ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи

Ушаков Андрей Леонидович

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИОННЫХ РАСШИРЕНИЙ

2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор С.А. Загребина

Челябинск – 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Актуальна разработка асимптотически оптимальных по количеству операций итерационных методов решения проблемных краевых задач для уравнений Софи Жермен, Пуассона, задачи представления линейного функционала в виде скалярного произведения в геометрически сложных областях соответственно, как анализ бигармонических, гармонических, скалярных систем, описывающих стационарные физические системы. По тому, что множество стационарных физических систем в природе и технике, например, в гидродинамике, механике, теплотехнике, электротехнике описывается краевыми задачами для уравнений Софи Жермен, Пуассона в геометрически сложных областях. И хотя в вопросах решения эллиптических задач имеется целый ряд блестящих достижений, тем не менее, это только зачатки теории, поэтому нужно приветствовать любой новый подход к вопросам конструирования алгоритмов для решения эллиптических задача пишет в свое время К.И. Бабенко [77].

Краевая задача для уравнения Софи Жермен описывает перемещение точек пластины под действием давления, поток течения жидкости. Эту задачу исследовали, например, Г.П. Астраханцев [2], Р. Гловинский, О. Пиронно [10], Е.Г. Дьяконов [18], В.В. Карачик, Н.А. Антропова [26–28], В.Г. Корнеев [31], Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц [37], С.Г. Маргенов, Р.Д. Лазаров [40], Л.Б. Масловская [46], А.М. Мацокин [51], Ж.П. Обэн [60], Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец [61], С.П. Павлов, М.В. Жигалов [62], А.Н. Потапов [64], В.И. Ряжских, М.И. Слюсарев, М.И. Попов [66], В.И. Соломин [73], С.Б. Сорокин [74–76]], С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер [78] и др. К решению этой краевой задачи сводятся решения задач, возникающие в нелинейной гидродинамике, нелинейной теории упругости. Такие задачи решали Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц [37], Дж. Хаппель, Г. Бреннер [79] и др.

Краевая задача для уравнения Пуассона описывает перемещения точек мембраны под действием давления, потенциал электростатического поля в зависимости от плотности статических зарядов, стационарное распределение температуры от тепловых источников, скорость течения жидкости. Эту задачу изучали, например, Г.П. Астраханцев [2], Н.И. Булеев [5], Е.Г. Дьяконов [18], В.П. Ильин [19–21], И.Е. Капорин [22, 25], В.Н. Кризский [32], Ю.А. Кузнецов, А.М. Мацокин [33], Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц [37], Г.И. Марчук [41, 44], Ю.А. Кузнецов [44], А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих [53], Е.С. Николаев [58], Ж.П. Обэн. [60], Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец [61], А.В. Ряжских [65], А.А. Самарский, В.Б. Андреев [69], С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер [78] и др.

Все выше перечисленное вкладывается в понятие «бигармоническая проблема» – одна из интереснейших и популярнейших проблем математики и механики[1]. В 2003 г. Мелешко В.В. опубликовал соответствующий обзор [85] наиболее значимых (по мнению автора) публикаций, включающий список из более чем 700 наименований за почти 200 лет на практически всех европейских языках. Это был, наверное, последний обзор такого масштаба.

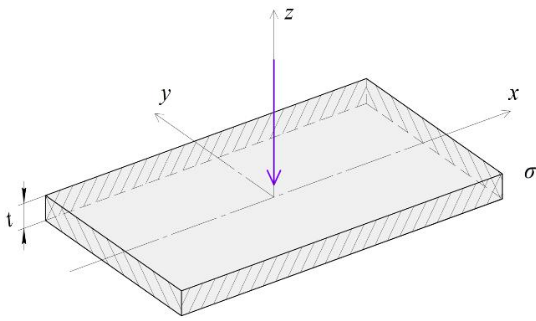
Сейчас трудно сказать, как впервые была сформулирована бигармоническая проблема: как математическая или как инженерная. Однако известно, что сначала она называлась «бигармонической проблемой теории упругости» и только позже, когда выяснилось, что с ее решением связаны и другие физические задачи, она стала называться просто «бигармонической проблемой».

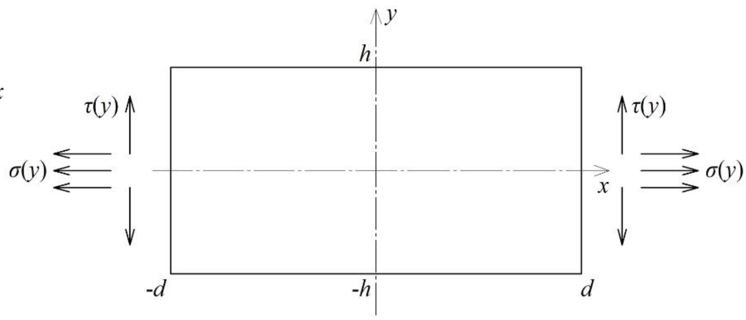
С позиции инженера, занимающегося расчётами на прочность, суть бигармонической проблемы можно продемонстрировать на таком примере. Представим себе тонкую прямоугольную плиту, жёстко защемлённую по её сторонам, под действием некоторого внешнего нормального давления (например,

---

[1] Бигармоническая проблема, ее решение и возможные приложения // URL: https://www.itpz-ran.ru/ru/molodym-issledovateliam/solve-tasks/biharmonic-problem/ . (дата обращения 18.11.2022)

сосредоточенной силы, приложенной в её центре – наиболее яркая задача). Надо найти прогибы плиты и найти её внутренние силовые факторы, необходимые для оценки прочности плиты. Важность этой задачи состоит в том, что прямоугольные плиты – основной строительный элемент океанских лайнеров. Другой пример: тонкая прямоугольная пластинка, к сторонам которой приложены некоторые нагрузки, действующие в ее плоскости. Надо выполнить прочностной расчёт пластинки.





Настоящая диссертация посвящена разработке нового научного направления, в основе которого лежит метод итерационных расширений для анализа стационарных физических систем, описываемых системами:

– бигармоническая система – смешанная краевая задача для неоднородного бигармонического уравнения о вертикальном перемещении точек пластины расположенной горизонтально под действием вертикального давления с однородными краевыми условиями защемления, шарнирного опирания, симметрии и свободного края

$$u : \Delta^2 \breve{u} = \breve{f}\big|_{\Omega},\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{0.0.1}$$

$$\breve{u} = \frac{\partial \breve{u}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0} = 0,\ \breve{u} = l_1 \breve{u}\Big|_{\Gamma_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \breve{u}}{\partial n} = l_1 \breve{u}\Big|_{\Gamma_1} = 0,\ l_1 \breve{u} = l_2 \breve{u}\Big|_{\Gamma_3} = 0,$$

где

$$\partial\Omega = \overline{s},\ s = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3,\ \Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j = 0,1,2,3,$$

$$l_1 \breve{u} = \Delta \breve{u} + (1-\sigma) n_1 n_2 \breve{u}_{xy} - n_2^2 \breve{u}_{xx} - n_1^2 \breve{u}_{yy},$$

$$l_2\breve{u} = \frac{\partial \Delta \breve{u}}{\partial n} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}(n_1 n_2(\breve{u}_{yy} - \breve{u}_{xx}) + (n_1^2 - n_2^2)\breve{u}_{xy}),$$

$$n_1 = -\cos(n,x),\ n_2 = -\cos(n,y),\ \sigma \in (0;1).$$

В теории упругости правая часть уравнения $\breve{f} = \breve{P}/\breve{D},$ где $\breve{P}-$ давление, $\breve{D} = \breve{E}\breve{h}^3/(12(1-\sigma^2))-$ цилиндрическая жёсткость пластины, $\breve{h}-$ толщина пластины, $\breve{E}-$ модуль Юнга (модуль растяжения), $\sigma-$ коэффициент Пуассона.

Можно сформулировать предыдущую краевую задачу как задачу представления линейного функционала в виде скалярного произведения

$$\breve{u} \in \breve{H} : [\breve{u},\breve{v}] = F(\breve{v})\ \forall \breve{v} \in \breve{H},\ F \in \breve{H}', \tag{0.0.2}$$

где пространство функций Соболева

$$\breve{H} = \breve{H}(\Omega) = \left\{ \breve{v} \in W_2^2(\Omega) : \breve{v}\big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial \breve{v}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} = 0 \right\}$$

на плоской ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей класса C^2 без самокасаний и самопересечений. $\Gamma_i,\ i = 0,1,2,3-$ объединение конечного числа открытых, непересекающихся подмножеств границы $\partial\Omega$ из дуг гладких кривых класса C^2, $n-$ внешняя нормаль к $\partial\Omega$, билинейная форма, скалярное произведение

$$[\breve{u},\breve{v}] = \Lambda(\breve{u},\breve{v}) = \int_\Omega (\sigma \Delta\breve{u}\Delta\breve{v} + (1-\sigma)(\breve{u}_{xx}\breve{v}_{xx} + 2\breve{u}_{xy}\breve{v}_{xy} + \breve{u}_{yy}\breve{v}_{yy}))d\Omega.$$

Для задачи из (0.0.2) достаточно обычно предположение, обеспечивающее для ее решения существование, единственность

$$\exists c_1, c_2 \in (0;+\infty) : c_1\|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Omega)} \le \Lambda(\breve{v},\breve{v}) \le c_2\|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Omega)}\ \forall \breve{v} \in \breve{H},$$

см. [60, 61]. Если $\breve{f}$ – заданная функция, то линейный функционал

$$F(\breve{v}) = (\breve{u},\breve{v}) = \int_\Omega \breve{f}\breve{v}d\Omega.$$

– гармоническая система – смешанная краевая задача для неоднородного гармонического уравнения о вертикальном перемещении точек мембраны

расположенной горизонтально под действием вертикального давления с однородными краевыми условиями закрепления и свободного края

$$u : -\Delta \breve{u} = \breve{f}\,\big|_{\Omega},\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{0.0.3}$$

$$\breve{u}\big|_{\Gamma_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \breve{u}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0,$$

где

$$\partial\Omega = \overline{s},\ s = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2,\ \Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \varnothing.$$

В теории упругости правая часть уравнения $\breve{f} = \breve{P}/\breve{T}$, где $\breve{P}$ – давление, $\breve{T}$ – коэффициент натяжения мембраны.

Можно сформулировать предыдущую краевую задачу как задачу представления линейного функционала в виде скалярного произведения

$$\breve{u} \in \breve{H} : [\breve{u}, \breve{v}] = F(\breve{v})\ \forall \breve{v} \in \breve{H},\ F \in \breve{H}', \tag{0.0.4}$$

где пространство функций Соболева

$$\breve{H} = \breve{H}(\Omega) = \left\{ \breve{v} \in W_2^1(\Omega) : \breve{v}\big|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$$

на плоской ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей класса C^2 без самокасаний и самопересечений

$\Gamma_i,\ i = 1, 2 -$ объединение конечного числа открытых, непересекающихся подмножеств границы $\partial\Omega$ из дуг гладких кривых класса C^2, $n -$ внешняя нормаль к $\partial\Omega$, билинейная форма, скалярное произведение

$$[\breve{u}, \breve{v}] = \mathrm{A}(\breve{u}, \breve{v}) = \int_{\Omega} (\breve{u}_x \breve{v}_x + \breve{u}_y \breve{v}_y)\, d\Omega.$$

Для задачи из (0.0.4) достаточно обычно предположение, обеспечивающее для ее решения существование, единственность

$$\exists c_1, c_2 \in (0; +\infty) : c_1 \|\breve{v}\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \mathrm{A}(\breve{v}, \breve{v}) \le c_2 \|\breve{v}\|^2_{W_2^1(\Omega)}\ \forall \breve{v} \in \breve{H},$$

см. [60, 61]. Если $\breve{f}$ – заданная функция, то линейный функционал

$$F(\breve{v}) = (\breve{u}, \breve{v}) = \int_{\Omega} \breve{f}\breve{v}\, d\Omega.$$

– скалярная система – задача представления линейного функционала в виде скалярного произведения в пространстве Гильберта как обобщение смешанных краевых задач для неоднородных полигармонических уравнений с однородными краевыми условиями

$$\breve{u} \in \breve{H} : [\breve{u}, \breve{v}] = F(\breve{v}) \ \forall \breve{v} \in \breve{H}, \qquad (0.0.5)$$

$$F \in \breve{H}', \ \breve{H} = \breve{H}(\Omega), \ \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Трудность решения этих задач, например, зависит от сложности геометрии области, высоты порядка дифференциального уравнения и от наличия краевого условия Дирихле. Проблемы при решении задачи Дирихле для уравнения Софи Жермен в ограниченной плоской области и даже в квадратной области, например, отмечают С.Д. Алгазин, Г.Х. Соловьев [1], Е.Г. Дьяконов [18], С.П. Павлов, М.В. Жигалов [62], В.И. Ряжских, М.И. Слюсарев, М.И. Попов [66], Н.Н. Анучина, К.И. Бабенко, С.К. Годунов и др. [77].

Имеет проблемы перспективный для решения таких задач метод фиктивных компонент как признают А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих [53] оказывается, этот метод не является асимптотически оптимальным. Авторы используют явное построение операторов продолжения дискретных функций с криволинейной границы с сохранением нормы и получают для уравнения второго порядка асимптотически оптимальный метод фиктивного пространства. Не умаляя достижений этого подхода, можно сказать, что этот метод достаточно сложно реализуем, не является универсальным, т.е. должен усложняться с высотой порядка дифференциального уравнения, если пытаться его развивать. Таким образом, можно заключить, что решаемые задачи, имеющие важные практические приложения, имеют проблемы, связанные с их решением этим методом. Метод при предполагаемом развитии имеет проблемы, связанные с теоретической сложнотью и практической реализацией. И, похоже, не наблюдается не только свежих публикаций по развитию и применению последнего метода, но и, хотя бы работ по этой тематике после С.Б. Сорокина [74–76].

Будем использовать приемы системного анализа, что аналогичные задачи, рассматриваемые как системы, имеют аналогичные свойства. А методы решения этих задач будут также аналогичны между собой. Если разработать метод решения, одной задачи, то можно выписать, с необходимыми изменениями, этот метод для решения остальных задач. Для построения нового асимптотическо оптимального метода будем использовать известный метод фиктивных компонент. В этом методе на примере физических систем из теории упругости будем увеличивать реакцию подстилающей поверхности и жескость материала на продолжении. С точки зрения математики – это введение двух дополнительных параметров. Будем минимизировать ошибку в более сильной норме, чем энергетическая норма возникающей задачи, используя не ее оператор, а уже квадрат этого оператора. Таким образом, для выбора итерационных параметров используем метод минимальных невязок и укажем условия достаточные для сходимости итерационного процесса. При таком подходе в отличии от метода фиктивных компонент получаются все оценки сходимости относительных ошибок с геометрической скоростью, конечно в норме более сильной чем энергетическая норма, возникающей задачи. Заметим, что при этом выполняется определенные свойства теории метода фиктивных компонент, например, что ошибки итерационного процесса находятся в подпространстве продолжений с минимальной нормой.

При различных граничных условиях возникает множество различных задач, зачастую существенно отличающихся по методам их решений, будем рассматривать, только проблемные задачи с условием Дирихле и продолжением задач через границу с условием Дирихле.

В работе рассматривается эллиптическое уравнение четвертого прядка в ограниченной области на плоскости при однородных краевых условиях, вообще говоря, четырех типов, т.е. с условием Дирихле, с шарнирным условием, с условием симметрии и с условием Неймана. Эту краевую задачу рассматривали, например, Л.Б. Масловская [46], Ж.П. Обэн. [60], Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец [61]. Краевая задача решается при общем предположении, обеспечивающем для задачи существование, единственность ее решения. Условие существования, единственности решения формулируют Ж.П. Обэн. [60], Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец [61].

В работе рассматриваемая эллиптическая краевая задача четвертого порядка сводится к решению дискретного аналога экранированного уравнения Софи Жермен в прямоугольной области при однородном шарнирном усовии на двух смежных сторонах и однородном условии симметрии на двух других сторонах прямоугольника. Решение этой задачи существует, единственно. Вопрос существования, единственности решения у такой задачи рассматривали Ж.П. Обэн. [60], Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец [61].

Рассматривается эллиптическое уравнение второго прядка в ограниченной области на плоскости при однородных краевых, вообще говоря, двух типов, т.е. с условием Дирихле, с условием Неймана. Эта краевую задачу рассматривали, например, Л.Б. Масловская [46], Ж.П. Обэн. [60], Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец [61]. Краевая задача решается при общем предположении, обеспечивающем существование, единственность ее решения. Условие существования, единственности решения формулируют Ж.П. Обэн. [60], Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец [61].

В работе рассматриваемая эллиптическая задача второго порядка сводится к решению дискретного аналога экранированного уравнения Пуассона в прямоугольной области при однородном усовии Дирихле на двух смежных сторонах и однородном условии Неймана на двух других сторонах прямоугольника. Решение этой задачи существует, единственно. Вопрос существования, единственности у такой задачи рассматривали Ж.П. Обэн. [60], Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец [61].

В настоящей работе используем редукции краевых задач в вариационном виде к математическим системам дискретного вида, что достаточно точно сохраняет свойства исходных краевых задач на разностном уровне, используя метод сумматорных тождеств, метод аппроксимации по частям и метод конечных элементов. Такие методы использовали Р. Курант, Д. Гильберт [34], О.А. Ладыженская [35], О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева [36], Г.И. Марчук [41], С.Г. Михлин [55], А.А. Самарский [68], А.А. Самарский, В.Б. Андреев [69].

Вопросы аппроксимации в работе не рассматриваются, а основной целью работы является построение метода асимптотически оптимального по вычислительным затратам на ЭВМ для получения решения с заранее задаваемой оценкой точности. При росте порядка эллиптических уравнений появляются больше проблем, как отмечает Е.Г. Дьяконов [18]. Как уже упоминалось при численном решении уравнения Софи Жермен и аналогичных эллиптических дифференциальных уравнений при краевом условии Дирихле возникают определенные трудности, решение такой задачи недостаточно освоено как пищут Н.Н. Анучина, К.И. Бабенко С.К. Годунов и др. [77]. Прежние авторы отмечают, что попытки, которые делают Р. Беллман, Э. Энджел [4] не приводят к получению для практики эффективных численных методов, если основываться на обычном сведении решений этих краевых задач к минимизации функционалов получаемым по этим задачам. Это интересный пример, хотя и неудачной попытка свести решение задачи, недостаточно освоенной вычислителями к ее решению методами оптимизации, методами другой специальности. В настоящей работе будут по возможности использоваться элементы методов и приемов специальности системный анализ для решения рассматриваемых задач. В.И. Ряжских, М.И. Слюсарев, М.И. Попов [66] пишут, что, при линейном характере уравнения Софи Жермен, интегрирование, задачи Дирихле обеспечивает ряд трудностей. Но понятна важность разработки эффективных методов решения для таких задач, являющихся проблемными при их решении на современных ЭВМ. Притом, что к численному решению таких задач сводяться численное решение даже более трудоемких задач, например, появляющихся в нелинейных задачах теории упругости.

Учитывая, что эллиптические уравнения с краевым условием Дирихле являются, признаются проблемными, тогда для их решений требуются действительно новые подходы, актуально построение асимптотически оптимальных методов для их решений в соответствии с монографией Е.Г. Дьяконова [18].

Для исследуемых краевых задач актуально сведение их решений к решению систем линейных алгебраических уравнений с матрицами, для которых количество ненулевых элементов в каждой строке не более пяти, а их решение получается, например, с помощью известных маршевых методов. В настоящей работе решение исходных задач сводится к численному решению дискретных аналогов экранированных уравнений Пуассона, Софи Жермен в прямоугольной области, а в конечном виде к решениям систем линейных алгебраических уравнений с пятидиагональными матрицами. Теорию, свойства этих матриц приводят в частности В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов [7], Ф.Р. Гантмахер [8], П. Ланкастер [38].

Давно актуальным признано простое сведение сложных задач уже к простым задачам. При решении задач математической физики этот прием называется редукцией, когда исходные физическо-математические системы, задачи в итоге заменяются системами алгебраическим уравнениям соответствующей и определённой структуры, что пишет Г.И. Марчук [41].

Актуальна методика фиктивного продолжения решаемых проблемных задач из математических систем и помещения их в множество формально более общих задач математических систем, что дает возможность их последующего эффективного решения итерационными методами.

Актуально решение рассматриваемых сложных задач именно итерационными методами, занимающими промежуточное положение между прямыми и статистическими методами, т.е. являющимися гибридным вариантом прямых и стационарных методов. Так как для очень сложных задач наиболее подходят статистические методы, а для простых задач лучше подходят прямые методы. О варианте такого выбора пишет С.В. Непомнящих [57].

Есть статистические методы решения рассматриваемых задач, например, метод Монте-Карло. Такой подход разрабатывают В.Л. Лукинов, Г.А. Михайлов [39], Г.А. Михайлов, В.Л. Лукинов [54], К.К. Сабельфельд [67]. Для эллиптических задач метод Монте-Карло не является асимптотически оптимальным по вычислительным затратам арифметических операций, как отмечают Е.Г. Дьяконов [18], Г.И. Марчук [41].

Численное решение рассматриваемых задач приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений, в которой, если N неизвестных, то требуется для прямого метода Гаусса порядка N^3 арифметических действий для её решения. А оптимальное количество действий для решения такой системы имеет порядок N, если использовать её специфику. Асимптотика $O(N)$ здесь оптимальна, по количеству действий, является не улучшаемой, что замечает, например, Е.Г. Дьяконов [18]. Метод Гаусса для решения такой системы будет не подходить по не экономичным затратам в машинном времени. Такие не экономичные затраты машинного времени при численном решении рассматриваемых задач могут быть несовместимы с вычислительными возможностями ЭВМ даже при стремительном прогрессе в развитии вычислительной техники, поэтому прямой метод Гаусса практически не пригоден, что по сути это отиечает, например, С.В. Непомнящих [57]. Конечно, очевидно, что нет прямых, аналитических, практически приемлемых методов общих решений таких задач. Актуальность темы видна как уже отмечалось по маштабному обзору, содержащему список более 700 работ за почти 200 лет по анализу бигармонической проблемы у В.В. Мелешко [85].

Увеличиваются требования к точности анализа рассматриваемых математических систем, описывающих стационарные физические системы, что ведёт к увеличению размеров систем линейных алгебраических уравнений и увеличивает количество действий при их решении, так же об этом пишет С.В. Непомнящих [57]. Следовательно, актуальна практическая необходимость в разработке асимптотически оптимальных по вычислительным затратам численных методов для экономии машинного времени при анализе рассматриваемых математических систем, описывающих стационарных физические системы.

Степень научной разработки темы. Укажем, только на некоторые подходы к решению краевых задач для уравнений Софи Жермен и Пуассона, основовное внимание, но в кратком виде, будет сосредоточенно на методах, развиваемых в настоящей работе. Предварительно можно отметить, что имеется обширная литература, посвященная раньше больше решению краевых задач для уравнения Пуассона, чем для уравнения Софи Жермен. Но можно заметить, что есть стремление эффективно решать краевые задачи для уравнения Софи Жермен, например, см. П. Бьорстад [81]. При численном решении краевых задач для эллиптических уравнений часто применяют многосеточные методы, например, Г.И. Марчук, В.В. Шайдуров [45]. Многосеточные методы применяют при численном решении и краевых задач для уравнения Софи Жермен, например, Л.В. Гилёва, В.В. Шайдуров [9]. При этом сохраняется важность эффективного численного решения изучаемых задач на множестве используемых сеток.

Ряд авторов замечают важность и используют понижение порядка при решении краевой задачи для уравнения Софи Жермен, например, С.П. Павлов, М.В. Жигалов [62]. Численное решение краевой задачи для уравнения Софи Жермен сводит к численному решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона С.Б. Сорокина [74, 75]. Решение краевой задачи для уравнения Софи Жермен в прямоугольнике, когда на одной стороне стоят условия свободного опирания, а на остальных сторонах стоят условия шарнирного опирания, сводит к решению задач для уравнения Софи Жермен, когда условия шарнирного опирания стоят на всех сторонах С.Б. Сорокин [76]. Метод фиктивных областей при продолжении задачи через границу при условии Неймана с оптимальными вычислительными затратами впервые предложил Астраханцев Г.П. [2], если оптимально решать задачи, возникающие в итерационном процессе. Для эллиптического уравнения четвертого порядка при краевых условиях Неймана, используя метод фиктивных компонент и быстрое дискретное преобразование Фурье, разрабатывают логарифмически оптимальный метод Б. Вебер, В.Г. Корнеев [6]. При численном решении уже задачи Дирихле для уравнения Софи Жермен в прямоугольной области предложил метод, не являющийся в рамках последней методики, вообще говоря, оптимальным по вычислительным затратам, С.Б. Сорокин [74].

Известены и другие подходы, не претендующие на оптимальность по вычислительным затратам. Краевую задачу Дирихле для уравнения Софи Жермен в ограниченной области сводят к решению задач Дирихле для уравнения Пуассона и решению интегрального уравнения уже на границе исходной области Р. Гловинский, О. Пиронно [10], П.Г. Сиарле, Р. Гловинский [82]. Предложили полиномиальные решения у задачи Дирихле для уравнения Софи Жермен в шаре В.В. Карачик, Н.А. Антропова [26–28]. Предлагает сводить решение уравнения Софи Жермен к системам обыкновенных дифференциальных уравнений А.Н. Потапов [64].

Работы по численному решению краевых задач для уравнений Софи Жермен и Пуассона не прекращаются, не смотря на наличие большого числа работ. Это свидетельствует, что эти задачи при решении имеют определенные проблемы, остаются проблемными, т.е. их решение требует новые подходы, новые знания и проведение их системного анализа с опорой на предыдущие результаты исследований. Как уже отмечалось, методы типа фиктивных компонент при продолжении через границу с условием Неймана получаются асимптотически оптимальными, но при продолжении через границу с условием Дирихле этого добиться, по крайней мере, сложно. Это свидетельствует о недоработках, необходимых и возможных улучшениях в решении именно краевых задач с условием Дирихле для уравнений Софи Жермен и Пуассона с целью разработки методов их все-таки асимптотически оптимального численного решения.

При этом можно учитывать, что для численного решения краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольных областях имеются прямые методы оптимальные по вычислительным затратам. Это отмечают Е.Г. Дьяконов [18], И.Е. Капорин [22, 25], Е.С. Николаев [58], А.А. Самарский, И.Е. Капорин, А.Б. Кучеров, Е.С. Николаев [70], Р.Э. Бэнк, Д.Дж. Роуз [80], П.Н. Шварцтраубер [86, 87], П.А. Свит [88]. Эти маршевые методы оптимальны, но порою бывают численно неустойчивыми по ошибкам округления при счете на ЭВМ как замечает

Е.Г. Дьяконов [18]. Такие методы описывают И.Е. Капорин [22, 25], А.А. Самарский, И.Е. Капорин, А.Б. Кучеров, Е.С. Николаев [70], Р.Э. Бэнк, Д.Дж. Роуз [80].

Можно даже предположить, что краевые задачи для уравнений Софи Жермен и Пуассона не будут окончательно и оптимально решены как множество задач при различных областях и различных краевых условиях. Но в данное время можно отметить, что именно краевые задачи с условием Дирихле являются проблемными при их численном решении известными и имеющимися ранее методами также порою являющимися проблемными. Естественно требуется, чтобы методы их решений были оптимальны по вычислительным затратам, имели простую, не сложную реализацию на ЭВМ и были устойчивы к ошибкам округления на ЭВМ. При этом можно заметить, что есть методы решения систем линейных алгебраических уравнений без ошибок, которые предлагают, например, А.В. Панюков, М.И. Германенко [63], которые требуют опять больших вычислительных затрат.

Извесны одномерная эллиптическая краевая задача второго порядка и ее дискретный аналог, которые факторизуются соответсвующим образом, на что обращает внимание Г.И. Марчук [41]. В двумерном случае для эллиптической краевой задачи второго порядка есть метод неполной факторизации Булеева, который предложил Н.И. Булеев [5] и развили Е.Г. Дьяконов [18], В.П. Ильин [19–21], Г.И. Марчук [41], Т. Мантейфель [83]. Данный метод по вычислительным затратам сравним с методом переменных направлений, который логарифмически оптимален, замечает Г.И. Марчук [41].

С.П. Новиков и его ученик И.А. Дынников обнаружили комплексную факторизацию оператора Лапласа вместе с его дискретным аналогом на треугольных сетках и указали на отсутствие факторизации на прямоугольных сетках. Об этом пишут П.Г. Гриневич, С.П. Новиков [11, 12], С.П. Новиков, И.А. Дынников [59]. Автор приводит итерационную комплексную факторизацию на прямоугольных сетках дискретного аналога оператора [102, 103, 104] для частной задачи, указанной им в [123, 127].

Приводил факторизованные модели в математической физике на Всесоюзной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» А.Н. Коновалов [29, 30]. Использует идею факторизации дискретного аналога оператора Лапласа во второй степени, получаемого при аппроксимации эллиптического уравнения четвертого порядка при условии шарнирного закрепления на границе А.М. Мацокин [51].

Использует энергетическую спектральную эквивалентность операторов, получаемых по методу конечных разностей и по методу конечных элементов Е.Г. Дьяконов [13–18]. Е.Г. Эллиптическая модельная задача четвертого порядка в прямоугольной области при краевом условии Дирихле решается логарифмически оптимальным методом, см. Е.Г. Дьяконов [18]. Автор приводит модельные эллиптические задачи второго и четвертого порядков в прямоугольнике при специальных смешанных краевых условиях, которые решаются методами итерационных факторизаций [98, 99, 100].

Популярен подход к решению краевых задач для эллиптических уравнений на основе метода Шварца, который разрабатывали, например, Г.П. Астраханцев [3], А.М. Мацокин [47, 49, 50, 52], С.В. Непомнящих [57], Х. Чжан [89].

Много и достаточно сложных работ по итерационному решению краевых задач для эллиптических уравнений четвертого порядка написал В.Г. Корнеев, например, см. [31], предыдущие и следующие работы.

Используют параболические сплайны при численном решении эллиптических краевых задач для уравнений четвёртого порядка, например, С.Г. Маргенов, Р.Д. Лазаров [40].

Настоящая диссертация развивает новое научное направление метод итерационных расширений, основываясь на научном направлении метод фиктивных областей. Можно заметить, что первые асимптотически оптимальные результаты по вычислительным затратам в методе фиктивных областей при продолжении эллиптических краевых задач через границы с условиями Неймана были получены Г.П. Астраханцевым. Метод фиктивных областей развивали Г.И. Марчук, Ю.А. Кузнецов, А.М. Мацокин, например, при продолжении эллиптических краевых задач через границы с условиями Дирихле. Такие задачи изучали в рамках этого направления методом фиктивных неизвестных И.Е. Капорин, Е.С. Николаев или методом фиктивных компонент А.М. Мацокин. Когда численно решались эллиптические краевые задачи при продолжении через границы с условиями Дирихле вычислительные затраты были, только логарифмически оптимальны. Используя построение явных операторов продолжения сеточных функций в окрестности криволинейных границ в методе фиктивного пространства для решения эллиптических краевых задач, только второго порядка при их продолжениях через границы с условиями Дирихле А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих разработали асимптотически оптимальный по вычислительным затратам метод. Возможно из-за сложности реализации последняя методика не получила своего развития для решения эллиптических краевых задач более высоких порядков при продолжениях их через границы с краевыми условиями Дирихле. Таким образом, проблема получения асимптотически оптимальных решений для эллиптических краевых задач высоких порядков при их продолжениях через границы с условиями Дирихле оставались. Существенные обобщения, модификации метода фиктивных компонент автором в методе итерационных расширений, используя новые подходы, позволяют получать уже асимптотически оптимальный метод решения эллиптических краевых задач различных порядков при их продолжениях через границы с условиями Дирихле. Это достигается на примере приложений из теории изгибания пластин увеличением цилиндрической жесткости пластины и жесткости упругого основания на продолжении. С точки зрения математики – это введение, использование двух дополнительных параметров для оптимизации метода решения по вычислительным затратам. А также применяется минимизация ошибок итерационного процесса не в норме, порождаемой оператором возникающей задачи, а в более сильной норме, в норме порождаемой квадратом оператора возникающейх задачи. При этом формулируются достаточные условия для сходимости со скоростью геометрической прогрессии метода минимальных невязок, в котором реализуется управление оптимальным выбором итерационных параметров на основе обработки информации, получаемой при вычислениях. Реализуется критерий остановки итерационного процесса при достижении заранее указанной оценки точности решения. В рамках развивития нового направления метод итерационных расширений асимптотически оптимально по вычислительным затратам решается так называемая бигармоническая проблема.

Таким образом, в настоящей работе разрабатывается метод, асимптотически оптимальный по количеству операций, для решения эллиптических краевых задач второго и четвертого порядков, задач гармонических и бигармонических систем при продолжении через границу с условием Дирихле, используя обобщения метода фиктивных компонент и метод конечных элементов, который описывает Ж.П. Обэн [60]. Проводится развитие идей таких авторов как Г.П. Астраханцев [2], И.Е. Капорин, Е.С. Николаев [23, 24], Ю.А. Кузнецов, А.М. Мацокин [33], Г.И. Марчук, Ю.А. Кузнецов [44], А.М. Мацокин [47–49], А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих [53], Г.И. Марчук, Ю.А. Кузнецов, А.М. Мацокин [84], которые предложили, а потом разрабатывали и исследовали метод фиктивных компонент. Можно сказать, что теоретические основы методологии фиктивных компонент заложили Г.П. Астраханцев, И.Е. Капорин, Ю.А. Кузнецов, Г.И. Марчук, А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих, Е.С. Николаев. Надо отметить, что существенное продвижение в теории метода фиктивных компонент предложили А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих [53], которые использовали операторы продолжения дискретных функций при сохранении нормы. Если использовать маршеные методы, которые описывают И.Е. Капорин [22, 25], А.А. Самарский, И.Е. Капорин, А.Б. Кучеров, Е.С. Николаев [70], Р.Э. Бэнк, Д.Дж. Роуз [80], то краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона решается асимптотически оптимально. Но, учитывая, что последний подход не является универсальным по порядку дифференциального уравнения и достаточно сложен, вообще говоря, для реализации на ЭВМ в настоящей работе указанные недостатки устранены, используя новые подходы в теоретическом и практическом плане для решения задач с краевым условием Дирихле для уравнений Софи Жермен и Пуассона асимптотически оптимально. Эти исходные задачи рассматриваются как задачи бигармонических и гармонических систем соответственно. Вводятся продолженные бигармонические и гармонические системы. Продолженные бигармонические и гармонические системы рассматриваются на конечномерных подпространствах. Предлагается метод итерационных расширений для анализа бигармонических и гармонических систем. Приводится алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задач бигармонических и гармонических систем. Рассматривается задача представления линейного функционала в гильбертовом пространстве как обобщение краевых задач для полигармонических уравнений. Эта задача рассматривается как задача скалярной системы. Вводится продолженная скалярная система. Продолженная скалярная система рассматривается на конечномерном подпространстве. Предлагается метод итерационных расширений для анализа скалярной системы.

Объектом анализа являются стационарные физические системы, описываемые проблемными краевыми задачами для уравнений Софи Жермен, Пуассона и задачей представления линейного функционала в виде скалярного произведения.

Предметом анализа являются итерационные методы для анализа бигармонических, гармонических и скалярных систем, определяемых проблемными краевыми задачами для уравнений Софи Жермен, Пуассона и задачей представления линейного функционала в виде скалярного произведения.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является решение фундаментальной научной проблемы – бигармонической проблемы в геометрически сложных областях. Для этого нужно разработать новое научное направление, в основе которого лежит метод итерационных расширений, асимптотически оптимальный по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации для анализа бигармонических, гармонических и скалярных систем, описывающих стационарные физические системы.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи:**

1. Для анализа бигармонических систем разработать новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности.

2. Для анализа гармонических систем разработать новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности.

3. Для анализа скалярных систем разработать новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности.

4. Для анализа бигармонических систем разработать специальное математическое и алгоритмическое обеспечение, реализующее метод итерационных расширений, асимптотически оптимальное по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности. Получить графические представления решений модельных задач бигармонических систем.

5. Для анализа гармонических систем разработать специальное математическое и алгоритмическое обеспечение, реализующее метод итерационных расширений, асимптотически оптимальное по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности. Получить графические представления решений модельных задач гармонических систем.

Методология и методы исследования. В работе применялись методы системного анализа, методы управления, методы теории упругости, методы вычислительной математики, методы математической физики, методы математического анализа, методы линейной алгебры, методы функционального анализа, методы вариационного исчисления, методы дифференциальных уравнений, методы оптимизации, методы итерационных факторизаций, метод итерационных расширений и методология фиктивных компонент.

Научная новизна заключается в разработке нового метода итерационных расширений, асимптотически оптимального по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации для анализа бигармонических, гармонических и скалярных систем. В рамках развития нового направления метод итерационных расширений предложен асимптотически оптимальный по вычислительным затратам метод решения бигармонической проблемы в геометрически сложных областях. К основным новым результатам относятся следующие результаты:

1. Разработаны новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа бигармонических систем. В методе итерационных расширений используется введение параметра, имеющего в приложениях физический смысл жесткости пластины, а минимизация ошибки ведется в более сильной норме, чем энергетическая норма.

2. Разработаны новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа гармонических систем. В методе итерационных расширений используется введение параметра, имеющего в приложениях

физический смысл натяжения мембраны, а минимизация ошибки ведется в более сильной норме, чем энергетическая норма.

3. Разработаны новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа скалярных систем как обобщения метода и алгоритма итерационных расширений для гармонических, бигармонических и других систем.

4. Разработано специальное математическое и алгоритмическое обеспечение, реализующее метод итерационных расширений, асимптотически оптимальное по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа бигармонических систем. Это обеспечение позволяет решать модельные задачи бигармонических систем с получением графических представлений решений.

5. Разработано специальное математическое и алгоритмическое обеспечение, реализующее метод итерационных расширений, асимптотически оптимальное по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа гармонических систем. Это обеспечение позволяет решать модельные задачи гармонических систем с получением графических представлений решений.

Теоретическая значимость работы. Полученный новый метод итерационных расширений вносит вклад в развитие методов решения задач бигармонических, гармонических и скалярных систем, описывающих стационарные физические системы.

Практическая значимость работы. Разработанный новый метод может использоваться при решении задач бигармонических и гармонических систем, описывающих стационарные физические системы в природе и технике в таких областях как гидродинамика, механика, теплотехника, электротехник и т.д. Использование этого асимптотически оптимального по количеству операций метода предоставляет возможности экономии материальные ресурсов и средств, например, в строительстве, приборостроении, а также времени вычислений на ЭВМ. Результаты работы могут быть использованы в процессе обучения в высших учебных заведениях на механико-математических и физико-технических специальностях и направлениях.

Основные положения, выносимые на защиту:

В рамках разработки методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации и искусственного интеллекта:

1. Новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа бигармонических систем.

2. Новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа гармонических систем.

3. Новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа скалярных систем.

В рамках разработки специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта:

4. Специальное математическое и алгоритмическое обеспечение, реализующее метод итерационных расширений, асимптотически оптимальное по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа бигармонических систем.

5. Специальное математическое и алгоритмическое обеспечение, реализующее метод итерационных расширений, асимптотически оптимальное по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа гармонических систем.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты работы были опубликованы, научно обоснованы, т.е. приведены их математические доказательства. При вычислительных экспериментах были подтверждены теоретические результаты, приведенные в работе, а именно подтверждена асимптотическая оптимальность по количеству операций разработанных численных методов. Для объективности и большей чистоты в экспериментальном подтверждении полученных в теории результатов велись и независимые эксперименты по зарегистрированным программам для ЭВМ.

Результаты самой работы докладывались на Международной научно-технической конференции «Автоматизация» (г. Сочи, 06-12 сентября 2020 года); XXXIII - Международной научной конференции математические методы в технике и технологиях ММТТ-33 в двух докладах (г. Казань, 14-18 сентября 2020 года); Международной конференции «Кибер-физические системы: проектирование и моделирование» «Cyber-physical systems design and modelling» (г. Казань, 14-18 сентября 2020 года). По докладам на этих конференциях была опубликована статья в рецензируемом научном издании, индексируемом Scopus.

Результаты работы докладывались на 7-й Международной школе-семинаре «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» «Nonlinear analysis and extremal problems» (г. Иркутск, 15-22 июля 2022 года).

Предварительные результаты работы неоднократно докладывались на областном семинаре «Уравнения Соболевского типа» профессора Г.А. Свиридюка (г. Челябинск), на объединенном научном семинаре профессора А.Г. Кушнера в ИПУ РАН (г. Москва), научном семинаре профессора В.И. Ряжских в ВГТУ (г. Воронеж) и научном семинаре профессора С.И. Кадченко в МГТУ (г. Магнитогорск).

Результаты работы были апробированы на конференции: Фундаментальные проблемы управления производственными процессами в условиях перехода к индустрии 4.0 (г. Сочи, 06-12 сентября 2020 года).

Публикации автора по теме диссертации. По теме диссертации издано 40 работ [90–129], из них 8 свидетельств государственной регистрации программ для ЭВМ, разработанных в соавторстве [105–112], 12 работ изданы в журналах, рекомендованных ВАК [90–93, 95, 96, 98–100, 102–104], 4 работы в изданиях, цитируемых Scopus [90, 94, 97, 101], из них одна работа в соавторстве [90].

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, списка обозначений и десяти приложений. Объём диссертации с приложениями составляет 296 страниц. Список литературы содержит 129 наименований.

Краткое содержание диссертации

Введение к диссертации включает в себя актуальность темы, задачи, степень научной разработки темы, объект анализа, предмет анализа, цель и задачи исследования, методы исследования, научную новизну, теоретическую значимость работы, практическую значимость работы, основные положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробации результатов.

Первая глава посвящается анализу краевой задачи с условием Дирихле для уравнения Софи Жермен как бигармонической системы. Бигармоническая система рассматривается в пространстве Соболева. Производится продолжение бигармонической системы в пространстве Соболева. Приводится анализ продолженной бигармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент в пространстве Соболева. Продолженная бигармоническая система рассматривается на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Приводится анализ продолженной бигармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Продолженная бигармоническая система рассматривается на пространстве Евклида. Приводится анализ продолженной бигармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на пространстве Евклида. Производится анализ продолженной бигармонической системы методом итерационных расширений на пространстве Евклида. Приводится анализ продолженной бигармонической системы методом итерационных расширений в пространстве Соболева. Приводится анализ продолженной бигармонической системы методом итерационных расширений на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Выписываетя агоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи бигармонической системы на пространстве Евклида. Приводится пример с применением метода итерационных расширений для решения задачи бигармонической системы на ЭВМ. В главе предоставлены возможности для реализации численного анализа бигармонической системы в пространстве Соболева на единичном квадрате как важного примера задачи единых математических систем, являющейся бигармонической проблемой. Приводится продолжнннние бигармонической системы на конечномерном подпространстве пространства Соболева на квадрате. Выписывается алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для численного решения задачи продолженной бигармонической системы на квадрате после ее аппроксимации по методу конечных элементов. Приводится алгоритм, реализующий используемый метод итерационной факторизации при численном решении задачи продолженной бигармонической системы на квадрате после ее аппроксимации по методу конечных элементов. Приводится пример применения метода итерационных расширений для расчета изгиба пластины.

В параграфе 1.1 приводится краевая задача с условием Дирихле для уравнения Софи Жермен как бигармоническая система. Задача бигармонической системы приводится в вариационном и операторном виде, при общем предположении, обеспечивающем существование и единственность ее решения.

В параграфе 1.2 производится продолжение бигармонической системы в пространстве Соболева. Устанавливается существование и единственность решения задачи продолженной бигармонической системы, которое продолжает решение задачи бигармонической системы нулем.

В параграфе 1.3 приводится анализ продолженной бигармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент в пространстве Соболева. Для используемого итерационного процесса указываются оптимальные и достигаемые оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости.

В параграфе 1.4 продолженная бигармоническая система рассматривается на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Используются при аппроксимации параболические конечные элементы.

В параграфе 1.5 приводится анализ продолженной бигармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Для используемого итерационного процесса указываются логарифмически оптимальные оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости.

В параграфе 1.6 продолженная бигармоническая система рассматривается на пространстве Евклида. Задача продолженной бигармонической системы после аппроксимации рассматривается в матричном виде как система линейных алгебраических уравнений.

В параграфе 1.7 приводится анализ продолженной бигармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на пространстве Евклида. Для используемого итерационного процесса в матричном виде указываются логарифмически оптимальные оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости для относительных ошибок и асимптотически оптимальные для абсолютных ошибок.

В параграфе 1.8 производится асимптотически оптимальный анализ продолженной бигармонической системы методом итерационных расширений на пространстве Евклида. Для используемого итерационного процесса в матричном виде указываются асимптотически оптимальные оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости для относительных ошибок.

В параграфе 1.9 приводится анализ продолженной бигармонической системы методом итерационных расширений в пространстве Соболева. Для используемого итерационного процесса указываются оптимальные оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости.

В параграфе 1.10 приводится анализ продолженной бигармонической системы методом итерационных расширений на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Для используемого итерационного процесса указываются асимптотически оптимальные оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости.

В параграфе 1.11 выписывается алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи продолженной бигармонической системы на пространстве Евклида. Приводится пример с применением метода итерационных расширений для решения задачи бигармонической системы на ЭВМ. Расчеты на ЭВМ подтверждают экспериментально асимптотическую оптимальность разработанного метода итерационных расширений.

В параграфе 1.12 рассматриваются методы итерационных факторизаций для решения расширенной задачи бигармонической системы на прямоугольной облассти.

В параграфе 1.13 рассматривается бигармоническая система в пространстве Соболева на единичном квадрате как важный пример единых математических систем.

В параграфе 1.14 приводится продолжнннная бигармоническая система на конечномерном подпространстве пространства Соболева на квадрате.

В параграфе 1.15 предлагается алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи продолженной бигармонической системы на квадрате после ее аппроксимации по методу конечных элементов.

В параграфе 1.16 предлагается алгоритм, использующий метод итерационной факторизации при решении задачи продолженной бигармонической системы на квадрате после ее аппроксимации по методу конечных элементов.

В параграфе 1.17 приводится пример анализа стационарной физической системы для пластины методом итерационных расширений. Расчеты на ЭВМ подтверждают экспериментально асимптотическую оптимальность разработанного метода итерационных расширений.

Вторая глава посвящается анализу краевой задачи с условием Дирихле для уравнения Пуассона как гармонической системы. Гармоническая система рассматривается в пространстве Соболева. Производится продолжение гармонической системы в пространстве Соболева. Приводится анализ продолженной гармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент в пространстве Соболева. Продолженная гармоническая система рассматривается на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Приводится анализ продолженной гармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Продолженная гармоническая система рассматривается на пространстве Евклида. Приводится анализ продолженной гармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на пространстве Евклида. Производится анализ продолженной гармонической системы методом итерационных расширений на пространстве Евклида. Приводится анализ продолженной гармонической системы методом итерационных расширений в пространстве Соболева. Приводится анализ продолженной гармонической системы методом итерационных расширений на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Выписываетя агоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи гармонической системы на пространстве Евклида. Приводится пример с применением метода итерационных расширений для численного решения задачи гармонической системы. Приводится пример применения метода итерационных расширений для расчета изгиба мембраны.

В параграфе 2.1 приводится краевая задача с условием Дирихле для уравнения Пуассона как гармоническая система. Задача гармонической системы приводится в вариационном виде и операторном виде, при общем предположении, обеспечивающем существование и единственность ее решения.

В параграфе 2.2 производится продолжение гармонической системы в пространстве Соболева. Устанавливается существование и единственность решения задачи продолженной гармонической системы, которое продолжает решение задачи гармонической системы нулем.

В параграфе 2.3 приводится анализ продолженной гармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент в пространстве Соболева. Для используемого итерационного процесса указываются оптимальные и достигаемые оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости.

В параграфе 2.4 продолженная гармоническая система рассматривается на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Используются при аппроксимации параболические конечные элементы.

В параграфе 2.5 приводится анализ продолженной гармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Для используемого итерационного процесса указываются логарифмически оптимальные оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости.

В параграфе 2.6 продолженная гармоническая система рассматривается на пространстве Евклида. Задача продолженной гармонической системы после аппроксимации рассматривается в матричном виде как система линейных алгебраических уравнений.

В параграфе 2.7 приводится анализ продолженной гармонической системы модифицированым методом фиктивных компонент на пространстве Евклида. Для используемого итерационного процесса в матричном виде указываются логарифмически оптимальные оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости для относительных ошибок и асимптотически оптимальные для абсолютных ошибок.

В параграфе 2.8 производится асимптотически оптимальный анализ продолженной гармонической системы методом итерационных расширений на пространстве Евклида. Для используемого итерационного процесса в матричном виде указываются асимптотически оптимальные оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости для относительных ошибок.

В параграфе 2.9 приводится анализ продолженной гармонической системы методом итерационных расширений в пространстве Соболева. Для используемого итерационного процесса указываются оптимальные оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости.

В параграфе 2.10 приводится анализ продолженной гармонической системы методом итерационных расширений на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Для используемого итерационного процесса указываются асимптотически оптимальные оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости.

В параграфе 2.11 выписывается алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи продолженной гармонической системы на пространстве Евклида. Приводится пример с применением метода итерационных расширений для решения задачи гармонической системы на ЭВМ. Расчеты на ЭВМ подтверждают экспериментально асимптотическую оптимальность разработанного метода итерационных расширений.

В параграфе 2.12 рассматривается гармоническая система в пространстве Соболева на L-образной области как пример стационарной физико-математической системы.

В параграфе 2.13 приводится продолжнннная гармоническая система на конечномерном подпространстве пространства Соболева на квадрате.

В параграфе 2.14 предлагается алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи продолженной гармонической системы на квадрате после ее аппроксимации.

В параграфе 2.15 описывается реализация алгоритма метода итерационных расширений для решения задачи продолженной гармонической системы на квадрате. Выписываются коэффициенты разностных схем при рассматриваемых краевых условиях.

В параграфе 2.16 предлагается алгоритм, использующий метод итерационной факторизации при решении задачи расширенной гармонической системы на квадрате после ее аппроксимации.

В параграфе 2.17 описывается реализация алгоритма, использующего метод итерационной факторизации при решении задачи расширенной гармонической системы на квадрате. Выписываются коэффициенты используемых разностных схем при рассматриваемых краевых условиях.

В параграфе 2.18 приводится пример использования метода итерационных расширений для решения задачи гармонической системы в пространстве Соболева на L-образной области.

В параграфе 2.19 приводится пример анализа стационарной физической системы для мембраны методом итерационных расширений. Расчеты на ЭВМ подтверждают экспериментально асимптотическую оптимальность разработанного метода итерационных расширений.

Третья глава посвящается анализу задачи представления линейного функционала в виде скалярного произведения как скалярной системы. Скалярна система рассматривается в пространстве Гильберта. Производится продолжение скалярной системы в пространстве Гильберта. Приводится анализ продолженной скалярной системы модифицированным методом фиктивных компонент в пространстве Гильберта. Продолженная скалярная система рассматривается на конечномерном подпространстве пространства Гильберта. Приводится анализ продолженной скалярной системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве пространства Гильберта.

Продолженная скалярная система рассматривается на пространстве Евклида. Приводится анализ продолженной скалярной системы модифицированным методом фиктивных компонент на пространстве Евклида. Производится анализ продолженной скалярной системы методом итерационных расширений на пространстве Евклида. Приводится анализ продолженной скалярной системы методом итерационных расширений в пространстве Гильберта. Приводится анализ продолженной скалярной системы методом итерационных расширений на конечномерном подпространстве пространства Гильберта. Выписываетя агоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи скалярной системы на пространстве Евклида. Приводятся примеры с применением метода итерационных расширений для решения задач гармонических систем как частных скалярных систем на ЭВМ.

В параграфе 3.1 приводится задача представления линейного фунцкионала в виде скалярного произведения в пространстве Гильберта как скалярная система. Задача скалярной системы приводится в вариационном и операторном видах, при общем предположении, обеспечивающем существование и единственность ее решения.

В параграфе 3.2 производится продолжение скалярной системы в пространстве Гильберта. Устанавливается существование и единственность решения задачи продолженной скалярной системы, которое продолжает решение задачи скалярной системы нулем.

В параграфе 3.3 приводится анализ продолженной скалярной системы модифицированным методом фиктивных компонент в пространстве Гильберта. Для используемого итерационного процесса указываются оптимальные и достигаемые оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости.

В параграфе 3.4 продолженная скалярная система рассматривается на конечномерном подпространстве пространства Гильберта. Используются при аппроксимации конечные элементы.

В параграфе 3.5 приводится анализ продолженной скалярной системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве пространства Гильберта. Для используемого итерационного процесса указываются оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости.

В параграфе 3.6 продолженная скалярная система рассматривается на пространстве Евклида. Задача продолженной скалярной системы после аппроксимации рассматривается в матричном виде как система линейных алгебраических уравнений.

В параграфе 3.7 приводится анализ продолженной скалярной системы модифицированным методом фиктивных компонент на пространстве Евклида. Для используемого итерационного процесса в матричном виде указываются оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости для относительных ошибок и асимптотически оптимальные для абсолютных ошибок.

В параграфе 3.8 производится асимптотически оптимальный анализ продолженной скалярной системы методом итерационных расширений на пространстве Евклида. Для используемого итерационного процесса в матричном виде указываются асимптотически оптимальные оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости для относительных ошибок.

В параграфе 3.9 приводится анализ продолженной скалярной системы методом итерационных расширений в пространстве Гильберта. Для используемого итерационного процесса указываются оптимальные оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости.

В параграфе 3.10 приводится анализ продолженной скалярной системы методом итерационных расширений на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Для используемого итерационного процесса указываются асимптотически оптимальные оценки сходимости с геометрической скоростью сходимости.

В параграфе 3.11 выписывается алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи продолженной скалярной системы на пространстве Евклида. Приводятся примеры с применением метода итерационных расширений для решения задач гармонических систем как частных скалярных систем на ЭВМ. Расчеты на ЭВМ подтверждают экспериментально асимптотическую оптимальность разработанного метода итерационных расширений.

В **заключении** формулируются основные результаты работы. Приводятся рекомендации для дальнейшей разработки темы.

Благодарности

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность научному консультанту доктору физико-математических наук, профессору Софье Александровне Загребиной за большую помощь при подготовке данной работы, всем и за все, с кем работал, учился и жил за то, что они были, есть...

ГЛАВА 1

АНАЛИЗ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В этой главе приводится анализ бигармонической системы – краевой задачи с условием Дирихле для уравнения Софи Жермен. Бигармоническая система рассматривается в пространстве Соболева. Производится продолжение бигармонической системы в пространстве Соболева. Приводится анализ продолженной бигармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент в пространстве Соболева. Продолженная бигармоническая система рассматривается на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Приводится анализ продолженной бигармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Продолженная бигармоническая система рассматривается на пространстве Евклида. Приводится анализ продолженной бигармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на пространстве Евклида. Производится анализ продолженной бигармонической системы методом итерационных расширений на пространстве Евклида. Приводится анализ продолженной бигармонической системы методом итерационных расширений в пространстве Соболева. Приводится анализ продолженной бигармонической системы методом итерационных расширений на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Выписывается алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи бигармонической системы на пространстве Евклида. В главе описывается программная реализация алгоритма метода итерационных расширений для численного решения задачи бигармонической системы в пространстве Соболева на единичном квадрате, являющейся бигармонической проблемой [1, 18, 62, 66, 77]. Производится продолжкнние бигармонической системы на конечномерном подпространстве пространства Соболева на квадрат. Описывается программная реализация алгоритма метода итерационных расширений для численного решения задачи продолженной бигармонической системы на квадрате после ее аппроксимации по методу конечных элементов. Выписываются коэффициенты вариационно-разностных схем при рассматриваемых краевых условиях. Описывается программная реализация алгоритма, использующего метод итерационной факторизации при численном решении задачи продолженной бигармонической системы на квадрате после ее аппроксимации по методу конечных элементов. Выписываются коэффициенты используемых вариационно-разностных схем при рассматриваемых краевых условиях. В алгоритме, использующем метод итерационной факторизации на каждом шаге итерационного процесса можно дважды применять маршевый метод по решению системы с матрицей, получающейся при аппроксимации оператора Лапласа разностным методом на обычном пятиточечном шаблоне. Приводится пример расчета изгиба пластины.

1.1. Бигармоническая система в пространстве в Соболева

Будем рассматривать краевую задачу для уравнения Софи Жермен как бигармоническую систему в соболевском пространстве. Из теории упругости [37, 61] энергия деформированной пластины может записываться в виде:

$$\breve{E}_\omega(\breve{u}_\omega) = \frac{1}{2}\breve{D}_\omega \int\limits_{\Omega_\omega} ((\Delta\breve{u}_\omega)^2 + 2(1-\sigma_\omega)(\breve{u}^2_{\omega xy} - \breve{u}_{\omega xx}\breve{u}_{\omega yy}))d\Omega_\omega +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\omega} \breve{K}_\omega \breve{u}^2_\omega d\Omega_\omega - \int\limits_{\Omega_\omega} \breve{P}_\omega \breve{u}_\omega d\Omega_\omega,\ \omega \in \{1, \mathrm{II}\},$$

где $\breve{P}_\omega$ – давление, $\breve{K}_\omega$ – коэффициент жёсткости упругого основания ($\breve{K}_\omega = 0$ при отсутствии упругого основания), $\breve{D}_\omega = \breve{E}_\omega \breve{h}^3 \big/ (12(1-\sigma_\omega^2))$ – цилиндрическая жёсткость пластины, $\breve{h}$ – толщина пластины, $\breve{E}_\omega$ – модуль Юнга (модуль растяжения), $\sigma_\omega \in (0;1)$ – коэффициент Пуассона, Ω_ω – плоская ограниченная область с кусочно-гладкой границей класса C^2 без самокасаний и самопересечений, $\partial\Omega_\omega = \overline{s}_\omega$, $s_\omega = \Gamma_{\omega,0} \bigcup \Gamma_{\omega,1} \bigcup \Gamma_{\omega,2} \bigcup \Gamma_{\omega,3}$,
$\Gamma_{\omega,i} \bigcap \Gamma_{\omega,j} = \varnothing$, если $i \neq j$, $i,j = 0,1,2,3$, $\Gamma_{\omega,i}$, $i = 0,1,2,3$ – объединение конечного числа открытых, непересекающихся подмножеств на границе $\partial\Omega_\omega$ из дуг гладких кривых класса C^2, $\breve{u}_\omega$ – искомое перемещение пластины. Вариация энергии пластины приравнивается к нулю

$$\delta\breve{E}_\omega(\breve{u}_\omega) = \breve{D}_\omega \int\limits_{\Omega_\omega} (\Delta\breve{u}_\omega \Delta\breve{v}_\omega + (1-\sigma_\omega)(2\breve{u}_{\omega xy}\breve{v}_{\omega xy} - \breve{u}_{\omega xx}\breve{v}_{\omega yy} - \breve{u}_{\omega yy}\breve{v}_{\omega xx}))d\Omega_\omega +$$

$$+\int\limits_{\Omega_\omega} \breve{K}_\omega \breve{u}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega - \int\limits_{\Omega_\omega} \breve{P}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega = 0,$$

если $\breve{v}_\omega = \delta\breve{u}_\omega$, $a_\omega = \breve{K}_\omega \big/ \breve{D}_\omega$, $\breve{f}_\omega = \breve{P}_\omega \big/ \breve{D}_\omega$, то получается, что

$$\int\limits_{\Omega_\omega} (\sigma_\omega \Delta\breve{u}_\omega \Delta\breve{v}_\omega + (1-\sigma_\omega)(\breve{u}_{\omega xx}\breve{v}_{\omega xx} + 2\breve{u}_{\omega xy}\breve{v}_{\omega xy} + \breve{u}_{\omega yy}\breve{v}_{\omega yy}) + a_\omega \breve{u}_\omega \breve{v}_\omega)d\Omega_\omega = \int\limits_{\Omega_\omega} \breve{f}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega.$$

При интегрировании по частям из второй фррмулы Грина получается

$$\int\limits_{\Omega_\omega} (\Delta^2\breve{u}_\omega + a_\omega \breve{u}_\omega)\breve{v}_\omega d\Omega_\omega + \int\limits_{s_\omega} l_{\omega,1}\breve{u}_\omega \frac{\partial \breve{v}_\omega}{\partial n_\omega} ds_\omega - \int\limits_{s_\omega} l_{\omega,2}\breve{u}_\omega \breve{v}_\omega ds_\omega = \int\limits_{\Omega_\omega} \breve{f}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega,$$

где

$$l_{\omega,1}\breve{u}_\omega = \Delta\breve{u}_\omega + (1-\sigma_\omega)n_{\omega,1}n_{\omega,2}\breve{u}_{\omega xy} - n_{\omega,2}^2\breve{u}_{\omega xx} - n_{\omega,1}^2\breve{u}_{\omega yy},$$

$$l_{\omega,2}\breve{u}_\omega = \frac{\partial \Delta\breve{u}_\omega}{\partial n_\omega} + (1-\sigma_\omega)\frac{\partial}{\partial s_\omega}(n_{\omega,1}n_{\omega,2}(\breve{u}_{\omega yy} - \breve{u}_{\omega xx}) + (n_{\omega,1}^2 - n_{\omega,2}^2)\breve{u}_{\omega xy}),$$

n_ω – внешния нормаль к $\partial\Omega_\omega$, $n_{\omega,1} = -\cos(n_\omega, x)$, $n_{\omega,2} = -\cos(n_\omega, y)$.

Если на $\Gamma_{\omega,0}$ жёсткая заделка, на $\Gamma_{\alpha,1}$ шарнирное опирание, на $\Gamma_{\omega,2}$ условие симметрии, на $\Gamma_{\omega,3}$свободное опирание, то получаем краевую задачу с однородными смешанными краевыми условиями:

$$\Delta^2\breve{u}_\omega + a_\omega\breve{u}_\omega = \breve{f}_\omega,$$

$$\breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,0}} = \frac{\partial\breve{u}_\omega}{\partial n_\omega}\Big|_{\Gamma_{\omega,0}} = 0,\ \breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,1}} = l_{\omega,1}\breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,1}} = 0,$$

$$\frac{\partial\breve{u}_\omega}{\partial n_\omega}\Big|_{\Gamma_{\omega,2}} = l_{\omega,2}\breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,2}} = 0,\ l_{\omega,1}\breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,3}} = l_{\omega,2}\breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,3}} = 0.$$

Сформулируем вариационную краевую задачу при смешанных однородных краевых условиях жесткого закрепления, шарнирного закрепления, симметрии, свободного опирания как бигармоническую систему

$$\breve{u}_\omega \in \breve{H}_\omega : \Lambda_\omega(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) = F_\omega(\breve{v}_\omega)\ \forall\breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega,\ F_\omega \in \breve{H}'_\omega, \tag{1.1.1}$$

где пространство функций Соболева

$$\breve{H}_\omega = \breve{H}_\omega(\Omega_\omega) = \left\{ \breve{v}_\omega \in W_2^2(\Omega_\omega) : \breve{v}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,0}\cup\Gamma_{\omega,1}} = 0,\ \frac{\partial\breve{v}_\omega}{\partial n_\omega}\Big|_{\Gamma_{\omega,0}\cup\Gamma_{\omega,2}} = 0 \right\}$$

на плоской ограниченной области Ω_ω с кусочно-гладкой границей класса C^2 без самокасаний и самопересечений

$$\partial\Omega_\omega = \overline{s}_\omega,\ s_\omega = \Gamma_{\omega,0} \bigcup \Gamma_{\omega,1} \bigcup \Gamma_{\omega,2} \bigcup \Gamma_{\omega,3},$$

$$\Gamma_{\omega,i} \bigcap \Gamma_{\omega,j} = \varnothing, \text{ если } i \neq j,\ i, j = 0,1,2,3,$$

$\Gamma_{\omega,i},\ i = 0,1,2,3 -$ объединение конечного числа открытых, непересекающихся подмножеств границы $\partial\Omega_\omega$ из дуг гладких кривых класса C^2, $n_\omega -$ внешняя нормаль к $\partial\Omega_\omega$, билинейная форма с константой $\breve{a}_\omega \in [0;+\infty)$ и при $\sigma_\omega \in (0;1)$:

$$\Lambda_\omega(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) = \int\limits_{\Omega_\omega} (\sigma_\omega \Delta\breve{u}_\omega \Delta\breve{v}_\omega + (1-\sigma_\omega)(\breve{u}_{\omega xx}\breve{v}_{\omega xx} + 2\breve{u}_{\omega xy}\breve{v}_{\omega xy} + \breve{u}_{\omega yy}\breve{v}_{\omega yy}) + a_\omega\breve{u}_\omega\breve{v}_\omega)d\Omega_\omega.$$

Для задачи из (1.1.1) достаточно обычно предположение, обеспечивающее для ее решения существование, единственность

$$\exists c_1, c_2 \in (0;+\infty) : c_1\|\breve{v}_\omega\|^2_{W_2^2(\Omega_\omega)} \leq \Lambda_\omega(\breve{v}_\omega, \breve{v}_\omega) \leq c_2\|\breve{v}_\omega\|^2_{W_2^2(\Omega_\omega)}\ \forall\breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega,$$

см. [60, 61]. Данное условие всегда гарантирует единственность решения при $\breve{a}_\omega \in (0;+\infty)$ и любых комбинациях из приведенных краевых условий. Если, например, $\breve{u}_\omega$ – искомая функция достаточно гладкая, а $\breve{f}_\omega$– заданная функция такова, что

$$F_\omega\left(\breve{v}_\omega\right)=\int\limits_{\Omega_\omega}\breve{f}_\omega\breve{v}_\omega d\Omega_\omega,$$

то из задачи в (1.1.1) как и раньше при интегрировании по частям с применением второй формулы Грина получается следующая эллиптическая краевая задача четвертого порядка при однородных, смешанных краевых условиях

$$\Delta^2\breve{u}_\omega+a_\omega\breve{u}_\omega=\breve{f}_\omega, \tag{1.1.2}$$

$$\breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,0}}=\frac{\partial\breve{u}_\omega}{\partial n_\omega}\Big|_{\Gamma_{\omega,0}}=0,\ \breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,1}}=l_{\omega,1}\breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,1}}=0,$$

$$\frac{\partial\breve{u}_\omega}{\partial n_\omega}\Big|_{\Gamma_{\omega,2}}=l_{\omega,2}\breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,2}}=0,\ l_{\omega,1}\breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,3}}=l_{\omega,2}\breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,3}}=0,$$

где, также

$$l_{\omega,1}\breve{u}_\omega=\Delta\breve{u}_\omega+(1-\sigma_\omega)n_{\omega,1}n_{\omega,2}\breve{u}_{\omega xy}-n_{\omega,2}^2\breve{u}_{\omega xx}-n_{\omega,1}^2\breve{u}_{\omega yy},$$

$$l_{\omega,2}\breve{u}=\frac{\partial\Delta\breve{u}_\omega}{\partial n_\omega}+(1-\sigma_\omega)\frac{\partial}{\partial s_\omega}(n_{\omega,1}n_{\omega,2}(\breve{u}_{\omega yy}-\breve{u}_{\omega xx})+(n_{\omega,1}^2-n_{\omega,2}^2)\breve{u}_{\omega xy}),$$

$$n_{\omega,1}=-\cos(n_\omega,x),\ n_{\omega,2}=-\cos(n_\omega,y).$$

Решаемой задачей будет смешанная краевая задача для уравнения Софи Жермен обязательно с краевым условием Дирихле, т.е. при $\omega=1,\ a_1=0,\ \Gamma_{1,0}\neq\varnothing,$ которая будет, рассматриваться как бигармоническая система

$$\Delta^2\breve{u}_1=\breve{f}_1, \tag{1.1.3}$$

$$\breve{u}_1\Big|_{\Gamma_{1,0}}=\frac{\partial\breve{u}_1}{\partial n_1}\Big|_{\Gamma_{1,0}}=0,\ \breve{u}_1\Big|_{\Gamma_{1,1}}=l_{1,1}\breve{u}_1\Big|_{\Gamma_{1,1}}=0,$$

$$\frac{\partial\breve{u}_1}{\partial n_1}\Big|_{\Gamma_{1,2}}=l_{1,2}\breve{u}_1\Big|_{\Gamma_{1,2}}=0,\ l_{1,1}\breve{u}_1\Big|_{\Gamma_{1,3}}=l_{1,2}\breve{u}_1\Big|_{\Gamma_{1,3}}=0,$$

где

$$l_{1,1}\breve{u}_1=\Delta\breve{u}_1+(1-\sigma_1)n_{1,1}n_{1,2}\breve{u}_{1xy}-n_{1,2}^2\breve{u}_{1xx}-n_{1,1}^2\breve{u}_{1yy},$$

$$l_{1,2}\breve{u}=\frac{\partial\Delta\breve{u}_1}{\partial n_1}+(1-\sigma_1)\frac{\partial}{\partial s_1}(n_{1,1}n_{1,2}(\breve{u}_{1yy}-\breve{u}_{1xx})+(n_{1,1}^2-n_{1,2}^2)\breve{u}_{1xy}),$$

$$n_{1,1} = -\cos(n_1, x),\ n_{1,2} = -\cos(n_1, y).$$

Дополнительно рассматриваем смешанную, однородную, фиктивную задачу, можно сказать, для экранированного уравнения Софи Жермен, т.е. при $\omega = \mathrm{II},\ \breve{f}_{\mathrm{II}} = 0,\ \breve{u}_{\mathrm{II}} = 0,$

$$\Delta^2 \breve{u}_{\mathrm{II}} + a_{\mathrm{II}} \breve{u}_{\mathrm{II}} = 0, \tag{1.1.4}$$

$$\breve{u}_{\mathrm{II}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},0}} = \frac{\partial \breve{u}_{\mathrm{II}}}{\partial n_{\mathrm{II}}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},0}} = 0,\ \breve{u}_{\mathrm{II}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},1}} = l_{\mathrm{II},1}\breve{u}_{\mathrm{II}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},1}} = 0,$$

$$\frac{\partial \breve{u}_{\mathrm{II}}}{\partial n_{\mathrm{II}}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},2}} = l_{\mathrm{II},2}\breve{u}_{\mathrm{II}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},2}} = 0,\ l_{\mathrm{II},1}\breve{u}_{\mathrm{II}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},3}} = l_{\mathrm{II},2}\breve{u}_{\mathrm{II}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},3}} = 0,$$

где

$$l_{\mathrm{II},1}\breve{u}_{\mathrm{II}} = \Delta \breve{u}_{\mathrm{II}} + (1-\sigma_{\mathrm{II}}) n_{\mathrm{II},1} n_{\mathrm{II},2} \breve{u}_{\mathrm{II}xy} - n_{\mathrm{II},2}^2 \breve{u}_{\mathrm{II}xx} - n_{\mathrm{II},1}^2 \breve{u}_{\mathrm{II}yy},$$

$$l_{\mathrm{II},2}\breve{u} = \frac{\partial \Delta \breve{u}_{\mathrm{II}}}{\partial n_{\mathrm{II}}} + (1-\sigma_{\mathrm{II}}) \frac{\partial}{\partial s_{\mathrm{II}}} (n_{\mathrm{II},1} n_{\mathrm{II},2} (\breve{u}_{\mathrm{II}yy} - \breve{u}_{\mathrm{II}xx}) + (n_{\mathrm{II},1}^2 - n_{\mathrm{II},2}^2) \breve{u}_{\mathrm{II}xy}),$$

$$n_{\mathrm{II},1} = -\cos(n_{\mathrm{II}}, x),\ n_{\mathrm{II},2} = -\cos(n_{\mathrm{II}}, y).$$

1.2. Продолженная бигармоническая система в пространстве Соболева

Продолженная задача для уравнения Софи Жермен будет рассматриваться как задача продолженной бигармонической системы. Предлагается фиктивное продолжение исходной краевой задачи для уравнения Софи Жермен в вариационном виде:

$$\breve{u} \in \breve{V}:\ \Lambda_1(\breve{u}, I_1\breve{v}) + \Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}, \breve{v}) = F_1(I_1\breve{v})\ \forall \breve{v} \in \breve{V}, \tag{1.2.1}$$

где расширенное пространство решения этой задачи пространство Соболева

$$\breve{V} = \breve{V}(\Pi) = \left\{ \breve{v} \in W_2^2(\Pi) : \breve{v}\Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial \breve{v}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} = 0 \right\},$$

область решения исходной задачи в первой области на плоскости дополнена с помощью второй области до прямоугольной области

$$\bar{\Omega}_1 \bigcup \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} = \bar{\Pi},\ \Omega_1 \bigcap \Omega_{\mathrm{II}} = \varnothing,\ \Omega_1, \Omega_{\mathrm{II}} \subset \mathbb{R}^2,$$

граница прямоугольной области также состоит из замыкания объединений открытых непересекающихся частей

$$\partial\Pi = \bar{s},\ s = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3,\ \Gamma_i \bigcap \Gamma_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j = 0,1,2,3,$$

а не пустое пересечение границы первой области и границы второй области будет замыканием пересечения соответствующих частей границ этих областей

$$\partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_{\mathrm{II}} = \bar{S},\ S = \Gamma_{1,0} \bigcap \Gamma_{\mathrm{II},3} \neq \varnothing,$$

$n-$ внешняя нормаль к $\partial\Pi$. Расширенное пространство решения содержит подпространство решения продолженной задачи, т.е. пространство решений для исходной задачи на первой области, проложенное нулем в дополнении до прямоугольной области

$$\breve{V}_1 = \breve{V}_1(\Pi) = \left\{ \breve{v}_1 \in \breve{V} : \breve{v}_1\big|_{\Pi \setminus \Omega_1} = 0 \right\}.$$

В продолженной задаче используем оператор, вообще говоря, не ортогонального проектирования расширенного пространства на подпространство решения продолженной задачи

$$I_1 : \breve{V} \mapsto \breve{V}_1,\ \breve{V}_1 = imI_1,\ I_1 = I_1^2.$$

Введем подпространства расширенного пространства решений

$$\breve{V}_3 = \breve{V}_3(\Pi) = \left\{ \breve{v}_3 \in \breve{V} : \breve{v}_3\big|_{\Pi \setminus \Omega_{\mathrm{II}}} = 0 \right\},\ \breve{V}_0 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_3,$$

$$\breve{V}_2 = \breve{V}_2(\Pi) = \left\{ \breve{v}_2 \in \breve{V} : \Lambda(\breve{v}_2, \breve{v}_0) = 0\ \forall \breve{v}_0 \in \breve{V}_0 \right\},$$

$$\breve{V} = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_2 \oplus \breve{V}_3 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_{\mathrm{II}},\ \breve{V}_{\mathrm{I}} = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_2,\ \breve{V}_{\mathrm{II}} = \breve{V}_2 \oplus \breve{V}_3.$$

Прямые суммы подпространств рассматривается в скалярном произведении, порождаемом билинейной формой

$$\Lambda(\breve{u}, \breve{v}) = \Lambda_1(\breve{u}, \breve{v}) + \Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}, \breve{v})\ \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}.$$

Предполагаем, билинейная форма дает нормировку расширенного пространства решения эквивалентную нормировке пространства Соболева

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Pi)} \leq \Lambda(\breve{v}, \breve{v}) \leq c_2 \|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Pi)}\ \ \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Используем пространство Соболева, в котором выполняется предположение о продолжении функции в виде

$$\exists\breve{\beta}_1 \in (0;1],\ \breve{\beta}_2 \in [\breve{\beta}_1;1]:\ \breve{\beta}_1\Lambda(\breve{v}_2,\breve{v}_2) \le \Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{v}_2,\breve{v}_2) \le \breve{\beta}_2\Lambda(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\ \forall\breve{v}_2 \in \breve{V}_2.$$

Решение продолженной задачи, тогда существует, единственно. Это решение у исходной задачи на первой области с нулевым продолжением на остальной части прямоугольной области. Заметим, что решение исходной задачи и решение исходной задачи, продолженное нулем, т.е. решение продолженной задачи могут обозначаться одинаково как функция и ее продолжение

$$\breve{H}_\omega(\Omega_\omega) = \breve{V}_\omega(\Omega_\omega),\ \omega \in \{1, \mathrm{II}\}.$$

Предложение 1.2.1. *Имеют место следующие равенства:*

$$\Lambda_\omega(\breve{u}_0,\breve{v}_2) = \Lambda_\omega(\breve{v}_2,\breve{u}_0) = 0\ \ \forall\breve{u}_0 \in \breve{V}_0,\ \forall\breve{v}_2 \in \breve{V}_2,\ \ \omega \in \{1, \mathrm{II}\}.$$

Доказательство. Действительно, т.к.

$$\Lambda_1(\breve{u}_0,\breve{v}_2) = \Lambda_1(\breve{u}_1,\breve{v}_2) = \Lambda(\breve{u}_1,\breve{v}_2) = 0\ \ \forall\breve{u}_1 \in \breve{V}_0,\ \forall\breve{v}_2 \in \breve{V}_2,$$
$$\Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}_0,\breve{v}_2) = \Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}_3,\breve{v}_2) = \Lambda(\breve{u}_3,\breve{v}_2) = 0\ \ \forall\breve{u}_3 \in \breve{V}_0,\ \forall\breve{v}_2 \in \breve{V}_2.$$

Утверждение 1.2.1. *Решение задачи из (1.2.1) $\breve{u} \in \breve{V}_1$, существует, единственно на Ω_1 совпадает с решением задачи из (1.1.1) при $\omega = 1$, на Ω_{II} равно нулю.*

Доказательство. Пусть $\breve{u}^1,\ \breve{u}^2$ два различных решения , тогда для $\breve{u}^0 = \breve{u}^1 - \breve{u}^2$ имеем

$$\Lambda_1(\breve{u}^0, I_1\breve{v}) + \Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^0,\breve{v}) = 0\ \ \forall\breve{v} \in \breve{V}.$$

Заметим , что $\breve{u}^0 = \breve{u}_2^0 \in \breve{V}_2$, т.к. при $\breve{v} = \breve{v}_0$ получаем

$$\Lambda_1(\breve{u}^0, I_1\breve{v}_0) + \Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^0,\breve{v}_0) = \Lambda_1(\breve{u}^0,\breve{v}_0) + \Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^0,\breve{v}_0) = \Lambda(\breve{u}^0,\breve{v}_0) = 0\ \ \forall\breve{v}_0 \in \breve{V}_0.$$

Пусть $\breve{v} = \breve{u}_2^0$, тогда

$$\Lambda_1(\breve{u}_2^0, I_1\breve{u}_2^0) + \Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}_2^0,\breve{u}_2^0) = 0$$

и ввиду предложения 1.2.1

$$\Lambda_1(\breve{u}_2^0, I_1\breve{u}_2^0) = 0,\ \Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}_2^0,\breve{u}_2^0) = 0,$$

тогда $\breve{u}_2^0 = 0$ на Ω_{II}, т.к. $\Lambda_{\mathrm{II}}(\bullet,\bullet)$ скалярное произведение и

$$0 \le \breve{\beta}_1\Lambda(u_2^0,u_2^0) \le \Lambda_{\mathrm{II}}(u_2^0,u_2^0) = 0$$

получаем

$$\Lambda(u_2^0, u_2^0) = 0,$$

тогда $\breve{u}_2^0 = 0$ на Π, т.к. $\Lambda(\bullet,\bullet)$ скалярное произведение. Таким образом, $\breve{u}^0 = \breve{u}_2^0 = 0$ на Π. На счет существования решения задач из (1.2.1) можно сказать, что решение уже указано в самом утверждении.

1.3. Анализ продолженной бигармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент в пространстве Соболева

Анализ продолженной задачи для уравнения Софи Жермен как задачи продолженной бигармонической системы рассмотрим модифицированны методом фиктивных компонент. Рассматриваем модифицированный метод фиктивных компонент при решении продолженной задачи для уравнения Софи Жермен как вычислительную систему для анализа продолженной бигармонической системы. Это следующий итерационный процесс приближённых вычислений на аналитическом, непрерывном уровне [94, 97, 98, 100, 103, 106, 107, 108]:

$$\breve{u}^k \in \breve{V} : \Lambda(\breve{u}^k - \breve{u}^{k-1}, \breve{v}) = -\tau_{k-1}(\Lambda_1(\breve{u}^{k-1}, I_1\breve{v}) + \Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}) - F_1(I_1\breve{v}))\ \forall \breve{v} \in \breve{V},$$

$$\tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = \tau = 2/(\breve{\beta}_1 + \breve{\beta}_2),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \forall \breve{u}^0 \in \breve{V}_1 \subset \breve{V}. \qquad (1.3.1)$$

В пространстве $\breve{V}$ вводится следующая норма

$$\|\breve{v}\|_{\breve{V}} = \sqrt{\Lambda(\breve{v}, \breve{v})}.$$

Теорема 1.3.1. *Для итерационного процесса из (1.3.1) имеет место следующая оценка относительной ошибки*

$$\left\|\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le \varepsilon \left\|\breve{u}^0 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}},\ k \in \mathbb{N},$$

где

$$\varepsilon = \delta_1 q^{k-1},\ \delta_1 = \sqrt{\|I_1\|_{\breve{V}}^2 - 1},\ 0 \le q = (\breve{\beta}_2 - \breve{\beta}_1)/(\breve{\beta}_1 + \breve{\beta}_2) < 1.$$

Предложение 1.3.1. *Если в итерационном процессе из (1.3.1)* $\breve{u}^{k-1}=\breve{u}$, *то* $\breve{u}^{k}=\breve{u}$.

Доказательство. Из итерационного процесса, в этом случае получаем, что

$$\breve{u}^{k}\in\breve{V}:\Lambda(\breve{u}^{k}-\breve{u},\breve{v})=-\tau_{k-1}(\Lambda_{1}(\breve{u},I_{1}\breve{v})+\Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u},\breve{v})-F_{1}(I_{1}\breve{v}))\,\forall\breve{v}\in\breve{V}$$

и

$$\Lambda(\breve{u}^{k}-\breve{u},\breve{v})=0\ \forall\breve{v}\in\breve{V},\ \Lambda(\breve{u}^{k}-\breve{u},\breve{u}^{k}-\breve{u})=0,\ \breve{u}^{k}=\breve{u}.$$

Предложение 1.3.2. *Для итерационного процесса из (1.3.1) выполняются равенства:*

$$\forall k\in\mathbb{N}\ \Lambda_{1}(\breve{u}^{k},\breve{v}_{0})=F_{1}(\breve{v}_{0}),\ \Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{k},\breve{v}_{0})=0\ \forall\breve{v}_{0}\in\breve{V}_{0}.$$

Доказательство. При $k=1$

$$\begin{gathered}\Lambda_{1}(\breve{u}^{1},\breve{v}_{0})=\Lambda(\breve{u}^{1},\breve{v}_{1})=\Lambda(\breve{u}^{0},\breve{v}_{1})-\tau_{0}((\Lambda_{1}(\breve{u}^{0},\breve{v}_{1})-F_{1}(\breve{v}_{1}))=\\=\Lambda_{1}(\breve{u}^{0},\breve{v}_{0})-((\Lambda_{1}(\breve{u}^{0},\breve{v}_{0})-F_{1}(\breve{v}_{0}))=F_{1}(\breve{v}_{0}),\\\Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{1},\breve{v}_{0})=\Lambda(\breve{u}^{1},\breve{v}_{3})=\Lambda(\breve{u}^{0},\breve{v}_{3})-\tau_{0}\Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{0},\breve{v}_{3})=\\=\Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{0},\breve{v}_{0})-\Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{0},\breve{v}_{0})=0.\end{gathered}$$

Если предположить, что при $k-1$ предложение выполняется, тогда оно выполняется и при k

$$\begin{gathered}\Lambda_{1}(\breve{u}^{k},\breve{v}_{0})=\Lambda(\breve{u}^{k},\breve{v}_{1})=\Lambda(\breve{u}^{k-1},\breve{v}_{1})-\tau_{k-1}((\Lambda_{1}(\breve{u}^{k-1},\breve{v}_{1})-F_{1}(\breve{v}_{1}))=\\=\Lambda_{1}(\breve{u}^{k-1},\breve{v}_{0})-\tau_{k-1}((\Lambda_{1}(\breve{u}^{k-1},\breve{v}_{0})-F_{1}(\breve{v}_{0}))=F_{1}(\breve{v}_{0}),\\\Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{k},\breve{v}_{0})=\Lambda(\breve{u}^{k},\breve{v}_{3})=\Lambda(\breve{u}^{k-1},\breve{v}_{3})-\tau_{k-1}\Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{k-1},\breve{v}_{3})=\\=\Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{k-1},\breve{v}_{0})-\tau_{k-1}\Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{k-1},\breve{v}_{0})=0.\end{gathered}$$

На основе математической индукции получается доказательство предложения.

Приближение представляется в виде суммы точного решения и ошибки

$$\breve{u}^{k}=\breve{u}+\breve{\psi}^{k},\ k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

Предложение 1.3.3. *В итерационном процессе из (1.3.1) ошибка принадлежит подпространству, т.е.* $\breve{\psi}^{k}=\breve{\psi}_{2}^{k}\in\breve{V}_{2}\ \forall k\in\mathbb{N}$, *приближение принадлежит подпространству, т.е.* $\breve{u}^{k}=\breve{u}_{\mathrm{I}}^{k}\in\breve{V}_{\mathrm{I}}\ \forall k\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Из предложения 1.3.2

$$\Lambda(\breve{u}^{k},\breve{v}_{0})-F_{1}(\breve{v}_{0})=0\ \forall\breve{v}_{0}\in\breve{V}_{0},$$

тогда

$$\Lambda(\breve{u}^k,\breve{v}_0)-F_1(\breve{v}_0)=\Lambda(\breve{u}+\breve{\psi}^k,\breve{v}_0)-F_1(\breve{v}_0)=\Lambda(\breve{\psi}^k,\breve{v}_0)=0\ \forall\breve{v}_0\in\breve{V}_0,$$

учитывая, что

$$\Lambda(\breve{u},\breve{v}_0)=F_1(\breve{v}_0),$$

следовательно $\breve{\psi}^k=\breve{\psi}_2^k\in\breve{V}_2$.

Утверждение 1.3.1. *При* $k=1$ *в итерационном процессе из (1.3.1) имеет место следующая оценка*

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}\le\delta_1\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}},\ \delta_1=\sqrt{\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}^2-1}.$$

Доказательство. Из итерационного процесса (1.3.1) имеем

$$\Lambda(\breve{u}^1-\breve{u}^0,\breve{v})=-(\Lambda_1(\breve{u}^0,I_1\breve{v})+\Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^0,\breve{v})-F_1(I_1\breve{v}))=$$

$$=-\Lambda_1(\breve{u}^0,I_1\breve{v})-\Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^0,\breve{v})+F_1(I_1\breve{v}).$$

При $k=1,\ \tau_1=1,\ \breve{u}^0=\breve{u}+\breve{\psi}^0$

$$\Lambda(\breve{u}^1-\breve{u}^0,\breve{v})=-\Lambda_1(\breve{u}^0,I_1\breve{v})+\Lambda(\breve{u},I_1\breve{v})=\Lambda(\breve{u}-\breve{u}^0,I_1\breve{v}),$$

тогда

$$\Lambda(\breve{u}^1-\breve{u}^0,\breve{v})=\Lambda(I_1'(\breve{u}-\breve{u}^0),\breve{v}).$$

Отметим, что

$$\breve{u}^1-\breve{u}^0=I_1'(\breve{u}-\breve{u}^0),\ \breve{\psi}^1=(I-I_1')\breve{\psi}^0,$$

тогда

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}^o\right\|_{\breve{V}}\le\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}},\ \left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}\le\left\|I-I_1\right\|_{\breve{V}}\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}.$$

Выполняется равенство

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}+\breve{u}-\breve{u}^0\right\|_{\breve{V}}^2=\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2+\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2,$$

т.к.

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}+\breve{u}-\breve{u}^0\right\|_{\breve{V}}^2=\left\|\breve{u}^1-\breve{u}-(\breve{u}^0-\breve{u})\right\|_{\breve{V}}^2=\left\|\breve{\psi}^1-\breve{\psi}^0\right\|_{\breve{V}}^2=$$

$$\Lambda(\breve{\psi}^1-\breve{\psi}^0,\breve{\psi}^1-\breve{\psi}^0)=\Lambda(\breve{\psi}^1,\breve{\psi}^1)+\Lambda(\breve{\psi}^0,\breve{\psi}^0)=\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2+\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2,$$

тогда

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}^0\right\|_{\breve{V}}^2=\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2+\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2\le\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}^2\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2$$

и, следовательно

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2\le\left(\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}^2-1\right)\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2,$$

а далее ч.т.д.

Можно заметить, если $I_1\breve{v}=\breve{v}_1,\ \forall\breve{v}\in\breve{V},$ т.е. теоретически при отимальном выборе оператора I_1 в виде ортопроектора, когда $\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}=\left\|I-I_1\right\|_{\breve{V}}=1$ в (1.3.1) получается, что $\breve{u}^1=\breve{u}$. Это также получается в этом случае и непосредственно из итерационного процесса (1.3.1)

$$\breve{u}^1\in\breve{V}:\Lambda(\breve{u}^1,\breve{v})=F_1(I_1\breve{v})\ \forall\breve{v}\in\breve{V},$$

т.к. $I_1\breve{v}=\breve{v}_1$, $\breve{u}^1=\breve{u}+\breve{\psi}^1, \breve{\psi}^1=\breve{\psi}_2^1\in\breve{V}_2$, тогда

$$\Lambda(\breve{u}+\psi_2^1,\breve{v}_0+\breve{v}_2)=F_1(\breve{v}_1)=F_1(\breve{v}_0)\ \ ,\ \ \Lambda(\breve{u},\breve{v}_0)+\Lambda(\psi_2^1,\breve{v}_2)=F_1(\breve{v}_0)$$

и отсюда

$$\Lambda(\psi_2^1,\breve{v}_2)=0,\ \Lambda(\psi_2^1,\psi_2^1)=0$$

следовательно $\breve{\psi}^1=\breve{\psi}_2^1=0.$

Утверждение 1.3.2. *При* $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ *в итерационном процессе из (1.3.1) выполняется оценка*

$$\left\|\breve{u}^k-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}\le q^{k-1}\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}},$$

где

$$0\le q=(\breve{\beta}_2-\breve{\beta}_1)\big/(\breve{\beta}_1+\breve{\beta}_2)<1.$$

Доказательство. Вводится оператор $\breve{R}_{\mathrm{II}}$ из $\breve{V}_2$ в $\breve{V}_2$:

$$\Lambda(\breve{R}_{\mathrm{II}}\breve{u},\breve{v})=\Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u},\breve{v})\quad\forall\breve{u},\breve{v}\in\breve{V}_2.$$

Заметим, что

$$\breve{\beta}_1\Lambda(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\le\Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\le\breve{\beta}_2\Lambda(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\quad\forall\breve{v}_2\in\breve{V}_2,$$

тогда

$$\breve{\beta}_1\Lambda(\breve{v}_2,\breve{v}_2) \le \Lambda(\breve{R}_{\text{II}}\breve{v}_2,\breve{v}_2) \le \breve{\beta}_2\Lambda(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\ ,\ \breve{\beta}_1 I \le \breve{R}_{\text{II}} \le \breve{\beta}_2 I\,.$$

Отметим, что $\breve{R}'_{\text{II}} = \breve{R}_{\text{II}}$, т.к. $\forall \breve{u},\breve{v} \in \breve{V}_2$

$$\Lambda(\breve{u},\breve{R}'_{\text{II}}\breve{v}) = \Lambda(\breve{R}_{\text{II}}\breve{u},\breve{v}) = \Lambda_{\text{II}}(\breve{u},\breve{v}) = \Lambda_{\text{II}}(\breve{v},\breve{u}) = \Lambda(\breve{R}_{\text{II}}\breve{v},\breve{u}) = \Lambda(\breve{u},\breve{R}_{\text{II}}\breve{v}).$$

Таким образом, $\breve{R}_{\text{II}}$ симметричный, ограниченный оператор. Из итерационного процесса (1.3.1) при $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ имеем:

$$\breve{\psi}^k \in \breve{V} : \Lambda(\breve{\psi}^k - \breve{\psi}^{k-1},\breve{v}) = -\tau(\Lambda_1(\breve{\psi}^{k-1}, I_1\breve{v}) + \Lambda_{\text{II}}(\breve{\psi}^{k-1},\breve{v}))\,\forall \breve{v} \in \breve{V}$$

и

$$\Lambda(\breve{\psi}^k,\breve{v}) = \Lambda(\breve{\psi}^{k-1},\breve{v}) - \tau\Lambda_{\text{II}}(\breve{\psi}^{k-1},\breve{v}) = \Lambda(\breve{\psi}^{k-1},\breve{v}) - \tau\Lambda(\breve{R}_{\text{II}}\breve{\psi}^{k-1},\breve{v}),$$

по этому

$$\Lambda(\breve{\psi}^k,\breve{v}) = \Lambda((I-\tau\breve{R}_{\text{II}})\breve{\psi}^{k-1},\breve{v}),\ \breve{\psi}^k = (I-\tau\breve{R}_{\text{II}})\breve{\psi}^{k-1}.$$

Полагаем, что $\breve{T} = I - \tau\breve{R}_{\text{II}}$, тогда

$$\Lambda(\breve{\psi}^k,\breve{\psi}^k) = \Lambda(\breve{T}\breve{\psi}^{k-1},\breve{T}\breve{\psi}^{k-1}) \le \sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}_2}\left(\frac{\Lambda(\breve{T}\breve{\psi},\breve{T}\breve{\psi})}{\Lambda(\breve{\psi},\breve{\psi})}\right)\Lambda(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1}) \le$$

учитываем, что оператор $\breve{T}$ симметричный

$$\le \left(\sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}_2}\left(\frac{\Lambda(\breve{T}\breve{\psi},\breve{\psi})}{\Lambda(\breve{\psi},\breve{\psi})}\right)\right)^2 \Lambda(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1}) =$$

$$= \left(\sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}_2}\left(1-\tau\frac{\Lambda_{\text{II}}(\breve{\psi},\breve{\psi})}{\Lambda(\breve{\psi},\breve{\psi})}\right)\right)^2 \Lambda(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1}) \le$$

$$\le \max\left\{(1-\tau\beta_1)^2,\,(1-\tau\beta_2)^2\right\}\Lambda(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1}).$$

При оптимальном выборе итерационного параметра

$$\tau = 2/(\breve{\beta}_1 + \breve{\beta}_2)$$

получаем

$$\Lambda(\breve{\psi}^k,\breve{\psi}^k) \le q^2\Lambda(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1})\,,\ \left\|\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le q\left\|\breve{u}^{k-1} - \breve{u}\right\|_{\breve{V}},$$

а далее, ч.т.д.

Отметим, что теорема 1.3.1 следует из утверждений 1.3.1 и 1.3.2.

1.4. Продолженная бигармоническая система на конечномерном подпространстве пространства Соболева

Рассмотрим продолженную задачу для уравнения Софи Жермен как задачу продолженной бигармонической системы на конечномерном подпространстве. Рассмотрим дискретизацию продолженной задачи для уравнения Софи Жермен как задачу продолженной бигармонической системы со следующим видом краевых условий, когда

$$\Pi=(0;b_1)\times(0;b_2),\Gamma_0=\varnothing,\ \Gamma_1=\{b_1\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{b_2\},$$

$$\Gamma_2=\{0\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{0\},\ \Gamma_3=\varnothing,\ b_1,b_2\in(0;+\infty).$$

В прямоугольной области определим сетку с узлами

$$(x_i;y_j)=\big((i-1{,}5)h_1;(j-1{,}5)h_2\big),$$

$$h_1=b_1/(m-1{,}5),\ h_2=b_2/(n-1{,}5),\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n,\ m-2,n-2\in\mathbb{N}.$$

Введем сеточные функции на множестве узлов введенной сетки

$$v_{i,j}=v(x_i;y_j)\in\mathbb{R},\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n,\ m-2,n-2\in\mathbb{N}.$$

Применим восполнение сеточных функций с учетом выбранных краевых условий, используя параболические базисные функции

$$\Phi^{i,j}(x;y)=\Psi^{1,i}(x)\Psi^{2,j}(y),\ i=2,...,m-1,\ j=2,...,n-1,\ m-2,n-2\in\mathbb{N},$$

$$\Psi^{1,i}(x)=[2/i]\Psi(x/h_1-i+4)+\Psi(x/h_1-i+3)-[(i+1)/m]\Psi(x/h_1-i+1),$$

$$\Psi^{2,j}(y)=[2/j]\Psi(y/h_2-j+4)+\Psi(y/h_2-j+3)+[(j+1)/n]\Psi(y/h_2-j+1),$$

$$\Psi(z)=\begin{cases}0{,}5z^2, & z\in[0;1],\\ -z^2+3z-1{,}5, & z\in[1;2],\\ 0{,}5z^2-3z-4{,}5, & z\in[2;3],\\ 0, & z\notin(0;3).\end{cases}$$

Полагаем, что значения у базисных функций вне прямоугольной области равны нулю

$$\Phi^{i,j}(x;y)=0,\ (x;y)\notin\Pi,\ i=2,...,m-1,\ j=2,...,n-1,\ m-2,n-2\in\mathbb{N}.$$

Комбинации базисных функций являются конечномерным подпространством в пространстве решения расширенной задачи

$$\tilde{V}=\left\{\tilde{v}=\sum_{i=2}^{m-1}\sum_{j=2}^{n-1}v_{i,j}\Phi^{i,j}(x;y)\right\}\subset\breve{V}.$$

Отметим, что известны оценки сходимости следующего вида [59]:

$$\|\breve{u}-\tilde{u}\|_{W_2^{m_1}(\Pi)}\le ch^{m_2-m_1}\|\breve{u}\|_{W_2^{m_2}(\Pi)},\ \lim_{h\to 0}\|\breve{u}-\tilde{u}\|_{W_2^{2}(\Pi)}=0,\ h=\max\{h_1,h_2\}.$$

Приведем продолженную задачу на введенном конечномерном подпространстве в вариационном виде

$$\tilde{u}\in\tilde{V}:\ \Lambda_1(\tilde{u},I_1\tilde{v})+\Lambda_{\mathrm{II}}(\tilde{u},\tilde{v})=F_1(I_1\tilde{v})\ \forall\tilde{v}\in\tilde{V}. \tag{1.4.1}$$

В конечномерном пространстве лежит конечномерное подпространство решения продолженной задачи. Это конечномерное подпространство решений у исходной задачи в первой области при продолжении нулем на замыкание второй области

$$\tilde{V}_1=\tilde{V}_1(\Pi)=\left\{\tilde{v}_1\in\tilde{V}:\tilde{v}_1\big|_{\Pi\setminus\Omega_1}=0\right\}.$$

Полагаем, что оператор проектирования действует аналогично на соответствующих конечномерных подпространствах. При этом считаем, например, что оператор проектирования на пространство решений продолженной задачи обнуляет коэффициенты у базисных функций носители, у которых не содержатся полностью в первой области

$$I_1:\tilde{V}\mapsto\tilde{V}_1,\ \tilde{V}_1=imI_1,\ I_1=I_1^2.$$

Дополнительно введем соответствующие конечномерные подпространства

$$\tilde{V}_3=\tilde{V}_3(\Pi)=\left\{\tilde{v}_3\in\tilde{V}:\tilde{v}_3\big|_{\Pi\setminus\Omega_{\mathrm{II}}}=0\right\},\ \tilde{V}_0=\tilde{V}_1\oplus\tilde{V}_3,$$

$$\tilde{V}_2=\tilde{V}_2(\Pi)=\left\{\tilde{v}_2\in\tilde{V}:\Lambda(\tilde{v}_2,\tilde{v}_0)=0\ \forall\tilde{v}_0\in\tilde{V}_0\right\},$$

$$\tilde{V}=\tilde{V}_1\oplus\tilde{V}_2\oplus\tilde{V}_3=\tilde{V}_1\oplus\tilde{V}_{\mathrm{II}},\ \tilde{V}_{\mathrm{I}}=\tilde{V}_1\oplus\tilde{V}_2,\ \tilde{V}_{\mathrm{II}}=\tilde{V}_2\oplus\tilde{V}_3.$$

Полагаем, что для конечномерных подпространств выполняются предположения для продолжения функций в аналогичном виде

$$\exists\tilde{\beta}_1\in(0;1],\ \tilde{\beta}_2\in[\tilde{\beta}_1;1]:\ \tilde{\beta}_1\Lambda(\tilde{v}_2,\tilde{v}_2)\le\Lambda_{\mathrm{II}}(\tilde{v}_2,\tilde{v}_2)\le\tilde{\beta}_2\Lambda(\tilde{v}_2,\tilde{v}_2)\ \forall\tilde{v}_2\in\tilde{V}_2.$$

Решение продолженной задачи на конечномерном подпространстве существует, единственно. На конечномерном подпространстве это решение у исходной задачи на первой области с нулевым продолжением на остальной части прямоугольной области. Заметим на конечномерном подпространстве решение исходной задачи и решение исходной задачи, продолженное нулем, т.е. решение продолженной задачи могут обозначаться одинаково как функция и ее продолжение.

1.5. Анализ продолженной бигармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве пространства Соболева

Рассмотрим анализ продолженной задачи для уравнения Софи Жермен как задачу продолженной бигармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве. Рассмотрим на конечномерном подпространстве модифицированный метод фиктивных компонент при решении краевой задачи с условием Дирихле для уравнения Софи Жермен как вычислительную систему для анализа бигармонической системы, продолженной бигармонической системы. Это следующий итерационный процесс приближённых вычислений на аналитическом, непрерывном уровне:

$$\tilde{u}^k \in \tilde{V} : \Lambda(\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}, \tilde{v}) = -\tau_{k-1}(\Lambda_1(\tilde{u}^{k-1}, I_1\tilde{v}) + \Lambda_{\mathrm{II}}(\tilde{u}^{k-1}, \tilde{v}) - F_1(I_1\tilde{v}))\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = \tau = 2/(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \forall \tilde{u}^0 \in \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}. \qquad (1.5.1)$$

В подпространстве $\tilde{V}$ введем норму

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{V}} = \|\tilde{v}\|_{\breve{V}}.$$

Следствие 1.5.1. *Для итерационного процесса из (1.5.1) имеет место следующая оценка относительной ошибки*

$$\left\|\tilde{u}^k - \tilde{u}\right\|_{\tilde{V}} \le \varepsilon \left\|\tilde{u}^0 - \tilde{u}\right\|_{\tilde{V}},\ k \in \mathbb{N},$$

где

$$\varepsilon = \delta_1 q^{k-1},\ \delta_1 = \sqrt{\|I_1\|_{\tilde{V}}^2 - 1},\ 0 \le q = (\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1)/(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2) < 1.$$

Предложение 1.5.1. *Если в итерационном процессе из (1.5.1)* $\tilde{u}^{k-1}=\tilde{u}$, *то* $\tilde{u}^{k}=\tilde{u}$.

Предложение 1.5.2. *Для итерационного процесса из (1.5.1) выполняются равенства:*

$$\forall k\in\mathbb{N}\ \Lambda_1(\tilde{u}^k,\tilde{v}_0)=F_1(\tilde{v}_0),\ \Lambda_{\mathrm{II}}(\tilde{u}^k,\tilde{v}_0)=0\ \forall\tilde{v}_0\in\tilde{V}_0.$$

Приближение представляется в виде суммы точного решения и ошибки

$$\tilde{u}^k=\tilde{u}+\tilde{\psi}^k,\ k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

Предложение 1.5.3. *В итерационном процессе из (1.5.1) ошибка принадлежит подпространству, т.е.* $\tilde{\psi}^k=\tilde{\psi}_2^k\in\tilde{V}_2\ \forall k\in\mathbb{N}$, *приближение принадлежит подпространству, т.е.* $\tilde{u}^k=\tilde{u}_{\mathrm{I}}^k\in\tilde{V}_{\mathrm{I}}\ \forall k\in\mathbb{N}$.

Утверждение 1.5.1. *При* $k=1$ *в итерационном процессе из (1.5.1) имеет место следующая оценка*

$$\left\|\tilde{u}^1-\tilde{u}\right\|_{\tilde{V}}\le\delta_1\left\|\tilde{u}^0-\tilde{u}\right\|_{\tilde{V}},\ \delta_1=\sqrt{\left\|I_1\right\|_{\tilde{V}}^2-1}.$$

Утверждение 1.5.2. *При* $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ *в итерационном процессе из (1.5.1) выполняется оценка*

$$\left\|\tilde{u}^k-\tilde{u}\right\|_{\tilde{V}}\le q^{k-1}\left\|\tilde{u}^1-\tilde{u}\right\|_{\tilde{V}},$$

где

$$0\le q=(\tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_1)\big/(\tilde{\beta}_1+\tilde{\beta}_2)<1.$$

Отметим, что следствие 1.5.1 следует из утверждений 1.5.1, 1.5.2 и теоремы 1.3.1.

1.6. Продолженная бигармоническая система на пространстве Евклида

Рассмотрим продолженную задачу для уравнения Софи Жермен как задачу продолженной бигармонической системы в матричном виде. Аппроксимируя продолженную задачу для уравнения Софи Жермен как задачу продолженной бигармонической системы с помощью конечномерного подпространства, получим систему уравнений

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N: \; B\bar{u} = \bar{f}, \; \bar{f} \in \mathbb{R}^N. \qquad (1.6.1)$$

Также считаем, что оператор проектирования на пространство решений продолженной задачи обнуляет коэффициенты у базисных функций носители, которых не содержатся полностью в первой области. Получаем продолженную задачу, систему в матричном виде, определив продолженную матрицу и продолженную правую часть системы

$$\left\langle B\bar{u}, \bar{v} \right\rangle = \Lambda_1(\tilde{u}, I_1\tilde{v}) + \Lambda_{\mathrm{II}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \; \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}, \; \left\langle \bar{f}, \bar{v} \right\rangle = F_1(I_1\tilde{v}) \; \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\left\langle \bar{f}, \bar{v} \right\rangle = (\bar{f}, \bar{v}) h_1 h_2 = \bar{f}\,\bar{v} h_1 h_2, \; \bar{v} = (v_1, v_2, ..., v_N)' \in \mathbb{R}^N, N = (m-2)(n-2).$$

При этом нумеруем первыми базисные функции носители, у которых полностью лежат в первой области. Затем нумеруем базисные функции носители, у которых пересекают границу первой области и второй области вместе. Заканчиваем нумерацию на базисных функциях носители, у которых полностью лежат во второй области. При этой нумерации возникающие векторы имеют такое строение

$$\bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')', \; \bar{u} = (\bar{u}_1', \bar{0}', \bar{0}')', \; \bar{f} = (\bar{f}_1', \bar{0}', \bar{0}')'.$$

Матрица имеет такую известную структуру

$$B = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Элементы у матрицы и компоненты вектора у правой части, для приведенной системы находятся по формулам

$$b_{i,j} = h_1^{-1} h_2^{-1} (\Lambda_1(\Phi_i, I_1\Phi_j) + \Lambda_{\mathrm{II}}(\Phi_i, \Phi_j)), \; f_i = h_1^{-1} h_2^{-1} F_1(I_1\Phi_i), \; i, j = 1, 2, ..., N.$$

Зададим матрицы, порождаемые соответствующими билинейными формами

$$\left\langle \Lambda_{\mathrm{I}}\bar{u}, \bar{v} \right\rangle = \Lambda_1(\tilde{u}, \tilde{v}), \left\langle \Lambda_{\mathrm{II}}\bar{u}, \bar{v} \right\rangle = \Lambda_{\mathrm{II}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \; \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Эти матрицы имеют следующую структуру

$$\Lambda_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Lambda_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Определим расширенную матрицу

$$\Lambda = \Lambda_{\mathrm{I}} + \Lambda_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Введем подпространство векторов

$$\bar{V}_1 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_2 = \bar{0}, \bar{v}_3 = \bar{0} \right\}.$$

Дополнительно определим подпространства векторов, как ранее вводили соответствующие конечномерные подпространства

$$\bar{V}_3 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_1 = \bar{0}, \bar{v}_2 = \bar{0} \right\}, \bar{V}_0 = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_3,$$

$$\bar{V}_2 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N : \Lambda_{11}\bar{v}_1 + \Lambda_{12}\bar{v}_2 = \bar{0}, \Lambda_{32}\bar{v}_2 + \Lambda_{33}\bar{v}_3 = \bar{0} \right\},$$

$$\mathbb{R}^N = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2 \oplus \bar{V}_3 = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_{\mathrm{II}}, \bar{V}_{\mathrm{I}} = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2, \bar{V}_{\mathrm{II}} = \bar{V}_2 \oplus \bar{V}_3.$$

Полагаем, выполняются теже предположения о продолжении теперь в матричном виде

$$\exists \beta_1 \in (0;+\infty), \beta_2 \in [\beta_1;+\infty) : \beta_1 \langle \Lambda\bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle \le \langle \Lambda_{\mathrm{II}}\bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle \le \beta_2 \langle \Lambda\bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle \; \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2.$$

В методе фиктивных компонент обычно решается в матричном виде продолженная задача

$$B\bar{u} = \bar{f}, \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

Это решение исходной задачи в матричном виде и это нулевое решение у фиктивной задачи в матричном виде

$$\Lambda_{11}\bar{u}_1 = \bar{f}_1, \begin{bmatrix} \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

1.7. Анализ продолженной бигармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на пространстве Евклида

Рассмотрим анализ продолженной задачи для уравнения Софи Жермен как задачу продолженной бигармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент в матричном виде, совпадающим здесь с методом фиктивных компонент

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : \Lambda(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}),$$

$$\tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = \tau = 2/(\beta_1 + \beta_2),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1. \qquad (1.7.1)$$

На любом шаге в этом итерационном процессе возникает расширенная задача, расширенная матрица

$$\langle \Lambda \bar{u}, \bar{v} \rangle = \Lambda(\tilde{u}, \tilde{v})\ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Вычисляем элементы этой матрицы

$$l_{i,j} = h_1^{-1} h_2^{-1} \Lambda(\Phi_i, \Phi_j),\ i, j = 1, 2, ..., N.$$

Используем следующую норму

$$\|\bar{v}\|_\Lambda = \sqrt{\langle \Lambda \bar{v}, \bar{v} \rangle}\ \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Следствие 1.7.1. *Для итерационного процесса из (1.7.1) имеет место следующая оценка*

$$\|\bar{u}^k - \bar{u}\|_\Lambda \le \varepsilon \|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_\Lambda,\ k \in \mathbb{N},$$

где

$$\varepsilon = \delta_1 q^{k-1},\ \delta_1 = \sqrt{\|I_1\|_{\tilde{V}}^2 - 1},\ 0 \le q = (\beta_2 - \beta_1)/(\beta_1 + \beta_2) < 1.$$

Отметим, что следствие 1.7.1 следует из следствия 1.5.1, из утверждений 1.5.1, 1.5.2 и теоремы 1.3.1.

Для решения задач из (1.6.1) с N неизвестными итерационным процессом из (1.7.1) с относительной погрешностью ε, требуется $O(\ln N + \ln \varepsilon^{-1})$ итераций. Для выбора итерационных параметров и ускорения сходимости итерационного процесса из (1.7.1) можно использовать известные вариационные методы и рекомендовать со второй итерации метод скорейшего спуска [43, 68, 71].

Замечание 1.7.1. В работах [124, 125] отмечаось, что для численного решения задачи (1.4.1), (1.6.1) итерационным процессом (1.5.1), (1.7.1), предложенным в [128, 129] при дискретизации оператор I_1 можно строить независящим от шага сеткки, когда производится преобразование функций в Ω_1 не только в близи границы $\overline{S}$ и иметь не зависящую от шагов сетки величину δ_1. И это было проделано в работе [53] для решения эллиптической краевой задачи, только второго порядка, когда теоретически был построен явный оператор продолжения $P = I - I_1$ с нормой, не зависящей от шага сетки, где I оператор тождественного преобразования.

Определим нормы, порождаемые расширенной матрицей в квадрате и единичной матрицей

$$\|\overline{v}\|_{\Lambda^2} = \sqrt{\left\langle \Lambda^2\overline{v}, \overline{v}\right\rangle},\ \|\overline{v}\| = \sqrt{\left\langle \overline{v}, \overline{v}\right\rangle}\ \forall \overline{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Лемма 1.7.1 *В методе фиктивных компонент из (1.7.1) имеет место оценка*

$$\left\|\overline{u}^1 - \overline{u}\right\|_{\Lambda^2} \le 2\left\|\overline{u}^0 - \overline{u}\right\|_{\Lambda^2}.$$

Доказательство. Обозначим ошибку итерационного процесса из (1.7.1)

$$\overline{\psi}^k = \overline{u}^k - \overline{u},\ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Получим равенства в итерационном процессе

$$\left(\Lambda(\overline{\psi}^1 - \overline{\psi}^0)\right)^2 = \left(-\Lambda_{11}\overline{\psi}_1^0\right)^2,\ \Lambda\overline{\psi}^1\Lambda\overline{\psi}^1 - 2\Lambda\overline{\psi}^1\Lambda\overline{\psi}^0 + \Lambda\overline{\psi}^0\Lambda\overline{\psi}^0 = \Lambda_{11}\overline{\psi}_1^0\Lambda_{11}\overline{\psi}_1^0.$$

Отметим наличие неравенства

$$\Lambda\overline{\psi}^0\Lambda\overline{\psi}^0 \ge \Lambda_{11}\overline{\psi}_1^0\Lambda_{11}\overline{\psi}_1^0.$$

Получим неравенства

$$\Lambda\overline{\psi}^1\Lambda\overline{\psi}^1 - 2\Lambda\overline{\psi}^1\Lambda\overline{\psi}^0 \le 0,\ (\Lambda\overline{\psi}^1\Lambda\overline{\psi}^1)^2 \le (2\Lambda\overline{\psi}^1\Lambda\overline{\psi}^0)^2 \le 4(\Lambda\overline{\psi}^1\Lambda\overline{\psi}^1)(\Lambda\overline{\psi}^0\Lambda\overline{\psi}^0).$$

Сокращая, получаем неравенства

$$\Lambda\overline{\psi}^1\Lambda\overline{\psi}^1 \le 4\Lambda\overline{\psi}^0\Lambda\overline{\psi}^0,\ \left\|\overline{\psi}^1\right\|_{\Lambda^2} \le 2\left\|\overline{\psi}^0\right\|_{\Lambda^2},\ \left\|\overline{u}^1 - \overline{u}\right\|_{\Lambda^2} \le 2\left\|\overline{u}^0 - \overline{u}\right\|_{\Lambda^2}.$$

Лемма 1.7.2. *В итерационном процессе из (1.7.1) имеет место оценка с положительной величиной в неравенстве*

$$\left\|\overline{u}^1-\overline{u}\right\|_{\Lambda}\le d\left\|\overline{u}^1-\overline{u}\right\|_{\Lambda^2}.$$

Положительная величина в неравенстве оценивается в виде асимптотического равенства

$$d\approx(\lambda_{1,1}^2+a_{\text{II}})^{1/2}\lambda_{1,1}^{-2},\ h_1,h_2\to 0,\ \lambda_{1,1}=\pi^2(b_1^{-2}+b_2^{-2})/4.$$

Доказательство. Отметим, что имеет место неравенство с положительной величиной

$$\exists d>0:(\Lambda\overline{\psi}^1,\overline{\psi}^1)\le d^2(\Lambda\overline{\psi}^1,\Lambda\overline{\psi}^1).$$

Получим оценку указанной положительной величины в неравенстве в виде асимптотического равенства

$$((\Delta^2+a_{\text{II}})\breve{\psi}^1,\breve{\psi}^1)=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}(\lambda_{i,j}^2+a_{\text{II}})c_{i,j}^2=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{i,j}^2c_{i,j}^2+\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}a_{\text{II}}c_{i,j}^2\le$$

$$\le\frac{1}{\lambda_{1,1}^2}\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{i,j}^4c_{i,j}^2+\frac{a_{\text{II}}}{\lambda_{1,1}^4}\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{i,j}^4c_{i,j}^2=\frac{\lambda_{1,1}^2+a_{\text{II}}}{\lambda_{1,1}^4}\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{i,j}^4c_{i,j}^2=\frac{\lambda_{1,1}^2+a_{\text{II}}}{\lambda_{1,1}^4}(\Delta^2\breve{\psi}^1,\Delta^2\breve{\psi}^1).$$

Здесь использовали решения спектральной задачи

$$\breve{\psi}^1=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}c_{i,j}\breve{\varphi}_{i,j},\ (\breve{\varphi}_{i,j},\breve{\varphi}_{i,j})=1,\ (\breve{\varphi}_{i,j},\breve{\varphi}_{p,l})=0,\ (i;j)\ne(p;l),\ i,j,p,l\in\mathbb{N},$$

где

$$\breve{\varphi}_{i,j}\in V\big((0;b_1)\times(0;b_2)\big):-\Delta\breve{\varphi}_{i,j}=\lambda_{i,j}\breve{\varphi}_{i,j},\ \breve{\varphi}_{i,j}\ne 0,\ \lambda_{i,j}=0,25\pi^2\Big((2i-1)b_1^{-2}+(2j-1)b_2^{-2}\Big),\ i,j\in\mathbb{N}.$$

Теорема 1.7.1. *В методе фиктивных компонент из (1.7.1) имеет место оценка сходимости*

$$\left\|\overline{u}^k-\overline{u}\right\|_{\Lambda}\le\varepsilon\left\|\overline{u}^0-\overline{u}\right\|_{\Lambda^2},$$

$$\varepsilon=cq^{k-1},\ c=2d\in(0+\infty),\ k\in\mathbb{N},\ 0\le q=(\beta_2-\beta_1)/(\beta_1+\beta_2)<1,$$

$$d\approx(\lambda_{1,1}^2+a_{\text{II}})^{1/2}\lambda_{1,1}^{-2},\ h_1,h_2\to 0,\ \lambda_{1,1}=\pi^2(b_1^{-2}+b_2^{-2})/4.$$

Абсолютная ошибка у метода фиктивных компонент имеет скорость сходимости в энергетической норме не хуже, чем скорость сходимости геометрической прогрессии.

1.8. Асимптотически оптимальный анализ продолженной бигармонической системы методом итерационных расширений на пространстве Евклида

Для решения задачи из (1.6.1) используем новый метод итерационных расширений. Определим теперь расширенную матрицу по-новому, в виде суммы первой матрицы и второй матрицей, умноженной на положительный параметр

$$C=\Lambda_{\mathrm{I}}+\gamma\Lambda_{\mathrm{II}},\ \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix},\ \gamma\in(0;+\infty).$$

Полагаем, что еще выполняются положения о продолжении функций, записываемые в следующем виде

$$\exists\gamma_1\in(0;+\infty),\ \gamma_2\in[\gamma_1;+\infty):\gamma_1^2\left\langle C\bar{v}_2,C\bar{v}_2\right\rangle\le\left\langle \Lambda_{\mathrm{II}}\bar{v}_2,\Lambda_{\mathrm{II}}\bar{v}_2\right\rangle\le\gamma_2^2\left\langle C\bar{v}_2,C\bar{v}_2\right\rangle\ \forall\bar{v}_2\in\bar{V}_2,$$

$$\exists\alpha\in(0;+\infty):\left\langle \Lambda_{\mathrm{I}}\bar{v}_2,\Lambda_{\mathrm{I}}\bar{v}_2\right\rangle\le\alpha^2\left\langle \Lambda_{\mathrm{II}}\bar{v}_2,\Lambda_{\mathrm{II}}\bar{v}_2\right\rangle\ \forall\bar{v}_2\in\bar{V}_2.$$

Метод итерационных расширений является обобщением метода фиктивных компонент, когда используется дополнительный параметр при выборе расширенной матрицы, а итерационные параметры выбираются на основе метода минимальных невязок

$$\bar{u}^k\in\mathbb{R}^N:\ C(\bar{u}^k-\bar{u}^{k-1})=-\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1}-\bar{f}),\ k\in\mathbb{N},\tag{1.8.1}$$

$$\forall\bar{u}^0\in\bar{V}_1,\ \gamma>\alpha,\ \tau_0=1,\ \tau_{k-1}=\left\langle\bar{r}^{k-1},\bar{\eta}^{k-1}\right\rangle\Big/\left\langle\bar{\eta}^{k-1},\bar{\eta}^{k-1}\right\rangle,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\},$$

где для вычисления итерационных параметров последовательно вычисляем невязки, поправки, эквивалентные невязки

$$\bar{r}^{k-1}=B\bar{u}^{k-1}-\bar{f},\ \bar{w}^{k-1}=C^{-1}\bar{r}^{k-1},\ \bar{\eta}^{k-1}=B\bar{w}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}.$$

Определим норму, порождаемую расширенной матрицей

$$\|\bar{v}\|_{C^2}=\sqrt{\left\langle C^2\bar{v},\bar{v}\right\rangle}\ \ \forall\bar{v}\in\mathbb{R}^N.$$

Лемма 1.8.1. Для *итерационного процесса из (1.8.1) выполняется оценка*

$$\left\|\overline{u}^1-\overline{u}\right\|_{C^2}\le 2\left\|\overline{u}^0-\overline{u}\right\|_{C^2}.$$

Доказательство. Обозначим в процессе из (1.8.1) ошибку

$$\overline{\psi}^k=\overline{u}^k-\overline{u},\ k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

В итерационном процессе получаем равенства

$$\left\langle C(\overline{\psi}^1-\overline{\psi}^0),C(\overline{\psi}^1-\overline{\psi}^0)\right\rangle=\left\langle-\Lambda_{11}\overline{\psi}_1^0,-\Lambda_{11}\overline{\psi}_1^0\right\rangle,$$

$$\left\langle C\overline{\psi}^1,C\overline{\psi}^1\right\rangle-2\left\langle C\overline{\psi}^1,C\overline{\psi}^0\right\rangle+\left\langle C\overline{\psi}^0,C\overline{\psi}^0\right\rangle=\left\langle\Lambda_{11}\overline{\psi}_1^0,\Lambda_{11}\overline{\psi}_1^0\right\rangle.$$

Отметим, что выполняется неравенство

$$\left\langle C\overline{\psi}^0,C\overline{\psi}^0\right\rangle\ge\left\langle\Lambda_{11}\overline{\psi}_1^0,\Lambda_{11}\overline{\psi}_1^0\right\rangle.$$

Замечаем выполнение неравенств

$$\left\langle C\overline{\psi},^1C\overline{\psi}^1\right\rangle-2\left\langle C\overline{\psi}^1,C\overline{\psi}^0\right\rangle\le 0,\left\langle C\overline{\psi}^1,C\overline{\psi}^1\right\rangle^2\le 4\left\langle C\overline{\psi}^1,C\overline{\psi}^0\right\rangle^2\le 4\left\langle C\overline{\psi}^1,C\overline{\psi}^1\right\rangle\left\langle C\overline{\psi}^0,C\overline{\psi}^0\right\rangle.$$

После сокращения получаем неравенства

$$\left\langle C\overline{\psi}^1,C\overline{\psi}^1\right\rangle\le 4\left\langle C\overline{\psi}^0,C\overline{\psi}^0\right\rangle,\ \left\|\overline{\psi}^1\right\|_{C^2}\le 2\left\|\overline{\psi}^0\right\|_{C^2},\ \left\|\overline{u}^1-\overline{u}\right\|_{C^2}\le 2\left\|\overline{u}^0-\overline{u}\right\|_{C^2}.$$

Теорема 1.8.1. *Для метода итерационных расширений из* (1.8.1) *имеет место оценка сходимости*

$$\left\|\overline{u}^k-\overline{u}\right\|_{C^2}\le\varepsilon\left\|\overline{u}^0-\overline{u}\right\|_{C^2},\ \varepsilon=2(\gamma_2/\gamma_1)(\alpha/\gamma)^{k-1},\ k\in\mathbb{N}.$$

Последовательность относительных ошибок в более сильной норме, чем норма энергетическая оценивается сверху сходящейся геометрической прогрессией.

Доказательство. Из итерационного процесса имеем равенства для ошибок и невязок

$$\overline{\psi}^k=\overline{\psi}^{k-1}-\tau_kC^{-1}\Lambda_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^{k-1},\ \overline{r}^k=\overline{r}^{k-1}-\tau_k\Lambda_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}\setminus 1.$$

Выбираем параметры

$$\tau_{k-1}=\frac{\left\langle\Lambda_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1},\overline{r}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle\Lambda_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1},\Lambda_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1}\right\rangle}=\frac{\left\langle\overline{r}^{k-1},\overline{\eta}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle\overline{\eta}^{k-1},\overline{\eta}^{k-1}\right\rangle}.$$

Заметим наличие равенства

$$\tau_{k-1} = \frac{\left\langle \Lambda_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \Lambda_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1}, \Lambda_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1}, C\overline{w}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1}, \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1} \right\rangle}.$$

Используем обозначения

$$\Lambda_{\mathrm{I}} \overline{w}^{k-1} = \overline{a},\ \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1} = \overline{b}.$$

Отметим положительность выбираемых параметров

$$\tau_k = \frac{\left\langle \overline{b}, \overline{a} + \gamma \overline{b} \right\rangle}{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle} = \gamma - \frac{\left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle}{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle} \ge \gamma - \frac{\left\langle \overline{a}, \overline{a} \right\rangle^{1/2} \left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle^{1/2}}{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle} \ge \gamma - \frac{\left\langle \overline{a}, \overline{a} \right\rangle^{1/2}}{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle^{1/2}} \ge \gamma - \alpha > 0.$$

Запишем скалярные произведения с невязками при выбранных параметрах

$$\left\langle \overline{r}^k, \overline{r}^k \right\rangle = \left\langle \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle - \frac{\left\langle \Lambda_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle^2}{\left\langle \Lambda_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1}, \Lambda_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1} \right\rangle}.$$

Выписываем отношение скалярных произведений невязок

$$q_k^2 = \frac{\left\langle \overline{r}^k, \overline{r}^k \right\rangle}{\left\langle \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle} = 1 - \frac{\left\langle \Lambda_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle^2}{\left\langle \Lambda_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1}, \Lambda_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1} \right\rangle \left\langle \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle} =$$

$$= \frac{\left\langle \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1}, \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1} \right\rangle \left\langle C\overline{w}^{k-1}, C\overline{w}^{k-1} \right\rangle - \left\langle \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1}, C\overline{w}^{k-1} \right\rangle^2}{\left\langle \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1}, \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1} \right\rangle \left\langle C\overline{w}^{k-1}, C\overline{w}^{k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle \left\langle \overline{a} + \gamma \overline{b}, \overline{a} + \gamma \overline{b} \right\rangle - \left\langle \overline{b}, \overline{a} + \gamma \overline{b} \right\rangle^2}{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle \left\langle \overline{a} + \gamma \overline{b}, \overline{a} + \gamma \overline{b} \right\rangle}.$$

Введем обозначения

$$\left\langle \overline{a}, \overline{a} \right\rangle = a,\ \left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle = b,\ \left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle = z,$$

тогда

$$q_k^2 = \frac{ab - z^2}{b(a + \gamma^2 b + 2\gamma z)} \le \max_{|z| \le \sqrt{ab}} q_k^2(z) = q_k^2\left(\frac{-a}{\gamma}\right) = \frac{a}{\gamma^2 b} \le \frac{\alpha^2}{\gamma^2} = q^2,$$

учитывая, что

$$q_k^2 \ge 0, \left(q_k^2(z)\right)'_z = \frac{-2\gamma(z + a/\gamma)(z + \gamma b)}{b(a + \gamma^2 b + 2\gamma z)^2},\ -\gamma b < \frac{a + \gamma^2 b}{2\gamma} < -\sqrt{ab} < -\frac{a}{\gamma} < \sqrt{ab}.$$

Устанавливаем неравенства

$$\left\langle \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^k, \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^k \right\rangle \le q^2 \left\langle \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^{k-1}, \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^{k-1} \right\rangle,\ \left\langle \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^k, \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^k \right\rangle \le q^{2(k-1)} \left\langle \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^1, \Lambda_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^1 \right\rangle,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Учитывая, что

$$\left\langle C\overline{\psi}^k,\ C\overline{\psi}^k\right\rangle \le \beta_1^{-2}\left\langle \Lambda_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^k, \Lambda_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^k\right\rangle, \left\langle \Lambda_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^1, \Lambda_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^1\right\rangle \le \beta_2^2\left\langle C\overline{\psi}^1,\ C\overline{\psi}^1\right\rangle \le 4\beta_2^2\left\langle C\overline{\psi}^0,\ C\overline{\psi}^0\right\rangle,$$

получаем неравенство дающее оценку сходимости метода итерационных расширений

$$\left\langle C\overline{\psi}^k,\ C\overline{\psi}^k\right\rangle \le 4\gamma_1^{-2}\gamma_2^2 q^{2(k-1)}\left\langle C\overline{\psi}^0,\ C\overline{\psi}^0\right\rangle.$$

Замечание 1.8.1. *Если в итерационном процессе из (1.8.1)* $\overline{u}^{k-1} = \overline{u}$, *то* $\overline{u}^k = \overline{u}$.

Доказательство. Из итерационного процесса, в этом случае получаем, что

$$\overline{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\overline{u}^k - \overline{u}) = -\tau_{k-1}(B\overline{u} - \overline{f}),\ k \in \mathbb{N}$$

и

$$\overline{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\overline{u}^k - \overline{u}) = \overline{0},\ \overline{u}^k - \overline{u} = \overline{0},\ \overline{u}^k = \overline{u},\ k \in \mathbb{N}.$$

Замечание 1.8.2. *В итерационном процессе из (1.8.1) ошибка принадлежит подпространству, т.е.* $\overline{\psi}^k \in \overline{V}_2\ \forall k \in \mathbb{N}$, *приближение принадлежит подпространству, т.е.* $\overline{u}^k \in \overline{V}_{\mathrm{I}}\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. При $k = 1$ из итерационного процесса для ошибки

$$C(\overline{\psi}^1 - \overline{\psi}^0) = -B\overline{\psi}^0,$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} + \gamma\Lambda_{02} & \gamma\Lambda_{23} \\ 0 & \gamma\Lambda_{32} & \gamma\Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\psi}_1^1 - \overline{\psi}_1^0 \\ \overline{\psi}_2^1 \\ \overline{\psi}_3^1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\psi}_1^0 \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{bmatrix},$$

тогда

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} + \gamma\Lambda_{02} & \gamma\Lambda_{23} \\ 0 & \gamma\Lambda_{32} & \gamma\Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\psi}_1^1 \\ \overline{\psi}_2^1 \\ \overline{\psi}_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \Lambda_{21}\overline{\psi}_1^0 \\ \overline{0} \end{bmatrix},\ \overline{\psi}^1 \in \overline{V}_2.$$

Если предположить, что при $k-1$ замечание выполняется, тогда оно выполняется и при k, т.к. из итерационного процесса для ошибки

$$C(\overline{\psi}^k - \overline{\psi}^{k-1}) = -\tau_{k-1}B\overline{\psi}^{k-1},$$

$$\begin{bmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0\\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20}+\gamma\Lambda_{02} & \gamma\Lambda_{23}\\ 0 & \gamma\Lambda_{32} & \gamma\Lambda_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\psi}_1^k-\bar{\psi}_1^{k-1}\\ \bar{\psi}_2^k-\bar{\psi}_2^{k-1}\\ \bar{\psi}_3^k-\bar{\psi}_3^{k-1}\end{bmatrix}=-\tau_{k-1}\begin{bmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0\\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23}\\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\psi}_1^{k-1}\\ \bar{\psi}_2^{k-1}\\ \bar{\psi}_3^{k-1}\end{bmatrix},$$

тогда

$$\begin{bmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0\\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20}+\gamma\Lambda_{02} & \gamma\Lambda_{23}\\ 0 & \gamma\Lambda_{32} & \gamma\Lambda_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\psi}_1^k\\ \bar{\psi}_2^k\\ \bar{\psi}_3^k\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\bar{0}\\ \Lambda_{21}\bar{\psi}_1^{k-1}+(\Lambda_{20}+(\gamma-\tau_{k-1})\Lambda_{02})\bar{\psi}_2^{k-1}+(\gamma-\tau_{k-1})\Lambda_{23}\bar{\psi}_3^{k-1}\\ \bar{0}\end{bmatrix},\ \bar{\psi}^k\in\bar{V}_2.$$

На основе математической индукции получается доказательство замечания.

1.9. Анализ продолженной бигармонической системы методом итерационных расширений в пространстве Соболева

Рассмотрим продолженную бигармоническую систему в операторном виде в пространстве Соболева

$$\breve{u}\in\breve{V}:\ \breve{B}\breve{u}=\breve{f}, \tag{1.9.1}$$

где оператор и правая часть задачи продолженной системы определяются следующим образом

$$(\breve{B}\breve{u},\breve{v})=\Lambda_1(\breve{u},I_1\breve{v})+\Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u},\breve{v})\ \forall\breve{u},\breve{v}\in\breve{V},\ (\breve{f},\breve{v})=F_1(I_1\breve{v})\ \forall\breve{v}\in\breve{V},$$

$$(\breve{f},\breve{v})=\int\limits_{\Pi}\breve{f}\breve{v}\,d\Pi.$$

Отметим, что для пространства Соболева выполняются предположения для продолжения функций, тогда в таком виде

$$\exists\breve{\beta}_1\in(0;1],\ \breve{\beta}_2\in[\breve{\beta}_1;1]:\ \breve{\beta}_1(\breve{\Lambda}\breve{v}_2,\breve{v}_2)\le(\breve{\Lambda}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2,\breve{v}_2)\le\breve{\beta}_2(\breve{\Lambda}\breve{v}_2,\breve{v}_2)\ \forall\breve{v}_2\in\breve{V}_2,$$

где рассматриваемые операторы определяем таким образом

$$\breve{\Lambda}=\breve{\Lambda}_{\mathrm{I}}+\breve{\Lambda}_{\mathrm{II}},\ (\breve{\Lambda}_{\mathrm{I}}\breve{u},\breve{v})=\Lambda_1(\breve{u},\breve{v}),\ (\breve{\Lambda}_{\mathrm{II}}\breve{v},\breve{v})=\Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u},\breve{v})\ \forall\breve{u},\breve{v}\in\breve{V}.$$

Дополнительно определим следующий расширенный оператор

$$\breve{C} = \breve{\Lambda}_{\mathrm{I}} + \gamma \breve{\Lambda}_{\mathrm{II}},\ \gamma \in (0;+\infty).$$

Полагаем, что также выполняются предположения о продолжении функций, которые запишем в следующем виде

$$\exists \breve{\gamma}_1 \in (0;+\infty),\ \breve{\gamma}_2 \in [\breve{\gamma}_1;+\infty): \breve{\gamma}_1^2(\breve{C}\breve{v}_2, \breve{C}\breve{v}_2) \le (\breve{\Lambda}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2, \breve{\Lambda}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2) \le \breve{\gamma}_2^2(\breve{C}\breve{v}_2, \breve{C}\breve{v}_2)\ \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2,$$
$$\exists \breve{\alpha} \in (0;+\infty): (\breve{\Lambda}_{\mathrm{I}}\breve{v}_2, \breve{\Lambda}_{\mathrm{I}}\breve{v}_2) \le \breve{\alpha}^2(\breve{\Lambda}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2, \breve{\Lambda}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2)\ \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2.$$

Рассмотрим теперь метод итерационных расширений в операторном виде в пространстве Соболева

$$\breve{u}^k \in \breve{V}:\ \breve{C}(\breve{u}^k - \breve{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(\breve{B}\breve{u}^{k-1} - \breve{f}),\ k \in \mathbb{N}, \qquad (1.9.2)$$
$$\forall \breve{u}^0 \in \breve{V}_1,\ \gamma > \breve{\alpha},\ \tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = (\breve{r}^{k-1}, \breve{\eta}^{k-1}) \big/ (\breve{\eta}^{k-1}, \breve{\eta}^{k-1}),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

где при вычислении итерационных параметров надо вычислить невязки, поправки и эквивалентные невязки

$$\breve{r}^{k-1} = \breve{B}\breve{u}^{k-1} - \breve{f},\ \breve{w}^{k-1} = \breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1},\ \breve{\eta}^{k-1} = \breve{B}\breve{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Определим норму

$$\|\breve{v}\|_{\breve{C}^2} = \sqrt{(\breve{C}\breve{v}, \breve{C}\breve{v})}\ \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Полагаем, что при аппроксимации выполняется

$$\|\breve{v}\|_{\breve{C}^2} \approx \|\bar{v}\|_{C^2}\ \ h_1, h_2 \to 0.$$

Следствие 1.9.1. *В методе итерационных расширений в пространстве Соболева из (1.9.2) выполняются оценки сходимости.*

$$\left\|\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\breve{C}^2} \le \varepsilon \left\|\breve{u}^0 - \breve{u}\right\|_{\breve{C}^2},\ \varepsilon = 2(\breve{\gamma}_2/\breve{\gamma}_1)(\breve{\alpha}/\gamma)^{k-1},\ k \in \mathbb{N},$$
$$\breve{\alpha} \approx \alpha,\ \breve{\gamma}_1 \approx \gamma_1,\ \breve{\gamma}_2 \approx \gamma_2,\ h_1, h_2 \to 0,$$

где относительные ошибки оцениваются бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Замечание 1.9.1. *В следствии 1.9.1 при используемой аппроксимации*

$$\alpha \approx \breve{\alpha} = const,\ \gamma_1 \approx \breve{\gamma}_1 = const,\ \gamma_2 \approx \breve{\gamma}_2 = const,\ h_1, h_2 \to 0.$$

1.10. Анализ продолженной бигармонической системы методом итерационных расширений на конечномерном подпространстве пространства Соболева

Рассмотрим продолженную бигармоническую систему в операторном виде на конечномерном подпространстве пространства Соболева

$$\tilde{u} \in \tilde{V}: \ \tilde{B}\tilde{u} = \tilde{f}, \tag{1.10.1}$$

где оператор и правая часть задачи продолженной системы на конечномерном подпространстве определяются следующим образом

$$(\tilde{B}\tilde{u},\tilde{v}) = \Lambda_1(\tilde{u}, I_1\tilde{v}) + \Lambda_{\text{II}}(\tilde{u},\tilde{v}) \ \forall \tilde{u},\tilde{v} \in \tilde{V}, \ (\tilde{f},\tilde{v}) = F_1(I_1\tilde{v}) \ \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Отметим, что для конечномерного подпространства выполняются предположения для продолжения функций, тогда в таком виде

$$\exists \tilde{\beta}_1 \in (0;1], \ \tilde{\beta}_2 \in [\tilde{\beta}_1;1]: \tilde{\beta}_1(\tilde{\Lambda}\tilde{v}_2,\tilde{v}_2) \le (\tilde{\Lambda}_{\text{II}}\tilde{v}_2,\tilde{v}_2) \le \tilde{\beta}_2(\tilde{\Lambda}\tilde{v}_2,\tilde{v}_2) \ \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2,$$

где рассматриваемые операторы определяем таким образом

$$\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}_{\text{I}} + \tilde{\Lambda}_{\text{II}}, \ (\tilde{\Lambda}_{\text{I}}\tilde{u},\tilde{v}) = \Lambda_1(\tilde{u},\tilde{v}), \ (\tilde{\Lambda}_{\text{II}}\tilde{v},\tilde{v}) = \Lambda_{\text{II}}(\tilde{u},\tilde{v}) \ \forall \tilde{u},\tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Дополнительно определим расширенный оператор на конечномерном подпространстве

$$\tilde{C} = \tilde{\Lambda}_{\text{I}} + \gamma\tilde{\Lambda}_{\text{II}}, \ \gamma \in (0;+\infty).$$

Полагаем, что выполняются предположения о продолжении функций, которые запишем в следующем виде

$$\exists \tilde{\gamma}_1 \in (0;+\infty), \ \tilde{\gamma}_2 \in [\tilde{\gamma}_1;+\infty): \tilde{\gamma}_1^2(\tilde{C}\tilde{v}_2,\tilde{C}\tilde{v}_2) \le (\tilde{\Lambda}_{\text{II}}\tilde{v}_2,\tilde{\Lambda}_{\text{II}}\tilde{v}_2) \le \tilde{\gamma}_2^2(\tilde{C}\tilde{v}_2,\tilde{C}\tilde{v}_2) \ \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2,$$
$$\exists \tilde{\alpha} \in (0;+\infty): (\tilde{\Lambda}_{\text{I}}\tilde{v}_2,\tilde{\Lambda}_{\text{I}}\tilde{v}_2) \le \tilde{\alpha}^2(\tilde{\Lambda}_{\text{II}}\tilde{v}_2,\tilde{\Lambda}_{\text{II}}\tilde{v}_2) \ \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2.$$

Рассмотрим теперь метод итерационных расширений в операторном виде на конечномерном подпространстве Соболева

$$\tilde{u}^k \in \tilde{V}: \ \tilde{C}(\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(\tilde{B}\tilde{u}^{k-1} - \tilde{f}), \ k \in \mathbb{N}, \tag{1.10.2}$$

$$\forall \tilde{u}^0 \in \tilde{V}_1, \ \gamma > \tilde{\alpha}, \ \tau_0 = 1, \ \tau_{k-1} = (\tilde{r}^{k-1},\tilde{\eta}^{k-1}) \big/ (\tilde{\eta}^{k-1},\tilde{\eta}^{k-1}), \ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

где при вычислении итерационных параметров надо вычислить невязки, поправки и эквивалентные невязки

$$\tilde{r}^{k-1} = \tilde{B}\tilde{u}^{k-1} - \tilde{f},\ \tilde{w}^{k-1} = \tilde{C}^{-1}\tilde{r}^{k-1},\ \tilde{\eta}^{k-1} = \tilde{B}\tilde{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Определим норму

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{C}^2} = \sqrt{(\tilde{C}\tilde{v}, \tilde{C}\tilde{v})}\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Полагаем, что при аппроксимации выполняется

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{C}^2} \approx \|\breve{v}\|_{\breve{C}^2}\ h_1, h_2 \to 0.$$

Следствие 1.10.1. *В методе итерационных расширений на конечномерном подпространстве Соболева из (1.10.2) выполняется оценка сходимости.*

$$\left\|\tilde{u}^k - \tilde{u}\right\|_{\tilde{C}^2} \le \varepsilon \left\|\tilde{u}^0 - \tilde{u}\right\|_{\tilde{C}^2},\ \varepsilon = \tilde{\delta}_1(\tilde{\gamma}_2/\tilde{\gamma}_1)(\tilde{\alpha}/\gamma)^{k-1},\ k \in \mathbb{N},$$

$$\tilde{\delta}_1 \approx 2,\ \tilde{\alpha} \approx \breve{\alpha},\ \tilde{\gamma}_1 \approx \breve{\gamma}_1,\ \tilde{\gamma}_2 \approx \breve{\gamma}_2,\ h_1, h_2 \to 0,$$

где относительные ошибки оцениваются бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Замечание 1.10.1. *В следствии 1.10.1 при используемой аппроксимации*

$$\tilde{\alpha} \approx \breve{\alpha} = const,\ \tilde{\gamma}_1 \approx \breve{\gamma}_1 = const,\ \tilde{\gamma}_2 \approx \breve{\gamma}_2 = const,\ h_1, h_2 \to 0.$$

1.11. Алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи продолженной бигармонической системы на пространстве Евклида

При выборе итерационных параметров применим метод минимальных невязок.

I. Выбираем начальное приближение и итерационный параметр

$$\forall \overline{u}^0 = \begin{bmatrix} \overline{u}_1^0 \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{bmatrix} \in \overline{V}_1,\ \tau_0 = 1.$$

II. Находим невязку

$$\overline{r}^{k-1} = B\overline{u}^{k-1} - \overline{f},\ k \in \mathbb{N},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_1^0 \\ \bar{r}_2^0 \\ \bar{r}_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11}\bar{u}_1^0 - \bar{f}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_1^{k-1} \\ \bar{r}_2^{k-1} \\ \bar{r}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \Lambda_{02}\bar{u}_2^{k-1} + \Lambda_{23}\bar{u}_3^{k-1} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

III. Вычисляем норму абсолютной ошибки в квадрате

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \right\rangle, k \in \mathbb{N},$$

$$\mathrm{E}_0 = \left\langle \bar{r}_1^0, \bar{r}_1^0 \right\rangle,$$

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\langle \bar{r}_2^{k-1}, \bar{r}_2^{k-1} \right\rangle, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

IV. Ищем поправку

$$\bar{w}^{k-1} : C\bar{w}^{k-1} = \bar{r}^{k-1}, k \in \mathbb{N},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_1^0 \\ \bar{w}_2^0 \\ \bar{w}_3^0 \end{bmatrix} \in \bar{V}_{\mathrm{I}} : \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} + \gamma\Lambda_{02} & \gamma\Lambda_{23} \\ 0 & \gamma\Lambda_{32} & \gamma\Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1^0 \\ \bar{w}_2^0 \\ \bar{w}_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1^0 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \gamma \in (0; +\infty),$$

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_1^{k-1} \\ \bar{w}_2^{k-1} \\ \bar{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} \in \bar{V}_2 : \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} + \gamma\Lambda_{02} & \gamma\Lambda_{23} \\ 0 & \gamma\Lambda_{32} & \gamma\Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{k-1} \\ \bar{w}_2^{k-1} \\ \bar{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{r}_2^{k-1} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \gamma \in (0; +\infty), k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

V. Находим эквивалентную невязку

$$\bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\eta}_1^{k-1} \\ \bar{\eta}_2^{k-1} \\ \bar{\eta}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \Lambda_{02}\bar{w}_2^{k-1} + \Lambda_{23}\bar{w}_3^{k-1} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VI. Находим итерационный параметр

$$\tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}_2^{k-1}, \bar{\eta}_2^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}_2^{k-1}, \bar{\eta}_2^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VII. Находим очередное приближение

$$\bar{u}^k = \bar{u}^{k-1} - \tau_{k-1} \bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^k \\ \bar{u}_2^k \\ \bar{u}_3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{k-1} \\ \bar{u}_2^{k-1} \\ \bar{u}_3^{k-1} \end{bmatrix} - \tau_{k-1} \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{k-1} \\ \bar{w}_2^{k-1} \\ \bar{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} \in \bar{V}_{\mathrm{I}},\ k \in \mathbb{N}.$$

VIII. Проверяем выполнение критерия остановки итераций по заданной оценке относительной ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1} \le \mathrm{E}^2 \mathrm{E}_0,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \mathrm{E} \in (0; 1).$$

Приведем пример с применением метода итерационных расширений. Рассмотрим задачу при следующих областях

$$\Pi = (0;8) \times (0;b),\ \Omega_{\mathrm{I}} = (0;8) \times (0;4),\ \Omega_{\mathrm{II}} = (0;8) \times (4;b).$$

Полагаем, что области имеют границы

$$\Gamma_0 = \varnothing,\ \Gamma_1 = (0;8) \times \{b\},\ \Gamma_2 = (0;8) \times \{0\} \cup \{0,\ 8\} \times (0;b),\ \Gamma_3 = \varnothing,$$

$$\Gamma_{\mathrm{I},0} = (0;8) \times \{4\},\ \Gamma_{\mathrm{I},1} = \varnothing,\ \Gamma_{\mathrm{I},2} = (0;8) \times \{0\} \cup \{0,\ 8\} \times (0;4),\ \Gamma_{\mathrm{I},3} = \varnothing,$$

$$\Gamma_{\mathrm{II},0} = \varnothing,\ \Gamma_{\mathrm{II},1} = (0;8) \times \{b\},\ \Gamma_{\mathrm{II},2} = \{0,\ 8\} \times (4;b),\ \Gamma_{\mathrm{II},3} = (0;8) \times \{4\}.$$

Берем правую часть с коэффициентом уравнения

$$\breve{f}_1(x;y) = 6,\ (x;y) \in (0;8) \times (0;4),\ a_{\mathrm{II}}(x;y) = 1,\ (x;y) \in (0;8) \times (4;b).$$

Приведем решение задачи

$$\breve{u}_1(x;y) = (y+4)^2 (y-4)^2 / 4,\ (x;y) \in (0;8) \times (0;4).$$

В прямоугольной области определим сетку с узлами

$$(x_i; y_j) = \big((i-0{,}5)h_1; (j-0{,}5)h_2\big), i = 1, 2, \ldots, n+2,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

При дискретизации выбираем

$$h_1 = h_2 = h = 8/(n+2),\ b = 4(2n+1)/(n+2),\ n = 36, 42, \ldots, 102.$$

При вычислениях в методе итерационных расширений с параметром $\gamma = 1$, с нулевым начальным приближением процесс останавливается на четвертой итерации при $n \geq 36$, если задана оценка для относительной ошибки одна тысячная

$$n = 102,\ \mathrm{E} = 0{,}001,\ u_{i,j}^1 \geq u_{i,j}^2 \approx u_{i,j}^3 \approx u_{i,j}^4 \approx \breve{u}_{i,j} \geq u_{i,j}^0 = 0.$$

Заметим, что на последней четвертой итерации на самой мелкой из используемых сеток выполняются неравенства, характеризующие точность численного решения исходной задачи в рассматриваемом случае

$$n = 102,\ \mathrm{E} = 0{,}001,\ \max_{j=1,2,\dots,n/2} \frac{\left|u_{i,j}^4 - \breve{u}_{i,j}\right|}{\left|\breve{u}_{i,j}\right|} \leq 0{,}04,\ \frac{\max\limits_{j=1,2,\dots,n/2}\left|u_{i,j}^4 - \breve{u}_{i,j}\right|}{\max\limits_{j=1,2,\dots,n/2}\left|\breve{u}_{i,j}\right|} \leq 0{,}0004.$$

Графики второго, третьего и четвертого приближений практически почти совпадают с графиком точного решения, поэтому достаточно привести графики первого приближения и точного решения рассматриваемой задачи на следующем рисунке.

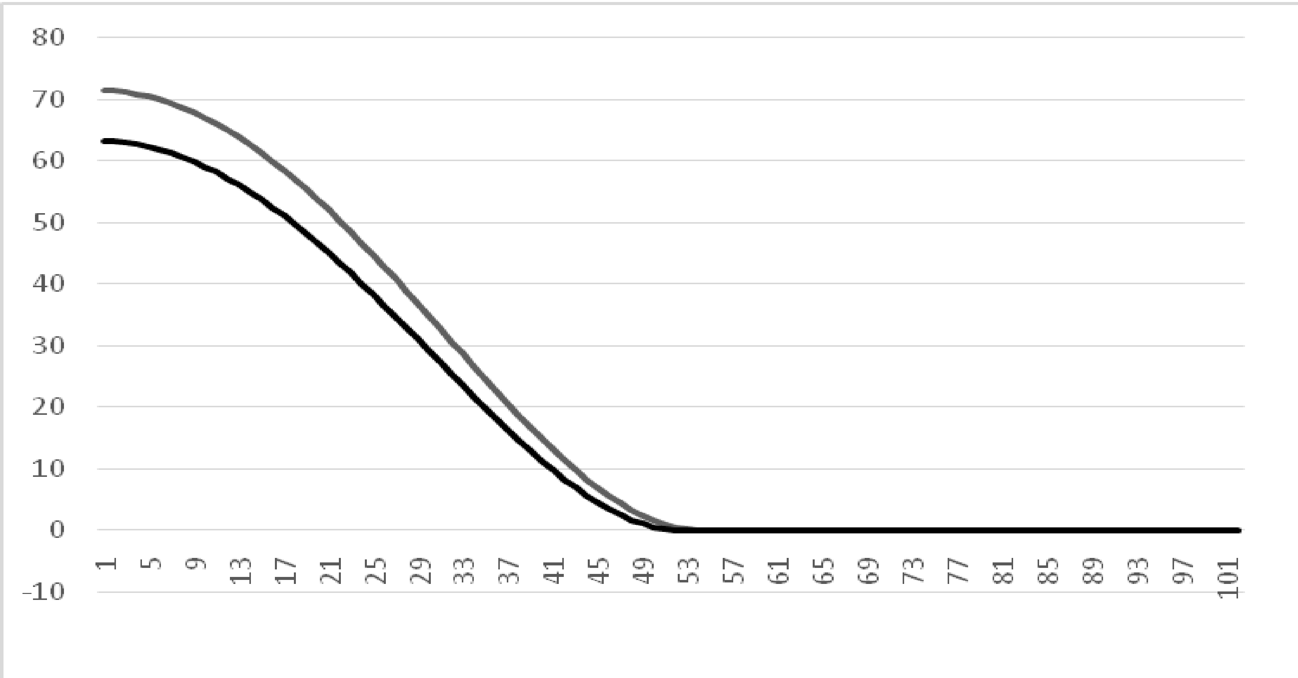


Рис. 1.11.1. Графики первого приближения и точного решения задачи $u_{i,j}^1,\ \breve{u}_{i,j}$ при $i = const,\ j = 1, 5, \dots 101,\ n = 102.$

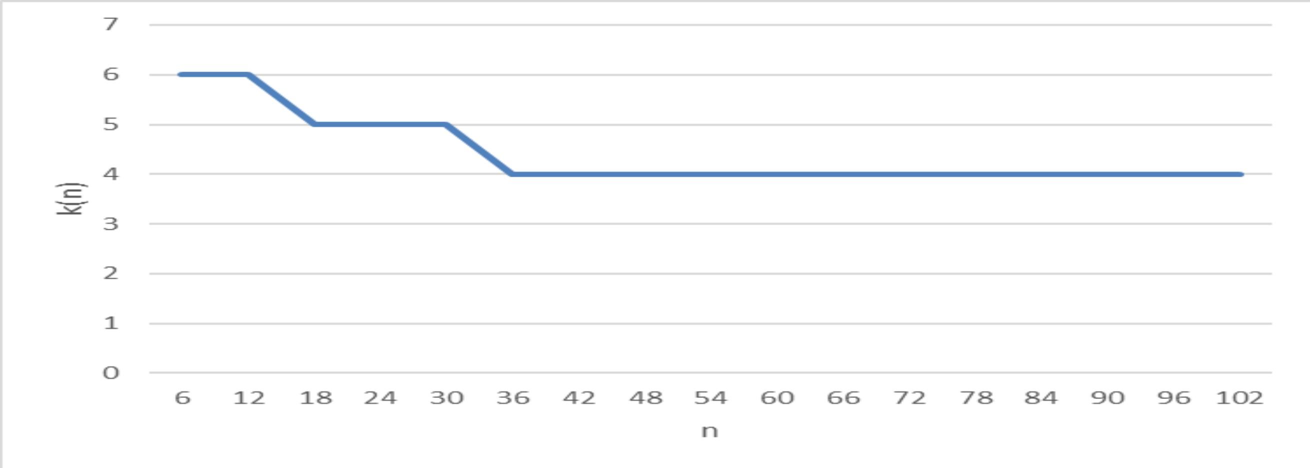


Рис. 1.11.2. График функции числа итераций k в зависимости количества узлов сетки по направлению оси ординат $n = 6,12,...,102$ после линейной интерполяции.

1.12. Методы итерационных факторизаций для решения расширенной задачи бигармонической системы

Например, из линейной теории упругости при изгибании пластин на упругом основании энергия деформированной и прямоугольной пластины, когда на двух смежных сторонах однородные условия шарнирного опирания, а на двух других сторонах однородные условия симметрии, может записываться в виде [36, 60]:

$$\breve{E}(\breve{u}) = \frac{1}{2}\breve{D}\int_{\Pi}(\Delta\breve{u})^2 d\Pi + \frac{1}{2}\int_{\Pi}\breve{K}\breve{u}^2 d\Pi - \int_{\Pi}\breve{P}\breve{u}d\Pi\,,$$

где $\breve{P}$ – давление, $\breve{K}$ – коэффициент жёсткости упругого основания ($\breve{K} = 0$ в случае отсутствия упругого основания), $\breve{D} = \breve{E}\breve{h}^3 / (12(1-\sigma^2))$ – цилиндрическая жёсткость пластины, $\breve{h}$ – толщина пластины, $\breve{E}$ – модуль Юнга (модуль растяжения), $\sigma \in (0;1)$ – коэффициент Пуассона, $\Pi = (0;b_1)\times(0;b_2)$ – плоская область, $\breve{u}$ – искомое перемещение. Если приравнять к нулю вариацию энергии

$$\delta\breve{E}(\breve{u}) = \breve{D}\int_{\Pi}\Delta\breve{u}\Delta\breve{v}d\Pi + \int_{\Pi}\breve{K}\breve{u}\breve{v}d\Pi - \int_{\Pi}\breve{P}\breve{v}d\Pi = 0\,,$$

где $\breve{v} = \delta\breve{u}$, то, при $a = \breve{K}/\breve{D}$, $\breve{g} = \breve{P}/\breve{D}$ получается, что

$$\int_{\Pi}(\Delta\breve{u}\Delta\breve{v} + a\breve{u}\breve{v})d\Pi = \int_{\Pi}\breve{g}\breve{v}d\Pi\,.$$

Используем вторую формулу Грина

$$\int_{\Pi} \breve{w}\Delta\breve{v}d\Pi = \int_{\Pi} \Delta\breve{w}\breve{v}d\Pi + \int_{s} (\breve{w}\frac{\partial\breve{v}}{\partial n} - \breve{v}\frac{\partial\breve{w}}{\partial n})ds .$$

После интегрирования по частям устанавливается

$$\int_{\Omega} (\Delta^2\breve{u} + a\breve{u})\breve{v}d\Pi + \int_{s} \Delta\breve{u}\frac{\partial\breve{v}}{\partial n}ds - \int_{s} \frac{\partial\Delta\breve{u}}{\partial n}\breve{v}ds = \int_{\Pi} \breve{g}\breve{v}d\Pi ,$$

где

$\partial\Pi = \overline{s}$, $s = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, $\Gamma_1 = \{b_1\} \times (0;b_2) \bigcup (0;b_1) \times \{b_2\}$, $\Gamma_2 = \{0\} \times (0;b_2) \bigcup (0;b_1) \times \{0\}$, n – внешняя нормаль к $\partial\Pi$,

$$\breve{u}\Big|_{\Gamma_1} = \Delta\breve{u}\Big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial\breve{u}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial\Delta\breve{u}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0 .$$

Таким образом, получается задача при смешанных краевых условиях, а именно при однородных условиях шарнирного опирания и симметрии

$$\Delta^2\breve{u} + a\breve{u} = \breve{g} ,\ \breve{u}\Big|_{\Gamma_1} = \Delta\breve{u}\Big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial\breve{u}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial\Delta\breve{u}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0 .$$

Рассматривается бигармоническая система перемещений прямоугольной пластины в вариационном виде. Это вариационная задача бигармонической системы перемещений прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях

$$\breve{u} \in \breve{V} : \Lambda(\breve{u},\breve{v}) = G(\breve{v})\ \forall\breve{v} \in \breve{V},\ \ F \in \breve{V}', \tag{1.12.1}$$

где соболевское пространство функций

$$\breve{V} = \breve{V}(\Pi) = \left\{ \breve{v} \in W_2^2(\Pi) : \breve{v}\big|_{\Gamma_1} = 0, \frac{\partial\breve{v}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0 \right\}$$

на области $\Pi = (0;b_1) \times (0;b_2)$, с границей

$\partial\Omega = \overline{s}$, $s =, \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, $\Gamma_1 = \{b_1\} \times (0;b_2) \bigcup (0;b_1) \times \{b_2\}$, $\Gamma_2 = \{0\} \times (0;b_2) \bigcup (0;b_1) \times \{0\}$, n – внешняя нормаль к $\partial\Pi$, билинейная форма

$$\Lambda(\breve{u},\breve{v}) = \int_{\Pi} (\sigma\Delta\breve{u}\Delta\breve{v} + (1-\sigma)(\breve{u}_{xx}\breve{v}_{xx} + 2\breve{u}_{xy}\breve{v}_{xy} + \breve{u}_{yy}\breve{v}_{yy}) + a\breve{u}\breve{v})d\Pi ,$$

при этом $a = a_1 = 0$ на области Ω_1, $a = a_{\text{II}} \geq 0$ на $\Omega \setminus \Omega_1$, области Ω_1, Ω_2: $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \bigcup \overline{\Omega}_2$, $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \varnothing$, $\partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_2 \neq \varnothing$, заданы константы, $\sigma \in (0;1)$, $b_1, b_2 \in (0;+\infty)$, $a_1, a_{\text{II}} \in [0;+\infty)$.

Можно отметить [60, 61], что

$$\exists c_1, c_2 \in (0;+\infty):\ c_1 \|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Pi)} \leq \Lambda(\breve{v},\breve{v}) \leq c_2 \|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Pi)} \quad \forall \breve{v} \in \breve{V},$$

а, следовательно, решение задачи (1.12.1) существует и единственно [60, 61]. Если $\breve{g}$ – заданная, $\breve{u}$ – искомая достаточно гладкие функции и

$$G(\breve{v}) = (\breve{g},\breve{v}), \text{ где } (\breve{g},\breve{v}) = \int_\Pi \breve{g}\breve{v}\,d\Pi,$$

то из задачи (1.12.1) получается эллиптическое уравнение четвертого порядка при смешанных и однородных краевых условиях

$$\Delta^2 \breve{u} + a\breve{u} = \breve{g},\ \breve{u}\big|_{\Gamma_1} = \Delta\breve{u}\big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial \breve{u}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta\breve{u}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0. \qquad (1.12.2)$$

Опишем приближенный аналитический метод итерационных факторизаций для прямоугольной пластины

Основываясь, например, на [68] можно сформулировать следующее утверждение, которое будет использоваться в дальнейшем.

Утверждение 1.12.1. *Если рассмотреть спектральную задачу*

$$\lambda_{i,j}:\ -\Delta\breve{\varphi}_{i,j} = \lambda_{i,j}\breve{\varphi}_{i,j},\ \breve{\varphi}_{i,j}\big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial \breve{\varphi}_{i,j}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0,\ \breve{\varphi}_{i,j} \neq 0,$$

то находятся методом разделения переменных её собственные числа и функции соответственно

$$\lambda_{i,j} = \frac{(2i-1)^2\pi^2}{4b_1^2} + \frac{(2j-1)^2\pi^2}{4b_2^2},\ \breve{\varphi}_{i,j} = \cos\frac{(2i-1)\pi x}{2b_1} cos\frac{(2j-1)\pi y}{2b_2},$$

$\breve{c}_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \mathbb{N}$, *при этом* $0 < \min\limits_{i,j\in\mathbb{N}} \lambda_{i,j} = \lambda_{1,1} = \dfrac{\pi^2}{4b_1^2} + \dfrac{\pi^2}{4b_2^2}$, $\sup\limits_{i,j\in\mathbb{N}} \lambda_{i,j} = +\infty$.

Устанавливается непосредственной проверкой первое и известно, см., например, [7, 18, 71] второе

1. $\Lambda(\breve{\varphi}_{i,j},\breve{\varphi}_{i,j}) > 0,\ i, j \in \mathbb{N},\ \Lambda(\breve{\varphi}_{i,j},\breve{\varphi}_{k,l}) = 0,\ (i,j) \neq (k,l),\ k,l \in \mathbb{N},$

$$2.\ \forall\breve{\psi}^k\in\breve{V}\ \exists\breve{c}^k_{i,j}\in\mathbb{R}:\breve{\psi}^k=\sum_{i,j=1}^{\infty}\breve{c}^k_{i,j}\breve{\varphi}_{i,j},\ k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

Введём билинейные формы

$$M(\breve{u},\breve{v})=\int_{\Pi}\Delta\breve{u}\Delta\breve{v}d\Pi,\ \breve{u},\breve{v}\in\breve{V},$$

$$\Lambda_0(\breve{u},\breve{v})=\int_{\Pi}(\breve{u}_{xx}\breve{v}_{xx}+2\breve{u}_{xy}\breve{v}_{xy}+\breve{u}_{yy}\breve{v}_{yy})d\Pi,\ \breve{u},\breve{v}\in\breve{V}.$$

Утверждение 1.12.2. *Имеют место неравенства*

$$\breve{\gamma}_1M(\breve{v},\breve{v})\le\Lambda(\breve{v},\breve{v})\le\breve{\gamma}_2M(\breve{v},\breve{v})\ \forall\breve{v}\in\breve{V},$$

$$\breve{\gamma}_1\Lambda_0(\breve{v},\breve{v})\le\Lambda(\breve{v},\breve{v})\le\breve{\gamma}_2\Lambda_0(\breve{v},\breve{v})\quad\forall\breve{v}\in\breve{V},\ \breve{\gamma}_1=1,\ \breve{\gamma}_2=(\lambda^2_{1,1}+a_{\mathrm{II}})\big/\lambda^2_{1,1}.$$

Доказательство. Выполняется, что

$$1=\inf_{\lambda_{i,j}}\frac{\lambda^2_{i,j}+a_1}{\lambda^2_{i,j}}=\breve{\gamma}_1\le\frac{\Lambda(\breve{v},\breve{v})}{M(\breve{v},\breve{v})}\le\breve{\gamma}_2=\sup_{\lambda_{i,j}}\frac{\lambda^2_{i,j}+a_{\mathrm{II}}}{\lambda^2_{i,j}}=\frac{\lambda^2_{1,1}+a_{\mathrm{II}}}{\lambda^2_{1,1}}\quad\forall\breve{v}\in\breve{V}.$$

Введём нормы

$$\|\breve{v}\|_M=\sqrt{M(\breve{v},\breve{v})},\ \|\breve{v}\|_{\breve{V}}=\sqrt{\Lambda(\breve{v},\breve{v})}.$$

Предлагается итерационный процесс, метод приближённого вычисления перемещений прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях на непрерывном уровне:

$$\breve{u}^k\in\breve{V}:\ M(\breve{u}^l-\breve{u}^{l-1},\breve{v})=-\tau_{l-1}(\Lambda(\breve{u}^{l-1},\breve{v})-G(\breve{v}))\quad\forall\breve{v}\in\breve{V},\tag{1.12.3}$$

$$\tau_{l-1}=\tau=2/(\breve{\gamma}_1+\breve{\gamma}_2)=2\lambda^2_{1,1}\big/(2\lambda^2_{1,1}+a_{\mathrm{II}}),\ l\in\mathbb{N}\ \forall\breve{u}^0\in\breve{V}.$$

Теорема 1.12.1. *Для итерационного процесса из (1.12.3) имеют место оценки:*

$$1.\ \left\|\breve{u}^l-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}\le\varepsilon\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}},$$

$$2.\ \left\|\breve{u}^l-\breve{u}\right\|_M\le\varepsilon\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_M,$$

где относительная ошибка сходимости u^l *к решению* u *следующая*

$$\varepsilon=q^l=\left((\breve{\gamma}_2-\breve{\gamma}_1)/(\breve{\gamma}_2+\breve{\gamma}_1)\right)^l=\left(a_{\mathrm{II}}\big/(2\lambda^2_{1,1}+a_{\mathrm{II}})\right)^l,\ l\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Введём оператор $\breve{R}$ из $\breve{V}$ в $\breve{V}$:

$$M(\breve{R}\breve{u},\breve{v})=\Lambda(\breve{u},\breve{v}),\ \forall\breve{u},\breve{v}\in\breve{V}.$$

Так как $\breve{\gamma}_1 M(\breve{v},\breve{v}) \le \Lambda(\breve{v},\breve{v}) \le \breve{\gamma}_2 M(\breve{v},\breve{v})$, то $\breve{\gamma}_1 M(\breve{v},\breve{v}) \le M(\breve{R}\breve{v},\breve{v}) \le \breve{\gamma}_2 M(\breve{v},\breve{v})$, т.е. $\breve{\gamma}_1 I \le \breve{R} \le \breve{\gamma}_2 I$. $\breve{R}-$ ограниченный и симметричный оператор. Заметим, что $\Lambda(\breve{R}^{-1}\breve{u},\breve{v}) = M(\breve{u},\breve{v})$. Пусть $\breve{u}^l = \breve{u} + \breve{\psi}^l$, $l \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, тогда из итерационного процесса имеем

$$M(\breve{\psi}^l - \breve{\psi}^{l-1},\breve{v}) = -\tau_{l-1}\Lambda(\breve{\psi}^{l-1},\breve{v}) \text{ и } \Lambda(\breve{R}^{-1}(\breve{\psi}^l - \breve{\psi}^{l-1}),\breve{v}) = -\tau_{l-1}\Lambda(\breve{\psi}^{l-1},\breve{v}),$$

отсюда

$$\breve{R}^{-1}(\breve{\psi}^l - \breve{\psi}^{l-1}) = -\tau_{l-1}\breve{\psi}^{l-1},\ \breve{\psi}^l = (I - \tau_{l-1}\breve{R})\breve{\psi}^{l-1}.$$

Пусть $\breve{T}_l = I - \tau_{l-1}\breve{R}$, тогда можно перейти к доказательству первого неравенства.

$$\Lambda(\breve{\psi}^l,\breve{\psi}^l) = \Lambda(\breve{T}_l\breve{\psi}^{l-1},\breve{T}_l\breve{\psi}^{l-1}) \le \sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}}\Big(\Lambda(\breve{T}_l\breve{\psi},\breve{T}_l\breve{\psi})/\Lambda(\breve{\psi},\breve{\psi})\Big)\Lambda(\breve{\psi}^{l-1},\breve{\psi}^{l-1}) =$$

так как оператор $\breve{T}_l$ симметричный

$$= \left(\sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}}\left(\frac{\Lambda(\breve{T}_l\breve{\psi},\breve{\psi})}{\Lambda(\breve{\psi},\breve{\psi})}\right)\right)^2 \Lambda(\breve{\psi}^{l-1},\breve{\psi}^{l-1}) = \left(\sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}}\left(1 - \tau_{l-1}\frac{\Lambda(\breve{R}\breve{\psi},\breve{\psi})}{\Lambda(\breve{\psi},\breve{\psi})}\right)\right)^2 \Lambda(\breve{\psi}^{l-1},\breve{\psi}^{l-1}) =$$

полагаем $\breve{v} = \breve{R}^{1/2}\breve{\psi}$

$$= \left(\sup_{\breve{v}\in\breve{V}}\left(1 - \tau_{l-1}\frac{\Lambda(\breve{v},\breve{v})}{\Lambda(\breve{R}^{-1}\breve{v},\breve{v})}\right)\right)^2 \Lambda(\breve{\psi}^{l-1},\breve{\psi}^{l-1}) = \left(\sup_{\breve{v}\in\breve{V}}\left(1 - \tau_{l-1}\frac{\Lambda(\breve{v},\breve{v})}{M(\breve{v},\breve{v})}\right)\right)^2 \Lambda(\breve{\psi}^{l-1},\breve{\psi}^{l-1}) \le$$

$$\le max\left\{\left(1 - \tau_{l-1}\breve{\gamma}_1\right)^2,\ \left(1 - \tau_{l-1}\breve{\gamma}_2\right)^2\right\}\Lambda(\breve{\psi}^{l-1},\breve{\psi}^{l-1})$$

отсюда

$$\Lambda(\breve{\psi}^l,\breve{\psi}^l) \le q^2\Lambda(\breve{\psi}^{l-1},\breve{\psi}^{l-1}),\ \left\|\breve{u}^l - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le q\left\|\breve{u}^{l-1} - \breve{u}\right\|_{\breve{V}},\ \left\|\breve{u}^l - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le q^l\left\|\breve{u}^0 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}}.$$

Теперь можно рассмотреть получение второго неравенства

$$M(\breve{\psi}^l,\breve{\psi}^l) = M(\breve{T}_l\breve{\psi}^{l-1},\breve{T}_l\breve{\psi}^{l-1}) \le \sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}}\Big(M(\breve{T}_l\breve{\psi},\breve{T}_l\breve{\psi})/M(\breve{\psi},\breve{\psi})\Big)M(\breve{\psi}^{l-1},\breve{\psi}^{l-1}) =$$

$$= \left(\sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}}\left(\frac{M(\breve{T}_l\breve{\psi},\breve{\psi})}{M(\breve{\psi},\breve{\psi})}\right)\right)^2 \mathrm{M}(\breve{\psi}^{l-1},\breve{\psi}^{l-1}) = \left(\sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}}\left(1 - \tau_{l-1}\frac{\Lambda(\breve{\psi},\breve{\psi})}{M(\breve{\psi},\breve{\psi})}\right)\right)^2 M(\breve{\psi}^{l-1},\breve{\psi}^{l-1}) \le$$

$$\le max\left\{\left(1 - \tau_{l-1}\breve{\gamma}_1\right)^2,\ \left(1 - \tau_{l-1}\breve{\gamma}_2\right)^2\right\}M(\breve{\psi}^{l-1},\breve{\psi}^{l-1})$$

отсюда

$$M(\breve{\psi}^l,\breve{\psi}^l)\le q^2M(\breve{\psi}^{l-1},\breve{\psi}^{l-1}),\ \left\|\breve{u}^l-\breve{u}\right\|_M\le q\left\|\breve{u}^{l-1}-\breve{u}\right\|_M,\ \left\|\breve{u}^l-\breve{u}\right\|_M\le q^l\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_M.$$

На каждом шаге итерационного процесса из (1.12.3) возникает задача вида

$$\breve{u}\in\breve{V}:M(\breve{u},\breve{v})=G(\breve{v})\ \forall\breve{v}\in\breve{V},\ G\in\breve{V}'. \qquad (1.12.4)$$

Заметим, основываясь на утверждении 1.12.2, что

$$\exists c_1,c_2\in(0;+\infty):\ c_1\left\|\breve{v}\right\|^2_{W_2^2(\Omega)}\le M(\breve{v},\breve{v})\le c_2\left\|\breve{v}\right\|^2_{W_2^2(\Omega)}\ \ \forall\breve{v}\in\breve{V},$$

а, следовательно, решение задачи из (1.12.4) существует и единственно. Если $\breve{g}$ – заданная, $\breve{u}$ – искомая достаточно гладкие функции, как и в задаче из (1.12.1) $G(\breve{v})=(\breve{g},\breve{v})$, то из задачи в (1.12.4) получается неоднородное бигармоническое уравнение при смешанных и однородных краевых условиях

$$\Delta^2\breve{u}=\breve{g},\ \breve{u}\big|_{\Gamma_1}=\Delta\breve{u}\big|_{\Gamma_1}=0,\ \frac{\partial\breve{u}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=\frac{\partial\Delta\breve{u}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=0. \qquad (1.12.5)$$

Видно, что задача из (1.12.5) имеет факторизованный оператор и может быть записана, как система эллиптических уравнений второго порядка при смешанных и однородных краевых условиях

$$-\Delta\breve{q}=\breve{g},\ \breve{q}\big|_{\Gamma_1}=0,\ \frac{\partial\breve{q}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=0,$$

$$-\Delta\breve{u}=\breve{q},\ \breve{u}\big|_{\Gamma_1}=0,\ \frac{\partial\breve{u}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=0. \qquad (1.12.6)$$

Производится дискретизация задачи из (1.12.1) по методу конечных элементов на параболических восполнениях [60], рассматривается вариационно-разностная система, например, перемещений прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях:

$$\tilde{u}\in\tilde{V}\subset\breve{V}:\Lambda(\tilde{u},\tilde{v})=G(\tilde{v})\ \forall\tilde{v}\in\tilde{V}\subset\breve{V}. \qquad (1.12.7)$$

Рассматриваются система линейных алгебраических уравнений, соответствующая задаче из (1.12.1), выбрав новую нумерацию узлов сетки:

$$\bar{u}\in\mathbb{R}^N:\ \Lambda\bar{u}=\bar{g},\ \bar{g}\in\mathbb{R}^N, \qquad (1.12.8)$$

где $\bar{v} \in \mathbb{R}^N$: $\bar{v} = (v_1, ..., v_N)'$, $N = m' \cdot n'$, $m' = m - 2, n' = n - 2 \in \mathbb{N}$, а $v_{n'(i-1)+j} = v_{i,j}$, $i = 1, ..., m'$, $j = 1, ..., n'$, и $v_{i,j}$ являются значениями функций дискретных аргументов соответствующих узлам сетки $(x_i, y_j) = \left((i - 0{,}5)h_1, (j - 0{,}5)h_2\right)$, шаги сетки $h_1 = b_1 / (m' + 0{,}5)$, $h_2 = b_2 / (n' + 0{,}5)$, состоящей из указанных выше узлов, а матрицы Λ размерности $N \times N$, определяются следующим образом:

$$\left\langle \Lambda \bar{u}, \bar{v} \right\rangle = \Lambda(\tilde{u}, \tilde{v}) \ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V} \subset \breve{V},$$

здесь $\left\langle \cdot, \cdot \right\rangle$ – скалярное произведение векторов такого вида $\left\langle \bar{u}, \bar{v} \right\rangle = \sum_{k=1}^{N} u_k v_k h_1 h_2$ $\forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^N$, а подпространство $\tilde{V} \subset \breve{V}$ определяется так, что

$$\tilde{V} = \left\{ \tilde{v} : \tilde{v} = \sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n} v_{i,j} \Phi^{i,j}(x, y), v_{i,j} \in \mathbb{R}, \right\},$$

где базисные функции

$$\Phi^{i,j}(x; y) = \Psi^{1,i}(x) \Psi^{2,j}(y),\ i = 1, ..., m',\ j = 1, ..., n',\ m', n' \in \mathbb{N},$$

$$\Psi^{1,i}(x) = [1/i] \Psi(x/h_1 - i + 3) + \Psi(x/h_1 - i + 2) - [i/m'] \Psi(x/h_1 - i),$$

$$\Psi^{2,j}(y) = [1/j] \Psi(y/h_2 - j + 3) + \Psi(y/h_2 - j + 2) + [j/n'] \Psi(y/h_2 - j),$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} 0{,}5z^2, & z \in [0;1], \\ -z^2 + 3z - 1{,}5, & z \in [1;2], \\ 0{,}5z^2 - 3z - 4{,}5, & z \in [2;3], \\ 0, & z \notin (0;3). \end{cases}$$

Полагаем, что значения у базисных функций вне прямоугольной области равны нулю

$$\Phi^{i,j}(x; y) = 0,\ (x; y) \notin \Pi,\ i = 1, ..., m',\ j = 1, ..., n,\ m', n' \in \mathbb{N}.$$

Компоненты вектора $\bar{g}$ определяются следующим образом

$$g_{n'(i-1)+j} = g_{i,j} = h_1^{-1} h_2^{-1} G(\Phi^{i,j}(x, y)),\ i = 1, ..., m',\ j = 1, ..., n',$$

т.е. $\left\langle \bar{g}, \bar{v} \right\rangle = G(\tilde{v})$ $\forall \tilde{v} \in \tilde{V}$.

Отметим, что решение задачи из (1.12.8), как и решение задачи из (1.12.7) существует, единственно и известны оценки типа [60]:

$$1.\ \|\breve{u}-\tilde{u}\|_{W_2^{m_1}(\Pi)} \le ch^{m_2-m_1}\|\breve{u}\|_{W_2^{m_2}(\Pi)},$$

$$2.\ \lim_{h\to 0}\|\breve{u}-\tilde{u}\|_{W_2^{2}(\Pi)} = 0,\ h=\max\{h_1,h_2\}.$$

Также зададим матрицы порождаемые, как и ранее соответствующими билинейными формами

$$\langle \Lambda_{\mathrm{I}}\bar{u},\bar{v}\rangle = \Lambda_1(\tilde{u},\tilde{v}),\ \langle \Lambda_{\mathrm{II}}\bar{u},\bar{v}\rangle = \Lambda_{\mathrm{II}}(\tilde{u},\tilde{v})\ \forall \tilde{u},\tilde{v}\in\tilde{V}$$

Такие, что

$$\Lambda = \Lambda_{\mathrm{I}} + \Lambda_{\mathrm{II}}$$

Опишем численный метод итерационных факторизаций. Определим матрицы ∇_x, ∇_y размерности $N\times N$

$$\langle \nabla_x\bar{u},\bar{v}\rangle = \sum_{i=1}^{m'}\sum_{j=1}^{n'}(-(u_{i+1,j}-u_{i,j})h_1^{-1})v_{i,j}h_1h_2,\ u_{m'+1,j}=v_{m'+1,j}=0,\ \ j=1,...,n',$$

$$\langle \nabla_y\bar{u},\bar{v}\rangle = \sum_{i=1}^{m'}\sum_{j=1}^{n'}(-(u_{i,j+1}-u_{i,j})h_2^{-1})v_{i,j}h_1h_2,\ u_{i,n'+1}=v_{i,n'+1}=0,\ i=1,...,m'.$$

Дополнительно введём матрицы ∇_1 и ∇_2 размерности $m'\times m'$ и $n'\times n'$ соответственно

$$(\nabla_1\bar{u},\bar{v}) = \sum_{i=1}^{m'}(-(u_{i+1}-u_i)h_1^{-1})v_i,\ u_{m'+1}=v_{m'+1}=0,$$

$$(\nabla_2\bar{u},\bar{v}) = \sum_{j=1}^{n'}(-(u_{j+1}-u_j)h_2^{-1})v_j,\ u_{n'+1}=v_{n'+1}=0.$$

Они связанны с предыдущими матрицами следующим образом

$$\nabla_x = \nabla_1\otimes E_{n'},\ \nabla_y = E_{m'}\otimes\nabla_2.$$

Здесь $E_{m'}$ и $E_{n'}$ единичные матрицы размерности $m'\times m'$ и $n'\times n'$ соответственно, а $(\cdot,\cdot)$ обычное скалярное произведение векторов. Определим матрицу

$$\langle A\bar{u},\bar{v}\rangle = \sum_{i=1}^{m'}\sum_{j=1}^{n'}((u_{i+1,j}-u_{i,j})(v_{i+1,j}-v_{i,j})h_1^{-2}+(u_{i,j+1}-u_{i,j})(v_{i,j+1}-v_{i,j})h_2^{-2})h_1h_2,$$

$$u_{i,n'+1}=v_{i,n'+1}=0,\ i=1,...,m,\ u_{m'+1,j}=v_{m'+1,j}=0,\ j=1,...,n'.$$

Заметим, что

$$A = \nabla_x{}'\nabla_x + \nabla_y{}'\nabla_y = (\nabla_1 \otimes E_{n'})'(\nabla_1 \otimes E_{n'}) + (E_{m'} \otimes \nabla_2)'(E_{m'} \otimes \nabla_2) =$$
$$= (\nabla_1{}'\nabla_1) \otimes E_{n'} + E_{m'} \otimes (\nabla_2{}'\nabla_2).$$

Дополнительно введём матрицы $\Delta_1 = \nabla_1{}'\nabla_1$ и $\Delta_2 = \nabla_2{}'\nabla_2$ размерности $m' \times m'$ и $n' \times n'$ соответственно, тогда $A = \Delta_1 \otimes E_{n'} + E_{m'} \otimes \Delta_2$. Отметим, что

$$A^2 = (\Delta_1 \otimes E_{n'} + E_{m'} \otimes \Delta_2)^2 = \Delta_1^2 \otimes E_{n'} + 2\Delta_1 \otimes \Delta_2 + E_{m'} \otimes \Delta_2^2.$$

Матрицу Λ_0 представим в виде $\Lambda_0 = \Lambda^{2,0} + 2\Lambda^{1,1} + \Lambda^{0,2}$, где матрицы $\Lambda^{p,q}$:

$$\left\langle \Lambda^{p,q}\overline{u}, \overline{v} \right\rangle = \int_\Pi \tilde{u}_{x^p x^q} \tilde{v}_{x^p x^q} d\Omega \;\; \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}, \; (p,q) \in \{(2,0), (1,1), (0,2), (0,0)\}.$$

Дополнительно введём матрицы $\Lambda^{x,p}$, $\Lambda^{y,q}$, $p,q = 0,1,2$ размерности $m' \times m'$ и $n' \times n'$ соответственно, а элементы, которых следующие

$$\Lambda_{k,i}^{x,p} = h_1^{-1} \int_0^{b_1} \Psi_{1,k}^{(p)}(x)\Psi_{1,i}^{(p)}(x)dx, \; k,i = 1,\ldots,m', \; \Lambda_{l,j}^{y,q} = h_2^{-1} \int_0^{b_2} \Psi_{2,l}^{(q)}(y)\Psi_{2,j}^{(q)}(y)dy, \; l,j = 1,\ldots,n'.$$

Утверждение 1.12.3. *Имеют место формулы* $\Lambda^{p,q} = \Lambda^{x,p} \otimes \Lambda^{y,q}$, $p,q = 0,1,2$.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\Lambda_{n(k-1)+l, n(i-1)+j}^{p,q} = h_1^{-1} h_2^{-1} \int_\Omega \Phi_{x^p, y^q}^{k,l}(x,y) \Phi_{x^p, y^q}^{i,j}(x,y) d\Omega =$$

$$= h_1^{-1} \int_0^{b_1} \Psi_{1,k}^{(p)}(x)\Psi_{1,i}^{(p)}(x)dx h_2^{-1} \int_0^{b_2} \Psi_{2,l}^{(q)}(y)\Psi_{2,j}^{(q)}(y)dy = \Lambda_{k,i}^{x,p} \Lambda_{l,j}^{y,q}.$$

Замечание 1.12.1. *Имеет место*

$$\Lambda_0 = \Lambda^{x,2} \otimes \Lambda^{y,0} + 2\Lambda^{x,1} \otimes \Lambda^{y,1} + \Lambda^{x,0} \otimes \Lambda^{y,2} \; \text{и} \; \Lambda^{x,2} = \Delta_1^2, \; \Lambda^{y,2} = \Delta_2^2, \text{ т.е.}$$

$$\Lambda_0 = \Delta_1^2 \otimes \Lambda^{y,0} + 2\Lambda^{x,1} \otimes \Lambda^{y,1} + \Lambda^{x,0} \otimes \Delta_2^2.$$

Замечание 1.12.2. *Для любых, здесь* $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^{m'}$ *имеет место равенство*

$$(\Lambda^{x,0}\overline{u}, \overline{v}) = \left(\Lambda_1^{x,0}(u_1,u_2)', (v_1,v_2)'\right) +$$
$$+ \sum_{i=2}^{m'-1} \left(\Lambda_i^{x,0}(u_{i-1},u_i,u_{i+1})', (v_{i-1},v_i,v_{i+1})'\right) + \left(\Lambda_{m'}^{x,0}(u_{m'-1},u_{m'})', (v_{m'-1},v_{m'})'\right),$$

где, используемые выше матрицы следующие

$$\Lambda_1^{x,0}=\frac{1}{120}\begin{bmatrix}86 & 14\\ 14 & 6\end{bmatrix},\ \Lambda_{m'}^{x,0}=\frac{1}{120}\begin{bmatrix}6 & 13\\ 13 & 59\end{bmatrix},\ \Lambda_i^{x,0}=\frac{1}{120}\begin{bmatrix}6 & 13 & 1\\ 13 & 54 & 13\\ 1 & 13 & 6\end{bmatrix}, i=2,...,m'-1.$$

Утверждение 1.12.4. *Видно, что* $\lambda_1=1/16$, $\lambda_2=1/6$, $\lambda_3=1$, *если*

$$\lambda:\Lambda_i^{x,0}(v_{i-1},v_i,v_{i+1})'=\lambda E_i^x(v_{i-1},v_i,v_{i+1})',\ (v_{i-1},v_i,v_{i+1})'\neq 0,\ i=2,...,m'-1,$$

E_i^x *диагональные матрицы, где на диагонали первый и последний элементы* $1/6$, *а средний* $2/3$.

Утверждение 1.12.5. *Для спектральной задачи* $\lambda:\Lambda_1^{x,0}(v_1,v_2)'=\lambda E_i^x(v_1,v_2)'$, $(v_1,v_2)'\neq 0$ *собственные числа* $\lambda_1=4/25$, $\lambda_2=1$, *здесь* E_1^x *диагональная матрица, у которой на диагонали первый элемент* $5/6$, *а второй элемент, он же и последний* $1/6$.

Утверждение 1.12.6. *Для задачи* $\lambda:\Lambda_{m'}^{x,0}(v_{m'-1},v_{m'})'=\lambda E_{m'}(v_{m'-1},v_{m'})'$, $(v_{m'-1},v_{m'})'\neq 0$ *собственные числа* $0<\lambda_{1,2}=(89\pm 3\sqrt{469})/200<1$, *здесь* E_1^x *диагональная матрица, у которой на диагонали первый элемент* $1/6$, *а второй элемент, он же и последний* $5/6$.

Введём вспомогательные матрицы ∇_1^+, Δ_1^+ размерности $m'\times m'$:

$$\Delta_1^+=(\nabla_1^+)'\nabla_1^+>0,$$

$$(\nabla_1^+\overline{u},\overline{v})=\sum_{i=1}^{m'}(u_{i+1}+u_i)v_i,\ (\Delta_1^+\overline{u},\overline{v})=\sum_{i=1}^{m'}(u_{i+1}+u_i)(v_{i+1}+v_i),\ u_{m'+1}=v_{m'+1}=0$$

и матрицу δ^1 размерности $m'\times m'$ с элементами

$$\delta_{i,j}^1=\mathrm{E}(2/(i+j)),\ i,j=1,...,m'.$$

Утверждение 1.12.7. *Имеют место неравенства*

$$2/15E_{m'}\le\Lambda^{x,0}\le E_{m'}\ \left(2/15E_{n'}\le\Lambda^{x,0}\le E_{n'}\right).$$

Доказательство. Правое неравенство следует из замечания 1.12.2 и утверждений 1.12.4, 1.12.5, 1.12.6, т.к.

$$(E_m\bar{u},\bar{v})=\left(E_1^x(u_1,u_2)',(v_1,v_2)'\right)+$$
$$+\sum_{i=2}^{m'-1}\left(E_i^x(u_{i-1},u_i,u_{i+1})',(v_{i-1},v_i,v_{i+1})'\right)+\left(E_{m'}^x(u_{m'-1},u_{m'})',(v_{m'-1},v_{m'})'\right).$$

Используя известный приём [17], имеем, что

$$120\Lambda^{x,0}\geq 120\Lambda^{x,0}-(\Delta_1^+ +2\delta^1)^2-22(\Delta_1^+ +2\delta^1)=16E_{m'}.$$

Замечание 1.12.3. *Для любых, здесь* $\bar{u},\bar{v}\in\mathbb{R}^{m'}$ *имеет место равенство*

$$(\Lambda^{x,1}\bar{u},\bar{v})=\left(\Lambda_1^{x,1}(u_1,u_2)',(v_1,v_2)'\right)+$$
$$+\sum_{i=2}^{m'-1}\left(\Lambda_i^{x,1}(u_{i-1},u_i,u_{i+1})',(v_{i-1},v_i,v_{i+1})'\right)+\left(\Lambda_{m'}^{x,1}(u_{m'-1},u_{m'})',(v_{m'-1},v_{m'})'\right),$$

где, используемые выше матрицы следующие

$$\Lambda_1^{x,1}=\frac{h_1^{-2}}{3}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix},\ \Lambda_{m'}^{x,1}=\frac{h_1^{-2}}{6}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&5\end{bmatrix},\ \Lambda_i^{x,1}=\frac{h_1^{-2}}{6}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix},\ i=2,...,m'-1.$$

Утверждение 1.12.8. *Имеют место неравенства*

$$\frac{1}{3}\Delta_i^x\leq\Lambda_i^{x,1}\leq\Delta_i^x,\ \textit{где}\ \Delta_i^x=\frac{h_1^{-2}}{2}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix},\ i=2,...,m'-1.$$

Доказательство. Имеем $6h_1^2(\Lambda_i^{x,1}-1/3\Delta_i^x)\geq 0$, т.к.

$$(v_{i-1}^2-2v_{i-1}v_{i+1}+v_{i+1}^2)=(v_{i-1}-v_{i+1})^2\geq 0.$$

Видно, что $6h_1^2(\Delta_i^x-\Lambda_i^{x,1})\geq 0$, т.к.

$$v_{i-1}^2-4v_{i-1}v_i+4v_i^2-4v_iv_{i+1}+2v_{i-1}v_{i+1}+v_{i+1}^2=(v_{i-1}-2v_i+v_{i+1})^2\geq 0.$$

Замечание 1.12.4. *Имеет место равенство* $\frac{2}{3}\Delta_1^x=\Lambda_1^{x,1}$, *где* $\Delta_1^x=\frac{h_1^{-2}}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$.

Утверждение 1.12.9. *Имеют место неравенства*

$$\frac{1}{2}\Delta_{m'}^x\leq\Lambda_{m'}^{x,1}\leq\Delta_{m'}^x,\ \textit{где}\ \Delta_m^x=\frac{h_1^{-2}}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&3\end{bmatrix}.$$

Доказательство. Имеем $12h_1^2(\Lambda_i^{x,1} - 1/2\Delta_i^x) \ge 0$, т.к.

$$(v_{m'-1}^2 - 2v_{m'-1}v_{m'} + v_{m'}^2) = (v_{m'-1} - v_{m'})^2 \ge 0.$$

Видно, что $6h_1^2(\Delta_{m'}^x - \Lambda_{m'}^{x,1}) \ge 0$, т.к. $(v_{m'-1}^2 - 4v_{m'-1}v_{m'} + 4v_{m'}^2) = (v_{m'-1} - 2v_{m'})^2 \ge 0$.

Следствие 1.12.1. *Имеют место неравенства*

$$3^{-1}\Delta_1 \le \Lambda^{x,1} \le \Delta_1 \left(3^{-1}\Delta_2 \le \Lambda^{y,1} \le \Delta_2 \right).$$

Доказательство. Следует из замечаний 1.12.3, 1.12.4 и утверждений 1.12.8, 1.12.9, т.к.

$$(\Delta_1\bar{u},\bar{v}) = \left(\Delta_1^x(u_1,u_2)',(v_1,v_2)'\right) +$$

$$+\sum_{i=2}^{m'-1}\left(\Delta_i^x(u_{i-1},u_i,u_{i+1})',(v_{i-1},v_i,v_{i+1})'\right) + \left(\Delta_{m'}^x(u_{m'-1},u_{m'})',(v_{m'-1},v_{m'})'\right).$$

Утверждение 1.12.10. *Имеют место следующие неравенства*

1. $9^{-1}\Delta_1 \otimes \Delta_2 \le \Lambda^{x,1} \otimes \Lambda^{x,1} \le \Delta_1 \otimes \Delta_2$,
2. $2/15\Delta_1^2 \otimes E_{n'} \le \Delta_1^2 \otimes \Lambda^{y,0} \le \Delta_1^2 \otimes E_{n'}$,
3. $2/15E_{m'} \otimes \Delta_2^2 \le \Lambda^{x,0} \otimes \Delta_2^2 \le E_{m'} \otimes \Delta_2^2$.

Доказательство. Если $\mu \in \mathbb{R}$: $\Lambda^{x,1}\bar{v} = \mu\Delta_1\bar{v}$, здесь $\bar{v} \in \mathbb{R}^{m'}, \bar{v} \ne \bar{0}$ `и $\eta \in \mathbb{R}$: $\Lambda^{y,1}\bar{w} = \eta\Delta_2\bar{w}$, здесь $\bar{w} \in \mathbb{R}^{n'}$, $\bar{w} \ne \bar{0}$, то, учитывая следствие 1, $\mu,\eta \in \left[3^{-1};1\right]$. Если $\lambda \in \mathbb{R}$: $\Lambda^{x,1} \otimes \Lambda^{y,1}\bar{u} = \lambda\Delta_1 \otimes \Delta_2\bar{u}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^N, \bar{u} \ne \bar{0}$, то, см. [7, 38] $\bar{u} = \bar{v} \otimes \bar{w}$ и $\lambda = \mu\eta \in \left[9^{-1};1\right]$, следовательно, имеет место 1., т.к. все рассматриваемые матрицы симметричные и положительно определенные. Аналогично доказываются остальные неравенства.

Следствие 1.12.2. *Имеют место следующие неравенства* $\widehat{k}_1 A^2 \le \Lambda \le \widehat{k}_2 A^2$, *если*

$$\widehat{k}_1 = 9^{-1}\breve{\gamma}_1 = 9^{-1},\ \widehat{k}_2 = \breve{\gamma}_2 = (\lambda_{1,1}^2 + a_{\text{II}})/\lambda_{1,1}^2.$$

Доказательство. Из утверждений 1.12.2, 1.12.10 и замечания 1.12.1 получаются требуемые неравенства

$$\widehat{k}_1\left\langle A^2\bar{v},\bar{v}\right\rangle \le \breve{\gamma}_1\left\langle\Lambda_0\bar{v},\bar{v}\right\rangle = \breve{\gamma}_1\Lambda_0(\tilde{v},\tilde{v}) \le \Lambda(\tilde{v},\tilde{v}) = \left\langle\Lambda\bar{v},\bar{v}\right\rangle =$$

$$=\Lambda(\tilde{v},\tilde{v})\le\breve{\gamma}_2\Lambda_0(\tilde{v},\tilde{v})=\breve{\gamma}_2\left\langle\Lambda_0\bar{v},\bar{v}\right\rangle\le\widehat{k}_2\left\langle A^2\bar{v},\bar{v}\right\rangle.$$

Введём нормы $\|\bar{v}\|_{A^2}=\sqrt{\left\langle A^2\bar{v},\bar{v}\right\rangle}$, $\|\bar{v}\|_{\Lambda}=\sqrt{\left\langle \Lambda\bar{v},\bar{v}\right\rangle}$, $\forall\bar{v}\in\mathbb{R}^N$.

Предлагается итерационный процесс, численный метод приближённого вычисления перемещений прямоугольной пластины на упругом основании при смешанных краевых условиях:

$$\bar{u}^l\in\mathbb{R}^N:\ A^2(\bar{u}^l-\bar{u}^{l-1})=-\tau_{l-1}(\Lambda\bar{u}^{l-1}-\bar{g}),$$

$$\tau_{l-1}=\tau=2\Big/\left(\widehat{k}_1+\widehat{k}_2\right)>0,\ l\in\mathbb{N},\ \forall\bar{u}^0\in\mathbb{R}^N. \tag{1.12.9}$$

Теорема 1.12.2. *Для итерационного процесса из* (1.12.9) *имеют место оценки:*

1. $\|\bar{u}^l-\bar{u}\|_{\Lambda}\le\varepsilon\|\bar{u}^0-\bar{u}\|_{\Lambda}$,

2. $\|\bar{u}^l-\bar{u}\|_{A^2}\le\varepsilon\|\bar{u}^0-\bar{u}\|_{A^2}$,

где относительная ошибка сходимости $\bar{u}^l$ *к решению* $\bar{u}$ *следующая*

$$\varepsilon\le q^l=\left((\widehat{k}_2-\widehat{k}_1)\big/(\widehat{k}_2+\widehat{k}_1)\right)^l=\left((8\lambda_{1,1}^2+9a_{\text{II}})\big/(10\lambda_{1,1}^2+9a_{\text{II}})\right)^l,\ l\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть $\bar{u}^l=\bar{u}+\bar{\psi}^l$, $l\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, тогда из итерационного процесса

$$A^2(\bar{\psi}^l-\bar{\psi}^{l-1})=-\tau_{l-1}\Lambda\bar{\psi}^{l-1},\ \bar{\psi}^l-\bar{\psi}^{l-1}=-\tau_{l-1}A^{-2}\Lambda\bar{\psi}^{l-1},\ \bar{\psi}^k=(E_N-\tau_{l-1}A^{-2}\Lambda)\bar{\psi}^{l-1},$$

где E_N – единичная матрица размерности $N\times N$.

Пусть $T_l=E_N-\tau_{l-1}A^{-2}\Lambda$, тогда $\bar{\psi}^l=T_l\bar{\psi}^{l-1}$, где $T_l=T_l'>0$ и можно доказать первое неравенство

$$\left\langle\Lambda\bar{\psi}^l,\bar{\psi}^l\right\rangle=\left\langle\Lambda T_l\bar{\psi}^{l-1},T_l\bar{\psi}^{l-1}\right\rangle\le\sup_{\bar{\psi}\in\mathbb{R}^N}\left(\left\langle\Lambda T_l\bar{\psi},T_l\bar{\psi}\right\rangle\big/\left\langle\Lambda\bar{\psi},\bar{\psi}\right\rangle\right)\left\langle\Lambda\bar{\psi}^{l-1},\bar{\psi}^{l-1}\right\rangle=$$

$$=\sup_{\bar{\psi}\in\mathbb{R}^N}\left(\frac{\left\langle\Lambda T_l\bar{\psi},\bar{\psi}\right\rangle}{\left\langle\Lambda\bar{\psi},\bar{\psi}\right\rangle}\right)^2\left\langle\Lambda\bar{\psi}^{l-1},\bar{\psi}^{l-1}\right\rangle=\sup_{\bar{\psi}\in\mathbb{R}^N}\left(1-\tau_{l-1}\frac{\left\langle\Lambda A^{-2}\Lambda\bar{\psi},\bar{\psi}\right\rangle}{\left\langle\Lambda\bar{\psi},\bar{\psi}\right\rangle}\right)^2\left\langle\Lambda\bar{\psi}^{l-1},\bar{\psi}^{l-1}\right\rangle=$$

полагаем $\bar{v}=A^{-1}\Lambda^{1/2}\bar{\psi}$

$$=\sup_{\bar{v}\in\mathbb{R}^N}\left(1-\tau_{l-1}\left\langle\Lambda\bar{v},\bar{v}\right\rangle\big/\left\langle A^2\bar{v},\bar{v}\right\rangle\right)^2\left\langle\Lambda\bar{\psi}^{l-1},\bar{\psi}^{l-1}\right\rangle\le$$

$$\leq max\left\{\left(1-\tau_{l-1}\widehat{k}_1\right)^2,\ \left(1-\tau_{l-1}\widehat{k}_2\right)^2\right\}\left\langle\Lambda\overline{\psi}^{l-1},\overline{\psi}^{l-1}\right\rangle$$

отсюда

$$\left\langle\Lambda\overline{\psi}^{l},\overline{\psi}^{l}\right\rangle\leq q^2\left\langle\Lambda\overline{\psi}^{l-1},\overline{\psi}^{l-1}\right\rangle,\ \left\|\overline{u}^{l}-\overline{u}\right\|_{\Lambda}\leq q\left\|\overline{u}^{l-1}-\overline{u}\right\|_{\Lambda},\ \left\|\overline{u}^{l}-\overline{u}\right\|_{\Lambda}\leq q^{l}\left\|\overline{u}^{0}-\overline{u}\right\|_{\Lambda}.$$

Далее можно привести вывод второго неравенства

$$\left\langle A^2\overline{\psi}^{l},\overline{\psi}^{l}\right\rangle=\left\langle A^2T_l\overline{\psi}^{l-1},T_l\overline{\psi}^{l-1}\right\rangle\leq\sup_{\overline{\psi}\in\mathbb{R}^N}\left(\left\langle A^2T_l\overline{\psi},T_l\overline{\psi}\right\rangle\Big/\left\langle A^2\overline{\psi},\overline{\psi}\right\rangle\right)\left\langle A^2\overline{\psi}^{l-1},\overline{\psi}^{l-1}\right\rangle=$$

$$=\sup_{\overline{\psi}\in\mathbb{R}^N}\left(\frac{\left\langle A^2T_l\overline{\psi},\overline{\psi}\right\rangle}{\left\langle A^2\overline{\psi},\overline{\psi}\right\rangle}\right)^2\left\langle A^2\overline{\psi}^{l-1},\overline{\psi}^{l-1}\right\rangle=\sup_{\overline{\psi}\in\mathbb{R}^N}\left(1-\tau_{l-1}\frac{\left\langle\Lambda\overline{\psi},\overline{\psi}\right\rangle}{\left\langle A^2\overline{\psi},\overline{\psi}\right\rangle}\right)^2\left\langle A^2\overline{\psi}^{l-1},\overline{\psi}^{l-1}\right\rangle\leq$$

$$\leq max\left\{\left(1-\tau_{l-1}\widehat{k}_1\right)^2,\ \left(1-\tau_{l-1}\widehat{k}_2\right)^2\right\}\left\langle A^2\overline{\psi}^{l-1},\overline{\psi}^{l-1}\right\rangle$$

тогда

$$\left\langle A^2\overline{\psi}^{l},\overline{\psi}^{l}\right\rangle\leq q^2\left\langle A^2\overline{\psi}^{l-1},\overline{\psi}^{l-1}\right\rangle,\ \left\|\overline{u}^{l}-\overline{u}\right\|_{A^2}\leq q\left\|\overline{u}^{l-1}-\overline{u}\right\|_{A^2},\ \left\|\overline{u}^{l}-\overline{u}\right\|_{A^2}\leq q^{l}\left\|\overline{u}^{0}-\overline{u}\right\|_{A^2}.$$

Рассмотрим матрицу

$$C=\Lambda_{\mathrm{I}}+\gamma\Lambda_{\mathrm{II}},\ \gamma\in(0;+\infty),$$

которая с точностью до перенумерации строк совпадает с матрицей, возникающей на каждом шаге метода итерационных расширений, на пространстве Евклида (1.8.1) в задаче вида

$$\overline{u}\in\mathbb{R}^N:\ C\overline{u}=\overline{g},\ \overline{g}\in\mathbb{R}^N. \qquad (1.12.10)$$

Заметим, что

$$k_1A^2=\widehat{k}_1A^2\leq\Lambda=\Lambda_{\mathrm{I}}+\Lambda_{\mathrm{II}}\leq\Lambda_{\mathrm{I}}+\gamma\Lambda_{\mathrm{II}}=C=\Lambda_{\mathrm{I}}+\gamma\Lambda_{\mathrm{II}}\leq$$

$$\leq\gamma\Lambda_{\mathrm{I}}+\gamma\Lambda_{\mathrm{II}}=\gamma\Lambda\leq\gamma\widehat{k}_2A^2=k_2A^2,\ \gamma\in[1;+\infty),$$

$$k_1A^2=\gamma\widehat{k}_1A^2\leq\gamma\Lambda=\gamma\Lambda_{\mathrm{I}}+\gamma\Lambda_{\mathrm{II}}\leq\Lambda_{\mathrm{I}}+\gamma\Lambda_{\mathrm{II}}=C=\Lambda_{\mathrm{I}}+\gamma\Lambda_{\mathrm{II}}\leq$$

$$\leq\Lambda_{\mathrm{I}}+\Lambda_{\mathrm{II}}=\Lambda\leq\widehat{k}_2A^2=k_2A^2,\ \gamma\in(0;1],$$

где

$$k_1=9^{-1}\min\{1,\gamma\},\ k_2=\max\{1,\gamma\}(\lambda_{1,1}^2+a_{\mathrm{II}})\big/\lambda_{1,1}^2.$$

Приведем итерационный процесс метода итерационных факторизаций для решения расширенной задачи на пространстве Евклида (1.12.8)

$$\overline{u}^l \in \mathbb{R}^N: \ A^2(\overline{u}^l - \overline{u}^{l-1}) = -\tau_{l-1}(C\overline{u}^{l-1} - \overline{g}),$$

$$\tau_{l-1} = \tau = 2\big/\left(k_1 + k_2\right) > 0, \ l \in \mathbb{N}, \ \forall \overline{u}^0 \in \mathbb{R}^N. \qquad (1.12.11)$$

Следствие 1.12.3. *Для итерационного процесса из (1.12.11) имеют место оценки:*

$$1. \ \left\|\overline{u}^l - \overline{u}\right\|_C \le \varepsilon \left\|\overline{u}^0 - \overline{u}\right\|_C,$$

$$2. \ \left\|\overline{u}^l - \overline{u}\right\|_{A^2} \le \varepsilon \left\|\overline{u}^0 - \overline{u}\right\|_{A^2},$$

где относительная ошибка сходимости $\overline{u}^l$ *к решению* $\overline{u}$ *следующая*

$$\varepsilon \le q^l, \ l \in \mathbb{N}, \ q = (k_2 - k_1)/(k_2 + k_1),$$

$$k_1 = 9^{-1}\min\{1, \gamma\}, \ k_2 = \max\{1, \gamma\}(\lambda_{1,1}^2 + a_{\mathrm{II}})\big/\lambda_{1,1}^2.$$

Приведем алгоритм для реализации метода итерационных факторизаций для решения расширенной задачи на пространстве Евклида. Рассматривается задача из (1.12.10) вида

$$\overline{u} \in \mathbb{R}^N: \ C\overline{u} = \overline{g}, \ \overline{g} \in \mathbb{R}^N$$

и итерационный процесс из (1.12.11) для её решения

$$\overline{u}^l \in \mathbb{R}^N: \ A^2(\overline{u}^l - \overline{u}^{l-1}) = -\tau_{l-1}(C\overline{u}^{l-1} - \overline{g}),$$

$$\tau_{l-1} > 0, \ l \in \mathbb{N}, \ \forall \overline{u}^0 \in \mathbb{R}^N.$$

Для выбора итерационных параметров на вариационной основе применяется метод минимальных поправок из [68, 71]. Для рассматриваемой задачи и итерационного процесса, тогда предлагается следующий алгоритм вычислений:

I. Выбирается нулевое начальное приближение $\forall \overline{u}^0 \in \mathbb{R}^N$.

II. Вычисляется невязка

$$\overline{r}^{l-1} : \overline{r}^{l-1} = C\overline{u}^{l-1} - \overline{g}, \ l \in \mathbb{N}.$$

III. Находится поправка

$$\overline{w}^{l-1} \in \mathbb{R}^N: \ A^2\overline{w}^{l-1} = \overline{r}^{l-1}, \ l \in \mathbb{N}.$$

IV. Вычисляется квадрат нормы ошибки

$$e_{l-1} = \left\|\overline{\psi}^{l-1}\right\|^2_{C'A^{-2}C} = \left\langle \overline{r}^{\,l-1}, \overline{w}^{l-1} \right\rangle, \, l \in \mathbb{N}.$$

V. Проверяется условие остановки итераций

$$e_{l-1} \le e^2 e_0, \, e \in (0;1), \, l \in \mathbb{N}.$$

VI. Дополнительно вычисляется вектор

$$\overline{\eta}^{\,l-1} : \overline{\eta}^{\,l-1} = C\overline{w}^{l-1}, \, l \in \mathbb{N}.$$

VII. Дополнительно находится вектор

$$\overline{\xi}^{\,l-1} \in \mathbb{R}^N : \; A^2 \overline{\xi}^{\,k-1} = \overline{\eta}^{\,l-1}, \, l \in \mathbb{N}.$$

VIII. Вычисляется итерационный параметр

$$\tau_{l-1} = \frac{\left\langle C\overline{w}^{l-1}, \overline{w}^{l-1} \right\rangle}{\left\langle A^{-2} C\overline{w}^{l-1}, C\overline{w}^{l-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \overline{\eta}^{\,l-1}, \overline{w}^{l-1} \right\rangle}{\left\langle \overline{\xi}^{\,l-1}, \overline{\eta}^{\,l-1} \right\rangle}, \, l \in \mathbb{N}.$$

IX. Вычисляется новое приближение

$$\overline{u}^{\,l} = \overline{u}^{\,l-1} - \tau_{l-1} \overline{w}^{l-1}, \; l \in \mathbb{N}.$$

Заметим в условии остановки итерационного процесса $e \in (0;1) -$задаваемая относительная погрешность. Можно использовать критерии окончания итерационных процессов из [56].

На каждом шаге итерационного процесса из (1.12.11) возникает задача вида:

$$\overline{u} \in \mathbb{R}^N : \; A^2 \overline{u} = \overline{g}\,, \; \overline{g} \in \mathbb{R}^N \tag{1.12.12}$$

для которой возможно расщепление на две однотипные задачи

$$\overline{q} \in \mathbb{R}^N : \; A\overline{q} = \overline{g}\,, \; \overline{g} \in \mathbb{R}^N,$$

$$\overline{u} \in \mathbb{R}^N : \; A\overline{u} = \overline{q}\,, \; \overline{q} \in \mathbb{R}^N\,. \tag{1.12.13}$$

Для решения задач из (1.12.13) можно применять известные прямые маршевы методы оптимальные по количеству арифметических операций. В этом случае предполагается использование итерационных процессов [18], где итерационные параметры могут выбираться с помощью наиболее подходящих в каждом случае вариационных методов для достижения необходимой точности в решениях рассматриваемой задач, при этом не требуется точного знания констант k_1, k_2.

При решении рассматриваемой задачи для выбора итерационных параметров можно применить метод минимальных поправок, скорейшего спуска и минимальных невязок.

Вывод. Учитывая всё ранее изложенное, можно отметить, что для решения рассматриваемой задачи из (1.12.10) с N неизвестными на основании следствия (1.12.3) предложенным итерационным процессом из (1.12.11) с относительной погрешностью ε, требуется не более чем $\mathrm{O}(N\ln\varepsilon)$ арифметических операций.

1.13. Бигармоническая система в пространстве в Соболева на единичном квадрате

Пусть задана первая ограниченная плоская область и выбирается вторая ограниченная плоская область

$$\Omega_{\omega}\subset\mathbb{R}^2,\ \omega\in\{1,\mathrm{II}\}.$$

Требуется, чтобы пересечение этих областей было пусто, а объединение их замыканий было замыканием прямоугольной области

$$\Omega_1\cap\Omega_{\mathrm{II}}=\varnothing,\ \bar{\Omega}_1\cup\bar{\Omega}_{\mathrm{II}}=\bar{\Pi}.$$

У каждой из этих трех областей граница состоит из замыкания объединения открытых непересекающихся частей

$$\partial\Pi=\bar{s},\ s=\Gamma_1\cup\Gamma_2,\ \Gamma_1\cap\Gamma_2=\varnothing,$$

$$\partial\Omega_1=\bar{s}_1,\ \partial\Omega_{\mathrm{II}}=\bar{s}_{\mathrm{II}},\ s_1=\Gamma_{1,0},\ s_{\mathrm{II}}=\Gamma_{\mathrm{II},1}\cup\Gamma_{\mathrm{II},2}\cup\Gamma_{\mathrm{II},3},\ \Gamma_{1,0}\cap\Gamma_{\mathrm{II},3}\neq\varnothing.$$

Полагаем, что пересечение границ первой и второй области является замыканием непустого пересечения границы первой области с частью границы второй области

$$\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_{\mathrm{II}}=\bar{S},\ S=\Gamma_{1,0}\cap\Gamma_{\mathrm{II},3}\neq\varnothing.$$

Все рассматриваемые части границ у всех областей являются объединением конечного числа непересекающихся открытых дуг достаточно гладких кривых. Рассматриваются области границы, которых не имеют самопересечений и самокасаний.

Рассматриваются следующие области в прямоугольной системе координат

$$\Omega_1=(1;2)\times(1;2),\ \Omega_{\mathrm{II}}=(0;b)\times(0;b)\setminus[1;2]\times[1;2], \Pi=(0;b)\times(0;b),\ 3<b\le 19/6.$$

Первая область по форме является открытым единичным квадратом, а вторая область является открытым квадратом с выколотым замкнутым квадратом, а границы областей имеют следующие части

$$\Gamma_1=\{b\}\times(0;b)\cup(0;b)\times\{b\},\ \Gamma_2=\{0\}\times(0;b)\cup(0;b)\times\{0\},$$

$$\Gamma_{1,0}=\{1,\,2\}\times(1;2)\cup(1;2)\times\{1,\,2\},$$

$$\Gamma_{\mathrm{II},1}=\{b\}\times(0;b)\cup(0;b)\times\{b\},\ \Gamma_{\mathrm{II},2}=\{0\}\times(0;b)\cup(0;b)\times\{0\},$$

$$\Gamma_{\mathrm{II},3}=\{1,\,2\}\times(1;2)\cup(1;2)\times\{1,\,2\}.$$

В первой области рассматриваем задачу Дирихле для уравнения Софи Жермен. Во второй области вводим смешанную краевую задачу для однородного экранированного уравнения Софи Жермен. На частях границы первой областей задаем однородные условия Дирихле. На частях границы второй области рассматриваем смешанные однородные условия. Задача на первой области является решаемой задачей. Задачу на второй области рассматриваем в качестве нулевого фиктивного продолжения решаемой задачи

$$\Delta^2\breve{u}_\omega+a_\omega\breve{u}_\omega=\breve{f}_\omega,\ \omega\in\{1,\,\mathrm{II}\},\ \breve{f}_{\mathrm{II}}=0,\ a_1=0,\ a_{\mathrm{II}}>0,$$

$$\breve{u}_1\Big|_{\Gamma_{1,0}}=\frac{\partial\breve{u}_1}{\partial n_1}\Big|_{\Gamma_{1,0}}=0, \tag{1.13.1}$$

$$\breve{u}_{\mathrm{II}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},1}}=\Delta\breve{u}_{\mathrm{II}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},1}}=0,\ \frac{\partial\breve{u}_{\mathrm{II}}}{\partial n_{\mathrm{II}}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},2}}=\frac{\partial\Delta\breve{u}_{\mathrm{II}}}{\partial n_{\mathrm{II}}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},2}}=0,\ l_{\mathrm{II},1}\breve{u}_{\mathrm{II}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},3}}=l_{\mathrm{II},2}\breve{u}_{\mathrm{II}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},3}}=0.$$

Решаемая задача

$$\Delta^2\breve{u}_1=\breve{f}_1 \text{ в } (1;2)\times(1;2),\ \breve{u}_1=\frac{\partial\breve{u}_1}{\partial n_1}=0 \text{ на } \{1,\,2\}\times(1;2)\cup(1;2)\times\{1,\,2\}.$$

Здесь $\breve{u}_1$ функция перемещение точек квадратной пластины, расположенной в горизонтальном положении при жестком закреплении на границе под действием вертикальной нагрузки определяющей правую часть уравнения $\breve{f}_1$.

Например

$$\breve{f}_1 = 512(3(x-1)^2(x-2)^2 + (6x^2 - 18x + 13)(6y^2 - 18y + 13) + 3(y-1)^2(y-2)^2),$$

$$\breve{u}_1 = 64(x-1)^2(x-2)^2(y-1)^2(y-2)^2.$$

Рассмотрим решаемую задачу и фиктивную задачу в вариационном виде, т.е. задачи представления линейных функционалов в виде скалярных произведений в функциональных пространствах как бигармонические системы

$$\breve{u}_\omega \in \breve{H}_\omega : \Lambda_\omega(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) = F_\omega(\breve{v}_\omega) \ \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega, \ \omega \in \{1, \mathrm{II}\}. \tag{1.13.2}$$

Пространства решений для таких задач будут следующие пространства функций Соболева

$$\breve{H}_1 = \breve{H}_1(\Omega_1) = \left\{ \breve{v}_1 \in W_2^2(\Omega_1) : \breve{v}_1\big|_{\Gamma_{1.0}} = \frac{\partial \breve{v}_1}{\partial n}\Big|_{\Gamma_{1,0}} = 0 \right\},$$

$$\breve{H}_{\mathrm{II}} = \breve{H}_{\mathrm{II}}(\Omega_{\mathrm{II}}) = \left\{ \breve{v}_{\mathrm{II}} \in W_2^2(\Omega_{\mathrm{II}}) : \breve{v}_{\mathrm{II}}\big|_{\Gamma_{\mathrm{II},1}} = 0, \ \frac{\partial \breve{v}_{\mathrm{II}}}{\partial n_{\mathrm{II}}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},2}} = 0 \right\}.$$

Правые части этих задач являются линейными функционалами

$$F_\omega(\breve{v}_\omega) = \int_{\Omega_\omega} \breve{f}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega, \ \omega \in \{1, \mathrm{II}\}.$$

В левых частях этих задач стоят билинейные формы

$$\Lambda_\omega(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) = \int_{\Omega_\omega} (\breve{u}_{\omega xx}\breve{v}_{\omega xx} + 2\breve{u}_{\omega xy}\breve{v}_{\omega xy} + \breve{u}_{\omega yy}\breve{v}_{\omega yy} + a_\omega \breve{u}_\omega \breve{v}_\omega) d\Omega_\omega, \ \omega \in \{1, \mathrm{II}\}.$$

Заметим, что билинейные формы задают в пространствах решений рассматриваемых задач нормировки эквивалентные нормировкам соответствующих пространств Соболева

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|\breve{v}_\omega\|^2_{W_2^2(\Omega_\omega)} \le \Lambda_\omega(\breve{v}_\omega, \breve{v}_\omega) \le c_2 \|\breve{v}_\omega\|^2_{W_2^2(\Omega_\omega)} \ \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega.$$

Эти положение обеспечивают существование и единственность решения у каждой из рассматриваемых задач. Заметим, что решение фиктивной задачи нулевое. Решаемая задача в пространстве Соболева на единичном квадрате как бигармоническая система в пространстве Соболева следующая

$$\breve{u}_1 \in \breve{H}_1(\Omega_1) : \int_{\Omega_1} (\breve{u}_{1xx}\breve{v}_{1xx} + 2\breve{u}_{1xy}\breve{v}_{1xy} + \breve{u}_{1yy}\breve{v}_{1yy}) d\Omega_1 = \int_{\Omega_1} \breve{f}_1 \breve{v}_1 d\Omega_1 \ \forall \breve{v}_1 \in \breve{H}_1(\Omega_1),$$

$$\breve{H}_1(\Omega_1)=\left\{\breve{v}_1\in W_2^2(\Omega_1):\breve{v}_1\Big|_{\Gamma_{1.0}}=\frac{\partial\breve{v}_1}{\partial n}\Big|_{\Gamma_{1,0}}=0\right\}.$$

1.14. Продолженная бигармоническая система на конечномерном подпространстве пространства Соболева на квадрате

Рассмотрим продолженную бигармоническую систему на конечномерном подпространстве Соболева на квадрате. В этой квадратной области и опоясывающей полосе определим сетку с узлами

$$(x_i;y_j)=\big((i-1{,}5)h;(j-1{,}5)h\big),\ h=3/(n-2),\ n=3m+2,\ m\in\mathbb{N},\ m\geq 3,\ b=3+0{,}5h.$$

Введем сеточные функции на множестве узлов введенной сетки

$$v_{i,j}=v(x_i;y_j)\in\mathbb{R},\ i=1,2...,n,\ j=1,2...,n.$$

Применим восполнение сеточных функций с учетом выбранных краевых условий, используя параболические базисные функции

$$\Phi^{i,j}(x;y)=\Psi^{1,i}(x)\Psi^{2,j}(y),\ i,j=2...,n-1,$$

$$\Psi^{1,i}(x)=[2/i]\Psi(x/h-i+4)+\Psi(x/h-i+3)-[(i+1)/m]\Psi(x/h-i+1),$$

$$\Psi^{2,j}(y)=[2/j]\Psi(y/h-j+4)+\Psi(y/h-j+3)+[(j+1)/n]\Psi(y/h-j+1),$$

$$\Psi(z)=\begin{cases}0{,}5z^2, & z\in[0;1],\\ -z^2+3z-1{,}5, & z\in[1;2],\\ 0{,}5z^2-3z-4{,}5, & z\in[2;3],\\ 0, & z\notin(0;3).\end{cases}$$

Здесь $[\bullet]-$ функция целая часть числа. Полагаем, что значения у базисных функций вне прямоугольной области равны нулю

$$\Phi^{i,j}(x;y)=0,\ (x;y)\notin\Pi,\ i,j=2...,n-1.$$

Комбинации базисных функций являются конечномерным подпространством Соболева

$$\tilde{V}=\left\{\tilde{v}=\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1}v_{i,j}\Phi^{i,j}(x;y)\right\}\subset\breve{V}.$$

Приведем продолженную задачу на введенном конечномерном подпространстве в вариационном виде

$$\tilde{u} \in \tilde{V}: \ \Lambda_1(\tilde{u}, I_1\tilde{v}) + \Lambda_{\Pi}(\tilde{u}, \tilde{v}) = F_1(I_1\tilde{v}) \ \forall \tilde{v} \in \tilde{V}. \qquad (1.14.1)$$

В конечномерном пространстве Соболева лежит конечномерное подпространство решения продолженной задачи. Это конечномерное подпространство решений у исходной задачи в первой области при продолжении нулем на замыкание второй области

$$\tilde{V}_1 = \tilde{V}_1(\Pi) = \left\{ \tilde{v}_1 \in \tilde{V} : \tilde{v}_1\big|_{\Pi \setminus \Omega_1} = 0 \right\}.$$

Полагаем, что оператор проектирования на пространство решений продолженной задачи обнуляет коэффициенты у базисных функций носители, у которых не содержатся полностью в первой области

$$I_1 : \tilde{V} \mapsto \tilde{V}_1, \, \tilde{V}_1 = imI_1, \, I_1 = I_1^2.$$

Рассмотрим продолженную задачу для уравнения Софи Жермен как задачу продолженной бигармонической системы в матричном виде. Аппроксимируя продолженную задачу для уравнения Софи Жермен как задачу продолженной бигармонической системы с помощью конечномерного подпространства, получим систему уравнений

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N : \ B\bar{u} = \bar{f}, \ \bar{f} \in \mathbb{R}^N, \, N = (n-2)(n-2). \qquad (1.14.2)$$

Получаем продолженную задачу, систему в матричном виде, определив продолженную матрицу и продолженную правую часть системы

$$\left\langle B\bar{u}, \bar{v} \right\rangle = \Lambda_1(\tilde{u}, I_1\tilde{v}) + \Lambda_{\Pi}(\tilde{u}, \tilde{v}) \ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}, \left\langle \bar{f}, \bar{v} \right\rangle = F_1(I_1\tilde{v}) \ \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\left\langle \bar{f}, \bar{v} \right\rangle = (\bar{f}, \bar{v}) h_1 h_2 = \bar{f}\,\bar{v} h_1 h_2, \, \bar{v} = (v_1, v_2, ..., v_N)' \in \mathbb{R}^N, N = (n-2)(n-2).$$

При этом нумеруем первыми базисные функции носители, у которых полностью лежат в первой области. Затем нумеруем базисные функции носители, у которых пересекают границу первой области и второй области вместе. Заканчиваем нумерацию на базисных функциях носители, у которых полностью лежат во второй области. Можно сказать, занумеруем первыми компоненты векторов, соответствующие узлам внутри первой области, кроме узлов ближайших к ее границе, когда

$$m+3 \le i \le 2m,\ m+3 \le j \le 2m.$$

Вторыми занумеруем компоненты векторов в окрестности границ первой и второй области, когда

$$m+1 \le i \le 2m+2,\ m+1 \le j \le 2m+2$$

за исключением компонент векторов, занумерованных ранее, т.е.

$$m+3 \le i \le 2m,\ m+3 \le j \le 2m.$$

Третьими занумеруем компоненты векторов, соответствующие узлам внутри второй области, кроме узлов в окрестности границы первой области

$$2 \le i \le 3m+1,\ 2 \le j \le 3m+1$$

за исключением компонент векторов, занумерованных ранее, т.е.

$$m+1 \le i \le 2m+2,\ m+1 \le j \le 2m+2.$$

При этой нумерации возникающие векторы имеют такое строение

$$\bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')',\ \bar{u} = (\bar{u}_1', \bar{0}'\, \bar{0}')',\ \ \bar{f} = (\bar{f}_1', \bar{0}'\, \bar{0}')'.$$

Матрица имеет такую известную структуру

$$B = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Элементы у матрицы и компоненты вектора у правой части, для приведенной системы находятся по формулам

$$b_{i,j} = h_1^{-1} h_2^{-1} (\Lambda_1(\Phi_i, I_1\Phi_j) + \Lambda_{\mathrm{II}}(\Phi_i, \Phi_j)),\ f_i = h_1^{-1} h_2^{-1} F_1(I_1\Phi_i),\ i, j = 1, 2, ..., N.$$

Зададим матрицы, порождаемые соответствующими билинейными формами

$$\langle \Lambda_{\mathrm{I}} \bar{u}, \bar{v} \rangle = \Lambda_1(\tilde{u}, \tilde{v}),\ \langle \Lambda_{\mathrm{II}} \bar{u}, \bar{v} \rangle = \Lambda_{\mathrm{II}}(\tilde{u}, \tilde{v})\ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Эти матрицы имеют следующую структуру

$$\Lambda_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \Lambda_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Введем подпространство векторов

$$\bar{V}_1 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_2 = \bar{0},\, \bar{v}_3 = \bar{0} \right\}.$$

Дополнительно определим подпространства векторов

$$\bar{V}_3 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_1 = \bar{0},\, \bar{v}_2 = \bar{0} \right\},\, \bar{V}_0 = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_3,$$

$$\bar{V}_2 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N : \Lambda_{11}\bar{v}_1 + \Lambda_{12}\bar{v}_2 = \bar{0},\, \Lambda_{23}\bar{v}_2 + \Lambda_{33}\bar{v}_3 = \bar{0} \right\},$$

$$\mathbb{R}^N = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2 \oplus \bar{V}_3 = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_{\mathrm{II}},\, \bar{V}_{\mathrm{I}} = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2,\, \bar{V}_{\mathrm{II}} = \bar{V}_2 \oplus \bar{V}_3.$$

В методе фиктивных компонент обычно решается в матричном виде продолженная задача

$$B\bar{u} = \bar{f},\, \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

Это решение исходной задачи в матричном виде и это нулевое решение у фиктивной задачи в матричном виде

$$\Lambda_{11}\bar{u}_1 = \bar{f}_1,\, \begin{bmatrix} \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix},\, \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

1.15. Алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи продолженной бигармонической системы на квадрате

Для решения задачи (1.14.2) используем метод итерационных расширений. Применим матрицы, порождаемые соответствующими билинейными формами

$$\left\langle \Lambda_{\mathrm{I}}\bar{u}, \bar{v} \right\rangle = \Lambda_1(\tilde{u}, \tilde{v}),\, \left\langle \Lambda_{\mathrm{II}}\bar{u}, \bar{v} \right\rangle = \Lambda_{\mathrm{II}}(\tilde{u}, \tilde{v})\ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Матрицы имеют следующую структуру

$$\Lambda_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\, \Lambda_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Определим расширенную матрицу в виде суммы первой матрицы и второй матрицей, умноженной на положительный параметр

$$C=\Lambda_{\mathrm{I}}+\gamma\Lambda_{\mathrm{II}},\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}, \gamma\in(0;+\infty).$$

Вычисляем элементы этой матрицы по формулам

$$c_{i,j}=h_1^{-1}h_2^{-1}C(\Phi_i,\Phi_j),\, i,j=1,2,\dots,N.$$

Применим метод итерационных расширений, является обобщением метода фиктивных компонент при нулевом начальном приближении

$$\bar{u}^k\in\mathbb{R}^N:\, C(\bar{u}^k-\bar{u}^{k-1})=-\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1}-\bar{f}),\, k\in\mathbb{N}, \tag{1.15.1}$$

$$\bar{u}^0=\bar{0}\in\bar{V}_1,\, \gamma>\alpha,\, \tau_0=1,\, \tau_{k-1}=\left\langle\bar{r}^{k-1},\bar{\eta}^{k-1}\right\rangle\Big/\left\langle\bar{\eta}^{k-1},\bar{\eta}^{k-1}\right\rangle,\, k\in\mathbb{N}\setminus\{1\},$$

где для вычисления итерационных параметров последовательно вычисляем невязки, поправки, эквивалентные невязки

$$\bar{r}^{k-1}=B\bar{u}^{k-1}-\bar{f},\, \bar{w}^{k-1}=C^{-1}\bar{r}^{k-1},\, \bar{\eta}^{k-1}=B\bar{w}^{k-1},\, k\in\mathbb{N}.$$

Этот итерационный процесс можно записать в следующем виде

$$\bar{u}^1\in\mathbb{R}^N: C\bar{u}^1=\bar{f}.$$

$$\bar{u}^k\in\mathbb{R}^N: C(\bar{u}^k-\bar{u}^{k-1})=-\tau_{k-1}\Lambda_{\mathrm{II}}\bar{u}^{k-1},\, \tau_{k-1}=(\bar{r}^{k-1},\bar{\eta}^{k-1})\big/(\bar{\eta}^{k-1},\bar{\eta}^{k-1}),\, k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Приведем алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи продолженной бигармонической системы на квадрате.

I. Вычисляем величину квадрата нормы начальной абсолютной ошибки, которая сохраняется в течение всех вычислений

$$\mathrm{E}_0=(\bar{f},\bar{f})h^2,$$

$$\mathrm{E}_0=(\bar{f}_1,\bar{f}_1)h^2.$$

II. Находим первое приближение

$$\bar{u}^1: C\bar{u}^1=\bar{f},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^1 \\ \bar{u}_2^1 \\ \bar{u}_3^1 \end{bmatrix}\in\bar{V}_{\mathrm{I}}:\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20}+\gamma\Lambda_{02} & \gamma\Lambda_{23} \\ 0 & \gamma\Lambda_{32} & \gamma\Lambda_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u}_1^1 \\ \bar{u}_2^1 \\ \bar{u}_3^1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix},\, \gamma\in(0;+\infty).$$

III. Вычисляем невязку

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f} = \Lambda_{\text{II}}\bar{u}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_1^{k-1} \\ \bar{r}_2^{k-1} \\ \bar{r}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \Lambda_{02}\bar{u}_2^{k-1} + \Lambda_{23}\bar{u}_3^{k-1} \\ \bar{0} \end{bmatrix},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

IV. Вычисляем очередную величину квадрата нормы абсолютной ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1} = (\bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1})h^2,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\mathrm{E}_{k-1} = (\bar{r}_2^{k-1}, \bar{r}_2^{k-1})h^2,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

V. Находим поправку

$$\bar{w}^{k-1} : C\bar{w}^{k-1} = \bar{r}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_1^{k-1} \\ \bar{w}_2^{k-1} \\ \bar{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} \in \bar{V}_2 : \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} + \gamma\Lambda_{02} & \gamma\Lambda_{23} \\ 0 & \gamma\Lambda_{32} & \gamma\Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{k-1} \\ \bar{w}_2^{k-1} \\ \bar{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{r}_2^{k-1} \\ \bar{0} \end{bmatrix},\ \gamma \in (0;+\infty),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VI. Вычисляем эквивалентную невязку

$$\bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1} = \Lambda_{\text{II}}\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\eta}_1^{k-1} \\ \bar{\eta}_2^{k-1} \\ \bar{\eta}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \Lambda_{02}\bar{w}_2^{k-1} + \Lambda_{23}\bar{w}_3^{k-1} \\ \bar{0} \end{bmatrix},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VII. Вычисляем итерационный параметр

$$\tau_{k-1} = (\bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}) \big/ (\bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\tau_{k-1} = (\bar{r}_2^{k-1}, \bar{\eta}_2^{k-1}) \big/ (\bar{\eta}_2^{k-1}, \bar{\eta}_2^{k-1}),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VIII. Находим новое приближение

$$\bar{u}^{k} = \bar{u}^{k-1} - \tau_{k-1}\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^k \\ \bar{u}_2^k \\ \bar{u}_3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{k-1} \\ \bar{u}_2^{k-1} \\ \bar{u}_3^{k-1} \end{bmatrix} - \tau_{k-1} \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{k-1} \\ \bar{w}_2^{k-1} \\ \bar{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} \in \bar{V}_{\mathrm{I}},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

IX. Проверяем условие остановки итераций

$$\mathrm{E}_{k-1} \le \mathrm{E}^2 \mathrm{E}_0,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \mathrm{E} \in (0;1).$$

Если условие остановки итераций не достигается, то все повторяем с пункта III.

При дискретной аппроксимации уравнений по методу конечных разностей, по методу аппроксимации по частям

$$\Delta^2 \breve{u}_\omega + a_\omega \breve{u}_\omega = \breve{f}_\omega,\ \omega \in \{1,\mathrm{II}\},\ \breve{f}_{\mathrm{II}} = 0,\ a_1 = 0,\ a_{\mathrm{II}} > 0,$$

если без учета краевых условий, то может использоваться шаблон с коэффициентами [60]:

	$j-2$	$j-1$	j	$j+1$	$j+2$
$i-2$			H		
$i-1$		$2H$	$-8H$	$2H$	
i	H	$-8H$	$20H+A$	$-8H$	H
$i+1$		$2H$	$-8H$	$2H$	
$i+2$			H		

$$A = a_\omega,\ H = h^{-4}.$$

При дискретной аппроксимации уравнений по методу конечных элементов

$$\Delta^2 \breve{u}_\omega + a_\omega \breve{u}_\omega = \breve{f}_\omega,\ \omega \in \{1,\mathrm{II}\},\ \breve{f}_{\mathrm{II}} = 0,\ a_1 = 0,\ a_{\mathrm{II}} > 0,$$

если без учета краевых условий, то может использоваться шаблон с коэффициентами [60]:

	$j-2$	$j-1$	j	$j+1$	$j+2$
$i-2$	$26H+A$	$106H+26A$	$96H+66A$	$106H+26A$	$26H+A$
$i-1$	$106H+26A$	$-544H+676A$	$-564H+1716A$	$-544H+676A$	$106H+26A$
i	$96H+66A$	$-564H+1716A$	$3096H+4356A$	$-564H+1716A$	$96H+66A$
$i+1$	$106H+26A$	$-544H+676A$	$-564H+1716A$	$-544H+676A$	$106H+26A$
$i+2$	$26H+A$	$106H+26A$	$96H+66A$	$106H+26A$	$26H+A.$

Здесь

$$A = a_\omega / 14400,\ H = h^{-4} / 360.$$

Описание алгоритмической реализации метода итерационных расширений при дискретной аппроксимации уравнений с учетом краевых условий по методу конечных элементов для решения задачи продолженной бигармонической системы на квадрате приведено в приложении 1.

1.16. Алгоритм, реализующий метод итерационных факторизаций при решении задачи расширенной бигармонической системы на квадрате

При значении параметра $\gamma = 1$ на основе метода итерационных факторизаций приведем алгоритм решения задач, возникающих в параграфе 1.15 в пунктах II. и V. Заметим, что решаемая система линейных алгебраических уравнений, получающаяся на каждом шаге, применяемого ранее итерационного процесса записывается в матричном виде

$$\overline{v} \in \mathbb{R}^N : C\overline{v} = \overline{g},\ \overline{g} \in \mathbb{R}^N,\ N = (n-2)(n-2).$$

Сформулируем метод итерационной факторизации, итерационный процесс для решения системы с матрицей C:

$$\overline{v}^l \in \mathbb{R}^N : (LL')^2(\overline{v}^l - \overline{v}^{l-1}) = -\tau_{l-1}(C\overline{v}^{l-1} - \overline{g}),$$

$$\tau_{l-1} = (\overline{r}^{l-1}, \overline{w}^{l-1}) \big/ (\overline{w}^{l-1}, \overline{\eta}^{l-1}),\ \overline{v}^0 = \overline{0} \in \mathbb{R}^N,$$

$$\overline{r}^{l-1} = C\overline{v}^{l-1} - \overline{g},\ \overline{w}^{l-1} = (LL')^{-2}\overline{r}^{l-1},\ \overline{\eta}^{l-1} = C\overline{w}^{l-1},$$

$$C = \Lambda_{\mathrm{I}} + \gamma\Lambda_{\mathrm{II}},\ \gamma = 1,\ L' = \nabla_x + \nabla_y + aE,\ a = \sqrt[4]{a_{\mathrm{II}}}.$$

Отметим, что здесь вместо решения на каждом шаге дважды систем с нижнетреугольной матрицей L и дважды с верхнетреугольной матрицей L' можно дважды применять маршевый метод по решению системы с матрицей

$$A + a^2E = \nabla'_x\nabla_x + \nabla'_y\nabla_y + a^2E,$$

где матрица A получается при аппроксимации оператора Лапласа разностным методом на обычном пятиточечном шаблоне с учетом краевых условий на границе квадратной области.

Сформулированный выше метод можно расписать уже в виде алгоритма в таком виде:

I. Заводим нулевое начальное приближение

$$\overline{v}^{l-1} = \overline{0} \in \mathbb{R}^N,\ l = 1.$$

II. Вычисляем нулевую невязку $\overline{r}^{l-1}$,

$$\overline{r}^{l-1} = -\overline{g},\ l = 1.$$

III. Вычисляем очередную невязку $\overline{r}^{k-1}$,

$$\overline{r}^{l-1} = C\overline{v}^{l-1} - \overline{g},\ l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

IV. Вычисляем величину квадрата нормы начальной абсолютной ошибки (e_0 сохраняется в течение всех вычислений)

$$e_{l-1} = (\overline{r}^{l-1}, \overline{r}^{l-1})h^2,\ l \in \mathbb{N}.$$

V. Находим поправку $\overline{w}^{l-1}$,

$$\overline{w}^{l-1} \in \mathbb{R}^N :\ (LL')^2\,\overline{w}^{l-1} = \overline{r}^{l-1},\ l \in \mathbb{N}.$$

VI. Вычисляем эквивалентную невязку $\overline{\eta}^{l-1}$,

$$\overline{\eta}^{l-1} = C\overline{w}^{l-1},\ l \in \mathbb{N}.$$

VII. Вычисляем итерационный параметр τ_{k-1},

$$\tau_{l-1} = (\overline{r}^{l-1}, \overline{w}^{l-1}) \big/ (\overline{w}^{l-1}, \overline{\eta}^{l-1}),\ k \in \mathbb{N}.$$

VIII. Находим новое приближение $\overline{v}^{l}$,

$$\overline{v}^{l} = \overline{v}^{l-1} - \tau_{l-1}\overline{w}^{l-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

IX. Проверяем условие остановки итераций

$$e_{l-1} \le e^2 e_0,\ l \in \mathbb{N},\ e = 0{,}001 \in (0;1).$$

Если условие остановки итераций не достигается, то все вычисления повторяем с пункта III.

Описание алгоритмической реализации метода итерационных факторизаций при решении задачи продолженной бигармонической системы на квадрате приведено в приложении 2.

1.17. Пример анализа стационарной физической системы с пластиной методом итерационных расширений

Рассмотрим квадратную пластину толщины $\breve{h}$, расположенную горизонтально. Известно, что плоскость, находящаяся на равных расстояниях от верхнего и нижнего основания и делящая пополам толщину $\breve{h}$ пластины постоянной толщины, называется срединной плоскостью.

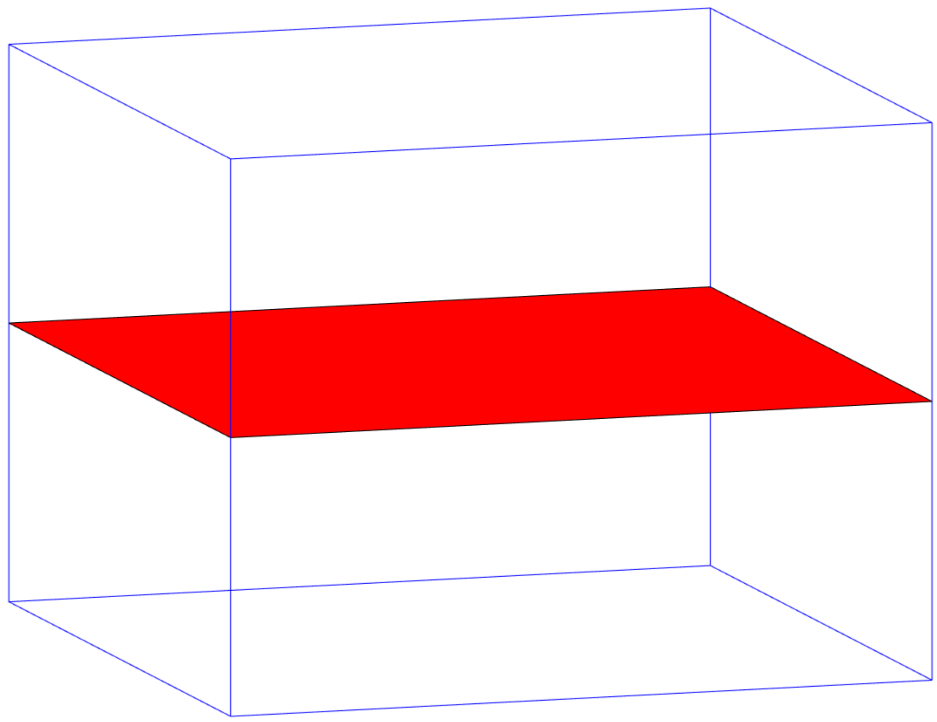


Рис. 1.17.1. Пластина со срединной плоскостью.

Далее полагаем, что точки пластины в прямоугольной системе координат принадлежат множеству $[1;2]\times[1;2]\times[-\breve{h}/2;\,\breve{h}/2]$, а пластина теперь жестко закреплена по краям и находится под действием вертикального давления, т.е. будем рассматривать задачу:

$$\Delta^2\breve{u}_1 = \breve{f}_1 \text{ в } (1;2)\times(1;2),\ \breve{u}_1 = \frac{\partial\breve{u}_1}{\partial n_1} = 0 \text{ на } \{1,\ 2\}\times(1;2)\bigcup(1;2)\times\{1,\ 2\}.$$

Здесь $\breve{u}_1$ функция перемещение точек квадратной пластины, расположенной в горизонтальном положении при жестком закреплении на границе под действием вертикальной нагрузки определяющей правую часть уравнения $\breve{f}_1$. Например, если $\breve{f}_1 = 0,$ то $\breve{u}_1 = 0$ будет уравнением срединной плоскости в прямоугольной системе с координатами $x, y, \breve{u}_1$. Если

$$\breve{f}_1 = 512(3(x-1)^2(x-2)^2 + (6x^2 - 18x + 13)(6y^2 - 18y + 13) + 3(y-1)^2(y-2)^2),$$

то

$$\breve{u}_1 = 64(x-1)^2(x-2)^2(y-1)^2(y-2)^2$$

будет уравнением срединной поверхности. Известно, что срединной повехностью называется двумерное плоское тело, перемещения которого определяются перемещениями плоскости, которая делит пополам толщину пластины, называемой срединной плоскостью. При изгибе пластины срединная плоскость превращается в изогнутую поверхность, срединную поверхность.

Задача 1.17.1. Найти срединную поверхность рассматриваемой пластины, получающуюся под действием на эту пластину вертикального давления $\breve{P}_1$ как численное решение задачи бигармонической системы в пространстве Соболева на единичном квадрате в следующих вариантах:

А) Для стальной пластины при коффициенте Пуассона $\sigma_1 = 0,28,$ модуле Юнга $\breve{E}_1 = 227000,$ толщине пластины $\breve{h} = 0,25,$ цилиндрической жескость пластины

$$\breve{D}_1 = \breve{E}\breve{h}^3 / (12(1-\sigma_1^2)) = 320,71714048$$

и давлении

$$\breve{P}_1 = 164207,175925(3(x-1)^2(x-2)^2 + (6x^2 - 18x + 13)(6y^2 - 18y + 13) + 3(y-1)^2(y-2)^2).$$

Б) Для медной пластины при коффициенте Пуассона $\sigma_1 = 0,345,$ модуле Юнга $\breve{E}_1 = 114000,$ толщине пластины $\breve{h} = 0,25,$ цилиндрической жескость пластины

$$\breve{D}_1 = \breve{E}\breve{h}^3 / (12(1-\sigma_1^2)) = 168,492295468$$

и давлении

$$\breve{P}_1 = 86268,0552796(3(x-1)^2(x-2)^2 + (6x^2 - 18x + 13)(6y^2 - 18y + 13) + 3(y-1)^2(y-2)^2).$$

При рассмотрении приведенной задачи, когда при разностной аппроксимации $n = 161$ и выбирается нулевое начальное приближение, можно добиться, что итерационный процесс метода итерационных расширений останавливается за несколько итерации, если в критерии его остановки задана оценка $\mathrm{E}=0{,}001$ для относительной ошибки в норме более сильной, чем энергетическая норма задачи. Дополнительнл заметим, что на последней итерации, на этой сетке выполняется неравенство характеризуещее точность численного решения исходной задачи в рассматриваемом случае в норме максимум модуля

$$\frac{\max\left|u_{i,j}^{k}-\breve{u}_{i,j}\right|}{\max\left|\breve{u}_{i,j}\right|}\le 0{,}005.$$

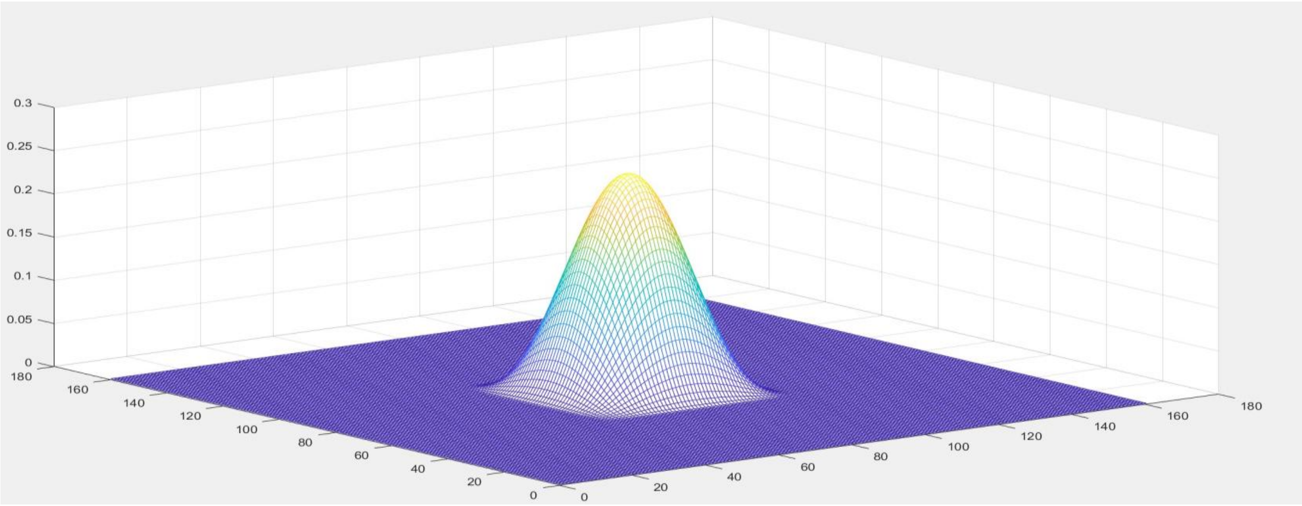


Рис. 1.17.1. График точного решения задачи 1.17.1. А)

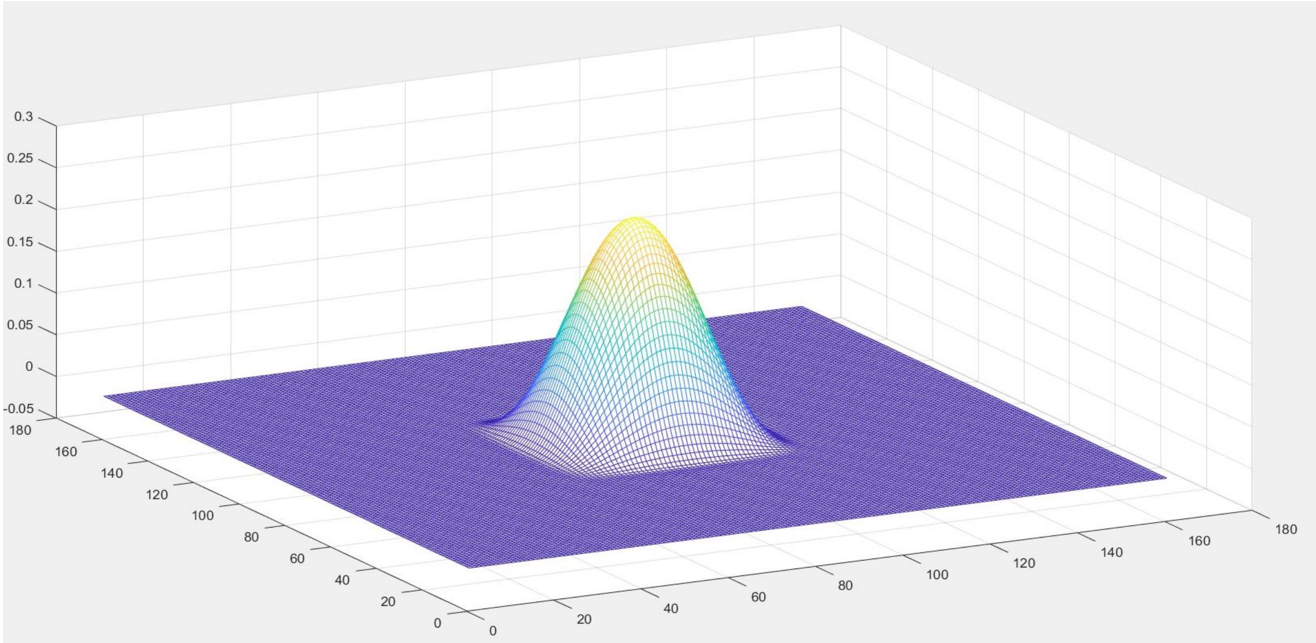


Рис. 1.17.2. График последнего приближения задачи 1.17.1. А)

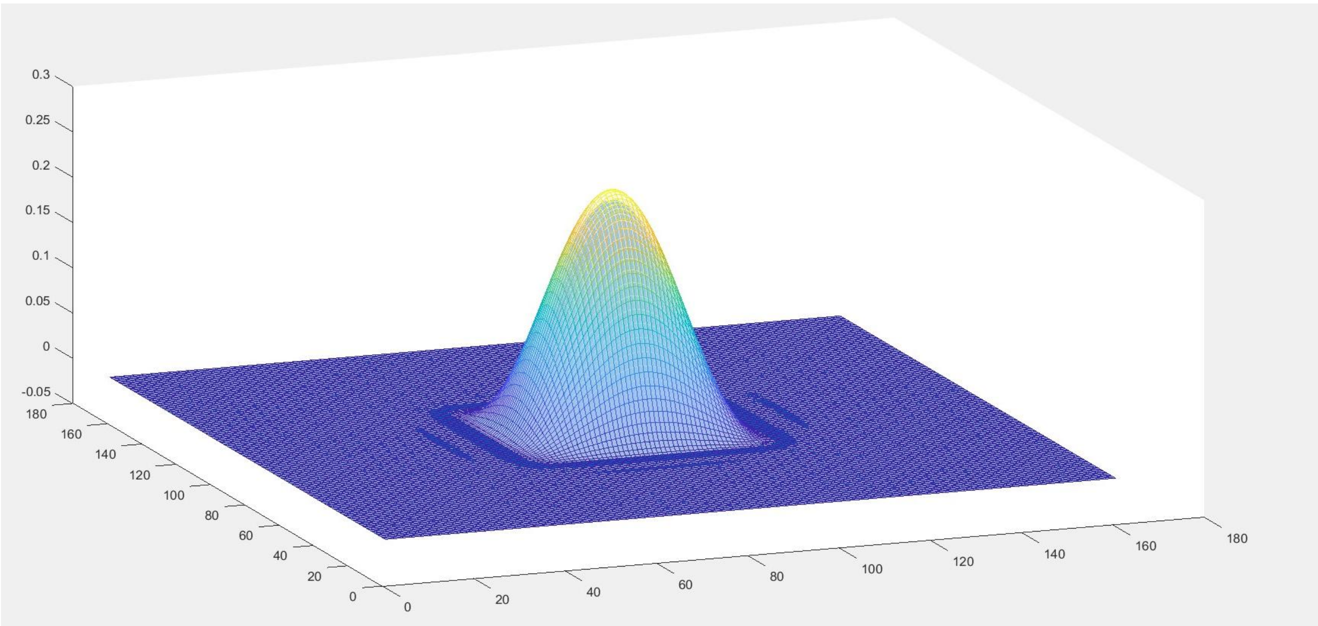


Рис. 1.17.3. Графики точного решения, последнего приближения задачи 1.17.1. А)

Графики последнего приближения и точного решения практически почти совпадают, если в критерии останоки алгоритма реализующего метод итерационных расширений заранее задается оценка относительной ошибки в более сильной норме, чем энергетическая норма $\mathrm{E} = 0{,}001$.

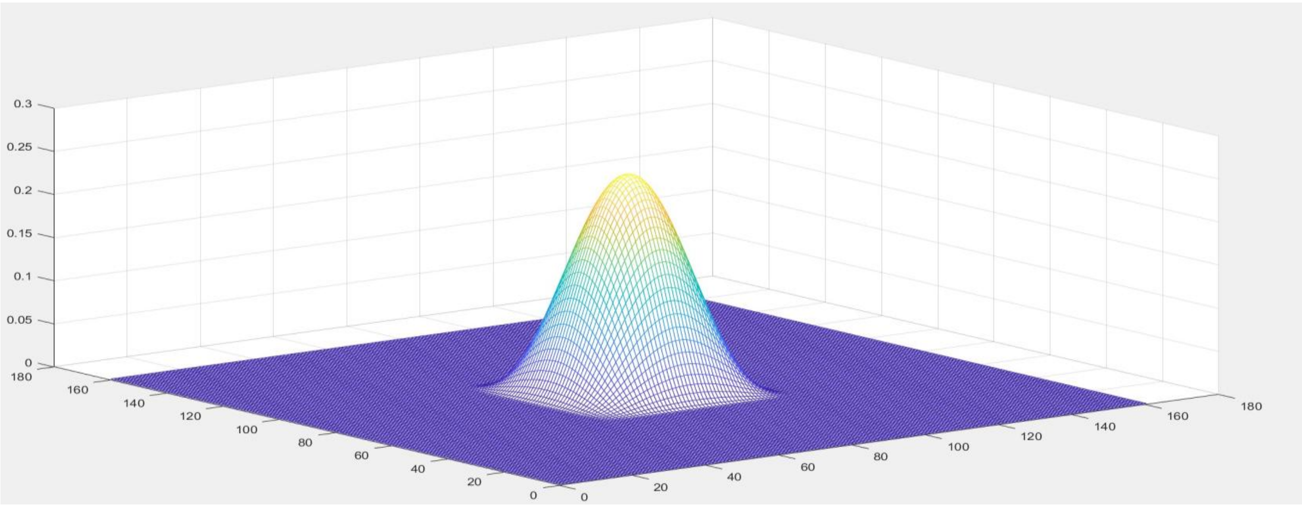


Рис. 1.17.4. График точного решения задачи 1.17.1. Б)

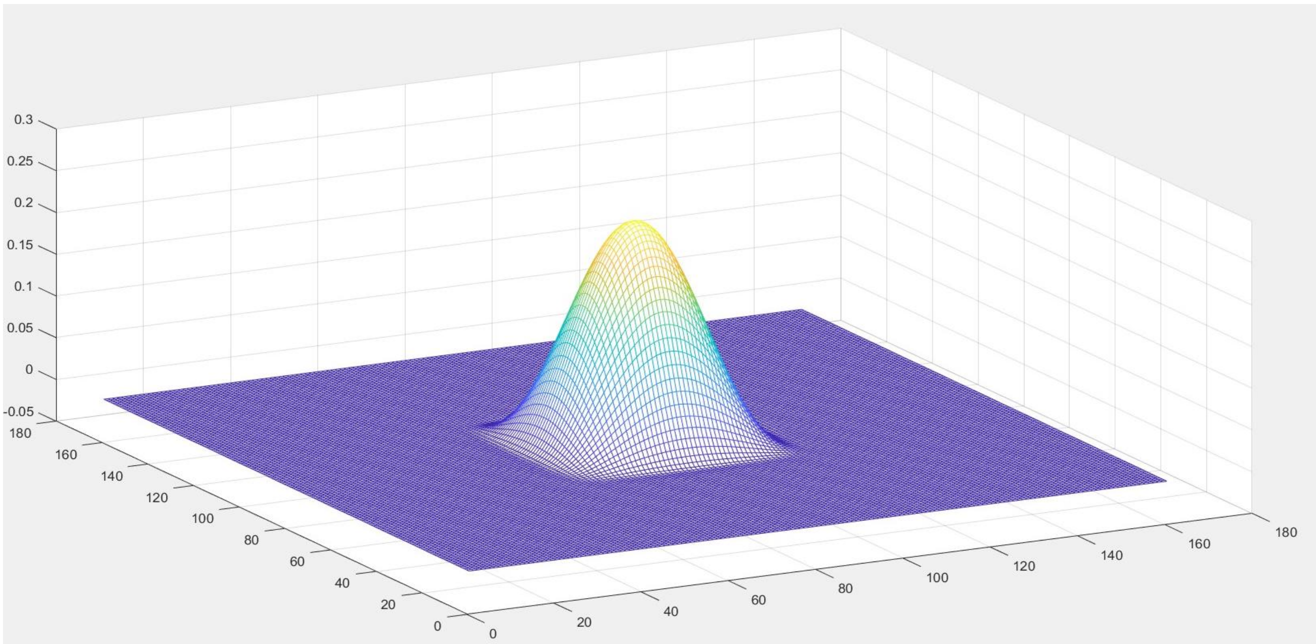


Рис. 1.17.5. График последнего приближения задачи 1.17.1. Б)

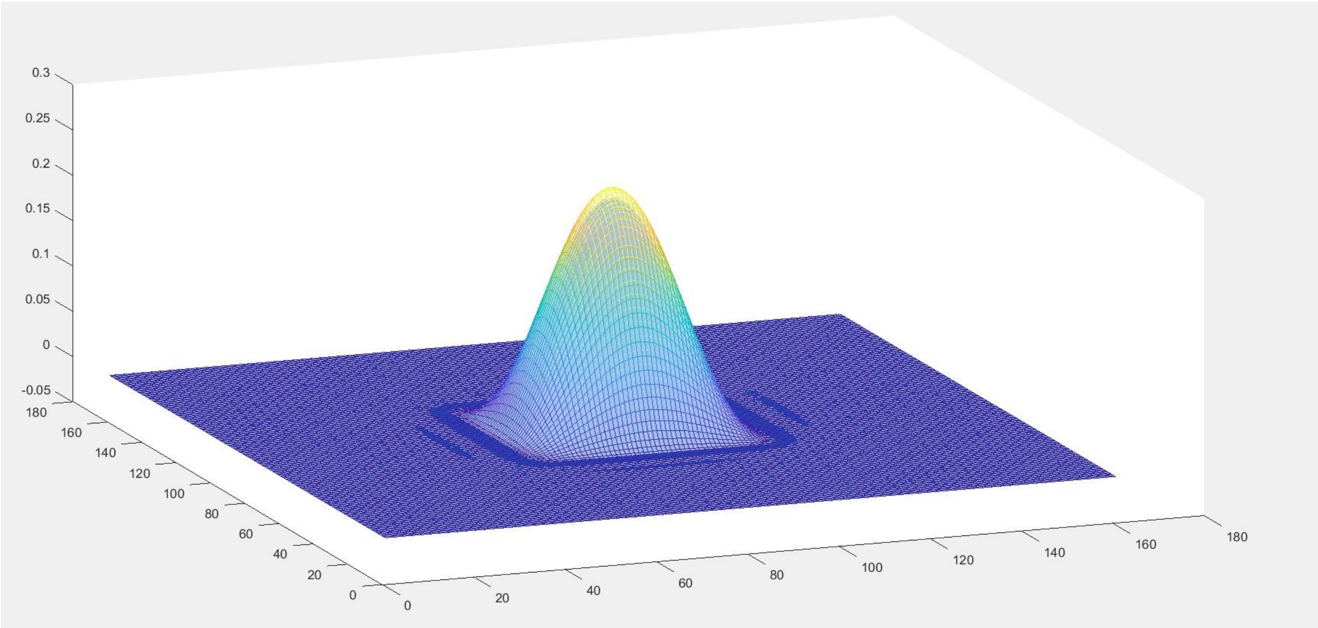


Рис. 1.17.6. Графики точного решения, последнего приближения задачи 1.17.1. Б) Графики последнего приближения и точного решения практически почти совпадают, если в критерии остановки алгоритма реализующего метод итерационных расширений заранее задается оценка относительной ошибки в более сильной норме, чем энергетическая норма $\mathrm{E} = 0{,}001$.

Замечание 1.17.1. При решении приведенной задачи исползовались алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи продолженной бигармонической системы на квадрате из параграфа 1.15 и алгоритм, реализующий метод итерационных факторизаций при решении задачи расширенной бигармонической системы на квадрате из параграфа 1.16. Описание алгоритмической реализации этих методов приведено соответственно в приложениях 1 и 2.

ГЛАВА 2

АНАЛИЗ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В этой главе приводится анализ гармонической системы – краевой задачи с условием Дирихле для уравнения Пуассона. Гармоническая система рассматривается в пространстве Соболева. Производится продолжение гармонической системы в пространстве Соболева. Приводится анализ продолженной гармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент в пространстве Соболева. Продолженная гармоническая система рассматривается на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Приводится анализ продолженной гармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Продолженная гармоническая система рассматривается на пространстве Евклида. Приводится анализ продолженной гармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на пространстве Евклида. Производится анализ продолженной гармонической системы методом итерационных расширений на пространстве Евклида. Приводится анализ продолженной гармонической системы методом итерационных расширений в пространстве Соболева. Приводится анализ продолженной гармонической системы методом итерационных расширений на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Выписывается алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи гармонической системы на пространстве Евклида. Приводится пример расчета изгиба мембраны.

2.1. Гармоническая система в пространстве Соболева

Будем рассматривать краевую задачу для уравнения Пуассона как гармоническую систему в соболевском пространстве. Из теории упругости [37, 61] энергия деформированной мембраны может записываться в виде:

$$\breve{E}_\omega(\breve{u}_\omega) = \frac{1}{2}\breve{T}_\omega \int\limits_{\Omega_\omega} (\breve{u}_{\omega x}^2 + \breve{u}_{\omega y}^2) d\Omega_\omega + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\omega} \breve{K}_\omega \breve{u}_\omega^2 d\Omega_\omega - \int\limits_{\Omega_\omega} \breve{P}_\omega \breve{u}_\omega d\Omega_\omega,\ \omega \in \{1, \mathrm{II}\},$$

где $\breve{P}_\omega$ – давление, $\breve{K}_\omega$ – коэффициент жёсткости упругого основания ($\breve{K}_\omega = 0$ при отсутствии упругого основания), $\breve{T}_\omega$ – коэффициент натяжения мембраны, Ω_ω – плоская ограниченная область с кусочно-гладкой границей класса C^2 без самокасаний и самопересечений, $\partial\Omega_\omega = \overline{s}_\omega,\ s_\omega = \Gamma_{\omega,1} \bigcup \Gamma_{\omega,2}$,

$\Gamma_{\omega,i} \bigcap \Gamma_{\omega,j} = \varnothing$, если $i \neq j$, $i, j = 1,2$, $\Gamma_{\omega,i},\ i = 1,2$ – объединение конечного числа открытых, непересекающихся подмножеств на границе $\partial\Omega_\omega$ из дуг гладких кривых класса C^2, $\breve{u}_\omega$ – искомое перемещение мембраны. Вариация энергии мембраны приравнивается к нулю

$$\delta\breve{E}_\omega(\breve{u}_\omega) = \breve{T}_\omega \int\limits_{\Omega_\omega} (\breve{u}_{\omega x}\breve{v}_{\omega x} + \breve{u}_{\omega y}\breve{v}_{\omega y}) d\Omega_\omega + \int\limits_{\Omega_\omega} \breve{K}_\omega \breve{u}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega - \int\limits_{\Omega_\omega} \breve{P}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega = 0,$$

если $\breve{v}_\omega = \delta\breve{u}_\omega,\ \kappa_\omega = \breve{K}_\omega / \breve{T}_\omega,\ \breve{f}_\omega = \breve{P}_\omega / \breve{T}_\omega$, то получается, что

$$\int\limits_{\Omega_\omega} (\breve{u}_{\omega x}\breve{v}_{\omega x} + \breve{u}_{\omega y}\breve{v}_{\omega y} + \kappa_\omega \breve{u}_\omega \breve{v}_\omega) d\Omega_\omega = \int\limits_{\Omega_\omega} \breve{f}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega .$$

При интегрировании по частям получается

$$\int\limits_{\Omega_\omega} (-\Delta\breve{u}_\omega + \kappa_\omega \breve{u}_\omega)\breve{v}_\omega d\Omega_\omega + \int\limits_{s_\omega} \frac{\partial\breve{u}_\omega}{\partial n_\omega} \breve{v}_\omega ds_\omega = \int\limits_{\Omega_\omega} \breve{f}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega,$$

где n_ω – внешния нормаль к $\partial\Omega_\omega$, Если на $\Gamma_{\omega,1}$ мембрана закреплена, на $\Gamma_{\omega,2}$ у мембраны свободное опирание, то получаем краевую задачу с однородными смешанными краевыми условиями:

$$-\Delta\breve{u}_\omega+\kappa_\omega\breve{u}_\omega=\breve{f}_\omega,\ \breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,1}}=0,\ \frac{\partial\breve{u}_\omega}{\partial n_\omega}\Big|_{\Gamma_{\omega,2}}=0.$$

Сформулируем вариационную краевую задачу при смешанных, однородных краевых условиях закрепления, свободного опирания

$$\breve{u}_\omega\in\breve{H}_\omega:\mathrm{A}_\omega(\breve{u}_\omega,\breve{v}_\omega)=F_\omega(\breve{v}_\omega)\ \forall\breve{v}_\omega\in\breve{H}_\omega,\ F_\omega\in\breve{H}'_\omega, \tag{2.1.1}$$

где пространство функций Соболева

$$\breve{H}_\omega=\breve{H}_\omega(\Omega_\omega)=\left\{\breve{v}_\omega\in W_2^1(\Omega_\omega):\breve{v}_\omega\big|_{\Gamma_{\omega,1}}=0\right\}$$

на плоской ограниченной области Ω_ω с кусочно-гладкой границей класса C^2 без самокасаний и самопересечений

$$\partial\Omega_\omega=\overline{s}_\omega,\ s_\omega=\Gamma_{\omega,1}\bigcup\Gamma_{\omega,2},\ \ \Gamma_{\omega,i}\bigcap\Gamma_{\omega,j}=\varnothing,\ \text{если}\ \ i\neq j\ ,\ i,j=1,2.$$

$\Gamma_{\omega,i},\ i=1,2$ – объединение конечного числа открытых, непересекающихся подмножеств границы $\partial\Omega_\omega$ из дуг гладких кривых класса C^2, n_ω – внешняя нормаль к $\partial\Omega_\omega$, билинейная форма с константой $\kappa_\omega\in\left[0;+\infty\right)$

$$\mathrm{A}_\omega(\breve{u}_\omega,\breve{v}_\omega)=\int\limits_{\Omega_\omega}(\breve{u}_{\omega x}\breve{v}_{\omega x}+\breve{u}_{\omega y}\breve{v}_{\omega y}+\kappa_\omega\breve{u}_\omega\breve{v}_\omega)d\Omega_\omega.$$

Для задачи из (2.1.1) достаточно обычно предположение, обеспечивающее для ее решения существование, единственность

$$\exists c_1,c_2\in\left(0;+\infty\right):c_1\left\|\breve{v}_\omega\right\|^2_{W_2^1(\Omega_\omega)}\leq\mathrm{A}_\omega(\breve{v}_\omega,\breve{v}_\omega)\leq c_2\left\|\breve{v}_\omega\right\|^2_{W_2^1(\Omega_\omega)}\ \forall\breve{v}_\omega\in\breve{H}_\omega,$$

см. [60, 61]. Данное условие всегда гарантирует единственность решения при $\kappa_\omega\in\left(0;+\infty\right)$ и любых комбинациях из приведенных краевых условий. Если, например, $\breve{u}_\omega$ – искомая функция достаточно гладкая, а $\breve{f}_\omega$ – заданная функция такова, что

$$F_\omega\left(\breve{v}_\omega\right)=\int\limits_{\Omega_\omega}\breve{f}_\omega\breve{v}_\omega d\Omega_\omega,$$

то из задачи в (2.1.1) как и раньше при интегрировании по частям получается следующая эллиптическая краевая задача второго порядка при однородных, смешанных краевых условиях

$$-\Delta\breve{u}_\omega + \kappa_\omega \breve{u}_\omega = \breve{f}_\omega, \tag{2.1.2}$$

$$\breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,1}} = 0, \ \frac{\partial \breve{u}_\omega}{\partial n_\omega}\Big|_{\Gamma_{\omega,2}} = 0.$$

Решаемой задачей будет смешанная краевая задача для уравнения Пуассона обязательно с краевым условием Дирихле, т.е. при $\omega = 1, \kappa_1 = 0, \Gamma_{1,1} \neq \varnothing,$ которая будет, рассматриваться как гармоническая система

$$-\Delta\breve{u}_1 = \breve{f}_1, \tag{2.1.3}$$

$$\breve{u}_1\Big|_{\Gamma_{1,1}} = 0, \ \frac{\partial \breve{u}_1}{\partial n_1}\Big|_{\Gamma_{1,2}} = 0.$$

Дополнительно рассматриваем смешанную, однородную, фиктивную задачу для экранированного уравнения Пуассона, т.е. при $\omega = \mathrm{II}, \ \breve{f}_{\mathrm{II}} = 0, \breve{u}_{\mathrm{II}} = 0,$

$$-\Delta\breve{u}_{\mathrm{II}} + \kappa_{\mathrm{II}} \breve{u}_{\mathrm{II}} = 0, \tag{2.1.4}$$

$$\breve{u}_{\mathrm{II}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},1}} = 0, \ \frac{\partial \breve{u}_{\mathrm{II}}}{\partial n_{\mathrm{II}}}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{II},2}} = 0.$$

2.2. Продолженная гармоническая система в пространстве Соболева

Продолженная задача для уравнения Пуассона будет рассматриваться как задача продолженной гармонической системы. Предлагается фиктивное продолжение исходной краевой задачи для уравнения Пуассона в вариационном виде:

$$\breve{u} \in \breve{V}: \ \mathrm{A}_1(\breve{u}, I_1\breve{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}, \breve{v}) = F_1(I_1\breve{v}) \ \forall \breve{v} \in \breve{V}, \tag{2.2.1}$$

где расширенное пространство решения этой задачи пространство Соболева

$$\breve{V} = \breve{V}(\Pi) = \left\{ \breve{v} \in W_2^1(\Pi) : \breve{v}\big|_{\Gamma_1} = 0 \right\},$$

область решения исходной задачи в первой области на плоскости дополнена с помощью второй области до прямоугольной области

$$\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} = \bar{\Pi},\ \Omega_1 \cap \Omega_{\mathrm{II}} = \varnothing,\ \Omega_1, \Omega_{\mathrm{II}} \subset \mathbb{R}^2,$$

граница прямоугольной области также состоит из замыкания объединений открытых непересекающихся частей

$$\partial\Pi = \bar{s},\ s = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,\ \Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j = 1,2,$$

а не пустое пересечение границы первой области и границы второй области будет замыканием пересечения соответствующих частей границ этих областей

$$\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_{\mathrm{II}} = \bar{S},\ S = \Gamma_{1,1} \cap \Gamma_{\mathrm{II},2} \neq \varnothing,$$

$n-$ внешняя нормаль к $\partial\Pi$. Расширенное пространство решения содержит подпространство решения продолженной задачи, т.е. пространство решений для исходной задачи на первой области, проложенное нулем в дополнении до прямоугольной области

$$\breve{V}_1 = \breve{V}_1(\Pi) = \left\{ \breve{v}_1 \in \breve{V} : \breve{v}_1\big|_{\Pi \setminus \Omega_1} = 0 \right\}.$$

В продолженной задаче используем оператор, вообще говоря, не ортогонального проектирования расширенного пространства на подпространство решения продолженной задачи

$$I_1 : \breve{V} \mapsto \breve{V}_1,\ \breve{V}_1 = imI_1,\ I_1 = I_1^2.$$

Введем подпространства расширенного пространства решений

$$\breve{V}_3 = \breve{V}_3(\Pi) = \left\{ \breve{v}_3 \in \breve{V} : \breve{v}_3\big|_{\Pi \setminus \Omega_{\mathrm{II}}} = 0 \right\},\ \breve{V}_0 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_3,$$

$$\breve{V}_2 = \breve{V}_2(\Pi) = \left\{ \breve{v}_2 \in \breve{V} : \mathrm{A}(\breve{v}_2, \breve{v}_0) = 0\ \forall \breve{v}_0 \in \breve{V}_0 \right\},$$

$$\breve{V} = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_2 \oplus \breve{V}_3 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_{\mathrm{II}},\ \breve{V}_{\mathrm{I}} = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_2,\ \breve{V}_{\mathrm{II}} = \breve{V}_2 \oplus \breve{V}_3.$$

Прямые суммы подпространств рассматривается в скалярном произведении, порождаемом билинейной формой

$$\mathrm{A}(\breve{u}, \breve{v}) = \mathrm{A}_1(\breve{u}, \breve{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}, \breve{v})\ \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}.$$

Предполагаем, билинейная форма дает нормировку расширенного пространства решения эквивалентную нормировке пространства Соболева

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|\breve{v}\|^2_{W_2^1(\Pi)} \le \mathrm{A}(\breve{v},\breve{v}) \le c_2 \|\breve{v}\|^2_{W_2^1(\Pi)} \ \ \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Используем пространство Соболева, в котором выполняется предположение о продолжении функции в виде

$$\exists \breve{\beta}_1 \in (0;1],\ \breve{\beta}_2 \in [\breve{\beta}_1;1] : \breve{\beta}_1 \mathrm{A}(\breve{v}_2,\breve{v}_2) \le \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{v}_2,\breve{v}_2) \le \breve{\beta}_2 \mathrm{A}(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\ \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2.$$

Решение продолженной задачи, тогда существует, единственно. Это решение у исходной задачи на первой области с нулевым продолжением на остальной части прямоугольной области. Заметим, что решение исходной задачи и решение исходной задачи, продолженное нулем, т.е. решение продолженной задачи могут обозначаться одинаково как функция и ее продолжение

$$\breve{H}_\omega(\Omega_\omega) = \breve{V}_\omega(\Omega_\omega),\ \omega \in \{1, \mathrm{II}\}.$$

Предложение 2.2.1. *Имеют место следующие равенства:*

$$\mathrm{A}_\omega(\breve{u}_0,\breve{v}_2) = \mathrm{A}_\omega(\breve{v}_2,\breve{u}_0) = 0 \ \ \forall \breve{u}_0 \in \breve{V}_0,\ \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2,\ \ \omega \in \{1, \mathrm{II}\}.$$

Доказательство. Действительно, т.к.

$$\mathrm{A}_1(\breve{u}_0,\breve{v}_2) = \mathrm{A}_1(\breve{u}_1,\breve{v}_2) = \mathrm{A}(\breve{u}_1,\breve{v}_2) = 0 \ \ \forall \breve{u}_1 \in \breve{V}_0,\ \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2,$$
$$\mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}_0,\breve{v}_2) = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}_3,\breve{v}_2) = \mathrm{A}(\breve{u}_3,\breve{v}_2) = 0 \ \ \forall \breve{u}_3 \in \breve{V}_0,\ \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2.$$

Утверждение 2.2.1. *Решение задачи из (2.2.1) $\breve{u} \in \breve{V}_1$, существует, единственно на Ω_1 совпадает с решением задачи из (2.1.1) при $\omega = 1$, на Ω_{II} равно нулю.*

Доказательство. Пусть $\breve{u}^1$, $\breve{u}^2$ два различных решения , тогда для $\breve{u}^0 = \breve{u}^1 - \breve{u}^2$ имеем

$$\mathrm{A}_1(\breve{u}^0, I_1\breve{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}^0,\breve{v}) = 0 \ \ \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Заметим , что $\breve{u}^0 = \breve{u}_2^0 \in \breve{V}_2$, т.к. при $\breve{v} = \breve{v}_0$ получаем

$$\mathrm{A}_1(\breve{u}^0, I_1\breve{v}_0) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}^0,\breve{v}_0) = \mathrm{A}_1(\breve{u}^0,\breve{v}_0) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}^0,\breve{v}_0) = \mathrm{A}(\breve{u}^0,\breve{v}_0) = 0 \ \ \forall \breve{v}_0 \in \breve{V}_0.$$

Пусть $\breve{v} = \breve{u}_2^0$, тогда

$$\mathrm{A}_1(\breve{u}_2^0, I_1\breve{u}_2^0) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}_2^0,\breve{u}_2^0) = 0$$

и ввиду предложения 2.2.1.

$$\mathrm{A}_1(\breve{u}_2^0, I_1\breve{u}_2^0) = 0, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}_2^0,\breve{u}_2^0) = 0\,,$$

тогда $\breve{u}_2^0 = 0$ на Ω_{II}, т.к. $\text{A}_{\text{II}}(\bullet,\bullet)$ скалярное произведение и

$$0 \le \breve{\beta}_1 \text{A}(u_2^0, u_2^0) \le \text{A}_{\text{II}}(u_2^0, u_2^0) = 0$$

получаем

$$\text{A}(u_2^0, u_2^0) = 0,$$

тогда $\breve{u}_2^0 = 0$ на Π, т.к. $\text{A}(\bullet,\bullet)$ скалярное произведение. Таким образом, $\breve{u}^0 = \breve{u}_2^0 = 0$ на Π. На счет существования решения задач из (2.2.1) можно сказать, что решение уже указано в самом утверждении.

2.3. Анализ продолженной гармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент в пространстве Соболева

Анализ продолженной задачи для уравнения Пуассона как задачи продолженной гармонической системы рассмотрим модифицированным методом фиктивных компонент. Рассматриваем модифицированный метод фиктивных компонент при решении продолженной задачи для уравнения Пуассона как вычислительную систему для анализа продолженной гармонической системы. Это следующий итерационный процесс приближённых вычислений на аналитическом, непрерывном уровне [90, 92, 96, 128]:

$$\breve{u}^k \in \breve{V} : \text{A}(\breve{u}^k - \breve{u}^{k-1}, \breve{v}) = -\tau_{k-1}(\text{A}_1(\breve{u}^{k-1}, I_1\breve{v}) + \text{A}_{\text{II}}(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}) - F_1(I_1\breve{v}))\ \forall \breve{v} \in \breve{V},$$

$$\tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = \tau = 2/(\breve{\beta}_1 + \breve{\beta}_2),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \forall \breve{u}^0 \in \breve{V}_1 \subset \breve{V}. \qquad (2.3.1)$$

В пространстве $\breve{V}$ вводится следующая норма

$$\|\breve{v}\|_{\breve{V}} = \sqrt{\text{A}(\breve{v}, \breve{v})}.$$

Теорема 2.3.1. *Для итерационного процесса из (2.3.1) имеет место следующая оценка относительной ошибки*

$$\|\breve{u}^k - \breve{u}\|_{\breve{V}} \le \varepsilon \|\breve{u}^0 - \breve{u}\|_{\breve{V}},\ k \in \mathbb{N},$$

где

$$\varepsilon = \delta_1 q^{k-1},\ \delta_1 = \sqrt{\|I_1\|_{\breve{V}}^2 - 1},\ 0 \le q = (\breve{\beta}_2 - \breve{\beta}_1)/(\breve{\beta}_1 + \breve{\beta}_2) < 1.$$

Предложение 2.3.1. *Если в итерационном процессе из (2.3.1)* $\breve{u}^{k-1} = \breve{u}$*, то* $\breve{u}^k = \breve{u}$.

Доказательство. Из итерационного процесса, в этом случае получаем, что

$$\breve{u}^k \in \breve{V} : \mathrm{A}(\breve{u}^k - \breve{u}, \breve{v}) = -\tau_{k-1}(\mathrm{A}_1(\breve{u}, I_1\breve{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}, \breve{v}) - F_1(I_1\breve{v})) \forall \breve{v} \in \breve{V}$$

и

$$\mathrm{A}(\breve{u}^k - \breve{u}, \breve{v}) = 0 \ \forall \breve{v} \in \breve{V}, \ \mathrm{A}(\breve{u}^k - \breve{u}, \breve{u}^k - \breve{u}) = 0, \ \breve{u}^k = \breve{u}.$$

Предложение 2.3.2. *Для итерационного процесса из (2.3.1) выполняются равенства:*

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \mathrm{A}_1(\breve{u}^k, \breve{v}_0) = F_1(\breve{v}_0), \ \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}^k, \breve{v}_0) = 0 \ \forall \breve{v}_0 \in \breve{V}_0.$$

Доказательство. При $k = 1$

$$\begin{gathered}\mathrm{A}_1(\breve{u}^1, \breve{v}_0) = \mathrm{A}(\breve{u}^1, \breve{v}_1) = \mathrm{A}(\breve{u}^0, \breve{v}_1) - \tau_0((\mathrm{A}_1(\breve{u}^0, \breve{v}_1) - F_1(\breve{v}_1)) = \\ = \mathrm{A}_1(\breve{u}^0, \breve{v}_0) - ((\mathrm{A}_1(\breve{u}^0, \breve{v}_0) - F_1(\breve{v}_0)) = F_1(\breve{v}_0), \\ \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}^1, \breve{v}_0) = \mathrm{A}(\breve{u}^1, \breve{v}_3) = \mathrm{A}(\breve{u}^0, \breve{v}_3) - \tau_0 \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_3) = \\ = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}^0, \breve{v}_0) - \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}^0, \breve{v}_0) = 0.\end{gathered}$$

Если предположить, что при $k-1$ предложение выполняется, тогда оно выполняется и при k

$$\begin{gathered}\mathrm{A}_1(\breve{u}^k, \breve{v}_0) = \mathrm{A}(\breve{u}^k, \breve{v}_1) = \mathrm{A}(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_1) - \tau_{k-1}((\mathrm{A}_1(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_1) - F_1(\breve{v}_1)) = \\ = \mathrm{A}_1(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_0) - \tau_{k-1}((\mathrm{A}_1(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_0) - F_1(\breve{v}_0)) = F_1(\breve{v}_0), \\ \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}^k, \breve{v}_0) = \mathrm{A}(\breve{u}^k, \breve{v}_3) = \mathrm{A}(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_3) - \tau_{k-1} \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_3) = \\ = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_0) - \tau_{k-1} \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_0) = 0.\end{gathered}$$

На основе математической индукции получается доказательство предложения.

Приближение представляется в виде суммы точного решения и ошибки

$$\breve{u}^k = \breve{u} + \breve{\psi}^k, \ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Предложение 2.3.3. *В итерационном процессе из (2.3.1) ошибка принадлежит подпространству, т.е.* $\breve{\psi}^k = \breve{\psi}_2^k \in \breve{V}_2 \ \forall k \in \mathbb{N}$*, приближение принадлежит подпространству, т.е.* $\breve{u}^k = \breve{u}_{\mathrm{I}}^k \in \breve{V}_{\mathrm{I}} \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Из предложения 2.3.2

$$\mathrm{A}(\breve{u}^k, \breve{v}_0) - F_1(\breve{v}_0) = 0 \ \forall \breve{v}_0 \in \breve{V}_0,$$

тогда

$$\mathrm{A}(\breve{u}^k,\breve{v}_0)-F_1(\breve{v}_0)=\mathrm{A}(\breve{u}+\breve{\psi}^k,\breve{v}_0)-F_1(\breve{v}_0)=\mathrm{A}(\breve{\psi}^k,\breve{v}_0)=0\ \forall\breve{v}_0\in\breve{V}_0,$$

учитывая, что

$$\mathrm{A}(\breve{u},\breve{v}_0)=F_1(\breve{v}_0),$$

следовательно $\breve{\psi}^k=\breve{\psi}_2^k\in\breve{V}_2$.

Утверждение 2.3.1. *При* $k=1$ *в итерационном процессе из (2.3.1) имеет место следующая оценка*

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}\le\delta_1\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}},\ \delta_1=\sqrt{\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}^2-1}.$$

Доказательство. Из итерационного процесса (2.3.1) имеем

$$\mathrm{A}(\breve{u}^1-\breve{u}^0,\breve{v})=-(\mathrm{A}_1(\breve{u}^0,I_1\breve{v})+\mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}^0,\breve{v})-F_1(I_1\breve{v}))=$$

$$=-\mathrm{A}_1(\breve{u}^0,I_1\breve{v})-\mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}^0,\breve{v})+F_1(I_1\breve{v}).$$

При $k=1,\ \tau_1=1,\ \breve{u}^0=\breve{u}+\breve{\psi}^0$

$$\mathrm{A}(\breve{u}^1-\breve{u}^0,\breve{v})=-\mathrm{A}_1(\breve{u}^0,I_1\breve{v})+\mathrm{A}(\breve{u},I_1\breve{v})=\mathrm{A}(\breve{u}-\breve{u}^0,I_1\breve{v}),$$

тогда

$$\mathrm{A}(\breve{u}^1-\breve{u}^0,\breve{v})=\mathrm{A}(I_1'(\breve{u}-\breve{u}^0),\breve{v}).$$

Отметим, что

$$\breve{u}^1-\breve{u}^0=I_1'(\breve{u}-\breve{u}^0),\ \breve{\psi}^1=(I-I_1')\breve{\psi}^0,$$

тогда

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}^o\right\|_{\breve{V}}\le\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}},\ \left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}\le\left\|I-I_1\right\|_{\breve{V}}\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}.$$

Выполняется равенство

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}+\breve{u}-\breve{u}^0\right\|_{\breve{V}}^2=\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2+\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2,$$

т.к.

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}+\breve{u}-\breve{u}^0\right\|_{\breve{V}}^2=\left\|\breve{u}^1-\breve{u}-(\breve{u}^0-\breve{u})\right\|_{\breve{V}}^2=\left\|\breve{\psi}^1-\breve{\psi}^0\right\|_{\breve{V}}^2=$$

$$\mathrm{A}(\breve{\psi}^1-\breve{\psi}^0,\breve{\psi}^1-\breve{\psi}^0)=\mathrm{A}(\breve{\psi}^1,\breve{\psi}^1)+\mathrm{A}(\breve{\psi}^0,\breve{\psi}^0)=\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2+\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2,$$

тогда

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}^0\right\|_{\breve{V}}^2=\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2+\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2\le\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}^2\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2$$

и, следовательно

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2\le\left(\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}^2-1\right)\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2,$$

а далее ч.т.д.

Можно заметить, если $I_1\breve{v}=\breve{v}_1,\ \forall\breve{v}\in\breve{V},$ т.е. теоретически при отимальном выборе оператора I_1 в виде ортопроектора, когда $\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}=\left\|I-I_1\right\|_{\breve{V}}=1$ в (2.3.1) получается, что $\breve{u}^1=\breve{u}$. Это также получается в этом случае и непосредственно из итерационного процесса (2.3.1)

$$\breve{u}^1\in\breve{V}:\mathrm{A}(\breve{u}^1,\breve{v})=F_1(I_1\breve{v})\ \forall\breve{v}\in\breve{V},$$

т.к. $I_1\breve{v}=\breve{v}_1$, $\breve{u}^1=\breve{u}+\breve{\psi}^1, \breve{\psi}^1=\breve{\psi}_2^1\in\breve{V}_2$, тогда

$$\mathrm{A}(\breve{u}+\psi_2^1,\breve{v}_0+\breve{v}_2)=F_1(\breve{v}_1)=F_1(\breve{v}_0)\ \ ,\ \ \mathrm{A}(\breve{u},\breve{v}_0)+\mathrm{A}(\psi_2^1,\breve{v}_2)=F_1(\breve{v}_0)$$

и отсюда

$$\mathrm{A}(\psi_2^1,\breve{v}_2)=0,\ \mathrm{A}(\psi_2^1,\psi_2^1)=0$$

следовательно $\breve{\psi}^1=\breve{\psi}_2^1=0.$

Утверждение 2.3.2. *При* $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ *в итерационном процессе из (2.3.1) выполняется оценка*

$$\left\|\breve{u}^k-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}\le q^{k-1}\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}},$$

где

$$0\le q=(\breve{\beta}_2-\breve{\beta}_1)\big/(\breve{\beta}_1+\breve{\beta}_2)<1.$$

Доказательство. Вводится оператор $\breve{R}_{\mathrm{II}}$ из $\breve{V}_2$ в $\breve{V}_2$:

$$\mathrm{A}(\breve{R}_{\mathrm{II}}\breve{u},\breve{v})=\mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u},\breve{v})\quad\forall\breve{u},\breve{v}\in\breve{V}_2.$$

Заметим, что

$$\breve{\beta}_1\mathrm{A}(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\le\mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\le\breve{\beta}_2\mathrm{A}(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\quad\forall\breve{v}_2\in\breve{V}_2,$$

тогда

$$\breve{\beta}_1 \mathrm{A}(\breve{v}_2,\breve{v}_2) \le \mathrm{A}(\breve{R}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2,\breve{v}_2) \le \breve{\beta}_2 \mathrm{A}(\breve{v}_2,\breve{v}_2) \ , \ \breve{\beta}_1 I \le \breve{R}_{\mathrm{II}} \le \breve{\beta}_2 I \ .$$

Отметим, что $\breve{R}'_{\mathrm{II}} = \breve{R}_{\mathrm{II}}$, т.к. $\forall \breve{u},\breve{v} \in \breve{V}_2$

$$\mathrm{A}(\breve{u},\breve{R}'_{\mathrm{II}}\breve{v}) = \mathrm{A}(\breve{R}_{\mathrm{II}}\breve{u},\breve{v}) = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u},\breve{v}) = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{v},\breve{u}) = \mathrm{A}(\breve{R}_{\mathrm{II}}\breve{v},\breve{u}) = \mathrm{A}(\breve{u},\breve{R}_{\mathrm{II}}\breve{v}).$$

Таким образом, $\breve{R}_{\mathrm{II}}$ симметричный, ограниченный оператор. Из итерационного процесса (2.3.1) при $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ имеем:

$$\breve{\psi}^k \in \breve{V} : \mathrm{A}(\breve{\psi}^k - \breve{\psi}^{k-1},\breve{v}) = -\tau(\mathrm{A}_1(\breve{\psi}^{k-1}, I_1\breve{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{\psi}^{k-1},\breve{v}))\, \forall \breve{v} \in \breve{V}$$

и

$$\mathrm{A}(\breve{\psi}^k,\breve{v}) = \mathrm{A}(\breve{\psi}^{k-1},\breve{v}) - \tau \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{\psi}^{k-1},\breve{v}) = \mathrm{A}(\breve{\psi}^{k-1},\breve{v}) - \tau \mathrm{A}(\breve{R}_{\mathrm{II}}\breve{\psi}^{k-1},\breve{v}),$$

по этому

$$\mathrm{A}(\breve{\psi}^k,\breve{v}) = \mathrm{A}((I-\tau\breve{R}_{\mathrm{II}})\breve{\psi}^{k-1},\breve{v}),\ \breve{\psi}^k = (I-\tau\breve{R}_{\mathrm{II}})\breve{\psi}^{k-1}.$$

Полагаем, что $\breve{T} = I - \tau\breve{R}_{\mathrm{II}}$, тогда

$$\mathrm{A}(\breve{\psi}^k,\breve{\psi}^k) = \mathrm{A}(\breve{T}\breve{\psi}^{k-1},\breve{T}\breve{\psi}^{k-1}) \le \sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}_2}\left(\frac{\mathrm{A}(\breve{T}\breve{\psi},\breve{T}\breve{\psi})}{\mathrm{A}(\breve{\psi},\breve{\psi})}\right)\mathrm{A}(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1}) \le$$

учитываем, что оператор $\breve{T}$ симметричный

$$\le \left(\sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}_2}\left(\frac{\mathrm{A}(\breve{T}\breve{\psi},\breve{\psi})}{\mathrm{A}(\breve{\psi},\breve{\psi})}\right)\right)^2 \mathrm{A}(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1}) =$$

$$= \left(\sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}_2}\left(1-\tau\frac{\mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{\psi},\breve{\psi})}{\mathrm{A}(\breve{\psi},\breve{\psi})}\right)\right)^2 \mathrm{A}(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1}) \le$$

$$\le \max\left\{(1-\tau\beta_1)^2,\, (1-\tau\beta_2)^2\right\}\mathrm{A}(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1}).$$

При оптимальном выборе итерационного параметра

$$\tau = 2/(\breve{\beta}_1 + \breve{\beta}_2)$$

получаем

$$\mathrm{A}(\breve{\psi}^k,\breve{\psi}^k) \le q^2 \mathrm{A}(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1})\,,\ \left\|\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le q\left\|\breve{u}^{k-1} - \breve{u}\right\|_{\breve{V}},$$

а далее, ч.т.д.

Отметим, что теорема 2.3.1 следует из утверждений 2.3.1 и 2.3.2.

2.4. Продолженная гармоническая система на конечномерном подпространстве пространства Соболева

Рассмотрим продолженную задачу для уравнения Пуассона как задачу продолженной гармонической системы на конечномерном подпространстве. Рассмотрим дискретизацию продолженной задачи для уравнения Пуассона как задачу продолженной гармонической системы со следующим видом краевых условий, когда

$$\Pi = (0;b_1)\times(0;b_2),\ \Gamma_1 = \{b_1\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{b_2\},$$

$$\Gamma_2 = \{0\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{0\},\ b_1, b_2 \in (0;+\infty).$$

В прямоугольной области определим сетку с узлами

$$(x_i; y_j) = \big((i-1{,}5)h_1; (j-1{,}5)h_2\big),$$

$$h_1 = b_1/(m-1{,}5),\ h_2 = b_2/(n-1{,}5),\ i = 1,2\ldots,m,\ j = 1,2\ldots,n,\ m-2, n-2 \in \mathbb{N}.$$

Введем сеточные функции на множестве узлов введенной сетки

$$v_{i,j} = v(x_i; y_j) \in \mathbb{R},\ i = 1,2\ldots,m,\ j = 1,2\ldots,n,\ m-2, n-2 \in \mathbb{N}.$$

Применим восполнение сеточных функций с учетом выбранных краевых условий, используя линейные базисные функции

$$\Phi^{i,j}(x;y) = \Psi^{1,i}(x)\Psi^{2,j}(y),\ i = 2\ldots,m-1,\ j = 2\ldots,n-1,\ m-2, n-2 \in \mathbb{N},$$

$$\Psi^{1,i}(x) = [2/i]\Psi(x/h_1 - i + 3{,}5) + \Psi(x/h_1 - i + 2{,}5),$$

$$\Psi^{2,j}(y) = [2/j]\Psi(y/h_2 - j + 3{,}5) + \Psi(y/h_2 - j + 2{,}5),$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} z, & z \in [0;1], \\ 2-z, & z \in [1;2], \\ 0, & z \notin (0;2). \end{cases}$$

Здесь $[\bullet]-$ функция целая часть числа. Полагаем, что значения у базисных функций вне прямоугольной области равны нулю

$$\Phi^{i,j}(x;y) = 0,\ (x;y) \notin \Pi,\ i = 2\ldots,m-1,\ j = 2\ldots,n-1,\ m-2, n-2 \in \mathbb{N}.$$

Комбинации базисных функций являются конечномерным подпространством в пространстве решения расширенной задачи

$$\tilde{V}=\left\{\tilde{v}=\sum_{i=2}^{m-1}\sum_{j=2}^{n-1}v_{i,j}\Phi^{i,j}(x;y)\right\}\subset\breve{V}.$$

Отметим, что известны оценки сходимости следующего вида [60]:

$$\|\breve{u}-\tilde{u}\|_{W_2^{m_1}(\Pi)}\le ch^{m_2-m_1}\|\breve{u}\|_{W_2^{m_2}(\Pi)},\ \lim_{h\to 0}\|\breve{u}-\tilde{u}\|_{W_2^{1}(\Pi)}=0,\ h=\max\{h_1,h_2\}.$$

Приведем продолженную задачу на введенном конечномерном подпространстве в вариационном виде

$$\tilde{u}\in\tilde{V}:\ \mathrm{A}_1(\tilde{u},I_1\tilde{v})+\mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u},\tilde{v})=F_1(I_1\tilde{v})\ \forall\tilde{v}\in\tilde{V}. \qquad (2.4.1)$$

В конечномерном пространстве лежит конечномерное подпространство решения продолженной задачи. Это конечномерное подпространство решений у исходной задачи в первой области при продолжении нулем на замыкание второй области

$$\tilde{V}_1=\tilde{V}_1(\Pi)=\left\{\tilde{v}_1\in\tilde{V}:\tilde{v}_1\big|_{\Pi\setminus\Omega_1}=0\right\}.$$

Полагаем, что оператор проектирования действует аналогично на соответствующих конечномерных подпространствах. При этом считаем, например, что оператор проектирования на пространство решений продолженной задачи обнуляет коэффициенты у базисных функций носители, у которых не содержатся полностью в первой области

$$I_1:\tilde{V}\mapsto\tilde{V}_1,\ \tilde{V}_1=imI_1,\ I_1=I_1^2.$$

Дополнительно введем соответствующие конечномерные подпространства

$$\tilde{V}_3=\tilde{V}_3(\Pi)=\left\{\tilde{v}_3\in\tilde{V}:\tilde{v}_3\big|_{\Pi\setminus\Omega_{\mathrm{II}}}=0\right\},\ \tilde{V}_0=\tilde{V}_1\oplus\tilde{V}_3,$$

$$\tilde{V}_2=\tilde{V}_2(\Pi)=\left\{\tilde{v}_2\in\tilde{V}:\mathrm{A}(\tilde{v}_2,\tilde{v}_0)=0\ \forall\tilde{v}_0\in\tilde{V}_0\right\},$$

$$\tilde{V}=\tilde{V}_1\oplus\tilde{V}_2\oplus\tilde{V}_3=\tilde{V}_1\oplus\tilde{V}_{\mathrm{II}},\ \tilde{V}_{\mathrm{I}}=\tilde{V}_1\oplus\tilde{V}_2,\ \tilde{V}_{\mathrm{II}}=\tilde{V}_2\oplus\tilde{V}_3.$$

Полагаем, что для конечномерных подпространств выполняются предположения для продолжения функций в аналогичном виде

$$\exists\tilde{\beta}_1\in(0;1],\ \tilde{\beta}_2\in[\tilde{\beta}_1;1]:\ \tilde{\beta}_1\mathrm{A}(\tilde{v}_2,\tilde{v}_2)\le\mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{v}_2,\tilde{v}_2)\le\tilde{\beta}_2\mathrm{A}(\tilde{v}_2,\tilde{v}_2)\ \forall\tilde{v}_2\in\tilde{V}_2.$$

Решение продолженной задачи на конечномерном подпространстве существует, единственно. На конечномерном подпространстве это решение у исходной задачи на первой области с нулевым продолжением на остальной части прямоугольной области. Заметим на конечномерном подпространстве решение исходной задачи и решение исходной задачи, продолженное нулем, т.е. решение продолженной задачи могут обозначаться одинаково как функция и ее продолжение.

2.5. Анализ продолженной гармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве пространства Соболева

Рассмотрим анализ продолженной задачи для уравнения Пуассона как задачу продолженной гармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве. Рассмотрим на конечномерном подпространстве модифицированный метод фиктивных компонент при решении краевой задачи с условием Дирихле для уравнения Пуассона как вычислительную систему для анализа гармонической системы, продолженной гармонической системы. Это следующий итерационный процесс приближённых вычислений на аналитическом, непрерывном уровне:

$$\tilde{u}^k \in \tilde{V} : \mathrm{A}(\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}, \tilde{v}) = -\tau_{k-1}(\mathrm{A}_1(\tilde{u}^{k-1}, I_1\tilde{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u}^{k-1}, \tilde{v}) - F_1(I_1\tilde{v}))\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = \tau = 2/(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \forall \tilde{u}^0 \in \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}. \tag{2.5.1}$$

В подпространстве $\tilde{V}$ введем норму

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{V}} = \|\tilde{v}\|_{\tilde{V}}.$$

Следствие 2.5.1. *Для итерационного процесса из (2.5.1) имеет место следующая оценка относительной ошибки*

$$\left\|\tilde{u}^k - \tilde{u}\right\|_{\tilde{V}} \le \varepsilon \left\|\tilde{u}^0 - \tilde{u}\right\|_{\tilde{V}},\ k \in \mathbb{N},$$

где

$$\varepsilon=\delta_1 q^{k-1},\ \delta_1=\sqrt{\|I_1\|_{\tilde V}^2-1},\ 0\le q=(\tilde\beta_2-\tilde\beta_1)\big/(\tilde\beta_1+\tilde\beta_2)<1.$$

Предложение 2.5.1. *Если в итерационном процессе из (2.5.1)* $\tilde u^{k-1}=\tilde u$*, то* $\tilde u^k=\tilde u$.

Предложение 2.5.2. *Для итерационного процесса из (2.5.1) выполняются равенства:*

$$\forall k\in\mathbb{N}\ \mathrm{A}_1(\tilde u^k,\tilde v_0)=F_1(\tilde v_0),\ \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde u^k,\tilde v_0)=0\ \forall\tilde v_0\in\tilde V_0.$$

Приближение представляется в виде суммы точного решения и ошибки

$$\tilde u^k=\tilde u+\tilde\psi^k,\ k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

Предложение 2.5.3. *В итерационном процессе из (2.5.1) ошибка принадлежит подпространству, т.е.* $\tilde\psi^k=\tilde\psi_2^k\in\tilde V_2\ \forall k\in\mathbb{N}$, *приближение принадлежит подпространству, т.е.* $\tilde u^k=\tilde u_{\mathrm{I}}^k\in\tilde V_{\mathrm{I}}\ \forall k\in\mathbb{N}.$

Утверждение 2.5.1. *При* $k=1$ *в итерационном процессе из (2.5.1) имеет место следующая оценка*

$$\|\tilde u^1-\tilde u\|_{\tilde V}\le\delta_1\|\tilde u^0-\tilde u\|_{\tilde V},\ \delta_1=\sqrt{\|I_1\|_{\tilde V}^2-1}.$$

Утверждение 2.5.2. *При* $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ *в итерационном процессе из (2.5.1) выполняется оценка*

$$\|\tilde u^k-\tilde u\|_{\tilde V}\le q^{k-1}\|\tilde u^1-\tilde u\|_{\tilde V},$$

где

$$0\le q=(\tilde\beta_2-\tilde\beta_1)\big/(\tilde\beta_1+\tilde\beta_2)<1.$$

Отметим, что следствие 2.5.1 следует из утверждений 2.5.1, 2.5.2 и теоремы 2.3.1.

2.6. Продолженная гармоническая система на пространстве Евклида

Рассмотрим продолженную задачу для уравнения Пуассона как задачу продолженной гармонической системы в матричном виде. Аппроксимируя продолженную задачу для уравнения Пуассона как задачу продолженной гармонической системы с помощью конечномерного подпространства, получим систему уравнений

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N : B\bar{u} = \bar{f},\ \bar{f} \in \mathbb{R}^N. \tag{2.6.1}$$

Также считаем, что оператор проектирования на пространство решений продолженной задачи обнуляет коэффициенты у базисных функций носители, которых не содержатся полностью в первой области. Получаем продолженную задачу, систему в матричном виде, определив продолженную матрицу и продолженную правую часть системы

$$\left\langle B\bar{u},\bar{v}\right\rangle = \mathrm{A}_1(\tilde{u}, I_1\tilde{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u},\tilde{v})\ \forall \tilde{u},\tilde{v} \in \tilde{V},\ \left\langle \bar{f},\bar{v}\right\rangle = F_1(I_1\tilde{v})\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\left\langle \bar{f},\bar{v}\right\rangle = (\bar{f},\bar{v})h_1h_2 = \bar{f}\,\bar{v}h_1h_2,\ \bar{v} = (v_1, v_2, ..., v_N)' \in \mathbb{R}^N, N = (m-2)(n-2).$$

При этом нумеруем первыми базисные функции носители, у которых полностью лежат в первой области. Затем нумеруем базисные функции носители, у которых пересекают границу первой области и второй области вместе. Заканчиваем нумерацию на базисных функциях носители, у которых полностью лежат во второй области. При этой нумерации возникающие векторы имеют такое строение

$$\bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')',\ \bar{u} = (\bar{u}_1{}',\ \bar{0}',\bar{0}')',\ \ \bar{f} = (\bar{f}_1',\bar{0}',\ \bar{0}')'.$$

Матрица имеет такую известную структуру

$$B = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

Элементы у матрицы и компоненты вектора у правой части, для приведенной системы находятся по формулам

$$b_{i,j} = h_1^{-1}h_2^{-1}(\mathrm{A}_1(\Phi_i, I_1\Phi_j) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\Phi_i,\Phi_j)),\ f_i = h_1^{-1}h_2^{-1}F_1(I_1\Phi_i),\ i, j = 1,2,...,N.$$

Зададим матрицы, порождаемые соответствующими билинейными формами

$$\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{I}}\bar{u},\bar{v}\right\rangle = \mathrm{A}_1(\tilde{u},\tilde{v}),\ \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{u},\bar{v}\right\rangle = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u},\tilde{v})\ \forall \tilde{u},\tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Эти матрицы имеют следующую структуру

$$\mathrm{A}_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0\\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23}\\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33}\end{bmatrix}.$$

Определим расширенную матрицу

$$\mathrm{A}=\mathrm{A}_{\mathrm{I}}+\mathrm{A}_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0\\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{23}\\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0\\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23}\\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33}\end{bmatrix}.$$

Введем подпространство векторов

$$\bar{V}_1=\left\{\bar{v}=(\bar{v}_1{}',\bar{v}_2{}',\bar{v}_3{}')'\in\mathbb{R}^N:\bar{v}_2=\bar{0},\ \bar{v}_3=\bar{0}\right\}.$$

Дополнительно определим подпространства векторов, как ранее вводили соответствующие конечномерные подпространства

$$\bar{V}_3=\left\{\bar{v}=(\bar{v}_1{}',\bar{v}_2{}',\bar{v}_3{}')'\in\mathbb{R}^N:\bar{v}_1=\bar{0},\ \bar{v}_2=\bar{0}\right\},\ \bar{V}_0=\bar{V}_1\oplus\bar{V}_3,$$

$$\bar{V}_2=\left\{\bar{v}=(\bar{v}_1{}',\bar{v}_2{}',\bar{v}_3{}')'\in\mathbb{R}^N:\mathrm{A}_{11}\bar{v}_1+\mathrm{A}_{12}\bar{v}_2=\bar{0},\ \mathrm{A}_{32}\bar{v}_2+\mathrm{A}_{33}\bar{v}_3=\bar{0}\right\},$$

$$\mathbb{R}^N=\bar{V}_1\oplus\bar{V}_2\oplus\bar{V}_3=\bar{V}_1\oplus\bar{V}_{\mathrm{II}},\ \bar{V}_{\mathrm{I}}=\bar{V}_1\oplus\bar{V}_2,\ \bar{V}_{\mathrm{II}}=\bar{V}_2\oplus\bar{V}_3.$$

Полагаем, выполняются теже предположения о продолжении теперь в матричном виде

$$\exists\beta_1\in(0;+\infty),\ \beta_2\in[\beta_1;+\infty):\beta_1\left\langle \mathrm{A}\bar{v}_2,\bar{v}_2\right\rangle\le\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{v}_2,\bar{v}_2\right\rangle\le\beta_2\left\langle \mathrm{A}\bar{v}_2,\bar{v}_2\right\rangle\ \forall\bar{v}_2\in\bar{V}_2.$$

В методе фиктивных компонент обычно решается в матричном виде продолженная задача

$$B\bar{u}=\bar{f},\ \begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0\\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23}\\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{u}_1\\ \bar{0}\\ \bar{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{f}_1\\ \bar{0}\\ \bar{0}\end{bmatrix}.$$

Это решение исходной задачи в матричном виде и это нулевое решение у фиктивной задачи в матричном виде

$$\mathrm{A}_{11}\bar{u}_1=\bar{f}_1,\ \begin{bmatrix}\mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23}\\ \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{u}_2\\ \bar{u}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{0}\\ \bar{0}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\bar{u}_2\\ \bar{u}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{0}\\ \bar{0}\end{bmatrix}.$$

2.7. Анализ продолженной гармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент на пространстве Евклида

Рассмотрим анализ продолженной задачи для уравнения Пуассона как задачи продолженной гармонической системы модифицированным методом фиктивных компонент в матричном виде, совпадающим здесь с методом фиктивных компонент

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : \mathrm{A}(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}),$$

$$\tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = \tau = 2/(\beta_1 + \beta_2),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1. \tag{2.7.1}$$

На любом шаге в этом итерационном процессе возникает расширенная задача, расширенная матрица

$$\langle \mathrm{A}\bar{u}, \bar{v} \rangle = \mathrm{A}(\tilde{u}, \tilde{v})\ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Вычисляем элементы этой матрицы

$$a_{i,j} = h_1^{-1} h_2^{-1} \mathrm{A}(\Phi_i, \Phi_j),\ i, j = 1, 2, ..., N.$$

Используем следующую норму

$$\|\bar{v}\|_{\mathrm{A}} = \sqrt{\langle \mathrm{A}\bar{v}, \bar{v} \rangle}\ \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Следствие 2.7.1. *Для итерационного процесса из (2.7.1) имеет место следующая оценка*

$$\|\bar{u}^k - \bar{u}\|_{\mathrm{A}} \le \varepsilon \|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_{\mathrm{A}},\ k \in \mathbb{N},$$

где

$$\varepsilon = \delta_1 q^{k-1},\ \delta_1 = \sqrt{\|I_1\|_{\tilde{V}}^2 - 1},\ 0 \le q = (\beta_2 - \beta_1)/(\beta_1 + \beta_2) < 1.$$

Отметим, что следствие 2.7.1 следует из следствия 2.5.1, из утверждений 2.5.1, 2.5.2 и теоремы 2.3.1.

Для решения задач из (2.6.1) с N неизвестными итерационным процессом из (2.7.1) с относительной погрешностью ε, требуется $O(\ln N + \ln \varepsilon^{-1})$ итераций. Для выбора итерационных параметров и ускорения сходимости итерационного процесса из (2.7.1) можно использовать известные вариационные методы и рекомендовать со второй итерации метод скорейшего спуска [42, 67, 70].

Замечание 2.7.1. В работах [124, 125] отмечаось, что для численного решения задачи (2.4.1), (2.6.1) итерационным процессом (2.5.1), (2.7.1), предложенным в [128, 129] при дискретизации оператор I_1 можно строить независящим от шага сеткки, когда производится преобразование функций в Ω_1 не только в близи границы $\overline{S}$ и иметь не зависящую от шагов сетки величину δ_1. И это было проделано в работе [53] для решения эллиптической краевой задачи, именно второго порядка, когда теоретически был построен явный оператор продолжения $P = I - I_1$ с нормой, не зависящей от шага сетки, где I оператор тождественного преобразования.

Определим нормы, порождаемые расширенной матрицей в квадрате и единичной матрицей

$$\|\overline{v}\|_{\mathrm{A}^2} = \sqrt{\left\langle \mathrm{A}^2\overline{v},\overline{v}\right\rangle},\ \|\overline{v}\| = \sqrt{\left\langle \overline{v},\overline{v}\right\rangle}\ \forall\overline{v}\in\mathbb{R}^N.$$

Лемма 2.7.1 *В методе фиктивных компонент из (2.7.1) имеет место оценка*

$$\left\|\overline{u}^1-\overline{u}\right\|_{\mathrm{A}^2} \le 2\left\|\overline{u}^0-\overline{u}\right\|_{\mathrm{A}^2}.$$

Доказательство. Обозначим ошибку итерационного процесса из (2.7.1)

$$\overline{\psi}^k = \overline{u}^k - \overline{u},\ k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

Получим равенства в итерационном процессе

$$\left(\mathrm{A}(\overline{\psi}^1-\overline{\psi}^0)\right)^2 = \left(-\mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0\right)^2,\ \mathrm{A}\overline{\psi}^1\mathrm{A}\overline{\psi}^1 - 2\mathrm{A}\overline{\psi}^1\mathrm{A}\overline{\psi}^0 + \mathrm{A}\overline{\psi}^0\mathrm{A}\overline{\psi}^0 = \mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0\mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0.$$

Отметим наличие неравенства

$$\mathrm{A}\overline{\psi}^0\mathrm{A}\overline{\psi}^0 \ge \mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0\mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0.$$

Получим неравенства

$$\mathrm{A}\overline{\psi}^1\mathrm{A}\overline{\psi}^1 - 2\mathrm{A}\overline{\psi}^1\mathrm{A}\overline{\psi}^0 \le 0,\ (\mathrm{A}\overline{\psi}^1\mathrm{A}\overline{\psi}^1)^2 \le (2\mathrm{A}\overline{\psi}^1\mathrm{A}\overline{\psi}^0)^2 \le 4(\mathrm{A}\overline{\psi}^1\mathrm{A}\overline{\psi}^1)(\mathrm{A}\overline{\psi}^0\mathrm{A}\overline{\psi}^0).$$

Сокращая, получаем неравенства

$$\mathrm{A}\overline{\psi}^1\mathrm{A}\overline{\psi}^1 \le 4\mathrm{A}\overline{\psi}^0\mathrm{A}\overline{\psi}^0,\ \left\|\overline{\psi}^1\right\|_{\mathrm{A}^2} \le 2\left\|\overline{\psi}^0\right\|_{\mathrm{A}^2},\ \left\|\overline{u}^1-\overline{u}\right\|_{\mathrm{A}^2} \le 2\left\|\overline{u}^0-\overline{u}\right\|_{\mathrm{A}^2}.$$

Лемма 2.7.2. *В итерационном процессе из (2.7.1) имеет место оценка с положительной величиной в неравенстве*

$$\left\|\overline{u}^1-\overline{u}\right\|_{\mathrm{A}} \le d\left\|\overline{u}^1-\overline{u}\right\|_{\mathrm{A}^2}.$$

Положительная величина в неравенстве оценивается в виде асимптотического равенства

$$d \approx (\lambda_{1,1}+\kappa_{\mathrm{II}})^{1/2}\lambda_{1,1}^{-1},\ h_1,h_2 \to 0,\ \lambda_{1,1}=\pi^2(b_1^{-2}+b_2^{-2})\big/4.$$

Доказательство. Отметим, что имеет место неравенство с положительной величиной

$$\exists d>0:(\mathrm{A}\breve{\psi}^1,\breve{\psi}^1)\le d^2(\mathrm{A}\breve{\psi}^1,\Lambda\breve{\psi}^1).$$

Получим оценку указанной положительной величины в неравенстве в виде асимптотического равенства

$$((-\Delta+\kappa_{\mathrm{II}})\breve{\psi}^1,\breve{\psi}^1)=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}(\lambda_{i,j}+\kappa_{\mathrm{II}})c_{i,j}^2=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{i,j}c_{i,j}^2+\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\kappa_{\mathrm{II}}c_{i,j}^2\le$$

$$\le\frac{1}{\lambda_{1,1}}\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{i,j}^2c_{i,j}^2+\frac{\kappa_{\mathrm{II}}}{\lambda_{1,1}^2}\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{i,j}^2c_{i,j}^2=\frac{\lambda_{1,1}+\kappa_{\mathrm{II}}}{\lambda_{1,1}^2}\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{i,j}^2c_{i,j}^2=\frac{\lambda_{1,1}+\kappa_{\mathrm{II}}}{\lambda_{1,1}^2}(\Delta\breve{\psi}^1,\Delta\breve{\psi}^1).$$

Здесь использовали решения спектральной задачи

$$\breve{\psi}^1=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}c_{i,j}\breve{\varphi}_{i,j},\ (\breve{\varphi}_{i,j},\breve{\varphi}_{i,j})=1,\ (\breve{\varphi}_{i,j},\breve{\varphi}_{p,l})=0,\ (i;j)\ne(p;l),\ i,j,p,l\in\mathbb{N},$$

где

$$\breve{\varphi}_{i,j}\in V\big((0;b_1)\times(0;b_2)\big):-\Delta\breve{\varphi}_{i,j}=\lambda_{i,j}\breve{\varphi}_{i,j},\ \breve{\varphi}_{i,j}\ne 0,\ \lambda_{i,j}=0,25\pi^2\Big((2i-1)b_1^{-2}+(2j-1)b_2^{-2}\Big),\ i,j\in\mathbb{N}.$$

Теорема 2.7.1. *В методе фиктивных компонент из (2.7.1) имеет место оценка сходимости*

$$\left\|\overline{u}^k-\overline{u}\right\|_{\mathrm{A}} \le \varepsilon\left\|\overline{u}^0-\overline{u}\right\|_{\mathrm{A}^2},$$

$$\varepsilon=cq^{k-1},\ c=2d\in(0+\infty),\ k\in\mathbb{N},\ 0\le q=(\beta_2-\beta_1)/(\beta_1+\beta_2)<1,$$

$$d \approx (\lambda_{1,1}+\kappa_{\mathrm{II}})^{1/2}\lambda_{1,1}^{-1},\ h_1,h_2 \to 0,\ \lambda_{1,1}=\pi^2(b_1^{-2}+b_2^{-2})\big/4.$$

Абсолютная ошибка у метода фиктивных компонент имеет скорость сходимости в энергетической норме не хуже, чем скорость сходимости геометрической прогрессии.

2.8. Асимптотически оптимальный анализ продолженной гармонической системы методом итерационных расширений на пространстве Евклида

Для решения задачи из (2.6.1) используем новый метод итерационных расширений. Определим теперь расширенную матрицу по-новому, в виде суммы первой матрицы и второй матрицей, умноженной на положительный параметр

$$C = \mathrm{A}_{\mathrm{I}} + \gamma \mathrm{A}_{\mathrm{II}},\ \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix},\ \gamma \in (0;+\infty).$$

Полагаем, что еще выполняются положения о продолжении функций, записываемые в следующем виде

$$\exists \gamma_1 \in (0;+\infty),\ \gamma_2 \in [\gamma_1;+\infty) : \gamma_1^2 \left\langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2 \right\rangle \le \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{v}_2, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{v}_2 \right\rangle \le \gamma_2^2 \left\langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2 \right\rangle\ \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2,$$

$$\exists \alpha \in (0;+\infty) : \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{I}}\bar{v}_2, \mathrm{A}_{\mathrm{I}}\bar{v}_2 \right\rangle \le \alpha^2 \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{v}_2, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{v}_2 \right\rangle\ \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2.$$

Метод итерационных расширений является обобщением метода фиктивных компонент, когда используется дополнительный параметра при выборе расширенной матрицы, а итерационные параметры выбираются на основе метода минимальных невязок

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}),\ k \in \mathbb{N}, \tag{2.8.1}$$

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1,\ \gamma > \alpha,\ \tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

где для вычисления итерационных параметров последовательно вычисляем невязки, поправки, эквивалентные невязки

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f},\ \bar{w}^{k-1} = C^{-1}\bar{r}^{k-1},\ \bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Определим норму, порождаемую расширенной матрицей

$$\|\overline{v}\|_{C^2} = \sqrt{\left\langle C^2\overline{v},\overline{v}\right\rangle}\ \ \forall\overline{v}\in\mathbb{R}^N.$$

Лемма 2.8.1. Для *итерационного процесса из (2.8.1) выполняется оценка*

$$\left\|\overline{u}^1-\overline{u}\right\|_{C^2}\le 2\left\|\overline{u}^0-\overline{u}\right\|_{C^2}.$$

Доказательство. Обозначим в процессе из (2.8.1) ошибку

$$\overline{\psi}^k=\overline{u}^k-\overline{u},\ k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

В итерационном процессе получаем равенства

$$\left\langle C(\overline{\psi}^1-\overline{\psi}^0),C(\overline{\psi}^1-\overline{\psi}^0)\right\rangle=\left\langle -\mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0,-\mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0\right\rangle,$$

$$\left\langle C\overline{\psi}^1,C\overline{\psi}^1\right\rangle-2\left\langle C\overline{\psi}^1,C\overline{\psi}^0\right\rangle+\left\langle C\overline{\psi}^0,C\overline{\psi}^0\right\rangle=\left\langle \mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0,\mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0\right\rangle.$$

Отметим, что выполняется неравенство

$$\left\langle C\overline{\psi}^0,C\overline{\psi}^0\right\rangle\ge\left\langle \mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0,\mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0\right\rangle.$$

Замечаем выполнение неравенств

$$\left\langle C\overline{\psi},^1C\overline{\psi}^1\right\rangle-2\left\langle C\overline{\psi}^1,C\overline{\psi}^0\right\rangle\le 0,\left\langle C\overline{\psi}^1,C\overline{\psi}^1\right\rangle^2\le 4\left\langle C\overline{\psi}^1,C\overline{\psi}^0\right\rangle^2\le 4\left\langle C\overline{\psi}^1,C\overline{\psi}^1\right\rangle\left\langle C\overline{\psi}^0,C\overline{\psi}^0\right\rangle.$$

После сокращения получаем неравенства

$$\left\langle C\overline{\psi}^1,C\overline{\psi}^1\right\rangle\le 4\left\langle C\overline{\psi}^0,C\overline{\psi}^0\right\rangle,\ \left\|\overline{\psi}^1\right\|_{C^2}\le 2\left\|\overline{\psi}^0\right\|_{C^2},\ \left\|\overline{u}^1-\overline{u}\right\|_{C^2}\le 2\left\|\overline{u}^0-\overline{u}\right\|_{C^2}.$$

Теорема 2.8.1. *Для метода итерационных расширений из* (2.8.1) *имеет место оценка сходимости*

$$\left\|\overline{u}^k-\overline{u}\right\|_{C^2}\le\varepsilon\left\|\overline{u}^0-\overline{u}\right\|_{C^2},\ \varepsilon=2(\gamma_2/\gamma_1)(\alpha/\gamma)^{k-1},\ k\in\mathbb{N}.$$

Последовательность относительных ошибок в более сильной норме, чем норма энергетическая оценивается сверху сходящейся геометрической прогрессией.

Доказательство. Из итерационного процесса имеем равенства для ошибок и невязок

$$\overline{\psi}^k=\overline{\psi}^{k-1}-\tau_k C^{-1}\mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^{k-1},\ \overline{r}^k=\overline{r}^{k-1}-\tau_k\mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}\setminus 1.$$

Выбираем параметры

$$\tau_{k-1} = \frac{\left\langle \mathrm{A_{II}} C^{-1}\overline{r}^{\,k-1}, \overline{r}^{\,k-1} \right\rangle}{\left\langle \mathrm{A_{II}} C^{-1}\overline{r}^{\,k-1}, \mathrm{A_{II}} C^{-1}\overline{r}^{\,k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \overline{r}^{\,k-1}, \overline{\eta}^{\,k-1} \right\rangle}{\left\langle \overline{\eta}^{\,k-1}, \overline{\eta}^{\,k-1} \right\rangle}.$$

Заметим наличие равенства

$$\tau_{k-1} = \frac{\left\langle \mathrm{A_{II}} C^{-1}\overline{r}^{\,k-1}, \overline{r}^{\,k-1} \right\rangle}{\left\langle \mathrm{A_{II}} C^{-1}\overline{r}^{\,k-1}, \mathrm{A_{II}} C^{-1}\overline{r}^{\,k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \mathrm{A_{II}} \overline{w}^{k-1}, C\overline{w}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \mathrm{A_{II}} \overline{w}^{k-1}, \mathrm{A_{II}} \overline{w}^{k-1} \right\rangle}.$$

Используем обозначения

$$\mathrm{A_I} \overline{w}^{k-1} = \overline{a},\ \mathrm{A_{II}} \overline{w}^{k-1} = \overline{b}.$$

Отметим положительность выбираемых параметров

$$\tau_k = \frac{\left\langle \overline{b}, \overline{a} + \gamma \overline{b} \right\rangle}{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle} = \gamma - \frac{\left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle}{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle} \ge \gamma - \frac{\left\langle \overline{a}, \overline{a} \right\rangle^{1/2} \left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle^{1/2}}{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle} \ge \gamma - \frac{\left\langle \overline{a}, \overline{a} \right\rangle^{1/2}}{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle^{1/2}} \ge \gamma - \alpha > 0.$$

Запишем скалярные произведения с невязками при выбранных параметрах

$$\left\langle \overline{r}^{\,k}, \overline{r}^{\,k} \right\rangle = \left\langle \overline{r}^{\,k-1}, \overline{r}^{\,k-1} \right\rangle - \frac{\left\langle \mathrm{A_{II}} C^{-1}\overline{r}^{\,k-1}, \overline{r}^{\,k-1} \right\rangle^2}{\left\langle \mathrm{A_{II}} C^{-1}\overline{r}^{\,k-1}, \mathrm{A_{II}} C^{-1}\overline{r}^{\,k-1} \right\rangle}.$$

Выписываем отношение скалярных произведений невязок

$$q_k^2 = \frac{\left\langle \overline{r}^{\,k}, \overline{r}^{\,k} \right\rangle}{\left\langle \overline{r}^{\,k-1}, \overline{r}^{\,k-1} \right\rangle} = 1 - \frac{\left\langle \mathrm{A_{II}} C^{-1}\overline{r}^{\,k-1}, \overline{r}^{\,k-1} \right\rangle^2}{\left\langle \mathrm{A_{II}} C^{-1}\overline{r}^{\,k-1}, \mathrm{A_{II}} C^{-1}\overline{r}^{\,k-1} \right\rangle \left\langle \overline{r}^{\,k-1}, \overline{r}^{\,k-1} \right\rangle} =$$

$$= \frac{\left\langle \mathrm{A_{II}} \overline{w}^{k-1}, \mathrm{A_{II}} \overline{w}^{k-1} \right\rangle \left\langle C\overline{w}^{k-1}, C\overline{w}^{k-1} \right\rangle - \left\langle \mathrm{A_{II}} \overline{w}^{k-1}, C\overline{w}^{k-1} \right\rangle^2}{\left\langle \mathrm{A_{II}} \overline{w}^{k-1}, \mathrm{A_{II}} \overline{w}^{k-1} \right\rangle \left\langle C\overline{w}^{k-1}, C\overline{w}^{k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle \left\langle \overline{a} + \gamma \overline{b}, \overline{a} + \gamma \overline{b} \right\rangle - \left\langle \overline{b}, \overline{a} + \gamma \overline{b} \right\rangle^2}{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle \left\langle \overline{a} + \gamma \overline{b}, \overline{a} + \gamma \overline{b} \right\rangle}.$$

Введем обозначения

$$\left\langle \overline{a}, \overline{a} \right\rangle = a,\ \left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle = b,\ \left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle = z,$$

тогда

$$q_k^2 = \frac{ab - z^2}{b(a + \gamma^2 b + 2\gamma z)} \le \max_{|z| \le \sqrt{ab}} q_k^2(z) = q_k^2\left(\frac{-a}{\gamma}\right) = \frac{a}{\gamma^2 b} \le \frac{\alpha^2}{\gamma^2} = q^2,$$

учитывая, что

$$q_k^2 \geq 0, \left(q_k^2(z)\right)_z' = \frac{-2\gamma(z+a/\gamma)(z+\gamma b)}{b(a+\gamma^2 b+2\gamma z)^2}, -\gamma b < \frac{a+\gamma^2 b}{2\gamma} < -\sqrt{ab} < -\frac{a}{\gamma} < \sqrt{ab}.$$

Устанавливаем неравенства

$$\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{\psi}^k, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{\psi}^k \right\rangle \leq q^2 \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{\psi}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{\psi}^{k-1} \right\rangle, \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{\psi}^k, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{\psi}^k \right\rangle \leq q^{2(k-1)} \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{\psi}^1, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{\psi}^1 \right\rangle, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Учитывая, что

$$\left\langle C\bar{\psi}^k,\ C\bar{\psi}^k \right\rangle \leq \beta_1^{-2} \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{\psi}^k, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{\psi}^k \right\rangle, \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{\psi}^1, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{\psi}^1 \right\rangle \leq \beta_2^2 \left\langle C\bar{\psi}^1,\ C\bar{\psi}^1 \right\rangle \leq 4\beta_2^2 \left\langle C\bar{\psi}^0,\ C\bar{\psi}^0 \right\rangle,$$

получаем неравенство дающее оценку сходимости метода итерационных расширений

$$\left\langle C\bar{\psi}^k,\ C\bar{\psi}^k \right\rangle \leq 4\gamma_1^{-2}\gamma_2^2 q^{2(k-1)} \left\langle C\bar{\psi}^0,\ C\bar{\psi}^0 \right\rangle.$$

Замечание 2.8.1. *Если в итерационном процессе из (2.8.1)* $\bar{u}^{k-1} = \bar{u}$, *то* $\bar{u}^k = \bar{u}$.

Доказательство. Из итерационного процесса, в этом случае получаем, что

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u} - \bar{f}), k \in \mathbb{N}$$

и

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}) = \bar{0}, \bar{u}^k - \bar{u} = \bar{0}, \bar{u}^k = \bar{u}, k \in \mathbb{N}.$$

Замечание 2.8.2. *В итерационном процессе из (2.8.1) ошибка принадлежит подпространству, т.е.* $\bar{\psi}^k \in \bar{V}_2\ \forall k \in \mathbb{N}$, *приближение принадлежит подпространству, т.е.* $\bar{u}^k \in \bar{V}_{\mathrm{I}}\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. При $k = 1$ из итерационного процесса для ошибки

$$C(\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^0) = -B\bar{\psi}^0,$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} + \gamma\mathrm{A}_{02} & \gamma\mathrm{A}_{23} \\ 0 & \gamma\mathrm{A}_{32} & \gamma\mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^1 - \bar{\psi}_1^0 \\ \bar{\psi}_2^1 \\ \bar{\psi}_3^1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^0 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix},$$

тогда

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} + \gamma\mathrm{A}_{02} & \gamma\mathrm{A}_{23} \\ 0 & \gamma\mathrm{A}_{32} & \gamma\mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^1 \\ \bar{\psi}_2^1 \\ \bar{\psi}_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \mathrm{A}_{21}\bar{\psi}_1^0 \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \bar{\psi}^1 \in \bar{V}_2.$$

Если предположить, что при $k-1$ замечание выполняется, тогда оно выполняется и при k, т.к. из итерационного процесса для ошибки

$$C(\bar{\psi}^k - \bar{\psi}^{k-1}) = -\tau_{k-1} B \bar{\psi}^{k-1},$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20}+\gamma\mathrm{A}_{02} & \gamma\mathrm{A}_{23} \\ 0 & \gamma\mathrm{A}_{32} & \gamma\mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^k - \bar{\psi}_1^{k-1} \\ \bar{\psi}_2^k - \bar{\psi}_2^{k-1} \\ \bar{\psi}_3^k - \bar{\psi}_3^{k-1} \end{bmatrix} = -\tau_{k-1} \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^{k-1} \\ \bar{\psi}_2^{k-1} \\ \bar{\psi}_3^{k-1} \end{bmatrix},$$

тогда

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20}+\gamma\mathrm{A}_{02} & \gamma\mathrm{A}_{23} \\ 0 & \gamma\mathrm{A}_{32} & \gamma\mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^k \\ \bar{\psi}_2^k \\ \bar{\psi}_3^k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \mathrm{A}_{21}\bar{\psi}_1^{k-1} + (\mathrm{A}_{20} + (\gamma - \tau_{k-1})\mathrm{A}_{02})\bar{\psi}_2^{k-1} + (\gamma - \tau_{k-1})\mathrm{A}_{23}\bar{\psi}_3^{k-1} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \bar{\psi}^k \in \bar{V}_2.$$

На основе математической индукции получается доказательство замечания.

2.9. Анализ продолженной гармонической системы методом итерационных расширений в пространстве Соболева

Рассмотрим продолженную гармоническую систему в операторном виде в пространстве Соболева

$$\breve{u} \in \breve{V}: \ \breve{B}\breve{u} = \breve{f}, \qquad (2.9.1)$$

где оператор и правая часть задачи продолженной системы определяются следующим образом

$$(\breve{B}\breve{u}, \breve{v}) = \mathrm{A}_1(\breve{u}, I_1\breve{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}, \breve{v}) \ \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}, \ (\breve{f}, \breve{v}) = F_1(I_1\breve{v}) \ \forall \breve{v} \in \breve{V},$$

$$(\breve{f}, \breve{v}) = \int_{\Pi} \breve{f}\breve{v}\, d\Pi.$$

Отметим, что для пространства Соболева выполняются предположения для продолжения функций, тогда в таком виде

$$\exists \breve{\beta}_1 \in (0;1],\ \breve{\beta}_2 \in [\breve{\beta}_1;1]:\ \breve{\beta}_1(\breve{\mathrm{A}}\breve{v}_2,\breve{v}_2) \le (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2,\breve{v}_2) \le \breve{\beta}_2(\breve{\mathrm{A}}\breve{v}_2,\breve{v}_2)\ \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2,$$

где рассматриваемые операторы определяем таким образом

$$\breve{\mathrm{A}} = \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} + \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}},\ (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\breve{u},\breve{v}) = \mathrm{A}_1(\breve{u},\breve{v}),\ (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v},\breve{v}) = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u},\breve{v})\ \forall \breve{u},\breve{v} \in \breve{V}.$$

Дополнительно определим следующий расширенный оператор

$$\breve{C} = \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} + \gamma\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}},\ \gamma \in (0;+\infty).$$

Полагаем, что также выполняются предположения о продолжении функций, которые запишем в следующем виде

$$\exists \breve{\gamma}_1 \in (0;+\infty),\ \breve{\gamma}_2 \in [\breve{\gamma}_1;+\infty):\ \breve{\gamma}_1^2(\breve{C}\breve{v}_2,\breve{C}\breve{v}_2) \le (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2,\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2) \le \breve{\gamma}_2^2(\breve{C}\breve{v}_2,\breve{C}\breve{v}_2)\ \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2,$$

$$\exists \breve{\alpha} \in (0;+\infty):\ (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\breve{v}_2,\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\breve{v}_2) \le \breve{\alpha}^2(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2,\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2)\ \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2.$$

Рассмотрим теперь метод итерационных расширений в операторном виде в пространстве Соболева

$$\breve{u}^k \in \breve{V}:\ \breve{C}(\breve{u}^k - \breve{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(\breve{B}\breve{u}^{k-1} - \breve{f}),\ k \in \mathbb{N}, \tag{2.9.2}$$

$$\forall \breve{u}^0 \in \breve{V}_1,\ \gamma > \breve{\alpha},\ \tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = (\breve{r}^{k-1},\breve{\eta}^{k-1}) \big/ (\breve{\eta}^{k-1},\breve{\eta}^{k-1}),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

где при вычислении итерационных параметров надо вычислить невязки, поправки и эквивалентные невязки

$$\breve{r}^{k-1} = \breve{B}\breve{u}^{k-1} - \breve{f},\ \breve{w}^{k-1} = \breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1},\ \breve{\eta}^{k-1} = \breve{B}\breve{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Определим норму

$$\|\breve{v}\|_{\breve{C}^2} = \sqrt{(\breve{C}\breve{v},\breve{C}\breve{v})}\ \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Полагаем, что при аппроксимации выполняется

$$\|\breve{v}\|_{\breve{C}^2} \approx \|\bar{v}\|_{C^2}\ \ h_1,h_2 \to 0.$$

Следствие 2.9.1. *В методе итерационных расширений в пространстве Соболева из (2.9.2) выполняются оценки сходимости.*

$$\left\|\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\breve{C}^2} \le \varepsilon \left\|\breve{u}^0 - \breve{u}\right\|_{\breve{C}^2},\ \varepsilon = 2(\breve{\gamma}_2/\breve{\gamma}_1)(\breve{\alpha}/\gamma)^{k-1},\ k \in \mathbb{N},$$

$$\breve{\alpha} \approx \alpha,\ \breve{\gamma}_1 \approx \gamma_1,\ \breve{\gamma}_2 \approx \gamma_2,\ h_1,h_2 \to 0,$$

где относительные ошибки оцениваются бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Замечание 2.9.1. *В следствии 2.9.1 при используемой аппроксимации*

$$\alpha \approx \breve{\alpha} = const,\ \gamma_1 \approx \breve{\gamma}_1 = const,\ \gamma_2 \approx \breve{\gamma}_2 = const,\ h_1, h_2 \to 0.$$

2.10. Анализ продолженной гармонической системы методом итерационных расширений на конечномерном подпространстве пространства Соболева

Рассмотрим продолженную гармоническую систему в операторном виде на конечномерном подпространстве пространства Соболева

$$\tilde{u} \in \tilde{V}:\ \tilde{B}\tilde{u} = \tilde{f}, \tag{2.10.1}$$

где оператор и правая часть задачи продолженной системы на конечномерном подпространстве определяются следующим образом

$$(\tilde{B}\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathrm{A}_1(\tilde{u}, I_1\tilde{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u}, \tilde{v})\ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V},\ (\tilde{f}, \tilde{v}) = F_1(I_1\tilde{v})\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Отметим, что для конечномерного подпространства выполняются предположения для продолжения функций, тогда в таком виде

$$\exists \tilde{\beta}_1 \in (0;1],\ \tilde{\beta}_2 \in [\tilde{\beta}_1;1]:\ \tilde{\beta}_1(\tilde{\mathrm{A}}\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \le (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \le \tilde{\beta}_2(\tilde{\mathrm{A}}\tilde{v}_2, \tilde{v}_2)\ \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2,$$

где рассматриваемые операторы определяем таким образом

$$\tilde{\mathrm{A}} = \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} + \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}},\ (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathrm{A}_1(\tilde{u}, \tilde{v}),\ (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v}, \tilde{v}) = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u}, \tilde{v})\ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Дополнительно определим расширенный оператор на конечномерном подпространстве

$$\tilde{C} = \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} + \gamma\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}},\ \gamma \in (0;+\infty).$$

Полагаем, что выполняются предположения о продолжении функций, которые запишем в следующем виде

$$\exists \tilde{\gamma}_1 \in (0;+\infty),\ \tilde{\gamma}_2 \in [\tilde{\gamma}_1;+\infty):\ \tilde{\gamma}_1^2(\tilde{C}\tilde{v}_2, \tilde{C}\tilde{v}_2) \le (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v}_2, \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v}_2) \le \tilde{\gamma}_2^2(\tilde{C}\tilde{v}_2, \tilde{C}\tilde{v}_2)\ \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2,$$

$$\exists \tilde{\alpha} \in (0;+\infty):\ (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\tilde{v}_2, \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\tilde{v}_2) \le \tilde{\alpha}^2(\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v}_2, \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v}_2)\ \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2.$$

Рассмотрим теперь метод итерационных расширений в операторном виде на конечномерном подпространстве Соболева

$$\tilde{u}^k \in \tilde{V}: \ \tilde{C}(\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(\tilde{B}\tilde{u}^{k-1} - \tilde{f}), \ k \in \mathbb{N}, \tag{2.10.2}$$

$$\forall \tilde{u}^0 \in \tilde{V}_1, \ \gamma > \tilde{\alpha}, \ \tau_0 = 1, \ \tau_{k-1} = (\tilde{r}^{k-1}, \tilde{\eta}^{k-1}) \big/ (\tilde{\eta}^{k-1}, \tilde{\eta}^{k-1}), \ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

где при вычислении итерационных параметров надо вычислить невязки, поправки и эквивалентные невязки

$$\tilde{r}^{k-1} = \tilde{B}\tilde{u}^{k-1} - \tilde{f}, \ \tilde{w}^{k-1} = \tilde{C}^{-1}\tilde{r}^{k-1}, \ \tilde{\eta}^{k-1} = \tilde{B}\tilde{w}^{k-1}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Определим норму

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{C}^2} = \sqrt{(\tilde{C}\tilde{v}, \tilde{C}\tilde{v})} \ \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Полагаем, что при аппроксимации выполняется

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{C}^2} \approx \|\breve{v}\|_{\breve{C}^2} \ \ h_1, h_2 \to 0.$$

Следствие 2.10.1. *В методе итерационных расширений на конечномерном подпространстве Соболева из (2.10.2) выполняется оценка сходимости.*

$$\left\|\tilde{u}^k - \tilde{u}\right\|_{\tilde{C}^2} \le \varepsilon \left\|\tilde{u}^0 - \tilde{u}\right\|_{\tilde{C}^2}, \ \varepsilon = \tilde{\delta}_1 (\tilde{\gamma}_2 / \tilde{\gamma}_1)(\tilde{\alpha}/\gamma)^{k-1}, \ k \in \mathbb{N},$$

$$\tilde{\delta}_1 \approx 2, \ \tilde{\alpha} \approx \breve{\alpha}, \ \tilde{\gamma}_1 \approx \breve{\gamma}_1, \ \tilde{\gamma}_2 \approx \breve{\gamma}_2, \ h_1, h_2 \to 0,$$

где относительные ошибки оцениваются бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Замечание 2.10.1. *В следствии 2.10.1 при используемой аппроксимации*

$$\tilde{\alpha} \approx \breve{\alpha} = const, \ \tilde{\gamma}_1 \approx \breve{\gamma}_1 = const, \ \tilde{\gamma}_2 \approx \breve{\gamma}_2 = const, \ h_1, h_2 \to 0.$$

2.11. Алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи продолженной гармонической системы на пространстве Евклида

При выборе итерационных параметров применим метод минимальных невязок.

I. Выбираем начальное приближение и итерационный параметр

$$\forall \bar{u}^0 = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^0 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \in \bar{V}_1,\ \tau_0 = 1.$$

II. Находим невязку

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f},\ k \in \mathbb{N},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_1^0 \\ \bar{r}_2^0 \\ \bar{r}_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}\bar{u}_1^0 - \bar{f}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_1^{k-1} \\ \bar{r}_2^{k-1} \\ \bar{r}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \mathrm{A}_{02}\bar{u}_2^{k-1} + \mathrm{A}_{23}\bar{u}_3^{k-1} \\ \bar{0} \end{bmatrix},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

III. Вычисляем норму абсолютной ошибки в квадрате

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N},$$

$$\mathrm{E}_0 = \left\langle \bar{r}_1^0, \bar{r}_1^0 \right\rangle,$$

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\langle \bar{r}_2^{k-1}, \bar{r}_2^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

IV. Ищем поправку

$$\bar{w}^{k-1} : C\bar{w}^{k-1} = \bar{r}^{k-1},\ k \in \mathbb{N},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_1^0 \\ \bar{w}_2^0 \\ \bar{w}_3^0 \end{bmatrix} \in \bar{V}_{\mathrm{I}} : \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} + \gamma\mathrm{A}_{02} & \gamma\mathrm{A}_{23} \\ 0 & \gamma\mathrm{A}_{32} & \gamma\mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1^0 \\ \bar{w}_2^0 \\ \bar{w}_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1^0 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix},\ \gamma \in (0; +\infty),$$

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_1^{k-1} \\ \bar{w}_2^{k-1} \\ \bar{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} \in \bar{V}_2 : \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} + \gamma\mathrm{A}_{02} & \gamma\mathrm{A}_{23} \\ 0 & \gamma\mathrm{A}_{32} & \gamma\mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{k-1} \\ \bar{w}_2^{k-1} \\ \bar{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{r}_2^{k-1} \\ \bar{0} \end{bmatrix},\ \gamma \in (0; +\infty),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

V. Находим эквивалентную невязку

$$\bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\eta}_1^{k-1} \\ \bar{\eta}_2^{k-1} \\ \bar{\eta}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \mathrm{A}_{02}\bar{w}_2^{k-1} + \mathrm{A}_{23}\bar{w}_3^{k-1} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VI. Находим итерационный параметр

$$\tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}_2^{k-1}, \bar{\eta}_2^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}_2^{k-1}, \bar{\eta}_2^{k-1} \right\rangle, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VII. Находим очередное приближение

$$\bar{u}^k = \bar{u}^{k-1} - \tau_{k-1}\bar{w}^{k-1}, k \in \mathbb{N},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^k \\ \bar{u}_2^k \\ \bar{u}_3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{k-1} \\ \bar{u}_2^{k-1} \\ \bar{u}_3^{k-1} \end{bmatrix} - \tau_{k-1} \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{k-1} \\ \bar{w}_2^{k-1} \\ \bar{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} \in \bar{V}_{\mathrm{I}}, k \in \mathbb{N}.$$

VIII. Проверяем выполнение критерия остановки итераций по заданной оценке относительной ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1} \le \mathrm{E}^2 \mathrm{E}_0, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \mathrm{E} \in (0; 1).$$

Приведем пример с применением метода итерационных расширений. Рассмотрим задачу при следующих областях

$$\Pi = (0;6) \times (0;6), \Omega_{\mathrm{I}} = (0;6) \times (1;4), \Omega_{\mathrm{II}} = (0;6) \times (0;1) \cup (0;6) \times (4;6).$$

Полагаем, что области имеют границы.

$$\Gamma_1 = (0;6) \times \{6\}, \Gamma_2 = \{0, 6\} \times (0;6) \cup (0;6) \times \{0\},$$

$$\Gamma_{\mathrm{I},1} = (0;6) \times \{1, 4\}, \Gamma_{\mathrm{I},2} = \{0, 6\} \times (1;4),$$

$$\Gamma_{\mathrm{II},1} = (0;6) \times \{6\}, \Gamma_{\mathrm{II},2} = (0;6) \times \{0, 1, 4\} \cup \{0, 6\} \times (0;1) \cup \{0, 6\} \times (4;6).$$

Берем правую часть с коэффициентом уравнения

$$\breve{f}_{\mathrm{I}}(x; y) = 2, (x; y) \in (0;6) \times (1;4),$$

$$\kappa_{\mathrm{II}}(x; y) = 2, (x; y) \in (0;6) \times (0;1), \kappa_{\mathrm{II}}(x; y) = 0, (x; y) \in (0;6) \times (4;6).$$

Приведем решение задачи

$$\breve{u}_{\mathrm{I}}(x; y) = (y-1)(4-y), (x; y) \in (0;6) \times (1;4).$$

В прямоугольной области определим сетку с узлами

$$(x_i; y_j) = \left((i-1)h_1; (j-1)h_2\right), i = 1, 2, ..., n+1,\ j = 1, 2, ..., n,$$

При дискретизации выбираем

$$h_1 = h_2 = h = 6/n,\ n = 6, 12, ..., 102.$$

При вычислениях в методе итерационных расширений с параметром $\gamma = 1$, с нулевым начальным приближением процесс останавливается на шестой итерации, если задана оценка для относительной ошибки одна тысячная.

$$n = 102,\ \mathrm{E} = 0,001,\ u^1_{i,j} \ge u^2_{i,j} \ge u^3_{i,j} \ge u^4_{i,j} \ge u^5_{i,j} \ge u^6_{i,j} \approx \breve{u}_{i,j} \ge u^0_{i,j} = 0.$$

Заметим, что на последней шестой итерации на самой мелкой из используемых сеток выполняются неравенства, характеризующие точность численного решения исходной задачи в рассматриваемом случае

$$n = 102,\ \mathrm{E} = 0,001,\quad \max_{j=n/6,...,2n/3} \frac{\left|u^6_{i,j} - \breve{u}_{i,j}\right|}{\left|\breve{u}_{i,j}\right|} \le 0,0024,\quad \frac{\max\limits_{j=n/6,...,2n/3}\left|u^6_{i,j} - \breve{u}_{i,j}\right|}{\max\limits_{j=n/6,...,2n/3}\left|\breve{u}_{i,j}\right|} \le 0,0002.$$

Графики четвертого, пятого и шестого приближений практически почти совпадают с графиком точного решения на следующем рисунке.

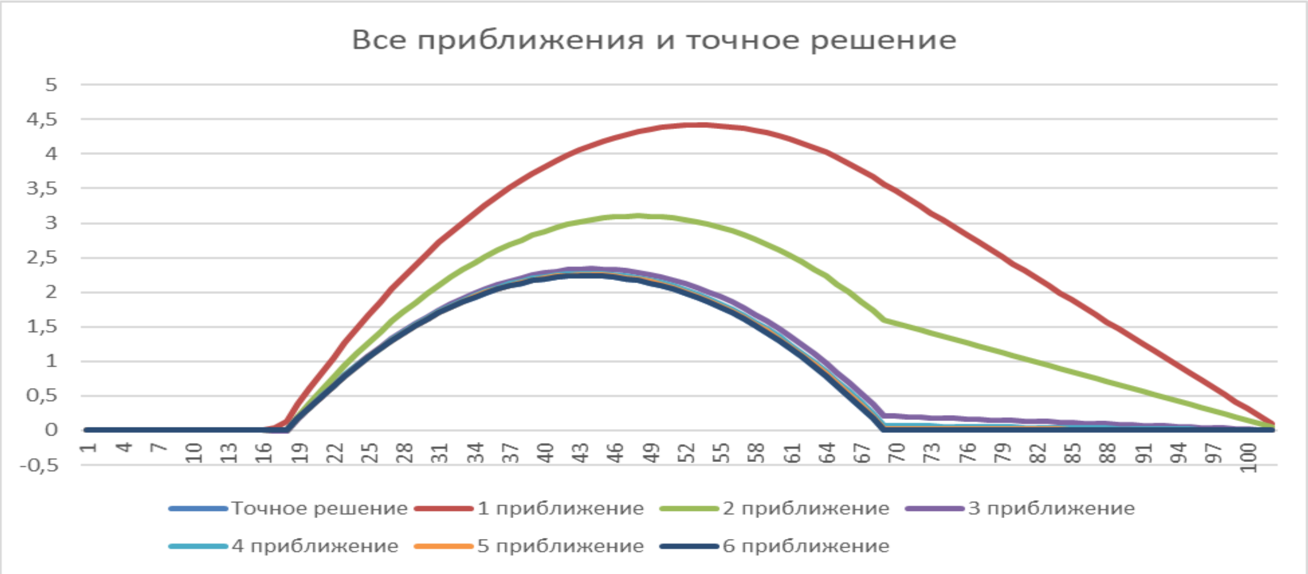


Рис. 2.11.1. Графики с первого приближения по шестое приближение и график точного решения $u^k_{i,j}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $\breve{u}_{i,j}$ при $i = const$, $j = 1, 4, ...100$, $n = 102$.

Функции числа итераций $k = k(n) = 6$ в зависимости количества узлов сетки по направлению оси ординат при $n = 6, 12, \ldots, 102$ постоянна и равна шести.

2.12. Гармоническая система в пространстве Соболева на L-образной области

Пусть задана первая ограниченная плоская область и выбирается вторая ограниченная плоская область

$$\Omega_\omega \subset \mathbb{R}^2,\ \omega \in \{1, \mathrm{II}\}.$$

Требуется, чтобы пересечение этих областей было пусто, а объединение их замыканий было замыканием прямоугольной области

$$\Omega_1 \cap \Omega_{\mathrm{II}} = \varnothing,\ \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} = \bar{\Pi}.$$

У каждой из этих трех областей граница состоит из замыкания объединения открытых непересекающихся частей

$$\partial\Pi = \bar{s},\ s = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing,$$

$$\partial\Omega_\omega = \bar{s}_\omega,\ s_\omega = \Gamma_{\omega,1} \cup \Gamma_{\omega,2},\ \Gamma_{\omega,1} \cap \Gamma_{\omega,2} = \varnothing,\ \omega \in \{1, \mathrm{II}\}.$$

Полагаем, что пересечение границ первой и второй области является замыканием непустого пересечения границы первой области с частью границы второй области

$$\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_{\mathrm{II}} = \bar{S},\ S = \Gamma_{1,0} \cap \Gamma_{\mathrm{II},3} \neq \varnothing.$$

Все рассматриваемые части границ у всех областей являются объединением конечного числа непересекающихся открытых дуг достаточно гладких кривых. Рассматриваются области границы, которых не имеют самопересечений и самокасаний.

Рассматриваются следующие области в прямоугольной системе координат

$$\Omega_1 = (0; 2,5) \times (0; 2,5) \setminus [1,5; 2,5) \times [1,5; 2,5),$$

$$\Omega_{\mathrm{II}} = (1,5; 2,5) \times (1,5; 2,5), \Pi = (0; 2,5) \times (0; 2,5).$$

Первая область по форме является открытой L-образной областью, а вторая область является открытым квадратом, а границы областей имеют следующие части

$$\Gamma_1=\{2,5\}\times(0;2,5)\cup(0;2,5)\times\{2,5\},\ \Gamma_2=\{0\}\times(0;2,5)\cup(0;2,5)\times\{0\},$$

$$\Gamma_{1,1}=\{2,5\}\times(0;1,5)\cup(0;1,5)\times\{2,5\}\cup\{1,5\}\times(1,5;2,5)\cup(1,5;2,5)\times\{1,5\},$$

$$\Gamma_{1,2}=\{0\}\times(0;2,5)\cup(0;2,5)\times\{0\},$$

$$\Gamma_{\mathrm{II},1}=\{2,5\}\times(1,5;2,5)\cup(1,5;2,5)\times\{2,5\},\ \Gamma_{\mathrm{II},2}=\{1,5\}\times(1,5;2,5)\cup(1,5;2,5)\times\{1,5\}.$$

В первой области рассматриваем смешанную краевую задачу для уравнения Пуассона. Во второй области вводим смешанную краевую задачу для однородного экранированного уравнения Пуассона. На частях границы первой областей задаем однородные смешанные краевые условия. На частях границы второй области рассматриваем смешанные однородные условия. Задача на первой области является решаемой задачей. Задачу на второй области рассматриваем в качестве нулевого фиктивного продолжения решаемой задачи

$$-\Delta\breve{u}_\omega+\kappa_\omega\breve{u}_\omega=\breve{f}_\omega,\ \omega\in\{1,\mathrm{II}\},\ \breve{f}_{\mathrm{II}}=0,\ \kappa_1=0,\ \kappa_{\mathrm{II}}>0,$$

$$\breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,1}}=0,\ \frac{\partial\breve{u}_\omega}{\partial n}\Big|_{\Gamma_{\omega,2}}=0. \qquad (2.12.1)$$

Решаемая задача

$$-\Delta\breve{u}_1=\breve{f}_1 \text{ в } (0;2,5)\times(0;2,5)\setminus[1,5;2,5)\times[1,5;2,5),$$

$$\breve{u}_1=0 \text{ на } \{2,5\}\times(0;1,5)\cup(0;1,5)\times\{2,5\}\cup\{1,5\}\times(1,5;2,5)\cup(1,5;2,5)\times\{1,5\},$$

$$\frac{\partial\breve{u}_1}{\partial n}=0 \text{ на } \{0\}\times(0;2,5)\cup(0;2,5)\times\{0\}.$$

Здесь $\breve{u}_1$ функция перемещение точек L-образной мембраны, расположенной в горизонтальном положении при закреплении на части границы под действием вертикальной нагрузки определяющей правую часть уравнения $\breve{f}_1$. Например

$$\breve{f}_1=((392-384x)(64y^3-196y^2+225)+(64x^3-196x^2+225)(392-384y))/184^2,$$

$$\breve{u}_1=(64x^3-196x^2+225)(64y^3-196y^2+225)/184^2.$$

Рассмотрим решаемую задачу и фиктивную задачу в вариационном виде, т.е. задачи представления линейных функционалов в виде скалярных произведений в функциональных пространствах как гармонические системы

$$\breve{u}_\omega \in \breve{H}_\omega :\ \mathrm{A}_\omega(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) = F_\omega(\breve{v}_\omega)\ \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega,\ \omega \in \{1, \mathrm{II}\}. \tag{2.12.2}$$

Пространства решений для таких задач будут следующие пространства функций Соболева

$$\breve{H}_1 = \breve{H}_1(\Omega_1) = \left\{ \breve{v}_1 \in W_2^1(\Omega_1) : \breve{v}_1\big|_{\Gamma_{1.1}} = 0 \right\},$$

$$\breve{H}_{\mathrm{II}} = \breve{H}_{\mathrm{II}}(\Omega_{\mathrm{II}}) = \left\{ \breve{v}_{\mathrm{II}} \in W_2^1(\Omega_{\mathrm{II}}) : \breve{v}_{\mathrm{II}}\big|_{\Gamma_{\mathrm{II},1}} = 0 \right\}.$$

Правые части этих задач являются линейными функционалами

$$F_\omega(\breve{v}_\omega) = \int\limits_{\Omega_\omega} \breve{f}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega,\ \omega \in \{1, \mathrm{II}\}.$$

В левых частях этих задач стоят билинейные формы

$$\mathrm{A}_\omega(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) = \int\limits_{\Omega_\omega} (\breve{u}_{\omega x}\breve{v}_{\omega x} + \breve{u}_{\omega y}\breve{v}_{\omega y} + \kappa_\omega \breve{u}_\omega \breve{v}_\omega) d\Omega_\omega,\ \omega \in \{1, \mathrm{II}\}.$$

Заметим, что билинейные формы задают в пространствах решений рассматриваемых задач нормировки эквивалентные нормировкам соответствующих пространств Соболева

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|\breve{v}_\omega\|^2_{W_2^1(\Omega_\omega)} \le \mathrm{A}_\omega(\breve{v}_\omega, \breve{v}_\omega) \le c_2 \|\breve{v}_\omega\|^2_{W_2^1(\Omega_\omega)}\ \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega.$$

Эти положение обеспечивают существование и единственность решения у каждой из рассматриваемых задач. Заметим, что решение фиктивной задачи нулевое. Решаемая задача в пространстве Соболева на L-образной области как гармоническая система в пространстве Соболева следующая

$$\breve{u}_1 \in \breve{H}_1(\Omega_1) : \int\limits_{\Omega_1} (\breve{u}_{1x}\breve{v}_{1x} + \breve{u}_{1y}\breve{v}_{1y}) d\Omega_1 = \int\limits_{\Omega_1} \breve{f}_1 \breve{v}_1 d\Omega_1\ \forall \breve{v}_1 \in \breve{H}_1(\Omega_1),$$

$$\breve{H}_1(\Omega_1) = \left\{ \breve{v}_1 \in W_2^1(\Omega_1) : \breve{v}_1\big|_{\Gamma_{1.1}} = 0 \right\}.$$

2.13. Продолженная гармоническая система на конечномерном подпространстве пространства Соболева на квадрате

Рассмотрим продолженную гармоническую систему на конечномерном подпространстве Соболева на квадрате. В этой квадратной области и на опоясывающей полосе определим сетку с узлами

$$(x_i; y_j) = \big((i-1{,}5)h; (j-1{,}5)h\big),\ h = 2{,}5/(n-1{,}5),\ n = 5m-1,\ m \in \mathbb{N},$$

$$i = 1, 2..., n,\ j = 1, 2..., n.$$

Введем сеточные функции на множестве узлов введенной сетки

$$v_{i,j} = v(x_i; y_j) \in \mathbb{R},\ i = 1, 2..., n,\ j = 1, 2..., n.$$

Применим сеточные функций с учетом выбранных краевых условий, используя линейные базисные функции

$$\Phi^{i,j}(x;y) = \Psi^{1,i}(x)\Psi^{2,j}(y),\ i = 2..., m-1,\ j = 2..., n-1,\ m-2, n-2 \in \mathbb{N},$$

$$\Psi^{1,i}(x) = [2/i]\Psi(x/h_1 - i + 3{,}5) + \Psi(x/h_1 - i + 2{,}5),$$

$$\Psi^{2,j}(y) = [2/j]\Psi(y/h_2 - j + 3{,}5) + \Psi(y/h_2 - j + 2{,}5),$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} z, & z \in [0;1], \\ 2 - z, & z \in [1;2], \\ 0, & z \notin (0;2). \end{cases}$$

Здесь $[\bullet]-$ функция целая часть числа. Полагаем, что значения у базисных функций вне прямоугольной области равны нулю

$$\Phi^{i,j}(x;y) = 0,\ (x;y) \notin \Pi,\ i = 2..., m-1,\ j = 2..., n-1,\ m-2, n-2 \in \mathbb{N}.$$

Комбинации базисных функций являются конечномерным подпространством в пространстве решения расширенной задачи

$$\tilde{V} = \left\{ \tilde{v} = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} v_{i,j} \Phi^{i,j}(x;y) \right\} \subset \breve{V}.$$

Приведем продолженную задачу на введенном конечномерном подпространстве в вариационном виде

$$\tilde{u}\in\tilde{V}:\ \mathrm{A}_1(\tilde{u},I_1\tilde{v})+\mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u},\tilde{v})=F_1(I_1\tilde{v})\ \forall\tilde{v}\in\tilde{V}. \qquad (2.13.1)$$

В конечномерном пространстве Соболева лежит конечномерное подпространство решения продолженной задачи. Это конечномерное подпространство решений у исходной задачи в первой области при продолжении нулем на замыкание второй области

$$\tilde{V}_1=\tilde{V}_1(\Pi)=\left\{\tilde{v}_1\in\tilde{V}:\tilde{v}_1\big|_{\Pi\setminus\Omega_1}=0\right\}.$$

Полагаем, что оператор проектирования на пространство решений продолженной задачи обнуляет коэффициенты у базисных функций носители, у которых не содержатся полностью в первой области

$$I_1:\tilde{V}\mapsto\tilde{V}_1,\,\tilde{V}_1=imI_1,\,I_1=I_1^2.$$

Рассмотрим продолженную задачу для уравнения Пуассона как задачу продолженной гармонической системы в матричном виде. Аппроксимируя продолженную задачу для уравнения Пуассона как задачу продолженной гармонической системы с помощью конечномерного подпространства, получим систему уравнений

$$\overline{u}\in\mathbb{R}^N:\ B\overline{u}=\overline{f},\ \overline{f}\in\mathbb{R}^N,\,N=(n-2)(n-2). \qquad (2.13.2)$$

Получаем продолженную задачу, систему в матричном виде, определив продолженную матрицу и продолженную правую часть системы

$$\left\langle B\overline{u},\overline{v}\right\rangle=\mathrm{A}_1(\tilde{u},I_1\tilde{v})+\mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u},\tilde{v})\ \forall\tilde{u},\tilde{v}\in\tilde{V},\left\langle\overline{f},\overline{v}\right\rangle=F_1(I_1\tilde{v})\ \forall\tilde{v}\in\tilde{V},$$

$$\left\langle\overline{f},\overline{v}\right\rangle=(\overline{f},\overline{v})h_1h_2=\overline{f}\,\overline{v}h_1h_2,\,\overline{v}=(v_1,v_2,...,v_N)'\in\mathbb{R}^N,N=(n-2)(n-2).$$

При этом нумеруем первыми базисные функции носители, у которых полностью лежат в первой области. Затем нумеруем базисные функции носители, у которых пересекают границу первой области и второй области вместе. Заканчиваем нумерацию на базисных функциях носители, у которых полностью лежат во второй области.

Можно сказать, занумеруем первыми компоненты векторов, соответствующие узлам внутри первой области

$$2 \le i \le 3m-1,\ 2 \le j \le n-1,$$

$$3m \le i \le n-1,\ 2 \le j \le 3m-1.$$

Вторыми занумеруем компоненты векторов на границе первой и второй области, когда

$$i = 3m,\ 3m \le j \le n-1,$$

$$3m-1 \le i \le n-1,\ j = 3m.$$

Третьими занумеруем компоненты векторов, соответствующие узлам внутри второй

$$3m+1 \le i \le n-1,\ 3m+1 \le j \le n-1.$$

При этой нумерации возникающие векторы имеют такое строение

$$\bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')',\ \bar{u} = (\bar{u}_1{}', \bar{0}'\ \bar{0}')',\ \ \bar{f} = (\bar{f}_1{}', \bar{0}'\ \bar{0}')'.$$

Матрица имеют такую известную структуру

$$B = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

Элементы у матрицы и компоненты вектора у правой части, для приведенной системы находятся по формулам

$$b_{i,j} = h_1^{-1} h_2^{-1} (\mathrm{A}_1(\Phi_i, I_1 \Phi_j) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\Phi_i, \Phi_j)),\ f_i = h_1^{-1} h_2^{-1} F_1(I_1 \Phi_i),\ i, j = 1, 2, ..., N.$$

Зададим матрицы, порождаемые соответствующими билинейными формами

$$\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{I}} \bar{u}, \bar{v} \right\rangle = \mathrm{A}_1(\tilde{u}, \tilde{v}),\ \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \bar{u}, \bar{v} \right\rangle = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u}, \tilde{v})\ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Эти матрицы имеют следующую структуру

$$\mathrm{A}_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

Введем подпространство векторов

$$\bar{V}_1 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_2 = \bar{0},\ \bar{v}_3 = \bar{0} \right\}.$$

Дополнительно определим подпространства векторов

$$\bar{V}_3 = \left\{\bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_1 = \bar{0},\, \bar{v}_2 = \bar{0}\right\},\, \bar{V}_0 = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_3,$$

$$\bar{V}_2 = \left\{\bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N : \mathrm{A}_{11}\bar{v}_1 + \mathrm{A}_{12}\bar{v}_2 = \bar{0},\, \mathrm{A}_{23}\bar{v}_2 + \mathrm{A}_{33}\bar{v}_3 = \bar{0}\right\},$$

$$\mathbb{R}^N = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2 \oplus \bar{V}_3 = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_{\mathrm{II}},\, \bar{V}_{\mathrm{I}} = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2,\, \bar{V}_{\mathrm{II}} = \bar{V}_2 \oplus \bar{V}_3.$$

В методе фиктивных компонент обычно решается в матричном виде продолженная задача

$$B\bar{u} = \bar{f},\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

Это решение исходной задачи в матричном виде и это нулевое решение у фиктивной задачи в матричном виде

$$\mathrm{A}_{11}\bar{u}_1 = \bar{f}_1,\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

2.14. Алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи продолженной гармонической системы на квадрате

Для решения задачи (2.13.2) используем метод итерационных расширений. Применим матрицы, порождаемые соответствующими билинейными формами

$$\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{I}}\bar{u},\bar{v}\right\rangle = \mathrm{A}_1(\tilde{u},\tilde{v}),\, \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{u},\bar{v}\right\rangle = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u},\tilde{v})\ \forall \tilde{u},\tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Матрицы имеют следующую структуру

$$\mathrm{A}_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

Определим расширенную матрицу в виде суммы первой матрицы и второй матрицей, умноженной на положительный параметр

$$C = \mathrm{A}_{\mathrm{I}} + \gamma \mathrm{A}_{\mathrm{II}}, \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}, \gamma \in (0;+\infty).$$

Вычисляем элементы этой матрицы по формулам

$$c_{i,j} = h_1^{-1} h_2^{-1} C(\Phi_i, \Phi_j),\ i, j = 1, 2, ..., N.$$

Применим метод итерационных расширений, является обобщением метода фиктивных компонент при нулевом начальном приближении

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N :\ C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}),\ k \in \mathbb{N}, \tag{2.14.1}$$

$$\bar{u}^0 = \bar{0} \in \bar{V}_1,\ \gamma > \alpha,\ \tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

где для вычисления итерационных параметров последовательно вычисляем невязки, поправки, эквивалентные невязки

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f},\ \bar{w}^{k-1} = C^{-1}\bar{r}^{k-1},\ \bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Этот итерационный процесс можно записать в следующем виде

$$\bar{u}^1 \in \mathbb{R}^N : C\bar{u}^1 = \bar{f},$$

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}\mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{u}^{k-1},\ \tau_{k-1} = (\bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}) \big/ (\bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Приведем алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи продолженной гармонической системы на квадрате.

I. Вычисляем величину квадрата нормы начальной абсолютной ошибки, которая сохраняется в течение всех вычислений

$$\mathrm{E}_0 = (\bar{f}, \bar{f})h^2,$$

$$\mathrm{E}_0 = (\bar{f}_1, \bar{f}_1)h^2.$$

II. Находим первое приближение

$$\bar{u}^1 : C\bar{u}^1 = \bar{f},$$

$$\begin{bmatrix} \overline{u}_1^1 \\ \overline{u}_2^1 \\ \overline{u}_3^1 \end{bmatrix} \in \overline{V}_{\mathrm{I}} : \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} + \gamma \mathrm{A}_{02} & \gamma \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \gamma \mathrm{A}_{32} & \gamma \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u}_1^1 \\ \overline{u}_2^1 \\ \overline{u}_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{f}_1 \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{bmatrix}, \gamma \in (0; +\infty).$$

III. Вычисляем невязку

$$\overline{r}^{\,k-1} = B\overline{u}^{\,k-1} - \overline{f} = \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{u}^{\,k-1}, \, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\begin{bmatrix} \overline{r}_1^{\,k-1} \\ \overline{r}_2^{\,k-1} \\ \overline{r}_3^{\,k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \mathrm{A}_{02} \overline{u}_2^{\,k-1} + \mathrm{A}_{23} \overline{u}_3^{\,k-1} \\ \overline{0} \end{bmatrix}, \, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

IV. Вычисляем очередную величину квадрата нормы абсолютной ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1} = (\overline{r}^{\,k-1}, \overline{r}^{\,k-1}) h^2, \, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\mathrm{E}_{k-1} = (\overline{r}_2^{\,k-1}, \overline{r}_2^{\,k-1}) h^2, \, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

V. Находим поправку

$$\overline{w}^{k-1} : C\overline{w}^{k-1} = \overline{r}^{\,k-1}, \, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\begin{bmatrix} \overline{w}_1^{k-1} \\ \overline{w}_2^{k-1} \\ \overline{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} \in \overline{V}_2 : \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} + \gamma \mathrm{A}_{02} & \gamma \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \gamma \mathrm{A}_{32} & \gamma \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w}_1^{k-1} \\ \overline{w}_2^{k-1} \\ \overline{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{r}_2^{\,k-1} \\ \overline{0} \end{bmatrix}, \gamma \in (0; +\infty), \, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VI. Вычисляем эквивалентную невязку

$$\overline{\eta}^{k-1} = B\overline{w}^{k-1} = \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1}, \, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\begin{bmatrix} \overline{\eta}_1^{k-1} \\ \overline{\eta}_2^{k-1} \\ \overline{\eta}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \mathrm{A}_{02} \overline{w}_2^{k-1} + \mathrm{A}_{23} \overline{w}_3^{k-1} \\ \overline{0} \end{bmatrix}, \, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VII. Вычисляем итерационный параметр

$$\tau_{k-1} = (\overline{r}^{\,k-1}, \overline{\eta}^{k-1}) \big/ (\overline{\eta}^{k-1}, \overline{\eta}^{k-1}), \, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\tau_{k-1} = (\overline{r}_2^{\,k-1}, \overline{\eta}_2^{k-1}) \big/ (\overline{\eta}_2^{k-1}, \overline{\eta}_2^{k-1}), \, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VIII. Находим новое приближение

$$\bar{u}^k = \bar{u}^{k-1} - \tau_{k-1}\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^k \\ \bar{u}_2^k \\ \bar{u}_3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{k-1} \\ \bar{u}_2^{k-1} \\ \bar{u}_3^{k-1} \end{bmatrix} - \tau_{k-1} \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{k-1} \\ \bar{w}_2^{k-1} \\ \bar{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} \in \bar{V}_{\mathrm{I}},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

IX. Проверяем условие остановки итераций

$$\mathrm{E}_{k-1} \le \mathrm{E}^2 \mathrm{E}_0,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \mathrm{E} \in (0;1).$$

Если условие остановки итераций не достигается, то все повторяем с пункта III.

2.15. Алгоритм, реализующий методы итерационных расширений и конечных элементов и разностей для решения задачи продолженной гармонической системы на квадрате

Приведем описание программной реализации алгоритма метода итерационных расширений для решения продолженной задачи гармонической системы на квадрате при

$$\gamma = 27/2,\ \kappa_{\mathrm{II}} > 0,\ \mathrm{E} = 0{,}001 \in (0;1).$$

При программировании выбираем значения

$$m = 1, 11, 21, 31, 41, 51,\ n = 5m - 1 = 4, 54, 104, 154, 204, 254,\ h = 2{,}5/(n - 1{,}5).$$

Используем узлы сетки

$$(x_i; y_j) = \big((i - 1{,}5)h; (j - 1{,}5)h\big),\ i = 1, 2..., n,\ j = 1, 2..., n.$$

Для выполнения вычислительных работ необходимо завести массив значений правой части рассматриваемой задачи в узлах сетки.

$$f_{i,j},\ i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, 2..., n.$$

При программировании полагаем с начала для $1 \le i \le n, 1 \le j \le n$

$$f_{i,j} = 0.$$

Затем для $2 \le i \le 3m-1,\ 2 \le j \le n-1$ и $3m \le i \le n-1,\ 2 \le j \le 3m-1$ полагаем

$$f_{i,j} = ((392-384x_i)(64y_j^3 - 196y_j^2 + 225) + (64x_i^3 - 196x_i^2 + 225)(392-384y_j))\Big/184^2.$$

По массиву правой части будем находить массив приближенного решения

$$u_{i,j}^k,\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2...,n,\ k \in \mathbb{N}.$$

к массиву решений исходной расширенной задачи в узлах сетки

$$\breve{u}_{i,j},\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2...,n.$$

Опишем подробнее программную реализацию алгоритма для решения исходной задачи.

I. При численном решении рассматриваемой задачи, выбираем нулевое начальное приближение и берем начальный итерационный параметр за единицу. Вычисляем величину квадрата нормы начальной абсолютной ошибки, которая сохраняется в течение всех вычислений. При программировании полагаем:

$$\mathrm{E}_0 = \sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1} (f_{i,j})^2 h^2.$$

Можно отметить, что у нас, если $3m \le i \le n-1$ и $3m \le j \le n-1,$ то $f_{i,j} = 0$ и в приведенных выше суммах часть вычислений можно с учетом этого исключить.

II. Ищем массив первого приближения системы линейных алгебраических уравнений

$$u_{i,j}^k,\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2...,n,\ k = 1.$$

При программировании для $1 \le i \le n, 1 \le j \le n,$ полагаем

$$u_{i,j}^k = 0,\ k = 1.$$

Далее значения элементов этого массива в последующих итерациях пересчитываются. Можно находить следующие элементы этого массива

$$u_{i,j}^k,\ k = 1,\ i = 2,3,...,n-1,\ j = 2,3...,n-1,$$

используя первый раз заданные ранее элементам массива правой части

$$f_{i,j},\ i = 2,3,...,n-1,\ j = 2,3...,n-1$$

с помощью программной реализации алгоритма, использующего метод итерационной факторизации при решении гармонической системы на квадрате со спектральными, энергетически эквивалентными операторами в параграфе 2.17.

Затем при $2 \le i \le n-1$ полагаем

$$u_{i,1}^{k} = u_{i,2}^{k},\ k = 1.$$

Для $2 \le j \le n-1$ полагаем

$$u_{1,j}^{k} = u_{2,j}^{k},\ k = 1.$$

Полагаем

$$u_{1,1}^{k} = u_{2,2}^{k},\ k = 1.$$

III. Вычисляем очередной массив невязок

$$r_{i,j}^{k-1},\ i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, 2..., n,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Вычисляем, только те элементы, которые будем использовать.

При программировании для $1 \le i \le n, 1 \le j \le n$ полагаем сначала

$$r_{i,j}^{k-1} = 0.$$

Все используемые массивы можно задать сначала нулевыми, а пересчитывать, только следующие, вообще говоря, ненулевые элементы.

Для $3m+1 \le i \le n-1$ полагаем

$$r_{i,3m}^{k-1} = (2u_{i,3m}^{k-1} - 0{,}5u_{i-1,3m}^{k-1} - 0{,}5u_{i+1,3m}^{k-1} - u_{i,3m+1}^{k-1})h^{-2} + \kappa_{\mathrm{II}} u_{i,3m}^{k-1}.$$

Полагаем

$$r_{3m,3m}^{k-1} = (u_{3m,3m}^{k-1} - 0{,}5u_{3m+1,3m}^{k-1} - 0{,}5u_{3m,3m+1}^{k-1})h^{-2} + \kappa_{\mathrm{II}} u_{3m,3m}^{k-1}.$$

Для $3m+1 \le j \le n-1$ полагаем

$$r_{3m,j}^{k-1} = (2u_{3m,j}^{k-1} - 0{,}5u_{3m,j-1}^{k-1} - 0{,}5u_{3m,j+1}^{k-1} - u_{3m+1,j}^{k-1})h^{-2} + \kappa_{\mathrm{II}} u_{3m,j}^{k-1}.$$

IV. Вычисляем очередную величину квадрата нормы абсолютной ошибки.

При программировании полагаем

$$\mathrm{E}_{k-1} = \sum_{i=3m}^{n-1} (r_{i,3m}^{k-1})^2 h^2 + \sum_{j=3m+1}^{n-1} (r_{3m,j}^{k-1})^2 h^2,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

V. Ищем очередной массив поправок

$$w_{i,j}^{k-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

При программировании для $1\le i\le n, 1\le j\le n,$ полагаем

$$w_{i,j}^{k-1}=0,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Далее значения элементов этого массива в последующих вычислениях пересчитываются. Находятся следующие элементы этого массива

$$w_{i,j}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\ i=2,3,...,n-1,\ j=2,3...,n-1$$

по найденным ранее элементам массива невязок

$$r_{i,j}^{k-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$$

с помощью программной реализации алгоритма, использующего метод итерационной факторизации при решении гармонической системы на квадрате со спектральными, энергетически эквивалентными операторами в параграфе 2.17. Затем для $2\le i\le n-1$ полагаем

$$w_{i,1}^{k-1}=w_{i,2}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Для $2\le j\le n-1$ полагаем

$$w_{1,j}^{k-1}=w_{2,j}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Полагаем

$$w_{1,1}^{k-1}=w_{2,2}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Для $1\le i\le n-1$ полагаем

$$w_{i,n}^{k}=0.$$

Для $1\le j\le n-1$ полагаем

$$w_{n,j}^{k}=0.$$

Полагаем

$$w_{n,n}^{k}=0.$$

VI. Вычисляем массив эквивалентной невязки.

$$\eta_{i,j}^{k-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Вычисляем, только те элементы, которые будем использовать. Все используемые массивы можно задать сначала нулевыми, а пересчитывать, только следующие, вообще говоря, ненулевые элементы.

Для $3m+1 \le i \le n-1$ полагаем

$$\eta_{i,3m}^{k-1} = (2w_{i,3m}^{k-1} - 0,5w_{i-1,3m}^{k-1} - 0,5w_{i+1,3m}^{k-1} - w_{i,3m+1}^{k-1})h^{-2} + \kappa_{\mathrm{II}} w_{i,3m}^{k-1}.$$

Полагаем

$$\eta_{3m,3m}^{k-1} = (w_{3m,3m}^{k-1} - 0,5w_{3m+1,3m}^{k-1} - 0,5w_{3m,3m+1}^{k-1})h^{-2} + \kappa_{\mathrm{II}} w_{3m,3m}^{k-1}.$$

Для $3m+1 \le j \le n-1$ полагаем

$$\eta_{3m,j}^{k-1} = (2w_{3m,j}^{k-1} - 0,5w_{3m,j-1}^{k-1} - 0,5w_{3m,j+1}^{k-1} - w_{3m+1,j}^{k-1})h^{-2} + \kappa_{\mathrm{II}} w_{3m,j}^{k-1}.$$

VII. Вычисляем итерационный параметр.

При программировании полагаем

$$\tau_{k-1} = \left(\sum_{i=3m}^{n-1} r_{i,3m}^{k-1} \eta_{i,3m}^{k-1} + \sum_{j=3m+1}^{n-1} r_{3m,j}^{k-1} \eta_{3m,j}^{k-1} \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=3m}^{n-1} (\eta_{i,3m}^{k-1})^2 + \sum_{j=3m+1}^{n-1} (\eta_{3m,j}^{k-1})^2 \right), \ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VIII. Вычисляем очередное приближение. Это массив

$$u_{i,j}^{k}, \ i = 1,2,...,n, \ j = 1,2...,n, \ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Значения элементов этого массивов в последующих вычислениях постоянно пересчитываются, их не обязательно сохранять.

При программировании для $2 \le i \le n-1, \ 2 \le j \le n-1,$ полагаем

$$u_{i,j}^{k} = u_{i,j}^{k-1} - \tau_{k-1} w_{i,j}^{k-1}, \ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Затем для $2 \le i \le n-1$ полагаем

$$u_{i,1}^{k} = u_{i,2}^{k}.$$

Для $2 \le j \le n-1$ полагаем

$$u_{1,j}^{k} = u_{2,j}^{k}.$$

Полагаем

$$u_{1,1}^{k} = u_{2,2}^{k}.$$

Для $1 \le i \le n-1$ полагаем

$$u_{i,n}^k = 0.$$

Для $1 \le j \le n-1$ полагаем

$$u_{n,j}^k = 0.$$

Полагаем

$$u_{n,n}^k = 0.$$

IX. Проверяем условие остановки итераций по заранее задаваемой оценке относительной ошибки в более сильной норме, чем энергетическая норма в решаемой задаче

$$\mathrm{E}_{k-1} \le \mathrm{E}^2 \mathrm{E}_0,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \mathrm{E} = 0{,}001 \in (0;1).$$

Если условие остановки итераций не достигается, то все повторяем с пункта III.

2.16. Алгоритм, реализующий метод итерационных факторизаций при решении задачи расширенной гармонической системы на квадрате

При значении параметра $\gamma = 27/2$ на основе метода итерационной факторизации приведем алгоритм решения задач, возникающих в параграфе 2.14 в пунктах II. и V. Заметим, что решаемая система линейных алгебраических уравнений, получающаяся на каждом шаге, применяемого ранее итерационного процесса записывается в матричном виде

$$\overline{v} \in \mathbb{R}^N : C\overline{v} = \overline{g},\ \overline{g} \in \mathbb{R}^N,\ N = (n-2)(n-2).$$

Сформулируем метод итерационной факторизации, итерационный процесс для решения системы с матрицей C:

$$\overline{v}^l \in \mathbb{R}^N : LL'(\overline{v}^l - \overline{v}^{l-1}) = -\tau_{l-1}(C\overline{v}^{l-1} - \overline{g}),$$

$$\tau_{l-1} = (\overline{r}^{l-1}, \overline{w}^{l-1}) / (\overline{w}^{l-1}, \overline{\eta}^{l-1}),\ \overline{v}^0 = \overline{0} \in \mathbb{R}^N,$$

$$\overline{r}^{l-1} = C\overline{v}^{l-1} - \overline{g},\ \overline{w}^{l-1} = (LL')^{-1}\overline{r}^{l-1},\ \overline{\eta}^{l-1} = C\overline{w}^{l-1},$$

$$C = \mathrm{A}_{\mathrm{I}} + \gamma \mathrm{A}_{\mathrm{II}},\ \gamma = 1,\ L' = \nabla_x + \nabla_y + \kappa E,\ \kappa = \sqrt{\kappa_{\mathrm{II}}}.$$

Отметим, что здесь вместо решения на каждом шаге систем с нижнетреугольной матрицей L и с верхнетреугольной матрицей L' можно применять маршевый метод по решению системы с матрицей

$$A+\kappa^2 E=\nabla'_x\nabla_x+\nabla'_y\nabla_y+\kappa^2 E,$$

где матрица A получается при аппроксимации оператора Лапласа разностным методом на обычном пятиточечном шаблоне с учетом краевых условий на границе квадратной области. Сформулированный выше метод можно расписать уже в виде алгоритма в таком виде:

I. Заводим нулевое начальное приближение

$$\overline{v}^{l-1}=\overline{0}\in\mathbb{R}^N,\ l=1.$$

II. Вычисляем нулевую невязку $\overline{r}^{l-1}$,

$$\overline{r}^{l-1}=-\overline{g},\ l=1.$$

III. Вычисляем очередную невязку $\overline{r}^{k-1}$,

$$\overline{r}^{l-1}=C\overline{v}^{l-1}-\overline{g},\ l\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

IV. Вычисляем величину квадрата нормы начальной абсолютной ошибки (e_0 сохраняется в течение всех вычислений)

$$e_{l-1}=(\overline{r}^{l-1},\overline{r}^{l-1})h^2,\ l\in\mathbb{N}.$$

V. Находим поправку $\overline{w}^{l-1}$,

$$\overline{w}^{l-1}\in\mathbb{R}^N:\ LL'\overline{w}^{l-1}=\overline{r}^{l-1},\ l\in\mathbb{N}.$$

VI. Вычисляем эквивалентную невязку $\overline{\eta}^{l-1}$,

$$\overline{\eta}^{l-1}=C\overline{w}^{l-1},\ l\in\mathbb{N}.$$

VII. Вычисляем итерационный параметр τ_{k-1},

$$\tau_{l-1}=(\overline{r}^{l-1},\overline{w}^{l-1})\big/(\overline{w}^{l-1},\overline{\eta}^{l-1}),\ k\in\mathbb{N}.$$

VIII. Находим новое приближение $\overline{v}^{l}$,

$$\overline{v}^{l}=\overline{v}^{l-1}-\tau_{l-1}\overline{w}^{l-1},\ k\in\mathbb{N}.$$

IX. Проверяем условие остановки итераций

$$e_{l-1} \le e^2 e_0,\ l \in \mathbb{N},\ e = 0,001 \in (0;1).$$

Если условие остановки итераций не достигается, то все вычисления повторяем с пункта III.

2.17. Алгоритм, реализующий методы итерационных факторизаций и конечных элементов и разностей при решении задачи расширенной гармонической системы на квадрате

Приведем описание программной реализации алгоритма, использующего метод итерационной факторизации при решении задачи продолженной гармонической системы на квадрате при значении параметра $\gamma = 27/2$, возникающих в параграфе 2.15 в пунктах II. и V. Полагаем, что у нас имеется так называемой массив правой части

$$g_{i,j},\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2...,n$$

с заданными в нем элементами

$$g_{i,j},\ i = 1,,...,n,\ j = 1,...,n.$$

В пункте II. массив $g_{i,j}$ это массив $f_{i,j}$, а в пункте V. массив $g_{i,j}$ это массив

$$r_{i,j}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

По массиву правой части будем находить так называемые массивы приближений к массивам решений. Это массивы

$$v_{i,j}^{l},\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2...,n,\ l \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

В пункте II. массивы $v_{i,j}^{l}$ это массивы приближений к массивам решений $u_{i,j}^{k},\ k = 1,$ а в пункте V массив $v_{i,j}^{l}$ это массивы приближений к массивам решений

$$w_{i,j}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

I. Выбираем нулевое начальное приближение.

При программировании для $1 \le i \le n, 1 \le j \le n,$ полагаем

$$v_{i,j}^{l-1} = 0,\ l = 1.$$

II. Вводим массив невязки

$$r_{i,j}^{l-1},\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2...,n.$$

Вычисляем, только те элементы массива невязки, которые будем использовать.

При программировании для $1 \le i \le n, 1 \le j \le n,$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1} = -g_{i,j},\ i = 1,...,n,\ j = 1,...,n,\ l = 1.$$

III. Вычисляем очередной массив невязки. Вычисляем, только те элементы массива невязки, которые будем использовать $\left(l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right)$.

При программировании для $2 \le i \le n-1$ полагаем

$$v_{i,1}^{l-1} = v_{i,2}^{l-1}.$$

Для $1 \le j \le n-1$ полагаем

$$v_{1,j}^{l-1} = v_{2,j}^{l-1}.$$

Для $1 \le i \le n-1$ полагаем

$$v_{i,n}^{l-1} = 0.$$

Для $1 \le j \le n$ полагаем

$$v_{n,j}^{l-1} = 0.$$

При программировании для $2 \le i \le n-1,\ 2 \le j \le 3m-1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1} = (4v_{i,j}^{l-1} - v_{i-1,j}^{l-1} - v_{i+1,j}^{l-1} - v_{i,j-1}^{l-1} - v_{i,j+1}^{l-1})h^{-2} - g_{i,j};$$

Для $2 \le i \le 3m-1,\ 3m \le j \le n-1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1} = (4v_{i,j}^{l-1} - v_{i-1,j}^{l-1} - v_{i+1,j}^{l-1} - v_{i,j-1}^{l-1} - v_{i,j+1}^{l-1})h^{-2} - g_{i,j};$$

Для $3m+1 \le i \le n-1$ полагаем

$$r_{i,3m}^{l-1} = (2(1+\gamma)v_{i,3m}^{l-1} - 0{,}5(1+\gamma)v_{i-1,3m}^{l-1} - 0{,}5(1+\gamma)v_{i+1,3m}^{l-1} - v_{i,3m-1}^{l-1} - \gamma v_{i,3m+1}^{l-1})h^{-2} +$$
$$+\gamma\kappa_{\text{II}} v_{i,3m}^{l-1} - g_{i,3m}.$$

Полагаем

$$r_{3m,3m}^{l-1}=((3+\gamma)v_{3m,3m}^{l-1}-v_{3m-1,3m}^{l-1}-v_{3m,3m-1}^{l-1}-0,5(1+\gamma)v_{3m+1,3m}^{l-1}-0,5(1+\gamma)v_{3m,3m+1}^{l-1})h^{-2}+$$
$$+\gamma\kappa_{\mathrm{II}}v_{3m,3m}^{l-1}-g_{3m,3m}.$$

Для $3m+1\le j\le n-1$ полагаем

$$r_{3m,j}^{l-1}=(2(1+\gamma)v_{3m,j}^{l-1}-0,5(1+\gamma)v_{3m,j-1}^{l-1}-0,5(1+\gamma)v_{3m,j+1}^{l-1}-v_{3m-1,j}^{l-1}-\gamma v_{3m+1,j}^{l-1})h^{-2}+$$
$$+\gamma\kappa_{\mathrm{II}}v_{3m,j}^{l-1}-g_{3m,j}.$$

Для $3m+1\le i\le n-1,\ 3m+1\le j\le n-1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=\gamma(4v_{i,j}^{l-1}-v_{i-1,j}^{l-1}-v_{i+1,j}^{l-1}-v_{i,j-1}^{l-1}-v_{i,j+1}^{l-1})h^{-2}+\gamma\kappa_{\mathrm{II}}v_{i,j}^{l-1}.$$

IV. Вычисляем величину квадрата нормы начальной абсолютной ошибки (e_0 сохраняется в течение всех вычислений).

При программировании полагаем

$$e_{l-1}=\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1}(r_{i,j}^{l-1})^2h^2.$$

V. Ищем массив поправок

$$w_{i,j}^{l-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ l\in\mathbb{N}.$$

А) Для этого сначала находим нужные элементы вспомогательного массива

$$q_{i,j}^{l-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ l\in\mathbb{N}.$$

При программировании для $2\le i\le n$ полагаем

$$q_{i,1}^{l-1}=0,\ l\in\mathbb{N}.$$

Для $1\le j\le n$ полагаем

$$q_{1,j}^{l-1}=0,\ l\in\mathbb{N}.$$

При программировании вводим величину, чтобы каждый раз не пересчитывать

$$\kappa=\sqrt{\kappa_{\mathrm{II}}}.$$

Для $2\le i\le n-1,\ 2\le j\le n-1$полагаем

$$q_{i,j}^{l-1}=(hr_{i,j}^{l-1}+q_{i-1,j}^{l-1}+q_{i,j-1}^{l-1})\big/\left(2+h\kappa\right).$$

Б) А теперь находим нужные элементы массива поправок.

При программировании для $1 \le i \le n-1$ полагаем

$$w_{i,n}^{l-1} = 0,\ l \in \mathbb{N}.$$

Для $1 \le j \le n$ полагаем

$$w_{n,j}^{l-1} = 0,\ l \in \mathbb{N}.$$

Для $n-1 \ge i \ge 2,\ n-1 \ge j \ge 2$ полагаем

$$w_{i,j}^{l-1} = (hq_{i,j}^{l-1} + w_{i+1,j}^{l-1} + w_{i,j+1}^{l-1}) \big/ (2 + h\kappa).$$

VI. Вычисляем массив эквивалентной невязки

$$\eta_{i,j}^{l-1},\ i = 1,2,\ldots,n,\ j = 1,2\ldots,n,\ l \in \mathbb{N}.$$

Вычисляем, только те элементы массива эквивалентной невязки, которые будем использовать $(l \in \mathbb{N})$.

При программировании для $2 \le i \le n-1$ полагаем

$$w_{i,1}^{l-1} = w_{i,2}^{l-1}.$$

Для $1 \le j \le n-1$ полагаем

$$w_{1,j}^{l-1} = w_{2,j}^{l-1}.$$

Для $1 \le i \le n-1$ полагаем

$$w_{i,n}^{l-1} = 0.$$

Для $1 \le j \le n$ полагаем

$$w_{n,j}^{l-1} = 0.$$

При программировании для $2 \le i \le n-1,\ 2 \le j \le 3m-1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1} = (4w_{i,j}^{l-1} - w_{i-1,j}^{l-1} - w_{i+1,j}^{l-1} - w_{i,j-1}^{l-1} - w_{i,j+1}^{l-1})h^{-2}.$$

Для $2 \le i \le 3m-1,\ 3m \le j \le n-1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1} = (4w_{i,j}^{l-1} - w_{i-1,j}^{l-1} - w_{i+1,j}^{l-1} - w_{i,j-1}^{l-1} - w_{i,j+1}^{l-1})h^{-2}.$$

Для $3m+1 \le i \le n-1$ полагаем

$$\eta_{i,3m}^{l-1} = (2(1+\gamma)w_{i,3m}^{l-1} - 0,5(1+\gamma)w_{i-1,3m}^{l-1} - 0,5(1+\gamma)w_{i+1,3m}^{l-1} - w_{i,3m-1}^{l-1} - \gamma w_{i,3m+1}^{l-1})h^{-2} +$$

$$+\gamma\kappa_{\mathrm{II}} w_{i,3m}^{l-1}.$$

Полагаем

$$\eta_{3m,3m}^{l-1} = ((3+\gamma)w_{3m,3m}^{l-1} - w_{3m-1,3m}^{l-1} - w_{3m,3m-1}^{l-1} - 0,5(1+\gamma)w_{3m+1,3m}^{l-1} - 0,5(1+\gamma)w_{3m,3m+1}^{l-1})h^{-2} +$$

$$+\gamma\kappa_{\mathrm{II}} w_{3m,3m}^{l-1}.$$

Для $3m+1 \le j \le n-1$ полагаем

$$\eta_{3m,j}^{l-1} = (2(1+\gamma)w_{3m,j}^{l-1} - 0,5(1+\gamma)w_{3m,j-1}^{l-1} - 0,5(1+\gamma)w_{3m,j+1}^{l-1} - w_{3m-1,j}^{l-1} - \gamma w_{3m+1,j}^{l-1})h^{-2} +$$

$$+\gamma\kappa_{\mathrm{II}} w_{3m,j}^{l-1}.$$

Для $3m+1 \le i \le n-1, 3m+1 \le j \le n-1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1} = \gamma(4w_{i,j}^{l-1} - w_{i-1,j}^{l-1} - w_{i+1,j}^{l-1} - w_{i,j-1}^{l-1} - w_{i,j+1}^{l-1})h^{-2} + \gamma\kappa_{\mathrm{II}} w_{i,j}^{l-1}.$$

VII. Вычисляем итерационный параметр.

При программировании полагаем

$$\tau_{l-1} = \left(\sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=2}^{n-1} r_{i,j}^{l-1} w_{i,j}^{l-1} \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=2}^{n-1} w_{i,j}^{l-1} \eta_{i,j}^{l-1} \right), k \in \mathbb{N}.$$

VIII. Вычисляем очередное приближение. Это массив

$$v_{i,j}^{l}, i = 1,2,...,n, \ j = 1,2...,n, \ k \in \mathbb{N}.$$

Значения элементов этого массивов в последующих вычислениях не обязательно сохранять.

При программировании для $2 \le i \le n-1, 2 \le j \le n-1$ полагаем

$$v_{i,j}^{l} = v_{i,j}^{l-1} - \tau_{l-1} w_{i,j}^{l-1}, l \in \mathbb{N}.$$

При программировании для $2 \le i \le n-1$ полагаем

$$v_{i,1}^{l-1} = v_{i,2}^{l-1}.$$

Для $1 \le j \le n-1$ полагаем

$$v_{1,j}^{l-1} = v_{2,j}^{l-1}.$$

Для $1 \le i \le n-1$ полагаем

$$v_{i,n}^{l-1} = 0.$$

Для $1 \le j \le n$ полагаем

$$v_{n,j}^{l-1} = 0.$$

IX. Проверяем условие остановки итераций по заранее задаваемой оценке относительной ошибки в более сильной норме, чем энергетическая норма в решаемой задаче

$$e_{l-1} \le e^2 e_0,\ l \in \mathbb{N},\ e = 0{,}001 \in (0;1).$$

Если условие остановки итераций не достигается, то все повторяем с пункта III.

2.18. Пример использования метода итерационных расширений для решения задачи гармонической системы в пространстве Соболева на L-образной области

Рассмотрим приведенную задачу при разностной аппроксимации, когда

$$m = 1,\ n = 4,\ h = 1,\ \kappa_{\mathrm{II}} = 1,\ \gamma = 27/2,\ \mathrm{E} = 0{,}001,\ N = 4.$$

При дискретизации рассматриваемой задачи применим смешанный метод аппроксимации по частям, разностный метод. Исходная задача в матричном виде

$$\mathrm{A}_{11}\overline{u}_1 = \overline{f}_1,\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/23 \\ -23/23 \\ -23/23 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26/23 \\ 1/23 \\ 1/23 \end{bmatrix}.$$

Фиктивная задача в матричном виде

$$\mathrm{A}_{02}\overline{u}_2 = \overline{f}_2,\ [2][u_4] = [f_4],\ [f_4] = [0],[u_4] = [0].$$

При аппроксимации фиктивной задачи, вообще то, получается система

$$[5/4][u_4] = [f_4],\ [f_4] = [0],[u_4] = [0].$$

Первый вариант системы можно получить, если ввести изменение коэффициента на части области, т.е. положить, что

$$\kappa_{\mathrm{II}} = 4,\ (x;y) \in (1{,}5;1{,}5+0{,}5h)\times(1{,}5;1{,}5+0{,}5h) = (1{,}5;2)\times(1{,}5;2).$$

Отметим, что решения краевых задач в узлах сетки и с соответствующие компоненты решений систем линейных алгебраических уравнений, получающейся при аппроксимации этих краевых задач в рассматриваемом примере таковы

$$u_1 = 26/23 \approx \breve{u}(0,5;0,5) = 1,\ u_2 = 1/23 \approx \breve{u}(0,5;1,5) = 0, u_3 = 1/23 \approx \breve{u}(1,5;0,5) = 0,$$

$$u_4 = 0 = \breve{u}(1,5;1,5) = 0,$$

когда

$$f_1 = \breve{f}(0,5;0,5) = 50/23,\ f_2 = \breve{f}(0,5;1,5) = -23/23,$$

$$f_3 = \breve{f}(1,5;0,5) = -23/23,\ f_4 = \breve{f}(1,5;1,5) = 0.$$

Введем матрицы

$$\mathrm{A_I} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix},\ \mathrm{A_{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

При $\gamma = 27/2$ матрица

$$C = \mathrm{A_I} + \gamma \mathrm{A_{II}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 30 \end{bmatrix}.$$

Полагаем, что $\bar{u}^0 = \bar{0}$, тогда $\mathrm{E}_0 = (\bar{f}, \bar{f}) = 3558/23^2$.

Находим первое приближение

$$\bar{u}^1 = C^{-1}\bar{f} = \frac{1}{174}\begin{bmatrix} 132 & 45 & 45 & 3 \\ 45 & 74 & 16 & 3 \\ 45 & 16 & 74 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 50/23 \\ -23/23 \\ -23/23 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 755/(29\bullet 23) \\ 30/(29\bullet 23) \\ 30/(29\bullet 23) \\ 2/(29\bullet 23) \end{bmatrix}.$$

Вычисляем первую невязку

$$\bar{r}^1 = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{u}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 755/(29\bullet 23) \\ 30/(29\bullet 23) \\ 30/(29\bullet 23) \\ 2/(29\bullet 23) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4/(29\bullet 23) \end{bmatrix}.$$

Вычисляем величину

$$\mathrm{E}_1 = (\bar{r}^1, \bar{r}^1) = (4/29\bullet 23)^2 = 16/(29^2\bullet 23^2).$$

Проверяем условие остановки итераций

$$\mathrm{E}_1 \le \mathrm{E}^2\mathrm{E}_0,\ 16/(29^2\bullet 23^2) \le 0{,}000001\bullet 3558/23^2.$$

Находим первую поправку.

$$\bar{w}^1 = C^{-1}\bar{r}^1 = \frac{1}{174}\begin{bmatrix} 132 & 45 & 45 & 3 \\ 45 & 74 & 16 & 3 \\ 45 & 16 & 74 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4/(29\bullet 23) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/(29^2\bullet 23) \\ 2/(29^2\bullet 23) \\ 2/(29^2\bullet 23) \\ 4/(29^2\bullet 23) \end{bmatrix}.$$

Вычисляем первую эквивалентную невязку

$$\bar{\eta}^1 = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{w}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/(29^2\bullet 23) \\ 2/(29^2\bullet 23) \\ 2/(29^2\bullet 23) \\ 4/(29^2\bullet 23) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8/(29^2\bullet 23) \end{bmatrix}.$$

Вычисляем первый итерационный параметр по формуле метода минимальных невязок

$$\tau_1 = (\bar{r}^1, \bar{\eta}^1)/(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^1) = (4/(29\bullet 23)\bullet 8/(29^2\bullet 23))/(8/(29^2\bullet 23))^2 = 29/2.$$

Находим второе приближение

$$\bar{u}^2 = \bar{u}^1 - \tau_1\bar{w}^1 = \begin{bmatrix} 755/(29\bullet 23) \\ 30/(29\bullet 23) \\ 30/(29\bullet 23) \\ 2/(29\bullet 23) \end{bmatrix} - 29/2 \begin{bmatrix} 2/(29^2\bullet 23) \\ 2/(29^2\bullet 23) \\ 2/(29^2\bullet 23) \\ 4/(29^2\bullet 23) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26/23 \\ 1/23 \\ 1/23 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем вторую невязку

$$\bar{r}^2 = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{u}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26/23 \\ 1/23 \\ 1/23 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем величину

$$\mathrm{E}_2 = (\bar{r}^2, \bar{r}^2) = 0.$$

Проверяем условие остановки итераций

$$\mathrm{E}_2 \le \mathrm{E}^2\mathrm{E}_0,\ 0 \le 0{,}000001 \bullet 3558/23^2.$$

Итерационный процесс останавливается на второй итерации. $\bar{u}^2$ можно принять за приближенное решение, которое в данном случае совпадает с точным решением

$$\bar{u}^2 = \begin{bmatrix} 26/23 \\ 1/23 \\ 1/23 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{u}.$$

2.19. Пример анализа стационарной физической системы для мембраны методом итерационных расширений

Рассмотрим L-образную мембрану при очень малой толщине $\breve{h}$ относительно ее размеров, расположенную горизонтально при закреплении на границе кроме двух больших и смежных сторон. Полагаем, что точки мембраны в прямоугольной системе координат принадлежат множеству

$$\Big([0;2{,}5]\times[0;2{,}5]\setminus(1{,}5;2{,}5]\times(1{,}5;2{,}5]\Big)\times[-\breve{h}/2;\ \breve{h}/2],$$

т.е. будем рассматривать задачу:

$$-\Delta\breve{u}_1 = \breve{f}_1 \text{ в } (0;2{,}5)\times(0;2{,}5)\setminus[1{,}5;2{,}5)\times[1{,}5;2{,}5),$$

$$\breve{u}_1 = 0 \text{ на } \{2{,}5\}\times(0;1{,}5)\cup(0;1{,}5)\times\{2{,}5\}\cup\{1{,}5\}\times(1{,}5;2{,}5)\cup(1{,}5;2{,}5)\times\{1{,}5\},$$

$$\frac{\partial \breve{u}_1}{\partial n} = 0 \text{ на } \{0\} \times (0;2,5) \cup (0;2,5) \times \{0\}.$$

Здесь $\breve{u}_1$ функция перемещение точек L-образной мембраны, расположенной в горизонтальном положении при закреплении на части границы под действием вертикальной нагрузки определяющей правую часть уравнения $\breve{f}_1$. Например, если $\breve{f}_1 = 0$, то $\breve{u}_1 = 0$ будет уравнением срединной плоскости в прямоугольной системе с координатами $x, y, \breve{u}_1$. Если

$$\breve{f}_1 = ((392-384x)(64y^3-196y^2+225)+(64x^3-196x^2+225)(392-384y))/184^2,$$

то

$$\breve{u}_1 = (64x^3-196x^2+225)(64y^3-196y^2+225)/184^2$$

будет уравнением срединной поверхности.

Задача 2.19.1. Найти срединную поверхность рассматриваемой мембраны, получающуюся под действием на эту мембрану вертикального давления $\breve{P}_1$ как численное решение задачи гармонической системы в пространстве Соболева на L-образной области, когда коэффициент натяжения $\breve{T}_1 = 1,5$ и давление

$$\breve{P}_1 = 1,5((392-384x)(64y^3-196y^2+225)+(64x^3-196x^2+225)(392-384y))/184^2.$$

Рассмотрим приведенную задачу при разностной аппроксимации, когда $n = 254$ и выбрано нулевое начальное приближение. Можно добиться, что итерационный процесс метода итерационных расширений останавливается за несколько итерации, если в критерии его остановки задана оценка $\mathrm{E} = 0,001$ для относительной ошибки в норме более сильной, чем энергетическая норма задачи. Дополнительно заметим, что на последней итерации, на используемой сетке выполняется неравенство характеризуещее точность численного решения исходной задачи в рассматриваемом случае в норме максимум модуля

$$\frac{\max\left|u_{i,j}^k - \breve{u}_{i,j}\right|}{\max\left|\breve{u}_{i,j}\right|} \le 0,0021.$$

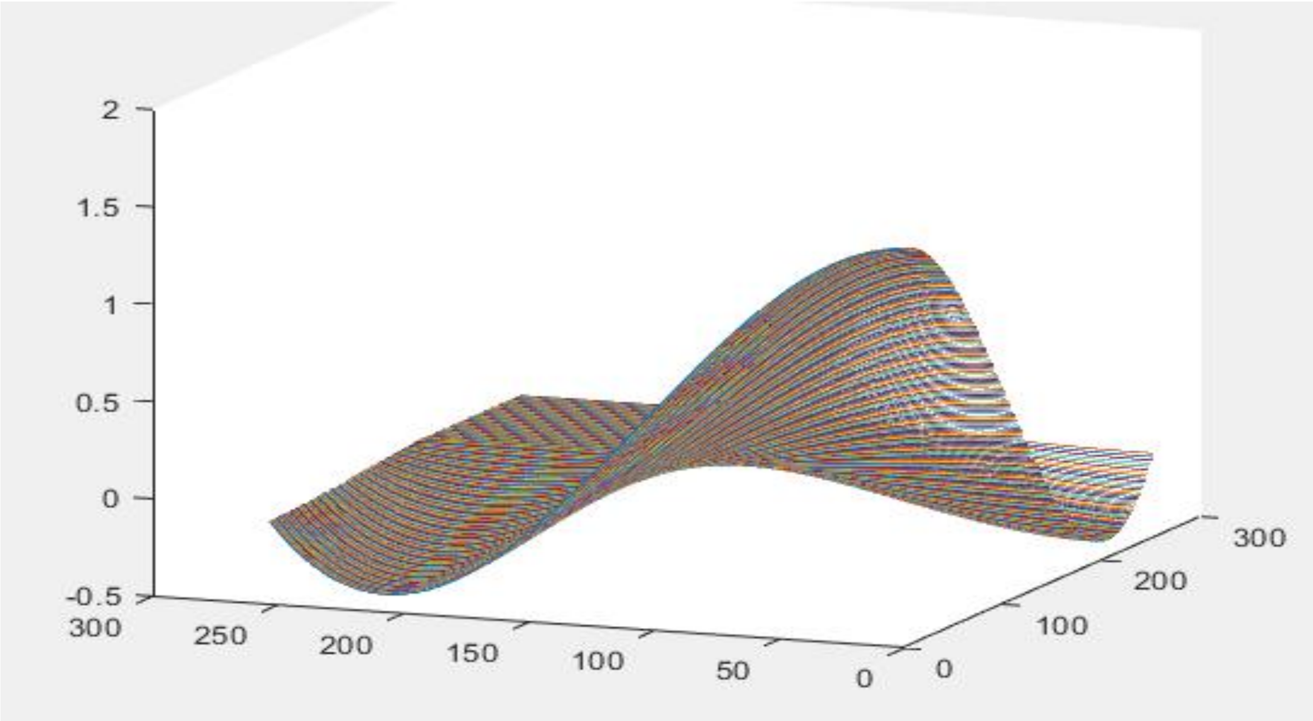


Рис. 2.19.1. График точного решения задачи 2.19.1.

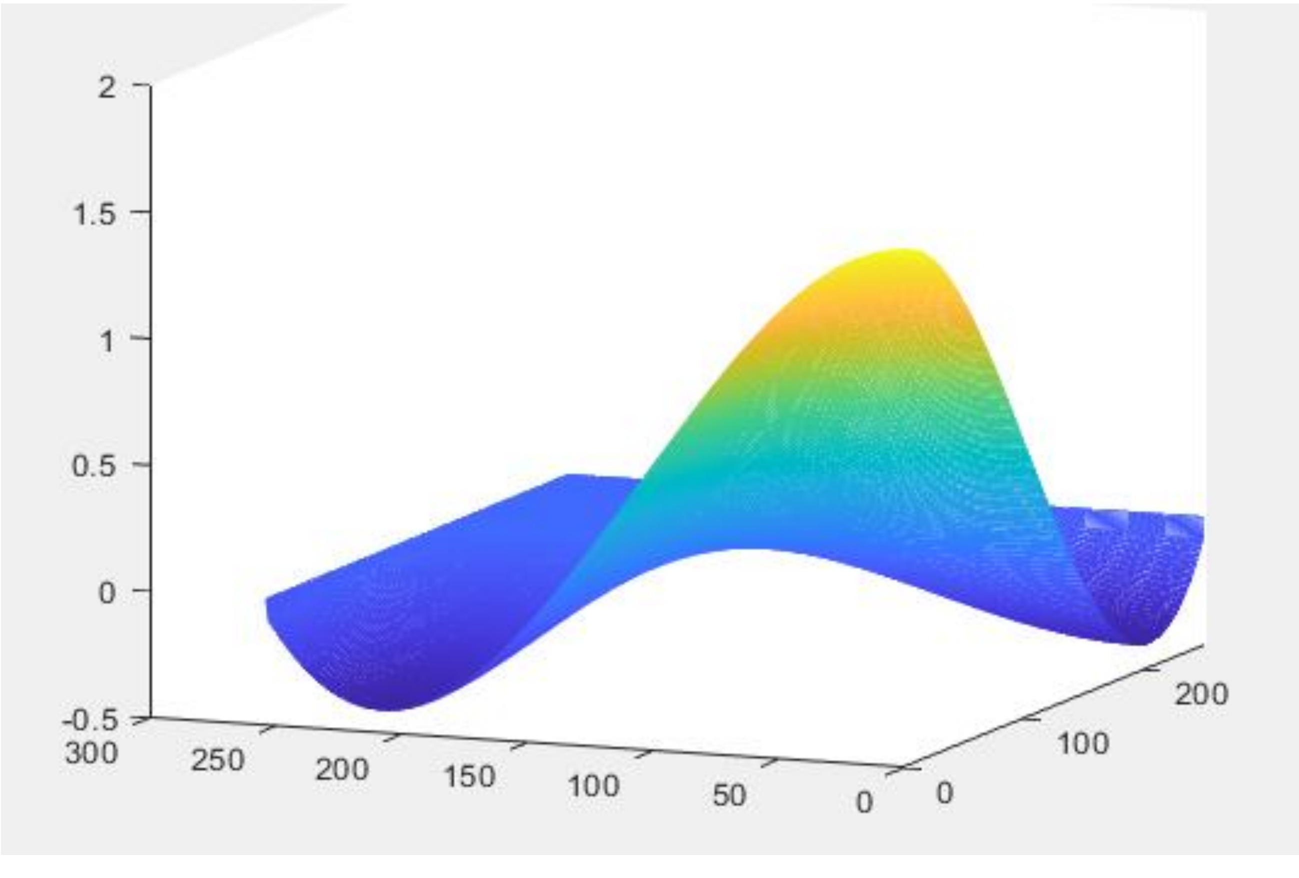


Рис. 2.19.2. График последнего приближения задачи 2.19.1.

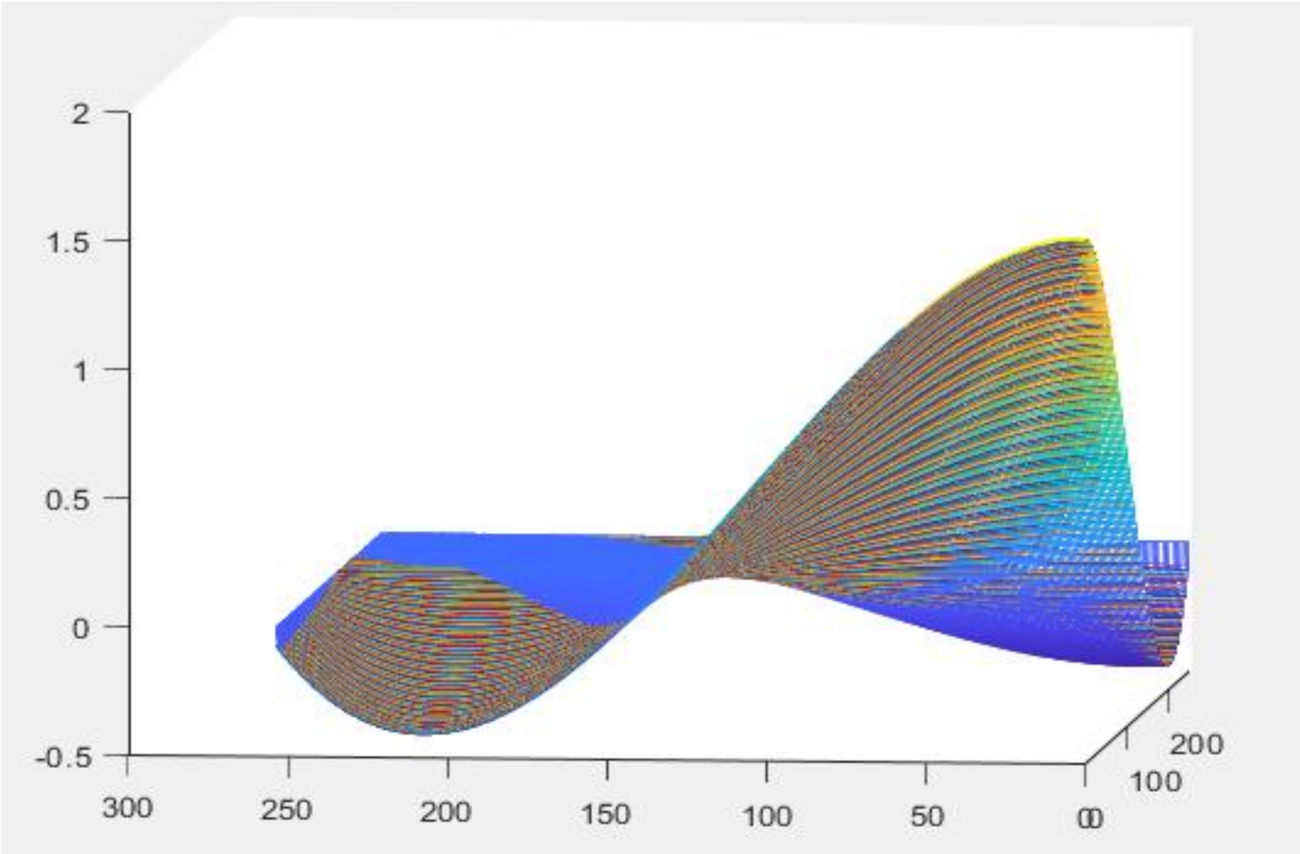


Рис. 2.19.3. Графики точного решения и последнего приближения задачи 2.19.1. Графики последнего приближения и точного решения практически почти совпадают, если в критерии останоки алгоритма реализующего метод итерационных расширений заранее задается оценка относительной ошибки в более сильной норме, чем энергетическая норма $\mathrm{E} = 0{,}001$.

Замечание 2.19.1. При решении приведенной задачи исползовались алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи родолженной гармонической системы на квадрате из параграфа 2.14, алгоритм, реализующий методы итерационных расширений и конечных элементов и разностей для решения задачи продолженной гармонической системы на квадрате из параграфа 2.15, алгоритм, реализующий метод итерационных факторизаций при решении задачи расширенной гармонической системы на квадрате из параграфа 2.16 и алгоритм, реализующий методы итерационных факторизаций и конечных элементов и разностей при решении задачи расширенной гармонической системы на квадрате из параграфа 2.17.

ГЛАВА 3

АНАЛИЗ СКАЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ

В этой главе приводится анализ скалярной системы – задачи представления линейного функционала в виде скалярного произведения в пространстве Гильберта. Скалярная система рассматривается в пространстве Гильберта. Производится продолжение скалярной системы в пространстве Гильберта. Приводится анализ продолженной скалярной системы модифицированным методом фиктивных компонент в пространстве Гильберта. Продолженная скалярная система рассматривается на конечномерном подпространстве Гильберта. Приводится анализ продолженной скалярной системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве Гильберта. Продолженная скалярная система рассматривается на пространстве Евклида. Приводится анализ продолженной скалярной системы модифицированным методом фиктивных компонент на пространстве Евклида. Производится анализ продолженной скалярной системы методом итерационных расширений на пространстве Евклида. Приводится анализ продолженной скалярной системы методом итерационных расширений в пространстве Гильберта. Приводится анализ продолженной скалярной системы методом итерационных расширений на конечномерном подпространстве Гильберта. Выписывается алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи скалярной системы на пространстве Евклида.

3.1. Скалярная система в пространстве Гильберта

Полагаем, что задана первая плоская ограниченная область и выбираем вторую плоскую ограниченную область.

$$\omega \in \{1, \mathrm{II}\}, \; \Omega_\omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Пересечение областей должно быть пусто, а объединение замыканий должно давать замыкание прямоугольной области.

$$\Omega_1 \bigcap \Omega_{\mathrm{II}} = \varnothing, \; \bar{\Omega}_1 \bigcup \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} = \bar{\Pi}.$$

Полагаем, что пересечение границ первой и второй области непустое множество.

$$\partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_{\mathrm{II}} \neq \varnothing.$$

Рассматриваем исходную задачу представления линейного функционала в виде энергетического скалярного произведения как скалярную систему в гильбертовом пространстве на первой области. Вводим фиктивную задачу представления нулевого функционала в виде энергетического скалярного произведения как скалярную систему в гильбертовом пространстве на второй области.

$$\breve{u}_\omega \in \breve{H}_\omega : (\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega} = F_\omega(\breve{v}_\omega) \; \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega, \; F_\omega \in \breve{H}'_\omega, \; \breve{H}_\omega = \breve{H}_\omega(\Omega_\omega), \; F_{\mathrm{II}}(\breve{v}_{\mathrm{II}}) = 0. \quad (3.1.1)$$

Предполагается, что энергетические скалярные произведения, порождаемые соответствующими симметричными операторами, и являются скалярными произведениями, рассматриваемых гильбертовых пространств и обладают свойствами скалярных произведений, задаваемыми через скалярные произведения функций суммируемых в квадрате на соответствующих областях.

0) $(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega} = (\breve{\mathrm{A}}_\omega \breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) \; \forall \breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega,$

1) $(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega} = (\breve{v}_\omega, \breve{u}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega} \forall \breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega,$

2) $(\breve{u}_\omega + \breve{w}_\omega, \breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega} = (\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega} + (\breve{w}_\omega, \breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega} \forall \breve{u}_\omega, \breve{w}_\omega, \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega,$

3) $(c\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega} = c(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega} \; \forall c \in \mathbb{R}, \forall \breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega,$

4) $(\breve{v}_\omega,\breve{v}_\omega)_{\breve{A}_\omega} > 0,\ \breve{v}_\omega \neq 0,\ (\breve{v}_\omega,\breve{v}_\omega)_{\breve{A}_\omega} = 0 \Leftrightarrow \breve{v}_\omega = 0.$

Также можно использовать обозначение

$$[\breve{u}_\omega,\breve{v}_\omega]_\omega = (\breve{u}_\omega,\breve{v}_\omega)_{\breve{A}_\omega}.$$

Основными примерами рассматриваемых гильбертовых пространств могут служить пространства функций Соболева. Примерами рассматриваемых операторов являются симметричные операторы, возникающие в эллиптических краевых задачах. Примерами правых частей задач могут служить скалярные произведения функций, суммируемых в квадрате на соответствующих областях.

$$F_\omega(\breve{v}_\omega) = \int_{\Omega_\omega} \breve{f}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega \ \ \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega.$$

Приведем решаемую и фиктивную задачи в операторном виде.

$$\breve{u}_\omega \in \breve{H}_\omega :\ \breve{A}_\omega \breve{u}_\omega = \breve{f}_\omega,\ \breve{f}_{\mathrm{II}} = 0. \tag{3.1.2}$$

У каждой задачи существует и единственное решение, а фиктивная задача имеет нулевое решение [60].

3.2. Продолженная скалярная система в пространстве Гильберта

Совместно рассматриваемые решаемая задача представления линейного функционала в виде скалярного произведения и фиктивная задача представления линейного функционала в виде скалярного произведения в вариационном виде, операторном виде будем называть продолженной задачей представления линейного функционала в виде скалярного произведения. Такую продолженную задачу представления линейного функционала в виде скалярного произведения будем обозначать как продолженную скалярную систему в пространстве Гильберта.

$$\begin{gathered} \breve{u} \in \breve{V} :\ (\breve{u}, I_1\breve{v})_{\breve{A}_1} + (\breve{u},\breve{v})_{\breve{A}_{\mathrm{II}}} = F_1(I_1\breve{v})\ \forall \breve{v} \in \breve{V}, \\ \breve{u} \in \breve{V} :\ \breve{B}\breve{u} = \breve{f}, \end{gathered} \tag{3.2.1}$$

если определить оператор, правую часть в предыдущей задаче следующим образом

$$(\breve{B}\breve{u},\breve{v}) = (\breve{u}, I_1\breve{v})_{\breve{A}_1} + (\breve{u},\breve{v})_{\breve{A}_{II}} \ \forall \breve{u},\breve{v} \in \breve{V},\ (\breve{f},\breve{v}) = F_1(I_1\breve{v}) \ \forall \breve{v} \in \breve{V},$$

$$(\breve{f},\breve{v}) = \int_{\Pi} \breve{f}\breve{v}d\Pi.$$

Расширенное пространство для решений этой задачи будет пространство функций Гильберта на прямоугольной области $\breve{V} = \breve{V}(\Pi)$. В расширенном пространстве находится как подпространство пространство решений продолженной задачи. Пространство решений исходной задачи на первой области при продолжении нулем на всю остальную прямоугольную область будет пространством решений продолженной задачи.

$$\breve{V}_1 = \breve{V}_1(\Pi) = \left\{ \breve{v}_1 \in \breve{V} : \breve{v}_1\big|_{\Pi \setminus \Omega_1} = 0 \right\}.$$

В продолженной задаче применяем оператор проектирования расширенного пространства решений на пространство решений продолженной.

$$I_1 : \breve{V} \mapsto \breve{V}_1, \breve{V}_1 = im I_1,\ I_1 = I_1^2.$$

Определим подпространства расширенного пространства решений.

$$\breve{V}_3 = \breve{V}_3(\Pi) = \left\{ \breve{v}_3 \in \breve{V} : \breve{v}_3\big|_{\Pi \setminus \Omega_{II}} = 0 \right\}, \breve{V}_0 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_3,$$

$$\breve{V}_2 = \breve{V}_2(\Pi) = \left\{ \breve{v}_2 \in \breve{V} : (\breve{v}_2, \breve{v}_0)_{\breve{A}} = 0 \ \forall \breve{v}_0 \in \breve{V}_0 \right\},$$

$$\breve{V} = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_2 \oplus \breve{V}_3 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_{II}, \breve{V}_I = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_2, \breve{V}_{II} = \breve{V}_2 \oplus \breve{V}_3.$$

Определим скалярное произведение, являющееся суммой скалярных произведений.

$$(\breve{u},\breve{v})_{\breve{A}} = (\breve{u},\breve{v})_{\breve{A}_1} + (\breve{u},\breve{v})_{\breve{A}_{II}} \ \forall \breve{u},\breve{v} \in \breve{V}.$$

Также можно использовать обозначение

$$[\breve{u},\breve{v}] = (\breve{u},\breve{v})_{\breve{A}}.$$

Полагаем, что рассмотренная сумма скалярных произведений и является скалярным произведением в расширенном пространстве решений. Считаем, что в используемых пространствах возможно продолжение функций в указываемом виде.

$$\exists\breve{\beta}_1 \in (0;1],\ \breve{\beta}_2 \in [\breve{\beta}_1;1]: \breve{\beta}_1(\breve{v}_2,\breve{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}} \le (\breve{v}_2,\breve{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}} \le \breve{\beta}_2(\breve{v}_2,\breve{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}}\ \forall\breve{v}_2 \in \breve{V}_2,$$

$$\exists\breve{\beta}_1 \in (0;1],\ \breve{\beta}_2 \in [\breve{\beta}_1;1]: \breve{\beta}_1(\breve{\mathrm{A}}\breve{v}_2,\breve{v}_2) \le (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2,\breve{v}_2) \le \breve{\beta}_2(\breve{\mathrm{A}}\breve{v}_2,\breve{v}_2)\ \forall\breve{v}_2 \in \breve{V}_2,$$

где рассматриваемые операторы следующие.

$$\breve{\mathrm{A}} = \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} + \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}},\ (\breve{\mathrm{A}}\breve{u},\breve{v}) = (\breve{u},\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}},\ (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\breve{u},\breve{v}) = (\breve{u},\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_1},\ (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{u},\breve{v}) = (\breve{u},\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}}\ \forall\breve{u},\breve{v} \in \breve{V}.$$

Продолженная задача имеет и единственное решение. Решение исходной задачи на первой области при продолжении нулем на всю остальную часть прямоугольной области будет решением продолженной задачи. Решение исходной задачи и решение продолженной задачи обозначаются одинаково как функция и ее продолжение

$$\breve{H}_\omega(\Omega_\omega) = \breve{V}_\omega(\Omega_\omega),\ \omega \in \{1, \mathrm{II}\}.$$

Предложение 3.2.1. *Имеют место следующие равенства:*

$$(\breve{u}_0,\breve{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega} = (\breve{v}_2,\breve{u}_0)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega} = 0\ \ \forall\breve{u}_0 \in \breve{V}_0,\ \forall\breve{v}_2 \in \breve{V}_2,\ \omega \in \{1, \mathrm{II}\}.$$

Доказательство. Действительно, т.к.

$$(\breve{u}_0,\breve{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}_1} = (\breve{u}_1,\breve{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}_1} = (\breve{u}_1,\breve{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}} = 0\ \ \forall\breve{u}_1 \in \breve{V}_0,\ \forall\breve{v}_2 \in \breve{V}_2,$$

$$(\breve{u}_0,\breve{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}} = (\breve{u}_3,\breve{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}} = \mathrm{A}(\breve{u}_3,\breve{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}} = 0\ \ \forall\breve{u}_3 \in \breve{V}_0,\ \forall\breve{v}_2 \in \breve{V}_2.$$

Утверждение 3.2.1. *Решение задачи из (3.2.1) $\breve{u} \in \breve{V}_1$, существует, единственно на Ω_1 совпадает с решением задачи из (3.1.1) при $\omega = 1$, на Ω_{II} равно нулю.*

Доказательство. Пусть $\breve{u}^1$, $\breve{u}^2$ два различных решения , тогда для $\breve{u}^0 = \breve{u}^1 - \breve{u}^2$ имеем

$$(\breve{u}^0, I_1\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_1} + (\breve{u}^0,\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}} = 0\ \ \forall\breve{v} \in \breve{V}.$$

Заметим , что $\breve{u}^0 = \breve{u}_2^0 \in \breve{V}_2$, т.к. при $\breve{v} = \breve{v}_0$ получаем

$$(\breve{u}^0, I_1\breve{v}_0)_{\breve{\mathrm{A}}_1} + (\breve{u}^0,\breve{v}_0)_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}} = (\breve{u}^0,\breve{v}_0)_{\breve{\mathrm{A}}_1} + (\breve{u}^0,\breve{v}_0)_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}} = (\breve{u}^0,\breve{v}_0)_{\breve{\mathrm{A}}} = 0\ \ \forall\breve{v}_0 \in \breve{V}_0.$$

Пусть $\breve{v}=\breve{u}_2^0$, тогда

$$(\breve{u}_2^0, I_1\breve{u}_2^0)_{\breve{A}_1}+(\breve{u}_2^0,\breve{u}_2^0)_{\breve{A}_{II}}=0$$

и ввиду предложения 3.2.1.

$$(\breve{u}_2^0, I_1\breve{u}_2^0)_{\breve{A}_1}=0,(\breve{u}_2^0,\breve{u}_2^0)_{\breve{A}_{II}}=0,$$

тогда $\breve{u}_2^0=0$ на Ω_{II}, т.к. $(\bullet,\bullet)_{\breve{A}_{II}}$ скалярное произведение и

$$0\le \breve{\beta}_1(u_2^0,u_2^0)_{\breve{A}}\le (u_2^0,u_2^0)_{\breve{A}_{II}}=0$$

получаем

$$(u_2^0,u_2^0)_{\breve{A}}=0,$$

тогда $\breve{u}_2^0=0$ на Π, т.к. $(\bullet,\bullet)_{\breve{A}}$ скалярное произведение. Таким образом, $\breve{u}^0=\breve{u}_2^0=0$ на Π. Насчет существования решения задач из (3.2.1) можно сказать, что решение уже указано в самом утверждении.

3.3. Анализ продолженной скалярной системы модифицированным методом фиктивных компонент в пространстве Гильберта

Анализ продолженной задачи представления линейного функционала в виде скалярного произведения как задачи продолженной скалярной системы рассмотрим модифицированным методом фиктивных компонент. Рассматриваем модифицированный метод фиктивных компонент при решении продолженной задачи представления линейного функционала в виде скалярного произведения как вычислительную систему для анализа продолженной скалярной системы. Это следующий итерационный процесс приближённых вычислений на аналитическом, непрерывном уровне [101, 118, 124, 125, 126, 128, 129]:

$$\breve{u}^k\in\breve{V}:(\breve{u}^k-\breve{u}^{k-1},\breve{v})_{\breve{A}}=-\tau_{k-1}((\breve{u}^{k-1},I_1\breve{v})_{\breve{A}_1}+(\breve{u}^{k-1},\breve{v})_{\breve{A}_{II}}-F_1(I_1\breve{v}))\ \forall\breve{v}\in\breve{V},$$

$$\tau_0=1,\ \tau_{k-1}=\tau=2/(\breve{\beta}_1+\breve{\beta}_2),\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\ \forall\breve{u}^0\in\breve{V}_1\subset\breve{V}. \qquad (3.3.1)$$

В пространстве $\breve{V}$ вводится следующая норма

$$\|\breve{v}\|_{\breve{V}}=\sqrt{(\breve{v},\breve{v})_{\breve{A}}}.$$

Теорема 3.3.1. *Для итерационного процесса из (3.3.1) имеет место следующая оценка относительной ошибки*

$$\left\|\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le \varepsilon \left\|\breve{u}^0 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}},\ k \in \mathbb{N},$$

где

$$\varepsilon = \delta_1 q^{k-1},\ \delta_1 = \sqrt{\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}^2 - 1},\ 0 \le q = (\breve{\beta}_2 - \breve{\beta}_1)\big/(\breve{\beta}_1 + \breve{\beta}_2) < 1.$$

Предложение 3.3.1. *Если в итерационном процессе из (3.3.1)* $\breve{u}^{k-1} = \breve{u}$*, то* $\breve{u}^k = \breve{u}$.

Доказательство. Из итерационного процесса, в этом случае получаем, что

$$\breve{u}^k \in \breve{V} : (\breve{u}^k - \breve{u}, \breve{v})_{\breve{A}} = -\tau_{k-1}((\breve{u}, I_1\breve{v})_{\breve{A}_1} + (\breve{u}, \breve{v})_{\breve{A}_{II}} - F_1(I_1\breve{v}))\, \forall \breve{v} \in \breve{V}$$

и

$$(\breve{u}^k - \breve{u}, \breve{v})_{\breve{A}} = 0\ \forall \breve{v} \in \breve{V},\ (\breve{u}^k - \breve{u}, \breve{u}^k - \breve{u})_{\breve{A}} = 0,\ \breve{u}^k = \breve{u}.$$

Предложение 3.3.2. *Для итерационного процесса из (3.3.1) выполняются равенства:*

$$\forall k \in \mathbb{N}\ (\breve{u}^k, \breve{v}_0)_{\breve{A}_1} = F_1(\breve{v}_0),\ (\breve{u}^k, \breve{v}_0)_{\breve{A}_{II}} = 0\ \forall \breve{v}_0 \in \breve{V}_0.$$

Доказательство. При $k = 1$

$$(\breve{u}^1, \breve{v}_0)_{\breve{A}_1} = (\breve{u}^1, \breve{v}_1)_{\breve{A}} = (\breve{u}^0, \breve{v}_1)_{\breve{A}} - \tau_0((\breve{u}^0, \breve{v}_1)_{\breve{A}_1} - F_1(\breve{v}_1)) =$$
$$= (\breve{u}^9, \breve{v}_0)_{\breve{A}_1} - ((\breve{u}^0, \breve{v}_0)_{\breve{A}_1} - F_1(\breve{v}_0)) = F_1(\breve{v}_0),$$

$$(\breve{u}^1, \breve{v}_0)_{\breve{A}_{II}} = (\breve{u}^1, \breve{v}_3)_{\breve{A}} = (\breve{u}^0, \breve{v}_3)_{\breve{A}} - \tau_0(\breve{u}^0, \breve{v}_3)_{\breve{A}_{II}} =$$

$$= (\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_0)_{\breve{A}_{II}} - (\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_0)_{\breve{A}_{II}} = 0.$$

Если предположить, что при $k-1$ предложение выполняется, тогда оно выполняется и при k

$$(\breve{u}^k, \breve{v}_0)_{\breve{A}_1} = (\breve{u}^k, \breve{v}_1)_{\breve{A}} = (\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_1)_{\breve{A}} - \tau_{k-1}((\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_1)_{\breve{A}_1} - F_1(\breve{v}_1)) =$$
$$= (\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_0)_{\breve{A}_1} - \tau_{k-1}((\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_0)_{\breve{A}_1} - F_1(\breve{v}_0)) = F_1(\breve{v}_0),$$
$$(\breve{u}^k, \breve{v}_0)_{\breve{A}_{II}} = (\breve{u}^k, \breve{v}_3)_{\breve{A}} = (\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_3)_{\breve{A}} - \tau_{k-1}(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_3)_{\breve{A}_{II}} =$$

$$= (\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_0)_{\breve{A}_{II}} - \tau_{k-1}(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}_0)_{\breve{A}_{II}} = 0.$$

На основе математической индукции получается доказательство предложения.

Приближение представляется в виде суммы точного решения и ошибки

$$\breve{u}^k = \breve{u} + \breve{\psi}^k,\ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Предложение 3.3.3. *В итерационном процессе из (3.3.1) ошибка принадлежит подпространству, т.е.* $\breve{\psi}^k = \breve{\psi}_2^k \in \breve{V}_2\ \forall k \in \mathbb{N}$, *приближение принадлежит подпространству, т.е.* $\breve{u}^k = \breve{u}_{\mathrm{I}}^k \in \breve{V}_{\mathrm{I}}\ \forall k \in \mathbb{N}.$

Доказательство. Из предложения 3.3.2

$$(\breve{u}^k, \breve{v}_0)_{\breve{\mathrm{A}}} - F_1(\breve{v}_0) = 0\ \forall \breve{v}_0 \in \breve{V}_0,$$

тогда

$$(\breve{u}^k, \breve{v}_0)_{\breve{\mathrm{A}}} - F_1(\breve{v}_0) = (\breve{u} + \breve{\psi}^k, \breve{v}_0)_{\breve{\mathrm{A}}} - F_1(\breve{v}_0) = (\breve{\psi}^k, \breve{v}_0)_{\breve{\mathrm{A}}} = 0\ \forall \breve{v}_0 \in \breve{V}_0,,$$

учитывая, что

$$(\breve{u}, \breve{v}_0)_{\breve{\mathrm{A}}} = F_1(\breve{v}_0),$$

следовательно $\breve{\psi}^k = \breve{\psi}_2^k \in \breve{V}_2.$

Утверждение 3.3.1. *При* $k=1$ *в итерационном процессе из (3.3.1) имеет место следующая оценка*

$$\left\|\breve{u}^1 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le \delta_1 \left\|\breve{u}^0 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}},\ \delta_1 = \sqrt{\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}^2 - 1}.$$

Доказательство. Из итерационного процесса (3.3.1) имеем

$$(\breve{u}^1 - \breve{u}^0, \breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}} = -((\breve{u}^0, I_1\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_1} + (\breve{u}^0, \breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}} - F_1(I_1\breve{v})) =$$

$$= -(\breve{u}^0, I_1\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_1} - (\breve{u}^0, \breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}} + F_1(I_1\breve{v}).$$

При $k=1,\ \tau_1 = 1,\ \breve{u}^0 = \breve{u} + \breve{\psi}^0$

$$(\breve{u}^1 - \breve{u}^0, \breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}} = -(\breve{u}^0, I_1\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_1} + (\breve{u}, I_1\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}} = (\breve{u} - \breve{u}^0, I_1\breve{v})_{\mathrm{A}},$$

тогда

$$(\breve{u}^1 - \breve{u}^0, \breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}} = (I_1'(\breve{u} - \breve{u}^0), \breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}}.$$

Отметим, что

$$\breve{u}^1 - \breve{u}^0 = I_1'(\breve{u} - \breve{u}^0),\ \breve{\psi}^1 = (I - I_1')\breve{\psi}^0,$$

тогда

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}^o\right\|_{\breve{V}} \le \left\|I_1\right\|_{\breve{V}} \left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}},\ \left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le \left\|I-I_1\right\|_{\breve{V}} \left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}.$$

Выполняется равенство

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}+\breve{u}-\breve{u}^0\right\|_{\breve{V}}^2 = \left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2 + \left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2,$$

т.к.

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}+\breve{u}-\breve{u}^0\right\|_{\breve{V}}^2 = \left\|\breve{u}^1-\breve{u}-(\breve{u}^0-\breve{u})\right\|_{\breve{V}}^2 = \left\|\breve{\psi}^1-\breve{\psi}^0\right\|_{\breve{V}}^2 =$$

$$(\breve{\psi}^1-\breve{\psi}^0,\breve{\psi}^1-\breve{\psi}^0)_{\breve{A}} = (\breve{\psi}^1,\breve{\psi}^1)_{\breve{A}} + (\breve{\psi}^0,\breve{\psi}^0)_{\breve{A}} = \left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2 + \left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2,$$

тогда

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}^0\right\|_{\breve{V}}^2 = \left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2 + \left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2 \le \left\|I_1\right\|_{\breve{V}}^2 \left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2$$

и, следовательно

$$\left\|\breve{u}^1-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2 \le \left(\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}^2-1\right)\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}^2,$$

а далее ч.т.д.

Можно заметить, если $I_1\breve{v}=\breve{v}_1,\ \forall\breve{v}\in\breve{V},$ т.е. теоретически при отимальном выборе оператора I_1 в виде ортопроектора, когда $\left\|I_1\right\|_{\breve{V}}=\left\|I-I_1\right\|_{\breve{V}}=1$ в (3.3.1) получается, что $\breve{u}^1=\breve{u}$. Это также получается в этом случае и непосредственно из итерационного процесса (3.3.1)

$$\breve{u}^1\in\breve{V}:(\breve{u}^1,\breve{v})_{\breve{A}} = F_1(I_1\breve{v})\ \forall\breve{v}\in\breve{V},$$

т.к. $I_1\breve{v}=\breve{v}_1$, $\breve{u}^1=\breve{u}+\breve{\psi}^1, \breve{\psi}^1=\breve{\psi}_2^1\in\breve{V}_2$, тогда

$$(\breve{u}+\psi_2^1,\breve{v}_0+\breve{v}_2)_{\breve{A}} = F_1(\breve{v}_1) = F_1(\breve{v}_0)\ ,\ (\breve{u},\breve{v}_0)_{\breve{A}} + (\psi_2^1,\breve{v}_2)_{\breve{A}} = F_1(\breve{v}_0)$$

и отсюда

$$(\psi_2^1,\breve{v}_2)_{\breve{A}}=0,\ (\psi_2^1,\psi_2^1)_{\breve{A}}=0$$

следовательно $\breve{\psi}^1=\breve{\psi}_2^1=0.$

Утверждение 3.3.2. *При* $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ *в итерационном процессе из (3.3.1) выполняется оценка*

$$\left\|\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le q^{k-1}\left\|\breve{u}^1 - \breve{u}\right\|_{\breve{V}},$$

где

$$0 \le q = (\breve{\beta}_2 - \breve{\beta}_1)\big/(\breve{\beta}_1 + \breve{\beta}_2) < 1.$$

Доказательство. Вводится оператор $\breve{R}_{\mathrm{II}}$ из $\breve{V}_2$ в $\breve{V}_2$:

$$(\breve{R}_{\mathrm{II}}\breve{u},\breve{v})_{\breve{A}} = (\breve{u},\breve{v})_{\breve{A}_{\mathrm{II}}} \quad \forall \breve{u},\breve{v} \in \breve{V}_2.$$

Заметим, что

$$\breve{\beta}_1(\breve{v}_2,\breve{v}_2)_{\breve{A}} \le (\breve{v}_2,\breve{v}_2)_{\breve{A}_{\mathrm{II}}} \le \breve{\beta}_2(\breve{v}_2,\breve{v}_2)_{\breve{A}} \quad \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2,$$

тогда

$$\breve{\beta}_1(\breve{v}_2,\breve{v}_2)_{\breve{A}} \le (\breve{R}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2,\breve{v}_2)_{\breve{A}} \le \breve{\beta}_2(\breve{v}_2,\breve{v}_2)_{\breve{A}}\ ,\ \breve{\beta}_1 I \le \breve{R}_{\mathrm{II}} \le \breve{\beta}_2 I\,.$$

Отметим, что $\breve{R}'_{\mathrm{II}} = \breve{R}_{\mathrm{II}}$, т.к. $\forall \breve{u},\breve{v} \in \breve{V}_2$

$$(\breve{u},\breve{R}'_{\mathrm{II}}\breve{v})_{\breve{A}} = (\breve{R}_{\mathrm{II}}\breve{u},\breve{v})_{\breve{A}} = (\breve{u},\breve{v})_{\breve{A}_{\mathrm{II}}} = (\breve{v},\breve{u})_{\breve{A}_{\mathrm{II}}} = (\breve{R}_{\mathrm{II}}\breve{v},\breve{u})_{\breve{A}} = (\breve{u},\breve{R}_{\mathrm{II}}\breve{v})_{\breve{A}}.$$

Таким образом, $\breve{R}_{\mathrm{II}}$ симметричный, ограниченный оператор. Из итерационного процесса (3.3.1) при $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ имеем:

$$\breve{\psi}^k \in \breve{V} : (\breve{\psi}^k - \breve{\psi}^{k-1},\breve{v})_{\breve{A}} = -\tau((\breve{\psi}^{k-1}, I_1\breve{v})_{\breve{A}_1} + (\breve{\psi}^{k-1},\breve{v})_{\breve{A}_{\mathrm{II}}})\,\forall \breve{v} \in \breve{V}$$

и

$$(\breve{\psi}^k,\breve{v})_{\breve{A}} = (\breve{\psi}^{k-1},\breve{v})_{\breve{A}} - \tau(\breve{\psi}^{k-1},\breve{v})_{\breve{A}_{\mathrm{II}}} = (\breve{\psi}^{k-1},\breve{v})_{\breve{A}} - \tau(\breve{R}_{\mathrm{II}}\breve{\psi}^{k-1},\breve{v})_{\breve{A}},$$

по этому

$$(\breve{\psi}^k,\breve{v})_{\breve{A}} = ((I - \tau\breve{R}_{\mathrm{II}})\breve{\psi}^{k-1},\breve{v})_{\breve{A}},\ \breve{\psi}^k = (I - \tau\breve{R}_{\mathrm{II}})\breve{\psi}^{k-1}.$$

Полагаем, что $\breve{T} = I - \tau\breve{R}_{\mathrm{II}}$, тогда

$$(\breve{\psi}^k,\breve{\psi}^k)_{\breve{A}} = (\breve{T}\breve{\psi}^{k-1},\breve{T}\breve{\psi}^{k-1})_{\breve{A}} \le \sup_{\breve{\psi}\in\breve{V}_2}\left(\frac{(\breve{T}\breve{\psi},\breve{T}\breve{\psi})_{\breve{A}}}{(\breve{\psi},\breve{\psi})_{\breve{A}}}\right)(\breve{\psi}^{k-1},\breve{\psi}^{k-1})_{\breve{A}} \le$$

учитываем, что оператор $\breve{T}$ симметричный

$$\le \left(\sup_{\breve{\psi} \in \breve{V}_2} \left(\frac{(\breve{T}\breve{\psi}, \breve{\psi})_{\breve{A}}}{(\breve{\psi}, \breve{\psi})_{\breve{A}}} \right) \right)^2 (\breve{\psi}^{k-1}, \breve{\psi}^{k-1})_{\breve{A}} =$$

$$= \left(\sup_{\breve{\psi} \in \breve{V}_2} \left(1 - \tau \frac{(\breve{\psi}, \breve{\psi})_{\breve{A}_{II}}}{(\breve{\psi}, \breve{\psi})_{\breve{A}}} \right) \right)^2 (\breve{\psi}^{k-1}, \breve{\psi}^{k-1})_{\breve{A}} \le$$

$$\le \max\left\{ (1 - \tau\beta_1)^2, (1 - \tau\beta_2)^2 \right\} (\breve{\psi}^{k-1}, \breve{\psi}^{k-1})_{\breve{A}}.$$

При оптимальном выборе итерационного параметра

$$\tau = 2/(\breve{\beta}_1 + \breve{\beta}_2)$$

получаем

$$(\breve{\psi}^k, \breve{\psi}^k)_{\breve{A}} \le q^2 (\breve{\psi}^{k-1}, \breve{\psi}^{k-1})_{\breve{A}}, \ \left\| \breve{u}^k - \breve{u} \right\|_{\breve{V}} \le q \left\| \breve{u}^{k-1} - \breve{u} \right\|_{\breve{V}},$$

а далее, ч.т.д.

Отметим, что теорема 3.3.1 следует из утверждений 3.3.1 и 3.3.2.

3.4. Продолженная скалярная система на конечномерном подпространстве пространства Гильберта

Рассмотрим продолженную задачу представления линейного функционала в виде скалярного произведения как задачу продолженной скалярной системы на конечномерном подпространстве. Рассмотрим дискретизацию продолженной задачи представления линейного функционала в виде скалярного произведения как задачу продолженной скалярной системы на прямоугольной области, когда в прямоугольной системе координат

$$\Pi = (0; b_1) \times (0; b_2), \ b_1, b_2 \in (0; +\infty).$$

Полагаем, что введена прямоугольная сетка с узлами и постоянными и положительными шагами в направлении соответствующих осей координат.

$$(x_i; y_j), \ h_1 > 0, \ h_2 > 0, \ i, \ j \in \mathbb{Z}.$$

Введем сеточные функции на множестве узлов введенной сетки

$$v_{i,j} = v(x_i; y_j) \in \mathbb{R},\ i,\ j \in \mathbb{Z}.$$

При восполнениях сеточных функций используем в качестве базисных функций функции в узлах сетки, имеющие локальные носители.

$$\Phi^{i,j}(x;y) = \Psi^{1,i}(x)\Psi^{2,j}(y),\ i,\ j \in \mathbb{Z}.$$

Полагаем, что значения у базисных функций вне прямоугольной области равны нулю

$$\Phi^{i,j}(x;y) = 0,\ (x;y) \notin \Pi,\ i,\ j \in \mathbb{Z}.$$

Рассматриваем линейные комбинации из базисных функций, которые являются конечномерным подпространством в расширенном пространстве решений.

$$\tilde{V} = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_{i,j} \Phi^{i,j}(x;y) \right\} \subset \breve{V}.$$

Важным примером аппроксимации пространств Соболева является кусочно-полиномиальная аппроксимация в виде конечных элементов при решении эллиптических краевых задач [60].

Приведем продолженную задачу представления линейного функционала в виде скалярного произведения на введенном конечномерном подпространстве в вариационном виде и операторном виде

$$\begin{gathered} \tilde{u} \in \tilde{V} :\ (\tilde{u}, I_1\tilde{v})_{\breve{A}_1} + (\tilde{u}, \tilde{v})_{\breve{A}_{II}} = F_1(I_1\tilde{v})\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V}, \\ \tilde{u} \in \tilde{V} :\ \tilde{B}\tilde{u} = \tilde{f}, \end{gathered} \tag{3.4.1}$$

где определим оператор и правую часть в предыдущей задаче следующим образом.

$$(\tilde{B}\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u}, I_1\tilde{v})_{\breve{A}_1} + (\tilde{u}, \tilde{v})_{\breve{A}_{II}}\ \ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V},\ (\tilde{f}, \tilde{v}) = F_1(I_1\tilde{v})\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Во введенном конечномерном пространстве содержится конечномерное подпространство решений продолженной задачи.

Введем конечномерное пространство решений исходной задачи на первой области, проложенное нулем на всю остальную часть прямоугольной области.

$$\tilde{V}_1 = \tilde{V}_1(\Pi) = \left\{ \tilde{v}_1 \in \tilde{V} : \tilde{v}_1 \big|_{\Pi \setminus \Omega_1} = 0 \right\}.$$

Считаем, например, что оператор проектирования на пространство решений продолженной задачи обнуляет коэффициенты у базисных функций носители, которых не содержатся в первой области.

$$I_1 : \tilde{V} \mapsto \tilde{V}_1, \, \tilde{V}_1 = imI_1, \, I_1 = I_1^2.$$

Введем конечномерные подпространства.

$$\tilde{V}_3 = \tilde{V}_3(\Pi) = \left\{ \tilde{v}_3 \in \tilde{V} : \tilde{v}_3 \big|_{\Pi \setminus \Omega_{\mathrm{II}}} = 0 \right\}, \, \tilde{V}_0 = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_3,$$

$$\tilde{V}_2 = \tilde{V}_2(\Pi) = \left\{ \tilde{v}_2 \in \tilde{V} : (\tilde{v}_2, \tilde{v}_0)_{\breve{\mathrm{A}}} = 0 \ \forall \tilde{v}_0 \in \tilde{V}_0 \right\},$$

$$\tilde{V} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2 \oplus \tilde{V} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_{\mathrm{II}}, \tilde{V}_{\mathrm{I}} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2, \, \tilde{V}_{\mathrm{II}} = \tilde{V}_2 \oplus \tilde{V}_3.$$

Считаем, что для конечномерных подпространств выполняются предположения о продолжении функций виде

$$\exists \tilde{\beta}_1 \in (0;1], \, \tilde{\beta}_2 \in [\tilde{\beta}_1;1] : \tilde{\beta}_1 (\tilde{v}_2, \tilde{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}} \le (\tilde{v}_2, \tilde{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}} \le \tilde{\beta}_2 (\tilde{v}_2, \tilde{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}} \ \ \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2,$$

$$\exists \tilde{\beta}_1 \in (0;1], \, \tilde{\beta}_2 \in [\tilde{\beta}_1;1] : \tilde{\beta}_1 (\tilde{\mathrm{A}} \tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \le (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}} \tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \le \tilde{\beta}_2 (\tilde{\mathrm{A}} \tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \ \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2,$$

где рассматриваемые операторы следующие.

$$\tilde{\mathrm{A}} = \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} + \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}, (\tilde{\mathrm{A}} \tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u}, \tilde{v})_{\breve{\mathrm{A}}}, \, (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} \tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u}, \tilde{v})_{\breve{\mathrm{A}}_1}, \, (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}} \tilde{v}, \tilde{v}) = (\tilde{u}, \tilde{v})_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}} \ \ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Решение продолженной задачи представления линейного функционала в виде скалярного произведения на конечномерном подпространстве существует, единственно. На конечномерном подпространстве это решение исходной задачи на первой области с нулевым продолжением на остальную часть прямоугольной области. Заметим на конечномерном подпространстве решение исходной задачи и решение исходной задачи, продолженное нулем, т.е. решение продолженной задачи могут обозначаться одинаково как функция и ее продолжение.

3.5. Анализ продолженной скалярной системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве пространства Гильберта

Рассмотрим анализ продолженной задачи представления линейного функционала в виде скалярного произведения как задачу продолженной скалярной системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве. Рассмотрим на конечномерном подпространстве модифицированный метод фиктивных компонент при решении задачи представления линейного функционала в виде скалярного произведения как вычислительную систему для анализа скалярной системы, продолженной скалярной системы. Это следующий итерационный процесс приближённых вычислений на аналитическом, непрерывном уровне на конечномерном подпространстве:

$$\tilde{u}^k \in \tilde{V}: (\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}, \tilde{v})_{\breve{A}} = -\tau_{k-1}((\tilde{u}^{k-1}, I_1\tilde{v})_{\breve{A}_1} + (\tilde{u}^{k-1}, \tilde{v})_{\breve{A}_{II}} - F_1(I_1\tilde{v}))\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = \tau = 2/(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \forall \tilde{u}^0 \in \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}. \qquad (3.5.1)$$

В подпространстве $\tilde{V}$ введем норму

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{V}} = \|\tilde{v}\|_{\breve{V}}.$$

Следствие 3.5.1. *Для итерационного процесса из (3.5.1) имеет место следующая оценка относительной ошибки*

$$\|\tilde{u}^k - \tilde{u}\|_{\tilde{V}} \le \varepsilon \|\tilde{u}^0 - \tilde{u}\|_{\tilde{V}},\ k \in \mathbb{N},$$

где

$$\varepsilon = \delta_1 q^{k-1},\ \delta_1 = \sqrt{\|I_1\|_{\tilde{V}}^2 - 1},\ 0 \le q = (\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1)/(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2) < 1.$$

Предложение 3.5.1. *Если в итерационном процессе из (3.5.1)* $\tilde{u}^{k-1} = \tilde{u}$*, то* $\tilde{u}^k = \tilde{u}$.

Предложение 3.5.2. *Для итерационного процесса из (3.5.1) выполняются равенства:*

$$\forall k \in \mathbb{N}\ (\tilde{u}^k, \tilde{v}_0)_{\breve{A}_1} = F_1(\tilde{v}_0),\ (\tilde{u}^k, \tilde{v}_0)_{\breve{A}_{II}} = 0\ \forall \tilde{v}_0 \in \tilde{V}_0.$$

Приближение представляется в виде суммы точного решения и ошибки

$$\tilde{u}^k = \tilde{u} + \tilde{\psi}^k,\ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Предложение 3.5.3. *В итерационном процессе из (3.5.1) ошибка принадлежит подпространству, т.е.* $\tilde{\psi}^k = \tilde{\psi}_2^k \in \tilde{V}_2\ \forall k \in \mathbb{N}$, *приближение принадлежит подпространству, т.е.* $\tilde{u}^k = \tilde{u}_{\mathrm{I}}^k \in \tilde{V}_{\mathrm{I}}\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Утверждение 3.5.1. *При* $k = 1$ *в итерационном процессе из (3.5.1) имеет место следующая оценка*

$$\left\|\tilde{u}^1 - \tilde{u}\right\|_{\tilde{V}} \le \delta_1 \left\|\tilde{u}^0 - \tilde{u}\right\|_{\tilde{V}},\ \delta_1 = \sqrt{\left\|I_1\right\|_{\tilde{V}}^2 - 1}.$$

Утверждение 3.5.2. *При* $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *в итерационном процессе из (3.5.1) выполняется оценка*

$$\left\|\tilde{u}^k - \tilde{u}\right\|_{\tilde{V}} \le q^{k-1} \left\|\tilde{u}^1 - \tilde{u}\right\|_{\tilde{V}},$$

где

$$0 \le q = (\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1) \big/ (\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2) < 1.$$

Отметим, что следствие 3.5.1 следует из утверждений 3.5.1, 3.5.2 и теоремы 3.3.1.

3.6. Продолженная скалярная система на пространстве Евклида

Рассмотрим продолженную задачу представления линейного функционала в виде скалярного произведения как задачу продолженной скалярной системы в матричном виде. Аппроксимируя продолженную задачу представления линейного функционала в виде скалярного произведения как задачу продолженной скалярной системы с помощью конечномерного подпространства.

Получим систему уравнений

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N : B\bar{u} = \bar{f},\ \bar{f} \in \mathbb{R}^N. \qquad (3.6.1)$$

Также считаем, что оператор проектирования на пространство решений продолженной задачи обнуляет коэффициенты у базисных функций носители, которых не содержатся полностью в первой области. Получаем продолженную задачу, систему в матричном виде, определив продолженную матрицу и продолженную правую часть системы

$$\left\langle B\bar{u}, \bar{v} \right\rangle = (\tilde{u}, I_1\tilde{v})_{\breve{A}_1} + (\tilde{u}, \tilde{v})_{\breve{A}_{II}} \ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V},\ \left\langle \bar{f}, \bar{v} \right\rangle = F_1(I_1\tilde{v})\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\left\langle \bar{f}, \bar{v} \right\rangle = (\bar{f}, \bar{v})h_1h_2 = \bar{f}\,\bar{v}h_1h_2,\ \bar{v} = (v_1, v_2, ..., v_N)' \in \mathbb{R}^N.$$

При этом нумеруем первыми базисные функции носители, у которых полностью лежат в первой области. Затем нумеруем базисные функции носители, у которых пересекают границу первой области и второй области вместе. Заканчиваем нумерацию на базисных функциях носители, у которых полностью лежат во второй области. При этой нумерации возникающие векторы имеют такое строение

$$\bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')',\ \bar{u} = (\bar{u}_1', \bar{0}', \bar{0}')',\ \bar{f} = (\bar{f}_1', \bar{0}', \bar{0}')'.$$

Отметим, что решается продолженная задача в следующем матричном виде.

$$B\bar{u} = \bar{f}, \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{02} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

Так решается исходная задача в матричном виде и фиктивная задача в матричном виде

$$A_{11}\bar{u}_1 = \bar{f}_1, \begin{bmatrix} A_{02} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

Элементы у матрицы и компоненты вектора у правой части, для приведенной системы (4.6.1) находятся по формулам

$$b_{i,j} = h_1^{-1}h_2^{-1}\left((\Phi_i, I_1\Phi_j)_{\breve{A}_1} + (\Phi_i, \Phi_j)_{\breve{A}_{II}}\right),\ f_i = h_1^{-1}h_2^{-1}F_1(I_1\Phi_i),\ i, j = 1, 2, ..., N.$$

Функции конечномерного подпространства представляются в виде:

$$\tilde{v} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_{i,j} \Phi^{i,j}(x;y) = \sum_{l=1}^{N} v_l \Phi_l.$$

Зададим матрицы, порождаемые соответствующими скалярными произведениями

$$\left\langle \mathrm{A_I}\bar{u}, \bar{v} \right\rangle = (\tilde{u}, \tilde{v})_{\breve{\mathrm{A}}_\mathrm{I}}, \left\langle \mathrm{A_{II}}\bar{u}, \bar{v} \right\rangle = (\tilde{u}, \tilde{v})_{\breve{\mathrm{A}}_\mathrm{II}} \quad \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Эти матрицы имеют следующую структуру

$$\mathrm{A_I} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{A_{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

Определим расширенную матрицу

$$\mathrm{A} = \mathrm{A_I} + \mathrm{A_{II}} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

Введем подпространство векторов

$$\bar{V}_1 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')' \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_2 = \bar{0}, \bar{v}_3 = \bar{0} \right\}.$$

Дополнительно определим подпространства векторов, как ранее вводили соответствующие конечномерные подпространства

$$\bar{V}_3 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')' \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_1 = \bar{0}, \bar{v}_2 = \bar{0} \right\}, \bar{V}_0 = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_3,$$

$$\bar{V}_2 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')' \in \mathbb{R}^N : \mathrm{A}_{11}\bar{v}_1 + \mathrm{A}_{12}\bar{v}_2 = \bar{0}, \mathrm{A}_{32}\bar{v}_2 + \mathrm{A}_{33}\bar{v}_3 = \bar{0} \right\},$$

$$\mathbb{R}^N = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2 \oplus \bar{V}_3 = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_\mathrm{II}, \bar{V}_\mathrm{I} = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2, \bar{V}_\mathrm{II} = \bar{V}_2 \oplus \bar{V}_3.$$

Полагаем, выполняются теже предположения о продолжении теперь в матричном виде

$$\exists \beta_1 \in (0;+\infty), \beta_2 \in [\beta_1;+\infty) : \beta_1 \left\langle \mathrm{A}\bar{v}_2, \bar{v}_2 \right\rangle \le \left\langle \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2, \bar{v}_2 \right\rangle \le \beta_2 \left\langle \mathrm{A}\bar{v}_2, \bar{v}_2 \right\rangle \ \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2.$$

3.7. Анализ продолженной скалярной системы модифицированным методом фиктивных компонент на пространстве Евклида

Рассмотрим анализ продолженной задачи представления линейного функционала в виде скалярного произведения как задачи продолженной скалярной системы модифицированным методом фиктивных компонент в матричном виде, совпадающим здесь с методом фиктивных компонент

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : \mathrm{A}(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}),$$

$$\tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = \tau = 2/(\beta_1 + \beta_2),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1. \qquad (3.7.1)$$

На любом шаге в этом итерационном процессе возникает расширенная задача, расширенная матрица

$$\left\langle \mathrm{A}\bar{u}, \bar{v} \right\rangle = (\tilde{u}, \tilde{v})_{\breve{\mathrm{A}}} \ \ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Вычисляем элементы этой матрицы

$$a_{i,j} = h_1^{-1} h_2^{-1} (\Phi_i, \Phi_j)_{\breve{\mathrm{A}}} \ \ i, j = 1, 2, ..., N.$$

Используем следующую норму

$$\|\bar{v}\|_{\mathrm{A}} = \sqrt{\left\langle \mathrm{A}\bar{v}, \bar{v} \right\rangle} \ \ \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Следствие 3.7.1. *Для итерационного процесса из (3.7.1) имеет место следующая оценка*

$$\left\|\bar{u}^k - \bar{u}\right\|_{\mathrm{A}} \le \varepsilon \left\|\bar{u}^0 - \bar{u}\right\|_{\mathrm{A}},\ k \in \mathbb{N},$$

где

$$\varepsilon = \delta_1 q^{k-1},\ \delta_1 = \sqrt{\|I_1\|_{\breve{V}}^2 - 1},\ 0 \le q = (\beta_2 - \beta_1)/(\beta_1 + \beta_2) < 1.$$

Отметим, что следствие 3.7.1 следует из следствия 3.5.1, из утверждений 3.5.1, 3.5.2 и теоремы 3.3.1.

Для выбора итерационных параметров и ускорения сходимости итерационного процесса из (3.7.1) можно использовать известные вариационные методы и рекомендовать со второй итерации метод скорейшего спуска [43, 68, 71].

Определим нормы, порождаемые расширенной матрицей в квадрате и единичной матрицей

$$\|\bar{v}\|_{A^2} = \sqrt{\langle A^2\bar{v},\bar{v}\rangle},\ \|\bar{v}\| = \sqrt{\langle \bar{v},\bar{v}\rangle}\ \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Лемма 3.7.1 *В методе фиктивных компонент из (3.7.1) имеет место оценка*

$$\left\|\bar{u}^1 - \bar{u}\right\|_{A^2} \le 2\left\|\bar{u}^0 - \bar{u}\right\|_{A^2}.$$

Доказательство. Обозначим ошибку итерационного процесса из (3.7.1)

$$\bar{\psi}^k = \bar{u}^k - \bar{u},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Получим равенства в итерационном процессе

$$\left(A(\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^0)\right)^2 = \left(-A_{11}\bar{\psi}_1^0\right)^2,\ A\bar{\psi}^1 A\bar{\psi}^1 - 2A\bar{\psi}^1 A\bar{\psi}^0 + A\bar{\psi}^0 A\bar{\psi}^0 = A_{11}\bar{\psi}_1^0 A_{11}\bar{\psi}_1^0.$$

Отметим наличие неравенства

$$A\bar{\psi}^0 A\bar{\psi}^0 \ge A_{11}\bar{\psi}_1^0 A_{11}\bar{\psi}_1^0.$$

Получим неравенства

$$A\bar{\psi}^1 A\bar{\psi}^1 - 2A\bar{\psi}^1 A\bar{\psi}^0 \le 0,\ (A\bar{\psi}^1 A\bar{\psi}^1)^2 \le (2A\bar{\psi}^1 A\bar{\psi}^0)^2 \le 4(A\bar{\psi}^1 A\bar{\psi}^1)(A\bar{\psi}^0 A\bar{\psi}^0).$$

Сокращая, получаем неравенства

$$A\bar{\psi}^1 A\bar{\psi}^1 \le 4A\bar{\psi}^0 A\bar{\psi}^0,\ \left\|\bar{\psi}^1\right\|_{A^2} \le 2\left\|\bar{\psi}^0\right\|_{A^2},\ \left\|\bar{u}^1 - \bar{u}\right\|_{A^2} \le 2\left\|\bar{u}^0 - \bar{u}\right\|_{A^2}.$$

Лемма 3.7.2. *В итерационном процессе из (3.7.1) имеет место оценка с положительной величиной в неравенстве*

$$\left\|\bar{u}^1 - \bar{u}\right\|_{A} \le d\left\|\bar{u}^1 - \bar{u}\right\|_{A^2}.$$

Положительная величина в неравенстве оценивается в виде асимптотического равенства

$$d \approx \lambda_{1,1}^{-1/2},\ h_1, h_2 \to 0.$$

Доказательство. Отметим, что имеет место неравенство с положительной величиной

$$\exists d > 0 : (A\bar{\psi}^1, \bar{\psi}^1) \le d^2(A\bar{\psi}^1, \Lambda\bar{\psi}^1).$$

Получим оценку указанной положительной величины в неравенстве в виде асимптотического равенства

$$(\breve{\mathrm{A}}\breve{\psi}^1,\breve{\psi}^1)=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{i,j}c_{i,j}^2\le\frac{1}{\lambda_{1,1}}\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{i,j}^2c_{i,j}^2=\frac{1}{\lambda_{1,1}}(\breve{\mathrm{A}}\breve{\psi}^1,\breve{\mathrm{A}}\breve{\psi}^1).$$

Здесь использовали решения спектральной задачи

$$\breve{\psi}^1=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}c_{i,j}\breve{\varphi}_{i,j},\ (\breve{\varphi}_{i,j},\breve{\varphi}_{i,j})=1,\ (\breve{\varphi}_{i,j},\breve{\varphi}_{p,l})=0,\ (i;j)\ne(p;l),\ i,j,p,l\in\mathbb{N},$$

где

$$\breve{\varphi}_{i,j}\in V\big((0;b_1)\times(0;b_2)\big):\breve{\mathrm{A}}\breve{\varphi}_{i,j}=\lambda_{i,j}\breve{\varphi}_{i,j},\ \breve{\varphi}_{i,j}\ne 0,\ \lambda_{i,j}\in(\lambda_{1,1};+\infty)\ i,j\in\mathbb{N},\ \lambda_{1,1}>0.$$

Теорема 3.7.1. *В методе фиктивных компонент из (3.7.1) имеет место оценка сходимости*

$$\left\|\bar{u}^k-\bar{u}\right\|_{\mathrm{A}}\le\varepsilon\left\|\bar{u}^0-\bar{u}\right\|_{\mathrm{A}^2},$$

$$\varepsilon=cq^{k-1},\ c=2d\in(0+\infty),\ k\in\mathbb{N},\ 0\le q=(\beta_2-\beta_1)/(\beta_1+\beta_2)<1,$$

$$d\approx\lambda_{1,1}^{-1/2},\ h_1,h_2\to 0.$$

Абсолютная ошибка у метода фиктивных компонент имеет скорость сходимости в энергетической норме не хуже, чем скорость сходимости геометрической прогрессии.

3.8. Асимптотически оптимальный анализ продолженной скалярной системы методом итерационных расширений на пространстве Евклида

Для решения задачи продолженной скалярной системы на пространстве Евклида (3.6.1) используем новый метод итерационных расширений.

Определим теперь расширенную матрицу по-новому, в виде суммы первой матрицы и второй матрицей, умноженной на положительный параметр

$$C=\mathrm{A}_{\mathrm{I}}+\gamma\mathrm{A}_{\mathrm{II}},\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&0\\C_{21}&C_{22}&C_{23}\\0&C_{32}&C_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11}&\mathrm{A}_{12}&0\\\mathrm{A}_{21}&\mathrm{A}_{20}&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\mathrm{A}_{02}&\mathrm{A}_{23}\\0&\mathrm{A}_{32}&\mathrm{A}_{33}\end{bmatrix},\ \gamma\in(0;+\infty).$$

Вычисляем элементы этой матрицы

$$c_{i,j} = h_1^{-1} h_2^{-1}((\Phi_i, \Phi_j)_{\breve{\mathrm{A}}_1} + \gamma(\Phi_i, \Phi_j)_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}}),\ i, j = 1, 2, ..., N.$$

Полагаем, что еще выполняются положения о продолжении функций, записываемые в следующем виде

$$\exists \gamma_1 \in (0; +\infty),\ \gamma_2 \in [\gamma_1; +\infty): \gamma_1^2 \langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2 \rangle \le \langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{v}_2, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{v}_2 \rangle \le \gamma_2^2 \langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2 \rangle\ \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2,$$

$$\exists \alpha \in (0; +\infty): \langle \mathrm{A}_{\mathrm{I}}\bar{v}_2, \mathrm{A}_{\mathrm{I}}\bar{v}_2 \rangle \le \alpha^2 \langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{v}_2, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{v}_2 \rangle\ \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2.$$

Метод итерационных расширений является обобщением метода фиктивных компонент, когда используется дополнительный параметра при выборе расширенной матрицы, а итерационные параметры выбираются на основе метода минимальных невязок

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}),\ k \in \mathbb{N}, \tag{3.8.1}$$

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1,\ \gamma > \alpha,\ \tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

где для вычисления итерационных параметров последовательно вычисляем невязки, поправки, эквивалентные невязки

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f},\ \bar{w}^{k-1} = C^{-1}\bar{r}^{k-1},\ \bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Определим норму, порождаемую расширенной матрицей

$$\|\bar{v}\|_{C^2} = \sqrt{\left\langle C^2\bar{v}, \bar{v} \right\rangle}\ \ \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Лемма 3.8.1. Для *итерационного процесса из (4.8.1) выполняется оценка*

$$\left\| \bar{u}^1 - \bar{u} \right\|_{C^2} \le 2 \left\| \bar{u}^0 - \bar{u} \right\|_{C^2}.$$

Доказательство. Обозначим в процессе из (3.8.1) ошибку

$$\bar{\psi}^k = \bar{u}^k - \bar{u},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

В итерационном процессе получаем равенства

$$\left\langle C(\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^0), C(\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^0) \right\rangle = \left\langle -\mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0, -\mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0 \right\rangle,$$

$$\left\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^1 \right\rangle - 2\left\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^0 \right\rangle + \left\langle C\bar{\psi}^0, C\bar{\psi}^0 \right\rangle = \left\langle \mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0, \mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0 \right\rangle.$$

Отметим, что выполняется неравенство

$$\left\langle C\overline{\psi}^0, C\overline{\psi}^0 \right\rangle \geq \left\langle \mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0, \mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0 \right\rangle.$$

Замечаем выполнение неравенств

$$\left\langle C\overline{\psi},^1 C\overline{\psi}^1 \right\rangle - 2\left\langle C\overline{\psi}^1, C\overline{\psi}^0 \right\rangle \leq 0, \left\langle C\overline{\psi}^1, C\overline{\psi}^1 \right\rangle^2 \leq 4\left\langle C\overline{\psi}^1, C\overline{\psi}^0 \right\rangle^2 \leq 4\left\langle C\overline{\psi}^1, C\overline{\psi}^1 \right\rangle \left\langle C\overline{\psi}^0, C\overline{\psi}^0 \right\rangle.$$

После сокращения получаем неравенства

$$\left\langle C\overline{\psi}^1, C\overline{\psi}^1 \right\rangle \leq 4\left\langle C\overline{\psi}^0, C\overline{\psi}^0 \right\rangle, \left\|\overline{\psi}^1\right\|_{C^2} \leq 2\left\|\overline{\psi}^0\right\|_{C^2}, \left\|\overline{u}^1 - \overline{u}\right\|_{C^2} \leq 2\left\|\overline{u}^0 - \overline{u}\right\|_{C^2}.$$

Теорема 3.8.1. *Для метода итерационных расширений из* (3.8.1) *имеет место оценка сходимости*

$$\left\|\overline{u}^k - \overline{u}\right\|_{C^2} \leq \varepsilon\left\|\overline{u}^0 - \overline{u}\right\|_{C^2}, \ \varepsilon = 2(\gamma_2/\gamma_1)(\alpha/\gamma)^{k-1}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Последовательность относительных ошибок в более сильной норме, чем норма энергетическая оценивается сверху сходящейся геометрической прогрессией.

Доказательство. Из итерационного процесса имеем равенства для ошибок и невязок

$$\overline{\psi}^k = \overline{\psi}^{k-1} - \tau_k C^{-1}\mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^{k-1}, \ \overline{r}^k = \overline{r}^{k-1} - \tau_k \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1}\overline{r}^{k-1}, \ k \in \mathbb{N} \setminus 1.$$

Выбираем параметры

$$\tau_{k-1} = \frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1}\overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1}\overline{r}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1}\overline{r}^{k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \overline{r}^{k-1}, \overline{\eta}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \overline{\eta}^{k-1}, \overline{\eta}^{k-1} \right\rangle}.$$

Заметим наличие равенства

$$\tau_{k-1} = \frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1}\overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1}\overline{r}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1}\overline{r}^{k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1}, C\overline{w}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1} \right\rangle}.$$

Используем обозначения

$$\mathrm{A}_{\mathrm{I}}\overline{w}^{k-1} = \overline{a}, \ \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{w}^{k-1} = \overline{b}.$$

Отметим положительность выбираемых параметров

$$\tau_k = \frac{\left\langle \overline{b}, \overline{a} + \gamma\overline{b} \right\rangle}{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle} = \gamma - \frac{\left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle}{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle} \geq \gamma - \frac{\left\langle \overline{a}, \overline{a} \right\rangle^{1/2} \left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle^{1/2}}{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle} \geq \gamma - \frac{\left\langle \overline{a}, \overline{a} \right\rangle^{1/2}}{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle^{1/2}} \geq \gamma - \alpha > 0.$$

Запишем скалярные произведения с невязками при выбранных параметрах

$$\left\langle \overline{r}^k, \overline{r}^k \right\rangle = \left\langle \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle - \frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle^2}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1} \right\rangle}.$$

Выписываем отношение скалярных произведений невязок

$$q_k^2 = \frac{\left\langle \overline{r}^k, \overline{r}^k \right\rangle}{\left\langle \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle} = 1 - \frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle^2}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1} \right\rangle \left\langle \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle} =$$

$$= \frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1} \right\rangle \left\langle C\overline{w}^{k-1}, C\overline{w}^{k-1} \right\rangle - \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1}, C\overline{w}^{k-1} \right\rangle^2}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1} \right\rangle \left\langle C\overline{w}^{k-1}, C\overline{w}^{k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle \left\langle \overline{a} + \gamma \overline{b}, \overline{a} + \gamma \overline{b} \right\rangle - \left\langle \overline{b}, \overline{a} + \gamma \overline{b} \right\rangle^2}{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle \left\langle \overline{a} + \gamma \overline{b}, \overline{a} + \gamma \overline{b} \right\rangle}.$$

Введем обозначения

$$\left\langle \overline{a}, \overline{a} \right\rangle = a, \left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle = b, \left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle = z,$$

тогда

$$q_k^2 = \frac{ab - z^2}{b(a + \gamma^2 b + 2\gamma z)} \le \max_{|z| \le \sqrt{ab}} q_k^2(z) = q_k^2\left(\frac{-a}{\gamma}\right) = \frac{a}{\gamma^2 b} \le \frac{\alpha^2}{\gamma^2} = q^2,$$

учитывая, что

$$q_k^2 \ge 0, \left(q_k^2(z)\right)_z' = \frac{-2\gamma(z + a/\gamma)(z + \gamma b)}{b(a + \gamma^2 b + 2\gamma z)^2}, -\gamma b < \frac{a + \gamma^2 b}{2\gamma} < -\sqrt{ab} < -\frac{a}{\gamma} < \sqrt{ab}.$$

Устанавливаем неравенства

$$\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^k, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^k \right\rangle \le q^2 \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^{k-1} \right\rangle, \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^k, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^k \right\rangle \le q^{2(k-1)} \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^1, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^1 \right\rangle, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Учитывая, что

$$\left\langle C\overline{\psi}^k, C\overline{\psi}^k \right\rangle \le \beta_1^{-2} \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^k, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^k \right\rangle, \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^1, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^1 \right\rangle \le \beta_2^2 \left\langle C\overline{\psi}^1, C\overline{\psi}^1 \right\rangle \le 4\beta_2^2 \left\langle C\overline{\psi}^0, C\overline{\psi}^0 \right\rangle,$$

получаем неравенство дающее оценку сходимости метода итерационных расширений

$$\left\langle C\overline{\psi}^k, C\overline{\psi}^k \right\rangle \le 4\gamma_1^{-2} \gamma_2^2 q^{2(k-1)} \left\langle C\overline{\psi}^0, C\overline{\psi}^0 \right\rangle.$$

Замечание 3.8.1. *Если в итерационном процессе из (3.8.1)* $\overline{u}^{k-1} = \overline{u}$, *то* $\overline{u}^k = \overline{u}$.

Доказательство. Из итерационного процесса, в этом случае получаем, что

$$\overline{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\overline{u}^k - \overline{u}) = -\tau_{k-1}(B\overline{u} - \overline{f}), k \in \mathbb{N}$$

и

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}) = \bar{0}, \bar{u}^k - \bar{u} = \bar{0}, \bar{u}^k = \bar{u}, k \in \mathbb{N}.$$

Замечание 3.8.2. *В итерационном процессе из (3.8.1) ошибка принадлежит подпространству, т.е.* $\bar{\psi}^k \in \bar{V}_2$ $\forall k \in \mathbb{N}$, *приближение принадлежит подпространству, т.е.* $\bar{u}^k \in \bar{V}_{\mathrm{I}}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. При $k = 1$ из итерационного процесса для ошибки

$$C(\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^0) = -B\bar{\psi}^0,$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} + \gamma \mathrm{A}_{02} & \gamma \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \gamma \mathrm{A}_{32} & \gamma \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^1 - \bar{\psi}_1^0 \\ \bar{\psi}_2^1 \\ \bar{\psi}_3^1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^0 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix},$$

тогда

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} + \gamma \mathrm{A}_{02} & \gamma \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \gamma \mathrm{A}_{32} & \gamma \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^1 \\ \bar{\psi}_2^1 \\ \bar{\psi}_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \mathrm{A}_{21}\bar{\psi}_1^0 \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \bar{\psi}^1 \in \bar{V}_2.$$

Если предположить, что при $k-1$ замечание выполняется, тогда оно выполняется и при k, т.к. из итерационного процесса для ошибки

$$C(\bar{\psi}^k - \bar{\psi}^{k-1}) = -\tau_{k-1} B\bar{\psi}^{k-1},$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} + \gamma \mathrm{A}_{02} & \gamma \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \gamma \mathrm{A}_{32} & \gamma \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^k - \bar{\psi}_1^{k-1} \\ \bar{\psi}_2^k - \bar{\psi}_2^{k-1} \\ \bar{\psi}_3^k - \bar{\psi}_3^{k-1} \end{bmatrix} = -\tau_{k-1} \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^{k-1} \\ \bar{\psi}_2^{k-1} \\ \bar{\psi}_3^{k-1} \end{bmatrix},$$

тогда

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} + \gamma \mathrm{A}_{02} & \gamma \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \gamma \mathrm{A}_{32} & \gamma \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^k \\ \bar{\psi}_2^k \\ \bar{\psi}_3^k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \mathrm{A}_{21}\bar{\psi}_1^{k-1} + (\mathrm{A}_{20} + (\gamma - \tau_{k-1})\mathrm{A}_{02})\bar{\psi}_2^{k-1} + (\gamma - \tau_{k-1})\mathrm{A}_{23}\bar{\psi}_3^{k-1} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \bar{\psi}^k \in \bar{V}_2.$$

На основе математической индукции получается доказательство замечания.

3.9. Анализ продолженной скалярной системы методом итерационных расширений в пространстве Гильберта

Рассмотрим продолженную скалярную систему в операторном виде в пространстве Гильберта

$$\breve{u} \in \breve{V}:\ \breve{B}\breve{u} = \breve{f}, \tag{3.9.1}$$

где оператор и правая часть задачи продолженной системы определяются следующим образом

$$(\breve{B}\breve{u},\breve{v}) = (\breve{u}, I_1\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_1} + (\breve{u},\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}}\ \ \forall \breve{u},\breve{v} \in \breve{V},\ (\breve{f},\breve{v}) = F_1(I_1\breve{v})\ \ \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Отметим, что для пространства Соболева выполняются предположения для продолжения функций в таком виде

$$\exists \breve{\beta}_1 \in (0;1],\ \breve{\beta}_2 \in [\breve{\beta}_1;1]:\ \breve{\beta}_1(\breve{\mathrm{A}}\breve{v}_2,\breve{v}_2) \le (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2,\breve{v}_2) \le \breve{\beta}_2(\breve{\mathrm{A}}\breve{v}_2,\breve{v}_2)\ \ \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2,$$

где рассматриваемые операторы следующие.

$$\breve{\mathrm{A}} = \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} + \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}},\ (\breve{\mathrm{A}}\breve{u},\breve{v}) = (\breve{u},\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}},\ (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\breve{u},\breve{v}) = (\breve{u},\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_1},\ (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{u},\breve{v}) = (\breve{u},\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}}\ \ \forall \breve{u},\breve{v} \in \breve{V}.$$

Дополнительно определим следующий расширенный оператор

$$\breve{C} = \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} + \gamma\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}},\ \gamma \in (0;+\infty).$$

Полагаем, что также выполняются предположения о продолжении функций, которые запишем в следующем виде

$$\exists \breve{\gamma}_1 \in (0;+\infty),\ \breve{\gamma}_2 \in [\breve{\gamma}_1;+\infty):\ \breve{\gamma}_1^2(\breve{C}\breve{v}_2,\breve{C}\breve{v}_2) \le (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2,\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2) \le \breve{\gamma}_2^2(\breve{C}\breve{v}_2,\breve{C}\breve{v}_2)\ \ \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2,$$

$$\exists \breve{\alpha} \in (0;+\infty):\ (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\breve{v}_2,\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\breve{v}_2) \le \breve{\alpha}^2(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2,\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2)\ \ \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2.$$

Рассмотрим теперь метод итерационных расширений в операторном виде в пространстве Соболева

$$\breve{u}^k \in \breve{V}:\ \breve{C}(\breve{u}^k - \breve{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(\breve{B}\breve{u}^{k-1} - \breve{f}),\ k \in \mathbb{N}, \tag{3.9.2}$$

$$\forall \breve{u}^0 \in \breve{V}_1,\ \gamma > \breve{\alpha},\ \tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = (\breve{r}^{k-1},\breve{\eta}^{k-1})\big/(\breve{\eta}^{k-1},\breve{\eta}^{k-1}),\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\},$$

где при вычислении итерационных параметров надо вычислить невязки, поправки и эквивалентные невязки

$$\breve{r}^{k-1} = \breve{B}\breve{u}^{k-1} - \breve{f},\ \breve{w}^{k-1} = \breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1},\ \breve{\eta}^{k-1} = \breve{B}\breve{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Определим норму

$$\|\breve{v}\|_{\breve{C}^2} = \sqrt{(\breve{C}\breve{v}, \breve{C}\breve{v})}\ \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Полагаем, что при аппроксимации выполняется

$$\|\breve{v}\|_{\breve{C}^2} \approx \|\bar{v}\|_{C^2}\ \ h_1, h_2 \to 0.$$

Следствие 3.9.1. *В методе итерационных расширений в пространстве Соболева из (3.9.2) выполняются оценки сходимости.*

$$\left\|\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\breve{C}^2} \le \varepsilon \left\|\breve{u}^0 - \breve{u}\right\|_{\breve{C}^2},\ \varepsilon = 2(\breve{\gamma}_2/\breve{\gamma}_1)(\breve{\alpha}/\gamma)^{k-1},\ k \in \mathbb{N},$$

$$\breve{\alpha} \approx \alpha,\ \breve{\gamma}_1 \approx \gamma_1,\ \breve{\gamma}_2 \approx \gamma_2,\ h_1, h_2 \to 0,$$

где относительные ошибки оцениваются бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Замечание 3.9.1. *В следствии 3.9.1 при используемой аппроксимации*

$$\alpha \approx \breve{\alpha} = const,\ \gamma_1 \approx \breve{\gamma}_1 = const,\ \gamma_2 \approx \breve{\gamma}_2 = const,\ h_1, h_2 \to 0.$$

3.10. Анализ продолженной скалярной системы методом итерационных расширений на конечномерном подпространстве пространства Гильберта

Рассмотрим продолженную скалярную систему в операторном виде на конечномерном подпространстве Гильберта

$$\tilde{u} \in \tilde{V}:\ \tilde{B}\tilde{u} = \tilde{f}, \tag{3.10.1}$$

где оператор и правая часть задачи продолженной системы на конечномерном подпространстве определяются следующим образом

$$(\tilde{B}\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u}, I_1\tilde{v})_{\breve{\mathrm{A}}_1} + (\tilde{u}, \tilde{v})_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}}\ \ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V},\ (\tilde{f}, \tilde{v}) = F_1(I_1\tilde{v})\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Отметим, что для конечномерного подпространства выполняются предположения для продолжения функций, тогда в таком виде

$$\exists \tilde{\beta}_1 \in (0;1],\ \tilde{\beta}_2 \in [\tilde{\beta}_1;1]:\ \tilde{\beta}_1(\tilde{\mathrm{A}}\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \le (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \le \tilde{\beta}_2(\tilde{\mathrm{A}}\tilde{v}_2, \tilde{v}_2)\ \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2,$$

где рассматриваемые операторы определяем таким образом

$$\tilde{\mathrm{A}} = \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} + \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}},\ (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\tilde{u},\tilde{v}) = (\tilde{u},\tilde{v})_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}},\ (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v},\tilde{v}) = (\tilde{u},\tilde{v})_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}}\ \ \forall \tilde{u},\tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Дополнительно определим расширенный оператор на конечномерном подпространстве

$$\tilde{C} = \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} + \gamma \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}},\ \gamma \in (0;+\infty).$$

Полагаем, что выполняются предположения о продолжении функций, которые запишем в следующем виде

$$\exists \tilde{\gamma}_1 \in (0;+\infty),\ \tilde{\gamma}_2 \in [\tilde{\gamma}_1;+\infty) : \tilde{\gamma}_1^2(\tilde{C}\tilde{v}_2,\tilde{C}\tilde{v}_2) \le (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v}_2,\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v}_2) \le \tilde{\gamma}_2^2(\tilde{C}\tilde{v}_2,\tilde{C}\tilde{v}_2)\ \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2,$$

$$\exists \tilde{\alpha} \in (0;+\infty) : (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\tilde{v}_2,\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\tilde{v}_2) \le \tilde{\alpha}^2(\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v}_2,\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v}_2)\ \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2.$$

Рассмотрим теперь метод итерационных расширений в операторном виде на конечномерном подпространстве Гильберта

$$\tilde{u}^k \in \tilde{V} :\ \tilde{C}(\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(\tilde{B}\tilde{u}^{k-1} - \tilde{f}),\ k \in \mathbb{N}, \tag{3.10.2}$$

$$\forall \tilde{u}^0 \in \tilde{V}_1,\ \gamma > \tilde{\alpha},\ \tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = (\tilde{r}^{k-1},\tilde{\eta}^{k-1}) \big/ (\tilde{\eta}^{k-1},\tilde{\eta}^{k-1}),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

где при вычислении итерационных параметров надо вычислить невязки, поправки и эквивалентные невязки

$$\tilde{r}^{k-1} = \tilde{B}\tilde{u}^{k-1} - \tilde{f},\ \tilde{w}^{k-1} = \tilde{C}^{-1}\tilde{r}^{k-1},\ \tilde{\eta}^{k-1} = \tilde{B}\tilde{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Определим норму

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{C}^2} = \sqrt{(\tilde{C}\tilde{v},\tilde{C}\tilde{v})}\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Полагаем, что при аппроксимации выполняется

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{C}^2} \approx \|\breve{v}\|_{\breve{C}^2}\ h_1,h_2 \to 0.$$

Следствие 3.10.1. *В методе итерационных расширений на конечномерном подпространстве Гильберта из (3.10.2) выполняется оценка сходимости.*

$$\left\|\tilde{u}^k - \tilde{u}\right\|_{\tilde{C}^2} \le \varepsilon \left\|\tilde{u}^0 - \tilde{u}\right\|_{\tilde{C}^2},\ \varepsilon = \tilde{\delta}_1(\tilde{\gamma}_2/\tilde{\gamma}_1)(\tilde{\alpha}/\gamma)^{k-1},\ k \in \mathbb{N},$$

$$\tilde{\delta}_1 \approx 2,\ \tilde{\alpha} \approx \breve{\alpha},\ \tilde{\gamma}_1 \approx \breve{\gamma}_1,\ \tilde{\gamma}_2 \approx \breve{\gamma}_2,\ h_1,h_2 \to 0,$$

где относительные ошибки оцениваются бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Замечание 3.10.1. *В следствии 3.10.1 при используемой аппроксимации*

$$\tilde{\alpha} \approx \breve{\alpha} = const,\ \tilde{\gamma}_1 \approx \breve{\gamma}_1 = const,\ \tilde{\gamma}_2 \approx \breve{\gamma}_2 = const,\ h_1, h_2 \to 0.$$

3.11. Алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи продолженной скалярной системы на пространстве Евклида

При выборе итерационных параметров применим метод минимальных невязок.

I. Выбираем начальное приближение и итерационный параметр

$$\forall \bar{u}^0 = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^0 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \in \bar{V}_1,\ \tau_0 = 1.$$

II. Находим невязку

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f},\ k \in \mathbb{N},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_1^0 \\ \bar{r}_2^0 \\ \bar{r}_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}\bar{u}_1^0 - \bar{f}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_1^{k-1} \\ \bar{r}_2^{k-1} \\ \bar{r}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \mathrm{A}_{02}\bar{u}_2^{k-1} + \mathrm{A}_{23}\bar{u}_3^{k-1} \\ \bar{0} \end{bmatrix},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

III. Вычисляем норму абсолютной ошибки в квадрате

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N},$$

$$\mathrm{E}_0 = \left\langle \bar{r}_1^0, \bar{r}_1^0 \right\rangle,$$

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\langle \bar{r}_2^{k-1}, \bar{r}_2^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

IV. Ищем поправку

$$\bar{w}^{k-1} : C\bar{w}^{k-1} = \bar{r}^{k-1},\ k \in \mathbb{N},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_1^0 \\ \bar{w}_2^0 \\ \bar{w}_3^0 \end{bmatrix} \in \bar{V}_{\mathrm{I}} : \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} + \gamma \mathrm{A}_{02} & \gamma \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \gamma \mathrm{A}_{32} & \gamma \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1^0 \\ \bar{w}_2^0 \\ \bar{w}_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1^{\,0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \gamma \in (0; +\infty),$$

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_1^{k-1} \\ \bar{w}_2^{k-1} \\ \bar{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} \in \bar{V}_2 : \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} + \gamma \Lambda_{02} & \gamma \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \gamma \mathrm{A}_{32} & \gamma \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{k-1} \\ \bar{w}_2^{k-1} \\ \bar{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{r}_2^{\,k-1} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \gamma \in (0; +\infty),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

V. Находим эквивалентную невязку

$$\bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\eta}_1^{k-1} \\ \bar{\eta}_2^{k-1} \\ \bar{\eta}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \mathrm{A}_{02}\bar{w}_2^{k-1} + \mathrm{A}_{23}\bar{w}_3^{k-1} \\ \bar{0} \end{bmatrix},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VI. Находим итерационный параметр

$$\tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{\,k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$\tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}_2^{\,k-1}, \bar{\eta}_2^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}_2^{k-1}, \bar{\eta}_2^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VII. Находим очередное приближение

$$\bar{u}^k = \bar{u}^{k-1} - \tau_{k-1}\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^k \\ \bar{u}_2^k \\ \bar{u}_3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{k-1} \\ \bar{u}_2^{k-1} \\ \bar{u}_3^{k-1} \end{bmatrix} - \tau_{k-1} \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{k-1} \\ \bar{w}_2^{k-1} \\ \bar{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} \in \bar{V}_{\mathrm{I}},\ k \in \mathbb{N}.$$

VIII. Проверяем выполнение критерия остановки итераций по заданной оценке относительной ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1} \le \mathrm{E}^2 \mathrm{E}_0,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \mathrm{E} \in (0; 1).$$

Приведем примеры с применением метода итерационных расширений для гармонической системы. Рассмотрим задачи при следующих областях

$$\Pi = (0;6) \times (0;6),\ \Omega_1 = (0;6) \times (1;4), \Omega_{\mathrm{II}} = (0;6) \times (0;1) \bigcup (0;6) \times (4;6).$$

Полагаем, что области имеют границы

$$\Gamma_1=(0;6)\times\{6\},\ \Gamma_2=\{0,\,6\}\times(0;6)\bigcup(0;6)\times\{0\},$$

$$\Gamma_{1,1}=(0;6)\times\{1,\,4\},\ \Gamma_{1,2}=\{0,\,6\}\times(1;4),$$

$$\Gamma_{\mathrm{II},1}=(0;6)\times\{6\},\ \Gamma_{\mathrm{II},2}=(0;6)\times\{0,1,\,4\}\bigcup\{0,\,6\}\times(0;1)\bigcup\{0,\,6\}\times(4;6).$$

Берем правые части с коэффициентом уравнения

$$\breve{f}_1(x;y)=\begin{cases}22,\ (x;y)\in(0;6)\times(1;1+h),\\ 0,\ (x;y)\in(0;6)\times(1+h;4),\end{cases}$$

$$\kappa_{\mathrm{II}}(x;y)=2,\ (x;y)\in(0;6)\times(0;1),\ \kappa_{\mathrm{II}}(x;y)=0,\ (x;y)\in(0;6)\times(4;6).$$

Приведем решения задач

$$\breve{u}_1(x;y)=\begin{cases}-11y^2-(\dfrac{11h^2}{3}-22h-22)y+\dfrac{11h^2}{3}-22h-22, & (x;y)\in(0;6)\times(1;1+h),\\ \dfrac{-11h^2}{3}y+\dfrac{44h^2}{3}, & (x;y)\in(0;6)\times(1+h;4).\end{cases}$$

В прямоугольной области определим сетку с узлами

$$(x_i;y_j)=\big((i-1)h_1;(j-1)h_2\big), i=1,2,...,n+1,\ j=1,2,...,n.$$

При дискретизации выбираем

$$h_1=h_2=h=6/n,\ n=18,24,...,102.$$

При вычислениях в методе итерационных расширений с параметром $\gamma=1$, с нулевым начальным приближением процесс останавливается на шестой итерации, если задана оценка для относительной ошибки одна десятитысячная.

$$n=102,\ \mathrm{E}=0,001,\ u^1_{i,j}\ge u^2_{i,j}\ge u^3_{i,j}\approx u^4_{i,j}\approx u^5_{i,j}\approx u^6_{i,j}\approx\breve{u}_{i,j}\ge u^0_{i,j}=0.$$

Заметим, что на последней шестой итерации на самой мелкой из используемых сеток выполняются неравенства, характеризующие точность численного решения исходной задачи в рассматриваемом случае

$$n=102,\ \mathrm{E}=0,0001,\ \max_{j=n/6,...,2n/3}\frac{\left|u^6_{i,j}-\breve{u}_{i,j}\right|}{\left|\breve{u}_{i,j}\right|}\le 0,0022,\quad \frac{\max\limits_{j=n/6,...,2n/3}\left|u^6_{i,j}-\breve{u}_{i,j}\right|}{\max\limits_{j=n/6,...,2n/3}\left|\breve{u}_{i,j}\right|}\le 0,00043.$$

Графики четвертого, пятого и шестого приближений практически почти совпадают с графиком точного решения на следующем рисунке.

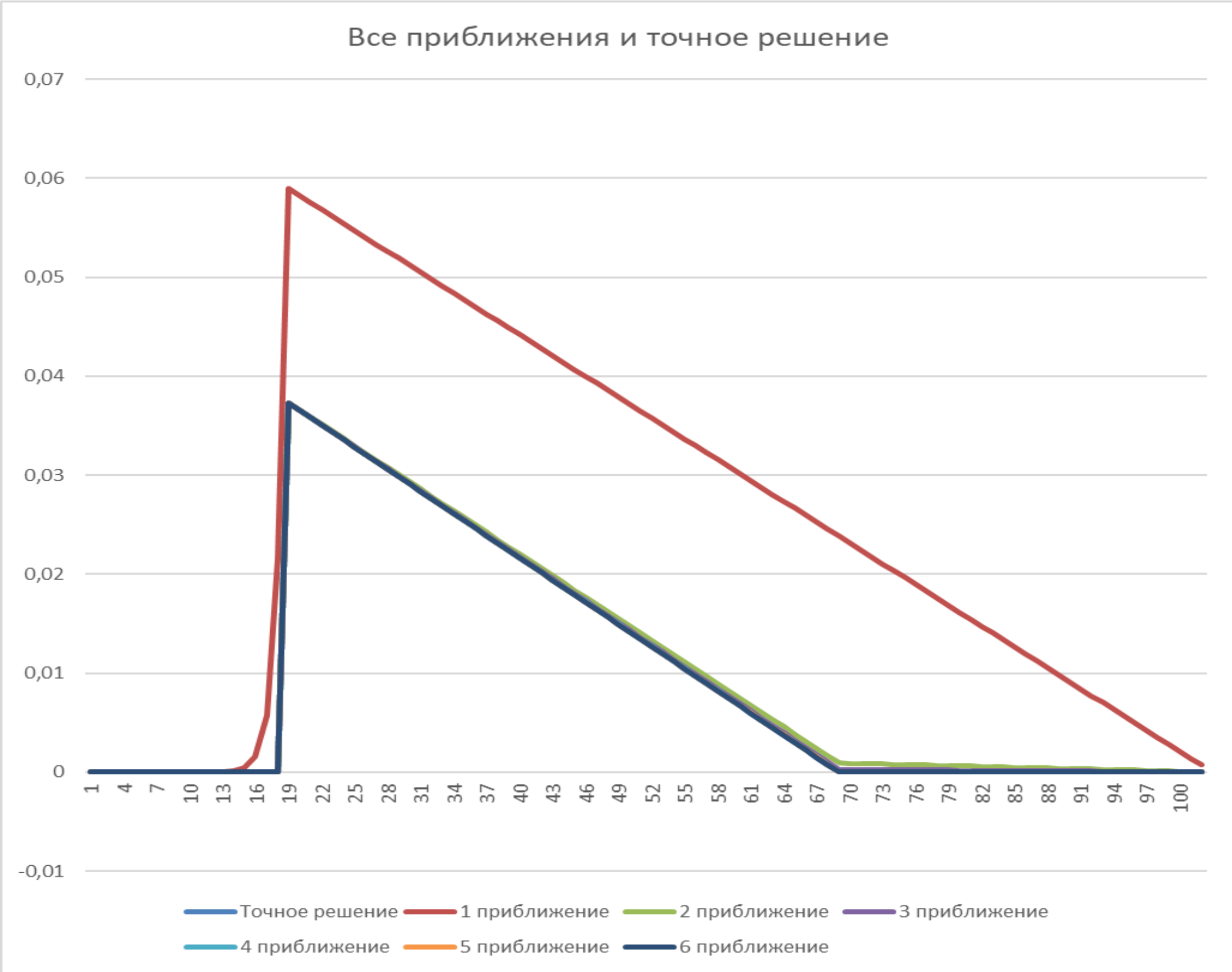


Рис. 3.11.1. Графики с первого приближения по шестое приближение и график точного решения $u_{i,j}^{k}$, $k=1,2,3,4,5,6$, $\breve{u}_{i,j}$ при $i=const$, $j=1,4,....100$, $n=102$.

Функции числа итераций $k=k(n)=6$ в зависимости количества узлов сетки по направлению оси ординат при $n=18,24,...,102$ постоянна и равна шести.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы. Решена фундаментальная научная проблема – разработан новый метод итерационных расширений, асимптотически оптимальный по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации для анализа бигармонических, гармонических и скалярных систем. В рамках нового направления метод итерационных расширений разработан асимптотически оптимальный по вычислительным затратам метод решения бигармонической проблемы в геометрически сложных областях.

Были получены следующие результаты.

1. Метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа бигармонических систем. В методе итерационных расширений используется введение параметра, имеющего в приложениях физический смысл жесткости пластины, а минимизация ошибки ведется в более сильной норме, чем энергетическая норма.

2. Метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа гармонических систем. В методе итерационных расширений используется введение параметра, имеющего в приложениях физический смысл натяжения

мембраны, а минимизация ошибки ведется в более сильной норме, чем энергетическая норма.

3. Метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа скалярных систем как обобщения метода и алгоритма итерационных расширений для гармонических, бигармонических и других систем.

4. Специальное математическое и алгоритмическое обеспечение, реализующее метод итерационных расширений, асимптотически оптимальное по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа бигармонических систем. Это обеспечение позволяет решать модельные задачи бигармонических систем с получением графических представлений решений.

5. Специальное математическое и алгоритмическое обеспечение, реализующее метод итерационных расширений, асимптотически оптимальное по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа гармонических систем. Это обеспечение позволяет решать модельные задачи гармонических систем с получением графических представлений решений.

Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы. Разработать новый метод итерационных расширений, асимптотически оптимальный по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации для анализа экранированных гармонических систем, экранированных бигармонических систем и биэкранированных бигармонических систем, описывающих соответствующие стационарные физические системы.

Примеры экранированных гармонических, экранированных бигармонических и биэкранированных бигармонических систем:

– экранированная гармоническая система – смешанная краевая задача для экранированного неоднородного гармонического уравнения о вертикальном перемещении точек мембраны расположенной горизонтально на упругом основании под действием вертикального давления с однородными краевыми условиями закрепления и свободного края.

– экранированная бигармоническая система – смешанная краевая задача для экранированного неоднородного бигармонического уравнения о вертикальном перемещении точек пластины расположенной горизонтально на упругом основании под действием вертикального давления с однородными краевыми условиями защемления, шарнирного опирания, симметрии и свободного края.

– биэкранированная бигармоническая система – смешанная краевая задача для биэкранированного неоднородного бигармонического уравнения о продольно-поперечном изгибе пластины на упругом основании с однородными краевыми условиями защемления, шарнирного опирания, симметрии и свободного края.

Также к возможным рекомендациям для дальнейшего исследования можно отнести разработку нового метода итерационных расширений, асимптотически оптимального по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором параметров при итерационной обработке информации для анализа многомерных стационарных физических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгазин, С.Д. О быстром решении основной бигармонической проблемы / С.Д. Алгазин, Г.Х. Соловьев // Труды МАИ. – 2019. – Выпуск № 108. – 17 с.

2. Астраханцев, Г.П. Метод фиктивных областей для эллиптического уравнения второго порядка с естественными граничными условиями / Г.П. Астраханцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1978. – Т. 18, № 1. – С. 118–125.

3. Астраханцев, Г.П. Метод декомпозиции области для задач об изгибе неоднородных пластин / Г.П. Астраханцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38, № 10. – С. 1758–1766.

4. Беллман, Р. Динамическое программирование и уравнения в частных производных / Р. Беллман, Э. Энджел – М.: Мир, 1974. – 204 с.

5. Булеев, Н.И. Метод неполной факторизации для решения двумерных и трехмерных уравнений типа диффузии / Н.И. Булеев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1970. – Т. 10, № 4 – С. 1042–1044.

6. Вебер, Б. Предобуславливатель одной конечно-элементной матрицы для эллиптического уравнения четвертого порядка / Б. Вебер, В.Г. Корнеев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – Т. 33, № 3. – С. 364–379.

7. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

8. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

9. Гилёва, Л.В. Два многосеточных итерационных алгоритма для дискретного аналога бигармонического уравнения / Л.В. Гилёва, В.В. Шайдуров // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2004. – Т. 7, № 3. – С. 213–228.

10. Гловинский, Р. О применении «квазипрямого» метода и итерационных методов к решению задачи Дирихле для бигармонического оператора при смешанной аппроксимации конечными элементами / Р. Гловинский, О. Пиронно // Вычислительные методы в математической физике, геофизике и оптимальном управлении. – Новосибирск: Наука, 1978. – С. 34–57.

11. Гриневич, П.Г. Ядро Коши DN – дискретного комплексного анализа Новикова – Дынникова на треугольной решетке / П.Г. Гриневич, С.П. Новиков // Успехи математических наук. – 2007. – Т. 62, Вып. 4(376). – С. 155–156.

12. Гриневич, П.Г. Дискретные SL_n- связаности и самосопряженные разностные операторы на двумерных многообразиях / П.Г. Гриневич, С.П. Новиков // Успехи математических наук. – 2013. – Т. 68, № 5. – С. 81–110.

13. Дьяконов, Е.Г. Об одном итерационном методе решения систем конечноразностных уравнений / Е.Г. Дьяконов // ДАН СССР – 1961. – Т. 138, № 3. – С. 522–525.

14. Дьяконов, Е.Г. О применении разностных расщепляющихся операторов / Е.Г. Дьяконов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1963. – Т. 3, № 2. – С. 385–388.

15. Дьяконов, Е.Г. Метод мажорирующего оператора для решения разностных аналогов сильно эллиптических систем / Е.Г. Дьяконов // Успехи математических наук. – 1964. – Т. 19, № 5. – С. 385–386.

16. Дьяконов, Е.Г. О применении эквивалентных по спектру операторов для решения разностных аналогов сильно эллиптических систем / Е.Г. Дьяконов // ДАН СССР – 1965. – Т. 163, № 6. – С. 1314–1317.

17. Дьяконов, Е.Г. О построении итерационных методов на основе использования операторов, эквивалентных по спектру / Е.Г. Дьяконов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1966. – Т. 6, № 1. – С. 12–34.

18. Дьяконов, Е.Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач / Е.Г. Дьяконов. – М.: Наука, 1989. – 272 с.

19. Ильин, В.П. О скорости сходимости итераций неявных методов неполной факторизации / В.П. Ильин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – Т. 33, № 1. – С. 3–11.

20. Ильин, В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем / В.П. Ильин. – М.: Физматлит, 1995. – 288 с.

21. Ильин, В.П. Методы неполной факторизации с полусопряженными невязками / В.П. Ильин // В журнале: Автометрия. Т. 43, № 2. – Новосибирск: СО РАН, 2007. – С. 66–73.

22. Капорин, И.Е. Модифицированный марш-алгоритм решения разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике / И.Е. Капорин // Разностные методы математической физики: сб. науч. тр. – М., 1980. – С. 11–21.

23. Капорин, И.Е. Метод фиктивных неизвестных для решения разностных эллиптических краевых задач в нерегулярных областях / И.Е. Капорин, Е.С. Николаев // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, № 7. – С. 1211–1225.

24. Капорин, И.Е. Метод фиктивных неизвестных для решения разностных уравнений эллиптического типа в областях сложной формы / И.Е. Капорин, Е.С. Николаев // ДАН СССР – 1980. – Т. 251, № 3. – С. 544–548.

25. Капорин, И.Е. Маршевый метод для системы с блочно-трехдиагональной матрицей / И.Е. Капорин // Численные методы линейной алгебры: сб. науч. тр. – М., 1982. – С. 63–72.

26. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2011. – Вып. 5, №32 (249). – С. 39–50.

27. Карачик, В.В. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2012. – Т. 15, № 2. – С. 86–98.

28. Карачик, В.В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 2. – С. 250–254.

29. Коновалов, А.Н. Сопряжено-факторизованные модели в задачах математической физики / А.Н. Коновалов // Сибирский журнал вычислительной математики. – 1998. – Т. 1, №1. – С. 25–58.

30. Коновалов, А.Н. Итерационные методы для операторных уравнений с сопряжено-факторизованной структурой / А.Н. Коновалов // Сибирский математический журнал. – 2000. – Т. 40, №2. – С. 370–384.

31. Корнеев, В.Г. Об итерационном решении схем метода конечных элементов для эллиптических уравнений четвертого порядка / В.Г. Корнеев // В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 9, № 6. – Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978. – С. 85–104.

32. Кризский, В.Н. Математическая модель геонавигации в системах управления бурением горизонтальных скважин / В.Н. Кризкий // В журнале: Автоматика и телемеханика. Выпуск. 5. – Москва: РАН, 2004. – С. 45–56.

33. Кузнецов, Ю.А. Об оптимизации метода фиктивных компонент / Ю.А. Кузнецов, А.М. Мацокин // Вычислительные методы линейной алгебры: сб. науч. тр. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977. – С. 79–86.

34. Курант, Р. Методы математической физики. Т.1 / Р. Курант, Д. Гильберт. – М.: Гостехиздат, 1957. – 476 с.

35. Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 407 с.

36. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

37. Ландау, Л.Д. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 204 с.

38. Ланкастер, П. Теория матриц; пер. с англ. / П. Ланкастер. – М.: Наука, 1982. – 272 с.

39. Лукинов, В.Л. Методы Монте-Карло для решения первой краевой задачи для полигармонического уравнения / В.Л. Лукинов, Г.А. Михайлов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45, № 3. – С. 495–508.

40. Маргенов, С.Г. Применение параболических и кубических сплайнов для решения эллиптических краевых задач четвёртого порядка в прямоугольнике / С.Г. Маргенов, Р.Д. Лазаров // Препринт. № 64. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1979. – 14 с.

41. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. – М.: Наука, 1989. – 608 с.

42. Марчук, Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агошков. – М.: Наука, 1981. – 416 с.

43. Марчук, Г.И. Итерационные методы и квадратичные функционалы / Г.И. Марчук, Ю.А. Кузнецов. – Новосибирск: Наука, 1972. – 205 с.

44. Марчук, Г.И. Некоторые вопросы итерационных методов / Г.И. Марчук, Ю.А. Кузнецов // Вычислительные методы линейной алгебры: сб. науч. тр. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972. – С. 4–20.

45. Марчук, Г.И. Повышение точности решений разностных схем / Г.И. Марчук, В.В. Шайдуров. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

46. Масловская, Л.Б. Смешанный метод конечных элементов для основных краевых задач теории пластин в областях с угловыми точками / Л.Б. Масловская // Методы аппроксимации и интерполяции: сб. науч. тр. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981. – С. 75–84.

47. Мацокин, А.М. Метод фиктивных компонент и модифицированный разностный аналог метода Шварца / А.М. Мацокин // Вычислительные методы линейной алгебры: сб. науч. тр. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1980. – С. 66–77.

48. Мацокин, А.М. Методы фиктивных компонент и альтернирования по подобластям / А.М. Мацокин // Вычислительные алгоритмы в задачах математической физики: сб. науч. тр. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. – С. 76–98.

49. Мацокин, А.М. Методы фиктивных компонент и альтернирования по подобластям / А.М. Мацокин // Препринт. № 612. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. – 25 с.

50. Мацокин, А.М. Связь метода окаймления с методом фиктивных компонент и методом альтернирования по подобластям / А.М. Мацокин // Дифференциальные уравнения с частными производными: сб. науч. тр. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986. – С. 138–142.

51. Мацокин, А.М. Применение метода фиктивных компонент решения простейшей разностной схемы для эллиптического уравнения четвертого порядка / А.М. Мацокин // Вариационно-разностные методы в задачах численного анализа: сб. науч. тр. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1987. – С. 129–136.

52. Мацокин, А.М. Критерий сходимости метода Шварца в гильбертовом пространстве / А.М. Мацокин // Вычислительные процессы и системы: выпуск № 6. – М.: Наука, 1988. – С. 221–224.

53. Мацокин, А.М. Метод фиктивного пространства и явные операторы продолжения / А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – Т. 33, № 1. – С. 52–68.

54. Михайлов, Г.А. Решение многомерного разностного бигармонического уравнения методом Монте-Карло / Г.А. Михайлов, В.Л. Лукинов // Сибирский математический журнал. – 2001. – Т. 42, №5. – С. 1125–1135.

55. Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

56. Молчанов, И.Н. Критерии окончания итерационных процессов / И.Н. Молчанов // Вычислительные процессы и системы: выпуск № 6. – М.: Наука, 1988. – С. 225–232.

57. Непомнящих, С.В. Методы декомпозиции области и фиктивного пространства: дис. … д-ра физ.-мат. наук / С.В. Непомнящих. – Новосибирск, 2008. – 262 с.

58. Николаев, Е.С. Метод неполной циклической редукции / Е.С. Николаев // Разностные методы математической физики: сб. науч. тр. – М., 1981. – С. 3–12.

59. Новиков, С.П. Дискретные спектральные симметрии маломерных дифференциальных операторов и разностных операторов на правильных решетках и двумерных многообразиях / С.П. Новиков, И.А. Дынников // Успехи математических наук. – 1997. – Т. 52, Вып. 5(317). – С. 175–234.

60. Обэн, Ж.П. Приближённое решение эллиптических краевых задач / Ж.П. Обэн. – М.: Мир, 1977. – 383 с.

61. Оганесян, Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец. – Ереван: изд–во АН АрмССР, 1979. – 235 с.

62. Павлов, С.П. Итерационная процедура сведения бигармонического уравнения к уравнению типа Пуассона / С.П. Павлов, М.В. Жигалов // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2011. Т. 1, №1. – С. 22-29.

63. Панюков, А.В. Безошибочное решение систем линейных алгебраических уравнений / А.В. Панюков, М.И. Германенко // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, физика, химия. – 2009. – Вып. 12, №10. – С. 33–40.

64. Потапов, А.Н. О перспективах развития подхода, основанного на использовании алгебраической проблемы квадратичного вида в задачах строительной механики / А.Н. Потапов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2007. №22(94). – С. 46-50.

65. Ряжских, А.В. Гидродинамический начальный участок при течении высоковязкой ньютоновской жидкости в круглой трубе / А.В. Ряжских // Вестник

Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2012. – №3 – С. 98–102.

66. Ряжских, В.И. Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области / В.И. Ряжских, М.И. Слюсарев, М.И. Попов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2013. – №1 – С. 52–62.

67. Сабельфельд, К.К. Решение одной краевой задачи для метагармонического уравнения методом Монте-Карло / К.К. Сабельфельд // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т. 19, № 4. – С. 961–969.

68. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

69. Самарский, А.А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А.А. Самарский, В.Б. Андреев. – М.: Наука, 1976. – 352 с.

70. Самарский, А.А. Некоторые современные методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, И.Е. Капорин, А.Б. Кучеров, Е.С. Николаев // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 7. – С. 3–12.

71. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

72. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. – Л.: изд–во ЛГУ, 1950. – 256 с.

73. Соломин, В.И. О развитии методов расчёта гибких фундаментов и их оснований / В.И. Соломин // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2007. №22(94). – С. 6–10.

74. Сорокин, С.Б. Переобусловливание при численном решении задачи Дирихле для бигармонического уравнения / С.Б. Сорокин // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2011. – Т. 14, №2. – С. 205–213.

75. Сорокин, С.Б. Аналитическое решение обобщённой спектральной задачи в методе пересчета граничных условий для бигармонического уравнения / С.Б. Сорокин // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2013. – Т. 16, №3. – С. 267–274.

76. Сорокин, С.Б. Точные константы энергетической эквивалентности в методе пересчёта граничных условий для бигармонического уравнения / С.Б. Сорокин // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Информатика. – 2013. – Т. 13, №3 – С. 113–121.

77. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Н.Н. Анучина, К.И. Бабенко, С.К. Годунов и др.; под ред. К.И. Бабенко. – М.: Наука, 1979. – 296 с.

78. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

79. Хаппель, Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер – М.: Мир, 1976. – 630 с.

80. Bank, R.E. Marching algorithms for elliptic boundary value problems / R.E. Bank, D.J. Rose // SIAM J. on Numer. Anal. – 1977. – Vol. 14, №5. – P. 792–829.

81. Bjorstad, P. Fast numerical solution of the biharmonic dirichlet problem on rectangles / P. Bjorstad // SIAM J. on Numer. Anal. – 1983. – Vol. 20, № 1. – P. 59–71.

82. Ciarlet, P.G. Dual iterative technigues for solving a finite element approximation of the biharmonic eguation / P.G. Ciarlet, R. Glowinski // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1975. Vol. 5, № 3. – P. 277–295.

83. Manteuffel, T. An incomlete factorization technigue for positive definite linear systems / T. Manteuffel // Math. Comput. – 1980. – Vol. 38, № 1. – P. 114–123.

84. Marchuk, G.I. Fictitious domain and domain decomposion methods / G.I. Marchuk, Yu.A. Kuznetsov, A.M. Matsokin // Sovet. J. Numer. Analys. and Math. Modelling. – 1986. – Vol. 1, №1. – P. 3–35.

85. Meleshko, V.V. Selected topics in the htstory of the two-dimesional biharmonic problem / V.V. Meleshko // Applied Mechanics Reviews. – 2003. – № 56 (1). – P. 33–85.

86. Swarztrauber, P.N. A direct method for discrete solution of separable elliptic equations / P.N. Swarztrauber // SIAM J. on Numer. Anal. – 1974. – Vol. 11, № 6. – P. 1136–1150.

87. Swarztrauber, P.N. The method of cyclic reduction, Fourier analysis fnd FACR algorithms for the discrete solution of Poisson's equations on a rectangle / P.N. Swarztrauber // SIAM Rev. – 1977. – Vol. 19, № 3. – P. 490–501.

88. Sweet, P.A. A cyclic reduction algorithm for solving block tridiagonal systems arbitrary dimension / P.A. Sweet // SIAM J. on Numer. Anal. – 1977. – Vol. 14, №4. – P. 706–720.

89. Zhang, X. Multilevel Schwarz method for the biharmonic Dirichlet problem / X. Zhang // SIAM J. Sci. Comput. – 1994. – Vol. 15, № 3. – P. 621–644.

Список публикаций автора

Основные публикации автора по теме диссертации. Статьи, опубликованные в ведущих российских рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК при Министерстве науки и высшего образования РФ, и в рецензируемых научных журналах и изданиях, индексируемых Scopus

90. Ushakov, A.L. Analysis of Biharmonic and Harmonic Models by the Methods of iterative Extensions / A.L. Ushakov, E.A. Meltsaykin // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2022. – V. 15, № 3. – P. 51–66. (ВАК, WoS, Scopus, Q2)

91. Ushakov, A.L. Analysis of the Problem for the Biharmonic Equation / A.L. Ushakov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2022. – V. 9, № 1. – P. 43–58. (MathSciNet, ВАК)

92. Ushakov, A.L. Analysis of the Boundary Value Problem for the Poisson Equation / A.L. Ushakov // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics, Mechanics, Physics. – 2022. – V. 14, № 1. – P. 64–76. (RSCI, ZbMath, ВАК)

93. Ушаков, А.Л. Исследование задачи представления линейного функционала в форме скалярного произведения / А.Л. Ушаков // Вестник Югорского государственного университета. – 2022. – Выпуск 3(66). – С. 152–162. (ВАК)

94 Ushakov, A.L. Research of the boundary value problem for the Sophie Germain Equationinin in a cyber-physical system / A.L. Ushakov // Studies in Systems, Decision and Control. Springer. – 2021. – V. 338. P. 51–63. (Scopus)

95. Ушаков, А.Л. Анализ смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2021. – Т. 13, № 1. – С. 29–40. (RSCI, ZbMath, ВАК)

96. Ushakov, A.L. Numerical Anallysis of the Mixed Boundary Value Problem for the Sophie Germain Equation / A.L. Ushakov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2021. – V. 8, № 1. – P. 46–59. (MathSciNet, ВАК)

97. Ushakov, A.L. Investigation of a Mixed Boundary Value Proble for the Poisson Equation / A.L. Ushakov // 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), Sochi, Russia. – 2020. – P. 273–278. (Scopus)

98. Ушаков, А.Л. Асимптотически оптимальное решение модельной задачи для экранированного уравнения Пуассона / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2019. – Т. 11, № 2. – С. 25–35. (RSCI, ZbMath, ВАК)

99. Ушаков, А.Л. Быстрое решение модельной задачи для бигармонического уравнения / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2019. – Т. 11, № 1. – С. 34–42. (RSCI, ZbMath, ВАК)

100. Ушаков, А.Л. Быстрое решение модельной задачи для уравнения Пуассона / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2017. – Т. 9, № 4. – С. 36–42. (ZbMath, ВАК)

101. Ушаков, А.Л. О моделировании деформаций пластин / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, №2. – С. 138–142. (Scopus)

102. Ушаков, А.Л. Итерационная факторизация на фиктивном продолжении для численного решения эллиптического уравнения четвёртого порядка / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2014. – Т. 6, №2. – С. 17–22. (ZbMath, ВАК)

103. Ушаков, А.Л. Итерационная факторизация для численного решения эллиптического уравнения четвёртого порядка в прямоугольной области / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2014. – Т. 6, №1. – С. 42–49. (ZbMath, ВАК)

104. Ушаков, А.Л. Модификация итерационной факторизации для численного решения двух эллиптических уравнений второго порядка в прямоугольной области / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2013. – Т. 5, №2. – С. 88–93. (ZbMath, ВАК)

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ по теме диссертации

105. Расчет поля температуры от тепловых источников № 2022663814 / Ушаков А.Л., Мельцайкин Е.А. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». - 2022663254; заявл. 18.07.2022; зарегистр. 20.07.2022, реестр программ для ЭВМ.

106. Численное решение модельной задачи для экранированного уравнения Пуассона № 2020667216 / Ушаков А.Л., Мельцайкин Е.А. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». - 2020666269; заявл. 09.12.2020; зарегистр. 21.12.2020, реестр программ для ЭВМ.

107. Асимптотически оптимальный расчет распределения температуры и перемещения в стержнях № 2020665998 / Ушаков А.Л., Мельцайкин Е.А. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет

(НИУ)». - 2020664697; заявл. 23.11.2020; зарегистр. 03.12.2020, реестр программ для ЭВМ.

108. Асимптотически оптимальный расчет балки при смешанных краевых условиях симметрии и Дирихле № 2020664402 / Ушаков А.Л., Мельцайкин Е.А. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». - 2020663735; заявл. 10.11.2020; зарегистр. 12.11.2020, реестр программ для ЭВМ.

109. Численное решение модельной задачи для уравнения Пуассона № 2020619757 / Ушаков А.Л., Щеколдина Е.С. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». - 2020618486; заявл. 04.08.2020; зарегистр. 24.08.2020, реестр программ для ЭВМ.

110. Численное решение неоднородного бигармонического уравнения в квадратной области при смешанных краевых условиях № 2018619527 / Ушаков А.Л., Пономарев В.С., Котлованов К.Ю. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». - 2018617059; заявл. 06.07.2018; зарегистр. 07.08.2018, реестр программ для ЭВМ.

111. Численное моделирование перемещений пластины под действиями давлений при однородных краевых условиях № 2015661153 / Ушаков А.Л., Артес Н.О. (RU); правообладатель ФБГОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». - 2015618103; заявл. 04.09.2015; зарегистр. 20.10.2015, реестр программ для ЭВМ.

112. Численное моделирование деформации квадратной мембраны, закреплённой на двух смежных сторонах № 2014613985 / Ушаков А.Л., Бухарин И.Ю. (RU); правообладатель ФБГОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». - 2014611376; заявл. 24.02.2014; зарегистр. 14.04.2014, реестр программ для ЭВМ.

Другие научные публикации

113. Ушаков, А.Л. Исследование смешанной краевой задачи у бигармонического уравнения / А.Л. Ушаков // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф.: в 12 т. Т. 6 / под общ. ред. А.А. Большакова. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2020. – С. 11–14.

114. Ушаков, А.Л. Исследование смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона / А.Л. Ушаков // В кн.: Фундаментальные проблемы управления производственными процессами в условиях перехода к индустрии 4.0. тез. докл. науч. сем. в рамках международной научно-технической конференции "Автоматизация". ЮУрГУ, 2020. – С. 91–93.

115. Ушаков, А.Л. Исследование краевой задачи для уравнения Софи Жермен / А.Л. Ушаков // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф.: в 12 т. Т. 1 / под общ. ред. А.А. Большакова. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2020. – С. 3–7.

116. Ушаков, А.Л. Численное моделирование деформации мембраны / А.Л. Ушаков // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: тез. докл. Международной научно конференции, Улан-Уде, 22-27 июня 2015 года. – Улан-Уде: ВСГУТУ, 2015. – С. 291-292.

117. Ушаков, А.Л. Численное моделирование деформации прямоугольной пластины / А.Л. Ушаков // Системы компьютерной математики и их приложения: тез. докл. XVI Международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора В.П. Дьяконова, Смоленск, 15-17 мая 2015 года. – Смоленск: СмолГУ, 2015. – Вып. 16. – С. 222.

118. Ушаков, А.Л. Математическое моделирование деформаций пластин на упругих основаниях / А.Л. Ушаков // НАУКА ЮУРГУ: статья в сборнике трудов 67-й научной конференции ЮУрГУ, Челябинск, 14-17 апреля 2015 года. – Челябинск: ЮУрГУ, 2015. – С. 75-83.

119. Ушаков, А.Л. Модификация метода фиктивных компонент для численного решения эллиптических краевых задач четвёртого порядка / А.Л. Ушаков // Математические модели и теория групп: сб. науч. тр. каф. общей математики Южно-Уральского государственного университета. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – С. 61–65.

120. Ушаков, А.Л. Моделирование итерационной факторизации для эллиптического уравнения четвертого порядка / А.Л. Ушаков // Известия Челябинского научного центра УрО РАН. – 2007. – Вып. 1 (35). – С. 33–36.

121. Ушаков, А.Л. Моделирование итерационной факторизации для эллиптической краевой задачи второго порядка / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, физика, химия. – 2006. – Вып. 7, №7 (62). – С. 64–70.

122. Ушаков, А.Л. О приближённом решении одной эллиптической краевой задачи четвёртого порядка / А.Л. Ушаков; Челябинский государственный технический университет. – Челябинск, 1997. – 30 с. – Библ.: – 12 назв. – Деп. в ВИНИТИ РАН 21.04.1997, № 1346-В1997.

123. Ушаков, А.Л. Метод итерационной факторизации / А.Л. Ушаков; Челябинский государственный технический университет. – Челябинск, 1994. – 31 с. – Библ.: – 17 назв. – Деп. в ВИНИТИ РАН 17.10.1994, № 2375-В1994.

124. Ушаков, А.Л. Модификация метода фиктивных компонент / А.Л. Ушаков; Челябинский государственный технический университет. – Челябинск, 1991. – 40 с. – Библ.: – 13 назв. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 11.11.1991, № 4232-В1991.

125. Ушаков, А.Л. Модификация метода фиктивных компонент при несимметричном расширении / А.Л. Ушаков; Челябинский государственный технический университет. – Челябинск, 1991. – 25 с. – Библ.: – 10 назв. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 23.05.1991, № 2114-В1991.

126. Ушаков, А.Л. Метод фиктивных компонент для эллиптических дифференциальных уравнений / А.Л. Ушаков // 5-ая Школа молодых математиков Сибири и Дальнего востока: тез. докл., Новосибирск, 10-16 декабря 1990 года. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1990. – С. 123.

127. Ушаков, А.Л. Метод итерационного расщепления для специальных эллиптических краевых задач / А.Л. Ушаков; Челябинский политехнический институт. – Челябинск, 1990. – 32 с. – Библ.: – 16 назв. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 23.11.1990, № 5892-В1990.

128. Ушаков, А.Л. Метод фиктивных компонент на непрерывном уровне / А.Л. Ушаков; Челябинский политехнический институт. – Челябинск, 1989. – 15 с. – Библ.: – 4 назв. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 28.12.1989, № 7717-В1989.

129. Ушаков, А.Л. Метод фиктивных компонент для приближённого решения эллиптического дифференциального уравнения четвёртого порядка / А.Л. Ушаков; Челябинский политехнический институт. – Челябинск, 1989. – 29 с. – Библ.: – 11 назв. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 25.05.1989, № 3480-В1989.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\omega \in \{1, \mathrm{II}\}$ – вариант

$\breve{E}_\omega(\cdot)$ – энергия стационарной физикой системы

$\breve{K}_\omega$ – коэффициент жёсткости упругого основания

$\breve{D}_\omega$ – цилиндрическая жёсткость пластины

$\breve{T}_\omega$ – коэффициент натяжения мембраны

$\breve{E}_\omega$ – модули растяжения Юнга

σ_ω – коэффициент Пуассона

$\breve{h}$ – толщина пластин

$\breve{P}_\omega$ – давление

Ω_ω, Π – ограниченные плоские области

$b_1,\ b_2$ – длины сторон прямоугольной области

$\overline{s}_\omega, \overline{s}$ – границы соответствующих областей Ω_ω, Π

n_ω, n – внешние нормали к границам соответствующих областей Ω_ω, Π

$\overline{S} = \partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_2$ – граница, через которую производится продолжение задачи

$\Gamma_{\omega j}, \Gamma_j,\ j = 0,1,2,3$ – части границ областей Ω_ω, Π

$l_{\omega,1}, l_{\omega,2}$ – операторы граничных условий в задаче бигармонической системы

a_ω – коэффициент в задаче бигармонической системы

κ_ω – коэффициент в задаче гармонической системы

$\breve{H}_\omega$ – пространство решений задачи системы

$\breve{u}_\omega \in \breve{H}_\omega -$ точное решение задачи системы

$\breve{f}_\omega -$ правая часть задачи системы

$\breve{V}_\omega -$ продолженное пространство решений задачи системы

$\breve{V} -$ расширенное пространство решений задачи продолженной системы

$\breve{v} \in \breve{V} -$ функция в расширенном пространстве

$\breve{V}_j \subset \breve{V},\ j \in \{0,1,2,3,\mathrm{I},\mathrm{II}\} -$ подпространства расширенного пространства

$\breve{u} \in \breve{V}_1 -$ точное решение задачи продолженной системы

$\breve{f} -$ правая часть задачи продолженной системы

$\Lambda_\omega(\cdot,\cdot),\ \Lambda(\cdot,\cdot) -$ билинейные формы задач бигармонических систем

$\mathrm{A}_\omega(\cdot,\cdot),\ \mathrm{A}(\cdot,\cdot) -$ билинейные формы задач гармонических систем

$F_\omega(\cdot) -$ линейный функционал правой части задачи системы

$c_1,\, c_2 -$ положительные константы эквивалентной нормировки

$\breve{\beta}_1,\, \breve{\beta}_2 -$ константы в оценках при продолжении функций в подпространстве $\breve{V}_2$

$\breve{\alpha},\, \breve{\gamma}_1,\, \breve{\gamma}_2 -$ константы в новых оценках при продолжении в подпространстве $\breve{V}_2$

$\|\cdot\|_{\breve{V}} -$ норма в пространстве $\breve{V}$

$\breve{R}_{\mathrm{II}},\, \breve{T} -$ симметричные и ограниченные операторы

$I -$ оператор тождественного преобразования пространства

$I_1 -$ оператор проектирования на подпространство решения продолженной задачи

$P = I - I_1 -$ оператор продолжения

$\delta_1,\, \tilde{\delta}_1 -$ оценки сходимости на первой итерации

$\breve{u}^k,\ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} -$ итерационное приближение к решению задачи системы

$\breve{\psi}^k,\ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} -$ итерационная ошибка решения задачи системы

$q -$ знаменатель геометрической прогрессии

$\varepsilon -$ относительная погрешность итерационного процесса

$\tau,\ \tau_{k-1} \in (0;+\infty),\ k \in \mathbb{N} -$ параметры итерационного процесса

$m,\ n \in \mathbb{N} -$ число узлов сетки по направлениям осей Ox, Oy

$(x_i, y_j),\ i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n -$ узлы сетки

$h_1, h_2 > 0 -$ шаги сетки по направлениям осей Ox, Oy

$v_{i,j} = v(x_i; y_j) \in \mathbb{R} -$ значения сеточных функций в узлах сетки

$\Phi^{i,j}(\cdot,\cdot),\ \Psi^{1,i}(\cdot),\ \Psi^{2,j}(\cdot),\ \Psi(\cdot) -$ базисные функции восполнения

$[\cdot] -$ функция целая часть числа

$\tilde{V} \subset \breve{V} -$ конечномерное подпространство восполнений

$\tilde{v} \in \tilde{V} -$ функция конечномерного подпространства

$\tilde{V}_j \subset \tilde{V},\ j \in \{0, 1, 2, 3, \mathrm{I}, \mathrm{II}\} -$ подпространства конечномерного подпространства

$\tilde{u} \in \tilde{V}_1 -$ решение задачи продолженной системы на конечномерном пространстве

$\tilde{f} -$ правая часть задачи продолженной системы на конечномерном пространстве

$\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2 -$ величины в оценках при продолжении функций в подпространстве $\tilde{V}_2$

$\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 -$ величины в новых оценках при продолжении в подпространстве $\tilde{V}_2$

$\|\cdot\|_{\tilde{V}} -$ норма в конечномерном подпространстве $\tilde{V}$

$\tilde{u}^k,\ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} -$ приближение решения задачи системы на подпространстве

$\tilde{\psi}^k,\ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} -$ ошибка решения задачи системы на подпространстве

$\bar{v} \in \mathbb{R}^N -$ вектор в пространстве Евклида, дискретный аналог функции $\breve{v} \in \breve{V}$

$N = (m-2)(n-2) -$ размерность пространства Евклида $\mathbb{R}^N$

$\bar{V}_j \subset \mathbb{R}^N\ \ j \in \{0, 1, 2, 3, \mathrm{I}, \mathrm{II}\} -$ подпространства пространства Евклида

$\bar{u}_1 -$ решение задачи системы на пространстве Евклида

$\bar{u} \in \bar{V}_1 -$ решение задачи продолженной системы на пространстве Евклида

$\bar{f}_1 -$ правая часть решаемой задачи системы на пространстве Евклида

$\bar{f} -$ правая часть задачи продолженной системы на пространстве Евклида

$\beta_1, \beta_2 -$ величины в оценках при продолжении в подпространстве $\bar{V}_2$

$\lambda_{i,j},\ i, j \in \mathbb{N} -$ собственные числа оператора Лапласа на прямоугольной области

$\lambda_{1,1}$ – наименьшее собственное число оператора Лапласа на прямоугольнике

$\breve{\varphi}_{i,j},\ i, j \in \mathbb{N}$ – собственные функции оператора Лапласа на прямоугольнике

$c_{i,j}$ – коэффициенты в разложении функции ошибки $\breve{\psi}^1$ по собственным функциям

$L = \nabla'_x + \nabla'_y$ – нижнетреугольная матрица размерности $N \times N$

$A = \nabla'_x \nabla_x + \nabla'_y \nabla_y$ – матрица $N \times N$, дискретный аналог оператора Лапласа

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов вида $(\cdot, \cdot) h_1 h_2$

$\| \cdot \|_D = \sqrt{\langle D \cdot, \cdot \rangle}$ – норма, порождаемая матрицей $D \in \left\{ \mathrm{A},\ \mathrm{A}^2,\ \Lambda,\ \Lambda^2,\ C^2 \right\}$

$\alpha,\ \gamma_1,\ \gamma_2$ – величины в новых оценках при продолжении в подпространстве $\bar{V}_2$

$\bar{\psi}^k,\ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ – ошибка решения задачи системы на пространстве Евклида

$\breve{B}$ – оператор задачи продолженной системы

$\breve{C}$ – расширенный оператор

$\tilde{B}$ – оператор задачи продолженной системы на конечномерном подпространстве

$\tilde{C}$ – расширенный оператор на конечномерном подпространстве

B – продолженная матрица размерности $N \times N$

C – расширенная матрица размерности $N \times N$

$\bar{u}^k,\ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ – приближение решения системы на пространстве Евклида

$\bar{r}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}$ – невязка решения задачи системы на пространстве Евклида

$\gamma \in (0; +\infty)$ – параметр метода итерационных расширений

$\bar{w}^{k=1},\ k \in \mathbb{N}$ – поправока решения задачи системы на пространстве Евклида

$\bar{\eta}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}$ – эквивалентная невязка при решении на пространстве Евклида

$\mathrm{E}_{k-1}, e_{l-1},\ k, l \in \mathbb{N}$ – квадраты норм абсолютных ошибок итерационных решений

$\mathrm{E},\ e \in (0; 1)$ – задаваемые оценки относительных ошибок итерационных решений

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Описание алгоритмической реализации метода итерационных расширений для решения задачи продолженной бигармонической системы на квадрате

Приведем описание алгоритмической реализации метода итерационных расширений для решения продолженной задачи бигармонической системы на квадрате при

$$\gamma = 1,\ \mathrm{E} \in (0;1).$$

При программировании выбираем значения

$$m \geq 3,\ n = 3m + 2,\ h = 1/m,\ a_{\mathrm{II}} > 0.$$

Для выполнения вычислительных работ необходимо завести массив значений правой части рассматриваемой задачи в узлах сетки

$$f_{i,j},\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2...,n.$$

При программировании полагаем с начала для $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$

$$f_{i,j} = 0.$$

При программировании полагаем

$$(x_i; y_j) = \big((i - 1{,}5)h; (j - 1{,}5)h\big),\ i = 1,2...,n,\ j = 1,2...,n.$$

Затем для $m + 3 \leq i \leq 2m$ и $m + 3 \leq j \leq 2m,$ то полагаем

$$f_{i,j} = f(x_i; y_j).$$

По массиву правой части будем находить так называемый массив коэффициентов при разложении приближенного решения по параболическим базисным функциям, по конечным элементам

$$u_{i,j}^k,\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ k\in\mathbb{N}.$$

Так в частности по предыдущему массиву можно получить массив приближенных решений

$$\tilde{u}_{i,j}^k,\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ k\in\mathbb{N}.$$

к массиву решений исходной расширенной задачи в узлах сетки

$$\breve{u}_{i,j},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n.$$

Опишем подробнее программную реализацию алгоритма для решения исходной задачи.

I. При численном решении рассматриваемой задачи, выбираем нулевое начальное приближение и берем начальный итерационный параметр за единицу. Вычисляем величину квадрата нормы начальной абсолютной ошибки, которая сохраняется в течение всех вычислений. При программировании полагаем:

$$\mathrm{E}_0=\sum_{i=m+3}^{2m}\sum_{j=m+3}^{2m}(f_{i,j})^2h^2.$$

II. Ищем массив первого приближения системы линейных алгебраических уравнений

$$u_{i,j}^k,\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ k=1.$$

При программировании для $1\le i\le n, 1\le j\le n,$ полагаем

$$u_{i,j}^k=0,\ k=1.$$

Далее значения элементов этого массива в последующих итерациях пересчитываются. Можно находить следующие элементы этого массива

$$u_{i,j}^k,\ k=1,\ i=2,3,...,n-1,\ j=2,3...,n-1,$$

используя первый раз заданные ранее элементам массива правой части

$$f_{i,j},\ i=2,3,...,n-1,\ j=2,3...,n-1$$

с помощью программной реализации алгоритма, использующего метод итерационной факторизации при решении бигармонической системы на квадрате со спектральными, энергетически эквивалентными операторами в приложении 2.

Затем при $2 \le i \le n-1$ полагаем

$$u_{i,1}^{k} = u_{i,2}^{k},\ k=1.$$

Для $2 \le j \le n-1$ полагаем

$$u_{1,j}^{k} = u_{2,j}^{k},\ k=1.$$

Полагаем

$$u_{1,1}^{k} = u_{2,2}^{k},\ k=1.$$

III. Вычисляем очередной массив невязок.

$$r_{i,j}^{k-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ k \in \mathbb{N} \diagdown \{1\}.$$

Вычисляем, только те элементы, которые будем использовать.

При программировании для $1 \le i \le n, 1 \le j \le n$ полагаем сначала

$$r_{i,j}^{k-1} = 0.$$

Все используемые массивы можно задать сначала нулевыми, а пересчитывать, только следующие, вообще говоря, ненулевые элементы.

При дискретной аппроксимации уравнений по методу конечных элементов

$$\Delta^2 \breve{u}_\omega + a_\omega \breve{u}_\omega = \breve{f}_\omega,\ \omega \in \{1, \mathrm{II}\},\ \breve{f}_{\mathrm{II}} = 0,\ a_1 = 0,\ a_{\mathrm{II}} > 0,$$

если без учета краевых условий используется шаблон с коэффициентами:

	$j-2$	$j-1$	j	$j+1$	$j+2$
$i-2$	$26H + A$	$106H + 26A$	$96H + 66A$	$106H + 26A$	$26H + A$
$i-1$	$106H + 26A$	$-544H + 676A$	$-564H + 1716A$	$-544H + 676A$	$106H + 26A$
i	$96H + 66A$	$-564H + 1716A$	$3096H + 4356A$	$-564H + 1716A$	$96H + 66A$
$i+1$	$106H + 26A$	$-544H + 676A$	$-564H + 1716A$	$-544H + 676A$	$106H + 26A$
$i+2$	$26H + A$	$106H + 26A$	$96H + 66A$	$106H + 26A$	$26H + A,$

где

$$A = a_\omega / 14400,\ H = h^{-4} / 360.$$

При программировании будем использовать эти величины, чтобы каждый раз не пересчитывать.

Для $i=m+1,\ j=m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26u_{i-2,j-2}^{k-1}+106u_{i-2,j-1}^{k-1}+96u_{i-2,j}^{k-1}+106u_{i-2,j+1}^{k-1}+26u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i-1,j-2}^{k-1}-544u_{i-1,j-1}^{k-1}-564u_{i-1,j}^{k-1}-544u_{i-1,j+1}^{k-1}+106u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+96u_{i,j-2}^{k-1}-564u_{i,j-1}^{k-1}+2980u_{i,j}^{k-1}-527u_{i,j+1}^{k-1}+115u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i+1,j-2}^{k-1}-544u_{i+1,j-1}^{k-1}-527u_{i+1,j}^{k-1}-408u_{i+1,j+1}^{k-1}+53u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+2,j-2}^{k-1}+106u_{i+2,j-1}^{k-1}+115u_{i+2,j}^{k-1}+53u_{i+2,j+1}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(u_{i-2,j-2}^{k-1}+26u_{i-2,j-1}^{k-1}+66u_{i-2,j}^{k-1}+26u_{i-2,j+1}^{k-1}+u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i-1,j-2}^{k-1}+676u_{i-1,j-1}^{k-1}+1716u_{i-1,j}^{k-1}+676u_{i-1,j+1}^{k-1}+26u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+66u_{i,j-2}^{k-1}+1716u_{i,j-1}^{k-1}+43206u_{i,j}^{k-1}+1638u_{i,j+1}^{k-1}+60u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+1,j-2}^{k-1}+676u_{i+1,j-1}^{k-1}+1638u_{i+1,j}^{k-1}+507u_{i+1,j+1}^{k-1}+13u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+u_{i+2,j-2}^{k-1}+26u_{i+2,j-1}^{k-1}+60u_{i+2,j}^{k-1}+13u_{i+2,j+1}^{k-1}).$$

Для $i=m+1,\ j=m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26u_{i-2,j-2}^{k-1}+106u_{i-2,j-1}^{k-1}+96u_{i-2,j}^{k-1}+106u_{i-2,j+1}^{k-1}+26u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i-1,j-2}^{k-1}-544u_{i-1,j-1}^{k-1}-564u_{i-1,j}^{k-1}-544u_{i-1,j+1}^{k-1}+106u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+96u_{i,j-2}^{k-1}-527u_{i,j-1}^{k-1}+2666u_{i,j}^{k-1}-490u_{i,j+1}^{k-1}+115u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i+1,j-2}^{k-1}-408u_{i+1,j-1}^{k-1}-319u_{i+1,j}^{k-1}-272u_{i+1,j+1}^{k-1}+53u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+2,j-2}^{k-1}+53u_{i+2,j-1}^{k-1}-19u_{i+2,j}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(u_{i-2,j-2}^{k-1}+26u_{i-2,j-1}^{k-1}+66u_{i-2,j}^{k-1}+26u_{i-2,j+1}^{k-1}+u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i-1,j-2}^{k-1}+676u_{i-1,j-1}^{k-1}+1716u_{i-1,j}^{k-1}+676u_{i-1,j+1}^{k-1}+26u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+66u_{i,j-2}^{k-1}+1638u_{i,j-1}^{k-1}+3996u_{i,j}^{k-1}+1560u_{i,j+1}^{k-1}+60u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+1,j-2}^{k-1}+507u_{i+1,j-1}^{k-1}+936u_{i+1,j}^{k-1}+338u_{i+1,j+1}^{k-1}+13u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+u_{i+2,j-2}^{k-1}+13u_{i+2,j-1}^{k-1}+6u_{i+2,j}^{k-1}).$$

Для $i=m+1,\ j=m+3,...,2m$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26u_{i-2,j-2}^{k-1}+106u_{i-2,j-1}^{k-1}+96u_{i-2,j}^{k-1}+106u_{i-2,j+1}^{k-1}+26u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i-1,j-2}^{k-1}-544u_{i-1,j-1}^{k-1}-564u_{i-1,j}^{k-1}-544u_{i-1,j+1}^{k-1}+106u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+115u_{i,j-2}^{k-1}-490u_{i,j-1}^{k-1}+2550u_{i,j}^{k-1}-490u_{i,j+1}^{k-1}+115u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+53u_{i+1,j-2}^{k-1}-272u_{i+1,j-1}^{k-1}-282u_{i+1,j}^{k-1}-272u_{i+1,j+1}^{k-1}+53u_{i+1,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(u_{i-2,j-2}^{k-1}+26u_{i-2,j-1}^{k-1}+66u_{i-2,j}^{k-1}+26u_{i-2,j+1}^{k-1}+u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i-1,j-2}^{k-1}+676u_{i-1,j-1}^{k-1}+1716u_{i-1,j}^{k-1}+676u_{i-1,j+1}^{k-1}+26u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+60u_{i,j-2}^{k-1}+1560u_{i,j-1}^{k-1}+3960u_{i,j}^{k-1}+1560u_{i,j+1}^{k-1}+60u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+13u_{i+1,j-2}^{k-1}+338u_{i+1,j-1}^{k-1}+858u_{i+1,j}^{k-1}+338u_{i+1,j+1}^{k-1}+13u_{i+1,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=m+1,\ j=2m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26u_{i-2,j-2}^{k-1}+106u_{i-2,j-1}^{k-1}+96u_{i-2,j}^{k-1}+106u_{i-2,j+1}^{k-1}+26u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i-1,j-2}^{k-1}-544u_{i-1,j-1}^{k-1}-564u_{i-1,j}^{k-1}-544u_{i-1,j+1}^{k-1}+106u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+115u_{i,j-2}^{k-1}-490u_{i,j-1}^{k-1}+2666u_{i,j}^{k-1}-527u_{i,j+1}^{k-1}+96u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+53u_{i+1,j-2}^{k-1}-272u_{i+1,j-1}^{k-1}-319u_{i+1,j}^{k-1}-408u_{i+1,j+1}^{k-1}+106u_{i+1,j+2}^{k-1}-$$

$$-19u_{i+2,j}^{k-1}+53u_{i+2,j+1}^{k-1}+26u_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(u_{i-2,j-2}^{k-1}+26u_{i-2,j-1}^{k-1}+66u_{i-2,j}^{k-1}+26u_{i-2,j+1}^{k-1}+u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i-1,j-2}^{k-1}+676u_{i-1,j-1}^{k-1}+1716u_{i-1,j}^{k-1}+676u_{i-1,j+1}^{k-1}+26u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+60u_{i,j-2}^{k-1}+1560u_{i,j-1}^{k-1}+3996u_{i,j}^{k-1}+1638u_{i,j+1}^{k-1}+66u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+13u_{i+1,j-2}^{k-1}+338u_{i+1,j-1}^{k-1}+936u_{i+1,j}^{k-1}+507u_{i+1,j+1}^{k-1}+26u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+6u_{i+2,j}^{k-1}+13u_{i+2,j+1}^{k-1}+u_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=m+1,\ j=2m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26u_{i-2,j-2}^{k-1}+106u_{i-2,j-1}^{k-1}+96u_{i-2,j}^{k-1}+106u_{i-2,j+1}^{k-1}+26u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i-1,j-2}^{k-1}-544u_{i-1,j-1}^{k-1}-564u_{i-1,j}^{k-1}-544u_{i-1,j+1}^{k-1}+106u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+115u_{i,j-2}^{k-1}-527u_{i,j-1}^{k-1}+2980u_{i,j}^{k-1}-564u_{i,j+1}^{k-1}+96u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+53u_{i+1,j-2}^{k-1}-408u_{i+1,j-1}^{k-1}-527u_{i+1,j}^{k-1}-544u_{i+1,j+1}^{k-1}+106u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+53u_{i+2,j-1}^{k-1}+115u_{i+2,j}^{k-1}+106u_{i+2,j+1}^{k-1}+26u_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(u_{i-2,j-2}^{k-1}+26u_{i-2,j-1}^{k-1}+66u_{i-2,j}^{k-1}+26u_{i-2,j+1}^{k-1}+u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i-1,j-2}^{k-1}+676u_{i-1,j-1}^{k-1}+1716u_{i-1,j}^{k-1}+676u_{i-1,j+1}^{k-1}+26u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+60u_{i,j-2}^{k-1}+1638u_{i,j-1}^{k-1}+4320u_{i,j}^{k-1}+1716u_{i,j+1}^{k-1}+66u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+13u_{i+1,j-2}^{k-1}+507u_{i+1,j-1}^{k-1}+1638u_{i+1,j}^{k-1}+676u_{i+1,j+1}^{k-1}+26u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+13u_{i+2,j-1}^{k-1}+60u_{i+2,j}^{k-1}+26u_{i+2,j+1}^{k-1}+u_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=m+2,\ j=m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26u_{i-2,j-2}^{k-1}+106u_{i-2,j-1}^{k-1}+96u_{i-2,j}^{k-1}+106u_{i-2,j+1}^{k-1}+26u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i-1,j-2}^{k-1}-544u_{i-1,j-1}^{k-1}-527u_{i-1,j}^{k-1}-408u_{i-1,j+1}^{k-1}+53u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+96u_{i,j-2}^{k-1}-564u_{i,j-1}^{k-1}+2666u_{i,j}^{k-1}-319u_{i,j+1}^{k-1}-19u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i+1,j-2}^{k-1}-544u_{i+1,j-1}^{k-1}-490u_{i+1,j}^{k-1}-272u_{i+1,j+1}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+2,j-2}^{k-1}+106u_{i+2,j-1}^{k-1}+115u_{i+2,j}^{k-1}+53u_{i+2,j+1}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(u_{i-2,j-2}^{k-1}+26u_{i-2,j-1}^{k-1}+66u_{i-2,j}^{k-1}+26u_{i-2,j+1}^{k-1}+u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i-1,j-2}^{k-1}+676u_{i-1,j-1}^{k-1}+1638u_{i-1,j}^{k-1}+507u_{i-1,j+1}^{k-1}+13u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+66u_{i,j-2}^{k-1}+1716u_{i,j-1}^{k-1}+3996u_{i,j}^{k-1}+936u_{i,j+1}^{k-1}+6u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+1,j-2}^{k-1}+676u_{i+1,j-1}^{k-1}+1560u_{i+1,j}^{k-1}+338u_{i+1,j+1}^{k-1}+$$

$$+u_{i+2,j-2}^{k-1}+26u_{i+2,j-1}^{k-1}+60u_{i+2,j}^{k-1}+13u_{i+2,j+1}^{k-1}).$$

Для $i=m+2,\ j=m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26u_{i-2,j-2}^{k-1}+106u_{i-2,j-1}^{k-1}+96u_{i-2,j}^{k-1}+106u_{i-2,j+1}^{k-1}+26u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i-1,j-2}^{k-1}-408u_{i-1,j-1}^{k-1}-319u_{i-1,j}^{k-1}-272u_{i-1,j+1}^{k-1}+53u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+96u_{i,j-2}^{k-1}-319u_{i,j-1}^{k-1}+976u_{i,j}^{k-1}-74u_{i,j+1}^{k-1}-19u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i+1,j-2}^{k-1}-272u_{i+1,j-1}^{k-1}-74u_{i+1,j}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+2,j-2}^{k-1}+53u_{i+2,j-1}^{k-1}-19u_{i+2,j}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(u_{i-2,j-2}^{k-1}+26u_{i-2,j-1}^{k-1}+66u_{i-2,j}^{k-1}+26u_{i-2,j+1}^{k-1}+u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i-1,j-2}^{k-1}+507u_{i-1,j-1}^{k-1}+936u_{i-1,j}^{k-1}+338u_{i-1,j+1}^{k-1}+13u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+66u_{i,j-2}^{k-1}+936u_{i,j-1}^{k-1}+756u_{i,j}^{k-1}+156u_{i,j+1}^{k-1}+6u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+1,j-2}^{k-1}+338u_{i+1,j-1}^{k-1}+156u_{i+1,j}^{k-1}+$$

$$+u_{i+2,j-2}^{k-1}+13u_{i+2,j-1}^{k-1}+6u_{i+2,j}^{k-1}).$$

Для $i=m+2,\ j=m+3,...,2m$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26u_{i-2,j-2}^{k-1}+106u_{i-2,j-1}^{k-1}+96u_{i-2,j}^{k-1}+106u_{i-2,j+1}^{k-1}+26u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+53u_{i-1,j-2}^{k-1}-272u_{i-1,j-1}^{k-1}-282u_{i-1,j}^{k-1}-272u_{i-1,j+1}^{k-1}+53u_{i-1,j+2}^{k-1}-$$

$$-19u_{i,j-2}^{k-1}-74u_{i,j-1}^{k-1}+546u_{i,j}^{k-1}-74u_{i,j+1}^{k-1}-19u_{i,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(u_{i-2,j-2}^{k-1}+26u_{i-2,j-1}^{k-1}+66u_{i-2,j}^{k-1}+26u_{i-2,j+1}^{k-1}+u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+13u_{i-1,j-2}^{k-1}+338u_{i-1,j-1}^{k-1}+858u_{i-1,j}^{k-1}+338u_{i-1,j+1}^{k-1}+13u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+6u_{i,j-2}^{k-1}+156u_{i,j-1}^{k-1}+396u_{i,j}^{k-1}+156u_{i,j+1}^{k-1}+6u_{i,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=m+2,\ j=2m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26u_{i-2,j-2}^{k-1}+106u_{i-2,j-1}^{k-1}+96u_{i-2,j}^{k-1}+106u_{i-2,j+1}^{k-1}+26u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+53u_{i-1,j-2}^{k-1}-272u_{i-1,j-1}^{k-1}-319u_{i-1,j}^{k-1}-408u_{i-1,j+1}^{k-1}+106u_{i-1,j+2}^{k-1}-$$

$$-19u_{i,j-2}^{k-1}-74u_{i,j-1}^{k-1}+976u_{i,j}^{k-1}-319u_{i,j+1}^{k-1}+96u_{i,j+2}^{k-1}-$$

$$-74u_{i+1,j}^{k-1}-272u_{i+1,j+1}^{k-1}+106u_{i+1,j+2}^{k-1}-$$

$$-19u_{i+2,j}^{k-1}+53u_{i+2,j+1}^{k-1}+26u_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(u_{i-2,j-2}^{k-1}+26u_{i-2,j-1}^{k-1}+66u_{i-2,j}^{k-1}+26u_{i-2,j+1}^{k-1}+u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+13u_{i-1,j-2}^{k-1}+338u_{i-1,j-1}^{k-1}+936u_{i-1,j}^{k-1}+507u_{i-1,j+1}^{k-1}+26u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+6u_{i,j-2}^{k-1}+156u_{i,j-1}^{k-1}+756u_{i,j}^{k-1}+936u_{i,j+1}^{k-1}+66u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+156u_{i+1,j}^{k-1}+338u_{i+1,j+1}^{k-1}+26u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+6u_{i+2,j}^{k-1}+13u_{i+2,j+1}^{k-1}+u_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=m+2,\ j=2m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26u_{i-2,j-2}^{k-1}+106u_{i-2,j-1}^{k-1}+96u_{i-2,j}^{k-1}+106u_{i-2,j+1}^{k-1}+26u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+53u_{i-1,j-2}^{k-1}-408u_{i-1,j-1}^{k-1}-527u_{i-1,j}^{k-1}-544u_{i-1,j+1}^{k-1}+106u_{i-1,j+2}^{k-1}-$$

$$-19u_{i,j-2}^{k-1}-319u_{i,j-1}^{k-1}+2666u_{i,j}^{k-1}-564u_{i,j+1}^{k-1}+96u_{i,j+2}^{k-1}-$$

$$-272u_{i+1,j-1}^{k-1}-490u_{i+1,j}^{k-1}-544u_{i+1,j+1}^{k-1}+106u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+53u_{i+2,j-1}^{k-1}+115u_{i+2,j}^{k-1}+106u_{i+2,j+1}^{k-1}+26u_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(u_{i-2,j-2}^{k-1}+26u_{i-2,j-1}^{k-1}+66u_{i-2,j}^{k-1}+26u_{i-2,j+1}^{k-1}+u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+13u_{i-1,j-2}^{k-1}+507u_{i-1,j-1}^{k-1}+1638u_{i-1,j}^{k-1}+676u_{i-1,j+1}^{k-1}+26u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+6u_{i,j-2}^{k-1}+936u_{i,j-1}^{k-1}+3996u_{i,j}^{k-1}+1716u_{i,j+1}^{k-1}+66u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+338u_{i+1,j-1}^{k-1}+1560u_{i+1,j}^{k-1}+676u_{i+1,j+1}^{k-1}+26u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+13u_{i+2,j-1}^{k-1}+60u_{i+2,j}^{k-1}+26u_{i+2,j+1}^{k-1}+u_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=m+3,...,2m,\ j=m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26u_{i-2,j-2}^{k-1}+106u_{i-2,j-1}^{k-1}+115u_{i-2,j}^{k-1}+53u_{i-2,j+1}^{k-1}+$$

$$+106u_{i-1,j-2}^{k-1}-544u_{i-1,j-1}^{k-1}-490u_{i-1,j}^{k-1}-272u_{i-1,j+1}^{k-1}+$$

$$+96u_{i,j-2}^{k-1}-564u_{i,j-1}^{k-1}+2550u_{i,j}^{k-1}-282u_{i,j+1}^{k-1}+$$

$$+106u_{i+1,j-2}^{k-1}-544u_{i+1,j-1}^{k-1}-490u_{i+1,j}^{k-1}-272u_{i+1,j+1}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+2,j-2}^{k-1}+106u_{i+2,j-1}^{k-1}+115u_{i+2,j}^{k-1}+53u_{i+2,j+1}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(u_{i-2,j-2}^{k-1}+26u_{i-2,j-1}^{k-1}+60u_{i-2,j}^{k-1}+13u_{i-2,j+1}^{k-1}+$$

$$+26u_{i-1,j-2}^{k-1}+676u_{i-1,j-1}^{k-1}+1560u_{i-1,j}^{k-1}+338u_{i-1,j+1}^{k-1}+$$

$$+66u_{i,j-2}^{k-1}+1716u_{i,j-1}^{k-1}+3960u_{i,j}^{k-1}+858u_{i,j+1}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+1,j-2}^{k-1}+676u_{i+1,j-1}^{k-1}+1560u_{i+1,j}^{k-1}+338u_{i+1,j+1}^{k-1}+$$

$$+u_{i+2,j-2}^{k-1}+26u_{i+2,j-1}^{k-1}+60u_{i+2,j}^{k-1}+13u_{i+2,j+1}^{k-1}).$$

Для $i=m+3,...,2m,\ j=m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1} =$$

$$= H(26u_{i-2,j-2}^{k-1} + 53u_{i-2,j-1}^{k-1} - 19u_{i-2,j}^{k-1} +$$

$$+106u_{i-1,j-2}^{k-1} - 272u_{i-1,j-1}^{k-1} - 74u_{i-1,j}^{k-1} +$$

$$+96u_{i,j-2}^{k-1} - 282u_{i,j-1}^{k-1} + 546u_{i,j}^{k-1} +$$

$$+106u_{i+1,j-2}^{k-1} - 272u_{i+1,j-1}^{k-1} - 74u_{i+1,j}^{k-1} +$$

$$+26u_{i+2,j-2}^{k-1} + 53u_{i+2,j-1}^{k-1} - 19u_{i+2,j}^{k-1}) +$$

$$+$$

$$+A(u_{i-2,j-2}^{k-1} + 13u_{i-2,j-1}^{k-1} + 6u_{i-2,j}^{k-1} +$$

$$+26u_{i-1,j-2}^{k-1} + 338u_{i-1,j-1}^{k-1} + 156u_{i-1,j}^{k-1} +$$

$$+66u_{i,j-2}^{k-1} + 858u_{i,j-1}^{k-1} + 396u_{i,j}^{k-1} +$$

$$+26u_{i+1,j-2}^{k-1} + 338u_{i+1,j-1}^{k-1} + 156u_{i+1,j}^{k-1} +$$

$$+u_{i+2,j-2}^{k-1} + 13u_{i+2,j-1}^{k-1} + 6u_{i+2,j}^{k-1}).$$

Для $i = m+3,...,2m,\ j = 2m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1} =$$

$$= H(-19u_{i-2,j}^{k-1} + 53u_{i-2,j+1}^{k-1} + 26u_{i-2,j+2}^{k-1} -$$

$$-74u_{i-1,j}^{k-1} - 272u_{i-1,j+1}^{k-1} + 106u_{i-1,j+2}^{k-1} +$$

$$+546u_{i,j}^{k-1} - 282u_{i,j+1}^{k-1} + 96u_{i,j+2}^{k-1} -$$

$$-74u_{i+1,j}^{k-1} - 272u_{i+1,j+1}^{k-1} + 106u_{i+1,j+2}^{k-1} -$$

$$-19u_{i+2,j}^{k-1} + 53u_{i+2,j+1}^{k-1} + 26u_{i+2,j+2}^{k-1}) +$$

$$+$$

$$+A(6u_{i-2,j}^{k-1} + 13u_{i-2,j+1}^{k-1} + u_{i-2,j+2}^{k-1} +$$

$$+156u_{i-1,j}^{k-1} + 338u_{i-1,j+1}^{k-1} + 26u_{i-1,j+2}^{k-1} +$$

$$+396u_{i,j}^{k-1} + 858u_{i,j+1}^{k-1} + 66u_{i,j+2}^{k-1} +$$

$$+156u_{i+1,j}^{k-1}+338u_{i+1,j+1}^{k-1}+26u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+6u_{i+2,j}^{k-1}+13u_{i+2,j+1}^{k-1}+u_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=m+3,...,2m,\ j=2m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(53u_{i-2,j-1}^{k-1}+115u_{i-2,j}^{k-1}+106u_{i-2,j+1}^{k-1}+26u_{i-2,j+2}^{k-1}-$$

$$-272u_{i-1,j-1}^{k-1}-490u_{i-1,j}^{k-1}-544u_{i-1,j+1}^{k-1}+106u_{i-1,j+2}^{k-1}-$$

$$-282u_{i,j-1}^{k-1}+2550u_{i,j}^{k-1}-564u_{i,j+1}^{k-1}+96u_{i,j+2}^{k-1}-$$

$$-272u_{i+1,j-1}^{k-1}-490u_{i+1,j}^{k-1}-544u_{i+1,j+1}^{k-1}+106u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+53u_{i+2,j-1}^{k-1}+115u_{i+2,j}^{k-1}+106u_{i+2,j+1}^{k-1}+26u_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(13u_{i-2,j-1}^{k-1}+60u_{i-2,j}^{k-1}+26u_{i-2,j+1}^{k-1}+u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+338u_{i-1,j-1}^{k-1}+1560u_{i-1,j}^{k-1}+676u_{i-1,j+1}^{k-1}+26u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+858u_{i,j-1}^{k-1}+3960u_{i,j}^{k-1}+1716u_{i,j+1}^{k-1}+66u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+338u_{i+1,j-1}^{k-1}+1560u_{i+1,j}^{k-1}+676u_{i+1,j+1}^{k-1}+26u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+13u_{i+2,j-1}^{k-1}+60u_{i+2,j}^{k-1}+26u_{i+2,j+1}^{k-1}+u_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26u_{i-2,j-2}^{k-1}+106u_{i-2,j-1}^{k-1}+115u_{i-2,j}^{k-1}+53u_{i-2,j+1}^{k-1}+$$

$$+106u_{i-1,j-2}^{k-1}-544u_{i-1,j-1}^{k-1}-490u_{i-1,j}^{k-1}-272u_{i-1,j+1}^{k-1}+$$

$$+96u_{i,j-2}^{k-1}-564u_{i,j-1}^{k-1}+2666u_{i,j}^{k-1}-319u_{i,j+1}^{k-1}-19u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i+1,j-2}^{k-1}-544u_{i+1,j-1}^{k-1}-527u_{i+1,j}^{k-1}-408u_{i+1,j+1}^{k-1}+53u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+2,j-2}^{k-1}+106u_{i+2,j-1}^{k-1}+96u_{i+2,j}^{k-1}+106u_{i+2,j+1}^{k-1}+26u_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(u_{i-2,j-2}^{k-1}+26u_{i-2,j-1}^{k-1}+60u_{i-2,j}^{k-1}+13u_{i-2,j+1}^{k-1}+$$

$$+26u_{i-1,j-2}^{k-1}+676u_{i-1,j-1}^{k-1}+1560u_{i-1,j}^{k-1}+338u_{i-1,j+1}^{k-1}+$$

$$+66u_{i,j-2}^{k-1}+1716u_{i,j-1}^{k-1}+3996u_{i,j}^{k-1}+936u_{i,j+1}^{k-1}+6u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+1,j-2}^{k-1}+676u_{i+1,j-1}^{k-1}+1638u_{i+1,j}^{k-1}+507u_{i+1,j+1}^{k-1}+13u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+u_{i+2,j-2}^{k-1}+26u_{i+2,j-1}^{k-1}+66u_{i+2,j}^{k-1}+26u_{i+2,j+1}^{k-1}+u_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26u_{i-2,j-2}^{k-1}+53u_{i-2,j-1}^{k-1}-19u_{i-2,j}^{k-1}+$$

$$+106u_{i-1,j-2}^{k-1}-272u_{i-1,j-1}^{k-1}-74u_{i-1,j}^{k-1}+$$

$$+96u_{i,j-2}^{k-1}-319u_{i,j-1}^{k-1}+976u_{i,j}^{k-1}-74u_{i,j+1}^{k-1}-19u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i+1,j-2}^{k-1}-408u_{i+1,j-1}^{k-1}-319u_{i+1,j}^{k-1}-272u_{i+1,j+1}^{k-1}+53u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+2,j-2}^{k-1}+106u_{i+2,j-1}^{k-1}+96u_{i+2,j}^{k-1}+106u_{i+2,j+1}^{k-1}+26u_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(u_{i-2,j-2}^{k-1}+13u_{i-2,j-1}^{k-1}+6u_{i-2,j}^{k-1}+$$

$$+26u_{i-1,j-2}^{k-1}+338u_{i-1,j-1}^{k-1}+156u_{i-1,j}^{k-1}+$$

$$+66u_{i,j-2}^{k-1}+936u_{i,j-1}^{k-1}+756u_{i,j}^{k-1}+156u_{i,j+1}^{k-1}+6u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+1,j-2}^{k-1}+507u_{i+1,j-1}^{k-1}+936u_{i+1,j}^{k-1}+338u_{i+1,j+1}^{k-1}+13u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+u_{i+2,j-2}^{k-1}+26u_{i+2,j-1}^{k-1}+66u_{i+2,j}^{k-1}+26u_{i+2,j+1}^{k-1}+u_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=m+3,...,2m$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(-19u_{i,j-2}^{k-1}-74u_{i,j-1}^{k-1}+546u_{i,j}^{k-1}-74u_{i,j+1}^{k-1}-19u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+53u_{i+1,j-2}^{k-1}-272u_{i+1,j-1}^{k-1}-282u_{i+1,j}^{k-1}-272u_{i+1,j+1}^{k-1}+53u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+2,j-2}^{k-1}+106u_{i+2,j-1}^{k-1}+96u_{i+2,j}^{k-1}+106u_{i+2,j+1}^{k-1}+26u_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(6u_{i,j-2}^{k-1}+156u_{i,j-1}^{k-1}+396u_{i,j}^{k-1}+156u_{i,j+1}^{k-1}+6u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+13u_{i+1,j-2}^{k-1}+338u_{i+1,j-1}^{k-1}+858u_{i+1,j}^{k-1}+338u_{i+1,j+1}^{k-1}+13u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+u_{i+2,j-2}^{k-1}+26u_{i+2,j-1}^{k-1}+66u_{i+2,j}^{k-1}+26u_{i+2,j+1}^{k-1}+u_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=2m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(-19u_{i-2,j}^{k-1}+53u_{i-2,j+1}^{k-1}+26u_{i-2,j+2}^{k-1}-$$

$$-74u_{i-1,j}^{k-1}-272u_{i-1,j+1}^{k-1}+106u_{i-1,j+2}^{k-1}-$$

$$-19u_{i,j-2}^{k-1}-74u_{i,j-1}^{k-1}+976u_{i,j}^{k-1}-319u_{i,j+1}^{k-1}+96u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+53u_{i+1,j-2}^{k-1}-272u_{i+1,j-1}^{k-1}-319u_{i+1,j}^{k-1}-408u_{i+1,j+1}^{k-1}+106u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+2,j-2}^{k-1}+106u_{i+2,j-1}^{k-1}+96u_{i+2,j}^{k-1}+106u_{i+2,j+1}^{k-1}+26u_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(6u_{i-2,j}^{k-1}+13u_{i-2,j+1}^{k-1}+u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+156u_{i-1,j}^{k-1}+338u_{i-1,j+1}^{k-1}+26u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+6u_{i,j-2}^{k-1}+156u_{i,j-1}^{k-1}+756u_{i,j}^{k-1}+936u_{i,j+1}^{k-1}+66u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+13u_{i+1,j-2}^{k-1}+338u_{i+1,j-1}^{k-1}+936u_{i+1,j}^{k-1}+507u_{i+1,j+1}^{k-1}+26u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+u_{i+2,j-2}^{k-1}+26u_{i+2,j-1}^{k-1}+66u_{i+2,j}^{k-1}+26u_{i+2,j+1}^{k-1}+u_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=2m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(53u_{i-2,j-1}^{k-1}+115u_{i-2,j}^{k-1}+106u_{i-2,j+1}^{k-1}+26u_{i-2,j+2}^{k-1}-$$

$$-272u_{i-1,j-1}^{k-1}-490u_{i-1,j}^{k-1}-544u_{i-1,j+1}^{k-1}+106u_{i-1,j+2}^{k-1}-$$

$$-19u_{i,j-2}^{k-1}-319u_{i,j-1}^{k-1}+2666u_{i,j}^{k-1}-564u_{i,j+1}^{k-1}+96u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+53u_{i+1,j-2}^{k-1}-408u_{i+1,j-1}^{k-1}-527u_{i+1,j}^{k-1}-544u_{i+1,j+1}^{k-1}+106u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+2,j-2}^{k-1}+106u_{i+2,j-1}^{k-1}+96u_{i+2,j}^{k-1}+106u_{i+2,j+1}^{k-1}+26u_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(13u_{i-2,j-1}^{k-1}+60u_{i-2,j}^{k-1}+26u_{i-2,j+1}^{k-1}+u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+338u_{i-1,j-1}^{k-1}+1560u_{i-1,j}^{k-1}+676u_{i-1,j+1}^{k-1}+26u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+6u_{i,j-2}^{k-1}+936u_{i,j-1}^{k-1}+3996u_{i,j}^{k-1}+1716u_{i,j+1}^{k-1}+66u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+13u_{i+1,j-2}^{k-1}+507u_{i+1,j-1}^{k-1}+1638u_{i+1,j}^{k-1}+676u_{i+1,j+1}^{k-1}+26u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+u_{i+2,j-2}^{k-1}+26u_{i+2,j-1}^{k-1}+66u_{i+2,j}^{k-1}+26u_{i+2,j+1}^{k-1}+u_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26u_{i-2,j-2}^{k-1}+106u_{i-2,j-1}^{k-1}+115u_{i-2,j}^{k-1}+53u_{i-2,j+1}^{k-1}+$$

$$+106u_{i-1,j-2}^{k-1}-544u_{i-1,j-1}^{k-1}-527u_{i-1,j}^{k-1}-408u_{i-1,j+1}^{k-1}+53u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+96u_{i,j-2}^{k-1}-564u_{i,j-1}^{k-1}+2980u_{i,j}^{k-1}-527u_{i,j+1}^{k-1}+115u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i+1,j-2}^{k-1}-544u_{i+1,j-1}^{k-1}-564u_{i+1,j}^{k-1}-544u_{i+1,j+1}^{k-1}+106u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+2,j-2}^{k-1}+106u_{i+2,j-1}^{k-1}+96u_{i+2,j}^{k-1}+106u_{i+2,j+1}^{k-1}+26u_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(u_{i-2,j-2}^{k-1}+26u_{i-2,j-1}^{k-1}+60u_{i-2,j}^{k-1}+13u_{i-2,j+1}^{k-1}+$$

$$+26u_{i-1,j-2}^{k-1}+676u_{i-1,j-1}^{k-1}+1638u_{i-1,j}^{k-1}+507u_{i-1,j+1}^{k-1}+13u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+66u_{i,j-2}^{k-1}+1716u_{i,j-1}^{k-1}+4320u_{i,j}^{k-1}+1638u_{i,j+1}^{k-1}+60u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+1,j-2}^{k-1}+676u_{i+1,j-1}^{k-1}+1716u_{i+1,j}^{k-1}+676u_{i+1,j+1}^{k-1}+26u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+u_{i+2,j-2}^{k-1}+26u_{i+2,j-1}^{k-1}+66u_{i+2,j}^{k-1}+26u_{i+2,j+1}^{k-1}+u_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26u_{i-2,j-2}^{k-1}+53u_{i-2,j-1}^{k-1}-19u_{i-2,j}^{k-1}+$$

$$+106u_{i-1,j-2}^{k-1}-408u_{i-1,j-1}^{k-1}-319u_{i-1,j}^{k-1}-272u_{i-1,j+1}^{k-1}+53u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+96u_{i,j-2}^{k-1}-527u_{i,j-1}^{k-1}+2666u_{i,j}^{k-1}-490u_{i,j+1}^{k-1}+115u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i+1,j-2}^{k-1}-544u_{i+1,j-1}^{k-1}-564u_{i+1,j}^{k-1}-544u_{i+1,j+1}^{k-1}+106u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+2,j-2}^{k-1}+106u_{i+2,j-1}^{k-1}+96u_{i+2,j}^{k-1}+106u_{i+2,j+1}^{k-1}+26u_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(u_{i-2,j-2}^{k-1}+13u_{i-2,j-1}^{k-1}+6u_{i-2,j}^{k-1}+$$

$$+26u_{i-1,j-2}^{k-1}+507u_{i-1,j-1}^{k-1}+936u_{i-1,j}^{k-1}+338u_{i-1,j+1}^{k-1}+13u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+66u_{i,j-2}^{k-1}+1638u_{i,j-1}^{k-1}+3996u_{i,j}^{k-1}+1560u_{i,j+1}^{k-1}+60u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+1,j-2}^{k-1}+676u_{i+1,j-1}^{k-1}+1716u_{i+1,j}^{k-1}+676u_{i+1,j+1}^{k-1}+26u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+u_{i+2,j-2}^{k-1}+26u_{i+2,j-1}^{k-1}+66u_{i+2,j}^{k-1}+26u_{i+2,j+1}^{k-1}+u_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=m+3,...,2m$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(53u_{i-1,j-2}^{k-1}-272u_{i-1,j-1}^{k-1}-282u_{i-1,j}^{k-1}-272u_{i-1,j+1}^{k-1}+53u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+115u_{i,j-2}^{k-1}-490u_{i,j-1}^{k-1}+2550u_{i,j}^{k-1}-490u_{i,j+1}^{k-1}+115u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i+1,j-2}^{k-1}-544u_{i+1,j-1}^{k-1}-564u_{i+1,j}^{k-1}-544u_{i+1,j+1}^{k-1}+106u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+2,j-2}^{k-1}+106u_{i+2,j-1}^{k-1}+96u_{i+2,j}^{k-1}+106u_{i+2,j+1}^{k-1}+26u_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(13u_{i-1,j-2}^{k-1}+338u_{i-1,j-1}^{k-1}+858u_{i-1,j}^{k-1}+338u_{i-1,j+1}^{k-1}+13u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+60u_{i,j-2}^{k-1}+1560u_{i,j-1}^{k-1}+3960u_{i,j}^{k-1}+1560u_{i,j+1}^{k-1}+60u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+1,j-2}^{k-1}+676u_{i+1,j-1}^{k-1}+1716u_{i+1,j}^{k-1}+676u_{i+1,j+1}^{k-1}+26u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+u_{i+2,j-2}^{k-1}+26u_{i+2,j-1}^{k-1}+66u_{i+2,j}^{k-1}+26u_{i+2,j+1}^{k-1}+u_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=2m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(-19u_{i-2,j}^{k-1}+53u_{i-2,j+1}^{k-1}+26u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+53u_{i-1,j-2}^{k-1}-272u_{i-1,j-1}^{k-1}-319u_{i-1,j}^{k-1}-408u_{i-1,j+1}^{k-1}+106u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+115u_{i,j-2}^{k-1}-490u_{i,j-1}^{k-1}+2666u_{i,j}^{k-1}-527u_{i,j+1}^{k-1}+96u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i+1,j-2}^{k-1}-544u_{i+1,j-1}^{k-1}-564u_{i+1,j}^{k-1}-544u_{i+1,j+1}^{k-1}+106u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+2,j-2}^{k-1}+106u_{i+2,j-1}^{k-1}+96u_{i+2,j}^{k-1}+106u_{i+2,j+1}^{k-1}+26u_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(6u_{i-2,j}^{k-1}+13u_{i-2,j+1}^{k-1}+u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+13u_{i-1,j-2}^{k-1}+338u_{i-1,j-1}^{k-1}+936u_{i-1,j}^{k-1}+507u_{i-1,j+1}^{k-1}+26u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+60u_{i,j-2}^{k-1}+1560u_{i,j-1}^{k-1}+3996u_{i,j}^{k-1}+1638u_{i,j+1}^{k-1}+66u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+1,j-2}^{k-1}+676u_{i+1,j-1}^{k-1}+1716u_{i+1,j}^{k-1}+676u_{i+1,j+1}^{k-1}+26u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+u_{i+2,j-2}^{k-1}+26u_{i+2,j-1}^{k-1}+66u_{i+2,j}^{k-1}+26u_{i+2,j+1}^{k-1}+u_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=2m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(53u_{i-2,j-1}^{k-1}+115u_{i-2,j}^{k-1}+106u_{i-2,j+1}^{k-1}+26u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+53u_{i-1,j-2}^{k-1}-408u_{i-1,j-1}^{k-1}-527u_{i-1,j}^{k-1}-544u_{i-1,j+1}^{k-1}+106u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+115u_{i,j-2}^{k-1}-527u_{i,j-1}^{k-1}+2980u_{i,j}^{k-1}-564u_{i,j+1}^{k-1}+96u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106u_{i+1,j-2}^{k-1}-544u_{i+1,j-1}^{k-1}-564u_{i+1,j}^{k-1}-544u_{i+1,j+1}^{k-1}+106u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+2,j-2}^{k-1}+106u_{i+2,j-1}^{k-1}+96u_{i+2,j}^{k-1}+106u_{i+2,j+1}^{k-1}+26u_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(13u_{i-2,j-1}^{k-1}+60u_{i-2,j}^{k-1}+26u_{i-2,j+1}^{k-1}+u_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+13u_{i-1,j-2}^{k-1}+507u_{i-1,j-1}^{k-1}+1638u_{i-1,j}^{k-1}+676u_{i-1,j+1}^{k-1}+26u_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+60u_{i,j-2}^{k-1}+1638u_{i,j-1}^{k-1}+4320u_{i,j}^{k-1}+1716u_{i,j+1}^{k-1}+66u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26u_{i+1,j-2}^{k-1}+676u_{i+1,j-1}^{k-1}+1716u_{i+1,j}^{k-1}+676u_{i+1,j+1}^{k-1}+26u_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+u_{i+2,j-2}^{k-1}+26u_{i+2,j-1}^{k-1}+66u_{i+2,j}^{k-1}+26u_{i+2,j+1}^{k-1}+u_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

IV. Вычисляем очередную величину квадрата нормы абсолютной ошибки. При программировании полагаем

$$\mathrm{E}_{k-1}=\sum_{j=m+1}^{2m+2}((r_{m+1,j}^{k-1}h)^2+(r_{m+2,j}^{k-1}h)^2+(r_{2m+1,j}^{k-1}h)^2+(r_{2m+2,j}^{k-1}h)^2)+$$

$$+\sum_{i=m+3}^{2m}((r_{i,m+1}^{k-1}h)^2+(r_{i,m+2}^{k-1}h)^2+(r_{i,2m+1}^{k-1}h)^2+(r_{i,2m+2}^{k-1}h)^2),\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

V. Ищем очередной массив поправок.

$$w_{i,j}^{k-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

При программировании для $1\le i\le n, 1\le j\le n,$ полагаем

$$w_{i,j}^{k-1}=0,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Далее значения элементов этого массива в последующих вычислениях пересчитываются. Находятся следующие элементы этого массива

$$w_{i,j}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\ i=2,3,...,n-1,\ j=2,3...,n-1$$

по найденным ранее элементам массива невязок

$$r_{i,j}^{k-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$$

с помощью программной реализации алгоритма, использующего метод итерационной факторизации при решении бигармонической системы на квадрате со спектральными, энергетически эквивалентными операторами в приложении 2. Затем для $2\le i\le n-1$ полагаем

$$w_{i,1}^{k-1}=w_{i,2}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Для $2\le j\le n-1$ полагаем

$$w_{1,j}^{k-1}=w_{2,j}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Полагаем

$$w_{1,1}^{k-1}=w_{2,2}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Для $1 \le i \le n-1$ полагаем

$$w_{i,n}^{k} = 0.$$

Для $1 \le j \le n-1$ полагаем

$$w_{n,j}^{k} = 0.$$

Полагаем

$$w_{n,n}^{k} = 0.$$

VI. Вычисляем массив эквивалентной невязки.

$$\eta_{i,j}^{k-1},\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2...,n,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Вычисляем, только те элементы, которые будем использовать. Все используемые массивы можно задать сначала нулевыми, а пересчитывать, только следующие, вообще говоря, ненулевые элементы.

Для $i = m+1,\ j = m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1} =$$

$$= H(26w_{i-2,j-2}^{k-1} + 106w_{i-2,j-1}^{k-1} + 96w_{i-2,j}^{k-1} + 106w_{i-2,j+1}^{k-1} + 26w_{i-2,j+2}^{k-1} +$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{k-1} - 544w_{i-1,j-1}^{k-1} - 564w_{i-1,j}^{k-1} - 544w_{i-1,j+1}^{k-1} + 106w_{i-1,j+2}^{k-1} +$$

$$+96w_{i,j-2}^{k-1} - 564w_{i,j-1}^{k-1} + 2980w_{i,j}^{k-1} - 527w_{i,j+1}^{k-1} + 115w_{i,j+2}^{k-1} +$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{k-1} - 544w_{i+1,j-1}^{k-1} - 527w_{i+1,j}^{k-1} - 408w_{i+1,j+1}^{k-1} + 53w_{i+1,j+2}^{k-1} +$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{k-1} + 106w_{i+2,j-1}^{k-1} + 115w_{i+2,j}^{k-1} + 53w_{i+2,j+1}^{k-1}) +$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{k-1} + 26w_{i-2,j-1}^{k-1} + 66w_{i-2,j}^{k-1} + 26w_{i-2,j+1}^{k-1} + w_{i-2,j+2}^{k-1} +$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{k-1} + 676w_{i-1,j-1}^{k-1} + 1716w_{i-1,j}^{k-1} + 676w_{i-1,j+1}^{k-1} + 26w_{i-1,j+2}^{k-1} +$$

$$+66w_{i,j-2}^{k-1} + 1716w_{i,j-1}^{k-1} + 43206w_{i,j}^{k-1} + 1638w_{i,j+1}^{k-1} + 60w_{i,j+2}^{k-1} +$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{k-1} + 676w_{i+1,j-1}^{k-1} + 1638w_{i+1,j}^{k-1} + 507w_{i+1,j+1}^{k-1} + 13w_{i+1,j+2}^{k-1} +$$

$$+w_{i+2,j-2}^{k-1} + 26w_{i+2,j-1}^{k-1} + 60w_{i+2,j}^{k-1} + 13w_{i+2,j+1}^{k-1}).$$

Для $i=m+1,\ j=m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{k-1}+106w_{i-2,j-1}^{k-1}+96w_{i-2,j}^{k-1}+106w_{i-2,j+1}^{k-1}+26w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{k-1}-544w_{i-1,j-1}^{k-1}-564w_{i-1,j}^{k-1}-544w_{i-1,j+1}^{k-1}+106w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+96w_{i,j-2}^{k-1}-527w_{i,j-1}^{k-1}+2666w_{i,j}^{k-1}-490w_{i,j+1}^{k-1}+115w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{k-1}-408w_{i+1,j-1}^{k-1}-319w_{i+1,j}^{k-1}-272w_{i+1,j+1}^{k-1}+53w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{k-1}+53w_{i+2,j-1}^{k-1}-19w_{i+2,j}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{k-1}+26w_{i-2,j-1}^{k-1}+66w_{i-2,j}^{k-1}+26w_{i-2,j+1}^{k-1}+w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{k-1}+676w_{i-1,j-1}^{k-1}+1716w_{i-1,j}^{k-1}+676w_{i-1,j+1}^{k-1}+26w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+66w_{i,j-2}^{k-1}+1638w_{i,j-1}^{k-1}+3996w_{i,j}^{k-1}+1560w_{i,j+1}^{k-1}+60w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{k-1}+507w_{i+1,j-1}^{k-1}+936w_{i+1,j}^{k-1}+338w_{i+1,j+1}^{k-1}+13w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{k-1}+13w_{i+2,j-1}^{k-1}+6w_{i+2,j}^{k-1}).$$

Для $i=m+1,\ j=m+3,...,2m$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{k-1}+106w_{i-2,j-1}^{k-1}+96w_{i-2,j}^{k-1}+106w_{i-2,j+1}^{k-1}+26w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{k-1}-544w_{i-1,j-1}^{k-1}-564w_{i-1,j}^{k-1}-544w_{i-1,j+1}^{k-1}+106w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+115w_{i,j-2}^{k-1}-490w_{i,j-1}^{k-1}+2550w_{i,j}^{k-1}-490w_{i,j+1}^{k-1}+115w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+53w_{i+1,j-2}^{k-1}-272w_{i+1,j-1}^{k-1}-282w_{i+1,j}^{k-1}-272w_{i+1,j+1}^{k-1}+53w_{i+1,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{k-1}+26w_{i-2,j-1}^{k-1}+66w_{i-2,j}^{k-1}+26w_{i-2,j+1}^{k-1}+w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{k-1}+676w_{i-1,j-1}^{k-1}+1716w_{i-1,j}^{k-1}+676w_{i-1,j+1}^{k-1}+26w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+60w_{i,j-2}^{k-1}+1560w_{i,j-1}^{k-1}+3960w_{i,j}^{k-1}+1560w_{i,j+1}^{k-1}+60w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+13w_{i+1,j-2}^{k-1}+338w_{i+1,j-1}^{k-1}+858w_{i+1,j}^{k-1}+338w_{i+1,j+1}^{k-1}+13w_{i+1,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=m+1,\ j=2m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{k-1}+106w_{i-2,j-1}^{k-1}+96w_{i-2,j}^{k-1}+106w_{i-2,j+1}^{k-1}+26w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{k-1}-544w_{i-1,j-1}^{k-1}-564w_{i-1,j}^{k-1}-544w_{i-1,j+1}^{k-1}+106w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+115w_{i,j-2}^{k-1}-490w_{i,j-1}^{k-1}+2666w_{i,j}^{k-1}-527w_{i,j+1}^{k-1}+96w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+53w_{i+1,j-2}^{k-1}-272w_{i+1,j-1}^{k-1}-319w_{i+1,j}^{k-1}-408w_{i+1,j+1}^{k-1}+106w_{i+1,j+2}^{k-1}-$$

$$-19w_{i+2,j}^{k-1}+53w_{i+2,j+1}^{k-1}+26w_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{k-1}+26w_{i-2,j-1}^{k-1}+66w_{i-2,j}^{k-1}+26w_{i-2,j+1}^{k-1}+w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{k-1}+676w_{i-1,j-1}^{k-1}+1716w_{i-1,j}^{k-1}+676w_{i-1,j+1}^{k-1}+26w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+60w_{i,j-2}^{k-1}+1560w_{i,j-1}^{k-1}+3996w_{i,j}^{k-1}+1638w_{i,j+1}^{k-1}+66w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+13w_{i+1,j-2}^{k-1}+338w_{i+1,j-1}^{k-1}+936w_{i+1,j}^{k-1}+507w_{i+1,j+1}^{k-1}+26w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+6w_{i+2,j}^{k-1}+13w_{i+2,j+1}^{k-1}+w_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=m+1,\ j=2m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{k-1}+106w_{i-2,j-1}^{k-1}+96w_{i-2,j}^{k-1}+106w_{i-2,j+1}^{k-1}+26w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{k-1}-544w_{i-1,j-1}^{k-1}-564w_{i-1,j}^{k-1}-544w_{i-1,j+1}^{k-1}+106w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+115w_{i,j-2}^{k-1}-527w_{i,j-1}^{k-1}+2980w_{i,j}^{k-1}-564w_{i,j+1}^{k-1}+96w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+53w_{i+1,j-2}^{k-1}-408w_{i+1,j-1}^{k-1}-527w_{i+1,j}^{k-1}-544w_{i+1,j+1}^{k-1}+106w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+53w_{i+2,j-1}^{k-1}+115w_{i+2,j}^{k-1}+106w_{i+2,j+1}^{k-1}+26w_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{k-1}+26w_{i-2,j-1}^{k-1}+66w_{i-2,j}^{k-1}+26w_{i-2,j+1}^{k-1}+w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{k-1}+676w_{i-1,j-1}^{k-1}+1716w_{i-1,j}^{k-1}+676w_{i-1,j+1}^{k-1}+26w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+60w_{i,j-2}^{k-1}+1638w_{i,j-1}^{k-1}+4320w_{i,j}^{k-1}+1716w_{i,j+1}^{k-1}+66w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+13w_{i+1,j-2}^{k-1}+507w_{i+1,j-1}^{k-1}+1638w_{i+1,j}^{k-1}+676w_{i+1,j+1}^{k-1}+26w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+13w_{i+2,j-1}^{k-1}+60w_{i+2,j}^{k-1}+26w_{i+2,j+1}^{k-1}+w_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=m+2,\ j=m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{k-1}+106w_{i-2,j-1}^{k-1}+96w_{i-2,j}^{k-1}+106w_{i-2,j+1}^{k-1}+26w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{k-1}-544w_{i-1,j-1}^{k-1}-527w_{i-1,j}^{k-1}-408w_{i-1,j+1}^{k-1}+53w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+96w_{i,j-2}^{k-1}-564w_{i,j-1}^{k-1}+2666w_{i,j}^{k-1}-319w_{i,j+1}^{k-1}-19w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{k-1}-544w_{i+1,j-1}^{k-1}-490w_{i+1,j}^{k-1}-272w_{i+1,j+1}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{k-1}+106w_{i+2,j-1}^{k-1}+115w_{i+2,j}^{k-1}+53w_{i+2,j+1}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{k-1}+26w_{i-2,j-1}^{k-1}+66w_{i-2,j}^{k-1}+26w_{i-2,j+1}^{k-1}+w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{k-1}+676w_{i-1,j-1}^{k-1}+1638w_{i-1,j}^{k-1}+507w_{i-1,j+1}^{k-1}+13w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+66w_{i,j-2}^{k-1}+1716w_{i,j-1}^{k-1}+3996w_{i,j}^{k-1}+936w_{i,j+1}^{k-1}+6w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{k-1}+676w_{i+1,j-1}^{k-1}+1560w_{i+1,j}^{k-1}+338w_{i+1,j+1}^{k-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{k-1}+26w_{i+2,j-1}^{k-1}+60w_{i+2,j}^{k-1}+13w_{i+2,j+1}^{k-1}).$$

Для $i=m+2,\ j=m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{k-1}+106w_{i-2,j-1}^{k-1}+96w_{i-2,j}^{k-1}+106w_{i-2,j+1}^{k-1}+26w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{k-1}-408w_{i-1,j-1}^{k-1}-319w_{i-1,j}^{k-1}-272w_{i-1,j+1}^{k-1}+53w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+96w_{i,j-2}^{k-1}-319w_{i,j-1}^{k-1}+976w_{i,j}^{k-1}-74w_{i,j+1}^{k-1}-19w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{k-1}-272w_{i+1,j-1}^{k-1}-74w_{i+1,j}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{k-1}+53w_{i+2,j-1}^{k-1}-19w_{i+2,j}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{k-1}+26w_{i-2,j-1}^{k-1}+66w_{i-2,j}^{k-1}+26w_{i-2,j+1}^{k-1}+w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{k-1}+507w_{i-1,j-1}^{k-1}+936w_{i-1,j}^{k-1}+338w_{i-1,j+1}^{k-1}+13w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+66w_{i,j-2}^{k-1}+936w_{i,j-1}^{k-1}+756w_{i,j}^{k-1}+156w_{i,j+1}^{k-1}+6w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{k-1}+338w_{i+1,j-1}^{k-1}+156w_{i+1,j}^{k-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{k-1}+13w_{i+2,j-1}^{k-1}+6w_{i+2,j}^{k-1}).$$

Для $i=m+2,\ j=m+3,...,2m$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{k-1}+106w_{i-2,j-1}^{k-1}+96w_{i-2,j}^{k-1}+106w_{i-2,j+1}^{k-1}+26w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+53w_{i-1,j-2}^{k-1}-272w_{i-1,j-1}^{k-1}-282w_{i-1,j}^{k-1}-272w_{i-1,j+1}^{k-1}+53w_{i-1,j+2}^{k-1}-$$

$$-19w_{i,j-2}^{k-1}-74w_{i,j-1}^{k-1}+546w_{i,j}^{k-1}-74w_{i,j+1}^{k-1}-19w_{i,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{k-1}+26w_{i-2,j-1}^{k-1}+66w_{i-2,j}^{k-1}+26w_{i-2,j+1}^{k-1}+w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+13w_{i-1,j-2}^{k-1}+338w_{i-1,j-1}^{k-1}+858w_{i-1,j}^{k-1}+338w_{i-1,j+1}^{k-1}+13w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+6w_{i,j-2}^{k-1}+156w_{i,j-1}^{k-1}+396w_{i,j}^{k-1}+156w_{i,j+1}^{k-1}+6w_{i,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=m+2,\ j=2m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{k-1}+106w_{i-2,j-1}^{k-1}+96w_{i-2,j}^{k-1}+106w_{i-2,j+1}^{k-1}+26w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+53w_{i-1,j-2}^{k-1}-272w_{i-1,j-1}^{k-1}-319w_{i-1,j}^{k-1}-408w_{i-1,j+1}^{k-1}+106w_{i-1,j+2}^{k-1}-$$

$$-19w_{i,j-2}^{k-1}-74w_{i,j-1}^{k-1}+976w_{i,j}^{k-1}-319w_{i,j+1}^{k-1}+96w_{i,j+2}^{k-1}-$$

$$-74w_{i+1,j}^{k-1}-272w_{i+1,j+1}^{k-1}+106w_{i+1,j+2}^{k-1}-$$

$$-19w_{i+2,j}^{k-1}+53w_{i+2,j+1}^{k-1}+26w_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{k-1}+26w_{i-2,j-1}^{k-1}+66w_{i-2,j}^{k-1}+26w_{i-2,j+1}^{k-1}+w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+13w_{i-1,j-2}^{k-1}+338w_{i-1,j-1}^{k-1}+936w_{i-1,j}^{k-1}+507w_{i-1,j+1}^{k-1}+26w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+6w_{i,j-2}^{k-1}+156w_{i,j-1}^{k-1}+756w_{i,j}^{k-1}+936w_{i,j+1}^{k-1}+66w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+156w_{i+1,j}^{k-1}+338w_{i+1,j+1}^{k-1}+26w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+6w_{i+2,j}^{k-1}+13w_{i+2,j+1}^{k-1}+w_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=m+2,\ j=2m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{k-1}+106w_{i-2,j-1}^{k-1}+96w_{i-2,j}^{k-1}+106w_{i-2,j+1}^{k-1}+26w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+53w_{i-1,j-2}^{k-1}-408w_{i-1,j-1}^{k-1}-527w_{i-1,j}^{k-1}-544w_{i-1,j+1}^{k-1}+106w_{i-1,j+2}^{k-1}-$$

$$-19w_{i,j-2}^{k-1}-319w_{i,j-1}^{k-1}+2666w_{i,j}^{k-1}-564w_{i,j+1}^{k-1}+96w_{i,j+2}^{k-1}-$$

$$-272w_{i+1,j-1}^{k-1}-490w_{i+1,j}^{k-1}-544w_{i+1,j+1}^{k-1}+106w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+53w_{i+2,j-1}^{k-1}+115w_{i+2,j}^{k-1}+106w_{i+2,j+1}^{k-1}+26w_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{k-1}+26w_{i-2,j-1}^{k-1}+66w_{i-2,j}^{k-1}+26w_{i-2,j+1}^{k-1}+w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+13w_{i-1,j-2}^{k-1}+507w_{i-1,j-1}^{k-1}+1638w_{i-1,j}^{k-1}+676w_{i-1,j+1}^{k-1}+26w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+6w_{i,j-2}^{k-1}+936w_{i,j-1}^{k-1}+3996w_{i,j}^{k-1}+1716w_{i,j+1}^{k-1}+66w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+338w_{i+1,j-1}^{k-1}+1560w_{i+1,j}^{k-1}+676w_{i+1,j+1}^{k-1}+26w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+13w_{i+2,j-1}^{k-1}+60w_{i+2,j}^{k-1}+26w_{i+2,j+1}^{k-1}+w_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=m+3,...,2m,\ j=m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{k-1}+106w_{i-2,j-1}^{k-1}+115w_{i-2,j}^{k-1}+53w_{i-2,j+1}^{k-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{k-1}-544w_{i-1,j-1}^{k-1}-490w_{i-1,j}^{k-1}-272w_{i-1,j+1}^{k-1}+$$

$$+96w_{i,j-2}^{k-1}-564w_{i,j-1}^{k-1}+2550w_{i,j}^{k-1}-282w_{i,j+1}^{k-1}+$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{k-1}-544w_{i+1,j-1}^{k-1}-490w_{i+1,j}^{k-1}-272w_{i+1,j+1}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{k-1}+106w_{i+2,j-1}^{k-1}+115w_{i+2,j}^{k-1}+53w_{i+2,j+1}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{k-1}+26w_{i-2,j-1}^{k-1}+60w_{i-2,j}^{k-1}+13w_{i-2,j+1}^{k-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{k-1}+676w_{i-1,j-1}^{k-1}+1560w_{i-1,j}^{k-1}+338w_{i-1,j+1}^{k-1}+$$

$$+66w_{i,j-2}^{k-1}+1716w_{i,j-1}^{k-1}+3960w_{i,j}^{k-1}+858w_{i,j+1}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{k-1}+676w_{i+1,j-1}^{k-1}+1560w_{i+1,j}^{k-1}+338w_{i+1,j+1}^{k-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{k-1}+26w_{i+2,j-1}^{k-1}+60w_{i+2,j}^{k-1}+13w_{i+2,j+1}^{k-1}).$$

Для $i=m+3,...,2m,\ j=m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{k-1}+53w_{i-2,j-1}^{k-1}-19w_{i-2,j}^{k-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{k-1}-272w_{i-1,j-1}^{k-1}-74w_{i-1,j}^{k-1}+$$

$$+96w_{i,j-2}^{k-1}-282w_{i,j-1}^{k-1}+546w_{i,j}^{k-1}+$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{k-1}-272w_{i+1,j-1}^{k-1}-74w_{i+1,j}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{k-1}+53w_{i+2,j-1}^{k-1}-19w_{i+2,j}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{k-1}+13w_{i-2,j-1}^{k-1}+6w_{i-2,j}^{k-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{k-1}+338w_{i-1,j-1}^{k-1}+156w_{i-1,j}^{k-1}+$$

$$+66w_{i,j-2}^{k-1}+858w_{i,j-1}^{k-1}+396w_{i,j}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{k-1}+338w_{i+1,j-1}^{k-1}+156w_{i+1,j}^{k-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{k-1}+13w_{i+2,j-1}^{k-1}+6w_{i+2,j}^{k-1}).$$

Для $i=m+3,...,2m,\ j=2m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(-19w_{i-2,j}^{k-1}+53w_{i-2,j+1}^{k-1}+26w_{i-2,j+2}^{k-1}-$$

$$-74w_{i-1,j}^{k-1}-272w_{i-1,j+1}^{k-1}+106w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+546w_{i,j}^{k-1}-282w_{i,j+1}^{k-1}+96w_{i,j+2}^{k-1}-$$

$$-74w_{i+1,j}^{k-1}-272w_{i+1,j+1}^{k-1}+106w_{i+1,j+2}^{k-1}-$$

$$-19w_{i+2,j}^{k-1}+53w_{i+2,j+1}^{k-1}+26w_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(6w_{i-2,j}^{k-1}+13w_{i-2,j+1}^{k-1}+w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+156w_{i-1,j}^{k-1}+338w_{i-1,j+1}^{k-1}+26w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+396w_{i,j}^{k-1}+858w_{i,j+1}^{k-1}+66w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+156w_{i+1,j}^{k-1}+338w_{i+1,j+1}^{k-1}+26w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+6w_{i+2,j}^{k-1}+13w_{i+2,j+1}^{k-1}+w_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=m+3,...,2m,\ j=2m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(53w_{i-2,j-1}^{k-1}+115w_{i-2,j}^{k-1}+106w_{i-2,j+1}^{k-1}+26w_{i-2,j+2}^{k-1}-$$

$$-272w_{i-1,j-1}^{k-1}-490w_{i-1,j}^{k-1}-544w_{i-1,j+1}^{k-1}+106w_{i-1,j+2}^{k-1}-$$

$$-282w_{i,j-1}^{k-1}+2550w_{i,j}^{k-1}-564w_{i,j+1}^{k-1}+96w_{i,j+2}^{k-1}-$$

$$-272w_{i+1,j-1}^{k-1}-490w_{i+1,j}^{k-1}-544w_{i+1,j+1}^{k-1}+106w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+53w_{i+2,j-1}^{k-1}+115w_{i+2,j}^{k-1}+106w_{i+2,j+1}^{k-1}+26w_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(13w_{i-2,j-1}^{k-1}+60w_{i-2,j}^{k-1}+26w_{i-2,j+1}^{k-1}+w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+338w_{i-1,j-1}^{k-1}+1560w_{i-1,j}^{k-1}+676w_{i-1,j+1}^{k-1}+26w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+858w_{i,j-1}^{k-1}+3960w_{i,j}^{k-1}+1716w_{i,j+1}^{k-1}+66w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+338w_{i+1,j-1}^{k-1}+1560w_{i+1,j}^{k-1}+676w_{i+1,j+1}^{k-1}+26w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+13w_{i+2,j-1}^{k-1}+60w_{i+2,j}^{k-1}+26w_{i+2,j+1}^{k-1}+w_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{k-1}+106w_{i-2,j-1}^{k-1}+115w_{i-2,j}^{k-1}+53w_{i-2,j+1}^{k-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{k-1}-544w_{i-1,j-1}^{k-1}-490w_{i-1,j}^{k-1}-272w_{i-1,j+1}^{k-1}+$$

$$+96w_{i,j-2}^{k-1}-564w_{i,j-1}^{k-1}+2666w_{i,j}^{k-1}-319w_{i,j+1}^{k-1}-19w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{k-1}-544w_{i+1,j-1}^{k-1}-527w_{i+1,j}^{k-1}-408w_{i+1,j+1}^{k-1}+53w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{k-1}+106w_{i+2,j-1}^{k-1}+96w_{i+2,j}^{k-1}+106w_{i+2,j+1}^{k-1}+26w_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{k-1}+26w_{i-2,j-1}^{k-1}+60w_{i-2,j}^{k-1}+13w_{i-2,j+1}^{k-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{k-1}+676w_{i-1,j-1}^{k-1}+1560w_{i-1,j}^{k-1}+338w_{i-1,j+1}^{k-1}+$$

$$+66w_{i,j-2}^{k-1}+1716w_{i,j-1}^{k-1}+3996w_{i,j}^{k-1}+936w_{i,j+1}^{k-1}+6w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{k-1}+676w_{i+1,j-1}^{k-1}+1638w_{i+1,j}^{k-1}+507w_{i+1,j+1}^{k-1}+13w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{k-1}+26w_{i+2,j-1}^{k-1}+66w_{i+2,j}^{k-1}+26w_{i+2,j+1}^{k-1}+w_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{k-1}+53w_{i-2,j-1}^{k-1}-19w_{i-2,j}^{k-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{k-1}-272w_{i-1,j-1}^{k-1}-74w_{i-1,j}^{k-1}+$$

$$+96w_{i,j-2}^{k-1}-319w_{i,j-1}^{k-1}+976w_{i,j}^{k-1}-74w_{i,j+1}^{k-1}-19w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{k-1}-408w_{i+1,j-1}^{k-1}-319w_{i+1,j}^{k-1}-272w_{i+1,j+1}^{k-1}+53w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{k-1}+106w_{i+2,j-1}^{k-1}+96w_{i+2,j}^{k-1}+106w_{i+2,j+1}^{k-1}+26w_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{k-1}+13w_{i-2,j-1}^{k-1}+6w_{i-2,j}^{k-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{k-1}+338w_{i-1,j-1}^{k-1}+156w_{i-1,j}^{k-1}+$$

$$+66w_{i,j-2}^{k-1}+936w_{i,j-1}^{k-1}+756w_{i,j}^{k-1}+156w_{i,j+1}^{k-1}+6w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{k-1}+507w_{i+1,j-1}^{k-1}+936w_{i+1,j}^{k-1}+338w_{i+1,j+1}^{k-1}+13w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{k-1}+26w_{i+2,j-1}^{k-1}+66w_{i+2,j}^{k-1}+26w_{i+2,j+1}^{k-1}+w_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=m+3,...,2m$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(-19w_{i,j-2}^{k-1}-74w_{i,j-1}^{k-1}+546w_{i,j}^{k-1}-74w_{i,j+1}^{k-1}-19w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+53w_{i+1,j-2}^{k-1}-272w_{i+1,j-1}^{k-1}-282w_{i+1,j}^{k-1}-272w_{i+1,j+1}^{k-1}+53w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{k-1}+106w_{i+2,j-1}^{k-1}+96w_{i+2,j}^{k-1}+106w_{i+2,j+1}^{k-1}+26w_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(6w_{i,j-2}^{k-1}+156w_{i,j-1}^{k-1}+396w_{i,j}^{k-1}+156w_{i,j+1}^{k-1}+6u_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+13w_{i+1,j-2}^{k-1}+338w_{i+1,j-1}^{k-1}+858w_{i+1,j}^{k-1}+338w_{i+1,j+1}^{k-1}+13w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{k-1}+26w_{i+2,j-1}^{k-1}+66w_{i+2,j}^{k-1}+26w_{i+2,j+1}^{k-1}+w_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=2m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(-19w_{i-2,j}^{k-1}+53w_{i-2,j+1}^{k-1}+26w_{i-2,j+2}^{k-1}-$$

$$-74w_{i-1,j}^{k-1}-272w_{i-1,j+1}^{k-1}+106w_{i-1,j+2}^{k-1}-$$

$$-19w_{i,j-2}^{k-1}-74w_{i,j-1}^{k-1}+976w_{i,j}^{k-1}-319w_{i,j+1}^{k-1}+96w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+53w_{i+1,j-2}^{k-1}-272w_{i+1,j-1}^{k-1}-319w_{i+1,j}^{k-1}-408w_{i+1,j+1}^{k-1}+106w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{k-1}+106w_{i+2,j-1}^{k-1}+96w_{i+2,j}^{k-1}+106w_{i+2,j+1}^{k-1}+26w_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(6w_{i-2,j}^{k-1}+13w_{i-2,j+1}^{k-1}+w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+156w_{i-1,j}^{k-1}+338w_{i-1,j+1}^{k-1}+26w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+6w_{i,j-2}^{k-1}+156w_{i,j-1}^{k-1}+756w_{i,j}^{k-1}+936w_{i,j+1}^{k-1}+66w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+13w_{i+1,j-2}^{k-1}+338w_{i+1,j-1}^{k-1}+936w_{i+1,j}^{k-1}+507w_{i+1,j+1}^{k-1}+26w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{k-1}+26w_{i+2,j-1}^{k-1}+66w_{i+2,j}^{k-1}+26w_{i+2,j+1}^{k-1}+w_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=2m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(53w_{i-2,j-1}^{k-1}+115w_{i-2,j}^{k-1}+106w_{i-2,j+1}^{k-1}+26w_{i-2,j+2}^{k-1}-$$

$$-272w_{i-1,j-1}^{k-1}-490w_{i-1,j}^{k-1}-544w_{i-1,j+1}^{k-1}+106w_{i-1,j+2}^{k-1}-$$

$$-19w_{i,j-2}^{k-1}-319w_{i,j-1}^{k-1}+2666w_{i,j}^{k-1}-564w_{i,j+1}^{k-1}+96w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+53w_{i+1,j-2}^{k-1}-408w_{i+1,j-1}^{k-1}-527w_{i+1,j}^{k-1}-544w_{i+1,j+1}^{k-1}+106w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{k-1}+106w_{i+2,j-1}^{k-1}+96w_{i+2,j}^{k-1}+106w_{i+2,j+1}^{k-1}+26w_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(13w_{i-2,j-1}^{k-1}+60w_{i-2,j}^{k-1}+26w_{i-2,j+1}^{k-1}+w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+338w_{i-1,j-1}^{k-1}+1560w_{i-1,j}^{k-1}+676w_{i-1,j+1}^{k-1}+26w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+6w_{i,j-2}^{k-1}+936w_{i,j-1}^{k-1}+3996w_{i,j}^{k-1}+1716w_{i,j+1}^{k-1}+66w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+13w_{i+1,j-2}^{k-1}+507w_{i+1,j-1}^{k-1}+1638w_{i+1,j}^{k-1}+676w_{i+1,j+1}^{k-1}+26w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{k-1}+26w_{i+2,j-1}^{k-1}+66w_{i+2,j}^{k-1}+26w_{i+2,j+1}^{k-1}+w_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{k-1}+106w_{i-2,j-1}^{k-1}+115w_{i-2,j}^{k-1}+53w_{i-2,j+1}^{k-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{k-1}-544w_{i-1,j-1}^{k-1}-527w_{i-1,j}^{k-1}-408w_{i-1,j+1}^{k-1}+53w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+96w_{i,j-2}^{k-1}-564w_{i,j-1}^{k-1}+2980w_{i,j}^{k-1}-527w_{i,j+1}^{k-1}+115w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{k-1}-544w_{i+1,j-1}^{k-1}-564w_{i+1,j}^{k-1}-544w_{i+1,j+1}^{k-1}+106w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{k-1}+106w_{i+2,j-1}^{k-1}+96w_{i+2,j}^{k-1}+106w_{i+2,j+1}^{k-1}+26w_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{k-1}+26w_{i-2,j-1}^{k-1}+60w_{i-2,j}^{k-1}+13w_{i-2,j+1}^{k-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{k-1}+676w_{i-1,j-1}^{k-1}+1638w_{i-1,j}^{k-1}+507w_{i-1,j+1}^{k-1}+13w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+66w_{i,j-2}^{k-1}+1716w_{i,j-1}^{k-1}+4320w_{i,j}^{k-1}+1638w_{i,j+1}^{k-1}+60w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{k-1}+676w_{i+1,j-1}^{k-1}+1716w_{i+1,j}^{k-1}+676w_{i+1,j+1}^{k-1}+26w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{k-1}+26w_{i+2,j-1}^{k-1}+66w_{i+2,j}^{k-1}+26w_{i+2,j+1}^{k-1}+w_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{k-1}+53w_{i-2,j-1}^{k-1}-19w_{i-2,j}^{k-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{k-1}-408w_{i-1,j-1}^{k-1}-319w_{i-1,j}^{k-1}-272w_{i-1,j+1}^{k-1}+53w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+96w_{i,j-2}^{k-1}-527w_{i,j-1}^{k-1}+2666w_{i,j}^{k-1}-490w_{i,j+1}^{k-1}+115w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{k-1}-544w_{i+1,j-1}^{k-1}-564w_{i+1,j}^{k-1}-544w_{i+1,j+1}^{k-1}+106w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{k-1}+106w_{i+2,j-1}^{k-1}+96w_{i+2,j}^{k-1}+106w_{i+2,j+1}^{k-1}+26w_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{k-1}+13w_{i-2,j-1}^{k-1}+6w_{i-2,j}^{k-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{k-1}+507w_{i-1,j-1}^{k-1}+936w_{i-1,j}^{k-1}+338w_{i-1,j+1}^{k-1}+13w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+66w_{i,j-2}^{k-1}+1638w_{i,j-1}^{k-1}+3996w_{i,j}^{k-1}+1560w_{i,j+1}^{k-1}+60w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{k-1}+676w_{i+1,j-1}^{k-1}+1716w_{i+1,j}^{k-1}+676w_{i+1,j+1}^{k-1}+26w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{k-1}+26w_{i+2,j-1}^{k-1}+66w_{i+2,j}^{k-1}+26w_{i+2,j+1}^{k-1}+w_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=m+3,...,2m$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(53w_{i-1,j-2}^{k-1}-272w_{i-1,j-1}^{k-1}-282w_{i-1,j}^{k-1}-272w_{i-1,j+1}^{k-1}+53w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+115w_{i,j-2}^{k-1}-490w_{i,j-1}^{k-1}+2550w_{i,j}^{k-1}-490w_{i,j+1}^{k-1}+115w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{k-1}-544w_{i+1,j-1}^{k-1}-564w_{i+1,j}^{k-1}-544w_{i+1,j+1}^{k-1}+106w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{k-1}+106w_{i+2,j-1}^{k-1}+96w_{i+2,j}^{k-1}+106w_{i+2,j+1}^{k-1}+26w_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(13w_{i-1,j-2}^{k-1}+338w_{i-1,j-1}^{k-1}+858w_{i-1,j}^{k-1}+338w_{i-1,j+1}^{k-1}+13w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+60w_{i,j-2}^{k-1}+1560w_{i,j-1}^{k-1}+3960w_{i,j}^{k-1}+1560w_{i,j+1}^{k-1}+60w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{k-1}+676w_{i+1,j-1}^{k-1}+1716w_{i+1,j}^{k-1}+676w_{i+1,j+1}^{k-1}+26w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{k-1}+26w_{i+2,j-1}^{k-1}+66w_{i+2,j}^{k-1}+26w_{i+2,j+1}^{k-1}+w_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=2m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1}=$$

$$=H(-19w_{i-2,j}^{k-1}+53w_{i-2,j+1}^{k-1}+26w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+53w_{i-1,j-2}^{k-1}-272w_{i-1,j-1}^{k-1}-319w_{i-1,j}^{k-1}-408w_{i-1,j+1}^{k-1}+106w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+115w_{i,j-2}^{k-1}-490w_{i,j-1}^{k-1}+2666w_{i,j}^{k-1}-527w_{i,j+1}^{k-1}+96w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{k-1}-544w_{i+1,j-1}^{k-1}-564w_{i+1,j}^{k-1}-544w_{i+1,j+1}^{k-1}+106w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{k-1}+106w_{i+2,j-1}^{k-1}+96w_{i+2,j}^{k-1}+106w_{i+2,j+1}^{k-1}+26w_{i+2,j+2}^{k-1})+$$

$$+$$

$$+A(6w_{i-2,j}^{k-1}+13w_{i-2,j+1}^{k-1}+w_{i-2,j+2}^{k-1}+$$

$$+13w_{i-1,j-2}^{k-1}+338w_{i-1,j-1}^{k-1}+936w_{i-1,j}^{k-1}+507w_{i-1,j+1}^{k-1}+26w_{i-1,j+2}^{k-1}+$$

$$+60w_{i,j-2}^{k-1}+1560w_{i,j-1}^{k-1}+3996w_{i,j}^{k-1}+1638w_{i,j+1}^{k-1}+66w_{i,j+2}^{k-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{k-1}+676w_{i+1,j-1}^{k-1}+1716w_{i+1,j}^{k-1}+676w_{i+1,j+1}^{k-1}+26w_{i+1,j+2}^{k-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{k-1}+26w_{i+2,j-1}^{k-1}+66w_{i+2,j}^{k-1}+26w_{i+2,j+1}^{k-1}+w_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

Для $i = 2m+2,\ j = 2m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{k-1} =$$

$$= H(53w_{i-2,j-1}^{k-1} + 115w_{i-2,j}^{k-1} + 106w_{i-2,j+1}^{k-1} + 26w_{i-2,j+2}^{k-1} +$$

$$+53w_{i-1,j-2}^{k-1} - 408w_{i-1,j-1}^{k-1} - 527w_{i-1,j}^{k-1} - 544w_{i-1,j+1}^{k-1} + 106w_{i-1,j+2}^{k-1} +$$

$$+115w_{i,j-2}^{k-1} - 527w_{i,j-1}^{k-1} + 2980w_{i,j}^{k-1} - 564w_{i,j+1}^{k-1} + 96w_{i,j+2}^{k-1} +$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{k-1} - 544w_{i+1,j-1}^{k-1} - 564w_{i+1,j}^{k-1} - 544w_{i+1,j+1}^{k-1} + 106w_{i+1,j+2}^{k-1} +$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{k-1} + 106w_{i+2,j-1}^{k-1} + 96w_{i+2,j}^{k-1} + 106w_{i+2,j+1}^{k-1} + 26w_{i+2,j+2}^{k-1}) +$$

$$+$$

$$+A(13w_{i-2,j-1}^{k-1} + 60w_{i-2,j}^{k-1} + 26w_{i-2,j+1}^{k-1} + w_{i-2,j+2}^{k-1} +$$

$$+13w_{i-1,j-2}^{k-1} + 507w_{i-1,j-1}^{k-1} + 1638w_{i-1,j}^{k-1} + 676w_{i-1,j+1}^{k-1} + 26w_{i-1,j+2}^{k-1} +$$

$$+60w_{i,j-2}^{k-1} + 1638w_{i,j-1}^{k-1} + 4320w_{i,j}^{k-1} + 1716w_{i,j+1}^{k-1} + 66w_{i,j+2}^{k-1} +$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{k-1} + 676w_{i+1,j-1}^{k-1} + 1716w_{i+1,j}^{k-1} + 676w_{i+1,j+1}^{k-1} + 26w_{i+1,j+2}^{k-1} +$$

$$+w_{i+2,j-2}^{k-1} + 26w_{i+2,j-1}^{k-1} + 66w_{i+2,j}^{k-1} + 26w_{i+2,j+1}^{k-1} + w_{i+2,j+2}^{k-1}).$$

VII. Вычисляем итерационный параметр.

При программировании полагаем

$$\tau_{k-1} = \left(\sum_{j=m+1}^{2m+2} (r_{m+1,j}^{k-1}\eta_{m+1,j}^{k-1}h^2 + r_{m+2,j}^{k-1}\eta_{m+2,j}^{k-1}h^2 + r_{2m+1,j}^{k-1}\eta_{2m+1,j}^{k-1}h^2 + r_{2m+2,j}^{k-1}\eta_{2m+2,j}^{k-1}h^2) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=m+3}^{2m} (r_{i,m+1}^{k-1}\eta_{i,m+1}^{k-1}h^2 + r_{i,m+2}^{k-1}\eta_{i,m+2}^{k-1}h^2 + r_{i,2m+1}^{k-1}\eta_{i,2m+1}^{k-1}h^2 + r_{i,2m+2}^{k-1}\eta_{i,2m+2}^{k-1}h^2) \right) \Big/$$

$$\Big/ \left(\sum_{j=m+1}^{2m+2} ((\eta_{m+1,j}^{k-1}h)^2 + (\eta_{m+2,j}^{k-1}h)^2 + (\eta_{2m+1,j}^{k-1}h)^2 + (\eta_{2m+2,j}^{k-1}h)^2) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=m+3}^{2m} ((\eta_{i,m+1}^{k-1}h)^2 + (\eta_{i,m+2}^{k-1}h)^2 + (\eta_{i,2m+1}^{k-1}h)^2 + (\eta_{i,2m+2}^{k-1}h)^2) \right),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VIII. Вычисляем очередное приближение. Это массив

$$u_{i,j}^{k},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Значения элементов этого массивов в последующих вычислениях постоянно пересчитываются, их не обязательно сохранять.

При программировании для $2\le i\le n-1,\ 2\le j\le n-1,$ полагаем

$$u_{i,j}^{k}=u_{i,j}^{k-1}-\tau_{k-1}w_{i,j}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Затем для $2\le i\le n-1$ полагаем

$$u_{i,1}^{k}=u_{i,2}^{k}.$$

Для $2\le j\le n-1$ полагаем

$$u_{1,j}^{k}=u_{2,j}^{k}.$$

Полагаем

$$u_{1,1}^{k}=u_{2,2}^{k}.$$

Для $1\le i\le n-1$ полагаем

$$u_{i,n}^{k}=0.$$

Для $1\le j\le n-1$ полагаем

$$u_{n,j}^{k}=0.$$

Полагаем

$$u_{n,n}^{k}=0.$$

IX. Проверяем условие остановки итераций по заранее задаваемой оценке относительной ошибки в более сильной норме, чем энергетическая норма в решаемой задаче

$$\mathrm{E}_{k-1}\le\mathrm{E}^{2}\mathrm{E}_{0},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\ \mathrm{E}=0{,}001\in(0;1).$$

Если условие остановки итераций не достигается, то все повторяем с пункта III.

Необходимо завести массив значений приближенных решений в узлах сетки

$$\tilde{u}_{i,j}^{k},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n.$$

При программировании для $i = 2,...,n-1,\ j = 2,...,n-1$ сначала полагаем

$$\tilde{u}_{i,j}^{k} =$$

$$= (1/64)(u_{i-1,j-1}^{k-1} + 6u_{i-1,j}^{k-1} + u_{i-1,j+1}^{k-1} +$$

$$+6u_{i,j-1}^{k-1} + 36u_{i,j}^{k-1} + 6u_{i,j+1}^{k-1} +$$

$$+u_{i+1,j-1}^{k-1} + 6u_{i+1,j}^{k-1} + u_{i+1,j+1}^{k-1})$$

Затем для $2 \le i \le n-1$ полагаем

$$\tilde{u}_{i,1}^{k} = \tilde{u}_{i,2}^{k}.$$

Для $2 \le j \le n-1$ полагаем

$$\tilde{u}_{1,j}^{k} = \tilde{u}_{2,j}^{k}.$$

Полагаем

$$\tilde{u}_{1,1}^{k} = \tilde{u}_{2,2}^{k}.$$

Для $1 \le i \le n-1$ полагаем

$$\tilde{u}_{i,n}^{k} = 0.$$

Для $1 \le j \le n-1$ полагаем

$$\tilde{u}_{n,j}^{k} = 0.$$

Полагаем

$$\tilde{u}_{n,n}^{k} = 0.$$

Приложение 2. Описание алгоритмической реализации метода итерационных факторизаций при решении задачи расширенной бигармонической системы на квадрате

Приведем описание алгоритмической реализации метода итерационной факторизации при решении задачи продолженной бигармонической системы на квадрате при значении параметра $\gamma = 1$, возникающих в приложении 8 в пунктах II. и V. Полагаем, что у нас имеется так называемой массив правой части

$$g_{i,j},\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2...,n$$

с заданными в нем элементами

$$g_{i,j},\ i = 1,,...,n,\ j = 1,...,n.$$

В пункте II. массив $g_{i,j}$ это массив $f_{i,j}$, а в пункте V. массив $g_{i,j}$ это массив

$$r_{i,j}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

По массиву правой части будем находить так называемые массивы приближений к массивам решений. Это массивы

$$v_{i,j}^{l},\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2...,n,\ l \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

В пункте II. массивы $v_{i,j}^{l}$ это массивы приближений к массивам решений $u_{i,j}^{k},\ k = 1,$ а в пункте V массив $v_{i,j}^{l}$ это массивы приближений к массивам решений

$$w_{i,j}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

I. Выбираем нулевое начальное приближение.

При программировании для $1 \le i \le n, 1 \le j \le n,$ полагаем

$$v_{i,j}^{l-1} = 0,\ l = 1.$$

II. Вводим массив невязки

$$r_{i,j}^{l-1},\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2...,n.$$

Вычисляем, только те элементы массива невязки, которые будем использовать.

При программировании для $1 \le i \le n, 1 \le j \le n,$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1} = -g_{i,j},\ i = 1,...,n,\ j = 1,...,n,\ l = 1.$$

III. Вычисляем очередной массив невязки. Вычисляем, только те элементы массива невязки, которые будем использовать $\left(l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right).$

При программировании для $2 \le i \le n-1$ полагаем

$$v_{i,1}^{l-1} = v_{i,2}^{l-1}.$$

Для $1 \le j \le n-1$ полагаем

$$v_{1,j}^{l-1} = v_{2,j}^{l-1}.$$

Для $1 \le i \le n-1$ полагаем

$$v_{i,n}^{l-1} = 0.$$

Для $1 \le j \le n$ полагаем

$$v_{n,j}^{l-1} = 0.$$

Для $i = 2,\ j = 2$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1} =$$

$$= H(1424 v_{i,j}^{l-1} - 906 v_{i,j+1}^{l-1} + 202 v_{i,j+2}^{l-1} -$$

$$-906 v_{i+1,j}^{l-1} - 306 v_{i+1,j+1}^{l-1} + 132 v_{i+1,j+2}^{l-1} +$$

$$+202 v_{i+2,j}^{l-1} + 132 v_{i+2,j+1}^{l-1} + 26 v_{i+2,j+2}^{l-1}) +$$

$$+$$

$$+A(8464 v_{i,j}^{l-1} + 2484 v_{i,j+1}^{l-1} + 92 v_{i,j+2}^{l-1} +$$

$$+2484 v_{i+1,j}^{l-1} + 729 v_{i+1,j+1}^{l-1} + 27 v_{i+1,j+2}^{l-1} +$$

$$+92 v_{i+2,j}^{l-1} + 27 v_{i+2,j+1}^{l-1} + v_{i+2,j+2}^{l-1}) -$$

$$-g_{i,j}.$$

Для $i = 2,\ j = 3$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1} =$$

$$= H(-906v_{i,j-1}^{l-1} + 2532v_{i,j}^{l-1} - 1108v_{i,j+1}^{l-1} + 202v_{i,j+2}^{l-1} -$$

$$-306v_{i+1,j-1}^{l-1} - 468v_{i+1,j}^{l-1} - 438v_{i+1,j+1}^{l-1} + 132v_{i+1,j+2}^{l-1} +$$

$$+132v_{i+2,j-1}^{l-1} + 96v_{i+2,j}^{l-1} + 106v_{i+2,j+1}^{l-1} + 26v_{i+2,j+2}^{l-1}) +$$

$$+$$

$$+A(2484v_{i,j-1}^{l-1} + 6072v_{i,j}^{l-1} + 2392v_{i,j+1}^{l-1} + 92v_{i,j+2}^{l-1} +$$

$$+729v_{i+1,j-1}^{l-1} + 1782v_{i+1,j}^{l-1} + 702v_{i+1,j+1}^{l-1} + 27v_{i+1,j+2}^{l-1} +$$

$$+27v_{i+2,j-1}^{l-1} + 66v_{i+2,j}^{l-1} + 26v_{i+2,j+1}^{l-1} + v_{i+2,j+2}^{l-1}) -$$

$$-g_{i,j}.$$

Для $i = 2,\ j = 4,...,n-3$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1} =$$

$$= H(202v_{i,j-2}^{l-1} - 1108v_{i,j-1}^{l-1} + 2532v_{i,j}^{l-1} - 1108v_{i,j+1}^{l-1} + 202v_{i,j+2}^{l-1} +$$

$$+132v_{i+1,j-2}^{l-1} - 438v_{i+1,j-1}^{l-1} - 468v_{i+1,j}^{l-1} - 438v_{i+1,j+1}^{l-1} + 132v_{i+1,j+2}^{l-1} +$$

$$+26v_{i+2,j-2}^{l-1} + 106v_{i+2,j-1}^{l-1} + 96v_{i+2,j}^{l-1} + 106v_{i+2,j+1}^{l-1} + 26v_{i+2,j+2}^{l-1}) +$$

$$+$$

$$+A(92v_{i,j-2}^{l-1} + 2392v_{i,j-1}^{l-1} + 6072v_{i,j}^{l-1} + 2392v_{i,j+1}^{l-1} + 92v_{i,j+2}^{l-1} +$$

$$+27v_{i+1,j-2}^{l-1} + 702v_{i+1,j-1}^{l-1} + 1782v_{i+1,j}^{l-1} + 702v_{i+1,j+1}^{l-1} + 27v_{i+1,j+2}^{l-1} +$$

$$+v_{i+2,j-2}^{l-1} + 26v_{i+2,j-1}^{l-1} + 66v_{i+2,j}^{l-1} + 26v_{i+2,j+1}^{l-1} + v_{i+2,j+2}^{l-1}) -$$

$$-g_{i,j}.$$

Для $i = 2,\ j = n-2$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1} =$$

$$= H(202v_{i,j-2}^{l-1} - 1108v_{i,j-1}^{l-1} + 2532v_{i,j}^{l-1} - 1108v_{i,j+1}^{l-1} +$$

$$+132v_{i+1,j-2}^{l-1} - 438v_{i+1,j-1}^{l-1} - 468v_{i+1,j}^{l-1} - 438v_{i+1,j+1}^{l-1} +$$

$$+26v_{i+2,j-2}^{l-1} + 106v_{i+2,j-1}^{l-1} + 96v_{i+2,j}^{l-1} + 106v_{i+2,j+1}^{l-1}) +$$

$$+$$

$$+A(92v_{i,j-2}^{l-1}+2392v_{i,j-1}^{l-1}+6072v_{i,j}^{l-1}+2392v_{i,j+1}^{l-1}+$$

$$+27v_{i+1,j-2}^{l-1}+702v_{i+1,j-1}^{l-1}+1782v_{i+1,j}^{l-1}+702v_{i+1,j+1}^{l-1}+$$

$$+v_{i+2,j-2}^{l-1}+26v_{i+2,j-1}^{l-1}+66v_{i+2,j}^{l-1}+26v_{i+2,j+1}^{l-1})-$$

$$-g_{i,j}.$$

Для $i=2,\ j=n-1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(202v_{i,j-2}^{l-1}-1108v_{i,j-1}^{l-1}+2330v_{i,j}^{l-1}+$$

$$+132v_{i+1,j-2}^{l-1}-438v_{i+1,j-1}^{l-1}-600v_{i+1,j}^{l-1}+$$

$$+26v_{i+2,j-2}^{l-1}+106v_{i+2,j-1}^{l-1}+70v_{i+2,j}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(92v_{i,j-2}^{l-1}+2392v_{i,j-1}^{l-1}+5980v_{i,j}^{l-1}+$$

$$+27v_{i+1,j-2}^{l-1}+702v_{i+1,j-1}^{l-1}+1755v_{i+1,j}^{l-1}+$$

$$+v_{i+2,j-2}^{l-1}+26v_{i+2,j-1}^{l-1}+65v_{i+2,j}^{l-1})-$$

$$-g_{i,j}.$$

Для $i=3,\ j=2$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(-906v_{i-1,j}^{l-1}-306v_{i-1,j+1}^{l-1}+132v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+2532v_{i,j}^{l-1}-468v_{i,j+1}^{l-1}+96v_{i,j+2}^{l-1}-$$

$$-1108v_{i+1,j}^{l-1}-438v_{i+1,j+1}^{l-1}+106v_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+202v_{i+2,j}^{l-1}+132v_{i+2,j+1}^{l-1}+26v_{i+2,j+2}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(2484v_{i-1,j}^{l-1}+729v_{i-1,j+1}^{l-1}+27v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+6072v_{i,j}^{l-1}+1782v_{i,j+1}^{l-1}+66v_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+2392v_{i+1,j}^{l-1}+702v_{i+1,j+1}^{l-1}+26v_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+92v_{i+2,j}^{l-1}+27v_{i+2,j+1}^{l-1}+v_{i+2,j+2}^{l-1})-$$

$$-g_{i,j}.$$

Для $i=3,\ j=n-1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(132v_{i-1,j-2}^{l-1}-438v_{i-1,j-1}^{l-1}-600v_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+96v_{i,j-2}^{l-1}-564v_{i,j-1}^{l-1}+3000v_{i,j}^{l-1}+$$

$$+106v_{i+1,j-2}^{l-1}-544v_{i+1,j-1}^{l-1}-670v_{i+1,j}^{l-1}+$$

$$+26v_{i+2,j-2}^{l-1}+106v_{i+2,j-1}^{l-1}+70v_{i+2,j}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(27v_{i-1,j-2}^{l-1}+702v_{i-1,j-1}^{l-1}+1755v_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+66v_{i,j-2}^{l-1}+1716v_{i,j-1}^{l-1}+4290v_{i,j}^{l-1}+$$

$$+26v_{i+1,j-2}^{l-1}+676v_{i+1,j-1}^{l-1}+1690v_{i+1,j}^{l-1}+$$

$$+v_{i+2,j-2}^{l-1}+26v_{i+2,j-1}^{l-1}+65v_{i+2,j}^{l-1})-$$

$$-g_{i,j}.$$

Для $i=4,...,n-3,\ j=2$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(202v_{i-2,j}^{l-1}+132v_{i-2,j+1}^{l-1}+26v_{i-2,j+2}^{l-1}-$$

$$-1108v_{i-1,j}^{l-1}-438v_{i-1,j+1}^{l-1}+106v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+2532v_{i,j}^{l-1}-468v_{i,j+1}^{l-1}+96v_{i,j+2}^{l-1}-$$

$$-1108v_{i+1,j}^{l-1}-438v_{i+1,j+1}^{l-1}+106v_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+202v_{i+2,j}^{l-1}+132v_{i+2,j+1}^{l-1}+26v_{i+2,j+2}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(92v_{i-2,j}^{l-1}+27v_{i-2,j+1}^{l-1}+v_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+2392v_{i-1,j}^{l-1}+702v_{i-1,j+1}^{l-1}+26v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+6072v_{i,j}^{l-1}+1782v_{i,j+1}^{l-1}+66v_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+2392v_{i+1,j}^{l-1}+702v_{i+1,j+1}^{l-1}+26v_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+92v_{i+2,j}^{l-1}+27v_{i+2,j+1}^{l-1}+v_{i+2,j+2}^{l-1})-$$

$$-g_{i,j}.$$

Для $i=4,...n-3,\ j=n-1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(26v_{i-2,j-2}^{l-1}+106v_{i-2,j-1}^{l-1}+70v_{i-2,j}^{l-1}+$$

$$+106v_{i-1,j-2}^{l-1}-544v_{i-1,j-1}^{l-1}-670v_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+96v_{i,j-2}^{l-1}-564v_{i,j-1}^{l-1}+3000v_{i,j}^{l-1}+$$

$$+106v_{i+1,j-2}^{l-1}-544v_{i+1,j-1}^{l-1}-670v_{i+1,j}^{l-1}+$$

$$+26v_{i+2,j-2}^{l-1}+106v_{i+2,j-1}^{l-1}+70v_{i+2,j}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(v_{i-2,j-2}^{l-1}+26v_{i-2,j-1}^{l-1}+65v_{i-2,j}^{l-1}+$$

$$+26v_{i-1,j-2}^{l-1}+676v_{i-1,j-1}^{l-1}+1690v_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+66v_{i,j-2}^{l-1}+1716v_{i,j-1}^{l-1}+4290v_{i,j}^{l-1}+$$

$$+26v_{i+1,j-2}^{l-1}+676v_{i+1,j-1}^{l-1}+1690v_{i+1,j}^{l-1}+$$

$$+v_{i+2,j-2}^{l-1}+26v_{i+2,j-1}^{l-1}+65v_{i+2,j}^{l-1})-$$

$$-g_{i,j}.$$

Для $i=n-2,\ j=2$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(202v_{i-2,j}^{l-1}+132v_{i-2,j+1}^{l-1}+26v_{i-2,j+2}^{l-1}-$$

$$-1108v_{i-1,j}^{l-1}-438v_{i-1,j+1}^{l-1}+106v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+2532v_{i,j}^{l-1}-468v_{i,j+1}^{l-1}+96v_{i,j+2}^{l-1}-$$

$$-1108v_{i+1,j}^{l-1}-438v_{i+1,j+1}^{l-1}+106v_{i+1,j+2}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(92v_{i-2,j}^{l-1}+27v_{i-2,j+1}^{l-1}+v_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+2392v_{i-1,j}^{l-1}+702v_{i-1,j+1}^{l-1}+26v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+6072v_{i,j}^{l-1}+1782v_{i,j+1}^{l-1}+66v_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+2392v_{i+1,j}^{l-1}+702v_{i+1,j+1}^{l-1}+26v_{i+1,j+2}^{l-1})-$$

$$-g_{i,j}.$$

Для $i=n-2,\ j=n-1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(26v_{i-2,j-2}^{l-1}+106v_{i-2,j-1}^{l-1}+70v_{i-2,j}^{l-1}+$$

$$+106v_{i-1,j-2}^{l-1}-544v_{i-1,j-1}^{l-1}-670v_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+96v_{i,j-2}^{l-1}-564v_{i,j-1}^{l-1}+3000v_{i,j}^{l-1}+$$

$$+106v_{i+1,j-2}^{l-1}-544v_{i+1,j-1}^{l-1}-670v_{i+1,j}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(v_{i-2,j-2}^{l-1}+26v_{i-2,j-1}^{l-1}+65v_{i-2,j}^{l-1}+$$

$$+26v_{i-1,j-2}^{l-1}+676v_{i-1,j-1}^{l-1}+1690v_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+66v_{i,j-2}^{l-1}+1716v_{i,j-1}^{l-1}+4290v_{i,j}^{l-1}+$$

$$+26v_{i+1,j-2}^{l-1}+676v_{i+1,j-1}^{l-1}+1690v_{i+1,j}^{l-1})-$$

$$-g_{i,j}.$$

Для $i=n-1,\ j=2$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(202v_{i-2,j}^{l-1}+132v_{i-2,j+1}^{l-1}+26v_{i-2,j+2}^{l-1}-$$

$$-1108v_{i-1,j}^{l-1}-438v_{i-1,j+1}^{l-1}+106v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+2330v_{i,j}^{l-1}-600v_{i,j+1}^{l-1}+202v_{i,j+2}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(92v_{i-2,j}^{l-1}+27v_{i-2,j+1}^{l-1}+v_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+2392v_{i-1,j}^{l-1}+702v_{i-1,j+1}^{l-1}+26v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+5980v_{i,j}^{l-1}+1755v_{i,j+1}^{l-1}+65v_{i,j+2}^{l-1})-$$

$$-g_{i,j}.$$

Для $i=n-1,\ j=3$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(132v_{i-2,j-1}^{l-1}+96v_{i-2,j}^{l-1}+106v_{i-2,j+1}^{l-1}+26v_{i-2,j+2}^{l-1}-$$

$$-438v_{i-1,j-1}^{l-1}-564v_{i-1,j}^{l-1}-544v_{i-1,j+1}^{l-1}+106v_{i-1,j+2}^{l-1}-$$

$$-600v_{i,j-1}^{l-1}+3000v_{i,j}^{l-1}-670v_{i,j+1}^{l-1}+70v_{i,j+2}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(27v_{i-2,j-1}^{l-1}+66v_{i-2,j}^{l-1}+26v_{i-2,j+1}^{l-1}+v_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+702v_{i-1,j-1}^{l-1}+1716v_{i-1,j}^{l-1}+676v_{i-1,j+1}^{l-1}+26v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+1755v_{i,j-1}^{l-1}+4290v_{i,j}^{l-1}+1690v_{i,j+1}^{l-1}+25v_{i,j+2}^{l-1})-$$

$$-g_{i,j}.$$

Для $i=n-1,\ j=4,\dots,n-3$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(26v_{i-2,j-2}^{l-1}+106v_{i-2,j-1}^{l-1}+96v_{i-2,j}^{l-1}+106v_{i-2,j+1}^{l-1}+26v_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+106v_{i-1,j-2}^{l-1}-544v_{i-1,j-1}^{l-1}-564v_{i-1,j}^{l-1}-544v_{i-1,j+1}^{l-1}+106v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+70v_{i,j-2}^{l-1}-670v_{i,j-1}^{l-1}+3000v_{i,j}^{l-1}-670v_{i,j+1}^{l-1}+70v_{i,j+2}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(v_{i-2,j-2}^{l-1}+26v_{i-2,j-1}^{l-1}+66v_{i-2,j}^{l-1}+26v_{i-2,j+1}^{l-1}+v_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+26v_{i-1,j-2}^{l-1}+676v_{i-1,j-1}^{l-1}+1716v_{i-1,j}^{l-1}+676v_{i-1,j+1}^{l-1}+26v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+65v_{i,j-2}^{l-1}+1690v_{i,j-1}^{l-1}+4290v_{i,j}^{l-1}+1690v_{i,j+1}^{l-1}+65v_{i,j+2}^{l-1})-$$

$$-g_{i,j}.$$

Для $i=n-1,\ j=n-2$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(26v_{i-2,j-2}^{l-1}+106v_{i-2,j-1}^{l-1}+96v_{i-2,j}^{l-1}+106v_{i-2,j+1}^{l-1}+$$

$$+106v_{i-1,j-2}^{l-1}-544v_{i-1,j-1}^{l-1}-564v_{i-1,j}^{l-1}-544v_{i-1,j+1}^{l-1}+$$

$$+70v_{i,j-2}^{l-1}-670v_{i,j-1}^{l-1}+3000v_{i,j}^{l-1}-670v_{i,j+1}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(v_{i-2,j-2}^{l-1}+26v_{i-2,j-1}^{l-1}+66v_{i-2,j}^{l-1}+26v_{i-2,j+1}^{l-1}+$$

$$+26v_{i-1,j-2}^{l-1}+676v_{i-1,j-1}^{l-1}+1716v_{i-1,j}^{l-1}+676v_{i-1,j+1}^{l-1}+$$

$$+65v_{i,j-2}^{l-1}+1690v_{i,j-1}^{l-1}+4290v_{i,j}^{l-1}+1690v_{i,j+1}^{l-1})-$$

$$-g_{i,j}.$$

Для $i=n-1,\ j=n-1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(26v_{i-2,j-2}^{l-1}+106v_{i-2,j-1}^{l-1}+70v_{i-2,j}^{l-1}+$$

$$+106v_{i-1,j-2}^{l-1}-544v_{i-1,j-1}^{l-1}-670v_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+70v_{i,j-2}^{l-1}-670v_{i,j-1}^{l-1}+2930v_{i,j}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(v_{i-2,j-2}^{l-1}+26v_{i-2,j-1}^{l-1}+65v_{i-2,j}^{l-1}+$$

$$+26v_{i-1,j-2}^{l-1}+676v_{i-1,j-1}^{l-1}+1690v_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+65v_{i,j-2}^{l-1}+1690v_{i,j-1}^{l-1}+4225v_{i,j}^{l-1})-$$

$$-g_{i,j}.$$

Для $i=4,...,n-3,\ j=4,...,n-3$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(26v_{i-2,j-2}^{l-1}+106v_{i-2,j-1}^{l-1}+96v_{i-2,j}^{l-1}+106v_{i-2,j+1}^{l-1}+26v_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+106v_{i-1,j-2}^{l-1}-544v_{i-1,j-1}^{l-1}-564v_{i-1,j}^{l-1}-544v_{i-1,j+1}^{l-1}+106v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+96v_{i,j-2}^{l-1}-564v_{i,j-1}^{l-1}+3096v_{i,j}^{l-1}-564v_{i,j+1}^{l-1}+96v_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+106v_{i+1,j-2}^{l-1}-544v_{i+1,j-1}^{l-1}-564v_{i+1,j}^{l-1}-544v_{i+1,j+1}^{l-1}+106v_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+26v_{i+2,j-2}^{l-1}+106v_{i+2,j-1}^{l-1}+96v_{i+2,j}^{l-1}+106v_{i+2,j+1}^{l-1}+26v_{i+2,j+2}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(v_{i-2,j-2}^{l-1}+26v_{i-2,j-1}^{l-1}+66v_{i-2,j}^{l-1}+26v_{i-2,j+1}^{l-1}+v_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+26v_{i-1,j-2}^{l-1}+676v_{i-1,j-1}^{l-1}+1716v_{i-1,j}^{l-1}+676v_{i-1,j+1}^{l-1}+26v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+66v_{i,j-2}^{l-1}+1716v_{i,j-1}^{l-1}+4356v_{i,j}^{l-1}+1716v_{i,j+1}^{l-1}+66v_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+26v_{i+1,j-2}^{l-1}+676v_{i+1,j-1}^{l-1}+1716v_{i+1,j}^{l-1}+676v_{i+1,j+1}^{l-1}+26v_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+v_{i+2,j-2}^{l-1}+26v_{i+2,j-1}^{l-1}+66v_{i+2,j}^{l-1}+26v_{i+2,j+1}^{l-1}+v_{i+2,j+2}^{l-1})-$$

$$-g_{i,j}.$$

При программировании для $i=m+1,\ j=m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(36v_{i,j}^{l-1}+78v_{i,j+1}^{l-1}+6v_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+78v_{i+1,j}^{l-1}+169v_{i+1,j+1}^{l-1}+13v_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+6v_{i+2,j}^{l-1}+13v_{i+2,j+1}^{l-1}+v_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=m+1,\ j=m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(78v_{i,j-1}^{l-1}+360v_{i,j}^{l-1}+156v_{i,j+1}^{l-1}+6v_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+169v_{i+1,j-1}^{l-1}+780v_{i+1,j}^{l-1}+338v_{i+1,j+1}^{l-1}+13v_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+13v_{i+2,j-1}^{l-1}+60v_{i+2,j}^{l-1}+26v_{i+2,j+1}^{l-1}+v_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=m+1,\ j=m+3,...,2m$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(6v_{i,j-2}^{l-1}+156v_{i,j-1}^{l-1}+396v_{i,j}^{l-1}+156v_{i,j+1}^{l-1}+6v_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+13v_{i+1,j-2}^{l-1}+338v_{i+1,j-1}^{l-1}+858v_{i+1,j}^{l-1}+338v_{i+1,j+1}^{l-1}+13v_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+v_{i+2,j-2}^{l-1}+26v_{i+2,j-1}^{l-1}+66v_{i+2,j}^{l-1}+26v_{i+2,j+1}^{l-1}+v_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=m+1,\ j=2m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(6v_{i,j-2}^{l-1}+156v_{i,j-1}^{l-1}+360v_{i,j}^{l-1}+78v_{i,j+1}^{l-1}+$$

$$+13v_{i+1,j-2}^{l-1}+338v_{i+1,j-1}^{l-1}+780v_{i+1,j}^{l-1}+169v_{i+1,j+1}^{l-1}+$$

$$+v_{i+2,j-2}^{l-1}+26v_{i+2,j-1}^{l-1}+60v_{i+2,j}^{l-1}+13v_{i+2,j+1}^{l-1}).$$

Для $i=m+1,\ j=2m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(6v_{i,j-2}^{l-1}+78v_{i,j-1}^{l-1}+36v_{i,j}^{l-1}+$$

$$+13v_{i+1,j-2}^{l-1}+169v_{i+1,j-1}^{l-1}+78v_{i+1,j}^{l-1}+$$

$$+v_{i+2,j-2}^{l-1}+13v_{i+2,j-1}^{l-1}+6v_{i+2,j}^{l-1}).$$

Для $i=m+2,\ j=m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(78v_{i-1,j}^{l-1}+169v_{i-1,j+1}^{l-1}+13v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+360v_{i,j}^{l-1}+780v_{i,j+1}^{l-1}+60v_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+156v_{i+1,j}^{l-1}+338v_{i+1,j+1}^{l-1}+26v_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+6v_{i+2,j}^{l-1}+13v_{i+2,j+1}^{l-1}+v_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=m+2,\ j=m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(169v_{i-1,j-1}^{l-1}+780v_{i-1,j}^{l-1}+338v_{i-1,j+1}^{l-1}+13v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+780v_{i,j-1}^{l-1}+3600v_{i,j}^{l-1}+1560v_{i,j+1}^{l-1}+60v_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+338v_{i+1,j-1}^{l-1}+1560v_{i+1,j}^{l-1}+676v_{i+1,j+1}^{l-1}+26v_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+13v_{i+2,j-1}^{l-1}+60v_{i+2,j}^{l-1}+26v_{i+2,j+1}^{l-1}+v_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=m+2,\ j=m+3,...,2m$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(13v_{i-1,j-2}^{l-1}+338v_{i-1,j-1}^{l-1}+858v_{i-1,j}^{l-1}+338v_{i-1,j+1}^{l-1}+13v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+60v_{i,j-2}^{l-1}+1560v_{i,j-1}^{l-1}+3960v_{i,j}^{l-1}+1560v_{i,j+1}^{l-1}+60v_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+26v_{i+1,j-2}^{l-1}+676v_{i+1,j-1}^{l-1}+1716v_{i+1,j}^{l-1}+676v_{i+1,j+1}^{l-1}+26v_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+v_{i+2,j-2}^{l-1}+26v_{i+2,j-1}^{l-1}+66v_{i+2,j}^{l-1}+26v_{i+2,j+1}^{l-1}+v_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=m+2,\ j=2m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(13v_{i-1,j-2}^{l-1}+338v_{i-1,j-1}^{l-1}+780v_{i-1,j}^{l-1}+169v_{i-1,j+1}^{l-1}+$$

$$+60v_{i,j-2}^{l-1}+1560v_{i,j-1}^{l-1}+3600v_{i,j}^{l-1}+780v_{i,j+1}^{l-1}+$$

$$+26v_{i+1,j-2}^{l-1}+676v_{i+1,j-1}^{l-1}+1560v_{i+1,j}^{l-1}+338v_{i+1,j+1}^{l-1}+$$

$$+v_{i+2,j-2}^{l-1}+26v_{i+2,j-1}^{l-1}+60v_{i+2,j}^{l-1}+13v_{i+2,j+1}^{l-1}).$$

Для $i=m+2,\ j=2m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(13v_{i-1,j-2}^{l-1}+169v_{i-1,j-1}^{l-1}+78v_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+60v_{i,j-2}^{l-1}+780v_{i,j-1}^{l-1}+360v_{i,j}^{l-1}+$$

$$+26v_{i+1,j-2}^{l-1}+338v_{i+1,j-1}^{l-1}+156v_{i+1,j}^{l-1}+$$

$$+v_{i+2,j-2}^{l-1}+13v_{i+2,j-1}^{l-1}+6v_{i+2,j}^{l-1}).$$

Для $i=m+3,...,2m,\ j=m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(6v_{i-2,j}^{l-1}+13v_{i-2,j+1}^{l-1}+v_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+156v_{i-1,j}^{l-1}+338v_{i-1,j+1}^{l-1}+26v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+396v_{i,j}^{l-1}+858v_{i,j+1}^{l-1}+66v_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+156v_{i+1,j}^{l-1}+338v_{i+1,j+1}^{l-1}+26v_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+6v_{i+2,j}^{l-1}+13v_{i+2,j+1}^{l-1}+v_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=m+3,...,2m,\ j=m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(13v_{i-2,j-1}^{l-1}+60v_{i-2,j}^{l-1}+26v_{i-2,j+1}^{l-1}+v_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+338v_{i-1,j-1}^{l-1}+1560v_{i-1,j}^{l-1}+676v_{i-1,j+1}^{l-1}+26v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+858v_{i,j-1}^{l-1}+3960v_{i,j}^{l-1}+1716v_{i,j+1}^{l-1}+66v_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+338v_{i+1,j-1}^{l-1}+1650v_{i+1,j}^{l-1}+676v_{i+1,j+1}^{l-1}+26v_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+13v_{i+2,j-1}^{l-1}+60v_{i+2,j}^{l-1}+26v_{i+2,j+1}^{l-1}+v_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=m+3,...,2m,\ j=2m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(v_{i-2,j-2}^{l-1}+26v_{i-2,j-1}^{l-1}+60v_{i-2,j}^{l-1}+13v_{i-2,j+1}^{l-1}+$$

$$+26v_{i-1,j-2}^{l-1}+676v_{i-1,j-1}^{l-1}+1560v_{i-1,j}^{l-1}+338v_{i-1,j+1}^{l-1}+$$

$$+66v_{i,j-2}^{l-1}+1716v_{i,j-1}^{l-1}+3960v_{i,j}^{l-1}+858v_{i,j+1}^{l-1}+$$

$$+26v_{i+1,\,j-2}^{l-1}+676v_{i+1,\,j-1}^{l-1}+1560v_{i+1,\,j}^{l-1}+338v_{i+1,\,j+1}^{l-1}+$$

$$+v_{i+2,\,j-2}^{l-1}+26v_{i+2,\,j-1}^{l-1}+60v_{i+2,\,j}^{l-1}+13v_{i+2,\,j+1}^{l-1}).$$

Для $i=m+3,...,2m,\ j=2m+2$ полагаем

$$r_{i,\,j}^{l-1}=r_{i,\,j}^{l-1}-$$

$$-A(v_{i-2,\,j-2}^{l-1}+13v_{i-2,\,j-1}^{l-1}+6v_{i-2,\,j}^{l-1}+$$

$$+26v_{i-1,\,j-2}^{l-1}+338v_{i-1,\,j-1}^{l-1}+156v_{i-1,\,j}^{l-1}+$$

$$+66v_{i,\,j-2}^{l-1}+858v_{i,\,j-1}^{l-1}+396v_{i,\,j}^{l-1}+$$

$$+26v_{i+1,\,j-2}^{l-1}+338v_{i+1,\,j-1}^{l-1}+156v_{i+1,\,j}^{l-1}+$$

$$+v_{i+2,\,j-2}^{l-1}+13v_{i+2,\,j-1}^{l-1}+6v_{i+2,\,j}^{l-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=m+1$ полагаем

$$r_{i,\,j}^{l-1}=r_{i,\,j}^{l-1}-$$

$$-A(6v_{i-2,\,j}^{l-1}+13v_{i-2,\,j+1}^{l-1}+v_{i-2,\,j+2}^{l-1}+$$

$$+156v_{i-1,\,j}^{l-1}+338v_{i-1,\,j+1}^{l-1}+26v_{i-1,\,j+2}^{l-1}+$$

$$+360v_{i,\,j}^{l-1}+780v_{i,\,j+1}^{l-1}+60v_{i,\,j+2}^{l-1}+$$

$$+78v_{i+1,\,j}^{l-1}+169v_{i+1,\,j+1}^{l-1}+13v_{i+1,\,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=m+2$ полагаем

$$r_{i,\,j}^{l-1}=r_{i,\,j}^{l-1}-$$

$$-A(13v_{i-2,\,j-1}^{l-1}+60v_{i-2,\,j}^{l-1}+26v_{i-2,\,j+1}^{l-1}+v_{i-2,\,j+2}^{l-1}+$$

$$+338v_{i-1,\,j-1}^{l-1}+1560v_{i-1,\,j}^{l-1}+676v_{i-1,\,j+1}^{l-1}+26v_{i-1,\,j+2}^{l-1}+$$

$$+780v_{i,\,j-1}^{l-1}+3600v_{i,\,j}^{l-1}+1560v_{i,\,j+1}^{l-1}+60v_{i,\,j+2}^{l-1}+$$

$$+169v_{i+1,\,j-1}^{l-1}+780v_{i+1,\,j}^{l-1}+338v_{i+1,\,j+1}^{l-1}+13v_{i+1,\,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=m+3,...,2m$ полагаем

$$r_{i,\,j}^{l-1}=r_{i,\,j}^{l-1}-$$

$$-A(v_{i-2,j-2}^{l-1}+26v_{i-2,j-1}^{l-1}+66v_{i-2,j}^{l-1}+26v_{i-2,j+1}^{l-1}+v_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+26v_{i-1,j-2}^{l-1}+676v_{i-1,j-1}^{l-1}+1716v_{i-1,j}^{l-1}+676v_{i-1,j+1}^{l-1}+26v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+60v_{i,j-2}^{l-1}+1560v_{i,j-1}^{l-1}+3960v_{i,j}^{l-1}+1560v_{i,j+1}^{l-1}+60v_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+13v_{i+1,j-2}^{l-1}+338v_{i+1,j-1}^{l-1}+858v_{i+1,j}^{l-1}+338v_{i+1,j+1}^{l-1}+13v_{i+1,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=2m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(v_{i-2,j-2}^{l-1}+26v_{i-2,j-1}^{l-1}+60v_{i-2,j}^{l-1}+13v_{i-2,j+1}^{l-1}+$$

$$+26v_{i-1,j-2}^{l-1}+676v_{i-1,j-1}^{l-1}+1560v_{i-1,j}^{l-1}+338v_{i-1,j+1}^{l-1}+$$

$$+60v_{i,j-2}^{l-1}+1560v_{i,j-1}^{l-1}+3600v_{i,j}^{l-1}+780v_{i,j+1}^{l-1}+$$

$$+13v_{i+1,j-2}^{l-1}+338v_{i+1,j-1}^{l-1}+780v_{i+1,j}^{l-1}+169v_{i+1,j+1}^{l-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=2m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(v_{i-2,j-2}^{l-1}+13v_{i-2,j-1}^{l-1}+6v_{i-2,j}^{l-1}+$$

$$+26v_{i-1,j-2}^{l-1}+338v_{i-1,j-1}^{l-1}+156v_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+60v_{i,j-2}^{l-1}+780v_{i,j-1}^{l-1}+360v_{i,j}^{l-1}+$$

$$+13v_{i+1,j-2}^{l-1}+169v_{i+1,j-1}^{l-1}+78v_{i+1,j}^{l-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(6v_{i-2,j}^{l-1}+13v_{i-2,j+1}^{l-1}+v_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$78v_{i-1,j}^{l-1}+169v_{i-1,j+1}^{l-1}+13v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$36v_{i,j}^{l-1}+78v_{i,j+1}^{l-1}+6v_{i,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(13v_{i-2,j-1}^{l-1}+60v_{i-2,j}^{l-1}+26v_{i-2,j+1}^{l-1}+v_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+169v_{i-1,j-1}^{l-1}+780v_{i-1,j}^{l-1}+338v_{i-1,j+1}^{l-1}+13v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+78v_{i,j-1}^{l-1}+360v_{i,j}^{l-1}+156v_{i,j+1}^{l-1}+6v_{i,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=m+3,...,2m$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(v_{i-2,j-2}^{l-1}+26v_{i-2,j-1}^{l-1}+66v_{i-2,j}^{l-1}+26v_{i-2,j+1}^{l-1}+v_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+13v_{i-1,j-2}^{l-1}+338v_{i-1,j-1}^{l-1}+858v_{i-1,j}^{l-1}+338v_{i-1,j+1}^{l-1}+13v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+6v_{i,j-2}^{l-1}+156v_{i,j-1}^{l-1}+396v_{i,j}^{l-1}+156v_{i,j+1}^{l-1}+6v_{i,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=2m+1$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(v_{i-2,j-2}^{l-1}+26v_{i-2,j-1}^{l-1}+60v_{i-2,j}^{l-1}+13v_{i-2,j+1}^{l-1}+$$

$$+13v_{i-1,j-2}^{l-1}+338v_{i-1,j-1}^{l-1}+780v_{i-1,j}^{l-1}+169v_{i-1,j+1}^{l-1}+$$

$$+6v_{i,j-2}^{l-1}+156v_{i,j-1}^{l-1}+360v_{i,j}^{l-1}+78v_{i,j+1}^{l-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=2m+2$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(v_{i-2,j-2}^{l-1}+13v_{i-2,j-1}^{l-1}+6v_{i-2,j}^{l-1}+$$

$$+13v_{i-1,j-2}^{l-1}+169v_{i-1,j-1}^{l-1}+78v_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+6v_{i,j-2}^{l-1}+78v_{i,j-1}^{l-1}+36v_{i,j}^{l-1}).$$

Для $i=m+3,...,2m,\ j=m+3,...,2m$ полагаем

$$r_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(v_{i-2,j-2}^{l-1}+26v_{i-2,j-1}^{l-1}+66v_{i-2,j}^{l-1}+26v_{i-2,j+1}^{l-1}+v_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+26v_{i-1,j-2}^{l-1}+676v_{i-1,j-1}^{l-1}+1716v_{i-1,j}^{l-1}+676v_{i-1,j+1}^{l-1}+26v_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+66v_{i,j-2}^{l-1}+1716v_{i,j-1}^{l-1}+4356v_{i,j}^{l-1}+1716v_{i,j+1}^{l-1}+66v_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+26v_{i+1,j-2}^{l-1}+676v_{i+1,j-1}^{l-1}+1716v_{i+1,j}^{l-1}+676v_{i+1,j+1}^{l-1}+26v_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+v_{i+2,j-2}^{l-1}+26v_{i+2,j-1}^{l-1}+66v_{i+2,j}^{l-1}+26v_{i+2,j+1}^{l-1}+v_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

IV. Вычисляем величину квадрата нормы начальной абсолютной ошибки (e_0 сохраняется в течение всех вычислений).

При программировании полагаем

$$e_{l-1}=\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1}(r_{i,j}^{l-1})^2h^2.$$

Когда в пункте V метода итерационной факторизации ищется массив поправок

$$w_{i,j}^{l-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ l\in\mathbb{N},$$

для этого сначала находятся нужные элементы вспомогательного массива

$$\text{А)}\ t_{i,j}^{l-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ l\in\mathbb{N},$$

решая сначала сеточные уравнения$\left(l\in\mathbb{N}\right)$:

$$\frac{2t_{i,j}^{l-1}-t_{i-1,j}^{l-1}-t_{i,j-1}^{l-1}}{h}+at_{i,j}^{l-1}=r_{i,j}^{l-1},$$

$$2\le i\le n-1,\ 2\le j\le n-1,$$

$$t_{i,1}^{l-1}=0,\ 2\le i\le n-1,\ t_{1,j}^{l-1}=0,\ 2\le j\le n-1.$$

Если в разностных уравнениях умножить на h, то получается, что используется шаблон с коэффициентами:

$$\begin{array}{ccc} & j-1 & j\\ i-1 & & -1\\ i & -1 & 2+ha.\end{array}$$

Затем находятся элементы вспомогательного массива

$$\text{Б)}\ p_{i,j}^{l-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ l\in\mathbb{N},$$

решая сеточные уравнения $\left(l\in\mathbb{N}\right)$:

$$\frac{2p_{i,j}^{l-1}-p_{i+1,j}^{l-1}-p_{i,j+1}^{l-1}}{h}+ap_{i,j}^{l-1}=t_{i,j}^{l-1},$$

$$n-1\ge i\ge 2,\ n-1\ge j\ge 2,$$

$$p_{i,n}^{l-1}=0,\ 2\le i\le n-1,\ p_{n,j}^{l-1}=0,\ \ 2\le j\le n-1.$$

Если в разностных уравнениях умножить на h, то получается, что используется шаблон с коэффициентами:

$$\begin{array}{ccc} & j & j+1 \\ i & 2+ha & -1 \\ i+1 & -1. & \end{array}$$

Затем находятся нужные элементы вспомогательного массива

$$\text{В) } q_{i,j}^{l-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ l\in\mathbb{N},$$

решая сначала сеточные уравнения $\left(l\in\mathbb{N}\right)$:

$$\frac{2q_{i,j}^{l-1}-q_{i-1,j}^{l-1}-q_{i,j-1}^{l-1}}{h}+aq_{i,j}^{l-1}=p_{i,j}^{l-1},$$

$$2\le i\le n-1,\ 2\le j\le n-1,$$

$$q_{i,1}^{l-1}=0,\ 2\le i\le n-1,\ q_{1,j}^{l-1}=0,\ \ 2\le j\le n-1.$$

Если в разностных уравнениях умножить на h, то получается, что используется шаблон с коэффициентами:

$$\begin{array}{ccc} & j-1 & j \\ i-1 & & -1 \\ i & -1 & 2+ha. \end{array}$$

Затем находятся нужные элементы массива

$$\text{Г) } w_{i,j}^{l-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ l\in\mathbb{N},$$

решая сеточные уравнения $\left(l\in\mathbb{N}\right)$:

$$\frac{2w_{i,j}^{l-1}-w_{i+1,j}^{l-1}-w_{i,j+1}^{l-1}}{h}+aw_{i,j}^{l-1}=q_{i,j}^{l-1},$$

$$n-1\ge i\ge 2,\ n-1\ge j\ge 2,$$

$$w_{i,n}^{l-1}=0,\ 2\le i\le n-1,\ w_{n,j}^{l-1}=0,\ \ 2\le j\le n-1.$$

Если в разностных уравнениях умножить на h, то получается, что используется шаблон с коэффициентами:

$$\begin{array}{ccc} & j & j+1 \\ i & 2+ha & -1 \\ i+1 & -1. & \end{array}$$

V. Ищем массив поправок

$$w_{i,j}^{l-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ l\in\mathbb{N}.$$

А) Для этого сначала находим нужные элементы вспомогательного массива

$$t_{i,j}^{l-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ l\in\mathbb{N}.$$

При программировании для $2\le i\le n$ полагаем

$$t_{i,1}^{l-1}=0,\ l\in\mathbb{N}.$$

Для $1\le j\le n$ полагаем

$$t_{1,j}^{l-1}=0,\ l\in\mathbb{N}.$$

При программировании вводим величину, что бы каждый раз не пересчитывать

$$a=\sqrt[4]{a_{\mathrm{II}}}.$$

Для $2\le i\le n-1,\ 2\le j\le n-1$ полагаем

$$t_{i,j}^{l-1}=(hr_{i,j}^{l-1}+t_{i-1,j}^{l-1}+t_{i,j-1}^{l-1})\Big/\left(2+ha\right).$$

Б) Находим нужные элементы второго вспомогательного массива

$$p_{i,j}^{l-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ l\in\mathbb{N}.$$

При программировании для $1\le i\le n-1$ полагаем

$$p_{i,n}^{l-1}=0,\ l\in\mathbb{N}.$$

Для $1\le j\le n$ полагаем

$$p_{n,j}^{l-1}=0,\ l\in\mathbb{N}.$$

Для $n-1\ge i\ge 2,\ n-1\ge j\ge 2$ полагаем

$$p_{i,j}^{l-1}=(ht_{i,j}^{l-1}+p_{i+1,j}^{l-1}+p_{i,j+1}^{l-1})\Big/\left(2+ha\right).$$

В) Находим нужные элементы третьего вспомогательного массива

$$q_{i,j}^{l-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ l\in\mathbb{N}.$$

При программировании для $2\le i\le n$ полагаем

$$q_{i,1}^{l-1}=0,\ l\in\mathbb{N}.$$

Для $1\le j\le n$ полагаем

$$q_{1,j}^{l-1}=0,\ l\in\mathbb{N}.$$

Для $2\le i\le n-1,\ 2\le j\le n-1$полагаем

$$q_{i,j}^{l-1}=(hp_{i,j}^{l-1}+q_{i-1,j}^{l-1}+q_{i,j-1}^{l-1})\big/\left(2+ha\right).$$

Г) А теперь находим нужные элементы массива поправок.

При программировании для $1\le i\le n-1$ полагаем

$$w_{i,n}^{l-1}=0,\ l\in\mathbb{N}.$$

Для $1\le j\le n$ полагаем

$$w_{n,j}^{l-1}=0,\ l\in\mathbb{N}.$$

Для $n-1\ge i\ge 2,\ n-1\ge j\ge 2$полагаем

$$w_{i,j}^{l-1}=(hq_{i,j}^{l-1}+w_{i+1,j}^{l-1}+w_{i,j+1}^{l-1})\big/\left(2+ha\right).$$

VI. Вычисляем массив эквивалентной невязки.

$$\eta_{i,j}^{l-1},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2...,n,\ l\in\mathbb{N}.$$

Вычисляем, только те элементы массива эквивалентной невязки, которые будем использовать $\left(l\in\mathbb{N}\right)$.

При программировании для $2\le i\le n-1$ полагаем

$$w_{i,1}^{l-1}=w_{i,2}^{l-1}.$$

Для $1\le j\le n-1$ полагаем

$$w_{1,j}^{l-1}=w_{2,j}^{l-1}.$$

Для $1\le i\le n-1$ полагаем

$$w_{i,n}^{l-1}=0.$$

Для $1 \le j \le n$ полагаем

$$w_{n,j}^{l-1} = 0.$$

Для $i = 2,\ j = 2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1} =$$

$$= H(1424 w_{i,j}^{l-1} - 906 w_{i,j+1}^{l-1} + 202 w_{i,j+2}^{l-1} -$$

$$-906 w_{i+1,j}^{l-1} - 306 w_{i+1,j+1}^{l-1} + 132 w_{i+1,j+2}^{l-1} +$$

$$+202 w_{i+2,j}^{l-1} + 132 w_{i+2,j+1}^{l-1} + 26 w_{i+2,j+2}^{l-1}) +$$

$$+$$

$$+A(8464 w_{i,j}^{l-1} + 2484 w_{i,j+1}^{l-1} + 92 w_{i,j+2}^{l-1} +$$

$$+2484 w_{i+1,j}^{l-1} + 729 w_{i+1,j+1}^{l-1} + 27 w_{i+1,j+2}^{l-1} +$$

$$+92 w_{i+2,j}^{l-1} + 27 w_{i+2,j+1}^{l-1} + w_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i = 2,\ j = 3$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1} =$$

$$= H(-906 w_{i,j-1}^{l-1} + 2532 w_{i,j}^{l-1} - 1108 w_{i,j+1}^{l-1} + 202 w_{i,j+2}^{l-1} -$$

$$-306 w_{i+1,j-1}^{l-1} - 468 w_{i+1,j}^{l-1} - 438 w_{i+1,j+1}^{l-1} + 132 w_{i+1,j+2}^{l-1} +$$

$$+132 w_{i+2,j-1}^{l-1} + 96 w_{i+2,j}^{l-1} + 106 w_{i+2,j+1}^{l-1} + 26 w_{i+2,j+2}^{l-1}) +$$

$$+$$

$$+A(2484 w_{i,j-1}^{l-1} + 6072 w_{i,j}^{l-1} + 2392 w_{i,j+1}^{l-1} + 92 w_{i,j+2}^{l-1} +$$

$$+729 w_{i+1,j-1}^{l-1} + 1782 w_{i+1,j}^{l-1} + 702 w_{i+1,j+1}^{l-1} + 27 w_{i+1,j+2}^{l-1} +$$

$$+27 w_{i+2,j-1}^{l-1} + 66 w_{i+2,j}^{l-1} + 26 w_{i+2,j+1}^{l-1} + w_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i = 2,\ j = 4, \ldots, n-3$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1} =$$

$$= H(202 w_{i,j-2}^{l-1} - 1108 w_{i,j-1}^{l-1} + 2532 w_{i,j}^{l-1} - 1108 w_{i,j+1}^{l-1} + 202 w_{i,j+2}^{l-1} +$$

$$+132w_{i+1,j-2}^{l-1}-438w_{i+1,j-1}^{l-1}-468w_{i+1,j}^{l-1}-438w_{i+1,j+1}^{l-1}+132w_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{l-1}+106w_{i+2,j-1}^{l-1}+96w_{i+2,j}^{l-1}+106w_{i+2,j+1}^{l-1}+26w_{i+2,j+2}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(92w_{i,j-2}^{l-1}+2392w_{i,j-1}^{l-1}+6072w_{i,j}^{l-1}+2392w_{i,j+1}^{l-1}+92w_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+27w_{i+1,j-2}^{l-1}+702w_{i+1,j-1}^{l-1}+1782w_{i+1,j}^{l-1}+702w_{i+1,j+1}^{l-1}+27w_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{l-1}+26w_{i+2,j-1}^{l-1}+66w_{i+2,j}^{l-1}+26w_{i+2,j+1}^{l-1}+w_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=2,\ j=n-2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(202w_{i,j-2}^{l-1}-1108w_{i,j-1}^{l-1}+2532w_{i,j}^{l-1}-1108w_{i,j+1}^{l-1}+$$

$$+132w_{i+1,j-2}^{l-1}-438w_{i+1,j-1}^{l-1}-468w_{i+1,j}^{l-1}-438w_{i+1,j+1}^{l-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{l-1}+106w_{i+2,j-1}^{l-1}+96w_{i+2,j}^{l-1}+106w_{i+2,j+1}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(92w_{i,j-2}^{l-1}+2392w_{i,j-1}^{l-1}+6072w_{i,j}^{l-1}+2392w_{i,j+1}^{l-1}+$$

$$+27w_{i+1,j-2}^{l-1}+702w_{i+1,j-1}^{l-1}+1782w_{i+1,j}^{l-1}+702w_{i+1,j+1}^{l-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{l-1}+26w_{i+2,j-1}^{l-1}+66w_{i+2,j}^{l-1}+26w_{i+2,j+1}^{l-1}).$$

Для $i=2,\ j=n-1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(202w_{i,j-2}^{l-1}-1108w_{i,j-1}^{l-1}+2330w_{i,j}^{l-1}+$$

$$+132w_{i+1,j-2}^{l-1}-438w_{i+1,j-1}^{l-1}-600w_{i+1,j}^{l-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{l-1}+106w_{i+2,j-1}^{l-1}+70w_{i+2,j}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(92w_{i,j-2}^{l-1}+2392w_{i,j-1}^{l-1}+5980w_{i,j}^{l-1}+$$

$$+27w_{i+1,j-2}^{l-1}+702w_{i+1,j-1}^{l-1}+1755w_{i+1,j}^{l-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{l-1}+26w_{i+2,j-1}^{l-1}+65w_{i+2,j}^{l-1}).$$

Для $i=3,\ j=2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(-906w_{i-1,j}^{l-1}-306w_{i-1,j+1}^{l-1}+132w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+2532w_{i,j}^{l-1}-468w_{i,j+1}^{l-1}+96w_{i,j+2}^{l-1}-$$

$$-1108w_{i+1,j}^{l-1}-438w_{i+1,j+1}^{l-1}+106w_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+202w_{i+2,j}^{l-1}+132w_{i+2,j+1}^{l-1}+26w_{i+2,j+2}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(2484w_{i-1,j}^{l-1}+729w_{i-1,j+1}^{l-1}+27w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+6072w_{i,j}^{l-1}+1782w_{i,j+1}^{l-1}+66w_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+2392w_{i+1,j}^{l-1}+702w_{i+1,j+1}^{l-1}+26w_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+92w_{i+2,j}^{l-1}+27w_{i+2,j+1}^{l-1}+w_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=3,\ j=n-1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(132w_{i-1,j-2}^{l-1}-438w_{i-1,j-1}^{l-1}-600w_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+96w_{i,j-2}^{l-1}-564w_{i,j-1}^{l-1}+3000w_{i,j}^{l-1}+$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{l-1}-544w_{i+1,j-1}^{l-1}-670w_{i+1,j}^{l-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{l-1}+106w_{i+2,j-1}^{l-1}+70w_{i+2,j}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(27w_{i-1,j-2}^{l-1}+702w_{i-1,j-1}^{l-1}+1755w_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+66w_{i,j-2}^{l-1}+1716w_{i,j-1}^{l-1}+4290w_{i,j}^{l-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{l-1}+676w_{i+1,j-1}^{l-1}+1690w_{i+1,j}^{l-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{l-1}+26w_{i+2,j-1}^{l-1}+65w_{i+2,j}^{l-1}).$$

Для $i = 4,...,n-3,\ j = 2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1} =$$

$$= H(202w_{i-2,j}^{l-1} + 132w_{i-2,j+1}^{l-1} + 26w_{i-2,j+2}^{l-1} -$$

$$-1108w_{i-1,j}^{l-1} - 438w_{i-1,j+1}^{l-1} + 106w_{i-1,j+2}^{l-1} +$$

$$+2532w_{i,j}^{l-1} - 468w_{i,j+1}^{l-1} + 96w_{i,j+2}^{l-1} -$$

$$-1108w_{i+1,j}^{l-1} - 438w_{i+1,j+1}^{l-1} + 106w_{i+1,j+2}^{l-1} +$$

$$+202w_{i+2,j}^{l-1} + 132w_{i+2,j+1}^{l-1} + 26w_{i+2,j+2}^{l-1}) +$$

$$+$$

$$+A(92w_{i-2,j}^{l-1} + 27w_{i-2,j+1}^{l-1} + w_{i-2,j+2}^{l-1} +$$

$$+2392w_{i-1,j}^{l-1} + 702w_{i-1,j+1}^{l-1} + 26w_{i-1,j+2}^{l-1} +$$

$$+6072w_{i,j}^{l-1} + 1782w_{i,j+1}^{l-1} + 66w_{i,j+2}^{l-1} +$$

$$+2392w_{i+1,j}^{l-1} + 702w_{i+1,j+1}^{l-1} + 26w_{i+1,j+2}^{l-1} +$$

$$+92w_{i+2,j}^{l-1} + 27w_{i+2,j+1}^{l-1} + w_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i = 4,...n-3,\ j = n-1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1} =$$

$$= H(26w_{i-2,j-2}^{l-1} + 106w_{i-2,j-1}^{l-1} + 70w_{i-2,j}^{l-1} +$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{l-1} - 544w_{i-1,j-1}^{l-1} - 670w_{i-1,j}^{l-1} +$$

$$+96w_{i,j-2}^{l-1} - 564w_{i,j-1}^{l-1} + 3000w_{i,j}^{l-1} +$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{l-1} - 544w_{i+1,j-1}^{l-1} - 670w_{i+1,j}^{l-1} +$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{l-1} + 106w_{i+2,j-1}^{l-1} + 70w_{i+2,j}^{l-1}) +$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{l-1} + 26w_{i-2,j-1}^{l-1} + 65w_{i-2,j}^{l-1} +$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{l-1} + 676w_{i-1,j-1}^{l-1} + 1690w_{i-1,j}^{l-1} +$$

$$+66w_{i,j-2}^{l-1}+1716w_{i,j-1}^{l-1}+4290w_{i,j}^{l-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{l-1}+676w_{i+1,j-1}^{l-1}+1690w_{i+1,j}^{l-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{l-1}+26w_{i+2,j-1}^{l-1}+65w_{i+2,j}^{l-1}).$$

Для $i=n-2,\ j=2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(202w_{i-2,j}^{l-1}+132w_{i-2,j+1}^{l-1}+26w_{i-2,j+2}^{l-1}-$$

$$-1108w_{i-1,j}^{l-1}-438w_{i-1,j+1}^{l-1}+106w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+2532w_{i,j}^{l-1}-468w_{i,j+1}^{l-1}+96w_{i,j+2}^{l-1}-$$

$$-1108w_{i+1,j}^{l-1}-438w_{i+1,j+1}^{l-1}+106w_{i+1,j+2}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(92w_{i-2,j}^{l-1}+27w_{i-2,j+1}^{l-1}+w_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+2392w_{i-1,j}^{l-1}+702w_{i-1,j+1}^{l-1}+26w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+6072w_{i,j}^{l-1}+1782w_{i,j+1}^{l-1}+66w_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+2392w_{i+1,j}^{l-1}+702w_{i+1,j+1}^{l-1}+26w_{i+1,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=n-2,\ j=n-1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{l-1}+106w_{i-2,j-1}^{l-1}+70w_{i-2,j}^{l-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{l-1}-544w_{i-1,j-1}^{l-1}-670w_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+96w_{i,j-2}^{l-1}-564w_{i,j-1}^{l-1}+3000w_{i,j}^{l-1}+$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{l-1}-544w_{i+1,j-1}^{l-1}-670w_{i+1,j}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{l-1}+26w_{i-2,j-1}^{l-1}+65w_{i-2,j}^{l-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{l-1}+676w_{i-1,j-1}^{l-1}+1690w_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+66w_{i,j-2}^{l-1}+1716w_{i,j-1}^{l-1}+4290w_{i,j}^{l-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{l-1}+676w_{i+1,j-1}^{l-1}+1690w_{i+1,j}^{l-1}).$$

Для $i=n-1,\ j=2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(202w_{i-2,j}^{l-1}+132w_{i-2,j+1}^{l-1}+26w_{i-2,j+2}^{l-1}-$$

$$-1108w_{i-1,j}^{l-1}-438w_{i-1,j+1}^{l-1}+106w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+2330w_{i,j}^{l-1}-600w_{i,j+1}^{l-1}+202w_{i,j+2}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(92w_{i-2,j}^{l-1}+27w_{i-2,j+1}^{l-1}+w_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+2392w_{i-1,j}^{l-1}+702w_{i-1,j+1}^{l-1}+26w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+5980w_{i,j}^{l-1}+1755w_{i,j+1}^{l-1}+65w_{i,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=n-1,\ j=3$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(132w_{i-2,j-1}^{l-1}+96w_{i-2,j}^{l-1}+106w_{i-2,j+1}^{l-1}+26w_{i-2,j+2}^{l-1}-$$

$$-438w_{i-1,j-1}^{l-1}-564w_{i-1,j}^{l-1}-544w_{i-1,j+1}^{l-1}+106w_{i-1,j+2}^{l-1}-$$

$$-600w_{i,j-1}^{l-1}+3000w_{i,j}^{l-1}-670w_{i,j+1}^{l-1}+70w_{i,j+2}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(27w_{i-2,j-1}^{l-1}+66w_{i-2,j}^{l-1}+26w_{i-2,j+1}^{l-1}+w_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+702w_{i-1,j-1}^{l-1}+1716w_{i-1,j}^{l-1}+676w_{i-1,j+1}^{l-1}+26w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+1755w_{i,j-1}^{l-1}+4290w_{i,j}^{l-1}+1690w_{i,j+1}^{l-1}+25w_{i,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=n-1,\ j=4,\dots,n-3$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{l-1}+106w_{i-2,j-1}^{l-1}+96w_{i-2,j}^{l-1}+106w_{i-2,j+1}^{l-1}+26w_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{l-1}-544w_{i-1,j-1}^{l-1}-564w_{i-1,j}^{l-1}-544w_{i-1,j+1}^{l-1}+106w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+70w_{i,j-2}^{l-1}-670w_{i,j-1}^{l-1}+3000w_{i,j}^{l-1}-670w_{i,j+1}^{l-1}+70w_{i,j+2}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{l-1}+26w_{i-2,j-1}^{l-1}+66w_{i-2,j}^{l-1}+26w_{i-2,j+1}^{l-1}+w_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{l-1}+676w_{i-1,j-1}^{l-1}+1716w_{i-1,j}^{l-1}+676w_{i-1,j+1}^{l-1}+26w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+65w_{i,j-2}^{l-1}+1690w_{i,j-1}^{l-1}+4290w_{i,j}^{l-1}+1690w_{i,j+1}^{l-1}+65w_{i,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=n-1,\ j=n-2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{l-1}+106w_{i-2,j-1}^{l-1}+96w_{i-2,j}^{l-1}+106w_{i-2,j+1}^{l-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{l-1}-544w_{i-1,j-1}^{l-1}-564w_{i-1,j}^{l-1}-544w_{i-1,j+1}^{l-1}+$$

$$+70w_{i,j-2}^{l-1}-670w_{i,j-1}^{l-1}+3000w_{i,j}^{l-1}-670w_{i,j+1}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{l-1}+26w_{i-2,j-1}^{l-1}+66w_{i-2,j}^{l-1}+26w_{i-2,j+1}^{l-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{l-1}+676w_{i-1,j-1}^{l-1}+1716w_{i-1,j}^{l-1}+676w_{i-1,j+1}^{l-1}+$$

$$+65w_{i,j-2}^{l-1}+1690w_{i,j-1}^{l-1}+4290w_{i,j}^{l-1}+1690w_{i,j+1}^{l-1}).$$

Для $i=n-1,\ j=n-1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{l-1}+106w_{i-2,j-1}^{l-1}+70w_{i-2,j}^{l-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{l-1}-544w_{i-1,j-1}^{l-1}-670w_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+70w_{i,j-2}^{l-1}-670w_{i,j-1}^{l-1}+2930w_{i,j}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{l-1}+26w_{i-2,j-1}^{l-1}+65w_{i-2,j}^{l-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{l-1}+676w_{i-1,j-1}^{l-1}+1690w_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+65w_{i,j-2}^{l-1}+1690w_{i,j-1}^{l-1}+4225w_{i,j}^{l-1}).$$

Для $i=4,...,n-3,\ j=4,...,n-3$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=$$

$$=H(26w_{i-2,j-2}^{l-1}+106w_{i-2,j-1}^{l-1}+96w_{i-2,j}^{l-1}+106w_{i-2,j+1}^{l-1}+26w_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+106w_{i-1,j-2}^{l-1}-544w_{i-1,j-1}^{l-1}-564w_{i-1,j}^{l-1}-544w_{i-1,j+1}^{l-1}+106w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+96w_{i,j-2}^{l-1}-564w_{i,j-1}^{l-1}+3096w_{i,j}^{l-1}-564w_{i,j+1}^{l-1}+96w_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+106w_{i+1,j-2}^{l-1}-544w_{i+1,j-1}^{l-1}-564w_{i+1,j}^{l-1}-544w_{i+1,j+1}^{l-1}+106w_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+26w_{i+2,j-2}^{l-1}+106w_{i+2,j-1}^{l-1}+96w_{i+2,j}^{l-1}+106w_{i+2,j+1}^{l-1}+26w_{i+2,j+2}^{l-1})+$$

$$+$$

$$+A(w_{i-2,j-2}^{l-1}+26w_{i-2,j-1}^{l-1}+66w_{i-2,j}^{l-1}+26w_{i-2,j+1}^{l-1}+w_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{l-1}+676w_{i-1,j-1}^{l-1}+1716w_{i-1,j}^{l-1}+676w_{i-1,j+1}^{l-1}+26w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+66w_{i,j-2}^{l-1}+1716w_{i,j-1}^{l-1}+4356w_{i,j}^{l-1}+1716w_{i,j+1}^{l-1}+66w_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{l-1}+676w_{i+1,j-1}^{l-1}+1716w_{i+1,j}^{l-1}+676w_{i+1,j+1}^{l-1}+26w_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{l-1}+26w_{i+2,j-1}^{l-1}+66w_{i+2,j}^{l-1}+26w_{i+2,j+1}^{l-1}+w_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

При программировании для $i=m+1,\ j=m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(36w_{i,j}^{l-1}+78w_{i,j+1}^{l-1}+6w_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+78w_{i+1,j}^{l-1}+169w_{i+1,j+1}^{l-1}+13w_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+6w_{i+2,j}^{l-1}+13w_{i+2,j+1}^{l-1}+w_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=m+1,\ j=m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(78w_{i,j-1}^{l-1}+360w_{i,j}^{l-1}+156w_{i,j+1}^{l-1}+6w_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+169w_{i+1,j-1}^{l-1}+780w_{i+1,j}^{l-1}+338w_{i+1,j+1}^{l-1}+13w_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+13w_{i+2,j-1}^{l-1}+60w_{i+2,j}^{l-1}+26w_{i+2,j+1}^{l-1}+w_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=m+1,\ j=m+3,...,2m$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(6w_{i,j-2}^{l-1}+156w_{i,j-1}^{l-1}+396w_{i,j}^{l-1}+156w_{i,j+1}^{l-1}+6w_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+13w_{i+1,j-2}^{l-1}+338w_{i+1,j-1}^{l-1}+858w_{i+1,j}^{l-1}+338w_{i+1,j+1}^{l-1}+13w_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{l-1}+26w_{i+2,j-1}^{l-1}+66w_{i+2,j}^{l-1}+26w_{i+2,j+1}^{l-1}+w_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=m+1,\ j=2m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(6w_{i,j-2}^{l-1}+156w_{i,j-1}^{l-1}+360w_{i,j}^{l-1}+78w_{i,j+1}^{l-1}+$$

$$+13w_{i+1,j-2}^{l-1}+338w_{i+1,j-1}^{l-1}+780w_{i+1,j}^{l-1}+169w_{i+1,j+1}^{l-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{l-1}+26w_{i+2,j-1}^{l-1}+60w_{i+2,j}^{l-1}+13w_{i+2,j+1}^{l-1}).$$

Для $i=m+1,\ j=2m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(6w_{i,j-2}^{l-1}+78w_{i,j-1}^{l-1}+36w_{i,j}^{l-1}+$$

$$+13w_{i+1,j-2}^{l-1}+169w_{i+1,j-1}^{l-1}+78w_{i+1,j}^{l-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{l-1}+13w_{i+2,j-1}^{l-1}+6w_{i+2,j}^{l-1}).$$

Для $i=m+2,\ j=m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(78w_{i-1,j}^{l-1}+169w_{i-1,j+1}^{l-1}+13w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+360w_{i,j}^{l-1}+780w_{i,j+1}^{l-1}+60w_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+156w_{i+1,j}^{l-1}+338w_{i+1,j+1}^{l-1}+26w_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+6w_{i+2,j}^{l-1}+13w_{i+2,j+1}^{l-1}+w_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i = m+2,\ j = m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1} = \eta_{i,j}^{l-1} -$$

$$-A(169w_{i-1,j-1}^{l-1} + 780w_{i-1,j}^{l-1} + 338w_{i-1,j+1}^{l-1} + 13w_{i-1,j+2}^{l-1} +$$

$$+780w_{i,j-1}^{l-1} + 3600w_{i,j}^{l-1} + 1560w_{i,j+1}^{l-1} + 60w_{i,j+2}^{l-1} +$$

$$+338w_{i+1,j-1}^{l-1} + 1560w_{i+1,j}^{l-1} + 676w_{i+1,j+1}^{l-1} + 26w_{i+1,j+2}^{l-1} +$$

$$+13w_{i+2,j-1}^{l-1} + 60w_{i+2,j}^{l-1} + 26w_{i+2,j+1}^{l-1} + w_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i = m+2,\ j = m+3,...,2m$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1} = \eta_{i,j}^{l-1} -$$

$$-A(13w_{i-1,j-2}^{l-1} + 338w_{i-1,j-1}^{l-1} + 858w_{i-1,j}^{l-1} + 338w_{i-1,j+1}^{l-1} + 13w_{i-1,j+2}^{l-1} +$$

$$+60w_{i,j-2}^{l-1} + 1560w_{i,j-1}^{l-1} + 3960w_{i,j}^{l-1} + 1560w_{i,j+1}^{l-1} + 60w_{i,j+2}^{l-1} +$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{l-1} + 676w_{i+1,j-1}^{l-1} + 1716w_{i+1,j}^{l-1} + 676w_{i+1,j+1}^{l-1} + 26w_{i+1,j+2}^{l-1} +$$

$$+w_{i+2,j-2}^{l-1} + 26w_{i+2,j-1}^{l-1} + 66w_{i+2,j}^{l-1} + 26w_{i+2,j+1}^{l-1} + w_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i = m+2,\ j = 2m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1} = \eta_{i,j}^{l-1} -$$

$$-A(13w_{i-1,j-2}^{l-1} + 338w_{i-1,j-1}^{l-1} + 780w_{i-1,j}^{l-1} + 169w_{i-1,j+1}^{l-1} +$$

$$+60w_{i,j-2}^{l-1} + 1560w_{i,j-1}^{l-1} + 3600w_{i,j}^{l-1} + 780w_{i,j+1}^{l-1} +$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{l-1} + 676w_{i+1,j-1}^{l-1} + 1560w_{i+1,j}^{l-1} + 338w_{i+1,j+1}^{l-1} +$$

$$+w_{i+2,j-2}^{l-1} + 26w_{i+2,j-1}^{l-1} + 60w_{i+2,j}^{l-1} + 13w_{i+2,j+1}^{l-1}).$$

Для $i = m+2,\ j = 2m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1} = \eta_{i,j}^{l-1} -$$

$$-A(13w_{i-1,j-2}^{l-1} + 169w_{i-1,j-1}^{l-1} + 78w_{i-1,j}^{l-1} +$$

$$+60w_{i,j-2}^{l-1} + 780w_{i,j-1}^{l-1} + 360w_{i,j}^{l-1} +$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{l-1} + 338w_{i+1,j-1}^{l-1} + 156w_{i+1,j}^{l-1} +$$

$$+w_{i+2,j-2}^{l-1}+13w_{i+2,j-1}^{l-1}+6w_{i+2,j}^{l-1}).$$

Для $i=m+3,...,2m,\ j=m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(6w_{i-2,j}^{l-1}+13w_{i-2,j+1}^{l-1}+w_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+156w_{i-1,j}^{l-1}+338w_{i-1,j+1}^{l-1}+26w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+396w_{i,j}^{l-1}+858w_{i,j+1}^{l-1}+66w_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+156w_{i+1,j}^{l-1}+338w_{i+1,j+1}^{l-1}+26w_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+6w_{i+2,j}^{l-1}+13w_{i+2,j+1}^{l-1}+w_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=m+3,...,2m,\ j=m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(13w_{i-2,j-1}^{l-1}+60w_{i-2,j}^{l-1}+26w_{i-2,j+1}^{l-1}+w_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+338w_{i-1,j-1}^{l-1}+1560w_{i-1,j}^{l-1}+676w_{i-1,j+1}^{l-1}+26w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+858w_{i,j-1}^{l-1}+3960w_{i,j}^{l-1}+1716w_{i,j+1}^{l-1}+66w_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+338w_{i+1,j-1}^{l-1}+1650w_{i+1,j}^{l-1}+676w_{i+1,j+1}^{l-1}+26w_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+13w_{i+2,j-1}^{l-1}+60w_{i+2,j}^{l-1}+26w_{i+2,j+1}^{l-1}+w_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=m+3,...,2m,\ j=2m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(w_{i-2,j-2}^{l-1}+26w_{i-2,j-1}^{l-1}+60w_{i-2,j}^{l-1}+13w_{i-2,j+1}^{l-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{l-1}+676w_{i-1,j-1}^{l-1}+1560w_{i-1,j}^{l-1}+338w_{i-1,j+1}^{l-1}+$$

$$+66w_{i,j-2}^{l-1}+1716w_{i,j-1}^{l-1}+3960w_{i,j}^{l-1}+858w_{i,j+1}^{l-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{l-1}+676w_{i+1,j-1}^{l-1}+1560w_{i+1,j}^{l-1}+338w_{i+1,j+1}^{l-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{l-1}+26w_{i+2,j-1}^{l-1}+60w_{i+2,j}^{l-1}+13w_{i+2,j+1}^{l-1}).$$

Для $i = m+3,...,2m,\ j = 2m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1} = \eta_{i,j}^{l-1} -$$

$$-A(w_{i-2,j-2}^{l-1} + 13w_{i-2,j-1}^{l-1} + 6w_{i-2,j}^{l-1} +$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{l-1} + 338w_{i-1,j-1}^{l-1} + 156w_{i-1,j}^{l-1} +$$

$$+66w_{i,j-2}^{l-1} + 858w_{i,j-1}^{l-1} + 396w_{i,j}^{l-1} +$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{l-1} + 338w_{i+1,j-1}^{l-1} + 156w_{i+1,j}^{l-1} +$$

$$w_{i+2,j-2}^{l-1} + 13w_{i+2,j-1}^{l-1} + 6w_{i+2,j}^{l-1}).$$

Для $i = 2m+1,\ j = m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1} = \eta_{i,j}^{l-1} -$$

$$-A(6w_{i-2,j}^{l-1} + 13w_{i-2,j+1}^{l-1} + w_{i-2,j+2}^{l-1} +$$

$$+156w_{i-1,j}^{l-1} + 338w_{i-1,j+1}^{l-1} + 26w_{i-1,j+2}^{l-1} +$$

$$+360w_{i,j}^{l-1} + 780w_{i,j+1}^{l-1} + 60w_{i,j+2}^{l-1} +$$

$$+78w_{i+1,j}^{l-1} + 169w_{i+1,j+1}^{l-1} + 13w_{i+1,j+2}^{l-1}).$$

Для $i = 2m+1,\ j = m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1} = \eta_{i,j}^{l-1} -$$

$$-A(13w_{i-2,j-1}^{l-1} + 60w_{i-2,j}^{l-1} + 26w_{i-2,j+1}^{l-1} + w_{i-2,j+2}^{l-1} +$$

$$+338w_{i-1,j-1}^{l-1} + 1560w_{i-1,j}^{l-1} + 676w_{i-1,j+1}^{l-1} + 26w_{i-1,j+2}^{l-1} +$$

$$+780w_{i,j-1}^{l-1} + 3600w_{i,j}^{l-1} + 1560w_{i,j+1}^{l-1} + 60w_{i,j+2}^{l-1} +$$

$$+169w_{i+1,j-1}^{l-1} + 780w_{i+1,j}^{l-1} + 338w_{i+1,j+1}^{l-1} + 13w_{i+1,j+2}^{l-1}).$$

Для $i = 2m+1,\ j = m+3,...,2m$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1} = \eta_{i,j}^{l-1} -$$

$$-A(w_{i-2,j-2}^{l-1} + 26w_{i-2,j-1}^{l-1} + 66w_{i-2,j}^{l-1} + 26w_{i-2,j+1}^{l-1} + w_{i-2,j+2}^{l-1} +$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{l-1} + 676w_{i-1,j-1}^{l-1} + 1716w_{i-1,j}^{l-1} + 676w_{i-1,j+1}^{l-1} + 26w_{i-1,j+2}^{l-1} +$$

$$+60w_{i,j-2}^{l-1}+1560w_{i,j-1}^{l-1}+3960w_{i,j}^{l-1}+1560w_{i,j+1}^{l-1}+60w_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+13w_{i+1,j-2}^{l-1}+338w_{i+1,j-1}^{l-1}+858w_{i+1,j}^{l-1}+338w_{i+1,j+1}^{l-1}+13w_{i+1,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=2m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(w_{i-2,j-2}^{l-1}+26w_{i-2,j-1}^{l-1}+60w_{i-2,j}^{l-1}+13w_{i-2,j+1}^{l-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{l-1}+676w_{i-1,j-1}^{l-1}+1560w_{i-1,j}^{l-1}+338w_{i-1,j+1}^{l-1}+$$

$$+60w_{i,j-2}^{l-1}+1560w_{i,j-1}^{l-1}+3600w_{i,j}^{l-1}+780w_{i,j+1}^{l-1}+$$

$$+13w_{i+1,j-2}^{l-1}+338w_{i+1,j-1}^{l-1}+780w_{i+1,j}^{l-1}+169w_{i+1,j+1}^{l-1}).$$

Для $i=2m+1,\ j=2m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(w_{i-2,j-2}^{l-1}+13w_{i-2,j-1}^{l-1}+6w_{i-2,j}^{l-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{l-1}+338w_{i-1,j-1}^{l-1}+156w_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+60w_{i,j-2}^{l-1}+780w_{i,j-1}^{l-1}+360w_{i,j}^{l-1}+$$

$$+13w_{i+1,j-2}^{l-1}+169w_{i+1,j-1}^{l-1}+78w_{i+1,j}^{l-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(6w_{i-2,j}^{l-1}+13w_{i-2,j+1}^{l-1}+w_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$78w_{i-1,j}^{l-1}+169w_{i-1,j+1}^{l-1}+13w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$36w_{i,j}^{l-1}+78w_{i,j+1}^{l-1}+6w_{i,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(13w_{i-2,j-1}^{l-1}+60w_{i-2,j}^{l-1}+26w_{i-2,j+1}^{l-1}+w_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+169w_{i-1,j-1}^{l-1}+780w_{i-1,j}^{l-1}+338w_{i-1,j+1}^{l-1}+13w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+78w_{i,j-1}^{l-1}+360w_{i,j}^{l-1}+156w_{i,j+1}^{l-1}+6w_{i,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=m+3,...,2m$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(w_{i-2,j-2}^{l-1}+26w_{i-2,j-1}^{l-1}+66w_{i-2,j}^{l-1}+26w_{i-2,j+1}^{l-1}+w_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+13w_{i-1,j-2}^{l-1}+338w_{i-1,j-1}^{l-1}+858w_{i-1,j}^{l-1}+338w_{i-1,j+1}^{l-1}+13w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+6w_{i,j-2}^{l-1}+156w_{i,j-1}^{l-1}+396w_{i,j}^{l-1}+156w_{i,j+1}^{l-1}+6w_{i,j+2}^{l-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=2m+1$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(w_{i-2,j-2}^{l-1}+26w_{i-2,j-1}^{l-1}+60w_{i-2,j}^{l-1}+13w_{i-2,j+1}^{l-1}+$$

$$+13w_{i-1,j-2}^{l-1}+338w_{i-1,j-1}^{l-1}+780w_{i-1,j}^{l-1}+169w_{i-1,j+1}^{l-1}+$$

$$+6w_{i,j-2}^{l-1}+156w_{i,j-1}^{l-1}+360w_{i,j}^{l-1}+78w_{i,j+1}^{l-1}).$$

Для $i=2m+2,\ j=2m+2$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(w_{i-2,j-2}^{l-1}+13w_{i-2,j-1}^{l-1}+6w_{i-2,j}^{l-1}+$$

$$+13w_{i-1,j-2}^{l-1}+169w_{i-1,j-1}^{l-1}+78w_{i-1,j}^{l-1}+$$

$$+6w_{i,j-2}^{l-1}+78w_{i,j-1}^{l-1}+36w_{i,j}^{l-1}).$$

Для $i=m+3,...,2m,\ j=m+3,...,2m$ полагаем

$$\eta_{i,j}^{l-1}=\eta_{i,j}^{l-1}-$$

$$-A(w_{i-2,j-2}^{l-1}+26w_{i-2,j-1}^{l-1}+66w_{i-2,j}^{l-1}+26w_{i-2,j+1}^{l-1}+w_{i-2,j+2}^{l-1}+$$

$$+26w_{i-1,j-2}^{l-1}+676w_{i-1,j-1}^{l-1}+1716w_{i-1,j}^{l-1}+676w_{i-1,j+1}^{l-1}+26w_{i-1,j+2}^{l-1}+$$

$$+66w_{i,j-2}^{l-1}+1716w_{i,j-1}^{l-1}+4356w_{i,j}^{l-1}+1716w_{i,j+1}^{l-1}+66w_{i,j+2}^{l-1}+$$

$$+26w_{i+1,j-2}^{l-1}+676w_{i+1,j-1}^{l-1}+1716w_{i+1,j}^{l-1}+676w_{i+1,j+1}^{l-1}+26w_{i+1,j+2}^{l-1}+$$

$$+w_{i+2,j-2}^{l-1}+26w_{i+2,j-1}^{l-1}+66w_{i+2,j}^{l-1}+26w_{i+2,j+1}^{l-1}+w_{i+2,j+2}^{l-1}).$$

VII. Вычисляем итерационный параметр.

При программировании полагаем

$$\tau_{l-1} = \left(\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1} r_{i,j}^{l-1} w_{i,j}^{l-1}\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1} w_{i,j}^{l-1} \eta_{i,j}^{l-1}\right),\ k \in \mathbb{N}\ .$$

VIII. Вычисляем очередное приближение. Это массив

$$v_{i,j}^{l},\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2...,n,\ k \in \mathbb{N}.$$

Значения элементов этого массивов в последующих вычислениях не обязательно сохранять.

При программировании для $2 \le i \le n-1,\ 2 \le j \le n-1$ полагаем

$$v_{i,j}^{l} = v_{i,j}^{l-1} - \tau_{l-1} w_{i,j}^{l-1},\ l \in \mathbb{N}.$$

При программировании для $2 \le i \le n-1$ полагаем

$$v_{i,1}^{l-1} = v_{i,2}^{l-1}.$$

Для $1 \le j \le n-1$ полагаем

$$v_{1,j}^{l-1} = v_{2,j}^{l-1}.$$

Для $1 \le i \le n-1$ полагаем

$$v_{i,n}^{l-1} = 0.$$

Для $1 \le j \le n$ полагаем

$$v_{n,j}^{l-1} = 0.$$

IX. Проверяем условие остановки итераций по заранее задаваемой оценке относительной ошибки в более сильной норме, чем энергетическая норма в решаемой задаче

$$e_{l-1} \le e^2 e_0,\ l \in \mathbb{N},\ e = 0{,}001 \in (0;1).$$

Если условие остановки итераций не достигается, то все повторяем с пункта III.

Приложение 3. Свидетельство о регистрации программы численного моделирования деформации квадратной мембраны, закрепленной на двух смежных сторонах

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2014613985

Численное моделирование деформации квадратной мембраны, закреплённой на двух смежных сторонах

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ» (НИУ)) (RU)***

Авторы: ***Ушаков Андрей Леонидович (RU), Бухарин Иван Юрьевич (RU)***

Заявка № **2014611376**

Дата поступления **24 февраля 2014 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***14 апреля 2014 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов

Приложение 4. Свидетельство о регистрации программы численного моделирования перемещений пластины под действиями давлений при однородных краевых условиях

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015661153

Численное моделирование перемещений пластины под действиями давлений при однородных краевых условиях

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ» (НИУ)) (RU)***

Авторы: ***Ушаков Андрей Леонидович (RU), Артес Никита Олегович (RU)***

Заявка № **2015618103**

Дата поступления **04 сентября 2015 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***20 октября 2015 г.***

Заместитель руководителя Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий

Приложение 5. Свидетельство о регистрации программы численного решения неоднородного бигармонического уравнения в квадратной области при смешанных краевых условиях

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018619527

Численное решение неоднородного бигармонического уравнения в квадратной области при смешанных краевых условиях

Правообладатель: *федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» (ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)») (RU)*

Авторы: *Ушаков Андрей Леонидович (RU), Пономарев Виктор Сергеевич (RU), Котлованов Константин Юрьевич (RU)*

Заявка № **2018617059**

Дата поступления **06 июля 2018 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ *07 августа 2018 г.*

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

Приложение 6. Свидетельство о регистрации программы численного решения модельной задачи для уравнения Пуассона

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020619757

Численное решение модельной задачи для уравнения Пуассона

Правообладатель: ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» (RU)***

Авторы: ***Ушаков Андрей Леонидович (RU), Щеколдина Елена Сергеевна (RU)***

Заявка № **2020618486**

Дата поступления **04 августа 2020 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***24 августа 2020 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

g. 2020-14

Приложение 7. Свидетельство о регистрации программы асимптотически оптимального расчета балки при смешанных краевых условиях симметрии и Дирихле

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020664402

Асимптотически оптимальный расчет балки при смешанных краевых условиях симметрии и Дирихле

Правообладатель: ***федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» (ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)») (RU)***

Авторы: ***Ушаков Андрей Леонидович (RU), Мельцайкин Евгений Андреевич (RU)***

Заявка № **2020663735**

Дата поступления **10 ноября 2020 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***12 ноября 2020 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

д. 2020-52

Приложение 8. Свидетельство о регистрации программы асимптотически оптимального расчета распределения температуры и перемещения в стержнях

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020665998

Асимптотически оптимальный расчет распределения температуры и перемещения в стержнях

Правообладатель: ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)» (RU)***

Авторы: ***Ушаков Андрей Леонидович (RU), Мельцайкин Евгений Андреевич (RU)***

Заявка № **2020664697**

Дата поступления **23 ноября 2020 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***03 декабря 2020 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

8 2020-53

Приложение 9. Свидетельство о регистрации программы численного решения модельной задачи для экранированного уравнения Пуассона

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020667216

Численное решение модельной задачи для экранированного уравнения Пуассона

Правообладатель: ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)» (RU)***

Авторы: ***Ушаков Андрей Леонидович (RU), Мельцайкин Евгений Андреевич (RU)***

Заявка № **2020666269**

Дата поступления **09 декабря 2020 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***21 декабря 2020 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

2020-67

Приложение 10. Свидетельство о регистрации программы расчета поля температуры от тепловых источников

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022663814

Расчет поля температуры от тепловых источников

Правообладатель: ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» (ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)») (RU)***

Авторы: ***Ушаков Андрей Леонидович (RU), Мельцайкин Евгений Андреевич (RU)***

Заявка № **2022663254**

Дата поступления **18 июля 2022 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***20 июля 2022 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

2022-31