На правах рукописи

Цыпленкова Ольга Николаевна

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В МОДЕЛЯХ БУССИНЕСКА – ЛЯВА

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2013

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,
доцент Замышляева Алена Александровна.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Кадченко Сергей Иванович,
зав. кафедрой «Прикладная математика и вычислительная техника»,
Магнитогорского государственного университета;

доктор физико-математических наук,
профессор Пятков Сергей Григорьевич,
зав. кафедрой «Высшая математика»,
Югорского государственного университета.

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный университет».

Защита состоится 26 декабря 2013 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Автореферат разослан 25 ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, доцент А.В. Келлер

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время задачи оптимального управления для неклассических моделей математической физики появляются в приложениях все чаще, однако, в силу отсутствия общего метода решения таких задач, результатов в этой области в современной математической литературе немного, причем большинство из них получены для конечномерного случая. В основе многих неклассических моделей математической физики лежат уравнения соболевского типа. Линейные уравнения соболевского типа активно исследуются как в России, так и за рубежом. Систематическое изучение таких уравнений начал С.Л. Соболев в 40-х годах прошлого столетия. Уравнения, неразрешенные относительно производных, рассматривали в своих работах С.Г. Крейн, В.Н. Врагов, Г.В. Демиденко, С.Г. Пятков, А.И. Кожанов, И.В. Мельникова, Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев, М.О. Корпусов, А.Г. Свешников, A. Favini, A. Yagi, J.H.A. Lightbourne, R.E. Showalter и др. Исследованиям начальных задач для вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений посвящены работы Ю.Е. Бояринцева, В.Ф. Чистякова, М.В. Булатова, Г.А. Свиридюка, С.В. Брычева, W.J. Terrell и др. Основоположником теории дифференциальных уравнений на графах в России является Ю.В. Покорный. Дифференциальные уравнения на геометрических графах изучали в своих работах также А.И. Шафаревич, J.K. Hale, S. Kosugi, E. Yanagida и др. Уравнения соболевского типа на графе впервые стал рассматривать Г.А. Свиридюк, исследование таких задач было продолжено его учениками. В области теории оптимального управления широко известны работы А.В. Фурсикова, Г.А. Куриной, А.А. Щегловой, J.-L. Lions, P.C. Müller, L. Pandolfi, S.L. Campbell и др. Задачи оптимального управления для уравнений соболевского типа впервые начали рассматривать Г.А. Свиридюк и А.А Ефремов. В дальнейшем такого рода задачи изучались в работах А.В. Келлер, В.Е. Федорова, Н.А. Манаковой, М.В. Плехановой и др. Данная диссертационная работа посвящена исследованию оптимального управления решениями линейных уравнений соболевского типа второго порядка и базируется на результатах А.А. Замышляевой по исследованию разрешимости таких уравнений.

В работе исследуется оптимальное управление решениями в математической модели Буссинеска – Лява в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$(\lambda - \Delta)x_{tt}(s,t) = \alpha(\Delta - \lambda')x_t(s,t) + \beta(\Delta - \lambda'')x(s,t) + u(s,t), s \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

с граничным условием

$$x(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}. \tag{2}$$

Если Ω – отрезок, то модель (1), (2) описывает колебания в тонком упругом стержне с учетом инерции. Параметры α, β, λ, λ', λ'' характеризуют свойства материала, из которого изготовлен стержень, и связывают между собой плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент упругости. Функция $x(s,t)$ характеризует продольное смещение, а функция $u(s,t)$ – внешнее воздействие.

Если Ω – область в $\mathbb{R}^2$, то модель (1), (2) описывает распространение волн на мелкой воде. Параметры α, β, λ, λ', λ'' связывают глубину, гравитационную постоянную и число Бонда. Функция $x(s,t)$ определяет высоту волны в момент времени t в точке s, а функция $u(s,t)$ – внешние силы.

В работе исследуется оптимальное управление решениями в математической модели продольных колебаний в конструкции. Пусть $G = G(\mathcal{V},\mathcal{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^m$ – множество вершин, а $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_j\}_{j=1}^n$ – множество ребер. Предполагается, что каждое ребро имеет длину $l_j > 0$ и толщину $d_j > 0$. На графе G рассмотрим уравнения

$$\lambda x_{jtt} - x_{jsstt} = \alpha(x_{jsst} - \lambda' x_{jt}) + \beta(x_{jss} - \lambda'' x_j) + u_j, s \in (0,l_j), t \in \mathbb{R}, j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Для уравнений (3) в каждой вершине $V_i, i = \overline{1,n}$ зададим краевые условия

$$\sum_{j:E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(0,t) - \sum_{k:E_k \in E^\omega(V_i)} d_k x_{ks}(l_k,t) = 0; \tag{4}$$

$$\begin{gathered} x_n(0,t) = x_j(0,t) = x_k(l_k,t) = x_m(l_m,t), \\ \text{для всех } E_n, E_j \in E^\alpha(V_i), E_k, E_m \in E^\omega(V_i), \end{gathered} \tag{5}$$

которые являются аналогами законов Кирхгофа. Здесь через $E^{\alpha,\omega}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i. Условие (4) означает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю, а условие (5) – что решение в каждой вершине должно быть непрерывным. Функция $x_j(s,t)$ – продольное смещение в точке s в момент времени t на j-ом ребре, а u_j – внешнее воздействие на j-ый элемент конструкции.

Решения задач (1), (2) и (3) – (5), кроме того, должны удовлетворять начально-конечным условиям

$$\begin{gathered} P_{in}(\dot{x}(0) - x_1^0) = 0, \; P_{in}(x(0) - x_0^0) = 0; \\ P_{fin}(\dot{x}(\tau) - x_1^\tau) = 0, \; P_{fin}(x(\tau) - x_0^\tau) = 0; \end{gathered} \tag{6}$$

здесь $P_{in(fin)}$ – некоторые спектральные проекторы в пространстве $\mathfrak{X}$. В работе исследуется задача оптимального управления, которая заключается в отыскании пары $(\hat{x}, \hat{u})$, где $\hat{x}$ – решение задачи (3) – (6), а $\hat{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$ – управление, для которого выполняется соотношение

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \min_{(x,u)\in\mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}} J(x, u). \tag{7}$$

Здесь $J(x, u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал качества, $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$.

Математические модели (1), (2) и (3) – (5) редуцируется к абстрактному уравнению соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{x} = B_1\dot{x} + B_0x + y + Cu, \tag{8}$$

где операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$, функции $u : [0, \tau) \subset \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{U}$, $y : [0, \tau) \subset \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{Y}$ $(\tau < \infty)$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{U}$ – гильбертовы пространства.

Цель работы – качественно и численно исследовать оптимальное управление в моделях Буссинеска – Лява в области и на графе с начально-конечными условиями с последующей разработкой программ для ЭВМ.

Для достижения данной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1. Исследовать оптимальное управление решениями в математической модели Буссинеска – Лява в области как задачу оптимального управления решениями начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа второго порядка.
2. Исследовать оптимальное управление решениями в математической модели продольных колебаний в конструкции как задачу оптимального управления решениями начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа второго порядка на графе.
3. Доказать существование и единственность сильного решения, а также существование единственного оптимального управления решениями начально-конечной задачи для абстрактного уравнения соболевского типа второго порядка.
4. Разработать алгоритмы численных методов нахождения оптимального управления в математических моделях Буссинеска – Лява.
5. Реализовать разработанные алгоритмы в виде программ для ЭВМ.

Научная новизна. При исследовании математических моделей оптимального управления решениями начально-конечной задачи для процессов, описываемых линейным уравнением Буссинеска – Лява, заданным в области и на графе, показано существование единственного сильного решения, а также существование единственного оптимального управления решениями начально-конечной задачи для линейного неоднородного уравнения соболевского типа второго порядка. Получены необходимые условия оптимальности управления. Разработан и реализован в виде программ для ЭВМ алгоритм численного метода исследования указанных математических моделей.

Методы исследования. В работе используются следующие методы: метод редукции конкретных математических моделей к начальным задачам для уравнения соболевского типа, метод фазового пространства при качественном исследовании уравнений соболевского типа, методы теории оптимального управления, методы Галеркина и Ритца при разработке алгоритмов численных методов исследования математических моделей.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертационного исследования, полученные при изучении математических моделей оптимального управления, основанных на уравнении Буссинеска – Лява, развивают теории уравнений соболевского типа, дифференциальных уравнений на графах, оптимального управления. Результаты применимы для дальнейшего качественного и численного исследования других неклассических моделей математической физики. Практическая значимость обусловлена использованием результатов исследований при изучении процессов, описываемых уравнением Буссинеска – Лява, заданным в области и на графе, и возможностью их применения при решении задач теории упругости, гидродинамики, электродинамики. Разработанный комплекс программ позволяет проводить вычислительные эксперименты по определению оптимального управления в рассматриваемых моделях.

Апробация работы. Результаты работы апробированы на конференциях: Всероссийском научном семинаре «Неклассические уравнения математической физики» (Якутск, 2010), Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна (Воронеж, 2010 и 2012), Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко (Новосибирск, 2011), Международной конференции, посвященной памяти В.К. Иванова, «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» (Екатеринбург, 2011), Международной научно-практической конференции «Измерения: состояние, перспективы развития» (Челябинск, 2012), Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Самара, 2013).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 16 научных работах, в их числе 3 статьи в ведущих российских рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК, 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ. Список работ приводится в конце автореферата. В совместных с научным руководителем работах А.А. Замышляевой принадлежит постановка задачи, в диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 108 страниц. Список литературы содержит 122 наименования.

Краткое содержание диссертации

Во введении приводится постановка задачи, ставится цель исследования, описываются методы исследования и обосновываются актуальность, теоретическая и практическая значимость проведенного исследования.

Первая глава состоит из пяти пунктов. Они содержат определения, теоремы и вспомогательные утверждения, опираясь на которые получены основные результаты исследования. В п. 1.1 приведены результаты теории относительно полиномиально ограниченных пучков операторов и пропагаторов[1]. Обозначим через $\vec{B}$ пучок операторов B_1, B_0. Будем называть множество $\rho^A(\vec{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})\}$ A-резольвентным множеством, и $\sigma^A(\vec{B}) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \rho^A(\vec{B})$ A-спектром пучка $\vec{B}$. Пучок операторов $\vec{B}$ называется полиномиально A-ограниченным, если A-спектр пучка $\vec{B}$ ограничен. Оператор-функция $R^A_\mu(\vec{B}) = (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ называется относительной резольвентой пучка $\vec{B}$. Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполнено условие

$$\int\limits_\gamma R^A_\mu(\vec{B})\, d\mu = 0, \tag{A}$$

где γ – контур, ограничивающий относительный спектр пучка $\vec{B}$. Тогда операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^A_\mu(\vec{B})\mu A d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu A R^A_\mu(\vec{B}) d\mu$$

– проекторы в пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$. Введем обозначения $\mathfrak{X}^0 = \ker P$, $\mathfrak{Y}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{X}^1 = \operatorname{im} P$ и $\mathfrak{Y}^1 = \operatorname{im} Q$. Если пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен,

[1]Замышляева А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка // Вычисл. технологии. 2003. Т.8, № 4. С. 45–54.

∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\vec{B}$, то пучок операторов $\vec{B}$ назовем (A,p)-ограниченным.

В п. 1.2 приведена теорема о существовании и единственности решения начально-конечной задачи для неоднородного уравнения соболевского типа второго порядка. В п. 1.3 представлены результаты автора по исследованию уравнения с относительно диссипативным пучком операторов, что не предполагает ограниченности относительного спектра пучка. Показано, что понятие относительной диссипативности пучка операторов является обобщением условий, рассмотренных в теории аккретивных операторов R.E. Showalter и условия относительной диссипативности оператора (для уравнения соболевского типа первого порядка). В п. 1.4 определяются пространства Соболева, приводятся теоремы вложения Соболева и Реллиха – Кондрашова. В п.1.5 содержатся результаты автора об относительной резольвенте гильбертово сопряженного операторного пучка.

Вторая глава содержит шесть пунктов и посвящена исследованию оптимального управления решениями в математической модели Буссинеска – Лява в области как задачу оптимального управления решениями начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа второго порядка.

В п. 2.1 описана математическая модель Буссинеска – Лява в области. В п. 2.2 доказаны существование и единственность сильного решения начально-конечной задачи (6) для абстрактного уравнения соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{x} = B_1\dot{x} + B_0x + y, \tag{9}$$

а также существование и единственность сильного решения начально-конечной задачи (6) для модели Буссинеска – Лява (1), (2) в области Ω.

Пусть выполнены следующие условия:

$$\begin{array}{l} A\text{-спектр пучка } \vec{B}\ \sigma^A(\vec{B}) = \sigma_0^A(\vec{B}) \bigcup \sigma_1^A(\vec{B}),\ \text{причем} \\ \sigma_k^A(\vec{B}) \neq \emptyset,\ k = 0,1;\ \text{и существует контур } \gamma_0 \subset \mathbb{C}, \\ \text{ограничивающий область } \Gamma_0 \subset \mathbb{C} \text{ такую, что} \\ \Gamma_0 \bigcap \sigma_0^A(\vec{B}) = \sigma_0^A(\vec{B}),\ \overline{\Gamma}_0 \bigcap \sigma_1^A(\vec{B}) = \emptyset; \end{array} \tag{B}$$

$$\int\limits_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B})d\mu = \mathbb{O}. \tag{A_0}$$

Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнены условия (A), (B), (A_0). Тогда $P_{fin} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} \mu R_\mu^A(\vec{B})Ad\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ – проектор.

Определение 1. Вектор-функцию $x \in H^2(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X}) : \ddot{x} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X})\}$ назовем *сильным решением уравнения* (9), если она п. в. на $(0,\tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (9) назовем *сильным решением задачи* (6), (9), если оно удовлетворяет (6).

Теорема 1. (2.2.2)[2] *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, выполнены условия $(A),(B),(A_0)$. Тогда для любых $x_k^0, x_k^\tau \in \mathfrak{X}, k = 0,1$ и $y \in H^{p+2}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение задачи (6) для уравнения (9).*

Теорема 2. (2.2.3) *При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, x_k^0, $x_k^\tau \in \mathfrak{X}$, $k = 0,1$, существует единственное сильное решение задачи (1), (2), (6).*

В п. 2.3 рассмотрена абстрактная задача оптимального управления

$$A\ddot{x} = B_1\dot{x} + B_0 x + y + Cu, \tag{10}$$

$$J(x,u) \to \min, u \in H_\partial^{p+2}(\mathfrak{U}), \tag{11}$$

с начально-конечными условиями (6), где функции x, y, и u лежат в гильбертовых пространствах $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$ соответственно, оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, $H_\partial^{p+2}(\mathfrak{U})$ – замкнутое и выпуклое подмножество в гильбертовом пространстве управлений

$$H^{p+2}(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}) : u^{(p+2)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\},$$

а функционал качества $J(x,u)$ определяется соотношением

$$J(x,u) = \mu \sum_{q=0}^{2} \int_0^\tau ||x^{(q)} - \tilde{x}^{(q)}||_{\mathfrak{X}}^2 dt + \nu \sum_{q=0}^{p+2} \int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt, \tag{12}$$

где $\mu, \nu \geq 0$, $\mu + \nu = 1$, $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q = 0, 1, \ldots, p+2$, – самосопряженные и положительно определенные операторы, $\tilde{x}(t)$ – требуемое состояние системы. Значения весовых коэффициентов определяются исходя из значимости целей управления: достижение требуемых показателей или минимизация управляющего воздействия.

Определение 2. Пару $(\hat{x},\hat{u}) \in H^2(\mathfrak{X}) \times H_\partial^{p+2}(\mathfrak{U})$ назовем *решением задачи оптимального управления* (6), (10), если

$$J(\hat{x},\hat{u}) = \min_{(x,u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}} J(x,u), \tag{13}$$

где пары $(x,u) \in H^2(\mathfrak{X}) \times H_\partial^{p+2}(\mathfrak{U})$ удовлетворяют соотношениям (6), (10); вектор-функцию $\hat{u}$ назовем *оптимальным управлением решениями задачи* (6), (10).

[2] В скобках указана нумерация в диссертации.

Теорема 3. (2.3.1) *Пусть пучок операторов* $\vec{B}$ (A,p)*-ограничен,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*, выполнены условия* $(A),(B),(A_0)$*. Тогда для любых* $x_k^0, x_k^\tau \in \mathfrak{X}$*,* $k = 0,1$ *и* $y \in H^{p+2}(\mathfrak{Y})$ *существует единственное оптимальное управление решениями задачи (6), (10), (11).*

Перейдем к исследованию математической модели (1), (2), (6), (12).

Лемма 1.(2.3.1) *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

(i) $\lambda \notin \sigma(\Delta)$*;*

(ii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$*;*

(iii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$.

Тогда пучок $\vec{B}$ *полиномиально* A*-ограничен.*

Теорема 4. (2.3.2) *При любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}$ *таких, что выполнено условие либо (i), либо (iii) леммы 1, и любых* $\tau \in \mathbb{R}_+, x_k^0,\ x_k^\tau \in \mathfrak{X}, k = 0,1$*, существует единственное решение задачи оптимального управления* $(\hat{x},\hat{u})$ *для уравнения Буссинеска – Лява (1) с условиями (2), (6), минимизирующее функционал (12).*

В п. 2.4 строится сопряженная к (6),(10) задача, здесь $\xi(t,u) \in H^2(\mathfrak{Y}^*)$ – решение уравнения

$$A^*\ddot{\xi} = -(B_1)^*\dot{\xi} + (B_0)^*\xi + \mu(x(t,u) - \tilde{x}) \tag{14}$$

с начально-конечным условием

$$\begin{gathered} P_{in}^*(\xi(0)) = 0,\ P_{in}^*(\dot{\xi}(0)) = 0, \\ P_{fin}^*(\xi(\tau)) = 0,\ P_{fin}^*(\dot{\xi}(\tau)) = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Теорема 5. (2.4.2) *Пусть пучок операторов* $\vec{B}$ $(A,0)$*-ограничен. Тогда при любых* $y \in H^2(\mathfrak{Y})$ *и* $x \in H^2(\mathfrak{X})$ *оптимальное управление* $u_0 \in H^2_\partial(\mathfrak{U})$ *для задачи (6), (10) характеризуется соотношениями (14), (15), и выполняется неравенство*

$$\begin{gathered} \left\langle \Lambda_{\mathfrak{U}}^{-1} C^* \xi(t,u_0), u(t) - u_0(t) \right\rangle_{H^2(\mathfrak{U})} + \\ +\nu \sum_{q=0}^{2} \int_0^\tau \left\langle N_q u_0^{(q)}(t), u^{(q)}(t) - u_0^{(q)}(t) \right\rangle_{\mathfrak{U}} \geq 0 \ \forall u \in H^2_\partial(\mathfrak{U}), \end{gathered}$$

где $x(t,u_0) \in H^2(\mathfrak{X})$, $\xi(t,u_0) \in H^2(\mathfrak{Y}^*)$.

В п. 2.5 содержится описание алгоритма численного метода и программы «Численное решение задачи оптимального управления в модели Буссинеска – Лява», написанной в вычислительной среде Maple и предназначенной для нахождения приближенного численного решения исследуемой задачи оптимального управления для модели (1), (2), (6). П. 2.6 содержит результаты вычислительных экспериментов, связанных с нахождением решений исследуемой задачи оптимального управления для модели Буссинеска – Лява на отрезке.

Пример 1. Требуется найти решение задачи (1), (2), (6), (12) на отрезке $[0,\pi]$, при заданных параметрах $\lambda = \lambda' = -4$, $\lambda'' = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\tau = 1$. Зададим функции

$$\begin{gathered} x_0^0 = 2\sin(s) + 3\sin(2s) + 4\sin(3s),\ x_1^0 = -\sin(s) + \sin(2s) - \sin(3s), \\ x_0^\tau = \sin(s) + 2\sin(2s) - \sin(3s)/10,\ x_1^\tau = -2\sin(s) - \sin(2s) + \sin(3s). \end{gathered} \tag{16}$$

Функционал определяется соотношением (12), требуемое состояние волны $\tilde{x} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(\sin(s) - \sin(2s) - \sin(3s))$.

Пару вектор-функций $x(s,t)$, $u(s,t)$ будем искать в виде галеркинских сумм

$$\hat{x}(s,t) = \sum_{k=1}^{3} a_k(t)\sin(ks), \hat{u}(s,t) = \sum_{k=1}^{3} u_k(t)\sin(ks). \tag{17}$$

Для примера 1 получены следующие результаты:

$\hat{x}(s,t) = (1.49e^{0.52t} + 0.66e^{-2.52t} - 0.1t - 0.16)\sin(s) - 0.79\sin(2s) +$
$+ (-0.49e^{-t}\sin(t/2) - 1.35e^{-t}\cos(t/2))\sin(3s)$,

$\hat{u}(s,t) = -0.43\sin(s)t + 0.07\sin(s)\sin(\pi t) - 0.001\sin(3s)t - 0.001\sin(3s)\sin(\pi t)$.

Минимальное значение функционала $J_{min} = 8.37$.

Сравним численное решение $\hat{x}(s,t)$ с требуемым состоянием $\tilde{x}(s,t)$ в начальный и конечный моменты времени.

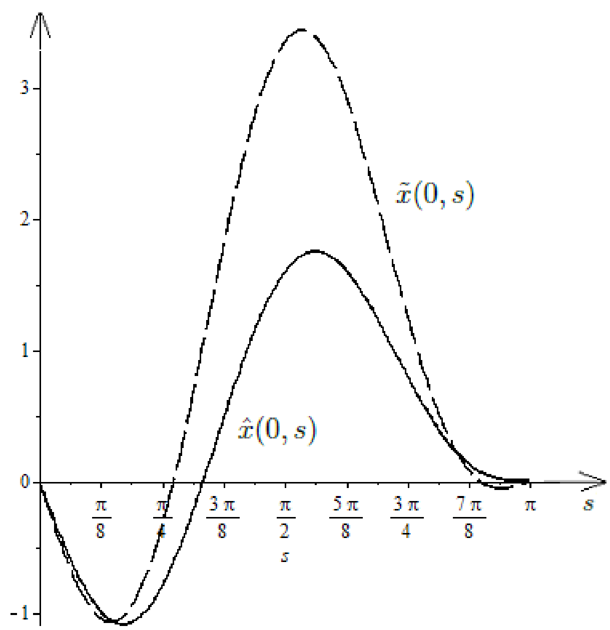

Рис. 1. График функции $\hat{x}(s,0)$ и $\tilde{x}(s,0)$

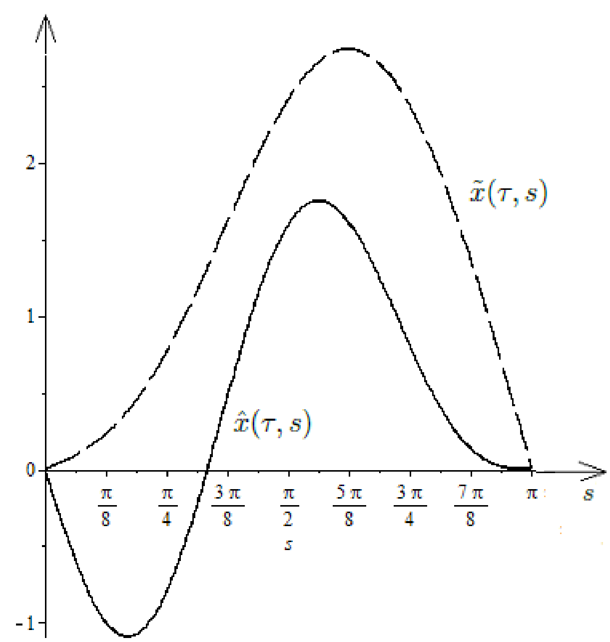

Рис. 2. График функции $\hat{x}(s,\tau)$ и $\tilde{x}(s,\tau)$

Сопоставление функций $\hat{x}(s,t)$ и $\tilde{x}(s,t)$ в интегральном смысле позволяет сделать вывод о том, что требуемое состояние волны внутри стержня мало отличается от оптимального состояния в начальный и конечный моменты времени.

Третья глава состоит из четырех пунктов и посвящена исследованию математической модели продольных колебаний в конструкции как задачу оптимального управления решениями начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа второго порядка на графе.

В п. 3.1 приведены результаты по исследованию задачи Штурма – Лиувилля на графе. В п. 3.2 рассматривается задача оптимального управления решениями в модели Буссинеска – Лява на графе. Зададим гильбертово пространство

$$L_2(G) = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...) : g_j \in L_2(0, l_j)\},$$

множество $\mathfrak{X} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_j \ldots) : u_j \in W_2^2(0, l_j)$ и выполнено условие (5)$\}$. Формулой $< Dx, v >= \sum\limits_{j:E_j\in\mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j}(x_{js}(s)v_{js}(s) + ax_j(s)v_j(s))ds$, где $a > 0$, $x, v \in \mathfrak{X}$, зададим оператор, определенный на пространстве $\mathfrak{X}$.

Зафиксируем $\alpha, \beta > 0$ и $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$ и построим операторы $A = (\lambda - a)I + D$, $B_1 = \alpha((a - \lambda')I + D)$, $B_0 = \beta((a - \lambda'')I + D)$.

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ собственные значения оператора D, занумерованные по неубыванию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k\}$ – соответствующие им ортонормированные (в смысле $L^2(G)$) функции.

Рассмотрим начально-конечную задачу

$$\begin{array}{ll}\sum\limits_{\substack{k:\ \lambda\neq\lambda_k \\ \mu_k^{1,2}\neq\mu_{k_s}^{1,2}}} < \varphi_k, x(s,0) - x_0^0(s) > \varphi_k = 0, & \sum\limits_{\substack{k:\ \lambda\neq\lambda_k \\ \mu_k^{1,2}\neq\mu_{k_s}^{1,2}}} < \varphi_k, x_t(s,0) - x_1^0(s) > \varphi_k = 0, \\ \sum\limits_{\substack{k:\ \lambda\neq\lambda_k \\ \mu_k^{1,2}=\mu_{k_s}^{1,2}}} < \varphi_k, x(s,\tau) - x_0^\tau(s) > \varphi_k = 0, & \sum\limits_{\substack{k:\ \lambda\neq\lambda_k \\ \mu_k^{1,2}=\mu_{k_s}^{1,2}}} < \varphi_k, x_t(s,\tau) - x_1^\tau(s) > \varphi_k = 0,\end{array} \tag{18}$$

для уравнения (3) с условиями (4), (5).

Теорема 6. (3.2.2) *При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ таких, что выполнено условие либо (i), либо (iii) леммы 1, и любых $\tau \in \mathbb{R}_+, x_k^0,\ x_k^\tau \in \mathfrak{X}, k = 0, 1$, существует единственное сильное решение задачи (4), (5), (18) для уравнений (3).*

Введем в рассмотрение пространство

$$H^{p+2}(\mathfrak{U}) = \{u = (u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots) : u_j^{p+1} \in L_2((0, \tau); (W_2^2(0, l_j))^*)\}.$$

Построим операторы

$$\left\langle N_q u^{(q)}, u^{(u)} \right\rangle = \sum_{j:E_j\in E^\alpha(V_i)} \sum_{k=1}^{\infty} v_{jkq}(u_{jk}^{(q)})^2(t),$$

где $u=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\varphi_k$, v_{jkq} – положительные числа.
Теорема 7. (3.2.3) *При любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $\lambda\in\mathbb{R}$ таких, что выполнено условие либо (i), либо (iii) леммы 1, и любых $\tau\in\mathbb{R}_+, x_k^0,\ x_k^\tau\in\mathfrak{X}, k=0,1,$ существует единственное решение задачи оптимального управления $(\hat{x},\hat{u})$ для уравнений Буссинеска – Лява (3) с условиями (4), (5), (18), минимизирующее функционал (12).*

В п. 3.3 содержится описание алгоритма численного метода и программы, написанной в вычислительной среде Maple и предназначенной для нахождения приближенного численного решения рассматриваемой задачи оптимального управления для модели Буссинеска – Лява на графе. П. 3.4 содержит результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующие работу программы. Рассмотрены примеры нахождения решений исследуемой задачи оптимального управления для математической модели продольных колебаний в конструкции.
Пример 2. Требуется найти решение задачи (3) – (6), (12) на графе G, состоящем из двух последовательно соединенных ребер и трех вершин, при заданных параметрах $\lambda=\lambda'=-0.25$, $\lambda''=0.5$, $\alpha=1$, $\beta=0.1$, $\tau=1$, $d_{1,2}=0.1$, $l_{1,2}=\pi$. Функционал определяется соотношением (12), требуемые состояния $\tilde{x}_1=7+2\cos(s)/3+6\cos(s/2)$, $\tilde{x}_2=7-2\sin(s)/3-6\sin(s/2)$.

Для примера 2 получены следующие результаты:

$\hat{x}_1(s,t)=106.15+17.17t+1.7t^2+0.13t^3-96.97e^{0.17t}-2.89e^{-1.17}+\cos(s)(2.73-0.77t+0.11t^2+0.03e^{-0.72t+0.72}+2.11e^{-0.27t+0.27})+5.96\cos(s/2)$,

$\hat{x}_2(s,t)=106.15+17.17t+1.7t^2+0.13t^3-96.97e^{0.17t}-2.89e^{-1.17}-\sin(s)(2.73+0.77t-0.11t^2-0.03e^{-0.72t+0.72}+2.11e^{-0.27t+0.27})-5.96\sin(s/2)$,

$\hat{u}_1(s,t)=0.16-0.18t-0.01t^2+\cos(s)0.03t+0.44\cos(s/2)$,

$\hat{u}_2(s,t)=0.16-0.18t-0.01t^2+0.01t^3-\sin(s)(0.01+0.03t)-0.44\sin(s/2)$.

Минимальное значение функционала $J_{min}=9.15$.

Представлены для сравнения найденные решения $\hat{x}_{1,2}(s,t)$ и функции $\tilde{x}_{1,2}(s,t)$ в конечный момент времени (рис.3 и рис.4). Графики позволяют сделать вывод, что волны в конечный момент времени в обоих элементах конструкции «стремятся принять требуемую форму».

В заключении приведены выводы по результатам исследований и обосновывается соответствие работы паспорту специальности 05.13.18.

В приложении представлены свидетельства о регистрации программ.

Результаты выносимые на защиту:

1. Новый метод исследования оптимального управления в математических моделях, основанных на линейных уравнениях соболевского типа второго по-

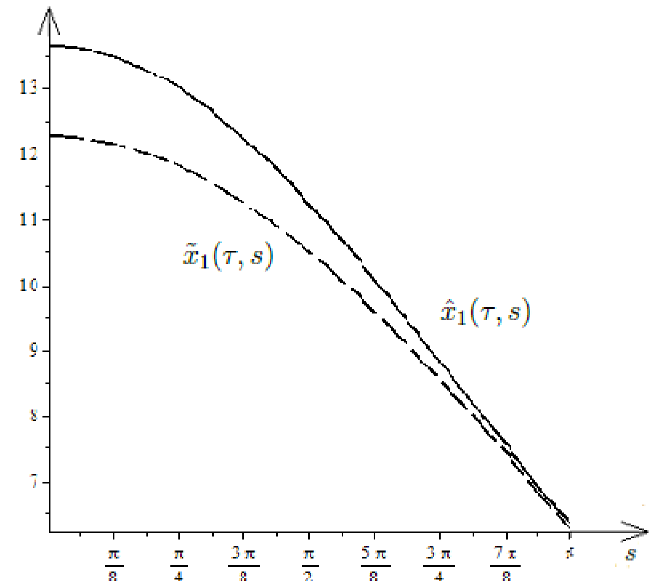

Рис. 3. График функции $\hat{x}_1(s,\tau)$ и $\tilde{x}_1(s,\tau)$

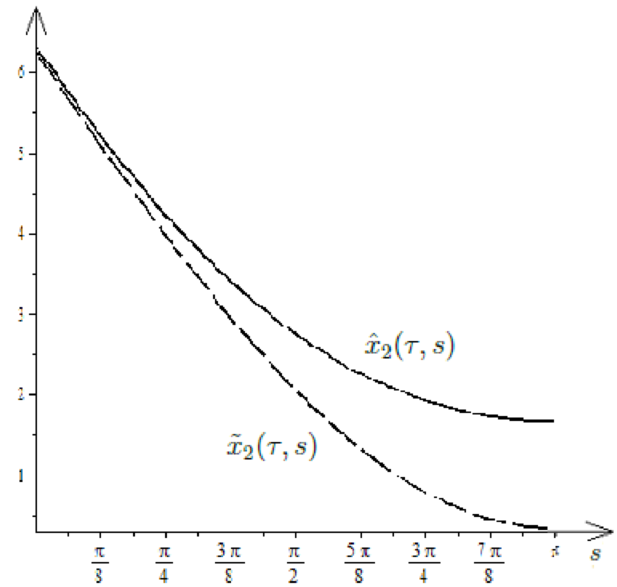

Рис. 4. График функции $\hat{x}_2(s,\tau)$ и $\tilde{x}_2(s,\tau)$

рядка. Для линейного уравнения соболевского типа второго порядка с начально-конечным условием доказано существование и единственность сильного решения и оптимального управления.

2. Для математической модели Буссинеска – Лява в области доказаны существование и единственность оптимального управления решениями соответствующей краевой задачи с начально-конечными условиями.

3. Для математической модели продольных колебаний в конструкции доказаны существование и единственность оптимального управления решениями соответствующей краевой задачи на графе с начально-конечными условиями.

4. Алгоритмы численных методов нахождения оптимального управления в моделях Буссинеска – Лява на отрезке и продольных колебаний в конструкции.

5. Программы, реализующие алгоритмы численных методов нахождения оптимального управления в моделях Буссинеска – Лява на отрезке и продольных колебаний в конструкции.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих российских рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Замышляева, А.А.* Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 5 (264), вып. 11. – С. 13–24.

2. *Замышляева, А.А.* Уравнения соболевского типа второго порядка с относительно диссипативным пучком операторов / А.А. Замышляева, О.Н. Цыплен-

кова // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. – Самара, 2012. – № 2 (27), вып. 12. – С. 26–33.

3. *Замышляева, А.А.* Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера – Сидорова – Дирихле для уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 11. – С. 1390 – 1398.

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ:

4. Программа оптимального управления решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска – Лява № 2012619932 / Цыпленкова О.Н. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2012619932; заявл. 20.09.2012; зарегистр. 02.11.2012, реестр программ для ЭВМ.

5. Программа нахождения решения начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска – Лява № 2012619933 / Замышляева А.А., Цыпленкова О.Н. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2012619933; заявл. 20.09.2012; зарегистр. 02.11.2012, реестр программ для ЭВМ.

6. Оптимальное управление в модели Буссинеска – Лява на графе № 2013611107 / Цыпленкова О.Н. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)».–2013611107; заявл. 11.12.2012; зарегистр. 09.01.2013, реестр программ для ЭВМ.

Другие научные публикации:

7. *Замышляева, А.А.* Задача оптимального управления для одного уравнения соболевского типа / Замышляева А.А., Цыпленкова О.Н. // Всероссийский научный семинар «Неклассические уравнения математической физики», посвященный 65-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова. – Якутск, 2010. – Ч.I. – С. 53–56.

8. *Замышляева, А.А.* Задача оптимального управления для уравнения соболевского типа второго порядка /А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ / под ред. А.И. Кожанова. – Новосибирск, 2010. – С. 95–101.

9. *Замышляева, А.А.* Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Междунар. конф. «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко: тез. докл. – Новосибирск, 2011. – С. 65.

10. *Замышляева, А.А.* Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа второго порядка /А.А.Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Междунар. конф. «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», посвященная памяти В.К. Иванова: тез. докл.– Екатеринбург, 2011. – С. 230–231.

11. *Цыпленкова, О.Н.* Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для одного уравнения соболевского типа / О.Н. Цыпленкова // Междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2012»: тез. докл. – Воронеж, 2012. – С. 209–211.

12. *Замышляева, А.А.* Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска – Лява на графе / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Междунар. конф. «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева: тез. докл. – Новосибирск, 2012. – С. 370.

13. *Цыпленкова, О.Н.* Численное решение задачи оптимального управления в модели Буссинеска – Лява / О.Н. Цыпленкова // Междунар. конф. «Измерения: состояние, перспективы развития»: тез. докл. – Челябинск, 2012. – С. 245–246.

14. *Цыпленкова, О.Н.* Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи в модели Буссинеска – Лява на графе / О.Н. Цыпленкова // Вестник МаГУ. Математика. – Магнитогорск, 2012. Вып. 14. – С. 157–167.

15. *Замышляева, А.А.* Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения Буссинеска – Лява на графе / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Всероссийская научная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения»: тез. докл. – Самара, 2013. – С. 34–35.

16. *Замышляева, А.А.* Численное решение задачи оптимального управления в модели Буссинеска – Лява на графе / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Междунар. конф., посвященная 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений.»: тез. докл. – Новосибирск, 2013. – С. 139.

Типография «Два комсомольца»

Подписано в печать 20.11.13. Формат 60 × 84 1/16.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1,87. Уч.-изд. л. 2.
Тираж 120 экз. Заказ 253/456

Отпечатано в типографии «Два комсомольца».
454008, г. Челябинск, Комсосольский пр., 2