\right\rangle \le \alpha_1\left\langle A\bar{\psi}_2,\bar{\psi}_2\right\rangle \quad \forall\,\vec{\bar{\psi}}\in\vec{\bar{W}}_2$$

получаем

$$\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\left\langle A\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_1\right\rangle \le (1-\alpha_1)\left\langle A\bar{\psi}_2,\bar{\psi}_2\right\rangle = \left\langle A\bar{\psi}_2,\bar{\psi}_2\right\rangle - \alpha_1\left\langle A\bar{\psi}_2,\bar{\psi}_2\right\rangle \le$$

$$\le \left\langle A\bar{\psi}_2,\bar{\psi}_2\right\rangle - \left\langle A\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_1\right\rangle = \left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}},\vec{\bar{\psi}}\right\rangle \quad \forall\,\vec{\bar{\psi}}\in\vec{\bar{W}}_2.$$

Утверждение 1.4.5. *Если в итерационном процессе из (1.4.1)* $\alpha=1$, $k=1$, $\tau_1=1$, *то имеют место оценки*

$$\left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}^1,\vec{\bar{\psi}}^1\right\rangle \le \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\langle A\bar{\psi}_1^0,\bar{\psi}_1^0\right\rangle = (\gamma-1)\left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}^0,\vec{\bar{\psi}}^0\right\rangle,\quad \left\|\bar{\psi}_1^1\right\|_A \le \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\|\bar{\psi}_1^0\right\|_A = (\gamma-1)\left\|\bar{\psi}_1^0\right\|_A.$$

Доказательство. Из итерационного процесса имеем

$$\hat{C}(\vec{\bar{\psi}}^1-\vec{\bar{\psi}}^0) = -\hat{D}\vec{\bar{\psi}}^0,$$

$$\left\langle \hat{C}(\vec{\bar{\psi}}^1-\vec{\bar{\psi}}^0),\vec{\bar{\psi}}^1\right\rangle = \left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}^1,\vec{\bar{\psi}}^1\right\rangle = -\left\langle \hat{D}\vec{\bar{\psi}}^0,\vec{\bar{\psi}}^1\right\rangle = -\left\langle A\bar{\psi}_1^0,\bar{\psi}_1^1\right\rangle \le \left\|\bar{\psi}_1^0\right\|_A\left\|\bar{\psi}_1^1\right\|_A,$$

тогда

$$\left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}^1,\vec{\bar{\psi}}^1\right\rangle \le \frac{\left\langle A\bar{\psi}_1^{\,1},\bar{\psi}_1^{\,1}\right\rangle}{\left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}^1,\vec{\bar{\psi}}^1\right\rangle}\left\langle A\bar{\psi}_1^0,\bar{\psi}_1^0\right\rangle \le \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\langle A\bar{\psi}_1^0,\bar{\psi}_1^0\right\rangle \le \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}^0,\vec{\bar{\psi}}^0\right\rangle,$$

учитывая, что

$$\left\langle A\bar{\psi}_1^1,\bar{\psi}_1^1\right\rangle \le \alpha_1\left\langle A\bar{\psi}_2^1,\bar{\psi}_2^1\right\rangle,\quad \left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}^1,\vec{\bar{\psi}}^1\right\rangle = \left\langle A\bar{\psi}_2^1,\bar{\psi}_2^1\right\rangle - \left\langle A\bar{\psi}_1^1,\bar{\psi}_1^1\right\rangle \ge (1-\alpha_1)\left\langle A\bar{\psi}_2^1,\bar{\psi}_2^1\right\rangle.$$

Из утверждения 1.4.4

$$\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\left\langle A\bar{\psi}_1^1,\bar{\psi}_1^1\right\rangle \le \left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}^1,\vec{\bar{\psi}}^1\right\rangle \le \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\langle \hat{C}\bar{\psi}_1^0,\bar{\psi}_1^0\right\rangle,$$

следовательно, выполняется вторая оценка.

Утверждение 1.4.6. *Имеют место неравенства*

$$\exists\gamma \in (1;+\infty): \left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}} \right\rangle \le \left\langle \hat{D}\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}} \right\rangle \le \gamma\delta_2 \left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}} \right\rangle \ \ \forall\, \vec{\vec{\psi}} \in \vec{\vec{W}}_2.$$

Доказательство. Заметим,

$$\frac{1-\alpha_1}{\delta_2}\left\langle \hat{D}\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}} \right\rangle \le \frac{1-\alpha_1}{\delta_2}\left\langle \mathrm{A}\vec{\psi}_2,\vec{\psi}_2 \right\rangle \le (1-\alpha_1)\left\langle A\vec{\psi}_2,\vec{\psi}_2 \right\rangle \le \left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}} \right\rangle =$$

$$= \left\langle A\vec{\psi}_2,\vec{\psi}_2 \right\rangle - \left\langle A\vec{\psi}_1,\vec{\psi}_1 \right\rangle \le \left\langle \mathrm{A}\vec{\psi}_2,\vec{\psi}_2 \right\rangle = \left\langle \hat{D}\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}} \right\rangle,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 1.4.7. *Если в итерационных процессах из (1.4.1)* $\alpha \ne 1$ *или* $k \ne 1$,

$$0 < \tau_k = \tau = \frac{2}{1+\gamma\delta_2} < \frac{2}{\gamma\delta_2},\ q = \frac{\delta_2 - 1 + \alpha_1}{\delta_2 + 1 - \alpha_1} = \frac{\gamma\delta_2 - 1}{\gamma\delta_2 + 1} < 1,$$

то

$$\left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}}^{k},\vec{\vec{\psi}}^{k} \right\rangle \le q^2 \left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}}^{k-1},\vec{\vec{\psi}}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Из итерационных процессов получается, что

$$\hat{C}(\vec{\vec{\psi}}^{k} - \vec{\vec{\psi}}^{k-1}) = -\tau\hat{D}\vec{\vec{\psi}}^{k-1},\ \vec{\vec{\psi}}^{k} = T\vec{\vec{\psi}}^{k-1},\ T = E_{2N} - \tau\hat{C}^{-1}\hat{D},\ T = T' > 0,$$

где E_{2N} – единичная матрица размерности $2N \times 2N$, тогда

$$\left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}}^{k},\vec{\vec{\psi}}^{k} \right\rangle = \left\langle \hat{C}T\vec{\vec{\psi}}^{k-1},T\vec{\vec{\psi}}^{k-1} \right\rangle \le \sup_{\vec{\vec{\psi}}\in\vec{\vec{W}}_2} \frac{\left\langle \hat{C}T\vec{\vec{\psi}},T\vec{\vec{\psi}} \right\rangle}{\left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}} \right\rangle} \left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}}^{k-1},\vec{\vec{\psi}}^{k-1} \right\rangle =$$

$$= \sup_{\vec{\vec{\psi}}\in\vec{\vec{W}}_2} \left(\frac{\left\langle \hat{C}T\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}} \right\rangle}{\left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}} \right\rangle} \right)^2 \left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}}^{k-1},\vec{\vec{\psi}}^{k-1} \right\rangle = \sup_{\vec{\vec{\psi}}\in\vec{\vec{W}}_2} \left(\frac{\left\langle (\hat{C} - \tau\hat{D})\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}} \right\rangle}{\left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}} \right\rangle} \right)^2 \left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}}^{k-1},\vec{\vec{\psi}}^{k-1} \right\rangle =$$

$$= \sup_{\vec{\vec{\psi}}\in\vec{\vec{W}}_2} \left(1 - \tau\frac{\left\langle \hat{D}\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}} \right\rangle}{\left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}},\vec{\vec{\psi}} \right\rangle} \right)^2 \left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}}^{k-1},\vec{\vec{\psi}}^{k-1} \right\rangle =$$

$$= \max\left\{ \left|1-\tau\right|^2,\ \left|1-\tau\gamma\delta_2\right|^2 \right\} \left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}}^{k-1},\vec{\vec{\psi}}^{k-1} \right\rangle = q^2 \left\langle \hat{C}\vec{\vec{\psi}}^{k-1},\vec{\vec{\psi}}^{k-1} \right\rangle.$$

Теорема 1.4.1. *В итерационных процессах из (1.4.1)*

$$\left\| \bar{u}_\alpha^{\ k} - \bar{u}_\alpha \right\|_{\mathrm{A}_\alpha} \le \varepsilon_\alpha \left\| \bar{u}_\alpha^{\ 0} - \bar{u}_\alpha \right\|_{\mathrm{A}_\alpha},$$

при

$$\tau_1 = (2-\alpha) + (\alpha - 1)\tau\,,\ \tau_k = \tau = 2/(1+\gamma\delta_2),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\,,$$

получается, что

$$\varepsilon_\alpha \le \left((2-\alpha)(\gamma-1) + (\alpha-1)\sqrt{\gamma\delta_2 q}\right)q^{k-1}.$$

Доказательство. Если $\alpha = 1$, то из утверждения 1.4.4 имеем

$$\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\left\langle A\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_1 \right\rangle \le \left\langle \hat{C}\vec{\overline{\psi}}, \vec{\overline{\psi}} \right\rangle \quad \forall\, \vec{\overline{\psi}} \in \vec{\overline{W}}_2\,,$$

а из утверждения 1.4 5 следует $\left\langle \hat{C}\vec{\overline{\psi}}^1, \vec{\overline{\psi}}^1 \right\rangle \le \dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\langle A\overline{\psi}_1{}^0, \overline{\psi}_1{}^0 \right\rangle = (\gamma - 1)\left\langle A\overline{\psi}_1^0, \overline{\psi}_1^0 \right\rangle$.

Если $\alpha = 2$, то из утверждения 1.4.6 получается

$$\frac{1-\alpha_1}{\delta_2}\left\langle \mathrm{A}\overline{\psi}_2, \overline{\psi}_2 \right\rangle \le \left\langle \hat{C}\vec{\overline{\psi}}, \vec{\overline{\psi}} \right\rangle,\ \left\langle \hat{C}\vec{\overline{\psi}}, \vec{\overline{\psi}} \right\rangle \le \left\langle \mathrm{A}\overline{\psi}_2, \overline{\psi}_2 \right\rangle \quad \forall\, \vec{\overline{\psi}} \in \vec{\overline{W}}_2\,.$$

Вывод. Для решения задач из (1.2.1) с N неизвестными предложенными итерационными процессами из (1.4.1) для достижения необходимой точности с относительными погрешностями ε_α требуется не более чем $O(N|\ln\varepsilon_\alpha|)$ арифметических операций. Для выбора итерационных параметров и ускорения сходимости итерационных процессов можно рекомендовать, например, при $\alpha = 1$ метод скорейшего спуска, а при $\alpha = 2$ метод минимальных поправок [42, 67, 70].

1.5. Алгоритмы для программ вычислений перемещений прямоугольных мембран при итерационных факторизациях на продолжениях

Рассматриваются задачи из (1.2.1), (1.3.1) при $\alpha = 1$

$$\overline{u}_\alpha \in \mathbb{R}^N:\ \mathrm{A}_\alpha \overline{u}_\alpha = \overline{f}_\alpha\,,\ \overline{f}_\alpha \in \mathbb{R}^N\,,$$

$$\vec{\overline{u}} \in \mathbb{R}^{2N}:\ \hat{D}\vec{\overline{u}} = \vec{\overline{f}}\,,\ \vec{\overline{f}} \in \mathbb{R}^{2N}\,,\ \overline{f}_{3-\alpha} = \overline{0}$$

и итерационный процесс из (1.4.1), т.е. метод итерационных факторизаций

$$\vec{\overline{u}}^k \in \mathbb{R}^{2N}:\ \hat{C}(\vec{\overline{u}}^k - \vec{\overline{u}}^{k-1}) = -\tau_k(\hat{D}\vec{\overline{u}}^{k-1} - \vec{\overline{f}}),\ \tau_k > 0\,,\ k \in \mathbb{N}\ \ \forall \vec{\overline{u}}^0 \in \vec{\overline{W}}_\alpha\,,$$

если $\kappa_2 = 0$. Для выбора итерационных параметров в методе итерационных факторизаций применяется метод скорейшего спуска из [42, 67, 70]. Для рассматриваемых задач и итерационного процесса, тогда предлагается следующий алгоритм вычислений:

1) вычисляется первое приближение $\vec{\vec{u}}^1 \in \mathbb{R}^{2N}:\ \hat{C}\vec{\vec{u}}^1 = \vec{\vec{f}} - \hat{D}\vec{\vec{u}}^0\ \forall \vec{\vec{u}}^0 \in \vec{\vec{W}}_1$,

2) вычисляется первая невязка $\vec{\vec{r}}^1 : \overline{r}_1^1 = \overline{0},\ \overline{r}_2^1 = A\overline{u}_2^1$,

3) вычисляется квадрат нормы ошибки $\mathrm{E}_1 = \left\| \overline{\psi}_2^1 \right\|_A^2 = \left\langle A\overline{\psi}_2^1, \overline{\psi}_2^1 \right\rangle = \left\langle \overline{r}_2^1, \overline{u}_2^1 \right\rangle$,

4) находится поправка $\vec{\vec{w}}^{k-1} \in \mathbb{R}^{2N}:\ \hat{C}\vec{\vec{w}}^{k-1} = \vec{\vec{r}}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

5) вычисляется итерационный параметр

$$\tau_k = \frac{\left\langle \vec{\vec{r}}^{k-1}, \vec{\vec{w}}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \hat{D}\vec{\vec{w}}^{k-1}, \vec{\vec{w}}^{k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \overline{r}_2^{k-1}, \overline{w}_2^{k-1} \right\rangle}{\left\langle A\overline{w}_2^{k-1}, \overline{w}_2^{k-1} \right\rangle}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

6) вычисляется новое приближение $\vec{\vec{u}}^k = \vec{\vec{u}}^{k-1} - \tau_k \vec{\vec{w}}^{k-1}\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

7) вычисляется новая невязка $\vec{\vec{r}}^k : \overline{r}_1^k = \overline{0},\ \overline{r}_2^k = A\overline{u}_2^k,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

8) вычисляется квадрат нормы новой ошибки

$$\mathrm{E}_k = \left\| \overline{\psi}_2^k \right\|_A^2 = \left\langle A\overline{\psi}_2^k, \overline{\psi}_2^k \right\rangle = \left\langle \overline{r}_2^k, \overline{u}_2^k \right\rangle\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

9) проверяется условие остановки итераций $\mathrm{E}_k / \mathrm{E}_1 < \mathrm{E}^2,\ \mathrm{E} \in (0;\, 1),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Заметим в условии остановки итерационного процесса $\mathrm{E} \in (0;\, 1) -$задаваемая относительная погрешность. Можно использовать критерии окончания итерационных процессов из [55].

Рассматриваются задачи из (1.2.1), (1.3.1) при $\alpha = 2$

$$\overline{u}_\alpha \in \mathbb{R}^N:\ \mathrm{A}_\alpha \overline{u}_\alpha = \overline{f}_\alpha,\ \overline{f}_\alpha \in \mathbb{R}^N,$$

$$\vec{\vec{u}} \in \mathbb{R}^{2N}:\ \hat{D}\vec{\vec{u}} = \vec{\vec{f}},\ \vec{\vec{f}} \in \mathbb{R}^{2N},\ \overline{f}_{3-\alpha} = \overline{0}$$

и итерационный процесс из (1.4.1), т.е. метод итерационных факторизаций

$$\vec{\vec{u}}^k \in \mathbb{R}^{2N}:\ \hat{C}(\vec{\vec{u}}^k - \vec{\vec{u}}^{k-1}) = -\tau_k(\hat{D}\vec{\vec{u}}^{k-1} - \vec{\vec{f}}),\ \tau_k > 0,\ k \in \mathbb{N}\ \ \forall \vec{\vec{u}}^0 \in \vec{\vec{W}}_\alpha.$$

Для выбора итерационных параметров в методе итерационных факторизаций применяется метод минимальных поправок из [67, 70]. Для рассматриваемых задач и итерационного процесса, тогда предлагается следующий алгоритм вычислений:

1) выбирается нулевое начальное приближение $\forall \vec{\bar{u}}^0 \in \vec{\bar{W}}_2$ $(\vec{\bar{u}}^0 = \vec{\bar{0}})$,

2) вычисляется невязка $\vec{\bar{r}}^{k-1} : \bar{r}_1^{k-1} = \bar{0},\ \bar{r}_2^{k-1} = \mathrm{A}\bar{u}_2^{k-1} - \bar{f}_2,\ k \in \mathbb{N}$,

3) находится поправка $\vec{\bar{w}}^{k-1} \in \mathbb{R}^{2N}:\ \hat{C}\vec{\bar{w}}^{k-1} = \vec{\bar{r}}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}$,

4) вычисляется квадрат нормы ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\| \vec{\bar{\psi}}^{k-1} \right\|^2_{\hat{D}'\hat{C}^{-1}\hat{D}} = \left\langle \vec{\bar{r}}^{k-1}, \vec{\bar{w}}^{k-1} \right\rangle = \left\langle \bar{r}_2^{k-1}, \bar{w}_2^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N},$$

5) проверяется условие остановки итераций $\mathrm{E}_{k-1}/\mathrm{E}_0 < \mathrm{E}^2,\ \mathrm{E} \in (0;\,1),\ k \in \mathbb{N}$,

6) дополнительно вычисляется вектор $\vec{\bar{\eta}}^{k-1} : \bar{\eta}_1^{k-1} = \bar{0},\ \bar{\eta}_2^{k-1} = \mathrm{A}\bar{w}_2^{k-1},\ k \in \mathbb{N}$,

7) дополнительно находится вектор $\vec{\bar{\xi}}^{k-1} \in \mathbb{R}^{2N}:\ \hat{C}\vec{\bar{\xi}}^{k-1} = \vec{\bar{\eta}}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}$,

8) вычисляется итерационный параметр

$$\tau_k = \frac{\left\langle \hat{D}\vec{\bar{w}}^{k-1}, \vec{\bar{w}}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \hat{C}^{-1}\hat{D}\vec{\bar{w}}^{k-1}, \hat{D}\vec{\bar{w}}^{k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \vec{\bar{\eta}}^{k-1}, \vec{\bar{w}}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \vec{\bar{\xi}}^{k-1}, \vec{\bar{\eta}}^{k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \bar{\eta}_2^{k-1}, \bar{w}_2^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \bar{\xi}_2^{k-1}, \bar{\eta}_2^{k-1} \right\rangle},\ k \in \mathbb{N},$$

9) вычисляется новое приближение $\bar{u}_2^k = \bar{u}_2^{k-1} - \tau_k \bar{w}_2^{k-1}\ k \in \mathbb{N}$.

Заметим в условии остановки итерационного процесса $\mathrm{E} \in (0;\,1) -$ задаваемая относительная погрешность. Также можно использовать критерии окончания итерационных процессов из [55].

В предложенных алгоритмах используются только арифметические операции при вычислениях и поэтому можно пользоваться и безошибочным решением систем линейных алгебраических уравнений [62].

1.6. Эксперименты по программе вычислений перемещений прямоугольной мембраны

Решаются задачи из (1.2.1), (1.3.1) при $\alpha = 1$

$$\bar{u}_\alpha \in \mathbb{R}^N:\ \mathrm{A}_\alpha \bar{u}_\alpha = \bar{f}_\alpha,\ \bar{f}_\alpha \in \mathbb{R}^N,$$

$$\vec{\bar{u}} \in \mathbb{R}^{2N}:\ \hat{D}\vec{\bar{u}} = \vec{\bar{f}},\ \vec{\bar{f}} \in \mathbb{R}^{2N},\ \bar{f}_{3-\alpha} = \bar{0},$$

если $\kappa_2 = 0$ и заданы компоненты правой части системы линейных алгебраических уравнений

$$f_{1,m(i-1)+j} = f_{1,i,j} = (b_1^2 + b_2^2 - ((i-0,5)h_1)^2 - ((j-0,5)h_2)^2)/2,$$
$$i = 1,...,m,\ j = 1,...,n,\ m = n = 2,...,125,$$

где

$$h_1 = b_1/(m+0,5),\ h_2 = b_2/(n+0,5),\ b_1 = b_2 = 2,5$$

итерационным процессом из (1.4.1), т.е. методом итерационных факторизаций

$$\vec{\bar{u}}^k \in \mathbb{R}^{2N}:\ \hat{C}(\vec{\bar{u}}^k - \vec{\bar{u}}^{k-1}) = -\tau_k(\hat{D}\vec{\bar{u}}^{k-1} - \vec{\bar{f}}),\ \tau_k > 0,\ k \in \mathbb{N}\ \ \forall \vec{\bar{u}}^0 \in \vec{\bar{W}}_\alpha.$$

Для выбора итерационных параметров в методе итерационных факторизаций применяется метод скорейшего спуска [42, 67, 70]. Для решаемых задач в итерационном процессе, тогда применяется следующий алгоритм вычислений:

1) вычисляется первое приближение $\vec{\bar{u}}^1 \in \mathbb{R}^{2N}:\ \hat{C}\vec{\bar{u}}^1 = \vec{\bar{f}}$,

2) вычисляется первая невязка $\vec{\bar{r}}^1 : \bar{r}_1^1 = \bar{0},\ \bar{r}_2^1 = A\bar{u}_2^1$,

3) вычисляется квадрат нормы ошибки $\mathrm{E}_1 = \|\bar{\psi}_2^1\|_A^2 = \langle A\bar{\psi}_2^1, \bar{\psi}_2^1\rangle = \langle \bar{r}_2^1, \bar{u}_2^1\rangle$,

4) находится поправка $\vec{\bar{w}}^{k-1} \in \mathbb{R}^{2N}:\ \hat{C}\vec{\bar{w}}^{k-1} = \vec{\bar{r}}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$,

5) вычисляется итерационный параметр

$$\tau_k = \frac{\langle \vec{\bar{r}}^{k-1}, \vec{\bar{w}}^{k-1}\rangle}{\langle \hat{D}\vec{\bar{w}}^{k-1}, \vec{\bar{w}}^{k-1}\rangle} = \frac{\langle \bar{r}_2^{k-1}, \bar{w}_2^{k-1}\rangle}{\langle A\bar{w}_2^{k-1}, \bar{w}_2^{k-1}\rangle}\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\},$$

6) вычисляется новое приближение $\vec{\bar{u}}^k = \vec{\bar{u}}^{k-1} - \tau_k\vec{\bar{w}}^{k-1}\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$,

7) вычисляется новая невязка $\vec{\bar{r}}^k : \bar{r}_1^k = \bar{0},\ \bar{r}_2^k = A\bar{u}_2^k,\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$,

8) вычисляется квадрат нормы новой ошибки

$$\mathrm{E}_k = \|\bar{\psi}_2^k\|_A^2 = \langle A\bar{\psi}_2^k, \bar{\psi}_2^k\rangle = \langle \bar{r}_2^k, \bar{u}_2^k\rangle\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\},$$

9) проверяется условие остановки итераций $\mathrm{E}_k/\mathrm{E}_1 < \mathrm{E}^2,\ \mathrm{E} \in (0;1),\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Заметим в условии остановки итерационного процесса $\mathrm{E} \in (0;1) -$ задаваемая относительная погрешность. В 1) и 4) появляются задачи вида:

$$\vec{\vec{u}} = (\bar{u}_1', \bar{u}_2')' \in \mathbb{R}^{2N} :\ \hat{C}\vec{\vec{u}} = \vec{\vec{f}},\ \vec{\vec{f}} = (\bar{f}_1', \bar{f}_2')' \in \mathbb{R}^{2N},$$

а, как указывалось ранее, они могут быть записаны в комплексной форме

$$\bar{U} = \bar{u}_1 + \mathrm{i}\bar{u}_2 \in \mathbb{C}^N :\ LL^*\bar{U} = \bar{F},\ \bar{F} = \bar{f}_1 + \mathrm{i}\bar{f}_2 \in \mathbb{C}^N$$

и возможно расщепление на более простые две задачи

$$а)\ \bar{Q} \in \mathbb{C}^N,\ L\bar{Q} = \bar{F},\ \bar{F} \in \mathbb{C}^N,$$

$$б)\ \bar{U} \in \mathbb{C}^N,\ L^*\bar{U} = \bar{Q},\ \bar{Q} \in \mathbb{C}^N.$$

А эти системы с матрицами L и L^* могут быть записаны в виде $(\mathrm{i}^2 = -1)$:

$$а)\ (Q_{i,j} - Q_{i-1,j})h_1^{-1} + \mathrm{i}(Q_{i,j-1} - Q_{i,j})h_2^{-1} = F_{i,j},\quad i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n,$$

при

$$Q_{i,0} = 0,\ i = 1,\ldots,m,\ Q_{0,j} = 0,\ j = 1,\ldots,n,$$

$$б)\ (U_{i,j} - U_{i+1,j})h_1^{-1} + \mathrm{i}(U_{i,j} - U_{i,j+1})h_2^{-1} = Q_{i,j},\quad i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n,$$

при

$$U_{i,n+1} = 0,\ i = 1,\ldots,m,\ U_{m+1,j} = 0,\ j = 1,\ldots,n.$$

Если ввести коэффициенты:

$$d_1 = h_1(h_1 - \mathrm{i}h_2)/d,\ d_2 = h_2(h_2 + \mathrm{i}h_1)/d,\ d_3 = h_1 d_2,\ d = h_1^2 + h_2^2,$$

$$d_4 = h_1(h_1 + \mathrm{i}h_2)/d,\ d_5 = h_2(h_2 - \mathrm{i}h_1)/d,\ d_6 = h_1 d_5,$$

то по явным формулам можно найти решения указанных систем:

$$а)\ Q_{i,j} = d_1 Q_{i,j-1} + d_2 Q_{i-1,j} + d_3 F_{i,j},\quad i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n,$$

$$б)\ U_{i,j} = d_4 U_{i,j+1} + d_5 U_{i+1,j} + d_6 Q_{i,j},\quad i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n.$$

В 2) и 7) при умножении $A\bar{u}_2^1,\ A\bar{u}_2^k$ возникают вычисления вида $A\bar{u}_2$:

$$(2u_{2,i,j} - u_{2,i-1,j} - u_{2,i+1,j})h_1^{-2} + (2u_{2,i,j} - u_{2,i,j-1} - u_{2,i,j+1})h_2^{-2},\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n,$$

где

$$u_{2,i,0} = u_{2,i,1},\ u_{2,i,n+1} = 0,\ i = 1,\ldots,m,\ u_{2,0,j} = u_{2,1,j},\ u_{2,m+1,j} = 0,\ j = 1,\ldots,n.$$

Можно отметить, что вычисления, при реализации на ЭВМ, экспериментально подтверждают асимптотическую независимость k – числа итераций от $m(n)$ – числа узлов сетки по направлениям осей $0x(0y)$ для достижения E – заданной относительной погрешности, при решений систем линейных алгебраических уравнений, в предложенной фиктивно продолженной численной модели перемещения мембраны из [88].

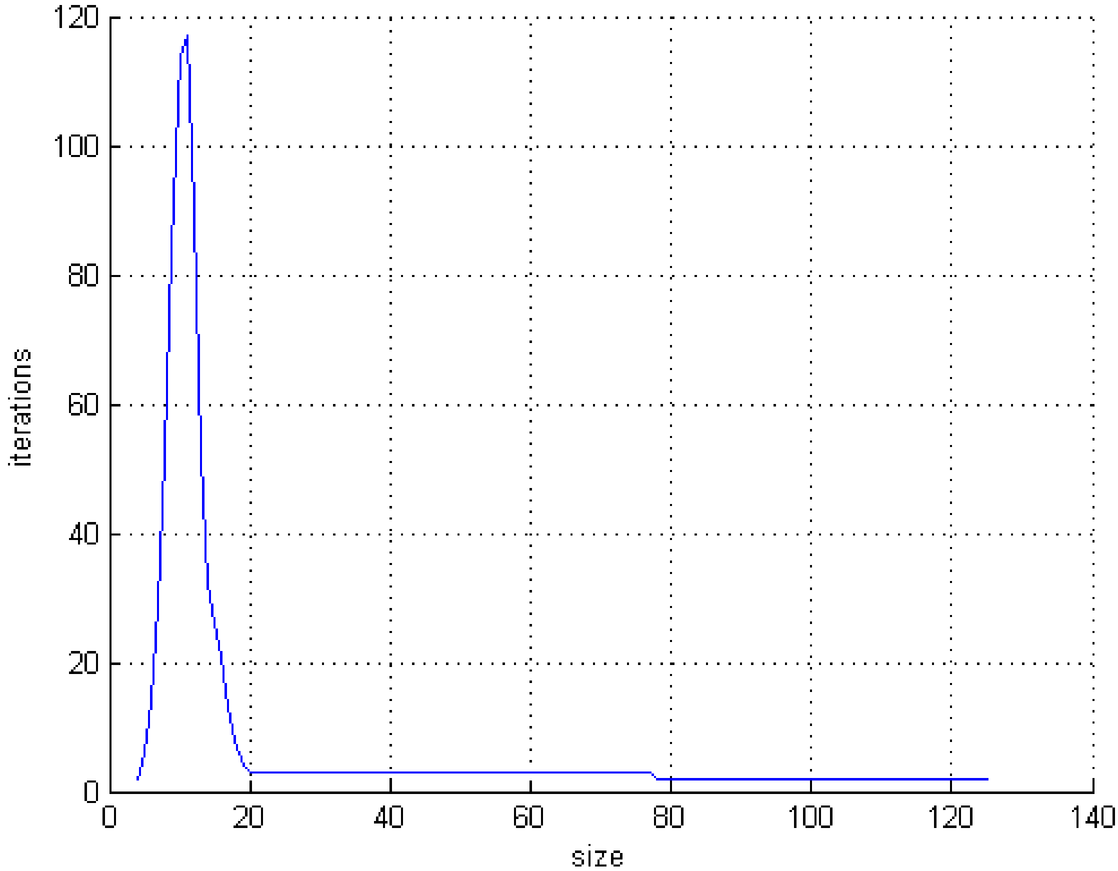

Рис. 1.6.1: График функции k – числа итераций от $m(n)$ – числа узлов сетки по направлениям осей $0x(0y)$ при заданной относительной погрешности вычислений $\mathrm{E} = 0{,}001$ в предложенной модели.

ГЛАВА 2

ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

В этой главе изучается математическое моделирование перемещений прямоугольной пластины при наличии упругого основания. Рассматривается эллиптическое уравнение четвёртого порядка в прямоугольнике со сторонами параллельными осям координат, на двух смежных сторонах прямоугольника однородные условия шарнирного опирания, а на двух других сторонах однородные условия симметрии. Задача, получающаяся при дискретизации уравнения Пуассона по методу конечных разностей, решаемая в [88] дважды возникает на каждом шаге предлагаемого итерационного процесса. Система линейных алгебраических уравнений получается при дискретизации исходной задачи по методу конечных элементов [100] в отличие от [102], где применялся метод конечных разностей. Исходная задача может быть получена в методах типа фиктивных компонент при решении эллиптических уравнений четвёртого порядка в плоских областях достаточно произвольного вида при однородных, например, главных или естественных краевых условиях.

2.1. Математические модели перемещений прямоугольной пластины

Из линейной теории изгибания пластин на упругом основании, используя, например, [36, 60] энергия деформированной прямоугольной пластины, у которой на двух смежных сторонах однородные условия шарнирного опирания, а на двух других сторонах однородные условия симметрии, может быть записана в виде:

$$\breve{E}(\breve{u})=\frac{1}{2}\breve{D}\int_{\Omega}(\Delta\breve{u})^2\,d\Omega+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\breve{K}\breve{u}^2 d\Omega-\int_{\Omega}\breve{P}\breve{u}d\Omega,$$

где $\breve{P}$ – давление, $\breve{K}$ – коэффициент жёсткости упругого основания ($\breve{K}=0$ в случае отсутствия упругого основания), $\breve{D}=\breve{E}\breve{h}^3\big/(12(1-\sigma^2))$ – цилиндрическая жёсткость пластины, $\breve{h}$ – толщина пластины, $\breve{E}$ – модуль Юнга (модуль растяжения), $\sigma\in(0;1)$ – коэффициент Пуассона, $\Omega=(0;b_1)\times(0;b_2)$ – плоская область, $\breve{u}$ – искомое перемещение. Если приравнять к нулю вариацию энергии

$$\delta\breve{E}(\breve{u})=\breve{D}\int_{\Omega}\Delta\breve{u}\Delta\breve{v}d\Omega+\int_{\Omega}\breve{K}\breve{u}\breve{v}d\Omega-\int_{\Omega}\breve{P}\breve{v}d\Omega=0,$$

где $\breve{v}=\delta\breve{u}$, то, при $a=\breve{K}\big/\breve{D}$, $\breve{f}=\breve{P}\big/\breve{D}$ получается, что

$$\int_{\Omega}(\Delta\breve{u}\Delta\breve{v}+a\breve{u}\breve{v})d\Omega=\int_{\Omega}\breve{f}\breve{v}d\Omega.$$

Используем вторую формулу Грина

$$\int_{\Omega}\breve{w}\Delta\breve{v}d\Omega=\int_{\Omega}\Delta\breve{w}\breve{v}d\Omega+\int_{s}(\breve{w}\frac{\partial\breve{v}}{\partial\vec{n}}-\breve{v}\frac{\partial\breve{w}}{\partial\vec{n}})ds.$$

После интегрирования по частям устанавливается

$$\int_{\Omega}(\Delta^2\breve{u}+a\breve{u})\breve{v}d\Omega+\int_{s}\Delta\breve{u}\frac{\partial\breve{v}}{\partial\vec{n}}ds-\int_{s}\frac{\partial\Delta\breve{u}}{\partial\vec{n}}\breve{v}ds=\int_{\Omega}\breve{f}\breve{v}d\Omega,$$

где

$\partial\Omega=\overline{s}$, $s=\Gamma_1\bigcup\Gamma_2$, $\Gamma_1=\{b_1\}\times(0;b_2)\bigcup(0;b_1)\times\{b_2\}$, $\Gamma_2=\{0\}\times(0;b_2)\bigcup(0;b_1)\times\{0\}$, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$,

$$\breve{u}\big|_{\Gamma_1}=\Delta\breve{u}\big|_{\Gamma_1}=0,\ \frac{\partial\breve{u}}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2}=\frac{\partial\Delta\breve{u}}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2}=0.$$

Таким образом, получается задача при смешанных краевых условиях, а именно при однородных условиях шарнирного опирания и симметрии.

$$\Delta^2\breve{u}+a\breve{u}=\breve{f},\ \breve{u}\big|_{\Gamma_1}=\Delta\breve{u}\big|_{\Gamma_1}=0,\ \frac{\partial\breve{u}}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2}=\frac{\partial\Delta\breve{u}}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2}=0.$$

Рассматривается математическая модель перемещений прямоугольной пластины в вариационном виде. Это вариационная задача, обобщённая математическая модель перемещений прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях

$$\breve{u} \in \breve{V} : \Lambda(\breve{u},\breve{v}) = \breve{g}(\breve{v}) \ \forall \breve{v} \in \breve{V}, \ \ \breve{g} \in \breve{V}', \qquad (2.1.1)$$

где соболевское пространство функций

$$\breve{V} = \breve{V}(\Omega) = \left\{ \breve{v} \in W_2^2(\Omega) : \breve{v}\big|_{\Gamma_1} = 0, \frac{\partial \breve{v}}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = 0 \right\}$$

на области $\Omega = (0;b_1)\times(0;b_2)$, с границей

$\partial\Omega = \overline{s}$, $s =,\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, $\Gamma_1 = \{b_1\}\times(0;b_2)\bigcup(0;b_1)\times\{b_2\}$, $\Gamma_2 = \{0\}\times(0;b_2)\bigcup(0;b_1)\times\{0\}$, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, билинейная форма

$$\Lambda(\breve{u},\breve{v}) = \int\limits_{\Omega} (\sigma\Delta\breve{u}\Delta\breve{v} + (1-\sigma)(\breve{u}_{xx}\breve{v}_{xx} + 2\breve{u}_{xy}\breve{v}_{xy} + \breve{u}_{yy}\breve{v}_{yy}) + a\breve{u}\breve{v})d\Omega,$$

при этом $a = a_1$ на области Ω_1, $a = a_2$ на $\Omega \setminus \Omega_1$, области Ω_1, Ω_2: $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \bigcup \overline{\Omega}_2$, $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \varnothing$, $\partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_2 \neq \varnothing$, заданы константы, $\sigma \in (0;1)$, $b_{1`}, b_2 \in (0;+\infty)$, $a_{1`}, a_2 \in [0;+\infty)$.

Можно отметить [59, 60], что

$$\exists c_1, c_2 \in (0;+\infty):\ c_1\|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Omega)} \le \Lambda(\breve{v},\breve{v}) \le c_2\|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Omega)} \ \ \forall \breve{v} \in \breve{V},$$

а, следовательно, решение задачи (2.1.1) существует и единственно [59, 60]. Если $\breve{f}$ – заданная, $\breve{u}$ – искомая достаточно гладкие функции и

$$\breve{g}(\breve{v}) = (\breve{f},\breve{v}), \text{ где } (\breve{f},\breve{v}) = \int\limits_{\Omega} \breve{f}\breve{v}d\Omega,$$

то из задачи (2.1.1), как и ранее получается эллиптическое уравнение четвертого порядка при смешанных и однородных краевых условиях

$$\Delta^2\breve{u} + a\breve{u} = \breve{f},\ \breve{u}\big|_{\Gamma_1} = \Delta\breve{u}\big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial\breve{u}}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial\Delta\breve{u}}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = 0. \qquad (2.1.2)$$

2.2. Приближенный аналитический метод итерационных факторизаций для прямоугольной пластины

Основываясь, например, на [67] можно сформулировать следующее утверждение, которое будет использоваться в дальнейшем.

Утверждение 2.2.1. *Если рассмотреть спектральную задачу*

$$\lambda_{i,j}:\ -\Delta\breve{\varphi}_{i,j}=\lambda_{i,j}\breve{\varphi}_{i,j},\ \breve{\varphi}_{i,j}\Big|_{\Gamma_1}=0,\ \frac{\partial\breve{\varphi}_{i,j}}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2}=0,\ \breve{\varphi}_{i,j}\neq 0,$$

то находятся методом разделения переменных её собственные числа и функции соответственно

$$\lambda_{i,j}=\frac{(2i-1)^2\pi^2}{4b_1^2}+\frac{(2j-1)^2\pi^2}{4b_2^2},\ \breve{\varphi}_{i,j}=\breve{c}_{i,j}\cos\frac{(2i-1)\pi x}{2b_1}cos\frac{(2j-1)\pi y}{2b_2},$$

$\breve{c}_{i,j}\in\mathbb{R}$, $i,j\in\mathbb{N}$, *при этом* $0<\min\limits_{i,j\in\mathbb{N}}\lambda_{i,j}=\lambda_{1,1}=\dfrac{\pi^2}{4b_1^2}+\dfrac{\pi^2}{4b_2^2}$, $\sup\limits_{i,j\in\mathbb{N}}\lambda_{i,j}=+\infty$.

Введём билинейную форму

$$\mathrm{M}(\breve{u},\breve{v})=\int\limits_{\Omega}\Delta\breve{u}\Delta\breve{v}d\Omega,\ \breve{u},\breve{v}\in\breve{V}.$$

Утверждение 2.2.2. *Имеют место неравенства*

$$\breve{\gamma}_1\mathrm{M}(\breve{v},\breve{v})\le\Lambda(\breve{v},\breve{v})\le\breve{\gamma}_2\mathrm{M}(\breve{v},\breve{v})\ \ \forall\breve{v}\in\breve{V},\ \breve{\gamma}_1=1,\ \breve{\gamma}_2=(\lambda_{1,1}^2+a_2)\big/\lambda_{1,1}^2\ (a_1\le a_2).$$

Доказательство. Выполняется, что

$$1=\inf_{\lambda_{i,j}}\frac{\lambda_{i,j}^2+a_1}{\lambda_{i,j}^2}=\breve{\gamma}_1\le\frac{\Lambda(\breve{v},\breve{v})}{\mathrm{M}(\breve{v},\breve{v})}\le\breve{\gamma}_2=\sup_{\lambda_{i,j}}\frac{\lambda_{i,j}^2+a_2}{\lambda_{i,j}^2}=\frac{\lambda_{1,1}^2+a_2}{\lambda_{1,1}^2}\quad\forall\breve{v}\in\breve{V}$$

Введём нормы

$$\|\breve{v}\|_{\mathrm{M}}=\sqrt{\mathrm{M}(\breve{v},\breve{v})},\ \|\breve{v}\|_{\breve{V}}=\sqrt{\Lambda(\breve{v},\breve{v})}.$$

Предлагается итерационный процесс, метод приближённого вычисления перемещений прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях на непрерывном уровне:

$$\breve{u}^k\in\breve{V}:\ \mathrm{M}(\breve{u}^k-\breve{u}^{k-1},\breve{v})=-\tau_k(\Lambda(\breve{u}^{k-1},\breve{v})-\breve{g}(\breve{v}))\quad\forall\breve{v}\in\breve{V},\tag{2.2.1}$$

$$\tau_k=\tau=2\big/(\breve{\gamma}_1+\breve{\gamma}_2)=2\lambda_{1,1}^2\big/(2\lambda_{1,1}^2+a_2),\ k\in\mathbb{N}\ \forall\breve{u}^0\in\breve{V}\ \ (a_1\le a_2).$$

Теорема 2.2.1. *Для итерационного процесса из (2.2.1) имеют место оценки:*

$$\text{1. } \left\|\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le \varepsilon \left\|\breve{u}^0 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}},$$

$$\text{2. } \left\|\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\mathrm{M}} \le \varepsilon \left\|\breve{u}^0 - \breve{u}\right\|_{\mathrm{M}},$$

где относительная ошибка сходимости u^k к решению u следующая

$$\varepsilon = q^k = \left((\breve{\gamma}_2 - \breve{\gamma}_1)/(\breve{\gamma}_2 + \breve{\gamma}_1)\right)^k = \left(a_2 \big/ (2\lambda_{1,1}^2 + a_2)\right)^k, \ k \in \mathbb{N} \ (a_1 \le a_2).$$

Доказательство. Введём оператор $\breve{R}$ из $\breve{V}$ в $\breve{V}$:

$$\mathrm{M}(\breve{R}\breve{u}, \breve{v}) = \Lambda(\breve{u}, \breve{v}), \ \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}.$$

Так как $\breve{\gamma}_1 \mathrm{M}(\breve{v}, \breve{v}) \le \Lambda(\breve{v}, \breve{v}) \le \breve{\gamma}_2 \mathrm{M}(\breve{v}, \breve{v})$, то $\breve{\gamma}_1 \mathrm{M}(\breve{v}, \breve{v}) \le \mathrm{M}(\breve{R}\breve{v}, \breve{v}) \le \breve{\gamma}_2 \mathrm{M}(\breve{v}, \breve{v})$, т.е. $\breve{\gamma}_1 I \le \breve{R} \le \breve{\gamma}_2 I$. $\breve{R}-$ ограниченный и симметричный оператор. Заметим, что $\Lambda(\breve{R}^{-1}\breve{u}, \breve{v}) = \mathrm{M}(\breve{u}, \breve{v})$. Пусть $\breve{u}^k = \breve{u} + \breve{\psi}^k$, $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, тогда из итерационного процесса имеем

$$\mathrm{M}(\breve{\psi}^k - \breve{\psi}^{k-1}, \breve{v}) = -\tau_k \Lambda(\breve{\psi}^{k-1}, \breve{v}) \ \text{ и } \ \Lambda(\breve{R}^{-1}(\breve{\psi}^k - \breve{\psi}^{k-1}), \breve{v}) = -\tau_k \Lambda(\breve{\psi}^{k-1}, \breve{v}),$$

отсюда

$$\breve{R}^{-1}(\breve{\psi}^k - \breve{\psi}^{k-1}) = -\tau_k \breve{\psi}^{k-1}, \ \breve{\psi}^k = (I - \tau_k \breve{R})\breve{\psi}^{k-1}.$$

Пусть $\breve{T}_k = I - \tau_k \breve{R}$, тогда можно перейти к доказательству первого неравенства.

$$\Lambda(\breve{\psi}^k, \breve{\psi}^k) = \Lambda(\breve{T}_k \breve{\psi}^{k-1}, \breve{T}_k \breve{\psi}^{k-1}) \le \sup_{\breve{\psi} \in \breve{V}} \left(\Lambda(\breve{T}_k \breve{\psi}, \breve{T}_k \breve{\psi}) \big/ \Lambda(\breve{\psi}, \breve{\psi}) \right) \Lambda(\breve{\psi}^{k-1}, \breve{\psi}^{k-1}) =$$

так как оператор $\breve{T}_k$ симметричный

$$= \left(\sup_{\breve{\psi} \in \breve{V}} \left(\frac{\Lambda(\breve{T}_k \breve{\psi}, \breve{\psi})}{\Lambda(\breve{\psi}, \breve{\psi})} \right) \right)^2 \Lambda(\breve{\psi}^{k-1}, \breve{\psi}^{k-1}) = \left(\sup_{\breve{\psi} \in \breve{V}} \left(1 - \tau_k \frac{\Lambda(\breve{R}\breve{\psi}, \breve{\psi})}{\Lambda(\breve{\psi}, \breve{\psi})} \right) \right)^2 \Lambda(\breve{\psi}^{k-1}, \breve{\psi}^{k-1}) =$$

полагаем $\breve{v} = \breve{R}^{1/2} \breve{\psi}$

$$= \left(\sup_{\breve{v} \in \breve{V}} \left(1 - \tau_k \frac{\Lambda(\breve{v}, \breve{v})}{\Lambda(\breve{R}^{-1}\breve{v}, \breve{v})} \right) \right)^2 \Lambda(\breve{\psi}^{k-1}, \breve{\psi}^{k-1}) = \left(\sup_{\breve{v} \in \breve{V}} \left(1 - \tau_k \frac{\Lambda(\breve{v}, \breve{v})}{\mathrm{M}(\breve{v}, \breve{v})} \right) \right)^2 \Lambda(\breve{\psi}^{k-1}, \breve{\psi}^{k-1}) \le$$

$$\le max \left\{ \left(1 - \tau_k \breve{\gamma}_1\right)^2, \ \left(1 - \tau_k \breve{\gamma}_2\right)^2 \right\} \Lambda(\breve{\psi}^{k-1}, \breve{\psi}^{k-1})$$

отсюда

$$\Lambda(\breve{\psi}^k,\breve{\psi}^k)\le q^2\Lambda(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1}),\ \left\|\breve{u}^k-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}\le q\left\|\breve{u}^{k-1}-\breve{u}\right\|_{\breve{V}},\ \left\|\breve{u}^k-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}\le q^k\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}.$$

Теперь можно рассмотреть получение второго неравенства.

$$\mathrm{M}(\breve{\psi}^k,\breve{\psi}^k)=\mathrm{M}(\breve{T}_k\breve{\psi}^{k-1},\breve{T}_k\breve{\psi}^{k-1})\le\sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}}\Big(\mathrm{M}(\breve{T}_k\breve{\psi},\breve{T}_k\breve{\psi})/\mathrm{M}(\breve{\psi},\breve{\psi})\Big)\mathrm{M}(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1})=$$

$$=\left(\sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}}\left(\frac{\mathrm{M}(\breve{T}_k\breve{\psi},\breve{\psi})}{(\mathrm{M}\breve{\psi},\breve{\psi})}\right)\right)^2\mathrm{M}(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1})=\left(\sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}}\left(1-\tau_k\frac{\Lambda(\breve{\psi},\breve{\psi})}{\mathrm{M}(\breve{\psi},\breve{\psi})}\right)\right)^2\mathrm{M}(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1})\le$$

$$\le max\left\{\left(1-\tau_k\breve{\gamma}_1\right)^2,\ \left(1-\tau_k\breve{\gamma}_2\right)^2\right\}\mathrm{M}(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1})$$

отсюда

$$\mathrm{M}(\breve{\psi}^k,\breve{\psi}^k)\le q^2\mathrm{M}(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1}),\ \left\|\breve{u}^k-\breve{u}\right\|_{\mathrm{M}}\le q\left\|\breve{u}^{k-1}-\breve{u}\right\|_{\mathrm{M}},\ \left\|\breve{u}^k-\breve{u}\right\|_{\mathrm{M}}\le q^k\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\mathrm{M}}.$$

На каждом шаге итерационного процесса из (2.2.1) возникает задача вида

$$\breve{u}\in\breve{V}:\mathrm{M}(\breve{u},\breve{v})=\breve{g}(\breve{v})\ \forall\breve{v}\in\breve{V},\ \ \breve{g}\in\breve{V}', \qquad (2.2.2)$$

Заметим, основываясь на утверждении 2.2.2, что

$$\exists c_1,c_2\in\left(0;+\infty\right):\ c_1\left\|\breve{v}\right\|^2_{W_2^2(\Omega)}\le\mathrm{M}(\breve{v},\breve{v})\le c_2\left\|\breve{v}\right\|^2_{W_2^2(\Omega)}\ \ \forall\breve{v}\in\breve{V},$$

а, следовательно, решение задачи из (2.2.2) существует и единственно. Если $\breve{f}$ – заданная, $\breve{u}$ – искомая достаточно гладкие функции, как и в задаче из (2.1.1) $\breve{g}\left(\breve{v}\right)=(\breve{f},\breve{v})$, то из задачи в (2.2.2) получается неоднородное бигармоническое уравнение при смешанных и однородных краевых условиях

$$\Delta^2\breve{u}=\breve{f},\ \breve{u}\big|_{\Gamma_1}=\Delta\breve{u}\big|_{\Gamma_1}=0,\ \frac{\partial\breve{u}}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2}=\frac{\partial\Delta\breve{u}}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2}=0. \qquad (2.2.3)$$

Видно, что задача из (2.2.3) имеет факторизованный оператор и может быть записана, как система эллиптических уравнений второго порядка при смешанных и однородных краевых условиях

$$-\Delta\breve{q}=\breve{f},\ \breve{q}\big|_{\Gamma_1}=0,\ \frac{\partial\breve{q}}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2}=0,$$

$$-\Delta\breve{u}=\breve{q},\ \breve{u}\big|_{\Gamma_1}=0,\ \frac{\partial\breve{u}}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2}=0. \qquad (2.2.4)$$

Замечание 2.2.1. *Собственные функции для краевой задачи из (2.1.1), когда* $a_1=a_2$, *могут записываться в следующем виде*

$$\breve{\varphi}_{i,j}(x,y)=\frac{2}{\sqrt{b_1b_2(\lambda_{i,j}^2+a_2)}}\cos\frac{(2i-1)\pi x}{2b_1}cos\frac{(2j-1)\pi y}{2b_2},\ i,j\in\mathbb{N}.$$

Устанавливается непосредственной проверкой первое и известно, см., например, [6, 17, 70] второе

$$\textit{1. } \left\|\breve{\varphi}_{i,j}\right\|_V=1,\ \Lambda(\breve{\varphi}_{i,j},\breve{\varphi}_{k,l})=0,\ (i,j)\neq(k,l),\ k,l\in\mathbb{N},$$

$$\textit{2. } \forall\breve{\psi}^k\in\breve{V}\ \exists\breve{c}_{i,j}^k\in\mathbb{R}:\breve{\psi}^k=\sum_{i,j=1}^{\infty}\breve{c}_{i,j}^k\breve{\varphi}_{i,j},\ k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

При равенстве $a_1=a_2$ в итерационном процессе из (2.2.1) будет $\lambda_{i,j}^2\breve{c}_{i,j}^k=\lambda_{i,j}^2\breve{c}_{i,j}^{k-1}-\tau(\lambda_{i,j}^2+a_2)\breve{c}_{i,j}^{k-1}$, $c_{i,j}^k=\rho_{i,j}\breve{c}_{i,j}^{k-1}$, где $\rho_{i,j}=1-\tau(\lambda_{i,j}^2+a_2)\lambda_{i,j}^{-2}$.

Таким образом $\breve{\psi}^k=\sum_{i,j=1}^{\infty}\rho_{i,j}^k\breve{c}_{i,j}^0\breve{\varphi}_{i,j}$, т.к. $\breve{c}_{i,j}^k=\rho_{i,j}^k\breve{c}_{i,j}^0$. Учитывая, что $\max_{i,j\in\mathbb{N}}\left|\rho_{i,j}\right|=\max_{i,j\in\mathbb{N}}\left|1-\tau(\lambda_{i,j}^2+a_2)\lambda_{i,j}^{-2}\right|\leq a_2\left(2\lambda_{1,1}^2+a_2\right)^{-2}$ имеет место следующая оценка

$$\left\|\breve{u}^k-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}\Big/\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{\infty}\rho_{i,j}^{2k}(\breve{c}_{i,j}^0)^2}\Big/\sqrt{\sum_{i,j=1}^{\infty}(\breve{c}_{i,j}^0)^2}\leq\left(\max_{i,j\in\mathbb{N}}\left|\rho_{i,j}\right|\right)^k\leq\left(a_2\big/(2\lambda_{1,1}^2+a_2)\right)^k.$$

2.3. Математическая модель перемещений прямоугольной пластины в дискретном виде

Производится дискретизация задачи из (2.1.1) по методу конечных элементов на параболических восполнениях [59], рассматривается вариационно-разностная модель перемещений прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях:

$$\tilde{u}\in\tilde{V}\subset\breve{V}:\Lambda(\tilde{u},\tilde{v})=\breve{g}(\tilde{v})\ \forall\tilde{v}\in\tilde{V}\subset\breve{V}. \tag{2.3.1}$$

Рассматриваются *СЛАУ* – система линейных алгебраических уравнений соответствующая задаче из (2.3.1), численная модель перемещений прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях:

$$\overline{u} \in \mathbb{R}^N : \Lambda\overline{u} = \overline{g}\,,\ \overline{g} \in \mathbb{R}^N, \qquad (2.3.2)$$

где $\overline{v} \in \mathbb{R}^N$: $\overline{v} = (v_1,...,v_N)'$, $N = m \cdot n$, m, $n \in \mathbb{N}$, а $v_{n(i-1)+j} = v_{i,j}$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$, и $v_{i,j}$ являются значениями функций дискретных аргументов соответствующих узлам сетки $(x_i, y_j) = \big((i-0,5)h_1,(j-0,5)h_2\big)$, шаги сетки $h_1 = b_1/(m+0,5)$, $h_2 = b_2/(n+0,5)$, состоящей из указанных выше узлов, а матрицы Λ размерности $N \times N$, определяются следующим образом:

$$\left\langle \Lambda\overline{u}, \overline{v} \right\rangle = \Lambda(\tilde{u},\tilde{v})\ \forall \tilde{u},\tilde{v} \in \tilde{V} \subset \breve{V}\,,$$

здесь $\left\langle \cdot,\cdot \right\rangle$ – скалярное произведение векторов такого вида $\left\langle \overline{u}, \overline{v} \right\rangle = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k v_k h_1 h_2$ $\forall \overline{u},\overline{v} \in \mathbb{R}^N$, а подпространство $\tilde{V} \subset \breve{V}$ определяется так, что

$$\tilde{V} = \left\{ \tilde{v} : \tilde{v} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{i,j}\Phi^{i,j}(x,y), v_{i,j} \in \mathbb{R}, \right\},$$

где базисные функции

$$\Phi^{i,j}(x,y) = \Psi_{1,i}(x)\Psi_{2,j}(y)\,,$$

$$\Psi_{1,i}(x) = \mathrm{E}(1/i)\Psi(x/h_1 - i + 3) + \Psi(x/h_1 - i + 2) - \mathrm{E}(i/m)\Psi(x/h_1 - i)\,,$$

$$\Psi_{2,j}(y) = \mathrm{E}(1/j)\Psi(y/h_2 - j + 3) + \Psi(y/h_2 - i + 2) - \mathrm{E}(j/n)\Psi(y/h_2 - j)\,,\ i = 1,...,m\,,$$

$$j = 1,...,n\,,$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} 0,5z^2, & z \in [0;1], \\ -z^2 + 3z - 1,5, & z \in [1;2], \\ 0,5z^2 - 3z + 4,5, & z \in [2;3], \end{cases}$$

$\Psi(z) = 0$, $z \notin (0;3)$, $\mathrm{E}(\cdot)$ – функция целая часть числа, компоненты вектора $\overline{g}$ определяются следующим образом

$$g_{n(i-1)+j} = g_{i,j} = h_1^{-1}h_2^{-1}\breve{g}(\Phi^{i,j}(x,y))\,,\ i = 1,...,m\,,\ j = 1,...,n\,,$$

т.е. $\left\langle \overline{g}, \overline{v} \right\rangle = \breve{g}(\tilde{v})$ $\forall \tilde{v} \in \tilde{V}$,

Отметим, что решение задачи из (2.3.2), как и из (2.3.1) существует, единственно и известны оценки типа [59]:

$$1.\ \left\|\breve{u}-\tilde{u}\right\|_{W_2^{m_1}(\Omega)} \le c\left|\bar{h}\right|^{m_2-m_1}\left\|\breve{u}\right\|_{W_2^{m_2}(\Omega)},$$

$$2.\ \lim_{\left|\bar{h}\right|\to 0}\left\|\breve{u}-\tilde{u}\right\|_{W_2^{2}(\Omega)} = 0,\ \left|\bar{h}\right| = \max\left\{h_1, h_2\right\}.$$

2.4. Численный метод итерационных факторизаций для прямоугольной пластины

Определим матрицы ∇_x, ∇_y размерности $N\times N$

$$\left\langle \nabla_x \bar{u}, \bar{v}\right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{i+1,j}-u_{i,j})h_1^{-1})v_{i,j}h_1h_2,\ u_{m+1,j}=v_{m+1,j}=0,\ \ j=1,...,n,$$

$$\left\langle \nabla_y \bar{u}, \bar{v}\right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{i,j+1}-u_{i,j})h_2^{-1})v_{i,j}h_1h_2,\ u_{i,n+1}=v_{i,n+1}=0,\ \ i=1,...,m.$$

Дополнительно введём матрицы ∇_1 и ∇_2 размерности $m\times m$ и $n\times n$ соответственно

$$(\nabla_1\bar{u},\bar{v}) = \sum_{i=1}^{m}(-(u_{i+1}-u_i)h_1^{-1})v_i,\ u_{m+1}=v_{m+1}=0,$$

$$(\nabla_2\bar{u},\bar{v}) = \sum_{j=1}^{n}(-(u_{j+1}-u_j)h_2^{-1})v_j,\ u_{n+1}=v_{n+1}=0.$$

Они связанны с предыдущими матрицами следующим образом

$$\nabla_x = \nabla_1\otimes E_n,\ \nabla_y = E_m\otimes\nabla_2.$$

Здесь E_m и E_n единичные матрицы размерности $m\times m$ и $n\times n$ соответственно, а $(\cdot,\cdot)$ обычное скалярное произведение векторов. Определим матрицу

$$\left\langle A\bar{u},\bar{v}\right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}((u_{i+1,j}-u_{i,j})(v_{i+1,j}-v_{i,j})h_1^{-2}+(u_{i,j+1}-u_{i,j})(v_{i,j+1}-v_{i,j})h_2^{-2})h_1h_2,$$

$$u_{i,n+1}=v_{i,n+1}=0,\ i=1,...,m,\ u_{m+1,j}=v_{m+1,j}=0,\ j=1,...,n.$$

Заметим, что

$$A = \nabla_x{}'\nabla_x + \nabla_y{}'\nabla_y = (\nabla_1\otimes E_n)'(\nabla_1\otimes E_n) + (E_m\otimes\nabla_2)'(E_m\otimes\nabla_2) =$$
$$= (\nabla_1{}'\nabla_1)\otimes E_n + E_m\otimes(\nabla_2{}'\nabla_2).$$

Дополнительно введём матрицы $\Delta_1 = \nabla_1{}'\nabla_1$ и $\Delta_2 = \nabla_2{}'\nabla_2$ размерности $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, тогда $A = \Delta_1 \otimes E_n + E_m \otimes \Delta_2$. Определим матрицу $M = A^2$. Отметим, что

$$M = (\Delta_1 \otimes E_n + E_m \otimes \Delta_2)^2 = \Delta_1^2 \otimes E_n + 2\Delta_1 \otimes \Delta_2 + E_m \otimes \Delta_2^2.$$

Матрица Λ представляется в виде $\Lambda = \Lambda^{2,0} + 2\Lambda^{1,1} + \Lambda^{0,2} + a\Lambda^{0,0}$, где матрицы $\Lambda^{p,q}$:

$$\left\langle \Lambda^{p,q}\overline{u}, \overline{v} \right\rangle = \int\limits_{\Omega} \tilde{u}_{x^p x^q} \tilde{v}_{x^p x^q} d\Omega \;\; \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}, \; (p,q) \in \left\{(2,0), (1,1), (0,2), (0,0)\right\}.$$

Дополнительно введём матрицы $\Lambda^{x,p}$, $\Lambda^{y,q}$, $p,q = 0,1,2$ размерности $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, а элементы, которых следующие

$$\Lambda^{x,p}_{k,i} = h_1^{-1} \int\limits_0^{b_1} \Psi^{(p)}_{1,k}(x)\Psi^{(p)}_{1,i}(x)dx, \; k,i = 1,...,m, \; \Lambda^{y,q}_{l,j} = h_2^{-1} \int\limits_0^{b_2} \Psi^{(q)}_{2,l}(y)\Psi^{(q)}_{2,j}(y)dy, \; l,j = 1,...,n.$$

Утверждение 2.4.1. *Имеют место формулы* $\Lambda^{p,q} = \Lambda^{x,p} \otimes \Lambda^{y,q}$, $p,q = 0,1,2$.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\Lambda^{p,q}_{n(k-1)+l, n(i-1)+j} = h_1^{-1} h_2^{-1} \int\limits_{\Omega} \Phi^{k,l}_{x^p, y^q}(x,y) \Phi^{i,j}_{x^p, y^q}(x,y) d\Omega =$$

$$= h_1^{-1} \int\limits_0^{b_1} \Psi^{(p)}_{1,k}(x)\Psi^{(p)}_{1,i}(x)dx h_2^{-1} \int\limits_0^{b_2} \Psi^{(q)}_{2,l}(y)\Psi^{(q)}_{2,j}(y)dy = \Lambda^{x,p}_{k,i}\Lambda^{y,q}_{l,j}.$$

Замечание 2.4.1. *Имеет место*

$$\Lambda = \Lambda^{x,2} \otimes \Lambda^{y,0} + 2\Lambda^{x,1} \otimes \Lambda^{y,1} + \Lambda^{x,0} \otimes \Lambda^{y,2} + a\Lambda^{x,0} \otimes \Lambda^{y,0} \;\; и \;\; \Lambda^{x,2} = \Delta_1^2, \; \Lambda^{y,2} = \Delta_2^2,$$

$$т.е. \;\; \Lambda = \Delta_1^2 \otimes \Lambda^{y,0} + 2\Lambda^{x,1} \otimes \Lambda^{y,1} + \Lambda^{x,0} \otimes \Delta_2^2 + a\Lambda^{x,0} \otimes \Lambda^{y,0}.$$

Замечание 2.4.2. *Для любых, здесь* $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^m$ *имеет место равенство*

$$(\Lambda^{x,0}\overline{u}, \overline{v}) = \left(\Lambda^{x,0}_1(u_1,u_2)', (v_1,v_2)'\right) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{m-1} \left(\Lambda^{x,0}_i(u_{i-1},u_i,u_{i+1})', (v_{i-1},v_i,v_{i+1})'\right) + \left(\Lambda^{x,0}_m(u_{m-1},u_m)', (v_{m-1},v_m)'\right),$$

где, используемые выше матрицы следующие

$$\Lambda^{x,0}_1 = \frac{1}{120}\begin{bmatrix} 86 & 14 \\ 14 & 6 \end{bmatrix}, \; \Lambda^{x,0}_m = \frac{1}{120}\begin{bmatrix} 6 & 13 \\ 13 & 59 \end{bmatrix}, \; \Lambda^{x,0}_i = \frac{1}{120}\begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix}, i = 2,...,m-1.$$

Утверждение 2.4.2. *Видно, что* $\lambda_1 = 1/16$, $\lambda_2 = 1/6$, $\lambda_3 = 1$, *если*

$$\lambda : \Lambda_i^{x,0}(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})' = \lambda E_i^x (v_{i-1}, v_i, v_{i+1})',\ (v_{i-1}, v_i, v_{i+1})' \neq 0,\ i = 2, ..., m-1,$$

E_i^x *диагональные матрицы, где на диагонали первый и последний элементы* $1/6$, *а средний* $2/3$.

Утверждение 2.4.3. *Для спектральной задачи* $\lambda : \Lambda_1^{x,0}(v_1, v_2)' = \lambda E_i^x (v_1, v_2)'$, $(v_1, v_2)' \neq 0$ *собственные числа* $\lambda_1 = 4/25$, $\lambda_2 = 1$, *здесь* E_1^x *диагональная матрица, у которой на диагонали первый элемент* $5/6$, *а второй элемент, он же и последний* $1/6$.

Утверждение 2.4.4. *Для задачи* $\lambda : \Lambda_m^{x,0}(v_{m-1}, v_m)' = \lambda E_m (v_{m-1}, v_m)'$, $(v_{m-1}, v_m)' \neq 0$ *собственные числа* $0 < \lambda_{1,2} = (89 \pm 3\sqrt{469})/200 < 1$, *здесь* E_1^x *диагональная матрица, у которой на диагонали первый элемент* $1/6$, *а второй элемент, он же и последний* $5/6$.

Введём вспомогательные матрицы ∇_1^+, Δ_1^+ размерности $m \times m$:

$$\Delta_1^+ = (\nabla_1^+)' \nabla_1^+ > 0,$$

$$(\nabla_1^+ \overline{u}, \overline{v}) = \sum_{i=1}^{m} (u_{i+1} + u_i) v_i,\ (\Delta_1^+ \overline{u}, \overline{v}) = \sum_{i=1}^{m} (u_{i+1} + u_i)(v_{i+1} + v_i),\ u_{m+1} = v_{m+1} = 0$$

и матрицу δ^1 размерности $m \times m$ с элементами

$$\delta_{i,j}^1 = \mathrm{E}(2/(i+j)),\ i, j = 1, ..., m.$$

Утверждение 2.4.5. *Имеют место неравенства*

$$2/15\, E_m \leq \Lambda^{x,0} \leq E_m \left(2/15\, E_n \leq \Lambda^{x,0} \leq E_n \right).$$

Доказательство. Правое неравенство следует из замечания 2.4.2 и утверждений 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, т.к.

$$(E_m \overline{u}, \overline{v}) = \left(E_1^x (u_1, u_2)', (v_1, v_2)' \right) +$$
$$+ \sum_{i=2}^{m-1} \left(E_i^x (u_{i-1}, u_i, u_{i+1})', (v_{i-1}, v_i, v_{i+1})' \right) + \left(E_m^x (u_{m-1}, u_m)', (v_{m-1}, v_m)' \right).$$

Используя известный приём [17], имеем, что

$$120\Lambda^{x,0} \geq 120\Lambda^{x,0} - (\Delta_1^+ + 2\delta^1)^2 - 22(\Delta_1^+ + 2\delta^1) = 16E_m .$$

Замечание 2.4.3. *Для любых, здесь* $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^m$ *имеет место равенство*

$$(\Lambda^{x,1}\overline{u}, \overline{v}) = \left(\Lambda_1^{x,1}(u_1, u_2)', (v_1, v_2)'\right) +$$
$$+\sum_{i=2}^{m-1}\left(\Lambda_i^{x,1}(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})', (v_{i-1}, v_i, v_{i+1})'\right) + \left(\Lambda_m^{x,1}(u_{m-1}, u_m)', (v_{m-1}, v_m)'\right),$$

где, используемые выше матрицы следующие

$$\Lambda_1^{x,1} = \frac{h_1^{-2}}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ \Lambda_m^{x,1} = \frac{h_1^{-2}}{6}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix},\ \Lambda_i^{x,1} = \frac{h_1^{-2}}{6}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, i = 2,...,m-1.$$

Утверждение 2.4.6. *Имеют место неравенства*

$$\frac{1}{3}\Delta_i^x \leq \Lambda_i^{x,1} \leq \Delta_i^x, \text{ где } \Delta_i^x = \frac{h_1^{-2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, i = 2,...,m-1.$$

Доказательство. Имеем $6h_1^2(\Lambda_i^{x,1} - 1/3\Delta_i^x) \geq 0$, т.к.

$$(v_{i-1}^2 - 2v_{i-1}v_{i+1} + v_{i+1}^2) = (v_{i-1} - v_{i+1})^2 \geq 0 .$$

Видно, что $6h_1^2(\Delta_i^x - \Lambda_i^{x,1}) \geq 0$, т.к.

$$v_{i-1}^2 - 4v_{i-1}v_i + 4v_i^2 - 4v_iv_{i+1} + 2v_{i-1}v_{i+1} + v_{i+1}^2 = (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1})^2 \geq 0 .$$

Замечание 2.4.4. *Имеет место равенство* $\frac{2}{3}\Delta_1^x = \Lambda_1^{x,1}$, *где* $\Delta_1^x = \frac{h_1^{-2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Утверждение 2.4.7. *Имеют место неравенства*

$$\frac{1}{2}\Delta_m^x \leq \Lambda_m^{x,1} \leq \Delta_m^x, \text{ где } \Delta_m^x = \frac{h_1^{-2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Имеем $12h_1^2(\Lambda_i^{x,1} - 1/2\Delta_i^x) \geq 0$, т.к.

$$(v_{m-1}^2 - 2v_{m-1}v_m + v_m^2) = (v_{m-1} - v_m)^2 \geq 0 .$$

Видно, что $6h_1^2(\Delta_m^x - \Lambda_m^{x,1}) \geq 0$, т.к. $(v_{m-1}^2 - 4v_{m-1}v_m + 4v_m^2) = (v_{m-1} - 2v_m)^2 \geq 0$.

Следствие 2.4.1. *Имеют место неравенства*

$$3^{-1}\Delta_1 \le \Lambda^{x,1} \le \Delta_1 \,\left(3^{-1}\Delta_2 \le \Lambda^{y,1} \le \Delta_2\right).$$

Доказательство. Следует из замечаний 2.4.3, 2.4.4 и утверждений 2.4.6, 2.4.7, т.к.

$$(\Delta_1\overline{u},\overline{v}) = \left(\Delta_1^x(u_1,u_2)',(v_1,v_2)'\right) +$$

$$+\sum_{i=2}^{m-1}\left(\Delta_i^x(u_{i-1},u_i,u_{i+1})',(v_{i-1},v_i,v_{i+1})'\right) + \left(\Delta_m^x(u_{m-1},u_m)',(v_{m-1},v_m)'\right).$$

Утверждение 2.4.8. *Имеют место следующие неравенства*

$$1.\ 9^{-1}\Delta_1 \otimes \Delta_2 \le \Lambda^{x,1} \otimes \Lambda^{x,1} \le \Delta_1 \otimes \Delta_2,$$

$$2.\ 2/15\Delta_1^2 \otimes E_n \le \Delta_1^2 \otimes \Lambda^{y,0} \le \Delta_1^2 \otimes E_n,$$

$$3.\ 2/15E_m \otimes \Delta_2^2 \le \Lambda^{x,0} \otimes \Delta_2^2 \le E_m \otimes \Delta_2^2.$$

Доказательство. Если $\mu \in \mathbb{R}$: $\Lambda^{x,1}\overline{v} = \mu\Delta_1\overline{v}$, здесь $\overline{v} \in \mathbb{R}^m, \overline{v} \ne \overline{0}$ `и $\eta \in \mathbb{R}$: $\Lambda^{y,1}\overline{w} = \eta\Delta_2\overline{w}$, здесь $\overline{w} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{w} \ne \overline{0}$, то, учитывая следствие 1, $\mu,\eta \in \left[3^{-1};1\right]$. Если $\lambda \in \mathbb{R}$: $\Lambda^{x,1} \otimes \Lambda^{y,1}\overline{u} = \lambda\Delta_1 \otimes \Delta_2\overline{u}$, $\overline{u} \in \mathbb{R}^N, \overline{u} \ne \overline{0}$, то, см. [6, 37] $\overline{u} = \overline{v} \otimes \overline{w}$ и $\lambda = \mu\eta \in \left[9^{-1};1\right]$, следовательно, имеет место 1., т.к. все рассматриваемые матрицы симметричные и положительно определенные. Аналогично доказываются остальные неравенства.

Следствие 2.4.2. *Имеют место следующие неравенства* $\widehat{k}_1A^2 \le \Lambda \le \widehat{k}_2A^2$, *если*

$$\widehat{k}_1 = 9^{-1}\breve{\gamma}_1 = 9^{-1},\ \widehat{k}_2 = \breve{\gamma}_2 = (\lambda_{1,1}^2 + a_2)/\lambda_{1,1}^2\ (a_1 \le a_2).$$

Доказательство. Из утверждений 2.2.2, 2.4.8 и замечания 2.4.1 получаются требуемые неравенства

$$\widehat{k}_1\left\langle A^2\overline{v},\overline{v}\right\rangle = \widehat{k}_1\left\langle M\overline{v},\overline{v}\right\rangle \le \left\langle \Lambda\overline{v},\overline{v}\right\rangle = \Lambda(\tilde{v},\tilde{v}) \le \widehat{k}_2\mathrm{M}(\tilde{v},\tilde{v}) = \widehat{k}_2\left\langle M\overline{v},\overline{v}\right\rangle = \widehat{k}_2\left\langle A^2\overline{v},\overline{v}\right\rangle.$$

Введём нормы $\|\overline{v}\|_{A^2} = \sqrt{\left\langle A^2\overline{v},\overline{v}\right\rangle}$, $\|\overline{v}\|_{\Lambda} = \sqrt{\left\langle \Lambda\overline{v},\overline{v}\right\rangle}$, $\forall\overline{v} \in \mathbb{R}^N$.

Предлагается итерационный процесс, численный метод приближённого вычисления перемещений прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях:

$$\overline{u}^k \in \mathbb{R}^N:\ A^2(\overline{u}^k - \overline{u}^{k-1}) = -\tau_k(\Lambda\overline{u}^{k-1} - \overline{g}),$$

$$\tau_k = \tau = 2\Big/\left(\widehat{k}_1 + \widehat{k}_2\right) > 0\,,\ k \in \mathbb{N}\,,\ \forall \overline{u}^0 \in \mathbb{R}^N\,. \qquad (2.4.1)$$

Теорема 2.4.1. *Для итерационного процесса из (2.4.1) имеют место оценки:*

$$1.\ \left\|\overline{u}^k - \overline{u}\right\|_\Lambda \le \varepsilon \left\|\overline{u}^0 - \overline{u}\right\|_\Lambda,$$

$$2.\ \left\|\overline{u}^k - \overline{u}\right\|_{A^2} \le \varepsilon \left\|\overline{u}^0 - \overline{u}\right\|_{A^2},$$

где относительная ошибка сходимости $\overline{u}^k$ *к решению* $\overline{u}$ *следующая*

$$\varepsilon \le q^k = \left((\widehat{k}_2 - \widehat{k}_1)\big/(\widehat{k}_2 + \widehat{k}_1)\right)^k = \left((8\lambda_{1,1}^2 + 9a_2)\big/(10\lambda_{1,1}^2 + 9a_2)\right)^k,\ k \in \mathbb{N}\ (a_1 \le a_2).$$

Доказательство. Пусть $\overline{u}^k = \overline{u} + \overline{\psi}^k$, $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, тогда из итерационного процесса

$A^2(\overline{\psi}^k - \overline{\psi}^{k-1}) = -\tau_k \Lambda \overline{\psi}^{k-1}$, $\overline{\psi}^k - \overline{\psi}^{k-1} = -\tau_k A^{-2} \Lambda \overline{\psi}^{k-1}$, $\overline{\psi}^k = (E_N - \tau_k A^{-2}\Lambda)\overline{\psi}^{k-1}$, где E_N – единичная матрица размерности $N \times N$.

Пусть $T_k = E_N - \tau_k A^{-2}\Lambda$, тогда $\overline{\psi}^k = T_k \overline{\psi}^{k-1}$, где $T_k = T_k' > 0$ и можно доказать первое неравенство.

$$\left\langle \Lambda\overline{\psi}^k, \overline{\psi}^k \right\rangle = \left\langle \Lambda T_k \overline{\psi}^{k-1}, T_k \overline{\psi}^{k-1} \right\rangle \le \sup_{\overline{\psi} \in \mathbb{R}^N} \left(\left\langle \Lambda T_k \overline{\psi}, T_k \overline{\psi} \right\rangle \big/ \left\langle \Lambda \overline{\psi}, \overline{\psi} \right\rangle\right) \left\langle \Lambda \overline{\psi}^{k-1}, \overline{\psi}^{k-1} \right\rangle =$$

$$= \sup_{\overline{\psi} \in \mathbb{R}^N} \left(\frac{\left\langle \Lambda T_k \overline{\psi}, \overline{\psi} \right\rangle}{\left\langle \Lambda \overline{\psi}, \overline{\psi} \right\rangle} \right)^2 \left\langle \Lambda \overline{\psi}^{k-1}, \overline{\psi}^{k-1} \right\rangle = \sup_{\overline{\psi} \in \mathbb{R}^N} \left(1 - \tau_k \frac{\left\langle \Lambda A^{-2} \Lambda \overline{\psi}, \overline{\psi} \right\rangle}{\left\langle \Lambda \overline{\psi}, \overline{\psi} \right\rangle} \right)^2 \left\langle \Lambda \overline{\psi}^{k-1}, \overline{\psi}^{k-1} \right\rangle =$$

полагаем $\overline{v} = A^{-1}\Lambda^{1/2}\overline{\psi}$

$$= \sup_{\overline{v} \in \mathbb{R}^N} \left(1 - \tau_k \left\langle \Lambda \overline{v}, \overline{v} \right\rangle \big/ \left\langle A^2 \overline{v}, \overline{v} \right\rangle\right)^2 \left\langle \Lambda \overline{\psi}^{k-1}, \overline{\psi}^{k-1} \right\rangle \le$$

$$\le max\left\{ \left(1 - \tau_k \widehat{k}_1\right)^2,\ \left(1 - \tau_k \widehat{k}_2\right)^2 \right\} \left\langle \Lambda \overline{\psi}^{k-1}, \overline{\psi}^{k-1} \right\rangle$$

отсюда

$$\left\langle \Lambda\overline{\psi}^k, \overline{\psi}^k \right\rangle \le q^2 \left\langle \Lambda \overline{\psi}^{k-1}, \overline{\psi}^{k-1} \right\rangle,\ \left\|\overline{u}^k - \overline{u}\right\|_\Lambda \le q \left\|\overline{u}^{k-1} - \overline{u}\right\|_\Lambda,\ \left\|\overline{u}^k - \overline{u}\right\|_\Lambda \le q^k \left\|\overline{u}^0 - \overline{u}\right\|_\Lambda.$$

Далее можно привести вывод второго неравенства.

$$\left\langle A^2\overline{\psi}^k, \overline{\psi}^k \right\rangle = \left\langle A^2 T_k \overline{\psi}^{k-1}, T_k \overline{\psi}^{k-1} \right\rangle \le \sup_{\overline{\psi} \in \mathbb{R}^N} \left(\left\langle A^2 T_k \overline{\psi}, T_k \overline{\psi} \right\rangle \big/ \left\langle A^2 \overline{\psi}, \overline{\psi} \right\rangle\right) \left\langle A^2 \overline{\psi}^{k-1}, \overline{\psi}^{k-1} \right\rangle =$$

$$= \sup_{\bar{\psi}\in\mathbb{R}^N}\left(\frac{\left\langle A^2T_k\bar{\psi},\bar{\psi}\right\rangle}{\left\langle A^2\bar{\psi},\bar{\psi}\right\rangle}\right)^2\left\langle A^2\bar{\psi}^{k-1},\bar{\psi}^{k-1}\right\rangle = \sup_{\bar{\psi}\in\mathbb{R}^N}\left(1-\tau_k\frac{\left\langle \Lambda\bar{\psi},\bar{\psi}\right\rangle}{\left\langle A^2\bar{\psi},\bar{\psi}\right\rangle}\right)^2\left\langle A^2\bar{\psi}^{k-1},\bar{\psi}^{k-1}\right\rangle \le$$

$$\le max\left\{\left(1-\tau_k\hat{k}_1\right)^2,\ \left(1-\tau_k\hat{k}_2\right)^2\right\}\left\langle A^2\bar{\psi}^{k-1},\bar{\psi}^{k-1}\right\rangle$$

тогда

$$\left\langle A^2\bar{\psi}^k,\bar{\psi}^k\right\rangle \le q^2\left\langle A^2\bar{\psi}^{k-1},\bar{\psi}^{k-1}\right\rangle,\ \left\|\bar{u}^k-\bar{u}\right\|_{A^2}\le q\left\|\bar{u}^{k-1}-\bar{u}\right\|_{A^2},\ \left\|\bar{u}^k-\bar{u}\right\|_{A^2}\le q^k\left\|\bar{u}^0-\bar{u}\right\|_{A^2}.$$

На каждом шаге итерационного процесса из (2.4.1) возникает задача вида:

$$\bar{u}\in\mathbb{R}^N:\ A^2\bar{u}=\bar{g},\ \bar{g}\in\mathbb{R}^N, \tag{2.4.2}$$

для которой возможно расщепление на две однотипные задачи

$$\bar{q}\in\mathbb{R}^N:\ A\bar{q}=\bar{g},\ \bar{g}\in\mathbb{R}^N,$$

$$\bar{u}\in\mathbb{R}^N:\ A\bar{u}=\bar{q},\ \bar{q}\in\mathbb{R}^N, \tag{2.4.3}$$

Для решения задач из (2.4.3) можно применять методы асимптотически оптимальные по количеству арифметических операций предложенные и изучаемые в работе [88]. В этом случае предполагается использование двухступенчатых итерационных процессов [17], где итерационные параметры могут выбираться с помощью наиболее подходящих в каждом случае вариационных методов для достижения необходимой точности в решениях вспомогательных и рассматриваемой задач, при этом не требуется точного знания констант k_1, k_2. При решении рассматриваемой задачи для выбора итерационных параметров можно применить метод минимальных поправок. А при решении задач, возникающих на каждом шаге предложенного итерационного процесса можно применять для выбора итерационных параметров методы скорейшего спуска и минимальных поправок.

Вывод. Учитывая всё ранее изложенное, можно отметить, что для решения рассматриваемой задачи из (2.3.2) с N неизвестными на основании теоремы (2.4.1) предложенным итерационным процессом из (2.4.1) с относительной погрешностью ε, требуется не более чем $O(N\ln^2\varepsilon)$ арифметических операций.

Приведенные выводы остаются в силе, если в задаче из (2.3.2) и в итерационном процессе из (2.4.1) заменить матрицу Λ матрицей $A^2 + aE$.

2.5. Алгоритм для программы вычислений перемещений прямоугольной пластины при итерационных факторизациях

Рассматривается задача из (2.3.2)

$$\overline{u} \in \mathbb{R}^N : \ \Lambda\overline{u} = \overline{g}\,, \ \overline{g} \in \mathbb{R}^N$$

и итерационный процесс из (2.4.1), т.е. итерационный процесс для её решения

$$\overline{u}^k \in \mathbb{R}^N : \ A^2(\overline{u}^k - \overline{u}^{k-1}) = -\tau_k(\Lambda\overline{u}^{k-1} - \overline{g}),$$

$$\tau_k = \tau = 2\Big/\left(\widehat{k}_1 + \widehat{k}_2\right) > 0\,, \ k \in \mathbb{N}\,, \ \forall\overline{u}^0 \in \mathbb{R}^N.$$

Для выбора итерационных параметров на вариационной основе применяется метод минимальных поправок из [67, 70]. Для рассматриваемой задачи и итерационного процесса, тогда предлагается следующий алгоритм вычислений:

1) выбирается нулевое начальное приближение $\forall\overline{u}^0 \in \mathbb{R}^N$,

2) вычисляется невязка $\overline{r}^{k-1} : \overline{r}^{k-1} = \Lambda\overline{u}^{k-1} - \overline{g}, \ k \in \mathbb{N}$,

3) находится поправка $\overline{w}^{k-1} \in \mathbb{R}^N : \ A^2\overline{w}^{k-1} = \overline{r}^{k-1}, \ k \in \mathbb{N}$,

4) вычисляется квадрат нормы ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\|\overline{\psi}^{k-1}\right\|^2_{\Lambda' A^{-2}\Lambda} = \left\langle\overline{r}^{k-1}, \overline{w}^{k-1}\right\rangle, \ k \in \mathbb{N},$$

5) проверяется условие остановки итераций $\mathrm{E}_{k-1}/\mathrm{E}_0 < \mathrm{E}^2, \ \mathrm{E} \in (0;\,1), \ k \in \mathbb{N}$,

6) дополнительно вычисляется вектор $\overline{\eta}^{k-1} : \overline{\eta}^{k-1} = \Lambda\overline{w}^{k-1}, \ k \in \mathbb{N}$,

7) дополнительно находится вектор $\overline{\xi}^{k-1} \in \mathbb{R}^N : \ A^2\overline{\xi}^{k-1} = \overline{\eta}^{k-1}, \ k \in \mathbb{N}$,

8) вычисляется итерационный параметр

$$\tau_k = \frac{\left\langle\Lambda\overline{w}^{k-1}, \overline{w}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle A^{-2}\Lambda\overline{w}^{k-1}, \Lambda\overline{w}^{k-1}\right\rangle} = \frac{\left\langle\overline{\eta}^{k-1}, \overline{w}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle\overline{\xi}^{k-1}, \overline{\eta}^{k-1}\right\rangle}, \ k \in \mathbb{N},$$

9) вычисляется новое приближение $\overline{u}^k = \overline{u}^{k-1} - \tau_k\overline{w}^{k-1}, \ k \in \mathbb{N}$.

Заметим в условии остановки итерационного процесса $E \in (0;\,1)$ – задаваемая относительная погрешность. Можно использовать критерии окончания итерационных процессов из [55].

2.6. Эксперименты по программе вычислений перемещений прямоугольной пластины

Если заменить матрицу Λ матрицей $A^2 + aE$, при $a = 0$ и заданы компоненты правой части системы линейных алгебраических уравнений

$$g_{m(i-1)+j} = f_{i,j} = 6((b_1^2 - ((i-0,5)h_1)^2)(5b_1^2 - ((i-0,5)h_1)^2) +$$
$$+12(b_1^2 - ((i-0,5)h_1)^2)(b_2^2 - ((j-0,5)h_2)^2) + (b_2^2 - ((j-0,5)h_2)^2)(5b_2^2 - ((j-0,5)h_2)^2)),$$
$$i = 1,...,m,\; j = 1,...,n,\; m = n = 2,...,125,\; h_1 = b_1/(m+0,5),\; h_2 = b_2/(n+0,5),\; b_1 = b_2 = 2,5,$$

то, применяя метод итерационных факторизаций при $\alpha = 1$ дважды можно решить получаемую задачу. В обоих случаях одинаково подтверждается асимптотическая независимость количества итераций от числа узлов сетки по направлениям осей $0x(0y)$ и прежнего вида при вычислениях на ЭВМ.

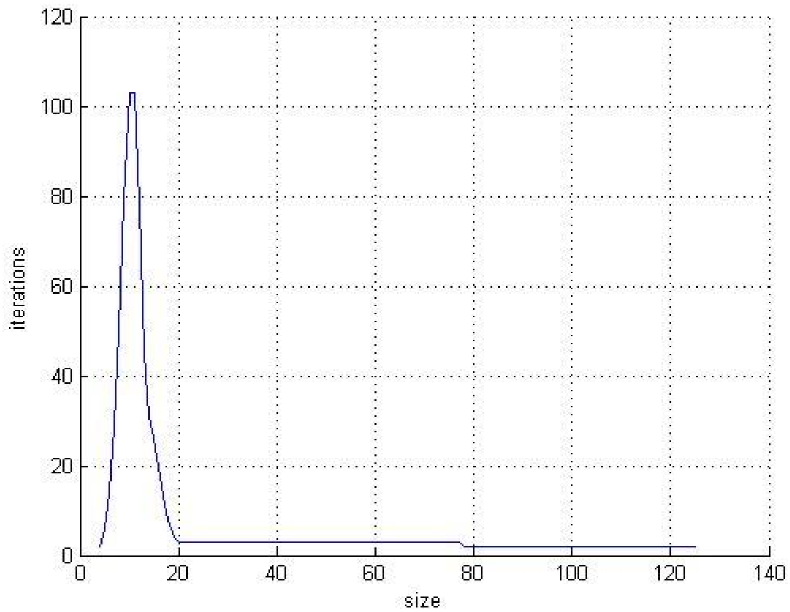

Рис. 2.6.1: График функции k – числа итераций от $m(n)$ – числа узлов сетки по направлениям осей $0x(0y)$ при заданной относительной погрешности вычислений.

ГЛАВА 3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИТЕРАЦИОННЫХ ФАКТОРИЗАЦИЯХ НА ПРОДОЛЖЕНИИ

Глава посвящается математическому моделированию перемещений прямоугольной пластины при наличии упругого основания с применением фиктивного продолжения. Рассматривается эллиптическое дифференциальное уравнение четвёртого порядка в прямоугольнике со сторонами параллельными осям координат, на двух смежных сторонах прямоугольника однородные условия шарнирного опирания, а на двух других сторонах однородные условия симметрии. Для дискретного аналога этого уравнения в виде системы линейных алгебраических уравнений приводится факторизованный переобуславливатель квадратно попеременно треугольного вида. Исходная задача может быть получена в методах типа фиктивных компонент при решении эллиптических дифференциальных уравнений четвёртого порядка в плоских областях достаточно произвольного вида при однородных главных или естественных краевых условиях.

3.1. Математические модели перемещений прямоугольной пластины для применения продолжения

Из линейной теории изгибания пластин на упругом основании, используя, например, [36, 60] энергия деформированной прямоугольной пластины, у которой на двух смежных сторонах однородные условия шарнирного опирания, а на двух других сторонах однородные условия симметрии, может быть записана в виде:

$$\breve{E}(\breve{u}_1)=\frac{1}{2}\breve{D}\int_{\Omega}(\Delta\breve{u}_1)^2\,d\Omega+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\breve{K}\breve{u}_1^{\,2}d\Omega-\int_{\Omega}\breve{P}\breve{u}_1d\Omega\,,$$

где $\breve{P}-$ давление, $\breve{K}-$ коэффициент жёсткости упругого основания ($\breve{K}=0$ в случае отсутствия упругого основания), $\breve{D}=\breve{E}\breve{h}^3\big/(12(1-\sigma^2))-$ цилиндрическая жёсткость пластины, $\breve{h}-$ толщина пластины, $\breve{E}-$ модуль Юнга (модуль растяжения), $\sigma\in(0;1)-$ коэффициент Пуассона, $\Omega=(0;b_1)\times(0;b_2)-$ плоская область, $\breve{u}_1-$ искомое смещение. Если приравнять к нулю вариацию энергии

$$\delta\breve{E}(\breve{u}_1)=\breve{D}\int_{\Omega}\Delta\breve{u}_1\Delta\breve{v}_1d\Omega+\int_{\Omega}K\breve{u}_1\breve{v}_1d\Omega-\int_{\Omega}\breve{P}\breve{v}_1d\Omega=0\,,$$

где $\breve{v}_1=\delta\breve{u}_1$, то, при $a=\breve{K}\big/\breve{D}$, $\breve{f}_1=\breve{P}\big/\breve{D}$ получается, что

$$\int_{\Omega}(\Delta\breve{u}_1\Delta\breve{v}_1+a\breve{u}_1\breve{v}_1)d\Omega=\int_{\Omega}\breve{f}_1\breve{v}_1d\Omega\,.$$

Используем вторую формулу Грина

$$\int_{\Omega}\breve{w}_1\Delta\breve{v}_1d\Omega=\int_{\Omega}\Delta\breve{w}_1\breve{v}_1d\Omega+\int_{s}(\breve{w}_1\frac{\partial\breve{v}_1}{\partial\vec{n}}-\breve{v}_1\frac{\partial\breve{w}_1}{\partial\vec{n}})ds\,.$$

После интегрирования по частям устанавливается

$$\int_{\Omega}(\Delta^2\breve{u}_1+a\breve{u}_1)\breve{v}_1d\Omega+\int_{s}\Delta\breve{u}_1\frac{\partial\breve{v}_1}{\partial\vec{n}}ds-\int_{s}\frac{\partial\Delta\breve{u}_1}{\partial\vec{n}}\breve{v}_1ds=\int_{\Omega}\breve{f}_1\breve{v}_1d\Omega\,,$$

где

$\partial\Omega=\overline{s}$, $s=\Gamma_1\bigcup\Gamma_2$, $\Gamma_1=\{b_1\}\times(0;b_2)\bigcup(0;b_1)\times\{b_2\}$, $\Gamma_2=\{0\}\times(0;b_2)\bigcup(0;b_1)\times\{0\}$, $\vec{n}-$ внешняя нормаль к $\partial\Omega$,

$$\breve{u}_1\big|_{\Gamma_1}=\Delta\breve{u}_1\big|_{\Gamma_1}=0\,,\ \frac{\partial\breve{u}_1}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2}=\frac{\partial\Delta\breve{u}_1}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2}=0\,.$$

Таким образом, получается задача при однородных смешанных краевых условиях

$$\Delta^2\breve{u}_1+a\breve{u}_1=\breve{f}_1,\ \breve{u}_1\big|_{\Gamma_1}=\Delta\breve{u}_1\big|_{\Gamma_1}=0\,,\ \frac{\partial\breve{u}_1}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2}=\frac{\partial\Delta\breve{u}_1}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2}=0\,.$$

Рассматривается математическая модель перемещений прямоугольной пластины в вариационном виде для применения продолжения. Это вариационная задача, обобщённая математическая модель перемещений прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях

$$\breve{u}_1 \in \breve{Z}_1 : \Lambda(\breve{u}_1, \breve{v}_1) = \breve{g}_1(\breve{v}_1) \ \forall \breve{v}_1 \in \breve{Z}_1, \ \breve{g}_1 \in \breve{Z}_1', \tag{3.1.1}$$

где соболевское пространство функций

$$\breve{Z}_1 = \breve{Z}_1(\Omega) = \left\{ \breve{v}_1 \in W_2^2(\Omega) : \breve{v}_1\big|_{\Gamma_1} = 0, \frac{\partial \breve{v}_1}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = 0 \right\}$$

на области $\Omega = (0; b_1) \times (0; b_2)$, с границей

$\partial\Omega = \overline{s}$, $s = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, $\Gamma_1 = \{b_1\} \times (0; b_2) \bigcup (0; b_1) \times \{b_2\}$, $\Gamma_2 = \{0\} \times (0; b_2) \bigcup (0; b_1) \times \{0\}$, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, билинейная форма

$$\Lambda(\breve{u}_1, \breve{v}_1) = \int_\Omega (\sigma \Delta \breve{u}_1 \Delta \breve{v}_1 + (1-\sigma)(\breve{u}_{1xx} \breve{v}_{1xx} + 2\breve{u}_{1xy} \breve{v}_{1xy} + \breve{u}_{1yy} \breve{v}_{1yy}) + a \breve{u}_1 \breve{v}_1) d\Omega,$$

при этом $a = a_1$ на области Ω_1, $a = a_2$ на $\Omega \setminus \Omega_1$, области Ω_1, Ω_2: $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \bigcup \overline{\Omega}_2$, $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \varnothing$, $\partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_2 \neq \varnothing$, заданы константы $\sigma \in (0;1)$, $b_1, b_2 \in (0; +\infty)$, $a_1, a_2 \in [0; +\infty)$.

Можно отметить, что

$$\exists c_1, c_2 \in (0; +\infty): \ c_1 \|\breve{v}_1\|^2_{W_2^2(\Omega)} \le \Lambda(\breve{v}_1, \breve{v}_1) \le c_2 \|\breve{v}_1\|^2_{W_2^2(\Omega)} \ \ \forall \breve{v}_1 \in \breve{Z}_1,$$

а, следовательно, решение задачи (3.1.1) существует и единственно. Если $\breve{u}_1$ – искомая, а $\breve{f}_1$ – заданная достаточно гладкие функции и

$$\breve{g}_1(\breve{v}_1) = (\breve{f}_1, \breve{v}_1), \text{ где } (\breve{f}_1, \breve{v}_1) = \int_\Omega \breve{f}_1 \breve{v}_1 d\Omega,$$

то из задачи (3.1.1), как и ранее получается эллиптическое уравнение четвертого порядка при смешанных и однородных краевых условиях

$$\Delta^2 \breve{u}_1 + a\breve{u}_1 = \breve{f}_1, \ \breve{u}_1\big|_{\Gamma_1} = \Delta \breve{u}_1\big|_{\Gamma_1} = 0, \ \frac{\partial \breve{u}_1}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta \breve{u}_1}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = 0. \tag{3.1.2}$$

3.2. Математическая модель перемещений прямоугольной пластины в дискретном виде для применения продолжения

Производится дискретизация задачи из (3.1.1) по методу конечных элементов на параболических восполнениях, рассматривается вариационно-разностная модель перемещений прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях:

$$\tilde{u}_1 \in \tilde{Z}_1 \subset \breve{Z}_1 : \Lambda(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1) = \breve{g}_1(\tilde{v}_1) \ \forall \tilde{v}_1 \in \tilde{Z}_1 \subset \breve{Z}_1 . \tag{3.2.1}$$

Рассматриваются $СЛАУ$ – система линейных алгебраических уравнений соответствующая задаче из (3.2.1), численная модель перемещений прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях:

$$\overline{u}_1 \in \mathbb{R}^N : \ \Lambda \overline{u}_1 = \overline{g}_1 , \ \overline{g}_1 \in \mathbb{R}^N , \tag{3.2.2}$$

где $\overline{v}_1 \in \mathbb{R}^N$: $\overline{v}_1 = (v_{1,1}, ..., v_{1,N})'$, $N = m \cdot n$, m, $n \in \mathbb{N}$, а $v_{1,n(i-1)+j} = v_{1,i,j}$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$, и $v_{1,i,j}$ являются значениями функций дискретных аргументов соответствующих узлам сетки $(x_i, y_j) = \left((i-0{,}5)h_1, (j-0{,}5)h_2\right)$, шаги сетки $h_1 = b_1/(m+0{,}5)$, $h_2 = b_2/(n+0{,}5)$, состоящей из указанных выше узлов, а матрицы Λ размерности $N \times N$, определяются следующим образом:

$$\left\langle \Lambda \overline{u}_1, \overline{v}_1 \right\rangle = \Lambda(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1) \ \forall \tilde{u}_1, \tilde{v}_1 \in \tilde{Z}_1 \subset \breve{Z}_1 ,$$

здесь $\left\langle \cdot , \cdot \right\rangle$ – скалярное произведение векторов следующего вида

$$\left\langle \overline{u}_1, \overline{v}_1 \right\rangle = (\overline{u}_1, \overline{v}_1) h_1 h_2 = \sum_{k=1}^{N} u_{1,k} v_{1,k} h_1 h_2 \ \ \forall \overline{u}_1, \overline{v}_1 \in \mathbb{R}^N ,$$

а подпространство $\tilde{Z}_1 \subset Z_1$ определяется так, что

$$\tilde{Z}_1 = \left\{ \tilde{v}_1 : \tilde{v}_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_{1,i,j} \Phi^{i,j}(x,y), v_{1,i,j} \in \mathbb{R}, \right\},$$

где базисные функции

$$\Phi^{i,j}(x,y)=\Psi_{1,i}(x)\Psi_{2,j}(y),$$

$$\Psi_{1,i}(x)=\mathrm{E}(1/i)\Psi(x/h_1-i+3)+\Psi(x/h_1-i+2)-\mathrm{E}(i/m)\Psi(x/h_1-i),$$

$$\Psi_{2,j}(y)=\mathrm{E}(1/j)\Psi(y/h_2-j+3)+\Psi(y/h_2-i+2)-\mathrm{E}(j/n)\Psi(y/h_2-j),\ i=1,...,m,$$

$$j=1,...,n,$$

$$\Psi(z)=\begin{cases} 0,5z^2, & z\in[0;1], \\ -z^2+3z-1,5, & z\in[1;2], \\ 0,5z^2-3z+4,5, & z\in[2;3], \end{cases}$$

$\Psi(z)=0,\ z\notin(0;3)$, $\mathrm{E}(\cdot)$ – функция целая часть числа, компоненты вектора $\overline{g}_1$ определяются следующим образом

$$g_{1,n(i-1)+j}=g_{1,i,j}=h_1^{-1}h_2^{-1}g_1(\Phi^{i,j}(x,y)),\ i=1,...,m,\ j=1,...,n,$$

$$\text{т.е. } \langle\overline{g}_1,\overline{v}_1\rangle=\breve{g}_1(\tilde{v}_1)\quad\forall\tilde{v}_1\in\tilde{Z}_1,$$

Отметим, что решение задачи из (3.2.1), как и из (3.2.2) существует, единственно и известны оценки типа [59]:

$$1.\ \|\breve{u}_1-\tilde{u}_1\|_{W_2^{m_1}(\Omega)}\le c\left|\overline{h}\right|^{m_2-m_1}\|\breve{u}_1\|_{W_2^{m_2}(\Omega)},$$

$$2.\ \lim_{|\overline{h}|\to 0}\|\breve{u}_1-\tilde{u}_1\|_{W_2^2(\Omega)}=0,\ \left|\overline{h}\right|=\max\{h_1,h_2\}.$$

3.3. Продолжение в дискретной модели для прямоугольной пластины при построении численного метода

Предлагается фиктивное продолжение дискретной решаемой задачи из (3.2.2), фиктивно продолженная численная модель перемещений прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях:

$$\vec{\overline{u}}\in\mathbb{R}^{2N}:\ \widehat{D}\vec{\overline{u}}=\vec{\overline{g}},\ \vec{\overline{g}}\in\mathbb{R}^{2N},\ \overline{g}_2=\overline{0},\tag{3.3.1}$$

где векторы

$$\vec{\overline{v}}\in\mathbb{R}^{2N}:\ \vec{\overline{v}}=(\overline{v}_1',\overline{v}_2')',$$

блочная, нижнетреугольная матрица $\hat{D}$ размерности $2N\times 2N$ такова, что

$$\widehat{D}_{11}=\Lambda\,,\ \widehat{D}_{12}=0\,,\ \widehat{D}_{21}=\theta_A\,,\ \widehat{D}_{22}=M_\theta\,,$$

т.е.

$$\widehat{D}=\begin{pmatrix}\Lambda & 0\\ \theta_A & M_\theta\end{pmatrix},$$

матрицы

$$\theta_A=A\theta+\theta A\,,\ M_\theta=A^2-\theta^2\,,\ \theta=\nabla_x{}'\nabla_y-\nabla_y{}'\nabla_x\,,\ A=\nabla_x{}'\nabla_x+\nabla_y{}'\nabla_y\,,$$

а матрицы ∇_x,∇_y размерности $N\times N$ определяются следующим образом $(\alpha=1,2)$:

$$\left\langle\nabla_x\overline{u}_\alpha,\overline{v}_\alpha\right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{\alpha,i+1,j}-u_{\alpha,i,j})h_1^{-1}v_{\alpha,i,j})h_1h_2,\ u_{\alpha,m+1,j}=v_{\alpha,m+1,j}=0,\ \ j=1,...,n,$$

$$\left\langle\nabla_y\overline{u}_\alpha,\overline{v}_\alpha\right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{\alpha,i,j+1}-u_{\alpha,i,j})h_2^{-1}v_{\alpha,i,j})h_1h_2,\ u_{\alpha,i,n+1}=v_{\alpha,i,n+1}=0,\ \ i=1,...,m.$$

Введём подпространства векторов:

$$\vec{\overline{Z}}_1=\left\{\vec{\overline{v}}=(\overline{v}_1{}',\overline{v}_2{}')'\in\mathbb{R}^{2N}:\theta_A\overline{v}_1+M_\theta\overline{v}_2=\overline{0}\right\},\ \vec{\overline{Z}}_2=\left\{\vec{\overline{v}}=(\overline{v}_1{}',\overline{v}_2{}')'\in\mathbb{R}^{2N}:\overline{v}_1=\overline{0}\right\}.$$

Утверждение 3.3.1. *Решение задачи из (3.3.1)* $\vec{\overline{u}}=(\overline{u}_1',\overline{u}_2')'\in\vec{\overline{Z}}_1$ *существует, единственно и* $\overline{u}_1$ *– решение задачи из (3.2.2).*

3.4. Численный метод итерационных факторизаций для прямоугольной пластины на продолжении

Определим блочную матрицу $\widehat{C}$ размерности $2N\times 2N$ такую, что

$$\widehat{C}_{11}=\widehat{C}_{22}=M_\theta\,,\ \widehat{C}_{12}=-\theta_A\,,\ \widehat{C}_{21}=\theta_A\,,$$

т.е.

$$\widehat{C}=\begin{pmatrix}M_\theta & -\theta_A\\ \theta_A & M_\theta\end{pmatrix}.$$

Для решения задачи из (3.3.1) предлагается итерационный процесс, численный метод приближённого вычисления перемещений прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях:

$$\vec{\vec{u}}^k \in \mathbb{R}^{2N}: \widehat{C}(\vec{\vec{u}}^k - \vec{\vec{u}}^{k-1}) = -\tau_k(\widehat{D}\vec{\vec{u}}^{k-1} - \vec{\vec{g}}),\ \tau_k > 0,\ k \in \mathbb{N}\ \forall \vec{\vec{u}}^0 \in \bar{\bar{Z}}_1. \quad (3.4.1)$$

Заметим, что в итерационном процессе из (3.4.1) возникают задачи с факторизованным оператором следующего вида

$$\bar{U} \in \mathbb{C}^N:\ (LL^*)^2\bar{U} = \bar{G},\ \bar{G} \in \mathbb{C}^N,$$

при этом возможно расщепление на более простые задачи

$$\bar{H} \in \mathbb{C}^N:\ L\bar{T} = \bar{G},\ \bar{G} \in \mathbb{C}^N,$$

$$\bar{R} \in \mathbb{C}^N:\ L^*\bar{P} = \bar{T},\ \bar{H} \in \mathbb{C}^N,$$

$$\bar{Q} \in \mathbb{C}^N:\ L\bar{Q} = \bar{P},\ \bar{R} \in \mathbb{C}^N,$$

$$\bar{U} \in \mathbb{C}^N:\ L^*\bar{U} = \bar{Q},\ \bar{Q} \in \mathbb{C}^N,$$

где матрицы L и L^*удовлетворяют следующим соотношениям $(\mathrm{i}^2 = -1)$:

$$L = \nabla_x{}' - \mathrm{i}\nabla_y{}',\ L^* = \overline{L}' = \nabla_x + \mathrm{i}\nabla_y,\ LL^* = (\nabla_x{}' - \mathrm{i}\nabla_y{}')(\nabla_x + \mathrm{i}\nabla_y) = A + \mathrm{i}\theta,$$

$$(LL^*)^2 = (A + \mathrm{i}\theta)^2 = M_\theta + \mathrm{i}\theta_A,$$

тогда

$$(M_\theta + \mathrm{i}\theta_A)(\bar{u}_1 + \mathrm{i}\bar{u}_2) = \bar{g}_1 + \mathrm{i}\bar{g}_2,$$

что равносильно системе:

$$\begin{cases} M_\theta\bar{u}_1 - \theta_A\bar{u}_2 = \bar{g}_1,\ \bar{u}_1 + \mathrm{i}\bar{u}_2 = \bar{U}, \\ \theta_A\bar{u}_1 + M_\theta\bar{u}_2 = \bar{g}_2,\ \bar{g}_1 + \mathrm{i}\bar{g}_2 = \bar{G} \end{cases}$$

и действительно на каждом шаге итерационных процессов из (3.4.1) возникают задачи типа

$$\widehat{C}\vec{\vec{u}} = \vec{\vec{g}},\ \vec{\vec{u}} = (\bar{u}_1', \bar{u}_2')',\ \vec{\vec{g}} = (\bar{g}_1{}', \bar{g}_2{}')'.$$

Утверждение 3.4.1. *Если в итерационном процессе из (3.4.1)* $\exists k \in \mathbb{N}:\ \vec{\vec{u}}^{k-1} = \vec{\vec{u}}$*, то и* $\vec{\vec{u}}^k = \vec{\vec{u}}$.

Пусть $\vec{\vec{u}}^k = \vec{\vec{u}} + \vec{\vec{\psi}}^k,\ \forall k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Утверждение 3.4.2. *Для итерационного процесса из (3.4.1) выполняется*

$$\theta_A\overline{\psi}_1^k + M_\theta\overline{\psi}_2^k = (1-\tau_k)\left(\theta_A\overline{\psi}_1^{k-1} + M_\theta\overline{\psi}_2^{k-1}\right),\ \forall k\in\mathbb{N},\ \vec{\overline{\psi}}^k \in \vec{\overline{Z}}_1\ \ \forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Замечание 3.4.1. *Имеют место неравенства*

$$\exists \widehat{c}_1, \widehat{c}_2 \in (0;+\infty):\ \widehat{c}_1 M_\theta \le \Lambda \le \widehat{c}_2 M_\theta,\ \textit{см. [86, 98].}$$

Утверждение 3.4.3. *Имеет место равенство*

$$\left\langle \widehat{C}\vec{\overline{\psi}}, \vec{\overline{\psi}} \right\rangle = \left\langle M_\theta\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_1 \right\rangle - \left\langle M_\theta\overline{\psi}_2, \overline{\psi}_2 \right\rangle\ \forall \vec{\overline{\psi}} \in \vec{\overline{Z}}_1,$$

где

$$\left\langle \vec{\overline{u}}, \vec{\overline{v}} \right\rangle = (\vec{\overline{u}}, \vec{\overline{v}})h_1h_2 = \left\langle \overline{u}_1, \overline{v}_1 \right\rangle + \left\langle \overline{u}_2, \overline{v}_2 \right\rangle = (\overline{u}_1, \overline{v}_1)h_1h_2 + (\overline{u}_2, \overline{v}_2)h_1h_2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} u_{1,k}v_{1,k}h_1h_2 + \sum_{k=1}^{N} u_{2,k}v_{2,k}h_1h_2 = \sum_{k=1}^{2N} u_k v_k h_1h_2\ \forall \vec{\overline{u}}, \vec{\overline{v}} \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Доказательство. Учитывая, что

$$\theta_A\overline{\psi}_1 + M_\theta\overline{\psi}_2 = \overline{0},\ \theta_A' = -\theta_A,$$

получается

$$\left\langle \widehat{C}\vec{\overline{\psi}}, \vec{\overline{\psi}} \right\rangle = \left\langle M_\theta\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_1 \right\rangle - \left\langle \theta_A\overline{\psi}_2, \overline{\psi}_1 \right\rangle = \left\langle M_\theta\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_1 \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \overline{\psi}_2\theta_A\overline{\psi}_1 \right\rangle = \left\langle M_\theta\overline{\psi}_1\overline{\psi}_1 \right\rangle - \left\langle M_\theta\overline{\psi}_2\overline{\psi}_2 \right\rangle$$

Предположение 3.4.1. *(О фиктивном продолжении действительной части на мнимую часть) Имеет место неравенство*

$$\exists \alpha_2 \in (0;1):\ \left\langle M_\theta\overline{\psi}_2, \overline{\psi}_2 \right\rangle \le \alpha_2 \left\langle M_\theta\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_1 \right\rangle\ \ \forall \vec{\overline{\psi}} \in \vec{\overline{Z}}_1.$$

Можно отметить ($\gamma_2 = (1-\alpha_2)^{-1}$ или $\alpha_2 = 1-\gamma_2^{-1}$), что

$$\exists \gamma_2 \in (1;+\infty):\ \left\langle M_\theta\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_1 \right\rangle \le \gamma_2 \left\langle \widehat{C}\vec{\overline{\psi}}, \vec{\overline{\psi}} \right\rangle = \gamma_2\left(\left\langle M_\theta\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_1 \right\rangle - \left\langle M_\theta\overline{\psi}_2, \overline{\psi}_2 \right\rangle \right)\ \forall \vec{\overline{\psi}} \in \vec{\overline{Z}}_1,$$

т.к. матрица $M_\theta > 0$ потому, что $\forall \overline{\psi}_1 \ne \overline{0}$

$$\left\langle M_\theta\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_1 \right\rangle = \left\langle (A^2-\theta^2)\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_1 \right\rangle = \left\langle A^2\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_1 \right\rangle - \left\langle \theta^2\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_1 \right\rangle = \left\langle A\overline{\psi}_1, A\overline{\psi}_1 \right\rangle + \left\langle \theta\overline{\psi}_1, \theta\overline{\psi}_1 \right\rangle > 0$$

и матрица $\widehat{C} > 0$, в нашем случае при $\vec{\overline{\psi}} \in \vec{\overline{Z}}_1$ выводится, что

$$(\widehat{C}\vec{\overline{\psi}}, \vec{\overline{\psi}}) = (M_\theta\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_1) - (\theta_A\overline{\psi}_2, \overline{\psi}_1) = ((A^2-\theta^2)\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_1) - ((A\theta+\theta A)\overline{\psi}_2, \overline{\psi}_1) =$$

$$(A\overline{\psi}_1)^2 + (\theta\overline{\psi}_1)^2 - (\theta\overline{\psi}_2, A\overline{\psi}_1) + (A\overline{\psi}_2, \theta\overline{\psi}_1) = (A\overline{\psi}_1 - \theta\overline{\psi}_2)^2 + (A\overline{\psi}_2 + \theta\overline{\psi}_1)^2 > 0\ \forall \vec{\overline{\psi}} \ne \vec{\overline{0}},$$

последнее, потому, что $(\nabla_x{}' - \mathrm{i}\nabla_y{}')(\nabla_x + \mathrm{i}\nabla_y)(\overline{\psi}_1 + \mathrm{i}\,\overline{\psi}_2) \ne \overline{0}\ \forall \vec{\overline{\psi}} \ne \vec{\overline{0}}$.

Также можно отметить, что для $\vec{\bar{\psi}} \in \vec{\bar{Z}}_1$, т.е. для функций из соответствующего подпространства

$$\exists\lambda_0^{-2} \in (0;+\infty):\ 0 \le \left\langle M_\theta \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \right\rangle = \left\langle M_\theta^{-1} \theta_A \bar{\psi}_1, \theta_A \bar{\psi}_1 \right\rangle \le \left\langle A^{-2} \theta_A \bar{\psi}_1, \theta_A \bar{\psi}_1 \right\rangle =$$

$$= \left\langle (\theta + A^{-1}\theta A)\bar{\psi}_1, (\theta + A^{-1}\theta A)\bar{\psi}_1 \right\rangle \le 2\left\langle \theta\bar{\psi}_1, \theta\bar{\psi}_1 \right\rangle + 2\left\langle A^{-1}\theta A\bar{\psi}_1, A^{-1}\theta A\bar{\psi}_1 \right\rangle \le$$

$$\le 2\left\langle \theta\bar{\psi}_1, \theta\bar{\psi}_1 \right\rangle + 2\lambda_0^{-2}\left\langle \theta A\bar{\psi}_1, \theta A\bar{\psi}_1 \right\rangle \le 2\left\langle \theta\bar{\psi}_1, \theta\bar{\psi}_1 \right\rangle + 2\lambda_0^{-2}\left\langle \theta\bar{\varphi}_1, \theta\bar{\varphi}_1 \right\rangle \to 0,$$

при $h_1, h_2 \to 0$, где $\bar{\varphi}_1 = A\bar{\psi}_1$, т.е. $\left\langle M_\theta \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \right\rangle \to 0$, $\bar{\psi}_2 \to \bar{0}$, при $h_1, h_2 \to 0$, т.к. $\theta\bar{\psi}_1 = \left(\nabla_x{}'\nabla_y - \nabla_y{}'\nabla_x\right)\bar{\psi}_1 \to \bar{0}$, $\theta\bar{\varphi}_1 = \left(\nabla_x{}'\nabla_y - \nabla_y{}'\nabla_x\right)\bar{\varphi}_1 \to \bar{0}$, при $h_1, h_2 \to 0$, по формуле Тейлора, если $\bar{\varphi}_1, \bar{\psi}_1$ – дискретные аналоги достаточно гладких функций.

Утверждение 3.4.4. *Имеют место неравенства*

$$\exists\gamma_2 \in (1;+\infty): \hat{c}_1 \left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}, \vec{\bar{\psi}} \right\rangle \le \left\langle \hat{D}\vec{\bar{\psi}}, \vec{\bar{\psi}} \right\rangle \le \gamma_2 \hat{c}_2 \left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}, \vec{\bar{\psi}} \right\rangle \quad \forall\, \vec{\bar{\psi}} \in \vec{\bar{Z}}_1.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\hat{c}_1 \left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}, \vec{\bar{\psi}} \right\rangle = \hat{c}_1 (\left\langle M_\theta \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \right\rangle - \left\langle M_\theta \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \right\rangle) \le \hat{c}_1 \left\langle M_\theta \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \right\rangle \le \left\langle \Lambda \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \right\rangle = \left\langle \hat{D}\vec{\bar{\psi}}, \vec{\bar{\psi}} \right\rangle.$$

С другой стороны

$$\gamma_2 \hat{c}_2 \left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}, \vec{\bar{\psi}} \right\rangle = \gamma_2 \hat{c}_2 (\left\langle M_\theta \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \right\rangle - \left\langle M_\theta \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \right\rangle) \ge$$
$$\ge \gamma_2 \hat{c}_2 (1 - \alpha_2) \left\langle M_\theta \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \right\rangle \ge \left\langle \Lambda \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \right\rangle = \left\langle \hat{D}\vec{\bar{\psi}}, \vec{\bar{\psi}} \right\rangle.$$

Утверждение 3.4.5. *Если в итерационном процессе из (3.5.1)*

$$\tau_k = \tau = 2/(\hat{c}_1 + \gamma_2 \hat{c}_2) \ \text{и} \ q = (\gamma_2 \hat{c}_2 - \hat{c}_1)/(\gamma_2 \hat{c}_2 + \hat{c}_1),$$

то

$$\left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}^k, \vec{\bar{\psi}}^k \right\rangle \le q^2 \left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}^{k-1}, \vec{\bar{\psi}}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Из итерационного процесса получается, что

$$\hat{C}(\vec{\bar{\psi}}^k - \vec{\bar{\psi}}^{k-1}) = -\tau \hat{D}\vec{\bar{\psi}}^{k-1},\ \vec{\bar{\psi}}^k = T\vec{\bar{\psi}}^{k-1},\ T = E_{2N} - \tau \hat{C}^{-1}\hat{D},\ T = T' > 0,$$

где E_{2N} – единичная матрица размерности $2N \times 2N$, тогда

$$\left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}^k, \vec{\bar{\psi}}^k \right\rangle = \left\langle \hat{C}T\vec{\bar{\psi}}^{k-1}, T\vec{\bar{\psi}}^{k-1} \right\rangle \le \sup_{\vec{\bar{\psi}} \in \vec{\bar{Z}}_1} \frac{\left\langle \hat{C}T\vec{\bar{\psi}}, T\vec{\bar{\psi}} \right\rangle}{\left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}, \vec{\bar{\psi}} \right\rangle} \left\langle \hat{C}\vec{\bar{\psi}}^{k-1}, \vec{\bar{\psi}}^{k-1} \right\rangle =$$

$$=\sup_{\vec{\bar{\psi}}\in\bar{\bar{Z}}_1}\left(\frac{\left\langle \widehat{C}T\vec{\bar{\psi}},\vec{\bar{\psi}}\right\rangle}{\left\langle \widehat{C}\vec{\bar{\psi}},\vec{\bar{\psi}}\right\rangle}\right)^2\left\langle \widehat{C}\vec{\bar{\psi}}^{k-1},\vec{\bar{\psi}}^{k-1}\right\rangle=\sup_{\vec{\bar{\psi}}\in\bar{\bar{Z}}_1}\left(\frac{\left\langle (\widehat{C}-\tau\widehat{D})\vec{\bar{\psi}},\vec{\bar{\psi}}\right\rangle}{\left\langle \widehat{C}\vec{\bar{\psi}},\vec{\bar{\psi}}\right\rangle}\right)^2\left\langle \widehat{C}\vec{\bar{\psi}}^{k-1},\vec{\bar{\psi}}^{k-1}\right\rangle=$$

$$=\sup_{\vec{\bar{\psi}}\in\bar{\bar{Z}}_1}\left(1-\tau\frac{\left\langle \widehat{D}\vec{\bar{\psi}},\vec{\bar{\psi}}\right\rangle}{\left\langle \widehat{C}\vec{\bar{\psi}},\vec{\bar{\psi}}\right\rangle}\right)^2\left\langle \widehat{C}\vec{\bar{\psi}}^{k-1},\vec{\bar{\psi}}^{k-1}\right\rangle=$$

$$=\max\left\{(1-\tau\widehat{c}_1)^2,\,(1-\tau\gamma_2\widehat{c}_2)^2\right\}\left\langle \widehat{C}\vec{\bar{\psi}}^{k-1},\vec{\bar{\psi}}^{k-1}\right\rangle=q^2\left\langle \widehat{C}\vec{\bar{\psi}}^{k-1},\vec{\bar{\psi}}^{k-1}\right\rangle.$$

Введём норму

$$\left\|\bar{v}_1\right\|_\Lambda=\sqrt{\left\langle \Lambda\bar{v}_1,\bar{v}_1\right\rangle}\,.$$

Теорема 3.4.1. *В итерационном процессе из (3.4.1), при* $\tau_k=\tau=2/(\widehat{c}_1+\gamma_2\widehat{c}_2)$, $k\in\mathbb{N}$, *будет*

$$\left\|\bar{u}_1^k-\bar{u}_1\right\|_\Lambda\le\varepsilon\left\|\bar{u}_1^0-\bar{u}_1\right\|_\Lambda,$$

где

$$\varepsilon=\sqrt{\gamma_2\widehat{c}_2/\widehat{c}_1}\,q^k\,.$$

Доказательство. Из утверждения 3.4.4 получается

$$\left\|\bar{\psi}_1^k\right\|_\Lambda^2=\left\langle \Lambda\bar{\psi}_1^k,\bar{\psi}_1^k\right\rangle\le\gamma_2\widehat{c}_2\left\langle \widehat{C}\vec{\bar{\psi}}^k,\vec{\bar{\psi}}^k\right\rangle\le\gamma_2\widehat{c}_2q^{2k}\left\langle \widehat{C}\vec{\bar{\psi}}^0,\vec{\bar{\psi}}^0\right\rangle\le$$

$$\le(\gamma_2\widehat{c}_2/\widehat{c}_1)q^{2k}\left\langle \Lambda\bar{\psi}_1^0,\bar{\psi}_1^0\right\rangle=(\gamma_2\widehat{c}_2/\widehat{c}_1)q^{2k}\left\|\bar{\psi}_1^0\right\|_\Lambda^2$$

Вывод. Учитывая вид матриц L, L^*, можно отметить, что для решения задачи из (3.2.2) с N неизвестными, на основании приведенной теоремы 3.4.1, предложенным итерационным процессом из (3.4.1) с относительной погрешностью ε , требуется не более чем $O(N|\ln\varepsilon|)$ арифметических операций. Для выбора итерационных параметров τ_k не требуется точного знания констант γ_2, $\widehat{c}_1$ и $\widehat{c}_2$, т.к. для выбора этих параметров и ускорения сходимости итерационного процесса из (3.4.1) можно использовать известные вариационные методы и рекомендовать, например, метод минимальных поправок [68]. Приведенные выводы остаются в силе, если в задачах из (3.2.2), (3.3.1) и в итерационном процессе из (3.4.1) заменить матрицу Λ матрицей A^2+aE .

3.5. Алгоритм для программы вычислений перемещений прямоугольной пластины при итерационных факторизациях на продолжении

Рассматриваются задачи из (3.2.2), (3.3.1)

$$\overline{u}_1 \in \mathbb{R}^N:\ \Lambda\overline{u}_1 = \overline{g}_1,\ \overline{g}_1 \in \mathbb{R}^N,$$

$$\vec{\vec{u}} \in \mathbb{R}^{2N}:\ \widehat{D}\vec{\vec{u}} = \vec{\vec{g}},\ \vec{\vec{g}} \in \mathbb{R}^{2N},\ \overline{g}_2 = \overline{0}$$

и итерационный процесс из (3.4.1), т.е. метод итерационных факторизаций

$$\vec{\vec{u}}^{k} \in \mathbb{R}^{2N}:\ \widehat{C}(\vec{\vec{u}}^{k} - \vec{\vec{u}}^{k-1}) = -\tau_k(\widehat{D}\vec{\vec{u}}^{k-1} - \vec{\vec{g}}),\ \tau_k > 0,\ k \in \mathbb{N}\ \forall \vec{\vec{u}}^{0} \in \vec{\vec{Z}}_1.$$

Для выбора итерационных параметров в методе итерационных факторизаций применяется метод минимальных поправок из [67, 70]. Для рассматриваемых задач и итерационного процесса, тогда предлагается следующий алгоритм вычислений:

1) выбирается нулевое начальное приближение $\forall \vec{\vec{u}}^{0} \in \vec{\vec{Z}}_1$ $(\vec{\vec{u}}^{0} = \vec{\vec{0}})$,

2) вычисляется невязка $\vec{\vec{r}}^{k-1}: \overline{r}_1^{k-1} = \Lambda\overline{u}_1^{k-1} - \overline{g}_1,\ \overline{r}_2^{k-1} = \overline{0},\ k \in \mathbb{N}$,

3) находится поправка $\vec{\vec{w}}^{k-1} \in \mathbb{R}^{2N}:\ \widehat{C}\vec{\vec{w}}^{k-1} = \vec{\vec{r}}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}$,

4) вычисляется квадрат нормы ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\|\vec{\vec{\psi}}^{k-1}\right\|^2_{\widehat{D}'\widehat{C}^{-1}\widehat{D}} = \left\langle \vec{\vec{r}}^{k-1}, \vec{\vec{w}}^{k-1}\right\rangle = \left\langle \overline{r}_1^{k-1}, \overline{w}_1^{k-1}\right\rangle,\ k \in \mathbb{N},$$

5) проверяется условие остановки итераций $\mathrm{E}_{k-1}/\mathrm{E}_0 < \mathrm{E}^2,\ \mathrm{E} \in (0;\,1),\ k \in \mathbb{N}$,

6) дополнительно вычисляется вектор $\vec{\vec{\eta}}^{k-1}: \overline{\eta}_1^{k-1} = \Lambda\overline{w}_1^{k-1},\ \overline{\eta}_2^{k-1} = \overline{0},\ k \in \mathbb{N}$,

7) дополнительно находится вектор $\vec{\vec{\xi}}^{k-1} \in \mathbb{R}^{2N}:\ \widehat{C}\vec{\vec{\xi}}^{k-1} = \vec{\vec{\eta}}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}$,

8) вычисляется итерационный параметр

$$\tau_k = \frac{\left\langle \widehat{D}\vec{\vec{w}}^{k-1}, \vec{\vec{w}}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle \widehat{C}^{-1}\widehat{D}\vec{\vec{w}}^{k-1}, \widehat{D}\vec{\vec{w}}^{k-1}\right\rangle} = \frac{\left\langle \vec{\vec{\eta}}^{k-1}, \vec{\vec{w}}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle \vec{\vec{\xi}}^{k-1}, \vec{\vec{\eta}}^{k-1}\right\rangle} = \frac{\left\langle \overline{\eta}_1^{k-1}, \overline{w}_1^{k-1}\right\rangle}{\left\langle \overline{\xi}_1^{k-1}, \overline{\eta}_1^{k-1}\right\rangle},\ k \in \mathbb{N},$$

9) вычисляется новое приближение $\overline{u}_1^{k} = \overline{u}_1^{k-1} - \tau_k w_1^{k-1}\ k \in \mathbb{N}$.

Заметим в условии остановки итерационного процесса $\mathrm{E} \in (0;1)$ – задаваемая относительная погрешность. Также можно использовать критерии окончания итерационных процессов из [55].

3.6. Вычисление перемещений прямоугольной пластины

Рассматриваются задачи из (3.2.2), (3.3.1)

$$\overline{u}_1 \in \mathbb{R}^N:\ \Lambda \overline{u}_1 = \overline{g}_1,\ \overline{g}_1 \in \mathbb{R}^N,$$

$$\vec{\overline{u}} \in \mathbb{R}^{2N}:\ \widehat{D}\vec{\overline{u}} = \vec{\overline{g}},\ \vec{\overline{g}} \in \mathbb{R}^{2N},\ \overline{g}_2 = \overline{0},$$

если заменить матрицу Λ матрицей $A^2 + aE$, при $a = 0$ и заданы компоненты правой части системы линейных алгебраических уравнений, например,

$$\begin{gathered} g_{1,m(i-1)+j} = f_{1,i,j} = 6((b_1^2 - ((i-0,5)h_1)^2)(5b_1^2 - ((i-0,5)h_1)^2) + \\ +12(b_1^2 - ((i-0,5)h_1)^2)(b_2^2 - ((j-0,5)h_2)^2) + \\ +(b_2^2 - ((j-0,5)h_2)^2)(5b_2^2 - ((j-0,5)h_2)^2)), \\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n,\ m = n = 2,\ldots,125, \\ h_1 = b_1/(m+0,5),\ h_2 = b_2/(n+0,5),\ b_1 = b_2 = 2,5 \end{gathered}$$

и итерационный процесс из (3.4.1), т.е. метод итерационных факторизаций

$$\vec{\overline{u}}^k \in \mathbb{R}^{2N}:\ \widehat{C}(\vec{\overline{u}}^k - \vec{\overline{u}}^{k-1}) = -\tau_k(\widehat{D}\vec{\overline{u}}^{k-1} - \vec{\overline{g}}),\ \tau_k > 0,\ k \in \mathbb{N}\ \forall \vec{\overline{u}}^0 \in \vec{\overline{Z}}_1.$$

Для выбора итерационных параметров в методе итерационных факторизаций применяется метод минимальных поправок из [67, 70]. Для рассматриваемых задач и итерационного процесса, тогда предлагается следующий алгоритм вычислений:

1) выбирается нулевое начальное приближение $\vec{\overline{u}}^0 = \vec{\overline{0}}$,

2) вычисляется невязка $\vec{\overline{r}}^{k-1}: \overline{r}_1^{k-1} = A^2\overline{u}_1^{k-1} - \overline{g}_1, \overline{r}_2^{k-1} = \overline{0}, k \in \mathbb{N}$,

3) находится поправка $\vec{\overline{w}}^{k-1} \in \mathbb{R}^{2N}:\ \widehat{C}\vec{\overline{w}}^{k-1} = \vec{\overline{r}}^{k-1}, k \in \mathbb{N}$,

4) вычисляется квадрат нормы ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\| \vec{\overline{\psi}}^{k-1} \right\|^2_{\widehat{D}'\widehat{C}^{-1}\widehat{D}} = \left\langle \vec{\overline{r}}^{k-1}, \vec{\overline{w}}^{k-1} \right\rangle = \left\langle \overline{r}_1^{k-1}, \overline{w}_1^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N},$$

5) проверяется условие остановки итераций $\mathrm{E}_{k-1}/\mathrm{E}_0 < \mathrm{E}^2$, $\mathrm{E} \in (0;\,1)$, $k \in \mathbb{N}$,

6) дополнительно вычисляется вектор $\vec{\bar{\eta}}^{k-1} : \bar{\eta}_1^{k-1} = A^2 \bar{w}_1^{k-1}$, $\bar{\eta}_2^{k-1} = \bar{0}$, $k \in \mathbb{N}$,

7) дополнительно находится вектор $\vec{\bar{\xi}}^{k-1} \in \mathbb{R}^{2N}$: $\widehat{C}\vec{\bar{\xi}}^{k-1} = \vec{\bar{\eta}}^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$,

8) вычисляется итерационный параметр

$$\tau_k = \frac{\left\langle \widehat{D}\vec{\bar{w}}^{k-1}, \vec{\bar{w}}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \widehat{C}^{-1}\widehat{D}\vec{\bar{w}}^{k-1}, \widehat{D}\vec{\bar{w}}^{k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \vec{\bar{\eta}}^{k-1}, \vec{\bar{w}}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \vec{\bar{\xi}}^{k-1}, \vec{\bar{\eta}}^{k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \bar{\eta}_1^{k-1}, \bar{w}_1^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \bar{\xi}_1^{k-1}, \bar{\eta}_1^{k-1} \right\rangle}, \; k \in \mathbb{N},$$

9) вычисляется новое приближение $\bar{u}_1^k = \bar{u}_1^{k-1} - \tau_k w_1^{k-1}$ $k \in \mathbb{N}$.

Заметим в условии остановки итерационного процесса $\mathrm{E} \in (0;\,1)$ – задаваемая относительная погрешность. В 2) и 6) при умножении $A^2\bar{u}_1^{k-1}$, $A^2\bar{w}_1^{k-1}$ возникают вычисления вида $A\bar{u}_1$:

$$(2u_{1,i,j} - u_{1,i-1,j} - u_{1,i+1,j})h_1^{-2} + (2u_{1,i,j} - u_{1,i,j-1} - u_{1,i,j+1})h_2^{-2}, \; i = 1,\dots,m, \; j = 1,\dots,n,$$

где

$$u_{1,i,0} = u_{1,i,1}, \; u_{1,i,n+1} = 0, \; i = 1,\dots,m, \; u_{1,0,j} = u_{1,1,j}, \; u_{1,m+1,j} = 0, \; j = 1,\dots,n.$$

В 3) и 7) появляются задачи вида:

$$\vec{\bar{u}} = (\bar{u}_1', \bar{u}_2')' \in \mathbb{R}^{2N}: \; \widehat{C}\vec{\bar{u}} = \vec{\bar{g}}, \; \vec{\bar{g}} = (\bar{g}_1', \bar{g}_2')' \in \mathbb{R}^{2N},$$

а, как указывалось ранее, они могут быть записаны в комплексной форме

$$\bar{U} = \bar{u}_1 + \mathrm{i}\bar{u}_2 \in \mathbb{C}^N: \; (LL^*)^2\bar{U} = \bar{G}, \; \bar{G} = \bar{g}_1 + \mathrm{i}\bar{g}_2 \in \mathbb{C}^N$$

и возможно расщепление на более простые четыре задачи

$$а) \; \bar{T} \in \mathbb{C}^N: \; L\bar{T} = \bar{G}, \; \bar{G} \in \mathbb{C}^N,$$

$$б) \; \bar{P} \in \mathbb{C}^N: \; L^*\bar{P} = \bar{T}, \; \bar{H} \in \mathbb{C}^N,$$

$$в) \; \bar{Q} \in \mathbb{C}^N: \; L\bar{Q} = \bar{P}, \; \bar{R} \in \mathbb{C}^N,$$

$$г) \; \bar{U} \in \mathbb{C}^N: \; L^*\bar{U} = \bar{Q}, \; \bar{Q} \in \mathbb{C}^N.$$

А эти системы с матрицами L и L^* могут быть записаны в виде $(\mathrm{i}^2 = -1)$:

$$а) \; (T_{i,j} - T_{i-1,j})h_1^{-1} + \mathrm{i}(T_{i,j-1} - T_{i,j})h_2^{-1} = G_{i,j}, \quad i = 1,\dots,m, \; j = 1,\dots,n,$$

при

$$T_{i,0}=0,\ i=1,...,m,\ T_{0,j}=0,\ j=1,...,n,$$

$$б)\ \ (P_{i,j}-P_{i+1,j})h_1^{-1}+\mathrm{i}(P_{i,j}-P_{i,j+1})h_2^{-1}=T_{i,j},\quad i=1,...,m,\ j=1,...,n,$$

при

$$P_{i,n+1}=0,\ i=1,...,m,\ P_{m+1,j}=0,\ j=1,...,n,$$

$$в)\ \ (Q_{i,j}-Q_{i-1,j})h_1^{-1}+\mathrm{i}(Q_{i,j-1}-Q_{i,j})h_2^{-1}=P_{i,j},\quad i=1,...,m,\ j=1,...,n,$$

при

$$Q_{i,0}=0,\ i=1,...,m,\ Q_{0,j}=0,\ j=1,...,n,$$

$$г)\ \ (U_{i,j}-U_{i+1,j})h_1^{-1}+\mathrm{i}(U_{i,j}-U_{i,j+1})h_2^{-1}=Q_{i,j},\quad i=1,...,m,\ j=1,...,n,$$

при

$$U_{i,n+1}=0,\ i=1,...,m,\ U_{m+1,j}=0,\ j=1,...,n.$$

Если коэффициенты:

$$d_1=h_1(h_1-\mathrm{i}h_2)/d,\ d_2=h_2(h_2+\mathrm{i}h_1)/d,\ d_3=h_1d_2,\ d=h_1^2+h_2^2,$$

$$d_4=h_1(h_1+\mathrm{i}h_2)/d,\ d_5=h_2(h_2-\mathrm{i}h_1)/d,\ d_6=h_1d_5,$$

то по явным формулам можно найти решения указанных систем

$$а)\ \ T_{i,j}=d_1T_{i,j-1}+d_2T_{i-1,j}+d_3G_{i,j},\quad i=1,...,m,\ j=1,...,n,$$

$$б)\ \ P_{i,j}=d_4P_{i,j+1}+d_5P_{i+1,j}+d_6T_{i,j},\quad i=1,...,m,\ j=1,...,n,$$

$$в)\ \ Q_{i,j}=d_1Q_{i,j-1}+d_2Q_{i-1,j}+d_3P_{i,j},\quad i=1,...,m,\ j=1,...,n,$$

$$г)\ \ U_{i,j}=d_4U_{i,j+1}+d_5U_{i+1,j}+d_6Q_{i,j},\quad i=1,...,m,\ j=1,...,n.$$

ГЛАВА 4

ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПЛАСТИН НА ПРОДОЛЖЕНИЯХ

В этой главе изучается математическое моделирование перемещений пластин при отсутствии упругого основания и при его наличии с применением фиктивных продолжений через границу с однородными главными краевыми условиями и однородными естественными краевыми условиями. Рассматриваются эллиптические дифференциальные уравнения четвёртого порядка при общих предположениях обеспечивающих каждому уравнению существование и единственность его решения. Решения этих уравнений с помощью *ММФК* – модификаций методов фиктивных компонент и *МКЭ* – метода конечных элементов сводятся к решениям вариационно-разносных аналогов эллиптических уравнений четвёртого порядка в прямоугольнике со сторонами параллельными осям координат, когда на двух смежных сторонах прямоугольника однородные условия шарнирного опирания, а на двух других сторонах однородные условия симметрии. Для продолженных дискретных аналогов этих уравнений в виде систем линейных алгебраических уравнений ранее приводился факторизованный переобуславливатель квадратно попеременно треугольного вида. Так исходные краевые задачи могут решаться с помощью методов типа фиктивных компонент для эллиптических дифференциальных уравнений четвёртого порядка в плоских областях достаточно произвольного вида при однородных главных и однородных естественных краевых условиях.

4.1. Математические модели перемещений пластин

Из линейной теории изгибания пластин на упругих основаниях, основываясь на [36, 60] энергии двух деформированных пластин могут быть записаны в виде:

$$\breve{E}_\alpha(\breve{u}_\alpha)=\frac{1}{2}\breve{D}_\alpha\int\limits_{\Omega_\alpha}((\Delta\breve{u}_\alpha)^2+2(1-\sigma_\alpha)(\breve{u}^2_{\alpha xy}-\breve{u}_{\alpha xx}\breve{u}_{\alpha yy}))d\Omega_\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\alpha}\breve{K}_\alpha\breve{u}^2_\alpha d\Omega_\alpha-\int\limits_{\Omega_\alpha}\breve{P}_\alpha\breve{u}_\alpha d\Omega_\alpha,\ \alpha=1,2,$$

где $\breve{P}_\alpha$ – давления, $\breve{K}_\alpha$ – коэффициенты жёсткости упругих оснований ($\breve{K}_\alpha=0$ в случае отсутствия упругого основания α), $\breve{D}_\alpha=\breve{E}_\alpha\breve{h}^3\big/(12(1-\sigma^2_\alpha))$ – цилиндрические жёсткости пластин, $\breve{h}$ – толщина пластин, $\breve{E}_\alpha$ – модули Юнга (модули растяжения), $\sigma_\alpha\in(0;1)$ – коэффициенты Пуассона, Ω_α – плоские ограниченные области с кусочно-гладкими границами класса C^2 без самопересечений и самокасаний, $\partial\Omega_\alpha=\overline{s}_\alpha$, $s_\alpha=\Gamma_{\alpha,0}\bigcup\Gamma_{\alpha,1}\bigcup\Gamma_{\alpha,2}\bigcup\Gamma_{\alpha,3}$, $\Gamma_{\alpha,i}\bigcap\Gamma_{\alpha,j}=\varnothing$, если $i\neq j$, $i,j=0,1,2,3$, $\Gamma_{\alpha,i}$, $i=0,1,2,3$ – объединения конечного числа непересекающихся, открытых подмножеств границ $\partial\Omega_\alpha$ из дуг гладких кривых класса C^2, $\breve{u}_\alpha$ – искомые перемещения. Если приравнять к нулю вариации энергий

$$\delta\breve{E}_\alpha(\breve{u}_\alpha)=\breve{D}_\alpha\int\limits_{\Omega_\alpha}(\Delta\breve{u}_\alpha\Delta\breve{v}_\alpha+(1-\sigma_\alpha)(2\breve{u}_{\alpha xy}\breve{v}_{\alpha xy}-\breve{u}_{\alpha xx}\breve{v}_{\alpha yy}-\breve{u}_{\alpha yy}\breve{v}_{\alpha xx}))d\Omega_\alpha+$$

$$+\int\limits_{\Omega_\alpha}\breve{K}_\alpha\breve{u}_\alpha\breve{v}_\alpha d\Omega_\alpha-\int\limits_{\Omega_\alpha}\breve{P}_\alpha\breve{v}_\alpha d\Omega_\alpha=0,$$

где $\breve{v}_\alpha=\delta\breve{u}_\alpha$, то, при $a_\alpha=\breve{K}_\alpha\big/\breve{D}_\alpha$, $\breve{f}_\alpha=\breve{P}_\alpha\big/\breve{D}_\alpha$ получается, что

$$\int\limits_{\Omega_\alpha}(\sigma_\alpha\Delta\breve{u}_\alpha\Delta\breve{v}_\alpha+(1-\sigma_\alpha)(\breve{u}_{\alpha xx}\breve{v}_{\alpha xx}+2\breve{u}_{\alpha xy}\breve{v}_{\alpha xy}+\breve{u}_{\alpha yy}\breve{v}_{\alpha yy})+a_\alpha\breve{u}_\alpha\breve{v}_\alpha)d\Omega_\alpha=\int\limits_{\Omega_\alpha}\breve{f}_\alpha\breve{v}_\alpha d\Omega_\alpha.$$

После интегрирования по частям, применения второй фррмулы Грина устанавливается

$$\int\limits_{\Omega_\alpha}(\Delta^2\breve{u}_\alpha+a_\alpha\breve{u}_\alpha)\breve{v}_\alpha d\Omega_\alpha+\int\limits_{s_\alpha}l_{\alpha,1}\breve{u}_\alpha\frac{\partial\breve{v}_\alpha}{\partial\vec{n}_\alpha}ds_\alpha-\int\limits_{s_\alpha}l_{\alpha,2}\breve{u}_\alpha\breve{v}_\alpha ds_\alpha=\int\limits_{\Omega}\breve{f}_\alpha\breve{v}_\alpha d\Omega_\alpha,$$

где

$$l_{\alpha,1}\breve{u}_\alpha=\Delta\breve{u}_\alpha+(1-\sigma_\alpha)n_{\alpha,1}n_{\alpha,2}\breve{u}_{\alpha xy}-n_{\alpha,2}^2\breve{u}_{\alpha xx}-n_{\alpha,1}^2\breve{u}_{\alpha yy},$$

$$l_{\alpha,2}\breve{u}_\alpha=\frac{\partial\Delta\breve{u}_\alpha}{\partial\vec{n}_\alpha}+(1-\sigma_\alpha)\frac{\partial}{\partial s_\alpha}(n_{\alpha,1}n_{\alpha,2}(\breve{u}_{\alpha yy}-\breve{u}_{\alpha xx})+(n_{\alpha,1}^2-n_{\alpha,2}^2)\breve{u}_{\alpha xy}),$$

$\vec{n}_\alpha$ – внешние нормали к $\partial\Omega_\alpha$, $n_{\alpha,1}=-\cos(n_\alpha,x)$, $n_{\alpha,2}=-\cos(n_\alpha,y)$.

Если считать, что на $\Gamma_{\alpha,0}$ жёсткая заделка, на $\Gamma_{\alpha,1}$ условия шарнирного опирания, на $\Gamma_{\alpha,2}$ условие симметрии и на $\Gamma_{\alpha,3}$ условия свободного опирания, то получаются задачи при однородных смешанных краевых условиях $(\alpha=1,2)$:

$$\Delta^2\breve{u}_\alpha+a_\alpha\breve{u}_\alpha=\breve{f}_\alpha,$$

$$\breve{u}_\alpha\Big|_{\Gamma_{\alpha,0}}=\frac{\partial\breve{u}_\alpha}{\partial\vec{n}_\alpha}\Big|_{\Gamma_{\alpha,0}}=0,\ \breve{u}_\alpha\Big|_{\Gamma_{\alpha,1}}=l_{\alpha,1}\breve{u}_\alpha\Big|_{\Gamma_{\alpha,1}}=0,$$

$$\frac{\partial\breve{u}_\alpha}{\partial\vec{n}_\alpha}\Big|_{\Gamma_{\alpha,2}}=l_{\alpha,2}\breve{u}_\alpha\Big|_{\Gamma_{\alpha,2}}=0,\ l_{\alpha,1}\breve{u}_\alpha\Big|_{\Gamma_{\alpha,3}}=l_{\alpha,2}\breve{u}_\alpha\Big|_{\Gamma_{\alpha,3}}=0.$$

Рассматриваются математические модели перемещений пластин в вариационном виде. Это вариационные задачи, обобщённые математические модели перемещений пластин на упругих основаниях при однородных смешанных краевых условиях, т.е. однородных условиях жесткой заделки, шарнирного опирания, симметрии и свободного опирания

$$\breve{u}_\alpha\in\breve{H}_\alpha:\Lambda_\alpha(\breve{u}_\alpha,\breve{v}_\alpha)=\breve{g}_\alpha(\breve{v}_\alpha)\ \forall\breve{v}_\alpha\in\breve{H}_\alpha,\ \breve{g}_\alpha\in\breve{H}'_\alpha,\ \alpha=1,2 \tag{4.1.1}$$

где соболевские пространства функций

$$\breve{H}_\alpha=\breve{H}_\alpha(\Omega_\alpha)=\left\{\breve{v}_\alpha\in W_2^2(\Omega_\alpha):\breve{v}_\alpha\big|_{\Gamma_{\alpha,0}\cup\Gamma_{\alpha,1}}=0,\ \frac{\partial\breve{v}_\alpha}{\partial\vec{n}_\alpha}\Big|_{\Gamma_{\alpha,0}\cup\Gamma_{\alpha,2}}=0\right\}$$

на ограниченных плоских областях Ω_α с кусочно-гладкими границами класса C^2 без самопересечений и самокасаний

$$\partial\Omega_\alpha=\overline{s}_\alpha,\ s_\alpha=\Gamma_{\alpha,0}\cup\Gamma_{\alpha,1}\cup\Gamma_{\alpha,2}\cup\Gamma_{\alpha,3},$$

$$\Gamma_{\alpha,i}\cap\Gamma_{\alpha,j}=\varnothing,\ \text{если}\ \ i\neq j,\ i,j=0,1,2,3,$$

$\Gamma_{\alpha,i},\ i=0,1,2,3-$ объединения конечного числа непересекающихся, открытых подмножеств границ $\partial\Omega_\alpha$ из дуг гладких кривых класса C^2, $\vec{n}_\alpha-$ внешние нормали к $\partial\Omega_\alpha$, билинейные формы с константами $\breve{a}_\alpha\in[0;+\infty)$, $\sigma_\alpha\in(0;1)$:

$$\Lambda_\alpha(\breve{u}_\alpha,\breve{v}_\alpha)=\int_{\Omega_\alpha}(\sigma_\alpha\Delta\breve{u}_\alpha\Delta\breve{v}_\alpha+(1-\sigma_\alpha)(\breve{u}_{\alpha xx}\breve{v}_{\alpha xx}+2\breve{u}_{\alpha xy}\breve{v}_{\alpha xy}+\breve{u}_{\alpha yy}\breve{v}_{\alpha yy})+a_\alpha\breve{u}_\alpha\breve{v}_\alpha)d\Omega_\alpha .$$

Для задач из (4.1.1) достаточно обычны предположения обеспечивающее каждой задаче существование и единственность её решения, т.е.

$$\exists c_1,c_2\in(0;+\infty):\ c_1\left\|\breve{v}_\alpha\right\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\le\Lambda_\alpha(\breve{v}_\alpha,\breve{v}_\alpha)\le c_2\left\|\breve{v}_\alpha\right\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\quad\forall\breve{v}_\alpha\in\breve{H}_\alpha,\ \alpha=1,2,$$

см. [59, 60]. Как видно, данные условия естественно гарантируют единственность решения при наличии упругого основания при любой комбинации краевых условий. Если, например, $\breve{u}_\alpha$ – искомые функции достаточно гладкие, а $\breve{f}_\alpha-$ заданные функции такие, что

$$\breve{g}_\alpha(\breve{v}_\alpha)=(\breve{f}_\alpha,\breve{v}_\alpha),\ \text{где}\ \left(\breve{f}_\alpha,\breve{v}_\alpha\right)=\int_{\Omega_\alpha}\breve{f}_\alpha\breve{v}_\alpha d\Omega_\alpha ,$$

то из задач в (4.1.1) как и ранее после интегрирования по частям, применения второй формулы Грина получаются эллиптические уравнения четвертого порядка при смешанных и однородных краевых условиях

$$\Delta^2\breve{u}_\alpha+a_\alpha\breve{u}_\alpha=\breve{f}_\alpha, \tag{4.1.2}$$

$$\breve{u}_\alpha\Big|_{\Gamma_{\alpha,0}}=\frac{\partial\breve{u}_\alpha}{\partial\vec{n}_\alpha}\Big|_{\Gamma_{\alpha,0}}=0,\ \breve{u}_\alpha\Big|_{\Gamma_{\alpha,1}}=l_{\alpha,1}\breve{u}_\alpha\Big|_{\Gamma_{\alpha,1}}=0,$$

$$\frac{\partial\breve{u}_\alpha}{\partial\vec{n}_\alpha}\Big|_{\Gamma_{\alpha,2}}=l_{\alpha,2}\breve{u}_\alpha\Big|_{\Gamma_{\alpha,2}}=0,\ l_{\alpha,1}\breve{u}_\alpha\Big|_{\Gamma_{\alpha,3}}=l_{\alpha,2}\breve{u}_\alpha\Big|_{\Gamma_{\alpha,3}}=0,\ \alpha=1,2,$$

где, как и ранее

$$l_{\alpha,1}\breve{u}_\alpha=\Delta\breve{u}_\alpha+(1-\sigma_\alpha)n_{\alpha,1}n_{\alpha,2}\breve{u}_{\alpha xy}-n^2_{\alpha,2}\breve{u}_{\alpha xx}-n^2_{\alpha,1}\breve{u}_{\alpha yy},$$

$$l_{\alpha,2}\breve{u}=\frac{\partial\Delta\breve{u}_\alpha}{\partial\vec{n}_\alpha}+(1-\sigma_\alpha)\frac{\partial}{\partial s_\alpha}(n_{\alpha,1}n_{\alpha,2}(\breve{u}_{\alpha yy}-\breve{u}_{\alpha xx})+(n^2_{\alpha,1}-n^2_{\alpha,2})\breve{u}_{\alpha xy}),$$

$$n_{\alpha,1}=-\cos(n_\alpha,x),\ n_{\alpha,2}=-\cos(n_\alpha,y).$$

4.2. Приближенные аналитические модифицированные методы фиктивных компонент для пластин

Предлагаются продолжения вариационных задач и их решений из (4.1.1), фиктивно продолженные обобщённые математические модели перемещений пластин на упругих основаниях при смешанных краевых условиях, следующего вида:

$$\breve{u} \in \breve{V} : \Lambda_1(\breve{u}, I_1\breve{v}) + \Lambda_2(\breve{u}, \breve{v}) = \breve{g}_1(I_1\breve{v}) + \breve{g}_2(\breve{v}) \ \ \forall \breve{v} \in \breve{V},$$

$$\breve{g}_{3-\alpha}(\breve{v}) = 0 \ \forall \breve{v} \in \breve{V}_{3-\alpha} \ \ \alpha = 1,2, \qquad (4.2.1)$$

где соболевское пространство функций на области Ω

$$\breve{V} = \breve{V}(\Omega) = \left\{ \breve{v} \in W_2^2(\Omega) : \breve{v}\big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} = 0, \ \frac{\partial \breve{v}}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} = 0 \right\},$$

Ω, $\Omega_{3-\alpha}$ – ограниченные плоские области, с кусочно-гладкими границами класса C^2 без самопересечений и самокасаний, такие, что

$$\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega, \ \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \bigcup \bar{\Omega}_2, \ \Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \varnothing, \ \partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_2 = \bar{S}, \ S = \Gamma_{1,0} \bigcap \Gamma_{2,3} \neq \varnothing,$$

$$\partial\Omega = \bar{s}, \ s = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3, \ \Gamma_i \bigcap \Gamma_j = \varnothing, \text{ если } i \neq j, \ i,j = 0,1,2,3,$$

Γ_i, $i = 0,1,2,3$ – объединения конечного числа непересекающихся, открытых подмножеств границы $\partial\Omega$ из дуг гладких кривых класса C^2, $\vec{n}$– внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Подпространства

$$\breve{V}_{i^2} = \left\{ \breve{v}_{i^2} \in \breve{V} : \breve{v}_{i^2} \Big|_{\Omega \setminus \Omega_i} = 0 \right\} \ i = 1,2.$$

Полагается, что

$$\Lambda(\breve{u}, \breve{v}) = \Lambda_1(\breve{u}, \breve{v}) + \Lambda_2(\breve{u}, \breve{v}) \ \ \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V},$$

считается, что

$$\Lambda_i(\breve{u}, \breve{v}) = \Lambda_i(\breve{u}\big|_{\Omega_i}, \breve{v}\big|_{\Omega_i}), \ \breve{g}_i(\breve{v}) = \breve{g}_i(\breve{v}\big|_{\Omega_i}) \ \ \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V} \ i = 1,2.$$

Предполагается, что

$$\exists c_1, c_2 \in (0; +\infty): \ c_1 \|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Omega)} \leq \Lambda(\breve{v}, \breve{v}) \leq c_2 \|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Omega)} \ \ \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Пусть $\breve{V}_0 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_4$ прямая сумма подпространств $\breve{V}_{i^2}$ $i=1,2$ в скалярном произведении $\Lambda(\cdot,\cdot)$, подпространство

$$\breve{V}_3 = \left\{ \breve{v}_3 \in \breve{V} : \Lambda(\breve{v}_3, \breve{v}_0) = 0 \ \forall \breve{v}_0 \in \breve{V}_0 \right\},$$

т.е. $\breve{V} = \breve{V}_0 \oplus \breve{V}_3$ в скалярном произведении $\Lambda(\cdot,\cdot)$, а $\breve{v}_0 \in \breve{V}, \breve{v}_3 \in \breve{V}$ обозначают проекции v на соответствующие подпространства. Вводятся следующие подпространства: $\breve{V}_{8-3i} = \breve{V}_3 \oplus \breve{V}_{i^2}, \, i=1,2,$ тогда имеет место $\breve{V} = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_2.$

Считается, что

$$\breve{H}_i = \breve{H}_i(\Omega_i) = \breve{V}_i(\Omega_i), \ \breve{V}(\Omega_i) = \breve{V}\Big|_{\Omega_i} \ i=1,2. \ H_2 = V(\Omega_2).$$

Полагается, что I_{i^2} $i=1,2$ – ограниченные операторы, отображающие пространство $\breve{V}$ на подпространства $\breve{V}_{i^2}$, т.е. $\breve{V}_{i^2} = im\, I_{i^2}$, при этом $I_{i^2} = I_{i^2}^2$, т.е. I_{i^2} проекторы, но не обязательно ортопроекторы. Считается, что $I_0 = I_1 + I_4$. Здесь I_0 – ограниченный оператор, отображающий пространство $\breve{V}$ на подпространство $\breve{V}_0$, т.е. $\breve{V}_0 = im\, I_0$, при этом $I_0 = I_0^2$, т.е. I_0 проектор, но не обязательно ортопроектор. Можно отметить, что

$$\Lambda_1(\breve{u}, I_0\breve{v}) = \Lambda_1(\breve{u}, I_1\breve{v}), \ \breve{g}_1(I_0\breve{v}) = \breve{g}_1(I_1\breve{v}) \ \ \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}.$$

Основываясь на возможности продолжения функций с сохранением нормы в соответствующих соболевских пространствах будем считать, что имеет место, следующее предположение о продолжении функций:

Предположение 4.2.1. *Имеют место следующие неравенства*

$$\exists \beta_1 \in (0;1] \, \exists \beta_2 \in [\beta_1;1] : \beta_1 \Lambda(\breve{v}_3, \breve{v}_3) \le \Lambda_2(\breve{v}_3, \breve{v}_3) \le \beta_2 \Lambda(\breve{v}_3, \breve{v}_3) \ \forall \breve{v}_3 \in \breve{V}_3.$$

Можно считать, что $\beta_2 = 1$.

Предложение 4.2.1. *Имеют место следующие равенства:*

$$\Lambda_i(\breve{u}_0, \breve{v}_3) = \Lambda_i(\breve{v}_3, \breve{u}_0) = 0 \ \ \forall \breve{u}_0 \in \breve{V}_0, \forall \breve{v}_3 \in \breve{V}, \, i=1,2.$$

Действительно, т.к.

$$\Lambda_i(\breve{u}_0, \breve{v}_3) = \Lambda_i(\breve{u}_{i^2}, \breve{v}_3) = \Lambda(\breve{u}_{i^2}, \breve{v}_3) = 0 \ \ \forall \breve{u}_{i^2} \in \breve{V}_0, \forall \breve{v}_3 \in \breve{V}_3, \, i=1,2.$$

Утверждение 4.2.1. *Решение каждой задачи из (4.2.1)* $\breve{u} \in \breve{V}_\alpha$, *существует, единственно и на* Ω_α *совпадает с решением задачи из (4.1.1), на* $\Omega_{3-\alpha}$ *равно* $\breve{u}_3$ *(равно нулю при* $\alpha = 1$*)* $\alpha = 1, 2$.

Доказательство. Пусть $\breve{u}^1$, $\breve{u}^2$ два решения , тогда для $\breve{u}^0 = \breve{u}^1 - \breve{u}^2$ имеем

$$\Lambda_1(\breve{u}^0, I_1\breve{v}) + \Lambda_2(\breve{u}^0, \breve{v}) = 0 \ \ \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Заметим , что $\breve{u}^0 = \breve{u}_3^0 \in \breve{V}_3$, т.к. при $\breve{v} = \breve{v}_0$ получаем

$$\Lambda_1(\breve{u}^0, I_1\breve{v}_0) + \Lambda_2(\breve{u}^0, \breve{v}_0) = \Lambda_1(\breve{u}^0, \breve{v}_0) + \Lambda_2(\breve{u}^0, \breve{v}_0) = \Lambda(\breve{u}^0, \breve{v}_0) = 0 \ \ \forall \breve{v}_0 \in \breve{V}_0.$$

Пусть $\breve{v} = \breve{u}_3^0$, тогда

$$\Lambda_1(\breve{u}_3^0, I_1\breve{u}_3^0) + \Lambda_2(\breve{u}_3^0, \breve{u}_3^0) = 0$$

отсюда ввиду предложения 4.2.1.

$$\Lambda_2(\breve{u}_3^0, \breve{u}_3^0) = 0,$$

тогда $\breve{u}_3^0 = 0$ на Ω_2, т.к. $\Lambda_2(\cdot,\cdot)$ скалярное произведение, а, т.к.

$$0 \le \beta_1 \Lambda(u_3^0, u_3^0) \le \Lambda_2(u_3^0, u_3^0) = 0,$$

следовательно

$$\Lambda(u_3^0, u_3^0) = 0,$$

тогда $\breve{u}_3^0 = 0$ на Ω, т.к. $\Lambda(\cdot,\cdot)$ скалярное произведение. Таким образом, $\breve{u}^0 = \breve{u}_3^0 = 0$ на Ω. Что касается существования решений задач из (4.2.1) , то решения уже указаны в условии утверждения.

Предлагаются модификации методов фиктивных компонент для пластин. Это следующие итерационные процессы, методы приближённых вычислений перемещений пластин на упругих основаниях при смешанных краевых условиях на непрерывном уровне [91, 94, 95, 97, 98, 103, 104, 105]:

$$\breve{u}^k \in \breve{V} : \Lambda(\breve{u}^k - \breve{u}^{k-1}, \breve{v}) = -\tau_k (\Lambda_1(\breve{u}^{k-1}, I_1\breve{v}) + \Lambda_2(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}) - \breve{g}_1(I_1\breve{v}) - \breve{g}_2(\breve{v})) \ \forall \breve{v} \in \breve{V},$$

$$\tau_1 = (2-\alpha) + (\alpha - 1)\tau,\ \tau \in (0;2),\ (\alpha = 2,\ \tau_1 \ne 1,\ \beta_2 = 1),$$

$$\tau_k = \tau \in (0; 2\beta_2^{-1}),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \forall \breve{u}^0 \in \breve{V}_\alpha \subset \breve{V},\ \alpha = 1,2. \qquad (4.2.2)$$

В пространстве $\breve{V}$ вводится следующая норма

$$\|\breve{v}\|_{\breve{V}} = \sqrt{\Lambda(\breve{v},\breve{v})}$$

Теорема 4.2.1. *Для итерационных процессов из (4.2.2) имеют место следующие оценки*

$$\left\|\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le \varepsilon_\alpha \left\|\breve{u}^0 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}},\ k \in \mathbb{N},\ \alpha = 1,2,$$

$$\left\|I_1\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le \left\|I_1\right\|_{\breve{V}} \left\|\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\breve{V}}\ \ \alpha = 1,$$

где

$$\varepsilon_\alpha = \big((2-\alpha)\delta_1 + (\alpha-1)q_1\big)q^{k-1},$$

$$\delta_1 = \sqrt{\|I_1\|_{\breve{V}}^2 - 1},\ \|I - I_1\|_{\breve{V}},\ \ 0 \le q_1 = max\left\{\left|1-\tau\beta_1\right|,\ \left|1-\tau\right|\ \right\} < 1,\ \tau \in (0;2),$$

$$0 \le q = max\left\{\left|1-\tau\beta_1\right|,\ \left|1-\tau\beta_2\right|\ \right\} < 1,\ \tau \in (0;2\beta_2^{-1}),\ (\alpha = 2,\ \tau_1 \ne 1,\ \beta_2 = 1).$$

Здесь I оператор тождественного преобразования из $\breve{V}$ в $\breve{V}$.

Предложение 4.2.2. *Если в (4.2.2)* $\breve{u}^{k-1} = \breve{u}$, *то* $\breve{u}^k = \breve{u}$.

Так как

$$\breve{u}^k \in \breve{V} : \Lambda(\breve{u}^k - \breve{u},\breve{v}) = -\tau_k(\Lambda_1(\breve{u},I_1\breve{v}) + \Lambda_2(\breve{u},\breve{v}) - \breve{g}_1(I_1\breve{v}) - \breve{g}_2(\breve{v}))\,\forall\breve{v} \in \breve{V},$$

тогда

$$\Lambda(\breve{u}^k - \breve{u},\breve{v}) = 0\,\forall\breve{v} \in \breve{V}\ \text{ и }\ \Lambda(\breve{u}^k - \breve{u},\breve{u}^k - \breve{u}) = 0,\ \text{следовательно}\ \breve{u}^k = \breve{u}.$$

Предложение 4.2.3. *Для итерационных процессов из (4.2.2) имеют место равенства:*

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \Lambda_i(\breve{u}^k,\breve{v}_0) = \breve{g}_i(\breve{v}_0)\,\forall\breve{v}_0 \in \breve{V}_0,\ i = 1,2.$$

При $k = 1$

$$\Lambda_i(\breve{u}^1,\breve{v}_0) = \Lambda(\breve{u}^1,\breve{v}_{i^2}) = \breve{g}_i(\breve{v}_{i^2}) = \breve{g}_i(\breve{v}_0).$$

Если для $k-1$ предложение верно, тогда

$$\Lambda_i(\breve{u}^k,\breve{v}_0) = \Lambda(\breve{u}^k,\breve{v}_{i^2}) = \Lambda(\breve{u}^{k-1},\breve{v}_{i^2}) - \tau_k((\Lambda_i(\breve{u}^{k-1},\breve{v}_{i^2}) - \breve{g}_i(\breve{v}_{i^2})) =$$
$$= \Lambda_i(\breve{u}^{k-1},\breve{v}_0) - \tau_k((\Lambda_i(\breve{u}^{k-1},\breve{v}_0) - \breve{g}_i(\breve{v}_0)) = \breve{g}_i(\breve{v}_0).$$

Ввиду математической индукции предложение доказано.

Пусть $\breve{u}^k = \breve{u} + \breve{\psi}^k$, $k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$.

Предложение 4.2.4. *В итерационных процессах из (4.2.2) ошибка находится в подпространстве, т.е.* $\breve{\psi}^k = \breve{\psi}_3^k \in V_3 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Так как из предложения 4.2.3

$$\Lambda(\breve{u}^k, \breve{v}_0) - \breve{g}_\alpha(\breve{v}_0) = 0 \ \forall \breve{v}_0 \in \breve{V}_0,$$

тогда

$$\Lambda(\breve{u}^k, \breve{v}_0) - \breve{g}_\alpha(\breve{v}_0) = \Lambda(\breve{u} + \breve{\psi}^k, \breve{v}_0) - \breve{g}_\alpha(\breve{v}_0) = \Lambda(\breve{\psi}^k, \breve{v}_0) = 0 \ \forall \breve{v}_0 \in \breve{V}_0,$$

так как

$$\Lambda(\breve{u}, \breve{v}_0) = \breve{g}_\alpha(\breve{v}_0)$$

следовательно $\breve{\psi}^k = \breve{\psi}_3^k \in V_3$.

Утверждение 4.2.2. *При* $\alpha = 1,\ k = 1$ *в (4.2.2) имеют место следующие оценки*

$$\left\|\breve{u}^1 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le \delta_1 \left\|\breve{u}^0 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le \delta_1 \left\|I_1\right\|_{\breve{V}} \left\|\breve{v} - \breve{u}\right\|_{\breve{V}},\ \breve{u}^0 = I_1 \breve{v} \ \forall \breve{v} \in \breve{V},$$

$$\delta_1 = \sqrt{\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}^2 - 1},\ \left\|I - I_1\right\|_{\breve{V}}.$$

Доказательство. Из (4.2.2) имеем

$$\Lambda(\breve{u}^1 - \breve{u}^0, \breve{v}) = -(\Lambda_1(\breve{u}^0, I_1\breve{v}) + \Lambda_2(\breve{u}^0, \breve{v}) - \breve{g}_1(I_1\breve{v}) - \breve{g}_2(\breve{v})) =$$

$$= -\Lambda_1(\breve{u}^0, I_1\breve{v}) - \Lambda_2(\breve{u}^0, \breve{v}) + \breve{g}_1(I_1\breve{v}) + \breve{g}_2(\breve{v}).$$

При $\alpha = 1,\ k = 1,\ \tau_1 = 1,\ \breve{u}^0 = \breve{u} + \breve{\psi}^0$

$$\Lambda(\breve{u}^1 - \breve{u}^0, \breve{v}) = -\Lambda_1(\breve{u}^0, I_1\breve{v}) + \Lambda(\breve{u}, I_1\breve{v}) = \Lambda(\breve{u} - \breve{u}^0, I_1\breve{v}),$$

тогда

$$\Lambda(\breve{u}^1 - \breve{u}^0, \breve{v}) = \Lambda(I_1'(\breve{u} - \breve{u}^0), \breve{v}).$$

Заметим, что

$$\breve{u}^1 - \breve{u}^0 = I_1'(\breve{u} - \breve{u}^0),\ \breve{\psi}^1 = (I - I_1')\breve{\psi}^0,$$

тогда

$$\left\|\breve{u}^1 - \breve{u}^o\right\|_{\breve{V}} \le \left\|I_1\right\|_{\breve{V}} \left\|\breve{u}^0 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}},\ \left\|\breve{u}^1 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le \left\|I - I_1\right\|_{\breve{V}} \left\|\breve{u}^0 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}}.$$

Выполняется

$$\left\|\breve{u}^1 - \breve{u} + \breve{u} - \breve{u}^0\right\|_{\breve{V}}^2 = \left\|\breve{u}^1 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2 + \left\|\breve{u}^0 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2$$

Последнее, т.к.

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}+\breve{u}-\breve{u}^0\right\|_{\breve{V}}^2=\left\|\breve{u}^1-\breve{u}-(\breve{u}^0-\breve{u})\right\|_{\breve{V}}^2=\left\|\breve{\psi}^1-\breve{\psi}^0\right\|_{\breve{V}}^2=$$

$$\Lambda(\breve{\psi}^1-\breve{\psi}^0,\breve{\psi}^1-\breve{\psi}^0)=\Lambda(\breve{\psi}^1,\breve{\psi}^1)+\Lambda(\breve{\psi}^0,\breve{\psi}^0)=\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2+\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2,$$

тогда

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}^0\right\|_{\breve{V}}^2=\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2+\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2\le\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}^2\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2$$

отсюда

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2\le\left(\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}^2-1\right)\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2$$

и далее ч.т.д.

Можно отметить, что, если $I_1\breve{v}=\breve{v}_1,\ \forall\breve{v}\in\breve{V},$ т.е. I_1 является ортопроектором, тогда $\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}=\left\|I-I_1\right\|_{\breve{V}}=1$ и в (4.2.1) при $\alpha=1$ получается, что $\breve{u}^1=\breve{u}$. Это можно заметить и без утверждения 4.2.2, т.к. в указанном случае в (4.2.2) при $\alpha=1$ получается:

$$\breve{u}^1\in\breve{V}:\Lambda(\breve{u}^1,\breve{v})=\breve{g}_1(I_0\breve{v})=\breve{g}_1(I_1\breve{v})\ \forall\breve{v}\in\breve{V},$$

т.к. $I_1\breve{v}=\breve{v}_1$, $\breve{u}^1=\breve{u}+\breve{\psi}^1,\breve{\psi}^1=\breve{\psi}_3^1\in\breve{V}_3$, тогда

$$\Lambda(\breve{u}+\psi_3^1,\breve{v}_0+\breve{v}_3)=\breve{g}_1(\breve{v}_1)=\breve{g}_1(\breve{v}_0)\ ,\ \Lambda(\breve{u},\breve{v}_0)+\Lambda(\psi_3^1,\breve{v}_3)=\breve{g}_1(\breve{v}_0)$$

отсюда

$$\Lambda(\psi_3^1,\breve{v}_3)=0,\ \Lambda(\psi_3^1,\psi_3^1)=0$$

следовательно $\breve{\psi}^1=\breve{\psi}_3^1=0$.

Утверждение 4.2.3. *При* $\alpha=2,\ k=1$ *в (4.2.2) имеют место следующие оценки*

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}\le q_1\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}\le q_1\left\|\breve{v}-\breve{u}\right\|_{\breve{V}},\ \breve{u}^0=\breve{v}_2\ \forall\breve{v}\in\breve{V},$$

$$0\le q_1=max\left\{\left|1-\tau\beta_1\right|,\ \left|1-\tau\right|\ \right\}<1,\ \tau\in(0;2).$$

Доказательство. На подпространстве $\breve{V}_2=\breve{V}_3\oplus\breve{V}_4$. вводится оператор $\breve{R}_2$ из $\breve{V}_2$ в $\breve{V}_2$:

$$\Lambda(\breve{R}_2\breve{u},\breve{v})=\Lambda_2(\breve{u},\breve{v})\ ,\ \forall\breve{u},\breve{v}\in\breve{V}_2.$$

Отметим, что:

$$\beta_1\Lambda(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\le\Lambda_2(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\le\Lambda(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\ ,$$

тогда

$$\beta_1\Lambda(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\le\Lambda(\breve{R}_2\breve{v}_2,\breve{v}_2)\le\Lambda(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\ ,\ \beta_1 I\le\breve{R}_2\le I\ .$$

Заметим, что $\breve{R}_2'=\breve{R}_2$, т.к. $\forall\breve{u},\breve{v}\in\breve{V}_2$

$$\Lambda(\breve{u},\breve{R}_2'\breve{v})=\Lambda(\breve{R}_2\breve{u},\breve{v})=\Lambda_2(\breve{u},\breve{v})=\Lambda_2(\breve{v},\breve{u})=\Lambda(\breve{R}_2\breve{v},\breve{u})=\Lambda(\breve{u},\breve{R}_2\breve{v}).$$

Следовательно, $\breve{R}_2$ ограниченный, симметричный оператор. Так как $\breve{u}^0=\breve{u}+\breve{\psi}^0$, $\breve{\psi}^0=\breve{u}^0-\breve{u}\in\breve{V}_2$, то из (4.2.2)

$$\breve{\psi}^1\in\breve{V}:\Lambda(\breve{\psi}^1-\breve{\psi}^0,\breve{v})=-\tau(\Lambda_1(\breve{\psi}^0,I_1\breve{v})-\Lambda_2(\breve{\psi}^0,\breve{v})\forall\breve{v}\in\breve{V},$$

тогда

$$\Lambda(\breve{\psi}^1,\breve{v})=\Lambda(\breve{\psi}^0,\breve{v})-\tau\Lambda_2(\breve{\psi}^0,\breve{v})=\Lambda(\breve{\psi}^0,\breve{v})-\tau\Lambda(P_2\breve{\psi}^0,\breve{v}),$$

следовательно

$$\Lambda(\breve{\psi}^1,\breve{v})=\Lambda((I-\tau P_2)\breve{\psi}^0,\breve{v}),\breve{\psi}^1=(I-\tau P_2)\breve{\psi}^0,$$

тогда

$$\Lambda(\breve{\psi}^1,\breve{\psi}^1)=\Lambda((I-\tau P_2)\breve{\psi}^0,(I-\tau P_2)\breve{\psi}^0)\le$$

$$\le\sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}_2}\left(\frac{\Lambda((I-\tau\breve{R}_2)\breve{\psi},(I-\tau\breve{R}_2)\breve{\psi})}{\Lambda(\breve{\psi},\breve{\psi})}\right)\Lambda(\breve{\psi}^0,\breve{\psi}^0)\le$$

т.к. оператор $I-\tau\breve{R}_2$ симметричный

$$\le\left(\sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}_2}\left(\frac{\Lambda((I-\tau\breve{R}_2)\breve{\psi},\breve{\psi})}{\Lambda(\breve{\psi},\breve{\psi})}\right)\right)^2\Lambda(\breve{\psi}^0,\breve{\psi}^0)=$$

$$=\left(\sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}_2}\left(1-\tau\frac{\Lambda_2(\breve{\psi},\breve{\psi})}{\Lambda(\breve{\psi},\breve{\psi})}\right)\right)^2\Lambda(\breve{\psi}^0,\breve{\psi}^0)=\max\left\{(1-\tau\beta_1)^2,\,(1-\tau)^2\right\}\Lambda(\breve{\psi}^0,\breve{\psi}^0)$$

следовательно

$$\Lambda(\breve{\psi}^1,\breve{\psi}^1)\le q_1^2\Lambda(\breve{\psi}^0,\breve{\psi}^0)$$

и

$$\Lambda(\breve{u}^1-\breve{u},\breve{u}^1-\breve{u})\le q_1^2\Lambda(\breve{u}^0-\breve{u},\breve{u}^0-\breve{u}),$$

а далее ч.т.д.

Утверждение 4.2.4. *При* $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *в (4.2.2) имеет место следующая оценка*

$$\left\| \breve{u}^k - \breve{u} \right\|_{\breve{V}} \le q^{k-1} \left\| \breve{u}^1 - \breve{u} \right\|_{\breve{V}},$$

где

$$0 \le q = max\left\{ \left|1 - \tau\beta_1\right|, \ \left|1 - \tau\beta_2\right| \ \right\} < 1, \ \tau \in (0; 2\beta_2^{-1}), \ (\tau_1 \ne 1, \ \beta_2 = 1). \ .$$

Доказательство. Вводится оператор $\breve{R}_3$ из $\breve{V}_3$ в $\breve{V}_3$ $(\tau_1 = 1)$:

$$\Lambda(\breve{R}_3 \breve{u}, \breve{v}) = \Lambda_2(\breve{u}, \breve{v}) \quad \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}_3 .$$

Отметим, что

$$\beta_1 \Lambda(\breve{v}_3, \breve{v}_3) \le \Lambda_2(\breve{v}_3, \breve{v}_3) \le \beta_2 \Lambda(\breve{v}_3, \breve{v}_3) \quad \forall \breve{v}_3 \in \breve{V}_3 ,$$

тогда

$$\beta_1 \Lambda(\breve{v}_3, \breve{v}_3) \le \Lambda(\breve{R}_3 \breve{v}_3, \breve{v}_3) \le \beta_2 \Lambda(\breve{v}_3, \breve{v}_3) \ , \ \beta_1 I \le \breve{R}_3 \le \beta_2 I .$$

Заметим, что $\breve{R}_3' = \breve{R}_3$, т.к. $\forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}_3$

$$\Lambda(\breve{u}, \breve{R}_3' \breve{v}) = \Lambda(\breve{R}_3' \breve{u}, \breve{v}) = \Lambda_2(\breve{u}, \breve{v}) = \Lambda_2(\breve{v}, \breve{u}) = \Lambda(\breve{R}_3' \breve{v}, \breve{u}) = \Lambda(\breve{u}, \breve{R}_3' \breve{v}).$$

Следовательно, $\breve{R}_3$ ограниченный, симметричный оператор. Из (4.2.2) при $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ имеем:

$$\breve{\psi}^k \in \breve{V} : \Lambda(\breve{\psi}^k - \breve{\psi}^{k-1}, \breve{v}) = -\tau(\Lambda_1(\breve{\psi}^{k-1}, I_1 \breve{v}) + \Lambda_2(\breve{\psi}^{k-1}, \breve{v})) \forall \breve{v} \in \breve{V}$$

и

$$\Lambda(\breve{\psi}^k, \breve{v}) = \Lambda(\breve{\psi}^{k-1}, \breve{v}) - \tau\Lambda_2(\breve{\psi}^{k-1}, \breve{v}) = \Lambda(\breve{\psi}^{k-1}, \breve{v}) - \tau\Lambda(\breve{R}_3 \breve{\psi}^{k-1}, \breve{v}),$$

тогда

$$\Lambda(\breve{\psi}^k, \breve{v}) = \Lambda((I - \tau \breve{R}_3) \breve{\psi}^{k-1}, \breve{v}), \breve{\psi}^k = (I - \tau \breve{R}_3) \breve{\psi}^{k-1}.$$

Пусть $\breve{T} = I - \tau \breve{R}_3$, тогда

$$\Lambda(\breve{\psi}^k, \breve{\psi}^k) = \Lambda(\breve{T} \breve{\psi}^{k-1}, \breve{T} \breve{\psi}^{k-1}) \le \sup_{\breve{\psi} \in \breve{V}_3} \left(\frac{\Lambda(\breve{T}\breve{\psi}, \breve{T}\breve{\psi})}{\Lambda(\breve{\psi}, \breve{\psi})} \right) \Lambda(\breve{\psi}^{k-1}, \breve{\psi}^{k-1}) \le$$

т.к. оператор $\breve{T}$ симметричный

$$\le \left(\sup_{\breve{\psi} \in \breve{V}_3} \left(\frac{\Lambda(\breve{T}\breve{\psi}, \breve{\psi})}{\Lambda(\breve{\psi}, \breve{\psi})} \right) \right)^2 \Lambda(\breve{\psi}^{k-1}, \breve{\psi}^{k-1}) =$$

$$= \left(\sup_{\breve\psi \in \breve V_3} \left(1 - \tau \frac{\Lambda_2(\breve\psi,\breve\psi)}{\Lambda(\breve\psi,\breve\psi)} \right) \right)^2 \Lambda(\breve\psi^{k-1},\breve\psi^{k-1}) \le$$

$$\le \max\left\{ (1-\tau\beta_1)^2,\, (1-\tau\beta_2)^2 \right\} \Lambda(\breve\psi^{k-1},\breve\psi^{k-1})$$

отсюда

$$\Lambda(\breve\psi^{k},\breve\psi^{k}) \le q^2 \Lambda(\breve\psi^{k-1},\breve\psi^{k-1}),\ \left\| \breve u^k - \breve u \right\|_{\breve V} \le q \left\| \breve u^{k-1} - \breve u \right\|_{\breve V},$$

а далее, ч.т.д. Случай $\tau_1 \ne 1$ рассматривается аналогично с утверждением 4.2.3.. Заметим, что доказательство теоремы 4.2.1 следует из приведённых выше утверждений 4.2.2, 4.2.3 и 4.2.4.

Утверждение 4.2.5. *Предположение 4.2.1 о продолжении функций для теоремы 4.2.1 является необходимым.*

Доказательство. При $\alpha = 2,\ k = 1,\ \tau_1 = 1,$ в (4.2.2) по теореме 4.2.1 при $0 < \beta_1 \le 1$ или $0 \le 1 - \beta_1 < 1$ имеется, что

$$\Lambda(\breve\psi^{1},\breve\psi^{1}) \le \left(1-\beta_1\right)^2 \Lambda(\breve\psi^{0},\breve\psi^{0}),$$

т.к. $(\breve T_1 = I - \breve R_2)$

$$\left(\Lambda(\breve T_1 \breve\psi^0,\breve\psi^0) \right)^2 \le \Lambda(\breve T_1\breve\psi^0,\breve T_1\breve\psi^0)\Lambda(\breve\psi^0,\breve\psi^0) = = \Lambda(\breve\psi^1,\breve\psi^1)\Lambda(\breve\psi^0,\breve\psi^0) \le (1-\beta_1)^2 \left(\Lambda(\breve\psi^0,\breve\psi^0) \right)^2,$$

тогда

$$\Lambda(\breve T_1\breve\psi^0,\breve\psi^0) \le (1-\beta_1)\left(\Lambda(\breve\psi^0,\breve\psi^0) \right),$$

$$\Lambda(\breve\psi^0,\breve\psi^0) - \Lambda_2(\breve\psi^0,\breve\psi^0) \le (1-\beta_1)\left(\Lambda(\breve\psi^0,\breve\psi^0) \right)$$

отсюда

$$\beta_1 \Lambda(\breve\psi^0,\breve\psi^0) \le \Lambda_2(\breve\psi^0,\breve\psi^0)\ \forall\, \breve\psi^0 \in \breve V_2.$$

Последнее потому, что $\breve\psi^0 = \breve u^0 - \breve u$, а любая фиксированная функция $\breve u \in \breve V_2$ может быть решением задачи из (4.2.1) при этом $\breve g_2 \in \breve H_2' = (\breve V_2(\Omega_2))'$, т.к. $\breve g_2(\breve v) = \Lambda_2(\breve u,\breve v)$, $\breve V_3 \subset \breve V_2$ и, следовательно при $0 < \beta_1 \le 1$

$$\beta_1 \Lambda(\breve\psi_3^0,\breve\psi_3^0) \le \Lambda_2(\breve\psi_3^0,\breve\psi_3^0)\ \forall\, \breve\psi_3^0 \in \breve V_3.$$

Замечание 4.2.1. Как отмечалось, например, в [97, 98] при дискретизации задачи из (4.2.1) и итерационного процесса из (4.2.2), предложенных в [94, 95] при

$\alpha=1$ оператор $I_0\,(I_1)$ можно выбирать независящим от параметров дискретизации, производящим преобразование функций на $\Omega\,(\Omega_1)$ не только в приграничной полосе к $\overline{S}$ и получать независимость от параметров дискретизации величины δ_1. Это сделано в работе [52] при решении эллиптических уравнений второго порядка, где строились явные операторы продолжения $P=I-I_1$ на дискретном уровне, нормы, которых не зависят от шагов сетки.

Пример 4.2.1. Рассматривается, по сути, одномерная задача, см. [97, 98] при $\alpha=1,\, a_1=a_2=0,\, \Omega_1=(-1;0)\times(-1;1),\, \Omega_2=(0;1)\times(-1;1),\, \Omega=(-1;1)\times(-1;1)$,

$$\Gamma_{1,0}=\{-1,\,0\}\times(-1;1),\,\Gamma_{1,1}=\varnothing,\,\Gamma_{1,2}=(-1,\,0)\times\{-1,\,1\},\Gamma_{1,3}=\varnothing,$$

$$\Gamma_0=\{-1,\,1\}\times(-1;1),\,\Gamma_1=\varnothing,\,\Gamma_2=(-1,\,1)\times\{-1,\,1\},\Gamma_3=\varnothing,$$

$$\breve{g}_1(\breve{v}_1)=\int_{\Omega_1}\breve{f}_1\breve{v}_1 d\Omega_1,\; \breve{f}_1(x,y)=\begin{cases}24,\; x\in(-H;0),\\ 0,\;\; x\notin(-H;0),\end{cases}\quad H\in(0;1).$$

Решение фиктивно продолженной задачи следующее

$$\breve{u}(x,y)=\begin{cases}\breve{A}_1+\breve{A}_2x+\breve{A}_3x^2+\breve{A}_4x^3, & x\in(-1;-H),\\ \breve{B}_1+\breve{B}_2x+\breve{B}_3x^2+\breve{B}_4x^3+x^4, & x\in[-H;0),\\ 0, & x\notin(-1;0),\end{cases}$$

где

$$\breve{A}_1=-H^4,\,\breve{A}_2=-4H^3,\,\breve{A}_3=-8H^3+3H^4,\,\breve{A}_4=-4H^3+2H^4,$$

$$\breve{B}_1=0,\,\breve{B}_2=0,\,\breve{B}_3=6H^2-8H^3+3H^4,\,\breve{B}_4=4H-4H^3+2H^4.$$

При этом

$$\|\breve{u}\|_{\breve{V}}=\sqrt{57{,}6H^5-128H^6+96H^7-24H^8}.$$

Пусть

$$\breve{u}^0=\breve{u}+\breve{\psi}^0=0,\,\breve{\psi}^0=-\breve{u},$$

оператор I_0 следующего вида

$$I_0\breve{v}=\breve{v}-\hat{\delta}_1\varphi_1-\hat{\delta}_2\varphi_2\;\forall\breve{v}\in\breve{V},$$

где

$$\hat{\delta}_1 = v(0,y) - 0{,}5h_1v_x(0,y),\ \hat{\delta}_2 = v(0,y) + 0{,}5h_1v_x(0,y),$$
$$\varphi_1(x,y) = \varphi_0(x/h_1 + 2, y),\ \varphi_2(x,y) = \varphi_0(x/h_1 + 1, y),$$

$$\varphi_0(x,y) = \begin{cases} 0{,}5x^2, & x \in [0;1], \\ -x^2 + 3x - 1{,}5, & x \in [1;2], \\ 0{,}5x^2 - 3x - 4{,}5, & x \in [2;3], \\ 0, & x \notin [0;3], \end{cases}$$

$0 < 2h_1 \le 1$, $0 < H \le h_1$, то в (4): $\breve{u}^k = \breve{u} + \breve{\alpha}_k\omega + \breve{\beta}_k\varphi,\ \ k \in \mathbb{N},\ \ \omega, \varphi \in \breve{V}_3$, где

$$\omega(x,y) = \begin{cases} 1/24 - x^2/8 - x^3/12, & x \in [-1;0], \\ 1/24 - x^2/8 + x^3/12, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [-1;1], \end{cases}$$

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} x/8 + x^2/4 + x^3/8, & x \in [-1;0], \\ x/8 - x^2/4 + x^3/8, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [-1;1], \end{cases}$$

при этом

$$\breve{\alpha}_1 = \overline{\alpha}_1 - (24H - 4H^3/h_1^2),\ \ \breve{\beta}_1 = \overline{\beta}_1 - (-12H^2 + 6H^3/h_1),$$
$$\overline{\alpha}_1 = 24H - 24H^3 + 12H^4,\ \ \overline{\beta}_1 = -12H^2 + 16H^3 - 6H^4.$$

Можно отметить, что

$$\left\|\breve{u}^1 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} = \sqrt{(4h_1^{-4}/3 - 7h_1^{-2} - 48h_1^{-1} + 112)H^6 + (8h_1^{-2} + 18h_1^{-1} - 96)H^7 + 33H^8}.$$

Если, например, $h_1 = 0{,}5$, тогда

$$\sup_{H\in(0;0{,}5)} \frac{\left\|\breve{u}^1 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}}}{\left\|\breve{u}\right\|_{\breve{V}}} = \sqrt{\frac{215}{1752}}.$$

Пусть $\tau_k = \tau$ при $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, тогда имеет место

$$\begin{pmatrix} \breve{\alpha}_k \\ \breve{\beta}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \tau/2 & -3\tau/4 \\ -\tau/4 & 1 - \tau/2 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} \breve{\alpha}_1 \\ \breve{\beta}_1 \end{pmatrix}.$$

Возникающая матрица имеет следующие собственные числа

$$\lambda_1(\tau) = 1 - (1/2 + \sqrt{3}/4)\tau,\ \lambda_2(\tau) = 1 - (1/2 - \sqrt{3}/4)\tau,$$

при этом, $\left|\lambda_j(\tau)\right| < 1,\ j = 1,2,$ когда $\tau \in (0;t),$ где $t = 8\big/(2+\sqrt{3}) > 2$. Заметим, что

$$\min_{\tau\in(0;t)}\max_{j=1,2)}\left|\lambda_j(\tau)\right| = \sqrt{3}\big/2,$$

когда $-\lambda_1(\tau) = \lambda_2(\tau)$ при $\tau = 2.$ Видно, что при $\tau \in (0;t)$ $\breve{u}^k$ сходятся к $\breve{u}$. При $\tau = 2$ получается

$$\left\|\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le \left(\sqrt{3}/2\right)^{k-1}\left\|\breve{u}^1 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}}.$$

Окончательно имеем, что

$$\left\|\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le \sqrt{215/1752}\left(\sqrt{3}/2\right)^{k-1}\left\|\breve{u}\right\|_{\breve{V}}, k \in \mathbb{N}.$$

Если в (4.2.1) взять $h_1 \in (0;0,5]$, что будет в соответствии с подходами в [46, 97, 98], то при $\breve{u}^0 = 0$

$$\exists c \in (0;+\infty):\ \sup_{H\in(0;h_1)}\frac{\left\|\breve{u}^1 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}}}{\left\|\breve{u}\right\|_{\breve{V}}} \le c h_1^{-3/2}.$$

Как отмечалось в [98] при дискретизации задачи из (4.2.1), если в (4.2.2) взять $\breve{u}^0 = 0$, $I_0 = I$ на первой итерации, а затем $I = 0$, что будет в соответствии с подходом в [46, 48], тогда $\breve{u}^1 = \breve{u} + \bar{\alpha}_1\omega + \bar{\beta}_1\varphi$ является нулевым приближением в [48] и

$$\exists c \in (0;+\infty):\ \left\|\breve{u}^1 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le cH^{-3/2}\left\|\breve{u}\right\|_{\breve{V}},$$

хотя конечно

$$\sup_{H\in(0;1)}\frac{\left\|\breve{u}^1 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}}}{\left\|\breve{u}\right\|_{\breve{V}}} = +\infty.$$

Последнее отмечалось затем в [94, 95, 98], если теоретически предположить, что в (4.2.1) $\breve{u}^0 = 0$, $I_0 = I_0'$, т.е. $I_0\breve{v} = \breve{v}_0\ \forall\breve{v} \in \breve{V},$ что будет в соответствии с подходом в [49], то можно отметить ввиду утверждения 4.4.1, что тогда функция $\breve{u}^1 = \breve{u}$ является нулевым приближением в [49] и итерационный процесс в (4.2.2) сходится за одну итерацию.

Пример 4.2.2. Рассматривается, по сути, одномерная задача, при $\alpha = 2,\ a_1 = a_2 = 0,\ \Omega_1 = (-1;0)\times(-1;1),\ \Omega_2 = (0;1)\times(-1;1),\ \Omega = (-1;1)\times(-1;1)$,

$$\Gamma_{2,0} = \{1\}\times(-1;1),\ \Gamma_{2,1} = \varnothing,\ \Gamma_{2,2} = (0,1)\times\{-1,1\},\Gamma_{1,3} = \{0\}\times(-1;1),$$

$$\Gamma_0 = \{-1,1\}\times(-1;1),\ \Gamma_1 = \varnothing,\ \Gamma_2 = (-1,1)\times\{-1,1\},\Gamma_3 = \varnothing,$$

$$\breve{g}_2(\breve{v}_2) = \int_{\Omega_2} \breve{f}_2\breve{v}_2 d\Omega_2\ ,\ \breve{f}_2(x,y) = 24.$$

Решение фиктивно продолженной задачи следующее

$$\breve{u}(x,y) = \begin{cases} 3-4x-17x^2-10x^3, & x\in(-1;\,0), \\ 3-4x+x^4, & x\in(0;\,1), \end{cases}$$

При этом

$$\|\breve{u}\|_{\breve{V}} = \sqrt{689{,}6}.$$

Пусть

$$\breve{u}^0 = \breve{u} + \breve{\psi}^0 = 0, \breve{\psi}^0 = -\breve{u},\ \breve{u}^k = \breve{u} + \breve{\alpha}_k\omega + \breve{\beta}_k\varphi,\ \ k\in\mathbb{N},\ \ \omega,\varphi\in\breve{V}_3, \text{ где}$$

$$\omega(x,y) = \begin{cases} 1/24 - x^2/8 - x^3/12,\ x\in[-1;0], \\ 1/24 - x^2/8 + x^3/12,\ x\in[0;1], \\ 0, \qquad x\notin[-1;1], \end{cases}$$

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} x/8 + x^2/4 + x^3/8,\ x\in[-1;0], \\ x/8 - x^2/4 + x^3/8,\ x\in[0;1], \\ 0, \qquad x\notin[-1;1], \end{cases}$$

Если $\tau_1 = 1$, то

$$\breve{\alpha}_1 = -60,\ \ \breve{\beta}_1 = 34,$$

Можно отметить, что

$$\left\|\breve{u}^1 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} = \sqrt{589}.$$

Пусть $\tau_k = \tau$ при $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, тогда имеет место

$$\begin{pmatrix}\breve{\alpha}_k\\ \breve{\beta}_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\tau/2 & -3\tau/4 \\ -\tau/4 & 1-\tau/2 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix}\breve{\alpha}_1\\ \breve{\beta}_1\end{pmatrix}.$$

Возникающая матрица имеет следующие собственные числа

$$\lambda_1(\tau)=1-(1/2+\sqrt{3}/4)\tau,\ \lambda_2(\tau)=1-(1/2-\sqrt{3}/4)\tau,$$

при этом, $\left|\lambda_j(\tau)\right|<1,\ j=1,2,$ когда $\tau\in(0;t),$ где $t=8/(2+\sqrt{3})>2$. Заметим, что

$$\min_{\tau\in(0;t)}\max_{j=1,2)}\left|\lambda_j(\tau)\right|=\sqrt{3}/2,$$

когда $-\lambda_1(\tau)=\lambda_2(\tau)$ при $\tau=2.$ Видно, что при $\tau\in(0;t)$ $\breve{u}^k$ сходятся к $\breve{u}$. При $\tau=2$ получается

$$\left\|\breve{u}^k-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}\le\left(\sqrt{3}/2\right)^{k-1}\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}.$$

Окончательно имеем, что

$$\left\|\breve{u}^k-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}\le\sqrt{2945/3448}\left(\sqrt{3}/2\right)^{k-1}\left\|\breve{u}\right\|_{\breve{V}},k\in\mathbb{N}.$$

4.3. Численные модифицированные методы фиктивных компонент для пластин

Задачи из (4.1.1), в основном, рассматриваются, когда $\partial\Omega_\alpha=\overline{\Gamma}_{\alpha,3\alpha-3}$. При дискретизации задач из (4.2.1) будем дополнительно предполагать, что

$$\breve{V}=\breve{V}(\Omega)=\left\{\breve{v}\in W_2^2(\Omega):\breve{v}\big|_{\Gamma_0\cup\Gamma_1}=0,\ \frac{\partial\breve{v}}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_0\cup\Gamma_2}=0\right\},$$

где область $\Omega=(0;b_1)\times(0;b_2),$ с границей:

$$\partial\Omega=\overline{s},\ s=\Gamma_1\cup\Gamma_2,\ \Gamma_0=\varnothing,\ \Gamma_1=\left\{b_1\right\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\left\{b_2\right\},$$
$$\Gamma_2=\left\{0\right\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\left\{0\right\},\ \Gamma_3=\varnothing,\ b_1,b_2\in\left(0;+\infty\right),$$

т.е. рассматриваются задачи, решение которых изучалось уже ранее. Предлагается рассматривать *СЛАУ* – системы линейных алгебраических уравнений, получающихся при дискретизации задач предложенных в (4.2.1) с учётом сказанного выше на основе метода конечных элементов, фиктивно продолженные численные модели перемещений пластин на упругих основаниях при смешанных краевых условиях, т.е.

$$\overline{u}\in\mathbb{R}^N:\ B\overline{u}=\overline{g},\ \overline{g}\in\mathbb{R}^N, \tag{4.3.1}$$

где $\overline{v} \in \mathbb{R}^N$: $\overline{v} = (v_1,...,v_N)'$, $N = m \cdot n$, m, $n \in \mathbb{N}$, а $v_{n(i-1)+j} = v_{i,j}$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$, и $v_{i,j}$ являются значениями функций дискретных аргументов соответствующих узлам сетки $(x_i, y_j) = \big((i-0{,}5)h_1, (j-0{,}5)h_2\big)$, шаги сетки $h_1 = b_1/(m+0{,}5)$, $h_2 = b_2/(n+0{,}5)$, состоящей из указанных выше узлов, а матрица B размерности $N \times N$, определяется следующим образом:

$$\left\langle B\overline{u}, \overline{v} \right\rangle = \Lambda_1(\tilde{u}, I_1\tilde{v}) + \Lambda_2(\tilde{u}, \tilde{v}) \, \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V} \subset \breve{V},$$

векторы $\overline{g}$ определяются следующим образом

$$\left\langle \overline{g}, \overline{v} \right\rangle = \breve{g}_1(I_1\tilde{v}) + \breve{g}_2(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Здесь $\left\langle \cdot, \cdot \right\rangle$ – скалярное произведение векторов следующего вида $\left\langle \overline{u}, \overline{v} \right\rangle = \sum_{k=1}^{N} u_k v_k h_1 h_2 \quad \forall \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^N$, а подпространство $\tilde{V} \subset \breve{V}$ определяется так, что

$$\tilde{V} = \left\{ \tilde{v} : \tilde{v} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_{i,j} \Phi^{i,j}(x,y), v_{i,j} \in \mathbb{R}, \right\},$$

где базисные функции

$$\Phi^{i,j}(x,y) = \Psi_{1,i}(x)\Psi_{2,j}(y),$$

$$\Psi_{1,i}(x) = \mathrm{E}(1/i)\Psi(x/h_1 - i + 3) + \Psi(x/h_1 - i + 2) - \mathrm{E}(i/m)\Psi(x/h_1 - i),$$

$$\Psi_{2,j}(y) = \mathrm{E}(1/j)\Psi(y/h_2 - j + 3) + \Psi(y/h_2 - i + 2) - \mathrm{E}(j/n)\Psi(y/h_2 - j), \; i = 1,...,m,$$

$$j = 1,...,n,$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} 0{,}5z^2, & z \in [0;1], \\ -z^2 + 3z - 1{,}5, & z \in [1;2], \\ 0{,}5z^2 - 3z + 4{,}5, & z \in [2;3], \end{cases}$$

$\Psi(z) = 0$, $z \notin (0;3)$, $\mathrm{E}(\cdot)$ – функция целая часть числа. Будем предполагать, что оператор I_0 просто обнуляет все коэффициенты $v_{i,j}$ у базисных функций $\Phi^{i,j}(x,y)$ внутренности носителей, которых имеют не пустое пересечение с границей $\overline{S}$, т.е. с границей (частью границы области) через которую осуществляется продолжение задачи и её решения при $\alpha = 1$. Предполагается, что оператор I_1 обнуляет все коэффициенты $v_{i,j}$ у базисных функций $\Phi^{i,j}(x,y)$, если внутренности их носителей имеют не пустое пересечение с $\Omega \setminus \Omega_1$ при $\alpha = 1$. Отметим, что решение задач из (4.3.1) при каждом $\alpha = 1,2$ существует, единственно и известны оценки типа [59]:

$$1.\ \left\| \breve{u} - \tilde{u} \right\|_{W_2^{m_1}(\Omega)} \le c \left| \overline{h} \right|^{m_2 - m_1} \left\| \breve{u} \right\|_{W_2^{m_2}(\Omega)},$$

$$2.\ \lim_{\left|\overline{h}\right| \to 0} \left\| \breve{u} - \tilde{u} \right\|_{W_2^2(\Omega)} = 0,\ \left| \overline{h} \right| = \max\left\{ h_1, h_2 \right\}.$$

Введём дополнительно в рассмотрение подпространства:

$$\tilde{V}_{i^2} = \left\{ \tilde{v}_{i^2} \in \tilde{V} : \tilde{v}_{i^2} \Big|_{\ \Omega \setminus \Omega_i} = 0 \right\}\ i = 1,2.$$

Пусть $\tilde{V}_0 = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_4$ прямая сумма подпространств $\tilde{V}_{i^2}$ $i = 1,2$ в скалярном произведении $\Lambda(\cdot,\cdot)$, подпространство

$$\tilde{V}_3 = \left\{ \tilde{v}_3 \in \tilde{V} : \Lambda(\tilde{v}_3, \tilde{v}_0) = 0\ \forall \tilde{v}_0 \in \tilde{V}_0 \right\},$$

т.е. $\tilde{V} = \tilde{V}_0 \oplus \tilde{V}_3$ в скалярном произведении $\Lambda(\cdot,\cdot)$, а $\tilde{v}_0 \in \tilde{V}, \tilde{v}_3 \in \tilde{V}$ обозначают проекции $\tilde{v}$ на соответствующие подпространства. Вводятся следующие подпространства: $\tilde{V}_{8-3i} = \tilde{V}_3 \oplus \tilde{V}_{i^2}$, $i = 1,2,$ тогда имеет место $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2$.

Замечание 4.3.1. *Имеют место следующие неравенства*

$$\exists \hat{\beta}_1 \in (0;1]\ \exists \hat{\beta}_2 \in \left[\hat{\beta}_1; 1 \right] : \hat{\beta}_1 \Lambda(\tilde{v}_3, \tilde{v}_3) \le \Lambda_2(\tilde{v}_3, \tilde{v}_3) \le \hat{\beta}_2 \Lambda(\tilde{v}_3, \tilde{v}_3)\ \forall \tilde{v}_3 \in \tilde{V}_3.$$

Можно считать, что $\hat{\beta}_2 = 1$.

Предлагаются модификации методов фиктивных компонент для пластин на дискретном уровне. Это итерационные процессы, численные методы приближённых вычислений перемещений пластин на упругих основаниях при смешанных краевых условиях следующего вида:

$$\tilde{u}^k \in \tilde{V} : \Lambda(\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}, \tilde{v}) = -\tau_k (\Lambda_1(\tilde{u}^{k-1}, I_1 \tilde{v}) + \Lambda_2(\tilde{u}^{k-1}, \tilde{v}) - \breve{g}_1(I_1 \tilde{v}) - \breve{g}_2(\tilde{v}))\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\tau_1 = (2 - \alpha) + (\alpha - 1)\tau,\ \tau \in (0;2),\ (\alpha = 2,\ \tau_1 \ne 1,\ \hat{\beta}_2 = 1),$$

$$\tau_k = \tau \in (0; 2\hat{\beta}_2^{-1}),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \forall \tilde{u}^0 \in \tilde{V}_\alpha \subset \tilde{V},\ \alpha = 1,2; \qquad (4.3.2)$$

модификации методов фиктивных компонент на матричном уровне

$$\overline{u}^k \in \mathbb{R}^N : \Lambda(\overline{u}^k - \overline{u}^{k-1}) = -\tau_k (B\overline{u}^{k-1} - \overline{g}),$$

$$\tau_1 = (2-\alpha) + (\alpha - 1)\tau,\ \tau \in (0;2),\ (\alpha = 2,\ \tau_1 \neq 1,\ \hat{\beta}_2 = 1),$$

$$\tau_k = \tau \in (0; 2\hat{\beta}_2^{-1}),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \forall \overline{u}^0 \in \overline{V}_\alpha \subset \mathbb{R}^N,\ \alpha = 1,2, \qquad (4.3.3)$$

где

$$\tilde{V}_1 = \left\{ \tilde{v}_1 \in \tilde{V} : \tilde{v}_1 \in \breve{V}_1 \right\},\ \tilde{V}_2 = \left\{ \tilde{v}_2 \in \tilde{V} : \Lambda(\tilde{v}_2, \tilde{v}_1) = 0\ \forall \tilde{v}_1 \in \tilde{V}_1 \right\},$$

$\overline{V}_\alpha \subset \mathbb{R}^N$ подпространства, соответствующие подпространствам, $\tilde{V}_\alpha$ $\alpha = 1,2$, а матрица Λ размерности $N \times N$, определяется следующим образом:

$$\left\langle \Lambda \overline{u}, \overline{v} \right\rangle = \Lambda(\tilde{u}, \tilde{v})\ \ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V} \subset \breve{V}.$$

Также используется следующая норма

$$\|\overline{v}\|_\Lambda = \sqrt{\left\langle \Lambda \overline{v}, \overline{v} \right\rangle}.$$

В подпространстве $\tilde{V} \subset \breve{V}$ естественно вводится норма

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{V}} = \|\tilde{v}\|_{\breve{V}}.$$

Замечание 4.3.2. *Если предполагать, что оператор I_0 просто обнуляет все коэффициенты $v_{i,j}$ у базисных функций $\Phi^{i,j}(x,y)$ внутренности носителей, которых имеют не пустое пересечение с границей $\overline{S}$, т.е. с границей (частью границы области) через которую осуществляется продолжение задачи и её решения при $\alpha = 1$, что соответствует, тогда подходу из [46] для уравнений второго порядка, то в нашем случае*

$$\exists c \in (0 + \infty) : \delta_1 = \sqrt{\|I_1\|_{\tilde{V}}^2 - 1},\ \|I - I_1\|_{\tilde{V}} \le c\left|\underline{h}\right|^{-3/2},\ \left|\underline{h}\right| = \min\{h_1, h_2\}.$$

Предполагается, что оператор I_1 обнуляет все коэффициенты $v_{i,j}$ у базисных функций $\Phi^{i,j}(x,y)$, если внутренности их носителей имеют не пустое пересечение с $\Omega \setminus \Omega_1$ при $\alpha = 1$.

Следствие 4.3.1. *Для итерационных процессов из (4.3.3) имеют место следующие оценки*

$$\left\|\overline{u}^k - \overline{u}\right\|_\Lambda \le \varepsilon_\alpha \left\|\overline{u}^0 - \overline{u}\right\|_\Lambda,\ k \in \mathbb{N},\ \alpha = 1,2,$$

где

$$\varepsilon_\alpha = \Big((2-\alpha)\hat{\delta}_1 + (\alpha-1)q_1\Big)q^{k-1},$$

$$\hat{\delta}_1 = \sqrt{\|I_1\|^2_{\tilde{V}} - 1},\ \|I - I_1\|_{\tilde{V}},\ 0 \le q_1 = max\Big\{\Big|1-\tau\hat{\beta}_1\Big|,\ \Big|1-\tau\Big|\ \Big\} < 1,\ \tau \in (0;2),$$

$$0 \le q = max\Big\{\Big|1-\tau\hat{\beta}_1\Big|,\ \Big|1-\tau\hat{\beta}_2\Big|\ \Big\} < 1,\ \tau \in (0; 2\hat{\beta}_2^{-1}),\ (\alpha = 2,\ \tau_1 \ne 1,\ \hat{\beta}_2 = 1).$$

Здесь I оператор тождественного преобразования из $\tilde{V}$ в $\tilde{V}$. Можно отметить, что

$$\tilde{u},\ I_1\tilde{u}^k \in \tilde{V}_1,\ \big\|I_1\tilde{u}^k - \tilde{u}\big\|_{\tilde{V}} \le \|I_1\|_{\tilde{V}} \big\|\tilde{u}^k - \tilde{u}\big\|_{\tilde{V}},\ \alpha = 1.$$

Вывод. Для решения задач из (4.3.1) с N неизвестными предложенными итерационными процессами из (4.3.3) с относительными погрешностями ε_α, требуется при $\alpha = 1$ не более чем $O(N(\ln N + |\ln\varepsilon_\alpha|)|\ln\varepsilon_\alpha|)$ арифметических операций, при $\alpha = 2$ и не более чем $O(N\ln^2\varepsilon_\alpha)$ арифметических операций. Для выбора итерационных параметров и ускорения сходимости итерационных процессов из (4.3.3) можно использовать известные вариационные методы и рекомендовать со второй итерации, при $\alpha = 1$ метод скорейшего спуска, а при $\alpha = 2$ метод минимальных поправок [42, 67, 70]. При $\alpha = 1$ по определению полагается $\tau_1 = 1$, а при $\alpha = 2$ можно рекомендовать выбрать $\tau_1 = 1$.

4.4. Алгоритмы для программ вычислений перемещений пластин на продолжениях

Рассматривается задача из (4.3.1) при $\alpha = 1$

$$\overline{u} \in \mathbb{R}^N:\ B\overline{u} = \overline{g},\ \overline{g} \in \mathbb{R}^N$$

и итерационный процесс из (4.3.3), т.е. модификация метода фиктивных компонент на матричном уровне при $\alpha = 1$

$$\overline{u}^k \in \mathbb{R}^N : \Lambda(\overline{u}^k - \overline{u}^{k-1}) = -\tau_k(B\overline{u}^{k-1} - \overline{g}),$$

$$\tau_1 = 1, \quad \tau_k = \tau \in (0; 2\hat{\beta}_2^{-1}), \, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \, \forall \overline{u}^0 \in \overline{V}_1 \subset \mathbb{R}^N.$$

Для выбора итерационных параметров в модификации метода фиктивных компонент применяется метод скорейшего спуска [42, 67, 70]. Для рассматриваемой задачи и итерационного процесса, тогда предлагается следующий алгоритм вычислений:

1) вычисляется первое приближение $\overline{u}^1 \in \mathbb{R}^N : \Lambda\overline{u}^1 = \overline{g} - B\overline{u}^0 \;\; \forall \overline{u}^0 \in \overline{V}_1$,

2) вычисляется первая невязка $\overline{r}^1 : \overline{r}^1 = B\overline{\psi}^1 = B\overline{u}^1 - \overline{g}$,

3) вычисляется квадрат нормы ошибки $\mathrm{E}_1 = \left\| \overline{\psi}^1 \right\|_B^2 = \left\langle B\overline{\psi}^1, \overline{\psi}^1 \right\rangle = \left\langle \overline{r}^1, \overline{u}^1 \right\rangle$,

4) находится поправка $\overline{w}^{k-1} \in \mathbb{R}^N : \; \Lambda\overline{w}^{k-1} = \overline{r}^{k-1}, \, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

5) вычисляется итерационный параметр

$$\tau_k = \frac{\left\langle \overline{r}^{k-1}, \overline{w}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle B\overline{w}^{k-1}, \overline{w}^{k-1} \right\rangle} \; k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

6) вычисляется новое приближение $\overline{u}^k = \overline{u}^{k-1} - \tau_k \overline{w}^{k-1} \;\; k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

7) вычисляется новая невязка $\overline{r}^k : \overline{r}^k = B\overline{\psi}^k = B\overline{u}^k - \overline{g}, \, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

8) вычисляется квадрат нормы новой ошибки

$$\mathrm{E}_k = \left\| \overline{\psi}_2^k \right\|_B^2 = \left\langle B\overline{\psi}^k, \overline{\psi}^k \right\rangle = \left\langle \overline{r}^k, \overline{u}^k \right\rangle \; k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

9) проверяется условие остановки итераций $\mathrm{E}_k / \mathrm{E}_1 < \mathrm{E}^2, \, \mathrm{E} \in (0;\, 1), \, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

При вычислениях с умножением матрицы B естественно учитывать, что $\overline{u}^0 \in \overline{V}_1$ и ошибки $\overline{\psi}^k \in \overline{V}_3 \subset \mathbb{R}^N, \, k \in \mathbb{N}$, а $\overline{V}_3 -$ подпространство, соответствующее подпространству, $\tilde{V}_3$. Заметим в условии остановки итерационного процесса $\mathrm{E} \in (0;\, 1) -$задаваемая относительная погрешность. Можно использовать критерии окончания итерационных процессов из [55].

Рассматривается задача из (4.3.1) при $\alpha = 2$

$$\overline{u} \in \mathbb{R}^N : \; B\overline{u} = \overline{g} \, , \; \overline{g} \in \mathbb{R}^N$$

и итерационный процесс из (4.3.3), т.е. модификация метода фиктивных компонент на матричном уровне при $\alpha = 2$

$$\overline{u}^k \in \mathbb{R}^N : \Lambda(\overline{u}^k - \overline{u}^{k-1}) = -\tau_k (B\overline{u}^{k-1} - \overline{g}),$$

$$\tau_1 = \tau,\ \tau \in (0;2),\ (\tau_1 \neq 1,\ \hat{\beta}_2 = 1),\ \tau_k = \tau \in (0;2\hat{\beta}_2^{-1}),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \forall \overline{u}^0 \in \overline{V}_2 \subset \mathbb{R}^N.$$

Для выбора итерационных параметров в модификации метода фиктивных компонент применяется метод минимальных поправок из [67, 70]. Для рассматриваемой задачи и итерационного процесса, тогда предлагается следующий алгоритм вычислений:

1) выбирается нулевое начальное приближение $\forall \overline{u}^0 \in \overline{V}_2$ $(\overline{u}^0 = \overline{0})$,

2) вычисляется невязка $\overline{r}^{k-1} : \overline{r}^{k-1} = B\overline{u}^{k-1} - \overline{g},\ k \in \mathbb{N}$,

3) находится поправка $\overline{w}^{k-1} \in \mathbb{R}^N :\ \Lambda \overline{w}^{k-1} = \overline{r}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}$,

4) вычисляется квадрат нормы ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\| \vec{\overline{\psi}}^{k-1} \right\|^2_{B'\Lambda^{-1}B} = \left\langle \overline{r}^{k-1}, \overline{w}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N},$$

5) проверяется условие остановки итераций $\mathrm{E}_{k-1}/\mathrm{E}_0 < \mathrm{E}^2,\ \mathrm{E} \in (0;\,1),\ k \in \mathbb{N}$,

6) дополнительно вычисляется вектор $\overline{\eta}^{k-1} : \overline{\eta}^{k-1} = B\overline{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}$,

7) дополнительно находится вектор $\overline{\xi}^{k-1} \in \mathbb{R}^N :\ \Lambda \overline{\xi}^{k-1} = \overline{\eta}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}$,

8) вычисляется итерационный параметр

$$\tau_k = \frac{\left\langle B\overline{w}^{k-1}, \overline{w}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \Lambda^{-1} B\overline{w}^{k-1}, B\overline{w}^{k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \overline{\eta}^{k-1}, \overline{w}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \overline{\xi}^{k-1}, \overline{\eta}^{k-1} \right\rangle},\ k \in \mathbb{N},$$

9) вычисляется новое приближение $\overline{u}^k = \overline{u}^{k-1} - \tau_k \overline{w}^{k-1}\ k \in \mathbb{N}$.

При вычислениях с умножением матрицы B естественно учитывать, что $\overline{u}^0 \in \overline{V}_2$ и ошибки $\overline{\psi}^k \in \overline{V}_2 \subset \mathbb{R}^N,\ k \in \mathbb{N}$, а $\overline{V}_2 -$ подпространство, соответствующее подпространству $\tilde{V}_2$. Если без вычислений выбирать $\tau_1 = 1$, то ошибки $\overline{\psi}^k \in \overline{V}_3 \subset \mathbb{R}^N,\ k \in \mathbb{N}$, а $\overline{V}_3 -$ подпространство, соответствующее подпространству $\tilde{V}_3$.Заметим в условии остановки итерационного процесса $\mathrm{E} \in (0;\,1) -$ задаваемая относительная погрешность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы. Для вычислений перемещений прямоугольных мембран и пластин при найденных и указанных краевых условиях построены асимптотически оптимальные методы. Вычисления перемещений пластин с помощью модификаций методов фиктивных компонент эффективно сведены к решениям указанных ранее задач в прямоугольных областях.

1. Разработан приближенный аналитический метод для вычислений перемещений прямоугольной пластины, при шарнирном закреплении на двух смежных сторонах и условиях симметрии на двух других сторонах. Получены оценки сходимости в этом методе.
2. Построены методы вычислений перемещений пластин при модификации методов фиктивных компонент на непрерывном уровне. Получены оценки сходимости в модифицированных методах.
3. Разработаны численные методы для вычислений перемещений прямоугольных мембран и пластин при найденных и указанных смешанных краевых условиях асимптотически оптимальные по количеству арифметических операций на ЭВМ.
4. При модификации методов фиктивных компонент, построены численные методы вычислений перемещений пластин логарифмически оптимальные при жесткой заделке и асимптотически оптимальные при свободном опирании по количеству арифметических операций на ЭВМ.
5. Написаны программы для ЭВМ, на которых базируются все расчёты в алгоритмах по предложенным методам вычислений перемещений мембран и пластин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астраханцев, Г.П. Метод фиктивных областей для эллиптического уравнения второго порядка с естественными граничными условиями / Г.П. Астраханцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1978. – Т. 18, № 1. – С. 118–125.

2. Астраханцев, Г.П. Метод декомпозиции области для задач об изгибе неоднородных пластин / Г.П. Астраханцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38, № 10. – С. 1758–1766.

3. Беллман, Р. Динамическое программирование и уравнения в частных производных / Р. Беллман, Э. Энджел – М.: Мир, 1974. – 204 с.

4. Булеев, Н.И. Метод неполной факторизации для решения двумерных и трехмерных уравнений типа диффузии / Н.И. Булеев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1970. – Т. 10, № 4 – С. 1042–1044.

5. Вебер, Б. Предобуславливатель одной конечно-элементной матрицы для эллиптического уравнения четвертого порядка / Б. Вебер, В.Г. Корнеев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – Т. 33, № 3. – С. 364–379.

6. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

7. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

8. Гилёва, Л.В. Два многосеточных итерационных алгоритма для дискретного аналога бигармонического уравнения / Л.В. Гилёва, В.В. Шайдуров // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2004. – Т. 7, № 3. – С. 213–228.

9. Гловинский, Р. О применении «квазипрямого» метода и итерационных методов к решению задачи Дирихле для бигармонического оператора при

смешанной аппроксимации конечными элементами / Р. Гловинский, О. Пиронно // Вычислительные методы в математической физике, геофизике и оптимальном управлении. – Новосибирск: Наука, 1978. – С. 34–57.

10. Гриневич, П.Г. Ядро Коши DN – дискретного комплексного анализа Новикова – Дынникова на треугольной решетке / П.Г. Гриневич, С.П. Новиков // Успехи математических наук. – 2007. – Т. 62, Вып. 4(376). – С. 155–156.

11. Гриневич, П.Г. Дискретные SL_n- связаности и самосопряженные разностные операторы на двумерных многообразиях / П.Г. Гриневич, С.П. Новиков // Успехи математических наук. – 2013. – Т. 68, № 5. – С. 81–110.

12. Дьяконов, Е.Г. Об одном итерационном методе решения систем конечноразностных уравнений / Е.Г. Дьяконов // ДАН СССР – 1961. – Т. 138, № 3. – С. 522–525.

13. Дьяконов, Е.Г. О применении разностных расщепляющихся операторов / Е.Г. Дьяконов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1963. – Т. 3, № 2. – С. 385–388.

14. Дьяконов, Е.Г. Метод мажорирующего оператора для решения разностных аналогов сильно эллиптических систем / Е.Г. Дьяконов // Успехи математических наук. – 1964. – Т. 19, № 5. – С. 385–386.

15. Дьяконов, Е.Г. О применении эквивалентных по спектру операторов для решения разностных аналогов сильно эллиптических систем / Е.Г. Дьяконов // ДАН СССР – 1965. – Т. 163, № 6. – С. 1314–1317.

16. Дьяконов, Е.Г. О построении итерационных методов на основе использования операторов, эквивалентных по спектру / Е.Г. Дьяконов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1966. – Т. 6, № 1. – С. 12–34.

17. Дьяконов, Е.Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач / Е.Г. Дьяконов. – М.: Наука, 1989. – 272 с.

18. Ильин, В.П. О скорости сходимости итераций неявных методов неполной факторизации / В.П. Ильин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – Т. 33, № 1. – С. 3–11.

19. Ильин, В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем / В.П. Ильин. – М.: Физматлит, 1995. – 288 с.

20. Ильин В.П. Методы неполной факторизации с полусопряженными невязками / В.П. Ильин // В журнале: Автометрия. Т. 43, № 2. – Новосибирск: СО РАН, 2007. – С. 66–73.

21. Капорин, И.Е. Модифицированный марш-алгоритм решения разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике / И.Е. Капорин // Разностные методы математической физики: сб. науч. тр. – М., 1980. – С. 11–21.

22. Капорин, И.Е. Метод Фиктивных неизвестных для решения разностных эллиптических краевых задач в нерегулярных областях / И.Е. Капорин, Е.С. Николаев // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, № 7. – С. 1211–1225.

23. Капорин, И.Е. Метод Фиктивных неизвестных для решения разностных уравнений эллиптического типа в областях сложной формы / И.Е. Капорин, Е.С. Николаев // ДАН СССР – 1980. – Т. 251, № 3. – С. 544–548.

24. Капорин, И.Е. Маршевый метод для системы с блочно-трехдиагональной матрицей / И.Е. Капорин // Численные методы линейной алгебры: сб. науч. тр. – М., 1982. – С. 63–72.

25. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2011. – Вып. 5, №32 (249). – С. 39–50.

26. Карачик, В.В. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2012. – Т. 15, № 2. – С. 86–98.

27. Карачик, В.В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 2. – С. 250–254.

28. Коновалов, А.Н. Сопряжено-факторизованные модели в задачах математической физики / А.Н. Коновалов // Сибирский журнал вычислительной математики. – 1998. – Т. 1, №1. – С. 25–58.

29. Коновалов, А.Н. Итерационные методы для операторных уравнений с сопряжено-факторизованной структурой / А.Н. Коновалов // Сибирский математический журнал. – 2000. – Т. 40, №2. – С. 370–384.

30. Корнеев В.Г. Об итерационном решении схем метода конечных элементов для эллиптических уравнений четвертого порядка / В.Г. Корнеев // В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 9, № 6. – Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978. – С. 85–104.

31. Кризский, В.Н. Математическая модель геонавигации в системах управления бурением горизонтальных скважин / В.Н. Кризкий // В журнале: Автоматика и телемеханика. Выпуск. 5. – Москва: РАН, 2004. – С. 45–56.

32. Кузнецов, Ю.А. Об оптимизации метода фиктивных компонент / Ю.А. Кузнецов, А.М. Мацокин // Вычислительные методы линейной алгебры: сб. науч. тр. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977. – С. 79–86.

33. Курант, Р. Методы математической физики. Т.1 / Р. Курант, Д. Гильберт. – М.: Гостехиздат, 1957. – 476 с.

34. Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 407 с.

35. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

36. Ландау, Л.Д. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 204 с.

37. Ланкастер, П. Теория матриц; пер. с англ. / П. Ланкастер. – М.: Наука, 1982. – 272 с.

38. Лукинов, В.Л. Методы Монте-Карло для решения первой краевой задачи для полигармонического уравнения / В.Л. Лукинов, Г.А. Михайлов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45, № 3. – С. 495–508.

39. Маргенов С.Г. Применение параболических и кубических сплайнов для решения эллиптических краевых задач четвёртого порядка в прямоугольнике / С.Г. Маргенов, Р.Д. Лазаров // Препринт. № 64. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1979. – 14 с.

40. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. – М.: Наука, 1989. – 608 с.

41. Марчук, Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агошков. – М.: Наука, 1981. – 416 с.

42. Марчук, Г.И. Итерационные методы и квадратичные функционалы / Г.И. Марчук, Ю.А. Кузнецов. – Новосибирск: Наука, 1972. – 205 с.

43. Марчук, Г.И. Некоторые вопросы итерационных методов / Г.И. Марчук, Ю.А. Кузнецов // Вычислительные методы линейной алгебры: сб. науч. тр. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972. – С. 4–20.

44. Марчук, Г.И. Повышение точности решений разностных схем / Г.И. Марчук, В.В. Шайдуров. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

45. Масловская, Л.Б. Смешанный метод конечных элементов для основных краевых задач теории пластин в областях с угловыми точками / Л.Б. Масловская // Методы аппроксимации и интерполяции: сб. науч. тр. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981. – С. 75–84.

46. Мацокин, А.М. Метод фиктивных компонент и модифицированный разностный аналог метода Шварца / А.М. Мацокин // Вычислительные методы линейной алгебры: сб. науч. тр. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1980. – С. 66–77.

47. Мацокин, А.М. Методы фиктивных компонент и альтернирования по подобластям / А.М. Мацокин // Вычислительные алгоритмы в задачах математической физики: сб. науч. тр. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. – С. 76–98.

48. Мацокин А.М. Методы фиктивных компонент и альтернирования по подобластям / А.М. Мацокин // Препринт. № 612. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. – 25 с.

49. Мацокин, А.М. Связь метода окаймления с методом фиктивных компонент и методом альтернирования по подобластям / А.М. Мацокин // Дифференциальные уравнения с частными производными: сб. науч. тр. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986. – С. 138–142.

50. Мацокин, А.М. Применение метода фиктивных компонент решения простейшей разностной схемы для эллиптического уравнения четвертого порядка / А.М. Мацокин // Вариационно-разностные методы в задачах численного анализа: сб. науч. тр. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1987. – С. 129–136.

51. Мацокин, А.М. Критерий сходимости метода Шварца в гильбертовом пространстве / А.М. Мацокин // Вычислительные процессы и системы: выпуск № 6. – М.: Наука, 1988. – С. 221–224.

52. Мацокин, А.М. Метод фиктивного пространства и явные операторы продолжения / А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – Т. 33, № 1. – С. 52–68.

53. Михайлов, Г.А. Решение многомерного разностного бигармонического уравнения методом Монте-Карло / Г.А. Михайлов, В.Л. Лукинов // Сибирский математический журнал. – 2001. – Т. 42, №5. – С. 1125–1135.

54. Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

55. Молчанов, И.Н. Критерии окончания итерационных процессов / И.Н. Молчанов // Вычислительные процессы и системы: выпуск № 6. – М.: Наука, 1988. – С. 225–232.

56. Непомнящих, С.В. Методы декомпозиции области и фиктивного пространства: дис. … д-ра физ.-мат. наук / С.В. Непомнящих. – Новосибирск, 2008. – 262 с.

57. Николаев, Е.С. Метод неполной циклической редукции / Е.С. Николаев // Разностные методы математической физики: сб. науч. тр. – М., 1981. – С. 3–12.

58. Новиков, С.П. Дискретные спектральные симметрии маломерных дифференциальных операторов и разностных операторов на правильных

решетках и двумерных многообразиях / С.П. Новиков, И.А. Дынников // Успехи математических наук. – 1997. – Т. 52, Вып. 5(317). – С. 175–234.

59. Обэн, Ж.П. Приближённое решение эллиптических краевых задач / Ж.П. Обэн. – М.: Мир, 1977. – 383 с.

60. Оганесян, Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец. – Ереван: изд–во АН АрмССР, 1979. – 235 с.

61. Павлов, С.П. Итерационная процедура сведения бигармонического уравнения к уравнению типа Пуассона / С.П. Павлов, М.В. Жигалов // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2011. Т. 1, №1. – С. 22-29.

62. Панюков, А.В. Безошибочное решение систем линейных алгебраических уравнений / А.В. Панюков, М.И. Германенко // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, физика, химия. – 2009. – Вып. 12, №10. – С. 33–40.

63. Потапов, А.Н. О перспективах развития подхода, основанного на использовании алгебраической проблемы квадратичного вида в задачах строительной механики / А.Н. Потапов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2007. №22(94). – С. 46-50.

64. Ряжских, А.В. Гидродинамический начальный участок при течении высоковязкой ньютоновской жидкости в круглой трубе / А.В. Ряжских // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2012. – №3 – С. 98–102.

65. Ряжских, В.И. Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области / В.И. Ряжских, М.И. Слюсарев, М.И. Попов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2013. – №1 – С. 52–62.

66. Сабельфельд, К.К. Решение одной краевой задачи для метагармонического уравнения методом Монте-Карло / К.К. Сабельфельд // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т. 19, № 4. – С. 961–969.

67. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

68. Самарский, А.А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А.А. Самарский, В.Б. Андреев. – М.: Наука, 1976. – 352 с.

69. Самарский, А.А. Некоторые современные методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, И.Е. Капорин, А.Б. Кучеров, Е.С. Николаев // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 7. – С. 3–12.

70. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

71. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. – Л.: изд–во ЛГУ, 1950. – 256 с.

72. Соломин, В.И. О развитии методов расчёта гибких фундаментов и их оснований / В.И. Соломин // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2007. №22(94). – С. 6–10.

73. Сорокин, С.Б. Переобусловливание при численном решении задачи Дирихле для бигармонического уравнения / С.Б. Сорокин // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2011. – Т. 14, №2. – С. 205–213.

74. Сорокин, С.Б. Аналитическое решение обобщённой спектральной задачи в методе пересчета граничных условий для бигармонического уравнения / С.Б. Сорокин // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2013. – Т. 16, №3. – С. 267–274.

75. Сорокин С.Б. Точные константы энергетической эквивалентности в методе пересчёта граничных условий для бигармонического уравнения / С.Б. Сорокин // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Информатика. – 2013. – Т. 13, №3 – С. 113–121.

76. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Н.Н. Анучина, К.И. Бабенко С.К. Годунов и др.; под ред. К.И. Бабенко. – М.: Наука, 1979. – 296 с.

77. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

78. Хаппель, Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер – М.: Мир, 1976. – 630 с.

79. Bank, R.E. Marching algorithms for elliptic boundary value problems / R.E. Bank, D.J. Rose // SIAM J. on Numer. Anal. – 1977. – Vol. 14, №5. – P. 792–829.

80. Bjorstad, P. Fast numerical solution of the biharmonic dirichlet problem on rectangles / P. Bjorstad // SIAM J. on Numer. Anal. – 1983. – Vol. 20, № 1. – P. 59–71.

81. Ciarlet, P.G. Dual iterative technigues for solving a finite element approximation of the biharmonic eguation / P.G. Ciarlet, R. Glowinski // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1975. Vol. 5, № 3. – P. 277–295.

82. Manteuffel, T. An incomlete factorization technigue for positive definite linear systems / T. Manteuffel // Math. Comput. – 1980. – Vol. 38, № 1. – P. 114–123.

83. Marchuk, G.I. Fictitious domain and domain decomposion methods / G.I. Marchuk, Yu.A. Kuznetsov, A.M. Matsokin // Sovet. J. Numer. Analys. and Math. Modelling. – 1986. – Vol. 1, №1. – P. 3–35.

84. Swarztrauber, P.N. A direct method for discrete solution of separable elliptic equations / P.N. Swarztrauber // SIAM J. on Numer. Anal. – 1974. – Vol. 11, № 6. – P. 1136–1150.

85. Swarztrauber, P.N. The method of cyclic reduction, Fourier analysis fnd FACR algorithms for the discrete solution of Poisson's equations on a rectangle / P.N. Swarztrauber // SIAM Rev. – 1977. – Vol. 19, № 3. – P. 490–501.

86. Sweet, P.A. A cyclic reduction algorithm for solving block tridiagonal systems arbitrary dimension / P.A. Sweet // SIAM J. on Numer. Anal. – 1977. – Vol. 14, №4. – P. 706–720.

87. Zhang, X. Multilevel Schwarz method for the biharmonic Dirichlet problem / X. Zhang // SIAM J. Sci. Comput. – 1994. – Vol. 15, № 3. – P. 621–644.

Список публикаций автора

Статьи, опубликованные в ведущих российских рецензируемых научных журналах, рекомендуемых ВАК

88. Ушаков, А.Л. Модификация итерационной факторизации для численного решения двух эллиптических уравнений второго порядка в прямоугольной области / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2013. – Т. 5, №2. – С. 88–93. (Zbl 1331.65169)

89. Ушаков, А.Л. Итерационная факторизация для численного решения эллиптического уравнения четвёртого порядка в прямоугольной области / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2014. – Т. 6, №1. – С. 42–49. (Zbl 1343.65139)

90. Ушаков, А.Л. Итерационная факторизация на фиктивном продолжении для численного решения эллиптического уравнения четвёртого порядка / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2014. – Т. 6, №2. – С. 17–22. (Zbl 1343.65145)

91. Ушаков, А.Л. О моделировании деформаций пластин / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, №2. – С. 138–142. (SCOPUS)

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

92. Численное моделирование деформации квадратной мембраны, закреплённой на двух смежных сторонах № 2014613985 / Ушаков А.Л., Бухарин И.Ю. (RU); правообладатель ФБГОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». - 2014611376; заявл. 24.02.2014; зарегистр. 14.04.2014, реестр программ для ЭВМ.

93. Численное моделирование перемещений пластины под действиями давлений при однородных краевых условиях № 2015661153 / Ушаков А.Л., Артес Н.О. (RU); правообладатель ФБГОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». - 2015618103; заявл. 04.09.2015; зарегистр. 20.10.2015, реестр программ для ЭВМ.

Другие научные публикации

94. Ушаков, А.Л. Метод фиктивных компонент для приближённого решения эллиптического дифференциального уравнения четвёртого порядка / А.Л. Ушаков; Челябинский политехнический институт. – Челябинск, 1989. – 29 с. – Библ.: – 11 назв. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 25.05.1989, № 3480-В1989.

95. Ушаков, А.Л. Метод фиктивных компонент на непрерывном уровне / А.Л. Ушаков; Челябинский политехнический. – Челябинск, 1989. – 15 с. – Библ.: – 4 назв. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 28.12.1989, № 7717-В1989.

96. Ушаков, А.Л. Метод итерационного расщепления для специальных эллиптических краевых задач / А.Л. Ушаков; Челябинский политехнический институт. – Челябинск, 1990. – 32 с. – Библ.: – 16 назв. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 23.11.1990, № 5892-В1990.

97. Ушаков, А.Л. Модификация метода фиктивных компонент при несимметричном расширении / А.Л. Ушаков; Челябинский государственный технический университет. – Челябинск, 1991. – 25 с. – Библ.: – 10 назв. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 23.05.1991, № 2114-В1991.

98. Ушаков, А.Л. Модификация метода фиктивных компонент / А.Л. Ушаков; Челябинский государственный технический университет. – Челябинск, 1991. – 40 с. – Библ.: – 13 назв. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 11.11.1991, № 4232-В1991.

99. Ушаков, А.Л. Метод итерационной факторизации / А.Л. Ушаков; Челябинский государственный технический университет. – Челябинск, 1994. – 31 с. – Библ.: – 17 назв. – Деп. в ВИНИТИ РАН 17.10.1994, № 2375-В1994.

100. Ушаков, А.Л. О приближённом решении одной эллиптической краевой задачи четвёртого порядка / А.Л. Ушаков; Челябинский государственный технический университет. – Челябинск, 1997. – 30 с. – Библ.: – 12 назв. – Деп. в ВИНИТИ РАН 21.04.1997, № 1346-В1997.

101. Ушаков, А.Л. Моделирование итерационной факторизации для эллиптической краевой задачи второго порядка / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, физика, химия. – 2006. – Вып. 7, №7 (62). – С. 64–70.

102. Ушаков, А.Л. Моделирование итерационной факторизации для эллиптического уравнения четвертого порядка / А.Л. Ушаков // Известия Челябинского научного центра УрО РАН. – 2007. – Вып. 1 (35). – С. 33–36.

103. Ушаков, А.Л. Модификация метода фиктивных компонент для численного решения эллиптических краевых задач четвёртого порядка / А.Л. Ушаков // Математические модели и теория групп: сб. науч. тр. каф. общей математики Южно-Уральского государственного университета. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – С. 61–65.

104. Ушаков А.Л. Метод фиктивных компонент для эллиптических дифференциальных уравнений / А.Л. Ушаков // 5 Школа молодых математиков Сибири и Дальнего востока: тез. докл., Новосибирск, 10-16 декабря 1990 года. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1990. – С. 123.

105. Ушаков А.Л. Математическое моделирование деформаций пластин на упругих основаниях / А.Л. Ушаков // НАУКА ЮУРГУ : статья в сборнике трудов 67-й научной конференции ЮУрГУ, Челябинск, 14-17 апреля 2015 года. – Челябинск: ЮУрГУ, 2015. – С. 75-83.

106. Ушаков А.Л. Численное моделирование деформации прямоугольной пластины / А.Л. Ушаков // Системы компьютерной математики и их приложения: тез. докл. XVI Международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора В.П. Дьяконова, Смоленск, 15-17 мая 2015 года. – Смоленск: СмолГУ, 2015. – Вып. 16. – С. 222.

107. Ушаков А.Л. Численное моделирование деформации мембраны / А.Л. Ушаков // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: тез. докл. Международной научно конференции, Улан-Уде, 22-27 июня 2015 года. – Улан-Уде: ВСГУТУ, 2015. – С. 291-292.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\alpha = 1, 2$ – нумерация взаимно дополняемых вариантов

$\breve{u}, \breve{u}_\alpha$ – перемещения, решения эллиптических уравнений

$\breve{f}, \breve{f}_\alpha$ – правые части эллиптических уравнений

$\breve{E}(\cdot), \breve{E}_\alpha(\cdot)$ – энергии деформаций

$\breve{K}, \breve{K}_\alpha$ – коэффициенты жёсткости упругих оснований

$\hat{T}_\alpha$ – коэффициенты натяжения мембран

$\breve{D}, \breve{D}_\alpha$ – цилиндрические жёсткости пластин

$\breve{E}, \breve{E}_\alpha$ – модули Юнга

σ, σ_α – коэффициенты Пуассона

$\breve{h}$ – толщина пластин

$\breve{P}, \breve{P}_\alpha$ – давления

Ω, Ω_α – ограниченные области на плоскости

b_1, b_2 – длины сторон прямоугольника

κ, κ_α – коэффициенты в уравнениях второго порядка

a, a_α – коэффициенты в уравнениях четвёртого порядка

$\vec{n}, \vec{n}_\alpha$ – внешние нормали к границам областей Ω, Ω_α соответственно

s, s_α – границы областей Ω, Ω_α соответственно

$\overline{S} = \partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_2$ – граница, через которую производится продолжение

$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_{\alpha 1}, \Gamma_{\alpha 2}, \Gamma_{\alpha 3}, \Gamma_{\alpha 4}$ – части границ соответствующих областей

$\breve{W}_\alpha$ – пространства решений эллиптических уравнений второго порядка

$\breve{Z}_1 \subseteq \breve{V}, \breve{H}_\alpha -$ пространства решений уравнений четвёртого порядка

$\breve{V}_i \subset \breve{V}\ i = 0,...,5 -$ подпространства пространства решений

$\mathrm{A}_\alpha(\cdot,\cdot) -$ билинейные формы уравнений второго порядка

$\mathrm{M}(\cdot,\cdot), \Lambda(\cdot,\cdot), \Lambda_\alpha(\cdot,\cdot) -$ билинейные формы уравнений четвёртого порядка

$\breve{g}(\cdot), \breve{g}_\alpha(\cdot) -$ линейные функционалы

$\breve{u}^k,\ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} -$ итерационные приближения решений

$\breve{\psi}^k,\ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} -$ итерационные ошибки решений

$\lambda_{i,j} -$ собственные числа оператора Лапласа

$\lambda_{1,1} -$ наименьшее собственное число оператора Лапласа

$\breve{\varphi}_{i,j} -$ собственные функции оператора Лапласа

$\breve{\gamma}_1, \breve{\gamma}_2 -$ константы эквивалентности квадратичных форм

$\|\cdot\|_{\mathrm{M}} -$ норма, порождаемая билинейной формой $\mathrm{M}(\cdot,\cdot)$

$\|\cdot\|_{\breve{V}} -$ норма пространства $\breve{V}$

$\breve{R}, \breve{T}, \breve{T}_k -$ ограниченные и симметричные операторы

$I -$ оператор тождественного преобразования непрерывных пространств

$c, c_1, c_2 -$ положительные константы

$\breve{c}_{i,j} -$ произвольные коэффициенты у собственных функций

$\breve{c}_{i,j}^k -$ коэффициенты в разложении $\breve{\psi}^k$ по собственным функциям

$l_{\alpha,1}, l_{\alpha,2} -$ операторы граничных условий

$I_0, I_1, I_4 -$ операторы проектирования

$\beta_1, \beta_2 -$ константы при продолжении функций

$\delta_1 -$ оценка сходимости *ММФК* на первой итерации при варианте $\alpha = 1$

$\breve{R}_2, \breve{R}_3 -$ операторы в подпространствах $\breve{V}_2, \breve{V}_3$ соответственно

$\breve{A}_1, \breve{A}_2, \breve{A}_3, \breve{A}_4, \breve{B}_1, \breve{B}_2, \breve{B}_3, \breve{B}_4, H -$ параметры в непрерывном примере

$\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2 -$ параметры в примере проектирования

$\omega(\cdot,\cdot), \varphi(\cdot,\cdot), \varphi_0(\cdot,\cdot), \varphi_1(\cdot,\cdot), \varphi_2(\cdot,\cdot)-$ базисные функции в примере

$\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \breve{\alpha}_k, \breve{\beta}_k,\ k\in\mathbb{N}-$ коэффициенты в разложении ошибки примера

$\tilde{V}=\tilde{Z}_1\subset\breve{V}-$ подпространства параболических восполнений

$\tilde{V}_1,\tilde{V}_2\subset\tilde{V}-$ подпространства пространства параболических восполнений

$\tilde{u}, \tilde{u}_1-$ искомые смещения на параболических восполнениях

$\Phi^{i,j}(\cdot,\cdot), \Psi_{1,i}(\cdot), \Psi_{2,j}(\cdot), \Psi(\cdot)-$ базисные функции восполнения

$q-$ знаменатель геометрической прогрессии

$\varepsilon, \varepsilon_\alpha-$ относительные погрешности итерационных процессов

$\tau, \tau_k,\ k\in\mathbb{N}-$ параметры итерационных процессов

$\bar{v}_\alpha\in\mathbb{R}^N-$ векторы, дискретные аналоги функций $\breve{v}_\alpha\in\breve{W}_\alpha$

$\bar{v}\in\mathbb{R}^N-$ векторы, дискретные аналоги функций $\breve{v}\in\breve{V}$

$\bar{v}_1\in\mathbb{R}^N-$ векторы, дискретные аналоги функций $\breve{v}_1\in\breve{Z}_1$

$N=m\cdot n-$ размерность евклидова пространства $\mathbb{R}^N$

$m,\ n\in\mathbb{N}-$ число узлов по направлениям осей Ox, Oy

$\nabla_x, \nabla_y, \theta-$ матрицы размерности $N\times N$

$A-$ матрица $N\times N$, дискретный аналог оператора Лапласа в краевой задаче

$\mathrm{A}_\alpha-$ матрицы $N\times N$, дискретные аналоги операторов $\Delta+\kappa_\alpha$ в краевой задаче

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений

$\bar{f}, \bar{f}_\alpha\in\mathbb{R}^N-$ векторы правых частей решаемых *СЛАУ*

$\bar{\vec{f}}\in\mathbb{R}^{2N}-$ векторы правых частей решаемых *СЛАУ*

$\bar{u}, \bar{u}_\alpha\in\mathbb{R}^N-$ векторы неизвестных решаемых *СЛАУ*

$\bar{\vec{u}}\in\mathbb{R}^{2N}-$ векторы неизвестных решаемых *СЛАУ*

$v_{i,j}, v_{\alpha,i,j}-$ значения функций дискретных аргументов v, v_α на сетке

$(x_i,y_j)=\big((i-0{,}5)h_1,(j-0{,}5)h_2\big),\ i=1,...,m,\ j=1,...,n-$ узлы сетки

$h_1, h_2>0-$ шаги сетки по направлениям осей Ox, Oy

$\langle\cdot,\cdot\rangle-$ скалярное произведение векторов вида $(\cdot,\cdot)h_1h_2$

$\hat{D}-$ матрица $2N \times 2N$ взаимного дополнения, продолжения матриц A_α

$\vec{\bar{v}} = (\bar{v}_{_1}{}', \bar{v}_{_2}{}')' \in \mathbb{R}^{2N} -$ векторы взаимного продолжения векторов $\bar{v}_{_1}, \bar{v}_{_2}$

$\vec{\bar{W}}_1, \vec{\bar{W}}_2 -$ подпространства векторов в пространстве $\mathbb{R}^{2N}$

$\hat{C}-$ матрица $2N \times 2N$, переобуславливатель $\hat{D}$ на подпространстве $\bar{W}_2$

$\mathrm{i}-$ комплексная единица $(\mathrm{i}^2 = -1)$

$\bar{V} = \bar{v}_1 + \mathrm{i}\bar{v}_2 \in \mathbb{C}^N -$ комплексные векторы

$L-$ комплексная, нижнетреугольная матрица

$\bar{F}, \bar{G}-$ комплексные векторы правых частей решаемых *СЛАУ*

$\bar{U}-$ комплексные векторы неизвестных решаемых *СЛАУ*

$\bar{Q}, \bar{T}, \bar{P}-$ комплексные векторы вспомогательных *СЛАУ*

$\|\cdot\|_{\mathrm{A}_\alpha} -$ нормы векторов $\bar{v}_\alpha$, порождаемые матрицами A_α

$\lambda_{i,j}(m,n) \;\; i = 1,...,m, \;\; j = 1,...,n -$ собственные числа матрицы A

$\lambda_{i,j} \;\; i, j \in \mathbb{N} -$ собственные числа оператора Лапласа

$\lambda_0 = \lambda_{1,1}(1,1) -$ наименьшее собственное число матрицы A

$\delta_2 -$ константа из спектральной эквивалентности матриц A, A

$\alpha_1, \gamma -$ константы продолжения мнимой части на действительную часть

$T, T_k, \;\; k \in \mathbb{N} -$ матрицы перехода итерационных процессов

$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N, \;\; k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} -$ итерационные приближения дискретных решений

$\bar{\psi}^k \in \mathbb{R}^N, \;\; k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} -$ итерационные ошибки дискретных решений

$\bar{r}^k \in \mathbb{R}^N, \;\; k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} -$ векторы невязок

$\bar{w}^k \in \mathbb{R}^N, \;\; k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} -$ векторы поправок

$\vec{\bar{u}}^k \in \mathbb{R}^{2N}, \;\; k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} -$ итерационные приближения дискретных решений

$\vec{\bar{\psi}}^k \in \mathbb{R}^{2N}, \;\; k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} -$ итерационные ошибки дискретных решений

$\vec{\bar{r}}^k \in \mathbb{R}^{2N}, \;\; k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} -$ векторы невязок

$\vec{\bar{w}}^k \in \mathbb{R}^{2N}, \;\; k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} -$ векторы поправок

$\Lambda -$ матрица $N \times N$, дискретный аналог оператора $\Delta^2 + a$ в краевой задаче

$B -$ матрица размерности $N \times N$

$\overline{g}, \overline{g}_1 -$ векторы правых частей решаемых *СЛАУ*

$\overline{q} -$ векторы неизвестных, правых частей вспомогательных *СЛАУ*

$|\overline{h}| -$ максимум из шагов сетки

$|\underline{h}| -$ минимум из шагов сетки

$\nabla_1, \nabla_2 -$ матрицы размерности $m \times m$ и $n \times n$ соответственно

$\Delta_1, \Delta_2 -$ матрицы размерности $m \times m$ и $n \times n$ соответственно

$E_m, E_n -$ единичные матрицы размерности $m \times m$ и $n \times n$ соответственно

$E -$ единичная матрица

$E_N, E_{2N} -$ единичные матрицы размерности $N \times N$ и $2N \times 2N$

$M -$ квадрат матрицы A

$\Lambda^{2,0}, \Lambda^{1,1}, \Lambda^{0,2}, \Lambda^{0,0} -$ матрицы размерности $N \times N$

$\Lambda^{x,p}$, $\Lambda^{y,q}$, $p,q = 0,1,2 -$ матрицы $m \times m$ и $n \times n$ соответственно

$\Lambda_1^{x,0}, \Lambda_m^{x,0}, \Lambda_1^{x,1}, \Lambda_m^{x,1}, \Delta_1^x, \Delta_m^x -$ матрицы размерности 2×2

$\Lambda_i^{x,0}, \Lambda_i^{x,1}, \Delta_i^x$ $i = 2,...,m-1 -$ матрицы размерности 3×3

E_1^x, $E_m^x -$ диагональные матрицы размерности 2×2

E_i^x, $i = 2,...,m -$ диагональные матрицы размерности 3×3

$\nabla_1^+, \Delta_1^+, \delta^1 -$ вспомогательные матрицы размерности $m \times m$

$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 -$ собственные числа вспомогательных спектральных задач

$\mu, \eta, \lambda = \mu\eta -$ собственные числа вспомогательных спектральных задач

$\widehat{k}_1, \widehat{k}_2 -$ константы спектральной эквивалентности матриц A^2, Λ

$\|\cdot\|_{A^2}, \|\cdot\|_{\Lambda} -$ нормы векторов, порождаемые матрицами A^2, Λ

$\widehat{D} -$ матрица размерности $2N \times 2N$ дополнение, продолжение матрицы Λ

$M_\theta, \theta_A -$ матрицы размерности $N \times N$ из продолжения матрицы Λ

$\vec{\overline{Z}}_1, \vec{\overline{Z}}_2 -$ подпространства векторов в пространстве $\mathbb{R}^{2N}$

$\widehat{C}$ – матрица $2N \times 2N$, переобуславливатель $\widehat{D}$ на подпространстве $\overline{V}_1$

$\widehat{c}_1, \widehat{c}_2$ – константы спектральной эквивалентности матриц M_θ, Λ

α_2, γ_2 – константы продолжения действительной части на мнимую часть

$\overline{V}_\alpha, \overline{V}_3$ – подпространства, соответствующие подпространствам $\tilde{V}_\alpha, \tilde{V}_3$

$\mathrm{E}(\cdot)$ – функция целая часть числа

$\mathrm{E} \in (0; 1)$ – задаваемая относительная погрешность

$\mathrm{E}_k,\ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ – квадраты норм ошибок

ПРИЛОЖЕНИЕ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2014613985

Численное моделирование деформации квадратной мембраны, закреплённой на двух смежных сторонах

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ» (НИУ)) (RU)***

Авторы: ***Ушаков Андрей Леонидович (RU), Бухарин Иван Юрьевич (RU)***

Заявка № **2014611376**

Дата поступления **24 февраля 2014 г.**

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ ***14 апреля 2014 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015661153

Численное моделирование перемещений пластины под действиями давлений при однородных краевых условиях

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ» (НИУ)) (RU)***

Авторы: ***Ушаков Андрей Леонидович (RU), Артес Никита Олегович (RU)***

Заявка № **2015618103**

Дата поступления **04 сентября 2015 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***20 октября 2015 г.***

Заместитель руководителя Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий