



УТВЕРЖДАЮ:  
Ректор ФГБОУ ВО МГТУ им. Г.И. Носова  
профессор М.В. Чукин  
«02» июня 2021 г.

## **О Т З Ы В**

**ведущей организации на диссертационную работу**

**Гавриловой Ольги Витальевны**

**«Численно-аналитические методы и алгоритмы исследования  
математических моделей**

**автокаталитической реакции с диффузией и**

**распространения нервного импульса в мембранной оболочке»,**

**представленную на соискание ученой степени кандидата**

**физико-математических наук по специальностям 05.13.18 –**

**Математическое моделирование, численные методы и**

**комплексы программ, 05.13.01 – Системный анализ,**

**управление и обработка информации (информатика,**

**информационно-вычислительное обеспечение)**

### **1. Актуальность темы исследования**

В настоящее время актуальной задачей математического моделирования является исследование химических и биологических процессов, описываемых нелинейными уравнениями в частных производных. Основная задача такого исследования – прогнозирование течения процессов во времени и отказ от натурных экспериментов, которые подчас невозможно осуществить при малых значениях компонент из-за технических ограничений. Диссертационная работа О.В. Гавриловой посвящена аналитическому и численному исследованиям математических моделей автокаталитической реакции с диффузией и распространения нервного



импульса в мембране, которые редуцируются к полулинейным уравнениям соболевского типа. В работе проведено теоретическое исследование, разработаны алгоритмы методов нахождения численного решения и соответствующие комплексы программ, проведены вычисленные эксперименты. Полученные результаты позволяют решать ряд важных прикладных задач в химии, биологии, экологии, генетики при изучении процессов химической кинетики, популяционной динамики и биофизики, таких как перенос кислорода в кровеносной системе, распространение нервного импульса в мембранной оболочке и других.

В диссертационном исследовании изучаются математические модели, которые можно отнести к классу реакции-диффузии, описывающие процессы и явления биологии и химии. Для этого класса исследуемых математических моделей Р.Дж. Фиелдом было обнаружено «расслоение» результатов проводимых экспериментов при одинаковых начальных условиях. Одним из подходов изучения данного феномена является переход к изучению вырожденных моделей, позволяющий выявить условия, налагаемые на начальные данные и параметры задачи, при которых решение неединственно. В основе такого подхода лежит метод фазового пространства, разработанный Г.А. Свиридюком и его учениками для уравнений соболевского типа. При анализе фазовых пространств уравнений соболевского типа ими было обнаружено, что они могут содержать особенности типа сборок и складок Уитни. В работах А.Ф. Гильмутдиновой и И.К. Тринеевой показана возможная неединственность решения задачи Шоултера – Сидорова для полулинейного уравнения соболевского типа.

Развитие современной биофизики подразумевает исследование не только двухкомпонентных математических моделей, но и моделирование более сложных многокомпонентных биологических систем. В докторской диссертации А.И. Лобанова была поставлена проблема исследования многокомпонентных биологических систем, описываемых с помощью



уравнений типа реакции-диффузии, в частности процессов переноса кислорода в кровеносной системе и распространения нервного импульса в многокомпонентной мембранной оболочке. В.И. Некоркиным и его учениками были исследованы невырожденные трех- и четырехкомпонентные модели распространения нервного импульса в мембране в случае одного активатора и нескольких (двух или трех) ингибиторов. В диссертационной работе О.В. Гавриловой исследована задача оптимального управления для вырожденной многокомпонентной модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке, в которой возможно существование не одного, а нескольких активаторов.

Из всего вышесказанного следует сделать вывод, что задача по разработке аналитических и численных методов и алгоритмов исследования вырожденных математических моделей автокаталитической реакции с диффузией и распространения нервного импульса в мембранной оболочке является актуальной.

## **2. Характеристика содержания работы**

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Во введении приводятся историография вопроса и постановка задачи. Обосновываются актуальность, научная новизна и практическая значимость работы. Формулируется цель, ставятся задачи исследования.

Первая глава состоит из семи параграфов и посвящена исследованию задачи Шоултера – Сидорова для вырожденной математической модели автокаталитической реакции с диффузией. Рассмотрена математическая модель автокаталитической реакции с диффузией во всех случаях вырожденности, кроме того, для каждого случая исследовано и построено фазовое пространство. Разработан алгоритм численного метода нахождения решения задачи Шоултера – Сидорова в случае множественности решений и описан комплекс программ на ЭВМ, разработанный в вычислительной



среде Maple 2017 с применением параллельных вычислений. Приведены результаты вычислительных экспериментов на отрезке, прямоугольнике и на связном ориентированном графе.

Вторая глава состоит из семи параграфов и посвящена исследованию задачи Шоултера – Сидорова для вырожденной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке. Рассмотрена математическая модель распространения нервного импульса в мембранной оболочке во всех случаях вырожденности, кроме того, для каждого случая исследовано и построено фазовое пространство. Разработан алгоритм численного метода нахождения решения задачи Шоултера – Сидорова в случае множественности решений и описан комплекс программ на ЭВМ, разработанный в вычислительной среде Maple 2017 с применением параллельных вычислений. Приведены результаты вычислительных экспериментов на отрезке и на связном ориентированном графе.

Третья глава состоит из шести параграфов и содержит результаты аналитического и численного исследований многокомпонентной математической модели оптимального регулирования распространением нервного импульса в мембранной оболочке. Проводится исследование многокомпонентной математической модели процесса возбуждения нервного импульса в мембранной оболочке и аналитическое исследование задачи оптимального управления для этой модели. Также строится алгоритм нахождения управления процесса распространения нервного импульса в мембранной оболочке на основе методов декомпозиции и штрафа. Приведены результаты вычислительных экспериментов на отрезке, параллелепипеде и на связном ориентированном графе.

В Заключении представлены итоги выполненного исследования, соответствие полученных результатов паспортам специальностей 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации



(информатика, информационно-вычислительное обеспечение), рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.

### **3. Научная новизна**

*В области математического моделирования.*

Исследованы вырожденные математические модели автокаталитической реакции с диффузией и распространения нервного импульса в мембранной оболочке, фазовые пространства которых имеют особенности – складку и сборку Уитни, соответственно; установлена связь между наличием особенностей фазового пространства и неединственностью или несуществованием решений. Впервые найдены условия на начальные данные и параметры моделей, при которых задача имеет одно или несколько решений.

*В области численных методов.*

Разработан и применен численный метод нахождения решений вырожденных математических моделей автокаталитической реакции с диффузией и распространения нервного импульса в мембранной оболочке для оценки состояний исследуемых систем.

*В области комплексов программ.*

Разработаны программные комплексы и проведены вычислительные эксперименты для исследуемых моделей с использованием методов параллельных вычислений в процедуре поиска нескольких решений.

*В области системного анализа, управления и обработки информации.*

Разработан аналитический метод и проведено исследование вырожденной многокомпонентной математической модели оптимального регулирования процесса распространения нервного импульса в мембранной оболочке как задачи оптимального управления; разработан алгоритм численного метода нахождения управления решений вырожденной



многокомпонентной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке; разработано программное обеспечение и проведены вычислительные эксперименты для вырожденной многокомпонентной математической модели оптимального регулирования процесса распространения нервного импульса в мембранной оболочке.

#### **4. Степень обоснованности и достоверности основных положений и выводов**

Обоснованность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, обеспечивается корректным применением теории уравнений соболевского типа и теории оптимального управления, численных методов, математического моделирования на основе уравнений соболевского типа, методов оптимизации, методов распараллеливания вычислений и системного анализа. Корректность выводов обеспечивается строгостью доказательств и их совпадением в частных случаях с известными ранее результатами, подтверждением полученных результатов и сделанных выводов вычислительными экспериментами на модельных примерах.

Полученные результаты своевременно опубликованы, апробированы на различных всероссийских и международных конференциях. Диссертация О.В. Гавриловой имеет стройную, логически законченную структуру. По теме диссертации соискателем опубликовано 16 научных работ. Среди них 6 статей в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК Министерства науки и высшего образования Российской Федерации для публикации результатов диссертационного исследования, 2 статьи в журналах, индексируемых базами данных WoS и Scopus, получено 1 свидетельство о регистрации программ для ЭВМ и 1 свидетельство о регистрации программного комплекса.



## 5. Значимость для науки и практики выводов и рекомендаций диссертации

Полученные результаты развивают теории оптимального управления, уравнений соболевского типа, функционального и системного анализом. Итоги численно-аналитического исследования позволяют сделать вывод о применимости и эффективности предлагаемых методов при решении различных задач биофизики и кинетической химии, например, при известных параметрах систем и начальных данных выявить наличие нескольких решений, а в условии единственности решений исследовать задачу оптимального регулирования, в том числе и в многокомпонентном случае.

Кроме того, разработка новых программных систем с качественным интерфейсом пользователя для проведения вычислительных экспериментов, с адаптацией и интеграцией существующих программ позволит внедрить результаты в технологический и учебный процессы. Достоинством диссертации является сочетание теоретических выводов и возможности применения результатов в актуальных прикладных задачах. Теоретические результаты диссертации, предложенные алгоритмы численных методов и программ представляют интерес для применения в исследованиях научных коллективов Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Института динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, российских высших учебных заведений, которые проводят исследования в области теории уравнений соболевского типа, сингулярно возмущенных задач и оптимального управления, таких как Воронежский государственный технический университет, Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Новосибирский государственный университет, Иркутский государственный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургский государственный



университет, Югорский государственный университет, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинский государственный университет и Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова.

Содержание автореферата соответствует основному содержанию диссертации. Диссертация и автореферат написаны грамотно, стиль изложения доказательный, оба документа оформлены в соответствии с установленными требованиями.

## **6. Замечания по диссертации**

Содержательный анализ материалов диссертационной работы позволил сделать следующие замечания:

1. В диссертации не приводятся результаты вычислительного эксперимента единственности решения задачи Шоултера – Сидорова для математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке в случае  $\varepsilon_2=0$ , хотя математическая модель и численный метод описаны для этого случая, и в комплексе программ этот случай реализован.
2. Возможно, для удобства пользователя было бы хорошо объединить разработанные программы, создав для них общий интерфейс.
3. Во множествах (1.3.7) во втором уравнении системы используется  $r$  или  $r_+$ , при этом в первом уравнении всегда упоминается только  $r$ . Не является ли более корректным использование  $r$  или  $r_+$  вместо  $r$  и в первом уравнении?
4. В третьей главе в отличие от первых двух в алгоритме не проводится проверка на наличие нескольких решений. Возможно ли осуществление этой проверки для данного алгоритма?



5. К недостаткам оформления можно отнести некоторое количество грамматических ошибок, речевых повторов, опечаток.

Приведенные замечания не уменьшают значимости представленных научных результатов и не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы.

## **7. Общая оценка работы**

Диссертационная работа О.В. Гавриловой «Численно-аналитические методы и алгоритмы исследования математических моделей автокаталитической реакции с диффузией и распространения нервного импульса в мембранной оболочке» представляет собой законченную научно-квалификационную работу, в которой содержится решение научной задачи, имеющей значение для математического моделирования и численных методов. Полученные результаты соответствуют научным специальностям 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (информатика, информационно-вычислительное обеспечение). Результаты диссертации являются новыми, строго обоснованы и получены автором самостоятельно. Автореферат и публикации достаточно полно отражают содержание диссертации.

Диссертационная работа соответствует пп. 9–14 Положения о присуждении ученых степеней Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Гаврилова Ольга Витальевна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальностям 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (информатика, информационно-вычислительное обеспечение).



Отзыв подготовила кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова, Смирнова Лариса Викторовна. Диссертационная работа и отзыв обсуждены, отзыв одобрен и утвержден на заседании кафедры прикладной математики и информатики, " 01" июня 2021 г., протокол № 12.

Кафедра прикладной математики и информатики МГТУ им. Г.И. Носова:

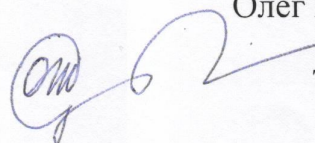
(3519) 29-85-11, pmi@magtu.ru

Доцент кафедры прикладной математики  
и информатики МГТУ им. Г.И. Носова,  
кандидат физ.-мат. наук, доцент



Лариса Викторовна  
Смирнова

Председатель заседания кафедры ПМИИ,  
Проректор по научной и инновационной  
работе, доктор техн. наук, профессор



Олег Николаевич  
Тулупов

Сведения о ведущей организации:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждения  
высшего образования "Магнитогорский государственный технический  
университет им. Г.И. Носова"

455000, Россия, Челябинская обл., г. Магнитогорск, пр. Ленина, д. 38.

Сайт организации: <http://www.magtu.ru/>

Факс: +7(3519) 235-759

E-mail: [mgtu@magtu.ru](mailto:mgtu@magtu.ru)