

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

На правах рукописи

Опрышко Ольга Владимировна



ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИДОННЫХ ЧАСТЕЙ
ТОРНАДО И ТРОПИЧЕСКОГО ЦИКЛОНА
В СТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЕ

1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Крутова И. Ю.

Снежинск – 2023

Оглавление

Введение	4
1 Математическая модель, описывающая течение газа в придонной части восходящих закрученных потоков при их формировании от поверхности Земли	12
1.1 Система уравнений газовой динамики для описания течения газа в придонной части вихря	14
1.2 Математическая модель Баутина	16
1.3 Однозначная разрешимость модели Баутина в стационарном случае	19
1.4 Модель Баутина для радиальных течений	24
1.5 Математический метод моделирования течения газа в придонной части потока	26
1.6 Кинетическая энергия придонной части восходящего закрученного потока	43
1.7 Алгоритм валидации математической модели для моделирования стационарного течения газа в придонной части торнадо на основе данных натурального эксперимента	49
1.8 Выводы по первой главе	50
2 Система компьютерного и имитационного моделирования для построения стационарного придонного течения при формировании торнадо от поверхности Земли	51
2.1 Алгоритм численного метода определения радиуса притока	51
2.2 Алгоритм численного метода нахождения газодинамических параметров и кинетической энергии вихря	53
2.3 Программный блок для определения радиуса притока	55

2.4	Программный блок для построения приближенных решений стационарного придонного течения и расчета кинетической энергии потока при формировании торнадо от поверхности Земли	59
2.5	Выводы по второй главе	64
3	Вычислительные эксперименты	65
3.1	Численное моделирование натурального эксперимента	65
3.2	Численное моделирование газодинамических параметров, входящих в состав вторых коэффициентов ряда	86
3.3	Верификация вычислительных экспериментов, численные модели которых построены на основе математических моделей для вторых коэффициентов ряда	92
3.4	Верификация вычислительных экспериментов, численные модели которых построены на основе математических моделей для третьих коэффициентов ряда	102
3.5	Кинетическая энергия восходящих закрученных потоков	113
3.6	Выводы по третьей главе	116
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	117
	СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	119
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	120
	ПРИЛОЖЕНИЕ А	134
	ПРИЛОЖЕНИЕ Б	136

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Вихри, смерчи, торнадо сопровождают человека на протяжении многих столетий. Они зарождаются при достаточно теплых погодных условиях из прогретого воздуха, который устремляется ввысь. Восходящие закрученные потоки характеризуются тем, что набирают высокие скорости и разрушают всё на своём пути, оставляя за собой массу разрушений. Подобные течения существуют достаточно продолжительное время.

Исторически ученые предполагали [41, 42], что вращение торнадо начинается в грозовых облаках, создавая воронку, которая движется вниз. Эта теория соответствует тому, что охотники за штормами обычно визуальным образом наблюдают в полевых условиях. Часто, заметны воронкообразные облака, постепенно опускающиеся к Земле.

Однако, в результате последнего исследования с новым доплеровским радаром Я. Хаузер выяснилось, что свое начало торнадо берет от Земли [53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 68, 71, 73, 74].

По данным (фотографий и видеороликов), которые собрал А. Сеймон, географ из Аппалачского государственного университета в Буне, и радиолокационным данным, собранными Я. Хаузер появились прямые доказательства вращения на Земле до вращения на высотах. Во всех наборах данных, с которыми был проведен анализ, ни один из вихрей не был сформирован по традиционной схеме «сверху вниз» [76].

Фундаментальной частью настоящей работы является исследование математической модели, которая учитывает теорию происхождения и функционирования вихревого потока воздуха, впервые предложенную и описанную в 2008 году профессором С.П. Баутиным [8], которая предполагает формирование торнадо от поверхности Земли. Рассматривается система уравнений газовой динамики

при учете действия сил тяжести и Кориолиса.

В научной литературе изучение вихрей вызывает немалый интерес ([29, 41, 42, 72]), но из-за своих разрушительных качеств их достаточно опасно наблюдать и изучать в природе. Численное моделирование торнадо является наиболее безопасным способом для изучения физических процессов, происходящих в вихре, которое позволяет приблизительно оценить силу потока.

Актуальность работы обуславливается необходимостью понимания сути физических процессов, происходящих в восходящих закрученных потоках, важностью тщательного и глубокого изучения природы возникновения вихрей для раннего предупреждения [23] и эффективной борьбы с их разрушительными последствиями.

Степень разработанности темы

В книгах Д.В. Наливкина [41, 42] и А.Ю. Вараксина [27, 29] описаны примеры природных торнадо и тропических циклонов, за которыми наблюдали в течение длительного промежутка времени. Многочисленное число исследователей активно изучают природное явление [44, 45, 46, 47, 50, 52, 57, 60, 64, 69, 70]. Рассматриваются разные математические модели, которые описывают вихревые течения. Но нет полного описания процесса зарождения, функционирования и разрушения торнадо, которое могло бы объяснить откуда идет постоянный приток энергии, как возникает закрутка или формируется поток при зарождении вихря от поверхности Земли.

В работе [2] исследуется модель, где в основе механизма взаимодействия «вихревых нитей» лежит закон Био-Савара, действием которого обусловлено самоиндуцированное движение нитей с учетом вязкостных эффектов. В работе [52] рассматривается математическая модель, которая состоит из системы уравнений, включающих в себя: уравнение неразрывности, уравнение движения, уравнение теплопроводности с источником тепловой энергии, уравнение состояния идеального газа, записанных во вращающейся системе координат. Рассматривается механизм самоподдержания и усиления вихрей. Зафиксировано, что при выделении тепловой энергии часть энергии переходит в энергию вращательного движения в результате действия силы плавучести и силы Кориолиса.

Согласно теории, предложенной в [3]: торнадо и смерчи возникают из тихо-

го мезо-антициклона, который формируется, например, в нижней или боковой части грозового облака с размером примерно в один километр. Он заполнен быстро вращающимися турбулентными вихрями. Формируется циклон. Описывается схема функционирования торнадо, которая предполагает в качестве источника энергии, питающим торнадо – сильно вращающиеся турбулентные вихри.

В [66] моделируется турбулентный перенос крупными вихрями (LES – large-eddy simulation) в области углового течения вихря торнадо для одного конкретного набора физических условий.

В научной школе профессора С. П. Баутина рассматривается теория происхождения вихрей от поверхности Земли [25]. Восходящие закрученные потоки исследуются на этапе зарождения, функционирования и разрушения. В качестве источника энергии рассматривается сила Кориолиса, которая обладает вращательным моментом и участвует в установлении закрученного движения газа. Найдены ответы на вопросы: каким образом формируется вихрь, как он приобретает закрученное движение и где находится источник энергии для его поддержания. Был установлен факт появления закрутки и определено направление ее движения. Помимо восходящих закрученных потоков, которые переносят воздух рассматриваются и огненные смерчи. Помимо разного происхождения вихрей исследуются разные области этих вихрей при учете тех или иных условий: придонная или вертикальная части потока.

Также рассматривались задачи о трехмерном нестационарном движении газа возле нагревающегося цилиндра, исследовались нестационарные потоки газа до выхода потока на стационарный режим [26]. В работе [1] представлено математическое моделирование трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в восходящем закрученном потоке, вызванного вертикальным продувом и при условии действия сил тяжести и Кориолиса. Проведено численное построение решений полной системы уравнений Навье-Стокса, описывающих течения политропного газа в восходящих закрученных потоках и учитывающих диссипативные свойства вязкости и теплопроводности газа как упругой сплошной среды. В работе [4] представлено математическое моделирование нестационарных трехмерных течений сжимаемого газа с вязкими и теплопроводными свойствами в закрученном температурном потоке,

инициированном локальным нагревом подстилающей поверхности одним источником нагрева, несколькими источниками нагрева и нагревом вертикально расположенной области при действии сил тяжести и Кориолиса.

В основе настоящего исследования лежит хорошо изученная математическая модель – система уравнений газовой динамики, которая достаточно точно передает природное течение газа. Данная математическая модель, действующая в условиях сил тяжести и Кориолиса, учитывает законы сохранения массы, импульса и энергии. Диссертационное исследование посвящается математическому и численному моделированию течения газа в придонной области потока, которое позволяет определить кинетическую энергию установившегося торнадо.

Для описания процесса функционирования потока были использованы результаты многочисленных наблюдений, которые позволили сформировать шкалу Фудзиты [72], где классифицированы торнадо. В таблице приведена информация о максимальной скорости ветра и ширине следа, оставленного после пройденного вихревого потока.

Главной идеей работ [8, 10, 13, 16, 21, 31, 34, 35], является то, что для зарождения вихревого потока воздуха необходима дополнительная сила, которая постоянно присутствует и имеет вращательную составляющую – сила Кориолиса. Составляющая этой силы заключается не в производстве самой работы, а во вспомогательном импульсе.

Целью исследования является математическое моделирование придонной области вихря, повторяющей природное явление по данным натуральных наблюдений и определение кинетической энергии потока с разработкой алгоритмов численных методов и системы компьютерного и имитационного моделирования.

Задачи исследования:

1. Разработать математический метод моделирования течения газа в придонной части потока, определяющий газодинамические параметры торнадо в рамках модели Баутина для стационарного случая.
2. Разработать численный метод определения газодинамических параметров потока на основе математического метода моделирования придонного природного течения газа.

3. Реализовать разработанные алгоритмы численных методов в рамках модели Баутина в виде системы компьютерного и имитационного моделирования.
4. Провести вычислительные эксперименты для определения газодинамических параметров потока и кинетической энергии с учетом известных данных натуральных наблюдений за торнадо.

Методология и методы диссертационного исследования

Объектом исследования является стационарное течение газа в придонной части восходящего закрученного потока.

Предметом исследования является численные методы математического моделирования течения газа в придонной части восходящего закрученного потока.

Исследование опирается на методы математического моделирования с использованием математической модели – системы уравнений газовой динамики, основа которой заложена в модели Баутина для стационарного случая. Это позволяет моделировать в соответствии с данными натуральных наблюдений течение газа в придонной области потока. Численный метод, который рассчитывает газодинамические параметры, а затем кинетическую энергию вихря разработан на основе математического метода моделирования газодинамических параметров потока.

Краткое содержание диссертации

Диссертационное исследование состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, состоящего из 117 наименований и двух приложений. Во **введении** обосновывается актуальность выбора темы диссертационной работы, степень разработанности темы, сформулированы цели и задачи исследования, представлена научная новизна, теоретическая и практическая значимость, основные результаты и положения, выносимые на защиту, степень достоверности, апробация результатов работы и публикации. В **первой** главе описаны математические модели, которые рассматриваются для моделирования придонного течения газа: модель Баутина в стационарном случае (1.2), (1.3), (1.8), (1.9), модель Баутина для радиальных течений (1.19), (1.20), (1.21), модель (1.27),(1.28), модель (1.44), (1.45), модель (1.66), (1.67) и аналитическая процедура нахождения кинетической энергии потока. Во **второй** главе описаны

разработанные численные методы для нахождения газодинамических параметров потока и кинетической энергии. Описана схема работы системы компьютерного и имитационного моделирования. В **третьей** главе моделируется аналог натурального эксперимента по известным данным природных торнадо из таблицы Фудзиты. Представлена верификация вычислительных экспериментов, численная модель которых построена на основе математических моделей для двух и трех коэффициентов ряда.

Научная новизна результатов диссертационной работы по трем областям специальности 1.2.2. сводится к следующим положениям.

Математическое моделирование

Разработан новый математический метод моделирования придонного течения газа, повторяющий данные натуральных наблюдений в рамках математической модели для стационарного случая. Впервые доказаны необходимые и достаточные условия для однозначной разрешимости модели Баутина в стационарном случае.

Численное моделирование

Разработан новый численный метод определения газодинамических параметров и кинетической энергии восходящих закрученных потоков в рамках математической модели, учитывающей формирование вихрей от поверхности Земли.

Комплексы программ

Разработан комплекс программ для построения приближенных решений стационарного придонного течения при формировании торнадо от поверхности Земли, который позволяет определить газодинамические параметры потока для стационарного придонного течения, повторяющие данные натуральных наблюдений с последующим расчетом кинетической энергии потока для классов торнадо из таблицы Фудзиты.

Все программы написаны на языке программирования C++. Для написания пользовательского интерфейса используется C#. Визуализация реализована с помощью математического пакета MatLab. Для всех программ пройдена государственная регистрация.

Теоретическая значимость

Исследование дополняет теоретические результаты по вопросам однозначной разрешимости модели Баутина в стационарном случае. Представленные резуль-

таты развивают теорию возникновения восходящих закрученных потоков от поверхности Земли, что подтверждается практическими наблюдениями.

Практическая значимость работы состоит в следующем: полученные значения кинетической энергии торнадо позволяют определить какую энергию нужно затратить, чтобы разрушить поток; разработаны новые методы для построения течения газа в придонной части потока для модели Баутина в стационарном случае; проведены вычислительные эксперименты, которые позволяют моделировать торнадо, повторяющие по газодинамическим характеристикам данные природных восходящих закрученных потоков.

Реализация и внедрение

Результаты диссертационного исследования обладают научной новизной, а также практической значимостью, о чем свидетельствует акт о внедрении от ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. академика Е.И. Забабахина» (Приложение Б).

Степень достоверности результатов

В основе математического моделирования лежит хорошо известная математическая модель, на основе которой описывается придонное природное течение газа в соответствии с данными натурных наблюдений. Результаты, полученные в ходе работы обосновываются строгими математическими доказательствами. Имеется полное согласие между теоретическими положениями и вычислительными экспериментами, которые были проведены в ходе работы.

На защиту выносятся положения, соответствующие паспорту специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

Пункт 5 – в рамках разработки новых математических методов и алгоритмов валидации математических моделей объектов на основе данных натурального эксперимента или на основе анализа математических моделей: математический метод моделирования газодинамических параметров потока для придонной части стационарного течения на основе математической модели Баутина по данным натурального эксперимента.

Пункт 6 – в рамках разработки систем компьютерного и имитационного моделирования, алгоритмов и методов имитационного моделирования на основе анализа математических моделей (технические науки): система компьютерного и имитационного моделирования на основе математической модели

Баутина для построения приближенных решений стационарного придонного течения при формировании потока от поверхности Земли.

Пункт 8 – в рамках комплексных исследований научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента: комплексное исследование построения газодинамических параметров придонной области восходящего закрученного потока для известных классов торнадо на основе математического и численного моделирования с применением вычислительного эксперимента.

В соответствии со специальностью в диссертации представлены результаты из трех областей: математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Апробация результатов

Основные положения и результаты диссертационного исследования докладывались на 13 международных [92 - 104] и 13 всероссийских [105 - 117] конференциях.

Личный вклад автора

Из работ, выполненных в соавторстве, в диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором. Научному руководителю И. Ю. Крутовой принадлежит общая постановка исследовательской задачи.

Публикации

Полученные результаты диссертационного исследования размещены в 34 печатных изданиях [78 - 82], [89 - 117], 3 из которых входят в перечень ВАК [78 - 80], 2 - входят в международные реферативные базы данных и системы цитирования [81 - 82] (MathSciNet, zbMATH), препринт [83], свидетельства государственной регистрации программ для ЭВМ [84 - 89], других изданиях [90 - 91], 13 – в трудах международных конференций [92 - 104], 13 - в трудах всероссийских конференций [105 - 117].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы и двух приложений. Текст диссертации содержит 136 страницы печатного текста, 129 рисунков и 29 таблиц.

Глава 1

Математическая модель, описывающая течение газа в придонной части восходящих закрученных потоков при их формировании от поверхности Земли

Первая глава диссертации посвящена описанию природе восходящих закрученных потоков, теории возникновения вихрей от поверхности Земли. Представлена математическая модель С. П. Баутина в стационарном случае, на основе которой смоделировано природное придонное течение газа при формировании торнадо от поверхности Земли и в рамках модели дано объяснение каким образом поддерживается вихревой поток и как возникает закрученное движение.

Восходящие закрученные потоки формируются из стремящегося ввысь течения теплого воздуха, прогретого солнцем. При сложившихся определенным образом условиях, подобный поток приобретает высокие скорости. В таком случае, он становится разрушительным. Вихри поднимают высоко вверх тонны мусора, песка и пыли рис. 1.1.

Формирование восходящего закрученного потока включает в себя определенные этапы. Изначально происходит нагревание солнечными лучами ровной местности, это способствует появлению конвективного потока, который стремится вверх. Круговое (в дальнейшем радиальное) течение, направленное к оси вихря (точка 0 на рис. 1.2) в силу вращения Земли образует закрутку против хода часовой стрелки в Северном полушарии, и по ходу часовой стрелки – в Южном.

Частицы пыли и движущийся воздух закручиваются спиралью вокруг ради-



Рис. 1.1 - Торнадо над сушей

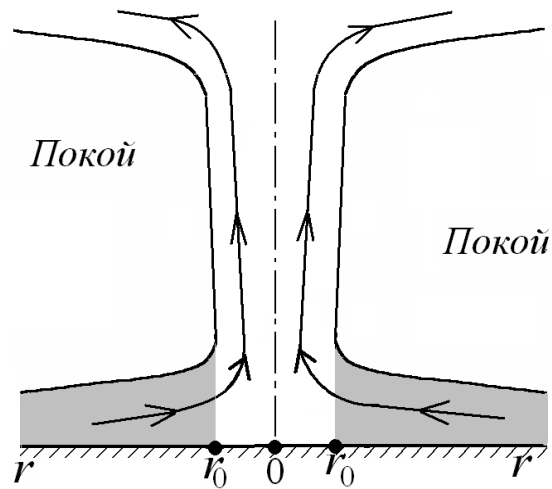


Рис. 1.2 - Схема восходящего закрученного потока

уса стока торнадо в придонной его части (на рисунке выделена серым цветом) после этого движение идет в вертикальную часть потока, где появляется непроницаемая поверхность – в газовой динамике такая поверхность имеет название «контактной». Внутри образуется область с пониженным давлением. В силу разницы давлений внешний воздух всасывается в вертикальную область потока, это называется самоподдерживающейся фазой сформированного вихря.

На рис. 1.2 продемонстрирована схема функционирования восходящего закрученного потока, здесь $r = r_{in}$ – расстояние от начала формирования закрутки – радиуса притока торнадо, r_0 – радиус стока. В придонной части наблюдается множество разрушений, которые остаются после пройденного торнадо.

1.1 Система уравнений газовой динамики для описания течения газа в придонной части вихря

В данном параграфе рассматривается математическая модель, основой которой является система уравнений газовой динамики. Она учитывает действие сил тяжести и Кориолиса. Эта система уравнений передает законы сохранения массы, импульса и энергии в дифференциальной форме. Также учитываются законы термодинамики через использование конкретных уравнений состояния рассматриваемой сплошной среды. С учетом определенных масштабных значений расстояния и скорости система уравнений газовой динамики записывается в безразмерных переменных.

Особенностью рассматриваемой математической модели является наличие дополнительных слагаемых. Этими слагаемыми предусматривается учет вращения Земли и сопровождающее его сила инерции, которое является силой Кориолиса. В дополнении ко всему учитывается влияние силы тяжести, которая передается через постоянное значение ускорения свободного падения.

Для того, чтобы в восходящем закрученном потоке описать придонное течение воздуха, была введена прямоугольная система координат с осями: Ox , Oy , Oz , которая вращается вместе с Землей (рис. 1.3, б).

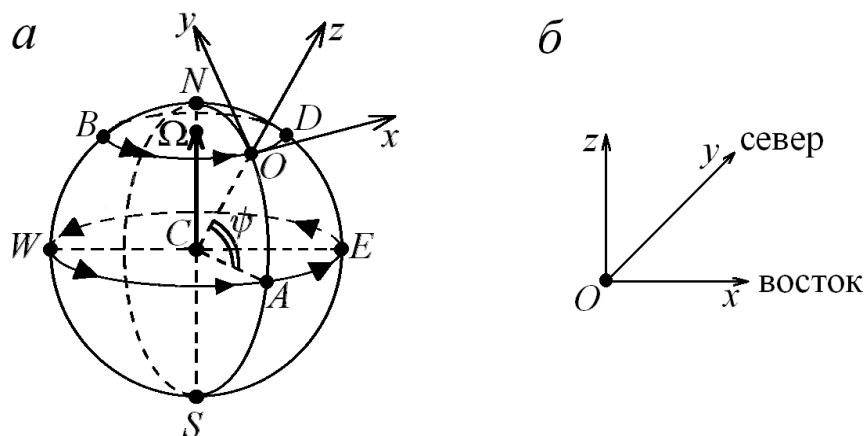


Рис. 1.3 - Прямоугольная система координат, которая вращается вместе с Землей

Предполагается, что точка O находится на поверхности Земли, также в ней расположилось начало декартовой системы координат; ψ – широта точки O (рис. 1.3, а); Ω – вектор угловой скорости вращения Земли.

Поскольку в восходящих закрученных потоках нет разрывов и движение происходит непрерывно рассматриваются изоэнтронтопические течения. Функция

$s = A(S)$ – константа, тогда закон сохранения энергии выполняется тождественно.

Вихревому потоку присуща симметрия вращения, тогда течение газа удобнее рассмотреть в цилиндрических координатах: r, φ, z , где r – полярный радиус, φ – полярный угол в плоскости xOy .

Для нестационарного случая система уравнений газовой динамики в условиях действия сил тяжести и Кориолиса, далее по тексту модель Баутина, имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_t + uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma - 1)}{2}c \left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma - 1)}cc_r = av - bw \cos \varphi, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{2}{(\gamma - 1)}\frac{c}{r}c_\varphi = -au + bw \sin \varphi, \\ w_t + uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma - 1)}cc_z = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

У каждого вихря есть определенные фазы: формирования, функционирования и разрушения. Восходящему закрученному потоку требуется некоторое время для того, чтобы сформировать устойчивое движение в придонной части и далее в вертикальной. Полностью сформированный поток в природе существует достаточное длительное время. Начиная с некоторого момента, вихрь выходит на такой режим, когда в каждой точке пространства движение происходит, но наблюдается не изменяющаяся картина устоявшегося потока. Для сформированного вихря полагается производная по времени равная нулю и рассматривается стационарный случай. В диссертационной работе исследуется модель Баутина в стационарном случае (1.2). Стандартным образом введены безразмерные переменные с учетом масштабных значений скорости – u_{00} , скорости звука газа – c_{00} , расстояния – r_{00} : $f = \frac{f_*}{f_{00}}$, здесь f_* – размерное значение безразмерной величины f , f_{00} – масштабное значение безразмерной величины f .

1.2 Математическая модель Баутина

Для модели Баутина в стационарном случае (1.2) ставится задача с начальными данными, заданными на плоскости $z = 0$ и поставлены условия для окружной и радиальной скорости газа на радиусе цилиндра в точке $r = r_{in}$. Вертикальная компонента вектора скорости газа полагается равной нулю $w = 0$. Плоскость $z = 0$ является непроницаемой для газа. Такая поверхность в газовой динамике носит название «контактной». Если в системе уравнений газовой динамики имеется две или три пространственные переменные, тогда контактная поверхность заведомо является характеристикой. Так как в торнадо не наблюдается разрывов, то рассматриваются изоэнтропические течения. А для изоэнтропических течений кратность контактной характеристики равна двум. Для того, чтобы поставленная задача с начальными данными, заданными на плоскости $z = 0$ имела единственное решение, на другой поверхности цилиндра в точке $r = r_{in}$, $r_{in} = \text{const} > 0$ задаются два условия для радиальной и окружной компонент вектора скорости газа. Детально рассматривается случай, когда радиальная компонента вектора скорости u является малым отрицательным числом $u_{in} = \text{const} < 0$, а окружная компонента вектора скорости газа $-v$ равна нулю. С точки зрения газовой динамики это означает, что через поверхность цилиндра в его внутреннюю область задан постоянный радиальный приток, который не имеет закрутки.

При объявленных условиях поставленная задача имеет единственное локально-аналитическое решение, которое можно представить в виде ряда по степеням z , сходящегося в окрестности плоскости $z = 0$. Коэффициенты этого ряда зависят от переменных r, φ, z .

Функции c_0, u_0, v_0 , которые заданы на плоскости $z = 0$ не могут быть произвольными. Эти функции должны удовлетворять необходимым условиям разрешимости, рассматриваемой задача. Для случая, когда кратность характеристики равна двум, условий для разрешимости задачи тоже два. Полученные условия представимы в виде двух уравнений с частными производными. Третье уравнение имеет газодинамический смысл, в нем заложен закон сохранения массы в дифференциальной форме для течения, которое располагается в плоскости $z = 0$. Для образовавшейся системы, состоящей из трех уравнений,

строится частное решение, которое зависит от переменной r . Это решение передает на поверхность цилиндра в точку $r = r_{in}$ необходимые значения для радиальной и окружной компонент вектора скорости газа.

Далее описана процедура формирования систем уравнений с частными производными, решая которые однозначно определяются коэффициенты степенного ряда. Получившиеся системы уравнений являются линейными, что позволило разделить переменные и зависимости коэффициентов от φ выразить через гармоники.

Однозначное решение для системы уравнений определяется при выполнении условия, которое обеспечивает постоянный радиальный приток газа на поверхности цилиндра. Коэффициенты для функций c и w определяются единственным образом из алгебраических уравнений.

Для модели Баутина в стационарном случае:

$$\left\{ \begin{array}{l} uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma - 1)}{2}c \left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\ uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma - 1)}cc_r = av - bw \cos \varphi, \\ uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{2}{(\gamma - 1)}\frac{c}{r}c_\varphi = -au + bw \sin \varphi, \\ ww_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma - 1)}cc_z = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g, \end{array} \right. \quad (1.2)$$

заданы начальные данные на плоскости $z = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} c(r, \varphi, z)|_{z=0} = c_0(r, \varphi), \\ u(r, \varphi, z)|_{z=0} = u_0(r, \varphi), \\ v(r, \varphi, z)|_{z=0} = v_0(r, \varphi), \\ w(r, \varphi, z)|_{z=0} = 0. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Вертикальная компонента вектора скорости газа полагается равной нулю, что обеспечивает условие непротекания газа через плоскость $z = 0$.

Здесь r и φ – полярный радиус и угол; $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$ – скорость звука газа; $\gamma = \text{const} > 1$ – показатель политропы газа в уравнении состояния $p = \rho^\gamma/\gamma$, где p и ρ – давление и плотность газа, в вычислительных экспериментах пола-

галась $\gamma = 1.4$; u , v , w радиальная, окружная и вертикальная составляющие вектора скорости газа соответственно; $a = 2\Omega \sin \psi$; $b = 2\Omega \cos \psi$ – составляющие силы Кориолиса. Далее, модифицированная система уравнений газовой динамики, описывающая течения газа в придонной части потока, будет называться моделью Баутина в стационарном случае.

1.3 Однозначная разрешимость модели Баутина в стационарном случае

Для того, чтобы модель Баутина в стационарном случае имела однозначную разрешимость необходимо выполнение необходимых и достаточных условий разрешимости.

Теорема 1. О необходимых условиях разрешимости. *Для того, чтобы модель Баутина (1.2), (1.3) в стационарном случае имела решение необходимо выполнение следующих условий:*

$$\begin{cases} u_0 u_{0r} + \frac{v_0 u_{0\varphi}}{r} - \frac{v_0^2}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_{0r} = a v_0, \\ u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} + \frac{v_0 v_{0\varphi}}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{c_0 c_{0\varphi}}{r} = -a u_0. \end{cases}$$

Доказательство. В системе (1.2) положим, что $z = 0$ и выполняются начальные условия – (1.3). Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u_0 c_{0r} + \frac{v_0}{r} c_{0\varphi} + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_0 \left(u_{0r} + \frac{u_0}{r} + \frac{v_{0\varphi}}{r} + w_1 \right) = 0, \\ u_0 u_{0r} + \frac{v_0}{r} u_{0\varphi} - \frac{v_0^2}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_{0r} = a v_0, \\ u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} + \frac{v_0 v_{0\varphi}}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{c_0 c_{0\varphi}}{r} = -a u_0, \\ \frac{2c_0 c_1}{(\gamma - 1)} = b u_0 \cos \varphi - b v_0 \sin \varphi - g. \end{cases} \quad (1.4)$$

Для $c_0 \neq 0$ ($c_0 > 0$) коэффициенты c_1 и w_1 ряда (1.15) выражаются из первого и четвертого уравнений системы (1.4):

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{2}{(\gamma - 1)c_0} \left(u_0 c_{0r} + \frac{v_0 c_{0\varphi}}{r} \right) - u_{0r} - \frac{u_0}{r} - \frac{v_{0\varphi}}{r}, \\ c_1 &= \frac{(\gamma - 1)}{2c_0} (b u_0 \cos \varphi - b v_0 \sin \varphi - g). \end{aligned} \quad (1.5)$$

В системе остаются два уравнения вида:

$$\begin{cases} u_0 u_{0r} + \frac{v_0 u_{0\varphi}}{r} - \frac{v_0^2}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_{0r} = a v_0, \\ u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} + \frac{v_0 v_{0\varphi}}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{c_0 c_{0\varphi}}{r} = -a u_0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Эти уравнения являются необходимыми условиями разрешимости. Для случая, когда предполагается существование решения задачи (1.2), (1.3) в дополнении ко всему должны выполняться условия (1.6), вместе с начальными условиями (1.3). Коэффициенты c_0 , u_0 , v_0 описывают плоское течение и одновременно являются слагаемыми ряда, который задает некоторое пространственное течение в окрестности непроницаемой плоскости $z = 0$.

Теорема 1 доказана.

Рассматривая частный случай, когда $w_1 = 0$, тогда правая часть уравнения (1.5) равна нулю. Умножая первое уравнение (1.5) на $[-(\gamma - 1)c_0/2]$, получим:

$$u_0 c_{0r} + \frac{v_0 c_{0\varphi}}{r} + \frac{(\gamma - 1)c_0}{2} \left(u_{0r} + \frac{u_0}{r} + \frac{v_{0\varphi}}{r} \right) = 0.$$

Данное соотношение является законом сохранения массы в дифференциальной форме для пространственного течения с параметрами c_0 , u_0 , v_0 , находящегося в плоскости $z = 0$. К необходимым условиям разрешимости (1.6) добавляется соотношение для закона сохранения массы, после чего получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} u_0 c_{0r} + \frac{v_0 c_{0\varphi}}{r} + \frac{(\gamma - 1)c_0}{2} \left(u_{0r} + \frac{u_0}{r} + \frac{v_{0\varphi}}{r} \right) = 0, \\ u_0 u_{0r} + \frac{v_0 u_{0\varphi}}{r} - \frac{v_0^2}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_{0r} = a v_0, \\ u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} + \frac{v_0 v_{0\varphi}}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{c_0 c_{0\varphi}}{r} = -a u_0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Решения для данной системы уравнений описывают течения, которые располагаются в плоскости $z = 0$. Здесь c_0 , u_0 , v_0 являются слагаемыми ряда (1.15), который задает пространственное течение в окрестности непроницаемой границы.

Теорема 2. О достаточных условиях разрешимости. Пусть выполняются условия (1.8):

$$\begin{cases} u(r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = u^o(\varphi, z), \\ v(r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = v^o(\varphi, z); \quad r_{in} = const > 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

и аналитические функции $u^o(\varphi, z)$, $v^o(\varphi, z)$, согласованы с условиями (1.3) при значениях $z = 0$, $r = r_{in}$:

$$\begin{cases} u_0(r, \varphi)|_{r=r_{in}} = u^o(\varphi, z)|_{z=0}, \\ v_0(r, \varphi)|_{r=r_{in}} = v^o(\varphi, z)|_{z=0}. \end{cases} \quad (1.9)$$

тогда задача (1.2), (1.3), (1.8), (1.9) имеет однозначную разрешимость при аналитическом виде входных данных и выполнении необходимых условий разрешимости, которое определяется в некоторой окрестности точки M_0 с координатами $(r = r_{in}, \varphi = \varphi_0, z = 0)$, где φ_0 – любое значение из отрезка $[0, 2\pi]$.

Доказательство. Решение задачи (1.2), (1.3), (1.8), (1.9) описывает течение газа в окрестности непроницаемой плоскости $z = 0$, когда на поверхности вертикального цилиндра ненулевого радиуса в точке $r = r_{in}$ задан постоянный радиальный приток в его внутреннюю область, который не имеет закрутки (рис. 1.4 – область течения выделена цветом). Условия (1.8) берутся следующими:

$$u(r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = u_{in} = const < 0, \quad v(r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = 0, \quad (1.10)$$

при условиях согласования:

$$u_0(r, \varphi)|_{r=r_{in}} = u_{in}, \quad v_0(r, \varphi)|_{r=r_{in}} = 0. \quad (1.11)$$

Условия (1.10) обеспечивают заданный на поверхности цилиндра $r = r_{in}$ постоянный приток газа в его внутреннюю область. В точке $r = r_{in}$ закрутки нет.

Для доказательства теоремы необходимо привести задачу (1.2), (1.3), (1.8), (1.9) к характеристической задаче Коши стандартного вида. Четвертое уравнение из системы (1.2) ставится на первое место.

Вместо системы (1.2) получается эквивалентная ей система:

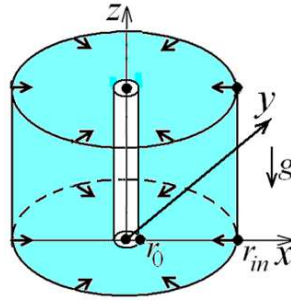


Рис. 1.4 - Вертикальный цилиндр

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{(\gamma-1)}cc_z + ww_z + uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g, \\ wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2}cw_z + uc_r + \frac{(\gamma-1)}{2}cu_r + \frac{v}{r}c_\varphi + \frac{(\gamma-1)}{2}c\frac{v_\varphi}{r} = -\frac{(\gamma-1)}{2}\frac{u}{r}, \\ wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_r + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi = av - bw \cos \varphi + \frac{v^2}{r}, \\ wv_z + uv_r + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{c}{r}c_\varphi + \frac{v}{r}v_\varphi = -au + bw \sin \varphi - \frac{uv}{r}, \end{array} \right. \quad (1.12)$$

$$W|_{z=0} = W_0, \quad (1.13)$$

$$u|_{r=r_0} = u^0, \quad v|_{r=r_0} = v^0, \quad (1.14)$$

$$W = \begin{pmatrix} c \\ w \\ u \\ v \end{pmatrix}.$$

Система (1.12) в векторно-матричной форме выглядит следующим образом:

$$A \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial z} + B \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial r} + C \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \varphi} = \mathbf{F},$$

где матрицы A, B, C имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{(\gamma-1)c} & w & 0 & 0 \\ w & \frac{(\gamma-1)c}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ u & 0 & \frac{(\gamma-1)c}{2} & 0 \\ \frac{2}{(\gamma-1)c} & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v}{r} & 0 & 0 \\ \frac{v}{r} & 0 & 0 & \frac{(\gamma-1)c}{2} \frac{c}{r} \\ 0 & 0 & \frac{v}{r} & 0 \\ \frac{2c}{(\gamma-1)r} & 0 & 0 & \frac{v}{r} \end{pmatrix}.$$

При заданных начальных условиях и положенным значениям $z = 0$, $w_0 = 0$, в матрице $A|_{z=0}$ минор 2×2 в левом верхнем углу, не равен нулю, в силу того, что $c_{00} \geq c_0 > 0$. Оставшиеся элементы в матрице $A|_{z=0}$ около этого минора, тождественно равны нулю.

Минор 2×2 в правом нижнем углу матрицы $B|_{M_0}$ не равен нулю, так как $u|_{M_0} < 0$. Остальные элементы в матрице $A|_{z=0}$ около этого минора, тождественно равны нулю.

Роль описанных матриц состоит в том, что была осуществлена перестановка уравнений в системе и слагаемых в уравнениях.

Для стационарного случая модели Баутина – задача (1.2), (1.3), (1.8), (1.9) справедлив аналог теоремы С.В. Ковалевской, доказанный С.П. Баутиным [9], поэтому **теорема 2 доказана**.

Решение модели Баутина в стационарном случае (1.2), (1.3), (1.8), (1.9) представимо в виде ряда по степеням z , сходящегося в окрестности точки $z = 0$

$$\mathbf{U}(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(r, \varphi) \frac{z^k}{k!}; \quad \mathbf{U}_k(r, \varphi) = \left. \frac{\partial^k \mathbf{U}(r, \varphi, z)}{\partial z^k} \right|_{z=0}, \quad (1.15)$$

где в качестве компонент вектора \mathbf{U} выступают искомые функции c , u , v , w .

1.4 Модель Баутина для радиальных течений

Для модели Баутина в стационарном случае рассматривается частный случай для радиальных течений, когда в системе уравнений (1.7) решение зависит только от r , где r – полярный радиус.

$$c_0 = c_0(r); \quad u_0 = u_0(r); \quad v_0 = v_0(r).$$

Получается система уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} u_0(r)c_0'(r) + \frac{(\gamma-1)}{2}c_0(r) \left[u_0'(r) + \frac{u_0(r)}{r} \right] = 0; \\ u_0(r)u_0'(r) - \frac{v_0^2(r)}{r} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0(r)c_0'(r) = av_0(r); \\ u_0(r)v_0'(r) + \frac{u_0(r)v_0(r)}{r} = -au_0(r). \end{cases} \quad (1.16)$$

Начальные условия для (1.16) следующие:

$$c_0(r)|_{r=r_{in}} = 1, \quad u_0(r)|_{r=r_{in}} = u_{in} = \text{const} < 0, \quad v_0(r)|_{r=r_{in}} = 0. \quad (1.17)$$

Необходимо учесть, что для (1.10) и (1.11) задан постоянный приток газа, не имеющего закрутки.

Для системы уравнений (1.16) решение [26] имеет следующий вид :

$$c_0(r) = \left[\frac{A}{ru_0(r)} \right]^{(\gamma-1)/2},$$

$$F(r, u_0) \equiv \frac{2}{(\gamma-1)} \left(\frac{A}{ru_0} \right)^{(\gamma-1)} + u_0^2 - B + \frac{a^2 r_{in}^4}{4r^2} + \frac{a^2}{4} r^2 = 0, \quad (1.18)$$

$$v_0(r) = \frac{a(r_{in}^2 - r^2)}{2r}, \quad v(r_{in}) = 0, \quad v_0(r) \neq 0 \quad \text{при} \quad r \neq r_{in},$$

$A, B, r_{in} - \text{const}$. Искомая функция $u_0(r)$ была задана во втором выражении (1.18) в неявном виде. Достаточное условие существования такой функции, задающейся неявно функциональным уравнением $F(r, u) = 0$, имеет следующий вид: $r(u_0^2 - c_0^2) \neq 0$.

Эффективнее значения для искомым функций $c_0(r)$, $u_0(r)$ определить численно. Решения системы (1.16), при ее записи в нормальной форме:

$$\begin{cases} c'_0 = -\frac{(\gamma-1)}{2}c_0 \frac{\left[u_0^2 + \frac{a^2(r_{in}^4 - r^4)}{4r^2} \right]}{r(u_0^2 - c_0^2)}, \\ u'_0 = u_0 \frac{\left[c_0^2 + \frac{a^2(r_{in}^4 - r^4)}{4r^2} \right]}{r(u_0^2 - c_0^2)}. \end{cases} \quad (1.19)$$

Для системы (1.19) начальные данные следующие:

$$c_0(r)|_{r=r_{in}} = 1; \quad u_0(r)|_{r=r_{in}} = u_{in} = \text{const} < 0. \quad (1.20)$$

Функция $v_0(r)$ определяется явно:

$$v_0 = -\frac{a(r_{in}^2 - r^2)}{2r}, \quad v_0(r_{in}) = 0 \quad (1.21)$$

начальные условия для $v_0(r)$ задаются в точке $r = r_{in}$.

Коэффициенты \mathbf{U}_0 и w_1 , c_1 (из (1.4)) определяются единственным образом

$$w_1 = 0;$$

$$c_1 = c_1(r, \varphi) \equiv c_{10}(r) + c_{11}(r) \cos \varphi + c_{12}(r) \sin \varphi, \quad (1.22)$$

где

$$c_{10} = -g \frac{(\gamma-1)}{2} \frac{1}{c_0(r)}; \quad c_{11} = b \frac{(\gamma-1)}{2} \frac{u_0(r)}{c_0(r)}; \quad c_{12} = -b \frac{(\gamma-1)}{2} \frac{v_0(r)}{c_0(r)}.$$

При определенных первых коэффициентов ряда строится некоторое пространственное течение с параметрами c_0 , u_0 , v_0 , находящегося в плоскости $z = 0$.

1.5 Математический метод моделирования течения газа в придонной части потока

Уравнения для параметров u_1, v_1, c_2, w_2 формируются после дифференцирования (1.2) по переменной z .

1 этап – получение решения для параметров: u_1, v_1, c_2, w_2

После дифференцирования по переменной z и положенном $z = 0$ имеет место система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 c_{1r} + u_1 c_{0r} + \frac{v_0}{r} c_{1\varphi} + \frac{(\gamma-1)}{2} c_1 \left(u_{0r} + \frac{u_0}{r} \right) + \frac{(\gamma-1)}{2} c_0 \left(u_{1r} + \frac{u_1}{r} + \frac{v_{1\varphi}}{r} + w_2 \right) = 0; \\ u_1 u_{0r} + u_0 u_{1r} + \frac{v_0}{r} u_{1\varphi} - \frac{2v_0 v_1}{r} + \frac{2}{(\gamma-1)} c_1 c_{0r} + \frac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_{1r} = a v_1; \\ u_1 v_{0r} + u_0 v_{1r} + \frac{u_1 v_0}{r} + \frac{u_0 v_1}{r} + \frac{v_0 v_{1\varphi}}{r} + \frac{2}{(\gamma-1)} \frac{c_0 c_{1\varphi}}{r} = -a u_1; \\ \frac{2}{(\gamma-1)} c_1^2 + \frac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_2 = b u_1 \cos \varphi - b v_1 \sin \varphi. \end{array} \right. \quad (1.23)$$

Из первого и четвертого уравнений системы (1.23) c_2 и w_2 выражаются посредством u_1, v_1 и первых коэффициентов ряда (1.15) с нулевым индексом.

$$w_2 = -\frac{2}{(\gamma-1)c_0} \left\{ u_0 c_{1r} + u_1 c'_0(r) + \frac{v_0(r) c_{1\varphi}}{r} + \frac{(\gamma-1)}{2} c_1 \left[u'_0(r) + \frac{u_0(r)}{r} \right] + \frac{(\gamma-1)}{2} c_0(r) \left(u_{1r} + \frac{u_1}{r} + \frac{v_{1\varphi}}{r} \right) \right\}, \quad (1.24)$$

$$c_2 = \frac{(\gamma-1)}{2c_0} \left\{ b u_1 \cos \varphi - b v_1 \sin \varphi - \frac{2}{(\gamma-1)} c_1^2 \right\}. \quad (1.25)$$

Второе и третье уравнения системы (1.23) для u_1, v_1 – являются линейной системой уравнений с частными производными. Линейность для u_1, v_1 , а также вид уравнения для c_1 разрешают разделить переменные и коэффициенты u_1, v_1 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10}(r) + u_{11}(r) \cos \varphi + u_{12}(r) \sin \varphi, \\ v_1 &= v_{10}(r) + v_{11}(r) \cos \varphi + v_{12}(r) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Последующая подстановка (1.26) в выражения для u_1 , v_1 и соответствующая группировка определенных слагаемых, позволяют приравнять нулю коэффициенты, стоящие при $\cos \varphi$, при $\sin \varphi$ и слагаемые, не зависящие от переменной φ .

Для u_{10} , u_{11} , u_{12} , v_{10} , v_{11} , v_{12} справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} u_{0r}u_{10} + u_0u_{10r} - \frac{2v_0v_{10}}{r} + \frac{2c_{0r}c_{10}}{(\gamma-1)} + \frac{2c_0c_{10r}}{(\gamma-1)} &= av_{10}; \\ u_{0r}u_{11} + u_0u_{11r} + \frac{v_0u_{12}}{r} - \frac{2v_0v_{11}}{r} + \frac{2c_{0r}c_{11}}{(\gamma-1)} + \frac{2c_0c_{11r}}{(\gamma-1)} &= av_{11}; \\ u_{0r}u_{12} + u_0u_{12r} - \frac{v_0u_{11}}{r} - \frac{2v_0v_{12}}{r} + \frac{2c_{0r}c_{12}}{(\gamma-1)} + \frac{2c_0c_{12r}}{(\gamma-1)} &= av_{12}; \\ v_{0r}u_{10} + u_0v_{10r} + \frac{v_0u_{10}}{r} + \frac{u_0v_{10}}{r} &= -au_{10}; \\ v_{0r}u_{11} + u_0v_{11r} + \frac{v_0u_{11}}{r} + \frac{u_0v_{11}}{r} + \frac{v_0v_{12}}{r} + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{c_0c_{12}}{r} &= -au_{11}; \\ v_{0r}u_{12} + u_0v_{12r} + \frac{v_0u_{12}}{r} + \frac{u_0v_{12}}{r} - \frac{v_0v_{11}}{r} - \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{c_0c_{11}}{r} &= -au_{12}. \end{aligned}$$

Группируя последние пары слагаемых из левых частей первых трех уравнений, уравнения упрощаются, что приводит к частным нулевым решениям.

$$u_{10} = v_{10} = 0.$$

Первое и четвертое уравнения выполняются тождественно.

Остальные четыре уравнения для модели Баутина в стационарном случае записываются в виде:

$$u_0u_{1jr} = F_{u_{1j}}; \quad u_0v_{1jr} = F_{v_{1j}}; \quad j = 1, 2,$$

где

$$\begin{aligned} F_{u_{11}} &= - \left[u_{0r}u_{11} + \frac{v_0}{r}u_{12} - \frac{2v_0}{r}v_{11} + bu_{0r} - av_{11} \right]; \\ F_{u_{12}} &= - \left[u_{0r}u_{12} - \frac{v_0}{r}u_{11} - \frac{2v_0}{r}v_{12} - bv_{0r} - av_{12} \right]; \\ F_{v_{11}} &= - \left[v_{0r}u_{11} + \frac{v_0}{r}u_{11} + \frac{u_0}{r}v_{11} + \frac{v_0}{r}v_{12} - b\frac{v_0}{r} + au_{11} \right]; \\ F_{v_{12}} &= - \left[v_{0r}u_{12} + \frac{v_0}{r}u_{12} + \frac{u_0}{r}v_{12} - \frac{v_0}{r}v_{11} - b\frac{u_0}{r} + au_{12} \right]. \end{aligned}$$

Неизвестные функции $u_{1j}(r)$, $v_{1j}(r)$, $j = 1, 2$ определяются из общего вида математической модели для определения вторых коэффициентов ряда:

$$\frac{du_{1j}}{dr} = \frac{F_{u_{1j}}}{u_0}; \quad \frac{dv_{1j}}{dr} = \frac{F_{v_{1j}}}{u_0}; \quad j = 1, 2. \quad (1.27)$$

В точке $r = r_{in}$ задаются начальные данные:

$$u_{1j}(r_{in}) = u_{1j}^o; \quad v_{1j}(r_{in}) = v_{1j}^o; \quad j = 1, 2, \quad (1.28)$$

где u_{1j}^o , $v_{1j}^o - \text{const}$, $j = 1, 2$.

Это однозначно определяет значения при $z = 0$ первых производных по z функций u^o , v^o из условий (1.8) в виде:

$$\left. \frac{\partial u^o(\varphi, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = u_{11}^o \cos \varphi + u_{12}^o \sin \varphi;$$

$$\left. \frac{\partial v^o(\varphi, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = v_{11}^o \cos \varphi + v_{12}^o \sin \varphi.$$

Чтобы удовлетворить условиям (1.10), необходимо задать:

$$u_{1j}^o = v_{1j}^o = 0; \quad j = 1, 2.$$

В результате определения функций u_{1j} , v_{1j} , $j = 1, 2$ коэффициент w_2 имеет вид:

$$\begin{aligned} w_2(r, \varphi) = & -\frac{2}{(\gamma - 1)c_0} \left\{ c_{0r} (u_{11} \cos \varphi + u_{12} \sin \varphi) + \right. \\ & \left. + u_0 (c_{10r} + c_{11r} \cos \varphi + c_{12r} \sin \varphi) + \frac{v_0(r)}{r} (-c_{11} \sin \varphi + c_{12} \cos \varphi) \right\} - \\ & -\frac{1}{c_0} \left(u_{0r} + \frac{u_0}{r} \right) (c_{10} + c_{11} \cos \varphi + c_{12} \sin \varphi) - \\ & -u_{11r} \cos \varphi - u_{12r} \sin \varphi - \frac{u_{11}}{r} \cos \varphi - \frac{u_{12}}{r} \sin \varphi + \frac{v_{11}}{r} \sin \varphi - \frac{v_{12}}{r} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Коэффициент w_2 можно представить в виде:

$$w_2 = w_{20} + w_{21} \cos \varphi + w_{22} \sin \varphi, \quad (1.29)$$

где

$$w_{20} = -\frac{2}{(\gamma - 1)c_0} u_0 c_{10r} - \frac{c_{10}}{c_0} \left(u_{0r} + \frac{u_0}{r} \right);$$

$$w_{21} = -\frac{2}{(\gamma-1)c_0} \left(c_{0r}u_{11} + u_0c_{11r} + \frac{v_0c_{12}}{r} \right) - \frac{c_{11}}{c_0} \left(u_{0r} + \frac{u_0}{r} \right) - u_{11r} - \frac{u_{11}}{r} - \frac{v_{12}}{r};$$

$$w_{22} = -\frac{2}{(\gamma-1)c_0} \left(c_{0r}u_{12} + u_0c_{12r} - \frac{v_0c_{11}}{r} \right) - \frac{c_{12}}{c_0} \left(u_{0r} + \frac{u_0}{r} \right) - u_{12r} - \frac{u_{12}}{r} + \frac{v_{11}}{r}.$$

Вид для c_2 следующий:

$$c_2 = c_{20} + c_{21} \cos \varphi + c_{22} \sin \varphi + c_{23} \cos 2\varphi + c_{24} \sin 2\varphi,$$

с учетом тригонометрических формул:

$$c_{20} = \frac{(\gamma-1)bu_{11}}{4c_0} - \frac{(\gamma-1)bv_{12}}{4c_0} - \frac{c_{10}^2}{c_0} - \frac{c_{11}^2 + c_{12}^2}{2c_0};$$

$$c_{21} = -\frac{2c_{10}c_{11}}{c_0};$$

$$c_{22} = -\frac{2c_{10}c_{12}}{c_0};$$

$$c_{23} = \frac{(\gamma-1)bu_{11}}{4c_0} + \frac{(\gamma-1)bv_{12}}{4c_0} - \frac{c_{11}^2 - c_{12}^2}{2c_0};$$

$$c_{24} = \frac{(\gamma-1)b(u_{12} - v_{11})}{4c_0} - \frac{c_{11}c_{12}}{c_0}.$$

2 этап – получение решения для параметров: u_2, v_2, c_3, w_3

Уравнения для параметров потока: u_2, v_2, c_3, w_3 получаются двукратным дифференцированием модели Баутина в стационарном случае (1.2) по переменной z и при условии, что $z = 0$, а также известных $\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, c_2, w_2$.

После двойного дифференцирования второго и третьего уравнений системы (1.2) по переменной z для стационарного случая:

$$u_2u_{0r} + 2u_1u_{1r} + u_0u_{2r} + \frac{v_2}{r}u_{0\varphi} + \frac{2v_1}{r}u_{1\varphi} + \frac{v_0}{r}u_{2\varphi} - \frac{2v_1^2}{r} - \frac{2v_0v_2}{r} + w_2u_1 +$$

$$+ 2w_1u_2 + w_0u_3 + \frac{2}{(\gamma-1)}c_2c_{0r} + \frac{4}{(\gamma-1)}c_1c_{1r} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{2r} = av_2 - bw_2 \cos \varphi.$$

(1.30)

$$\begin{aligned}
& u_2 v_{0r} + 2u_1 v_{1r} + u_0 v_{2r} + \frac{u_2 v_0}{r} + 2\frac{u_1 v_1}{r} + \frac{u_0 v_2}{r} + \frac{v_2}{r} v_{0\varphi} + 2\frac{v_1}{r} v_{1\varphi} + \\
& + \frac{v_0}{r} v_{2\varphi} + w_2 v_1 + 2w_1 v_2 + w_0 v_3 + \frac{2}{(\gamma-1)r} c_2 c_{0\varphi} + \frac{4}{(\gamma-1)r} c_1 c_{1\varphi} + \\
& + \frac{2}{(\gamma-1)r} c_0 c_{2\varphi} = -au_2 + bw_2 \sin \varphi. \quad (1.31)
\end{aligned}$$

Неизвестные функции u_2 и v_2 :

$$\begin{aligned}
u_2 &= u_{20} + u_{21} \cos \varphi + u_{22} \sin \varphi + u_{23} \cos 2\varphi + u_{24} \sin 2\varphi, \\
v_2 &= v_{20} + v_{21} \cos \varphi + v_{22} \sin \varphi + v_{23} \cos 2\varphi + v_{24} \sin 2\varphi,
\end{aligned} \quad (1.32)$$

где u_{2j} , v_{2j} – искомые функции, зависящие от переменной r , $j = 0, 1, \dots, 4$.

В (1.30), (1.31) учитывается представление коэффициентов (1.32), математически преобразовываются и с применяются тригонометрические формулы.

В каждом уравнении, полученных таким образом, производится группировка слагаемых, приравниваются нулю коэффициенты при $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, $\cos 2\varphi$, $\sin 2\varphi$ и слагаемые, не содержащих сомножителей, зависящих от переменной φ .

Для неизвестных функций u_{2j} , v_{2j} , $j = 0, 1, \dots, 4$, в стационарном случае уравнения имеют вид:

$$u_0 u_{2jr} = F_{u_{2j}}; \quad u_0 v_{2jr} = F_{v_{2j}}; \quad j = 0, 1, \dots, 4, \quad (1.33)$$

где функция $F_{u_{20}}$ определяется:

$$\begin{aligned}
F_{u_{20}} &= - \left[u_{0r} u_{20} + u_{11} u_{11r} + u_{12} u_{12r} + \frac{1}{r} v_{11} u_{12} - \frac{1}{r} v_{12} u_{11} - \frac{1}{r} v_{11}^2 - \right. \\
& - \frac{1}{r} v_{12}^2 - \frac{2}{r} v_0 v_{20} + \frac{1}{2} w_{21} u_{11} + \frac{1}{2} w_{22} u_{12} + \frac{2}{(\gamma-1)} c_{0r} c_{20} + \frac{4}{(\gamma-1)} c_{10} c_{10r} + \\
& \left. + \frac{2}{(\gamma-1)} c_{11} c_{11r} + \frac{2}{(\gamma-1)} c_{12} c_{12r} + \frac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_{20r} \right] + av_{20} - \frac{1}{2} bw_{21}; \quad (1.34)
\end{aligned}$$

функция $F_{u_{21}}$ определяется:

$$\begin{aligned}
F_{u_{21}} &= - \left[u_{0r} u_{21} + \frac{1}{r} v_0 u_{22} - \frac{2}{r} v_0 v_{21} + w_{20} u_{11} + \frac{2}{(\gamma-1)} c_{0r} c_{21} + \frac{4}{(\gamma-1)} c_{10} c_{11r} + \right. \\
& \left. + \frac{4}{(\gamma-1)} c_{11} c_{10r} + \frac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_{21r} \right] + av_{21} - bw_{20}; \quad (1.35)
\end{aligned}$$

функция $F_{u_{22}}$ определяется:

$$F_{u_{22}} = - \left[u_{0r}u_{22} - \frac{1}{r}v_0u_{21} - \frac{2}{r}v_0v_{22} + w_{20}u_{12} + \frac{2}{(\gamma-1)}(c_{0r}c_{22} + c_0c_{22r}) + \frac{4}{(\gamma-1)}(c_{10}c_{12r} + c_{12}c_{10r}) \right] + av_{22}; \quad (1.36)$$

функция $F_{u_{23}}$ определяется:

$$F_{u_{23}} = - \left[u_{0r}u_{23} + u_{11}u_{11r} - u_{12}u_{12r} + \frac{1}{r}v_{11}u_{12} + \frac{1}{r}v_{12}u_{11} + \frac{2}{r}v_0u_{24} - \frac{1}{r}v_{11}^2 + \frac{1}{2}v_{12}^2 - \frac{2}{r}v_0v_{23} + \frac{1}{2}w_{21}u_{11} - \frac{1}{2}w_{22}u_{12} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{0r}c_{23} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{11}c_{11r} - \frac{2}{(\gamma-1)}c_{12}c_{12r} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{23r} \right] + av_{23} - \frac{1}{2}bw_{21}; \quad (1.37)$$

функция $F_{u_{24}}$ определяется:

$$F_{u_{24}} = - \left[u_{0r}u_{24} + u_{11}u_{12r} + u_{12}u_{11r} - \frac{1}{r}v_{11}u_{11} + \frac{1}{r}v_{12}u_{12} - \frac{2}{r}v_0u_{23} - \frac{2}{r}v_{11}v_{12} - \frac{2}{r}v_0v_{24} + \frac{1}{2}w_{21}u_{12} + \frac{1}{2}w_{22}u_{11} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{0r}c_{24} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{11}c_{12r} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{12}c_{11r} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{24r} \right] + av_{24} - \frac{1}{2}bw_{22}; \quad (1.38)$$

функция $F_{v_{20}}$ определяется:

$$F_{v_{20}} = - \left[v_{0r}u_{20} + u_{11}v_{11r} + u_{12}v_{12r} + \frac{1}{r}v_0u_{20} + \frac{1}{r}u_{11}v_{11} + \frac{1}{r}u_{12}v_{12} + \frac{1}{r}u_0v_{20} + \frac{1}{2}(w_{21}v_{11} + w_{22}v_{12}) \right] - au_{20} + \frac{1}{2}bw_{22}; \quad (1.39)$$

функция $F_{v_{21}}$ определяется:

$$F_{v_{21}} = - \left[v_{0r}u_{21} + \frac{1}{r}v_0u_{21} + \frac{1}{r}u_0v_{21} + \frac{1}{r}v_0v_{22} + w_{20}v_{11} + \frac{4}{(\gamma-1)}\frac{1}{r}c_{10}c_{12} + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{1}{r}c_0c_{22} \right] - au_{21}; \quad (1.40)$$

функция $F_{v_{22}}$ определяется:

$$F_{v_{22}} = - \left[v_{0r}u_{22} + \frac{1}{r}v_0u_{22} + \frac{1}{r}u_0v_{22} - \frac{1}{r}v_0v_{21} + \right. \\ \left. + w_{20}v_{12} - \frac{4}{(\gamma-1)r}c_{10}c_{11} - \frac{2}{(\gamma-1)r}c_0c_{21} \right] - au_{22} + bw_{20}; \quad (1.41)$$

функция $F_{v_{23}}$ определяется:

$$F_{v_{23}} = - \left[v_{0r}u_{23} + u_{11}v_{11r} - u_{12}v_{12r} + \frac{1}{r}v_0u_{23} + \frac{1}{r}u_{11}v_{11} - \frac{1}{r}u_{12}v_{12} + \frac{1}{r}u_0v_{23} + \right. \\ \left. + \frac{2}{r}v_{11}v_{12} + \frac{2}{r}v_0v_{24} + \frac{1}{2}w_{21}v_{11} - \frac{1}{2}w_{22}v_{12} + \frac{4}{(\gamma-1)r}c_{11}c_{12} + \right. \\ \left. + \frac{4}{(\gamma-1)r}c_0c_{24} \right] - au_{23} - \frac{1}{2}bw_{22}; \quad (1.42)$$

функция $F_{v_{24}}$ определяется:

$$F_{v_{24}} = - \left[v_{0r}u_{24} + u_{11}v_{12r} + u_{12}v_{11r} + \frac{1}{r}v_0u_{24} + \frac{1}{r}u_{11}v_{12} + \frac{1}{r}u_{12}v_{11} + \frac{1}{r}u_0v_{24} - \right. \\ \left. - \frac{1}{r}v_{11}^2 + \frac{1}{r}v_{12}^2 - \frac{2}{r}v_0v_{23} + \frac{1}{2}w_{21}v_{12} + \frac{1}{2}w_{22}v_{11} - \frac{2}{(\gamma-1)r}c_{11}^2 + \frac{2}{(\gamma-1)r}c_{12}^2 - \right. \\ \left. - \frac{4}{(\gamma-1)r}c_0c_{23} \right] - au_{24} + \frac{1}{2}bw_{21}. \quad (1.43)$$

В стационарном случае для коэффициентов $u_{2j}(r)$, $v_{2j}(r)$, $j = 0, 1, \dots, 4$ имеет место система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{du_{2j}}{dr} = \frac{F_{u_{2j}}}{u_0}; \quad \frac{dv_{2j}}{dr} = \frac{F_{v_{2j}}}{u_0}; \quad j = 0, 1, \dots, 4. \quad (1.44)$$

В точке $r = r_{in}$ задаются начальные данные для системы (1.44):

$$u_{2j}(r_{in}) = u_{2j}^o; \quad v_{2j}(r_{in}) = v_{2j}^o; \quad v_{21}(r_{in}) = v_{21}^o; \quad i = 0, 1, \dots, 4, \quad (1.45)$$

где u_{2j}^o , v_{2j}^o – const.

При $z = 0$ это однозначно определит значения вторых производных по z функций u^o , v^o из условий (1.8) в виде:

$$\left. \frac{\partial^2 u^o(\varphi, z)}{\partial z^2} \right|_{z=0} = u_{20}^o + u_{21}^o \cos \varphi + u_{22}^o \sin \varphi + u_{23}^o \cos 2\varphi + u_{24}^o \sin 2\varphi;$$

$$\left. \frac{\partial^2 v^o(\varphi, z)}{\partial z^2} \right|_{z=0} = v_{20}^o + v_{21}^o \cos \varphi + v_{22}^o \sin \varphi + v_{23}^o \cos 2\varphi + v_{24}^o \sin 2\varphi.$$

Для случая (1.10) имеем:

$$u_{2j}^o = v_{2j}^o = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 4.$$

В результате двукратного дифференцирования первого и четвертого уравнения из (1.2) по переменной z , найденных функций u_2, v_2 , условия $z = 0$ и остальных найденных коэффициентов ряда, однозначно определяются w_3 и c_3 :

$$\begin{aligned} w_3(r, \varphi) = & -\frac{2}{(\gamma-1)} \frac{1}{c_0(r)} \left\{ u_2(r, \varphi) c_{0r}(r) + 2u_1(r, \varphi) c_{1r}(r, \varphi) + u_0(r) c_{2r}(r, \varphi) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} [2v_1(r, \varphi) c_{1\varphi}(r, \varphi) + v_0(r) c_{2\varphi}(r, \varphi)] + w_2(r, \varphi) c_1(r, \varphi) + \frac{(\gamma-1)}{2} c_2(r, \varphi) \cdot \right. \\ & \cdot \left[u_{0r}(r) + \frac{u_0(r)}{r} \right] + (\gamma-1) c_1(r, \varphi) \left[u_{1r}(r, \varphi) + \frac{u_1(r, \varphi) + v_{1\varphi}(r, \varphi)}{r} + w_2(r, \varphi) \right] + \\ & \left. + \frac{(\gamma-1)}{2} c_0(r) \left[u_{2r}(r, \varphi) + \frac{u_2(r, \varphi) + 2v_{2\varphi}(r, \varphi)}{r} \right] \right\}; \quad (1.46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3(r, \varphi) = & \frac{(\gamma-1)}{2c_0(r)} \left[bu_2(r, \varphi) \cos \varphi - bv_2(r, \varphi) \sin \varphi - u_0(r) w_{2r}(r, \varphi) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} v_0(r) w_{2\varphi}(r, \varphi) - \frac{6c_0(r) c_1(r, \varphi) c_2(r, \varphi)}{(\gamma-1)} \right]. \quad (1.47) \end{aligned}$$

3 этап – получение решения для параметров: u_3, v_3, c_4, w_4

Уравнения для параметров u_3, v_3, c_4, w_4 получаются трехкратным дифференцированием модели Баутина в стационарном случае (1.2) по переменной z . При условии, что $z = 0$ и известных $\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, c_2, w_2, c_3, w_3$, зависящие от φ .

После трехкратного дифференцирования системы (1.2):

$$u_3 c_{0r} + 3u_1 c_{2r} + 3u_2 c_{1r} + u_0 c_{3r} + \frac{3v_2 c_{1\varphi}}{r} + \frac{3v_1 c_{2\varphi}}{r} + \frac{v_0 c_{3\varphi}}{r} + w_3 c_1 + 3w_2 c_2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\gamma - 1)c_3}{2} \left(u_{0r} + \frac{u_0}{r} \right) + 3 \frac{(\gamma - 1)c_2}{2} \left(u_{1r} + \frac{u_1}{r} + \frac{v_{1\varphi}}{r} + w_2 \right) + \\
& + 3 \frac{(\gamma - 1)c_1}{2} \left(u_{2r} + \frac{u_{2r}}{r} + \frac{v_{2\varphi}}{r} + w_3 \right) + \frac{(\gamma - 1)c_0}{2} \left(u_{3r} + \frac{u_3}{r} + \frac{v_{3\varphi}}{r} + w_4 \right) = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_3 u_{0r} + u_0 u_{3r} + 3u_1 u_{2r} + 3u_2 u_{1r} + \frac{3v_2 u_{1\varphi}}{r} + \frac{3v_1 u_{2\varphi}}{r} + \frac{v_0 u_{3\varphi}}{r} - \frac{6v_1 v_2}{r} - \frac{2v_0 v_3}{r} + \\
& + w_3 u_1 + 3w_2 u_2 + \frac{2(c_3 c_{0r} + 3c_2 c_{1r} + 3c_1 c_{2r} + c_0 c_{3r})}{(\gamma - 1)} = av_3 - bw_3 \cos \varphi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_3 v_{0r} + u_0 v_{3r} + 3u_1 v_{2r} + 3u_2 v_{1r} + \frac{u_3 v_0}{r} + \frac{3u_2 v_1}{r} + \frac{3u_1 v_2}{r} + \frac{u_0 v_3}{r} + \frac{3v_2 v_{1\varphi}}{r} + \\
& + \frac{3v_1 v_{2\varphi}}{r} + \frac{v_0 v_{3\varphi}}{r} + w_3 v_1 + 3w_2 v_2 + \frac{6}{(\gamma - 1)} \frac{c_2 c_{1\varphi}}{r} + \frac{6}{(\gamma - 1)} \frac{c_1 c_{2\varphi}}{r} + \\
& + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{c_0 c_{3\varphi}}{r} = -au_3 + bw_3 \sin \varphi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3u_1 w_{2r} + u_0 w_{3r} + \frac{3v_1 w_{2\varphi}}{r} + \frac{v_0 w_{3\varphi}}{r} + 3w_2 w_2 + \frac{2c_3 c_1}{(\gamma - 1)} + \frac{6c_2^2}{(\gamma - 1)} + \\
& + \frac{6c_1 c_3}{(\gamma - 1)} + \frac{2c_0 c_4}{(\gamma - 1)} = bu_3 \cos \varphi - bv_3 \sin \varphi. \quad (1.48)
\end{aligned}$$

Коэффициент c_3 имеет следующий вид:

$$c_3 = c_{30} + c_{31} \cos \varphi + c_{32} \sin \varphi + c_{33} \cos 2\varphi + c_{34} \sin 2\varphi + c_{35} \cos 3\varphi + c_{36} \sin 3\varphi. \quad (1.49)$$

Коэффициенты u_3, v_3 :

$$u_3 = u_{30} + u_{31} \cos \varphi + u_{32} \sin \varphi + u_{33} \cos 2\varphi + u_{34} \sin 2\varphi + u_{35} \cos 3\varphi + u_{36} \sin 3\varphi; \quad (1.50)$$

$$v_3 = v_{30} + v_{31} \cos \varphi + v_{32} \sin \varphi + v_{33} \cos 2\varphi + v_{34} \sin 2\varphi + v_{35} \cos 3\varphi + v_{36} \sin 3\varphi. \quad (1.51)$$

Для u_{3j} , v_{3j} , где $0 \leq j \leq 6$ общий вид уравнения следующий:

$$u_0 u_{3jr} = F_{u_{3j}}; \quad u_0 v_{3jr} = F_{v_{3j}}; \quad j = 0, 1, \dots, 6, \quad (1.52)$$

с правой частью для функции $F_{u_{30}}$:

$$\begin{aligned} F_{u_{30}} = & - \left[u_{0r} u_{30} + \frac{3}{2} u_{21} u_{11r} + \frac{3}{2} u_{22} u_{12r} + \frac{3}{2} u_{11} u_{21r} + \frac{3}{2} u_{12} u_{22r} + \frac{3}{2r} v_{21} u_{12} - \right. \\ & - \frac{3}{2r} v_{22} u_{11} + \frac{3}{2r} v_{11} u_{22} - \frac{3}{2r} v_{12} u_{21} - \frac{3}{r} v_{11} v_{21} - \frac{3}{r} v_{12} v_{22} - \frac{2}{r} v_0 v_{30} + \frac{1}{2} w_{31} u_{11} + \\ & + \frac{1}{2} w_{32} u_{12} + 3w_{20} u_{20} + \frac{3}{2} w_{21} u_{21} + \frac{3}{2} w_{22} u_{22} + \frac{2}{(\gamma-1)} c_{30} c_{0r} + \frac{6}{(\gamma-1)} c_{20} c_{10r} + \\ & + \frac{3}{(\gamma-1)} c_{21} c_{11r} + \frac{3}{(\gamma-1)} c_{22} c_{12r} + \frac{6}{(\gamma-1)} c_{10} c_{20r} + \frac{3}{(\gamma-1)} c_{11} c_{21r} + \\ & \left. + \frac{3}{(\gamma-1)} c_{12} c_{22r} + \frac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_{30r} \right] + av_{30} - \frac{1}{2} bw_{31}; \quad (1.53) \end{aligned}$$

для функции $F_{u_{31}}$:

$$\begin{aligned} F_{u_{31}} = & - \left[u_{31} u_{0r} + 3u_{20} u_{11r} + \frac{3}{2} u_{23} u_{11r} + \frac{3}{2} u_{24} u_{12r} + 3u_{11} u_{20r} + \frac{3}{2} u_{11} u_{23r} + \frac{3}{2} u_{12} u_{24r} + \right. \\ & + \frac{3}{r} v_{20} u_{12} + \frac{3}{2r} v_{23} u_{12} - \frac{3}{2r} v_{24} u_{11} + \frac{3}{r} v_{11} u_{24} - \frac{3}{r} v_{12} u_{23} + \frac{1}{r} v_0 u_{32} - \frac{6}{r} v_{11} v_{20} - \\ & - \frac{3}{r} v_{11} v_{23} - \frac{3}{r} v_{12} v_{24} - \frac{2}{r} v_0 u_{31} + w_{30} u_{11} + \frac{1}{2} w_{33} u_{11} + \frac{1}{2} w_{34} u_{12} + 3w_{20} u_{21} + 3w_{21} u_{20} + \\ & + \frac{3}{2} w_{21} u_{23} + \frac{3}{2} w_{22} u_{24} + \frac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_{31r} + \frac{2}{(\gamma-1)} c_{31} c_{0r} + \frac{6}{(\gamma-1)} c_{21} c_{10r} + \\ & + \frac{6}{(\gamma-1)} c_{20} c_{11r} + \frac{3}{(\gamma-1)} c_{23} c_{11r} + \frac{3}{(\gamma-1)} c_{24} c_{12r} + \frac{6}{(\gamma-1)} c_{10} c_{21r} + \frac{6}{(\gamma-1)} c_{11} c_{20r} + \\ & \left. + \frac{3}{(\gamma-1)} c_{11} c_{23r} + \frac{3}{(\gamma-1)} c_{12} c_{24r} \right] + av_{31} - bw_{30} - \frac{1}{2} bw_{33}; \quad (1.54) \end{aligned}$$

для функции $F_{u_{32}}$:

$$\begin{aligned}
F_{u_{32}} = & - \left[u_{32}u_{0r} + 3u_{20}u_{12r} - \frac{3}{2}u_{23}u_{12r} + \frac{3}{2}u_{24}u_{11r} + 3u_{12}u_{20r} + \frac{3}{2}u_{11}u_{24r} - \frac{3}{2}u_{12}u_{23r} - \right. \\
& - \frac{3}{r}v_{20}u_{11} + \frac{3}{2r}v_{23}u_{11} + \frac{3}{2r}v_{24}u_{12} - \frac{3}{r}v_{11}u_{23} - \frac{3}{r}v_{12}u_{24} - \frac{1}{r}v_0u_{31} - \frac{6}{r}v_{12}v_{20} - \frac{3}{r}v_{11}v_{24} + \\
& + \frac{3}{r}v_{12}v_{23} - \frac{2}{r}v_0v_{32} + w_{30}u_{12} - \frac{1}{2}w_{33}u_{12} + \frac{1}{2}w_{34}u_{11} + 3w_{20}u_{22} + 3w_{22}u_{20} + \frac{3}{2}w_{21}u_{24} - \\
& - \frac{3}{2}w_{22}u_{23} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{32}c_{0r} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{32r} + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{20}c_{12r} + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{22}c_{10r} - \\
& - \frac{3}{(\gamma-1)}c_{23}c_{12r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{24}c_{11r} + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{10}c_{22r} + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{12}c_{20r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{11}c_{24r} - \\
& \left. - \frac{3}{(\gamma-1)}c_{12}c_{23r} \right] + av_{32} - bw_{34}; \quad (1.55)
\end{aligned}$$

для функции $F_{u_{33}}$:

$$\begin{aligned}
F_{u_{33}} = & - \left[u_{33}u_{0r} + \frac{3}{2}u_{21}u_{11r} - \frac{3}{2}u_{22}u_{12r} + \frac{3}{2}u_{11}u_{21r} - \frac{3}{2}u_{12}u_{22r} + \frac{3}{2r}v_{21}u_{12} + \frac{3}{2r}v_{22}u_{11} + \right. \\
& + \frac{3}{2r}v_{11}u_{22} + \frac{3}{2r}v_{12}u_{21} + \frac{2}{r}v_0u_{34} - \frac{3}{r}v_{11}v_{21} + \frac{3}{r}v_{12}v_{22} - \frac{2}{r}v_0v_{33} + \frac{1}{2}w_{31}u_{11} - \frac{1}{2}w_{32}u_{12} + \\
& + 3w_{20}u_{23} + \frac{3}{2}w_{21}u_{21} - \frac{3}{2}w_{22}u_{22} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{33}c_{0r} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{33r} + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{23}c_{10r} + \\
& + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{21}c_{11r} - \frac{3}{(\gamma-1)}c_{22}c_{12r} + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{10}c_{23r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{11}c_{21r} - \frac{3}{(\gamma-1)}c_{12}c_{22r} \left. \right] + \\
& + av_{33} - \frac{1}{2}bw_{31}; \quad (1.56)
\end{aligned}$$

для функции $F_{u_{34}}$:

$$\begin{aligned}
F_{u_{34}} = & - \left[u_{34}u_{0r} + \frac{3}{2}u_{21}u_{12r} + \frac{3}{2}u_{22}u_{11r} + \frac{3}{2}u_{11}u_{22r} + \frac{3}{2}u_{12}u_{21r} - \frac{3}{2r}v_{21}u_{11} + \right. \\
& + \frac{3}{2r}v_{22}u_{11} - \frac{3}{2r}v_{11}u_{21} + \frac{3}{2r}v_{12}u_{22} - \frac{2}{r}v_0u_{33} - \frac{3}{r}v_{11}v_{22} - \frac{3}{r}v_{12}v_{21} - \frac{2}{r}v_0v_{34} + \\
& + \frac{1}{2}w_{31}u_{12} + \frac{1}{2}w_{32}u_{11} + 3w_{20}u_{24} + \frac{3}{2}w_{21}u_{22} + \frac{3}{2}w_{22}u_{21} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{34}c_{0r} + \\
& + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{34r} + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{24}c_{10r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{21}c_{12r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{22}c_{11r} + \\
& + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{10}c_{24r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{11}c_{22r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{12}c_{21r} \left. \right] + av_{34} - \frac{1}{2}bw_{32}; \quad (1.57)
\end{aligned}$$

для функции $F_{u_{35}}$:

$$\begin{aligned}
F_{u_{35}} = & - \left[u_{35}u_{0r} + \frac{3}{2}u_{23}u_{11r} - \frac{3}{2}u_{24}u_{12r} + \frac{3}{2}u_{11}u_{23r} - \frac{3}{2}u_{12}u_{24r} + \frac{3}{2r}v_{23}u_{12} + \right. \\
& + \frac{3}{2r}v_{24}u_{11} + \frac{3}{r}v_{11}u_{24} + \frac{3}{r}v_{12}u_{23} + \frac{3}{r}v_0u_{36} - \frac{3}{r}v_{11}v_{23} + \frac{3}{r}v_{12}v_{24} - \frac{2}{r}v_0v_{35} + \\
& + \frac{1}{2}w_{33}u_{11} - \frac{1}{2}w_{34}u_{12} + \frac{3}{2}w_{21}u_{23} - \frac{3}{2}w_{22}u_{24} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{35}c_{0r} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{35r} + \\
& \left. + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{23}c_{11r} - \frac{3}{(\gamma-1)}c_{24}c_{12r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{11}c_{23r} - \frac{3}{(\gamma-1)}c_{12}c_{24r} \right] + av_{35} - \frac{1}{2}bw_{33}; \tag{1.58}
\end{aligned}$$

для функции $F_{u_{36}}$:

$$\begin{aligned}
F_{u_{36}} = & - \left[u_{36}u_{0r} + \frac{3}{2}u_{23}u_{12r} + \frac{3}{2}u_{24}u_{11r} + \frac{3}{2}u_{12}u_{24r} + \frac{3}{2}u_{12}u_{23r} - \frac{2}{r}v_0v_{36} - \frac{3}{2r}v_{23}u_{11} - \right. \\
& - \frac{3}{r}v_{12}v_{23} - \frac{3}{r}v_{24}v_{11} + \frac{3}{2r}v_{24}u_{12} - \frac{3}{r}v_{11}u_{23} + \frac{3}{r}u_{24}v_{12} - \frac{3}{r}u_{35}v_0 + \frac{1}{2}w_{33}u_{12} + \frac{1}{2}w_{34}u_{11} + \\
& + \frac{3}{2}w_{21}u_{24} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{36r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{11}c_{24r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{12}c_{23r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{23}c_{12r} + \\
& \left. + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{24}c_{11r} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{36}c_{0r} \right] + av_{36} - \frac{1}{2}bw_{34}; \tag{1.59}
\end{aligned}$$

для функции $F_{v_{30}}$:

$$\begin{aligned}
F_{v_{30}} = & - \left[u_{30}v_{0r} + \frac{3}{2}u_{21}v_{11r} + \frac{3}{2}u_{22}v_{12r} + \frac{3}{2}u_{11}v_{21r} + \frac{3}{2}u_{12}v_{22r} + \frac{u_{30}v_0}{r} + \frac{3}{2r}u_{21}v_{11} + \right. \\
& + \frac{3}{2r}u_{22}v_{12} + \frac{3}{2r}v_{11}u_{21} + \frac{3}{2r}u_{12}v_{22} + \frac{u_0v_{30}}{r} + \frac{3}{2r}v_{21}v_{12} - \frac{3}{2r}v_{22}v_{11} + \frac{3}{2r}v_{11}v_{22} - \\
& - \frac{3}{2r}v_{12}v_{21} + \frac{1}{2}w_{31}v_{11} + \frac{1}{2}w_{32}v_{12} + 3w_{20}v_{20} + \frac{3}{2}w_{21}v_{21} + \frac{3}{2}w_{22}v_{22} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{21}c_{12} - \\
& \left. - \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{22}c_{11} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{11}c_{22} - \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{12}c_{21} \right] - au_{30} + \frac{1}{2}bw_{32}; \tag{1.60}
\end{aligned}$$

для функции $F_{v_{31}}$:

$$\begin{aligned}
F_{v_{31}} = & - \left[u_{31}v_{0r} + 3u_{20}v_{11r} + \frac{3}{2}u_{23}v_{11r} + \frac{3}{2}u_{24}v_{12r} + 3u_{11}v_{20r} + \frac{3}{2}u_{11}v_{23r} + \frac{3}{2}u_{12}v_{24r} + \right. \\
& + u_0v_{31r} + \frac{u_{31}v_0}{r} + \frac{3}{r}u_{20}v_{11} + \frac{3}{2r}u_{23}v_{11} + \frac{3}{2r}u_{24}v_{12} + \frac{3}{r}u_{11}v_{20} + \frac{3}{2r}u_{11}v_{23} + \frac{3}{2r}u_{12}v_{24} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{u_0 v_{31}}{r} + \frac{3}{r} v_{20} v_{12} + \frac{3}{2r} v_{23} v_{12} + \frac{3}{2r} v_{24} v_{11} + \frac{1}{r} v_0 v_{32} - \frac{3}{r} v_{12} v_{23} + w_{30} v_{11} + \frac{1}{2} w_{33} v_{11} + \\
& + \frac{1}{2} w_{34} v_{12} + 3w_{20} v_{21} + 3w_{21} v_{20} + \frac{3}{2} w_{21} v_{23} + \frac{3}{2} w_{22} v_{24} + \frac{6}{(\gamma-1)r} c_{20} c_{12} + \frac{3}{(\gamma-1)r} c_{23} c_{12} - \\
& - \frac{3}{(\gamma-1)r} c_{24} c_{11} + \frac{6}{(\gamma-1)r} c_{10} c_{22} + \frac{6}{(\gamma-1)r} c_{11} c_{24} - \frac{6}{(\gamma-1)r} c_{12} c_{23} + \frac{6}{(\gamma-1)r} c_{32} c_0 \Big] - \\
& - au_{31} + \frac{1}{2} bw_{34};
\end{aligned}$$

для функции $F_{v_{32}}$:

$$\begin{aligned}
F_{v_{32}} = & - \left[u_{32} v_{0r} + 3u_{20} v_{12r} - \frac{3}{2} u_{23} v_{12r} + \frac{3}{2} u_{24} v_{11r} + 3u_{12} v_{20r} + \frac{3}{2} u_{11} v_{24r} - \frac{3}{2} u_{12} v_{23r} + \right. \\
& + u_0 v_{32r} + \frac{u_{32} v_0}{r} + \frac{3}{r} u_{20} v_{12} + \frac{3}{2r} u_{24} v_{11} - \frac{3}{2r} u_{23} v_{12} + \frac{3}{r} u_{12} v_{20} + \frac{3}{2r} u_{11} v_{24} - \frac{3}{2r} u_{12} v_{23} + \\
& + \frac{u_0 v_{32}}{r} - \frac{3}{r} v_{20} v_{11} + \frac{3}{2r} v_{23} v_{11} + \frac{3}{2r} v_{24} v_{11} + \frac{3}{2r} v_{12} v_{24} - \frac{3}{r} v_{23} v_{11} - \frac{3}{r} v_{12} v_{24} - \frac{v_0 v_{31}}{r} + w_{30} v_{12} + \\
& + \frac{1}{2} w_{34} v_{11} - \frac{1}{2} w_{33} v_{12} + 3w_{20} v_{22} + \frac{3}{2} w_{21} v_{24} + 3w_{22} v_{20} - \frac{3}{2} w_{22} v_{23} - \frac{6}{(\gamma-1)r} c_{20} c_{11} + \\
& + \frac{3}{(\gamma-1)r} c_{23} c_{11} + \frac{3}{(\gamma-1)r} c_{24} c_{12} - \frac{6}{(\gamma-1)r} c_{10} c_{21} - \frac{6}{(\gamma-1)r} c_{11} c_{23} - \frac{6}{(\gamma-1)r} c_{12} c_{24} - \\
& \left. - \frac{6}{(\gamma-1)r} c_{31} c_0 \right] - au_{32} + bw_{30} - \frac{1}{2} bw_{33}; \quad (1.61)
\end{aligned}$$

для функции $F_{v_{33}}$:

$$\begin{aligned}
F_{v_{33}} = & - \left[u_{33} v_{0r} + \frac{3}{2} u_{21} v_{11r} - \frac{3}{2} u_{22} v_{12r} + \frac{3}{2} u_{11} v_{21r} - \frac{3}{2} u_{12} v_{22r} + \frac{3}{2r} u_{21} v_{11} + \frac{3}{2r} v_{21} v_{12} + \right. \\
& + \frac{1}{r} u_{33} v_0 + \frac{3}{2r} v_{11} v_{22} - \frac{3}{2r} v_{12} u_{22} + \frac{1}{r} u_0 v_{33} + \frac{3}{2r} v_{21} u_{11} - \frac{3}{2r} v_{22} u_{12} + \frac{3}{2r} v_{11} v_{22} + \\
& + \frac{3}{2r} v_{12} v_{21} + \frac{2v_{34} v_0}{r} + \frac{1}{2} w_{31} v_{11} - \frac{1}{2} w_{32} v_{12} + 3w_{20} v_{23} + \frac{3}{2} w_{21} v_{21} - \frac{3}{2} w_{22} v_{22} + \\
& + \frac{3}{(\gamma-1)r} c_{21} c_{12} + \frac{3}{(\gamma-1)r} c_{22} c_{11} + \frac{12}{(\gamma-1)r} c_{10} c_{24} + \frac{3}{(\gamma-1)r} c_{11} c_{22} + \\
& \left. + \frac{3}{(\gamma-1)r} c_{12} c_{21} + \frac{12}{(\gamma-1)r} c_{34} c_0 \right] - au_{33} - \frac{1}{2} bw_{32}; \quad (1.62)
\end{aligned}$$

для функции $F_{v_{34}}$:

$$\begin{aligned}
F_{v_{34}} = & - \left[u_{34}v_{0r} + \frac{3}{2}u_{21}v_{12r} + \frac{3}{2}u_{22}v_{11r} + \frac{3}{2}u_{11}v_{22r} + \frac{3}{2}u_{12}v_{21r} + \frac{u_{34}v_0}{r} + \frac{3}{2r}u_{21}v_{12} + \right. \\
& + \frac{3}{2r}u_{12}v_{21} + \frac{3}{2r}u_{11}v_{22} + \frac{3}{2r}u_{12}v_{23} + \frac{u_0v_{34}}{r} - \frac{3}{2r}v_{21}v_{11} + \frac{3}{2r}v_{22}v_{12} - \frac{3}{2r}v_{11}v_{21} + \frac{3}{2r}v_{12}v_{22} - \\
& - \frac{2}{r}v_{33}v_0 + \frac{1}{2}w_{31}v_{12} + \frac{1}{2}w_{32}v_{11} + 3w_{20}v_{24} + \frac{3}{2}w_{21}v_{22} + \frac{3}{2}w_{22}v_{21} - \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{21}c_{11} + \\
& + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{22}c_{12} - \frac{12}{(\gamma-1)r}c_{10}c_{23} - \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{11}c_{21} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{12}c_{22} - \\
& \left. - \frac{12}{(\gamma-1)r}c_{33}c_0 \right] - au_{34} + \frac{1}{2}bw_{31}; \quad (1.63)
\end{aligned}$$

для функции $F_{v_{35}}$:

$$\begin{aligned}
F_{v_{35}} = & - \left[u_{35}v_{0r} + \frac{3}{2}u_{23}v_{11r} - \frac{3}{2}u_{24}v_{12r} + \frac{3}{2}u_{11}v_{23r} - \frac{3}{2}u_{12}v_{24r} + u_0v_{35r} + \frac{3}{2r}v_{11}u_{23} - \right. \\
& - \frac{3}{2r}v_{12}u_{24} + \frac{3}{2r}u_{11}v_{23} - \frac{3}{2r}u_{12}v_{24} + \frac{1}{r}v_0u_{35} + \frac{3}{2r}v_{12}v_{23} - \frac{3}{2r}v_{11}v_{24} + \frac{1}{r}u_0v_{35} + \\
& + \frac{3}{r}v_{11}v_{24} + \frac{3}{r}v_{12}v_{23} + \frac{3}{r}v_{36}v_0 + \frac{1}{2}w_{33}v_{11} - \frac{1}{2}w_{34}v_{12} + \frac{3}{2}w_{21}v_{23} - \frac{3}{2}w_{22}v_{24} + \\
& + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{23}c_{12} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{24}c_{11} + \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{11}c_{24} + \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{12}c_{23} + \\
& \left. + \frac{18}{(\gamma-1)r}c_{36}c_0 \right] - au_{35} - \frac{1}{2}bw_{34}; \quad (1.64)
\end{aligned}$$

для функции $F_{v_{36}}$:

$$\begin{aligned}
F_{v_{36}} = & - \left[u_{36}v_{0r} + \frac{3}{2}u_{23}v_{12r} + \frac{3}{2}u_{24}v_{11r} + u_0v_{36r} + \frac{3}{2}u_{11}v_{24r} + \frac{3}{2}u_{12}u_{23r} + \right. \\
& + \frac{3}{2r}v_{11}u_{24} + \frac{3}{2r}v_{24}u_{11} + \frac{3}{2r}u_{23}v_{12} + \frac{1}{r}u_0v_{36} - \frac{3}{2r}v_{11}v_{23} + \frac{3}{2r}v_{12}v_{24} + \frac{1}{r}v_0u_{36} - \frac{3}{r}v_{11}v_{23} + \\
& + \frac{3}{r}v_{12}v_{24} - \frac{3}{r}v_0v_{35} + w_{36}u_{10} + \frac{1}{2}w_{33}v_{12} + \frac{1}{2}w_{34}v_{11} + \frac{3}{2}w_{21}v_{24} + \frac{3}{2}w_{22}v_{23} - \\
& \left. - \frac{18}{(\gamma-1)}c_0c_{35} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{24}c_{12} - \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{23}c_{11} + \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{12}c_{24} \right] - au_{36} + \frac{1}{2}bw_{33}. \quad (1.65)
\end{aligned}$$

В стационарном случае для искомым функций $u_{3j}(r)$, $v_{3j}(r)$, $0 \leq j \leq 6$, система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{du_{3j}}{dr} = \frac{F_{u_{3j}}}{u_0}; \quad \frac{dv_{3j}}{dr} = \frac{F_{v_{3j}}}{u_0}; \quad j = 0, 1, \dots, 6. \quad (1.66)$$

Начальные данные задаются в точке $r = r_{in}$:

$$u_{3j}(r_{in}) = u_{3j}^o; \quad v_{3j}(r_{in}) = v_{3j}^o; \quad j = 0, 1, \dots, 6, \quad (1.67)$$

где $u_{2j}^o, v_{2j}^o - \text{const}$.

При условиях (1.10):

$$u_{3j}^o = v_{3j}^o = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 6. \quad (1.68)$$

Из первого и четвертого уравнений системы (1.48) определяются коэффициенты w_4, c_4 в виде:

$$c_4 = \frac{(\gamma - 1)}{2c_0} \left[bu_3 \cos \varphi - bv_3 \sin \varphi - 3u_1 w_{2r} - u_0 w_{3r} - \frac{3v_1 w_{2\varphi}}{r} - \frac{v_0 w_{3\varphi}}{r} - 3w_2^2 - \frac{2c_1 c_3}{(\gamma - 1)} - \frac{6c_2^2}{(\gamma - 1)} - \frac{6c_1 c_3}{(\gamma - 1)} \right],$$

$$w_4 = -\frac{2}{(\gamma - 1)c_0} \left[u_3 c_{0r} + u_0 c_{3r} + 3u_1 c_{2r} + 3u_2 c_{1r} + \frac{v_0 c_{3\varphi}}{r} + \frac{3v_1 c_{2\varphi}}{r} + \frac{3v_2 c_{1\varphi}}{r} + c_1 w_3 + 3c_2 w_2 + \frac{(\gamma - 1)c_3}{2} \left(u_{0r} + \frac{u_0}{r} \right) + 3\frac{(\gamma - 1)c_2}{2} \left(u_{1r} + \frac{u_1}{r} + \frac{v_{1\varphi}}{r} + w_2 \right) + \frac{3(\gamma - 1)c_1}{2} \left(u_{2r} + \frac{u_2}{r} + \frac{v_{2\varphi}}{r} + w_3 \right) \right] - u_{3r} - \frac{u_3}{r} - \frac{v_{3\varphi}}{r}.$$

c_4, w_4 при найденных коэффициентах записываются в следующем виде:

$$c_4(r, \varphi) = c_{40}(r) + c_{41}(r) \cos \varphi + c_{42}(r) \sin \varphi + c_{43}(r) \cos 2\varphi + c_{44}(r) \sin 2\varphi + c_{45}(r) \cos 3\varphi + c_{46}(r) \sin 3\varphi + c_{47}(r) \cos 4\varphi + c_{48}(r) \sin 4\varphi,$$

$$w_4(r, \varphi) = w_{40}(r) + w_{41}(r) \cos \varphi + w_{42}(r) \sin \varphi + w_{43}(r) \cos 2\varphi + w_{44}(r) \sin 2\varphi + w_{45}(r) \cos 3\varphi + w_{46}(r) \sin 3\varphi.$$

Теорема 3. Пусть параметры c_0, u_0, v_0, c_1, w_1 ряда (1.15) однозначно определены, тогда все последующие коэффициенты представимы в виде конечных тригонометрических сумм вида (1.69), коэффициенты перед гармониками зависят от r :

$$w_k(r, \varphi) = w_{k,0}(r) + \sum_{j=1}^{k-1} [w_{k,2j-1}(r) \cos(j\varphi) + w_{k,2j}(r) \sin(j\varphi)]; \quad k = 2, 3, 4.$$

$$f_k(r, \varphi) = f_{k,0}(r) + \sum_{j=1}^k [f_{k,2j-1}(r) \cos(j\varphi) + f_{k,2j}(r) \sin(j\varphi)]; \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.69)$$

где в качестве f выступают функции c, u, v .

Доказательство. Теорема доказывается индукцией по k . Из представленных решений и формул следует база индукции. Система (1.2) дифференцируется k раз по z , при $z = 0$. Из первого и четвертого уравнения системы определяются w_{k+1}, c_{k+1} :

$$w_{k+1} = \frac{F_{k+1}}{c_0(r)}; \quad c_{k+1} = \frac{G_{k+1}}{c_0(r)};$$

здесь F_{k+1}, G_{k+1} – многочлены от $w_l, c_l, u_{l-1}, v_{l-1}, l = 1, 2, \dots, k$. Формулы для многочленов были представлены выше.

Второе и третье уравнения системы (1.2) после дифференцирования по переменной z , при $z = 0$ являются дифференциальными уравнениями для u_k, v_k .

Для стационарного случая справедливы уравнения:

$$u_{kr} = \frac{H_{k1}}{u_0(r)}, \quad v_{kr} = \frac{Q_{k1}}{u_0(r)},$$

правые части уравнения – функций H_{k1}, Q_{k1} определяются по формулам (1.69).

Поскольку последние три пары уравнений являются линейными относительно искомых функций, благодаря предположению индукции, они являются линейными выражениями от гармоник с целыми частотами. Коэффициенты перед гармониками – функции, зависящие от переменной r , следовательно, переменные можно разделить. Для искомых функций c, w коэффициенты перед гармониками определяются по явным формулам. Для искомых функций u, v коэффициенты перед гармониками являются системы дифференциальных уравнений, в которых число коэффициентов перед гармониками совпадает с числом урав-

нений системы.

Теорема 4 доказана.

Отрезки ряда (1.15) задаются:

$$\begin{aligned}c &= c_0 + c_1 z + c_2 \frac{z^2}{2} + c_3 \frac{z^3}{6} + c_4 \frac{z^4}{24}; \\u &= u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2} + u_3 \frac{z^3}{6}; \\v &= v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2} + v_3 \frac{z^3}{6}; \\w &= w_0 + w_1 z + w_2 \frac{z^2}{2} + w_3 \frac{z^3}{6} + w_4 \frac{z^4}{24};\end{aligned}\tag{1.70}$$

каждое уравнение системы (1.2), обращается в справедливое равенство с точностью до z^4 для функций u , v в следствии трехкратного дифференцирования (1.2) по z и условия $z = 0$. Искомые функции c и w из отрезков ряда (1.15) определяются с точностью до z^5 .

1.6 Кинетическая энергия придонной части восходящего закрученного потока

Для движущегося газа в области

$$(D) : \{r_0 \leq r \leq r_{in}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq h\}$$

кинетическая энергия определяется по следующей формуле:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \rho(x, y, z) \vec{V}^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \int_0^h \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_{r_0}^{r_{in}} \rho(r, \varphi) \vec{V}^2(r, \varphi) r dr \right] d\varphi \right\} dz, \quad (1.71)$$

где \vec{V} – вектор скорости газа.

Коэффициенты ряда при построении решений модели Баутина в стационарном случае определяются однозначно. Кинетическая энергия для трех частей потока определяется с помощью процедуры интегрирования по переменным φ и z в вычислительной среде Maple и численного интегрирования по переменной r .

Решение представлено в виде частного случая определения аналитическим способом интеграла по переменным φ и z в пределах: $[0, 2\pi]$ и $[0, h]$, соответственно. Интеграл по переменной r в пределах: $[r_0, r_{in}]$ считается численно.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \rho(x, y, z) \vec{V}^2 dx dy dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_{r_0}^{r_{in}} c^5(r, \varphi, z) \left(u^2(r, \varphi, z) + v^2(r, \varphi, z) + w^2(r, \varphi, z) \right) r dr \right] d\varphi \right\} dz = \quad (1.72) \\ &= W_u + W_v + W_w. \end{aligned}$$

Для изоэнтропических течений политропного газа:

$$c^2 = \rho^{(\gamma-1)}, \quad \rho = c^{\frac{2}{(\gamma-1)}}, \quad (1.73)$$

в случае воздуха показатель $\gamma = 1.4$, значит

$$\rho = c^5(r, \varphi, z). \quad (1.74)$$

Скорость звука газа представима:

$$c(r, \varphi, z) = c_0 + c_1 z + c_2 \frac{z^2}{2} + c_3 \frac{z^3}{6} + c_4 \frac{z^4}{24}. \quad (1.75)$$

Учитывая равенство (1.74) для определения интеграла (1.72) следует с возвести в пятую степень:

$$c^5(r, \varphi, z) = \left(c_0 + c_1 z + c_2 \frac{z^2}{2} + c_3 \frac{z^3}{6} + c_4 \frac{z^4}{24} \right)^5. \quad (1.76)$$

Рассмотрим пример с использованием двух коэффициентов ряда:

$$c(r, \varphi, z) = c_0(r) + c_1(r, \varphi) z, \quad (1.77)$$

здесь

$$c_1(r, \varphi) = c_{10}(r) + c_{11}(r) \cos(\varphi) + c_{12}(r) \sin(\varphi). \quad (1.78)$$

Возводя два коэффициента ряда для c в пятую степень $c^5(r, \varphi, z)$:

$$(c_0 + c_1 z)^5 = c_0^5 + 5 c_0^4 c_1 z + 10 c_0^3 c_1^2 z^2 + 10 c_0^2 c_1^3 z^3 + 5 c_0 c_1^4 z^4 + c_1^5 z^5 \quad (1.79)$$

Для полученного выражения вводятся новые обозначения:

$$a_{10} = c_0^5; \quad a_{11} = 5 c_0^4 c_1; \quad a_{12} = 10 c_0^3 c_1^2; \\ a_{13} = 10 c_0^2 c_1^3; \quad a_{14} = 5 c_0 c_1^4; \quad a_{15} = c_1^5, \quad (1.80)$$

то есть

$$(c_0 + c_1 z)^5 = \sum_{i=0}^5 a_{1i} z^i.$$

Для радиальной скорости восходящего закрученного потока формула имеет вид:

$$u(r, \varphi, z) = u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2} + u_3 \frac{z^3}{6}. \quad (1.81)$$

здесь

$$u_1(r, \varphi) = u_{10}(r) + u_{11}(r) \cos(\varphi) + u_{12}(r) \sin(\varphi), \quad u_{10}(r) = 0. \quad (1.82)$$

Первые два коэффициента ряда для радиальной скорости газа:

$$u(r) = u_0(r) + u_1(r, \varphi) z. \quad (1.83)$$

Для вычисления радиальной составляющей потока из (1.72) определяется u^2 :

$$(u_0 + u_1 z)^2 = u_0^2 + 2 u_0 u_1 z + u_1^2 z^2. \quad (1.84)$$

Для полученного выражения вводятся новые обозначения:

$$b_{10} = u_0^2; \quad b_{11} = 2 u_0 u_1; \quad b_{12} = u_1^2, \quad (1.85)$$

то есть

$$(u_0 + u_1 z)^2 = \sum_{i=0}^2 b_{1i} z^i.$$

Перемножая выражения с новыми обозначениями и выделяя слагаемые при каждой степени z :

$$\begin{aligned} & (a_{10} + a_{11}z + a_{12}z^2 + a_{13}z^3 + a_{14}z^4 + a_{15}z^5) (b_{10} + b_{11}z + b_{12}z^2) = \\ & a_{10}b_{10} + a_{10}b_{11}z + a_{10}b_{12}z^2 + a_{11}zb_{10} + a_{11}b_{11}z^2 + a_{11}b_{12}z^3 + a_{12}b_{10}z^2 + \\ & + a_{12}b_{11}z^3 + a_{12}b_{12}z^4 + a_{13}b_{10}z^3 + a_{13}b_{11}z^4 + a_{13}b_{12}z^5 + a_{14}b_{10}z^4 + a_{14}b_{11}z^5 + \\ & + a_{14}b_{12}z^6 + a_{15}b_{10}z^5 + a_{15}b_{11}z^6 + a_{15}b_{12}z^7 = \\ & = a_{10}b_{10} + (a_{10}b_{11} + a_{11}b_{10})z + (a_{10}b_{12} + a_{11}b_{11} + a_{12}b_{10})z^2 + \\ & + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} + a_{13}b_{10})z^3 + (a_{12}b_{12} + a_{13}b_{11} + a_{14}b_{10})z^4 + \\ & + (a_{13}b_{12} + a_{14}b_{11} + a_{15}b_{10})z^5 + (a_{14}b_{12} + a_{15}b_{11})z^6 + (a_{15}b_{12})z^7. \quad (1.86) \end{aligned}$$

Вводя новые обозначения для получившегося выражения:

$$\begin{aligned} d_0 &= a_{10}b_{10}; \quad d_1 = a_{10}b_{11} + a_{11}b_{10}; \quad d_2 = a_{10}b_{12} + a_{11}b_{11} + a_{12}b_{10}; \\ d_3 &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} + a_{13}b_{10}; \quad d_4 = a_{12}b_{12} + a_{13}b_{11} + a_{14}b_{10}; \\ d_5 &= a_{13}b_{12} + a_{14}b_{11} + a_{15}b_{10}; \quad d_6 = a_{14}b_{12} + a_{15}b_{11}; \quad d_7 = a_{15}b_{12}. \quad (1.87) \end{aligned}$$

Выражение (1.86) запишется в виде:

$$c^5(r, \varphi, z) u^2(r, \varphi, z) = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + d_4 z^4 + d_5 z^5 + d_6 z^6 + d_7 z^7. \quad (1.88)$$

Получившееся выражение (1.88) интегрируется по переменной z :

$$\int_0^{z_0=h} [c^5(r)u^2(r)] dz = d_0h + \frac{1}{2}d_1h^2 + \frac{1}{3}d_2h^3 + \frac{1}{4}d_3h^4 + \frac{1}{5}d_4h^5 + \\ + \frac{1}{6}d_5h^6 + \frac{1}{7}d_6h^7 + \frac{1}{8}d_7h^8. \quad (1.89)$$

Остается вернуться к прежним обозначениям (1.87), (1.80), (1.85) и проинтегрировать каждое слагаемое по переменной φ – в пределах $[0, 2\pi]$, а затем по переменной z – в пределах $[0, h]$. Интеграл по переменной r считается численно.

Аналогичным образом определяется кинетическая энергия окружной части потока, только вместо переменной $u(r, \varphi, z)$ во вторую степень возводиться $v(r, \varphi, z)$.

Таким образом, осуществлен вывод аналитической формулы для определения кинетической энергии радиальной и окружной частей потока.

Вертикальная составляющая вектора скорости закрученного потока определяется по формуле для w (1.15). Коэффициент w_2 имеет вид (1.29).

Коэффициенты w_{20} , w_{21} и w_{22} считаются численно.

Рассчитаем вертикальную часть кинетической энергии с учетом только третьего слагаемого, то есть для нахождения кинетической энергии, вертикальной её составляющей, необходимо возвести во вторую степень $w_2 \frac{z^2}{2}$.

Пятая степень для скорости звука газа определяется по формуле (1.79) с обозначениями вида (1.80).

В квадрат возводится третий коэффициент для вертикальной скорости газа:

$$\left(w_2 \frac{z^2}{2}\right)^2 = (w_{20} + w_{21} \cos(\psi) + w_{22} \sin(\psi))^2 \frac{z^4}{4} = \\ = \frac{1}{4} w_{20}^2 z^4 + \frac{1}{2} w_{20} w_{21} \cos(\varphi) z^4 + \frac{1}{2} w_{20} w_{22} \sin(\varphi) z^4 + \frac{1}{4} w_{21}^2 (\cos(\varphi))^2 z^4 + \\ + \frac{1}{2} w_{21} \cos(\varphi) w_{22} \sin(\varphi) z^4 + \frac{1}{4} w_{22}^2 (\sin(\varphi))^2 z^4.$$

При каждом полученном слагаемом вводятся обозначения:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{1}{4} w_{20}^2; & w_2 &= \frac{1}{2} w_{20} w_{21} \cos(\varphi); & w_3 &= \frac{1}{2} w_{20} w_{22} \sin(\varphi); \\
 w_4 &= \frac{1}{4} w_{21}^2 (\cos(\varphi))^2; & w_5 &= \frac{1}{2} w_{21} \cos(\varphi) w_{22} \sin(\varphi); & w_6 &= \frac{1}{4} w_{22}^2 (\sin(\varphi))^2.
 \end{aligned}
 \tag{1.90}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 &c^5(r, \varphi, z) w^2(r, \varphi, z) = \\
 &(a_{10} + a_{11}z + a_{12}z^2 + a_{13}z^3 + a_{14}z^4 + a_{15}z^5) (w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6) z^4.
 \end{aligned}$$

Проинтегрировав выражение по переменной z :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{z_0=h} [c^5(r, \varphi, z) w^2(r, \varphi, z)] dz &= \frac{1}{10} (w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6) a_{15} h^{10} + \\
 &+ \frac{1}{9} (w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6) a_{14} h^9 + \\
 &+ \frac{1}{8} (w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6) a_{13} h^8 + \\
 &+ \frac{1}{7} (w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6) a_{12} h^7 + \\
 &+ \frac{1}{6} (w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6) a_{11} h^6 + \\
 &+ \frac{1}{5} (w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6) a_{10} h^5.
 \end{aligned}
 \tag{1.91}$$

Вернувшись к прежним обозначениям с учетом (1.80) и (1.90) поочередно для каждого слагаемого проводится аналитически интегрирование по переменной φ .

Рассматривая частный случай с определенными пределами интегрирования: по переменной $\varphi - [0, 2\pi]$, по переменной $z - [0, h]$ для нахождения кинетической энергии вертикальной части потока остается численно посчитать интеграл по переменной r .

Таким образом, описана численно-аналитическая процедура нахождения кинетической энергии трех частей стационарного трехмерного восходящего закрученного потока воздуха в придонной области.

Решение поставленной задачи, у которой начальные данные заданы на непроницаемой горизонтальной плоскости $z = 0$ представлено в виде начального отрезка ряда по степеням z , сходящегося в окрестности плоскости $z = 0$. Коэффициенты ряда зависят от переменных r и φ . При этом, удалось зависимость от φ передать в явном виде. Поэтому при вычислении тройного интеграла по переменным r, φ, z интегрирование по z и φ проводится аналитически. Вычисление кинетической энергии трехмерного стационарного потока свелось к численному нахождению определенного интеграла только по переменной r .

1.7 Алгоритм валидации математической модели для моделирования стационарного течения газа в придонной части торнадо на основе данных натурального эксперимента

Для того, чтобы определить как описанное выше математическое моделирование течения газа в придонной части потока соответствует физическому явлению, наблюдаемому в природе, используются данные природных наблюдений. Далее будет описан алгоритм соответствия численных расчетов и данных природных торнадо:

1. Проводится математическое моделирование стационарного придонного течения газа в восходящем закрученном потоке (глава 1).

2. Для того, чтобы численно смоделировать течение газа, повторяющее данные природных торнадо в качестве исходных данных используется шкала Фудзиты (параграф 2.1).

3. Численно моделируется натуральный эксперимент, который повторяет скорость ветра на радиусе стока природных торнадо при построении численного решения модели Баутина для радиальных течений (параграф 3.1).

4. Проверяется сходимость численных решений при добавлении вторых и третьих коэффициентов ряда (параграфы 3.3, 3.4), численные модели которых построены на основе математических моделей, описанных в первой главе диссертации, с численным решением аналога натурального эксперимента.

Описанный выше алгоритм позволяет численно смоделировать математически описанную модель стационарного придонного течения газа при формировании восходящего закрученного потока от поверхности Земли. Затем, провести вычислительные эксперименты по натуральным данным, которые были получены путем наблюдения за торнадо.

1.8 Выводы по первой главе

В первой главе диссертационного исследования описана схема функционирования восходящих закрученных потоков воздуха, формирующихся от поверхности Земли.

Подробно рассматривается математическая модель при учете действия сил тяжести и Кориолиса для моделирования придонного природного течения газа в восходящем закрученном потоке.

Была проведена постановка исследовательской задачи. Определены начальные и граничные условия. Проведено доказательство однозначной разрешимости модели Баутина для стационарного случая при выполнении необходимых и достаточных условий.

Решение поставленной задачи согласно математической модели представимо в виде степенного ряда, сходящегося в окрестности плоскости $z = 0$. Первые коэффициенты ряда определяются при численном решении модели Баутина для радиальных течений. Разработан метод математического моделирования стационарного придонного течения газа, состоящий из трех этапов. При дифференцировании системы уравнений газовой динамики по переменной z , определяются последующие коэффициенты ряда из математических моделей, построенных на каждом этапе.

Доказывается теорема о представлении конечных тригонометрических сумм. При построении коэффициентов были получены рекуррентные соотношения, что в дальнейшем позволило последующие коэффициенты численно определить через предыдущие.

В исследовательской работе была разработана аналитическая процедура определения кинетической энергии радиальной, окружной и вертикальной частей восходящего закрученного потока, при найденных газодинамических параметрах вихря в рамках математической модели.

Для того, чтобы применить на практике данную теорию был разработан алгоритм валидации математической модели для моделирования стационарного течения газа в придонной части торнадо на основе натурального эксперимента.

Глава 2

Система компьютерного и имитационного моделирования для построения стационарного придонного течения при формировании торнадо от поверхности Земли

Во второй главе диссертации разработан численный метод моделирования течения газа в придонной части вихревого потока. Описана система компьютерного и имитационного моделирования, которая позволяет строить приближенные решения газодинамических параметров потоков, повторяющие данные природных наблюдений и определять кинетическую энергию вихря.

2.1 Алгоритм численного метода определения радиуса притока

На основе результатов математического моделирования, разработанных в первой главе диссертации, был создан численный метод определения радиуса притока торнадо для модели Баутина для радиальных течений при известных натуральных данных для основных классов торнадо из таблицы Фудзиты.

Чтобы численно реализовать модель, в которой описано течение газа в придонной части потока использовалась шкала Фудзиты. В этой шкале собраны данные, которые получены на основе наблюдений за торнадо [72]. В таблице 2.1 классифицированы вихри по скорости ветра и ширине следа – полосе разрушений, которая равна $d = 2r_0$ – диаметру потока.

Таблица 2.1 - Шкала Фудзиты

Класс торнадо	Скорость ветра, м/с	Ширина следа, м	Средняя длина пути, км	Среднее время разрушительного действия, мин
F0	19-32	5-15	1.9	2.4
F1	33-50	16-50	4.2	5.2
F2	51-70	51-160	8.7	10.8
F3	71-92	161-508	16.1	20.0
F4	93-116	547-1448	43.8	54.4
F5	117-142	1609-4989	57.1	71.0

Для детализации расчетов была введена расширенная шкала Фудзиты [38], где введены промежуточные классы торнадо и определен радиус стока – r_0 со скоростью ветра, которая рассчитывается по формуле $\vec{V} = \sqrt{u^2 + v^2}$, где u – радиальная скорость газа, v – окружная скорость газа.

Таблица 2.2 - Расширенная шкала Фудзиты

Класс торнадо	F00	F01	F10	F11	F20	F21	F30	F31	F40	F41	F50	F51	F52
r_0 радиус стока	2.5	5	8	16.5	25.5	52.72	80.5	167.5	273.5	498.7	804.5	1649.5	2494.5
$ \vec{V} $ скорость ветра, м/с,	19	25.5	33	41.5	51	60.5	71	81.5	93	104.5	117	129.5	420

Радиус притока – r_{in} определяется по известной скорости ветра на радиусе стока из таблицы Фудзиты, с соблюдением условий (1.10) – (1.11).

Этап 0. Чтобы найти значения для радиальной и окружной скоростей газа на радиусе стока торнадо использовалась комбинация методов Рунге-Кутты четвертого порядка точности и итерационного метода дихотомии для (1.19), (1.20), (1.21). Пока разница между результатом решения и заданной скоростью ветра, больше заданного ϵ , считается значение функции для u, v на концах отрезка $[r_0, r_{in}]$. В соответствии с результатом полученного значения на радиусе стока берется либо левая, либо правая часть.

После того как радиус притока для каждого класса торнадо определен, таблицы для входных данных для схемы на рис. 2.6 выглядят следующим образом: $\pi/6$, (табл.2.3) $\pi/4$, (табл.2.4) $\pi/3$ (табл.2.5).

Для вычислительных экспериментов использовалась пространственная сетка, в области $r \in [r_0, r_{in}]$, с шагом $h = \frac{(r_{in}-r_0)}{n}$, где $n = 10^6$ – число интервалов.

2.2 Алгоритм численного метода нахождения газодинамических параметров и кинетической энергии вихря

На основе полученных результатов математического моделирования, описанных в первой главе диссертации, был разработан алгоритм численного метода для модели Баутина в стационарном случае (1.2), (1.3), (1.8), (1.9).

Этап 1. Определяются первые коэффициенты ряда. Находится численное решение модели Баутина в стационарном случае для радиальных течений: (1.19), (1.20), (1.21). Решение для функций c_0 , u_0 , v_0 находится при помощи метода Рунге - Кутта при ранее определенном радиусе притока r_{in} .

Этап 2. Определяются вторые коэффициенты ряда – после дифференцирования системы (1.2) по переменной z , положенном $z = 0$ и известных U_0 , c_1 , w_1 с первого этапа. Математическая модель для вторых коэффициентов имеет следующий вид: (1.27), (1.28).

Этап 3. Третьи коэффициенты ряда получаются после двукратного дифференцирования системы (1.2) по переменной z , положенном $z = 0$ и известных U_0 , U_1 , c_2 , w_2 со второго этапа. Математическая модель для определения третьих коэффициентов ряда имеет вид: (1.44), (1.45).

Этап 4. Четвертые коэффициенты ряда получаются после трехкратного дифференцирования системы (1.2) по переменной z , положенном $z = 0$ и известных U_0 , U_1 , U_2 , c_2 , w_2 , c_3 , w_3 с третьего этапа. Математическая модель для нахождения четвертых коэффициентов ряда имеет вид: (1.66), (1.67).

Коэффициенты ряда поочередно определяются численно из полученных на каждом этапе математических моделей, которые подробно описаны в параграфе 1.5 диссертационного исследования.

На основе математического метода моделирования течения газа в придонной части потока формируются системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых определяется численно с помощью метода Рунге-Кутта четвертого порядка точности.

Этап 5. После получения газодинамических параметров потока c , u , v , w производится расчет кинетической энергии при варьировании высоты придонной части торнадо. Подробно вывод аналитической формулы для кинетической энергии потока описан в параграфе (1.6).

Этап 6. Реализована визуализация результатов для вычислительных экспериментов газодинамических параметров потока.

Рассматривая первые две теоремы о необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости модели Баутина в стационарном случае, а именно: если выполняются условия, представленные в теореме 1, тогда модель Баутина в стационарном случае имеет решение, чтобы это решение было однозначно определено используется теорема 2. Когда соблюдены необходимые и достаточные условия существует однозначно определенное решение для поставленной математической задачи и это решение представимо в виде степенного ряда, сходящегося вблизи плоскости $z = 0$. В теореме 2 доказывається существование единственного решения при выполнении заданных условий. Теорема сводится к аналогу теоремы С.В. Ковалевской, доказанной С.П. Баутиным. Численный метод, который разработан для решения поставленной задачи состоит в переходе от систем уравнений с частными производными к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. После этого имеет место совокупность аналитически-численного подхода, когда системы обыкновенных дифференциальных уравнений решаются с помощью численного метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

2.3 Программный блок для определения радиуса притока

В ходе исследования была разработана система компьютерного и имитационного моделирования, предназначенная для численного решения задач, описывающих стационарные трехмерные течения газа в придонной части потока и определения кинетической энергии при учете формирования потока от поверхности Земли.

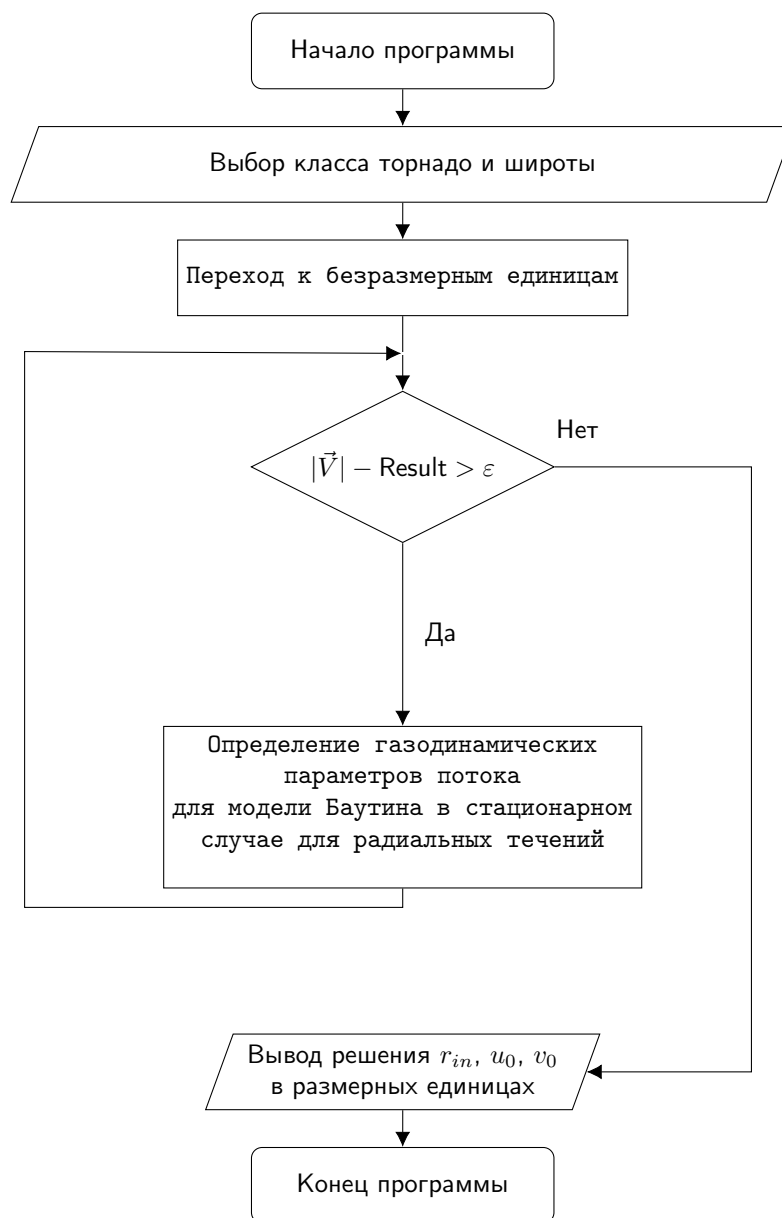


Рис. 2.1 - Блок-схема для расчета радиуса притока

Блок-схема для вычисления радиуса притока известных классов торнадо изображена на рисунке (2.1).

Начало программы по блок-схеме (рисунок (2.1)) – нахождение радиуса притока.

Таблица 2.3 - Характеристики торнадо по классам, широта $\psi = \pi/6$

Класс торнадо	Радиус стока, м	Радиус притока, м	Радиальная скорость газа, u_{in} , м/с	Скорость звука газа c_{in} , м/с	$\sin(\psi)$
F00	2.5	976	-0.0333	333	0.5
F01	5.0	1764	-0.0333	333	0.5
F10	8.0	2617	-0.0333	333	0.5
F11	16.5	4291	-0.0333	333	0.5
F20	25.5	5946	-0.0333	333	0.5
F21	52.75	9346	-0.0333	333	0.5
F30	80.5	12522	-0.0333	333	0.5
F31	167.5	19366	-0.0333	333	0.5
F40	273.5	26450	-0.0333	333	0.5
F41	498.75	37858	-0.0333	333	0.5
F50	804.5	50885	-0.0333	333	0.5
F51	1649.5	76662	-0.0333	333	0.5
F52	2494.5	98750	-0.0333	333	0.5
TC	3650	73000	-0.0333	333	0.5

Таблица 2.4 - Характеристики торнадо по классам, широта $\psi = \pi/4$

Класс торнадо	Радиус стока, м	Радиус притока, м	Радиальная скорость газа, u_{in} , м/с	Скорость звука газа c_{in} , м/с	$\sin(\psi)$
F00	2.5	859	-0.0333	333	0.7071
F01	5.0	1509	-0.0333	333	0.7071
F10	8.0	2220	-0.0333	333	0.7071
F11	16.5	3620	-0.0333	333	0.7071
F20	25.5	5012	-0.0333	333	0.7071
F21	52.75	7864	-0.0333	333	0.7071
F30	80.5	10540	-0.0333	333	0.7071
F31	167.5	16287	-0.0333	333	0.7071
F40	273.5	22240	-0.0333	333	0.7071
F41	498.75	31836	-0.0333	333	0.7071
F50	804.5	42790	-0.0333	333	0.7071
F51	1649.5	64470	-0.0333	333	0.7071
F52	2494.5	83034	-0.0333	333	0.7071
TC	3650	61739.5	-0.0333	333	0.7071

Таблица 2.5 - Характеристики торнадо по классам, широта $\psi = \pi/3$

Класс торнадо	Радиус стока, м	Радиус притока, м	Радиальная скорость газа, u_{in} , м/с	Скорость звука газа c_{in} , м/с	$\sin(\psi)$
F00	2.5	792	-0.0333	333	0.86603
F01	5.0	1374.5	-0.0333	333	0.86603
F10	8.0	2013.5	-0.0333	333	0.86603
F11	16.5	3274.4	-0.0333	333	0.86603
F20	25.5	4529.2	-0.0333	333	0.86603
F21	52.75	7109.5	-0.0333	333	0.86603
F30	80.5	9520.5	-0.0333	333	0.86603
F31	167.5	14721	-0.0333	333	0.86603
F40	273.5	20097.5	-0.0333	333	0.86603
F41	498.75	28773.5	-0.0333	333	0.86603
F50	804.5	38671.5	-0.0333	333	0.86603
F51	1649.5	58269.5	-0.0333	333	0.86603
F52	2494.5	75047.5	-0.0333	333	0.86603
TC	3650	55810	-0.0333	333	0.86603

Шаг 1. Осуществляется ввод класса торнадо и широты, на которой функционирует поток.

При вводе определённого класса торнадо с выбором широты, на которой функционирует вихрь считываются начальные данные с текстового файла для требуемого класса торнадо (r_0 , r_{in} – большое число, u_{in} , c_{in} , $\sin(\psi)$, $|\vec{V}|_{r=r_0}$). Это данные, которые можно получить из таблицы Фудзиты и из постановки задачи.

Шаг 2. Осуществляется переход к безразмерным единицам стандартным образом.

Шаг 3. Запускается блок, в котором определяются газодинамические параметры при решении модели Баутина в стационарном случае для радиальных течений. Значение искомых функций определяется на концах отрезка $[r_0, r_{in}]$.

Шаг 4. Полученные значения переводятся в размерные единицы.

Конец программы.

После работы данной программы таблицы для каждого класса торнадо выглядят следующим образом $\pi/6$, (табл.2.3) $\pi/4$, (табл.2.4) $\pi/3$ (табл.2.5).

Торнадо, расчёт входящего радиуса

Выбор класса торнадо
F00

Выбор широты (в градусах)
 30 45 60

F00 2,5 10000 -0,0333 333 0,5 19

Рассчитать радиус притока и скорости газа

R 975,66 м

u -13,02 м/с

v 13,84 м/с

Рис. 2.2 - Расчет радиуса притока торнадо, класса F00

Программа «Торнадо, вычисление радиуса притока» рис. 2.2 – 2.3 используется отдельно для вычисления r_{in} при выполнении следующего условия, заданного на радиусе стока в точке $r = r_0$: $|\vec{V}| = \sqrt{u^2 + v^2}$. Значение радиальной и окружной скоростей представлены в точке $r = r_0$ в размерных единицах м/с. Осуществляется выбор класса торнадо из предложенного списка, и широты, на которой функционирует восходящий поток.

Эффективность численного метода определения радиуса притока состоит в

Торнадо, расчёт входящего радиуса ✕

Выбор класса торнадо

F40 ▾

Выбор широты (в градусах)

30 45 60

F40 273,5 22240 -0,0333 333 0,86603 93

Рассчитать радиус притока и скорости газа

R

u

v

Рис. 2.3 - Расчет радиуса притока торнадо, класса F40

сокращении количества операций на области $[r_0, r_{in}]$ для нахождения радиальной и окружной компонент вектора скорости газа используя метод дихотомии и получении более точного решения – совпадающим с данными природных торнадо. Пока разница между результатом решения и заданной скоростью ветра, больше заданного ϵ , считается значение функции для u, v на концах отрезка $[r_0, r_{in}]$. Для первой итерации изначальный радиус притока r_{in} берется большим числом, записанным в текстовый файл вместе с основными характеристиками торнадо. Если разница между результатом решения и заданной скоростью ветра > 0 выбирается правая часть отрезка, если < 0 – выбирается левая часть.

После нажатия кнопки «Рассчитать радиус притока и скорость ветра» заполняются поля для R, u_0, v_0 .

Внизу слева (рис. 2.3) появится строка с классом торнадо, r_0 – радиусом стока, предполагаемый радиус притока, входящее безразмерное значение $U_{in}, C_{00}, \sin(\psi)$, и скорость ветра ($|\vec{V}| = \sqrt{u^2 + v^2}$).

2.4 Программный блок для построения приближенных решений стационарного придонного течения и расчета кинетической энергии потока при формировании торнадо от поверхности Земли

Торнадо, стационарный случай

Выбор метод расчёта

Метод Рунге-Кутты

Выбор величина шага интегрирования

0.000001 0.00001 0.0001

Выбор широты, в градусах

30 45 60

Выбор высоты, Z в метрах

50

Размерные единицы, МДж

Wu Ww
Wv W

Размерные единицы, м/с

C V
U W

Выбор числа слагаемых ряда

1 2 3 4 5

Выбор класса торнадо

F00
F01
F10
F11
F20
F21
F30
F31
F40
F41
F50
F51
F52
TC

Д параметры и энергию потока

Рис. 2.4 - Основная форма

Схема работы программного блока представлена на рис. 2.6. При выборе класса, для которого необходимо вычислить газодинамические параметры и кинетическую энергию, соответствующие характеристики считываются из файла с выбранной широтой ψ . Осуществляется выбор: шага интегрирования, значения высоты z , в метрах, количество коэффициентов ряда.

Начало программы по блок – схеме (рисунок (2.6)) – расчет газодинамических параметров и кинетической энергии потока.

Шаг 1. Осуществляется ввод класса торнадо и широты, на которой функционирует поток, шага сетки, высоты придонной части потока, числа слагаемых ряда.

Шаг 2. Осуществляется переход к безразмерным единицам стандартным образом.

Шаг 3. Запускается блок, в котором определяются первые коэффициенты при

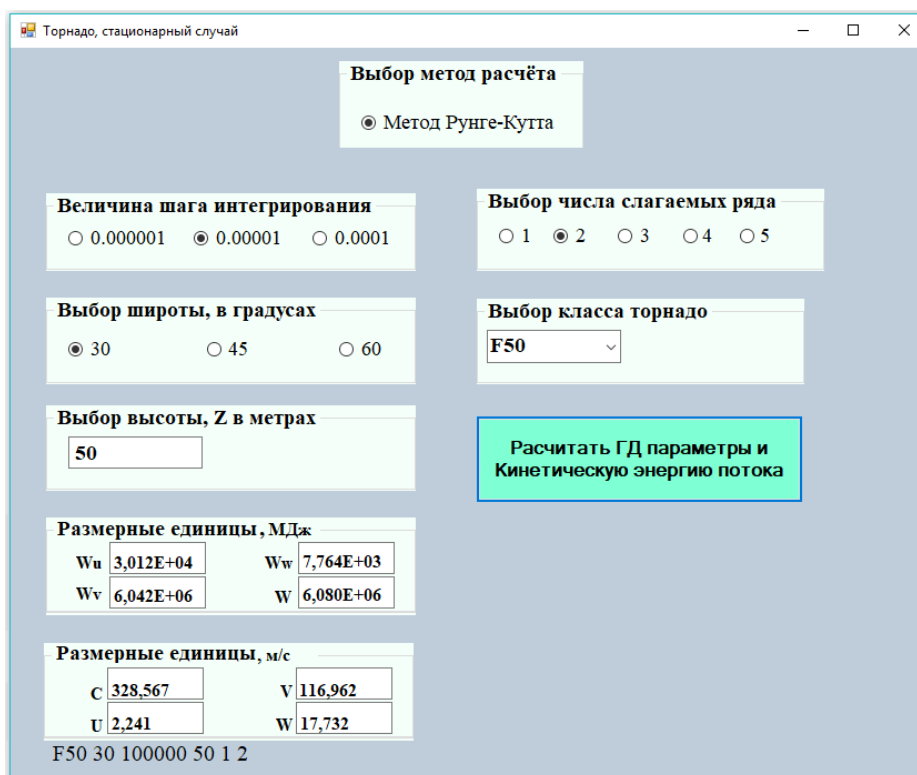


Рис. 2.5 - Расчёт газодинамических параметров и кинетической энергии

численном решении модели Баутина в стационарном случае для радиальных течений (1.19), (1.20), (1.21).

Шаг 4. Запускается блок, в котором определяются вторые коэффициенты ряда при численном решении модели (1.27), (1.28).

Шаг 5. Запускается блок, в котором определяются третьи коэффициенты ряда при численном решении модели (1.44), (1.45).

Шаг 6. Запускается блок, в котором реализовано вычисление кинетической энергии трех частей потока.

Шаг 7. Результирующие значения записываются и переводятся в размерные единицы.

Шаг 8. Запускается блок для визуализации результатов вычислительных экспериментов газодинамических параметров потока.

Конец программы.

Вывод расчетной информации производится в файл `traect.dat`, который формируются в корневой директории. С помощью математического пакета MATLAB был написан скрипт для визуализации результатов. Из этого скрипта сформирован файл-exe, при запуске которого появляется форма для построения результатов газодинамических параметров.

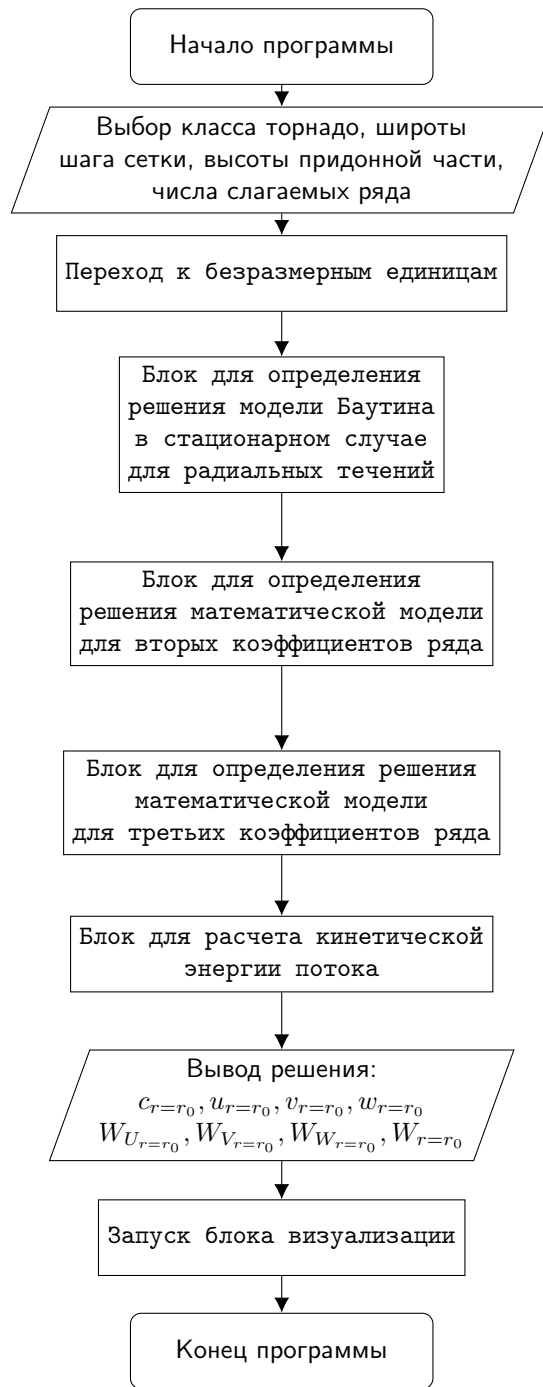


Рис. 2.6 - Схема работы комплекса программ

Все программы объединяются в общую, которой можно управлять с помощью визуальной оболочки, написанной на языке программирования C#. При определении параметров можно менять позиции в основной форме на рис. 2.4. По нажатию «Рассчитать ГД параметры и кинетическую энергию потока» запускается основная расчетная программа и формируются файлы с результатами вычислительного эксперимента для газодинамических параметров и кинетической энергии различных частей потока. В левом нижнем углу показаны данные, заданные пользователем, рис. 2.5. После того как сформировались файлы вы-

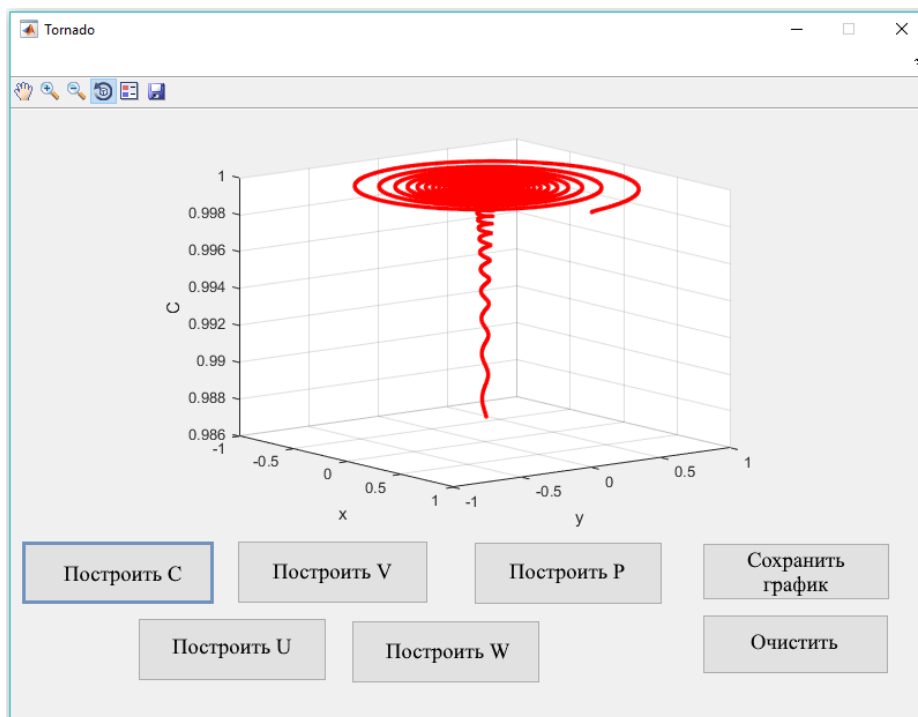


Рис. 2.7 - C , торнадо класса F50

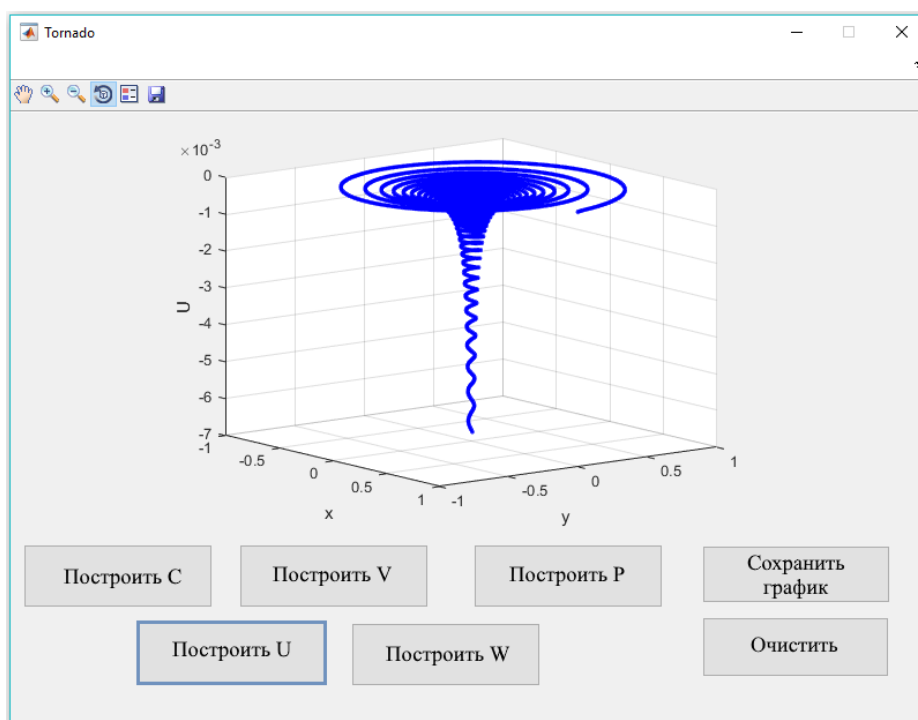


Рис. 2.8 - U , торнадо класса F50

вода, запускается программа для визуализации результатов – Tornado.exe рис. 2.7 – 2.9.

На рис. 2.7 в верхнем левом углу формы представлена панель инструментов, с помощью которой можно работать с графиками.

Выше была описана схема программного блока, который позволяет прово-

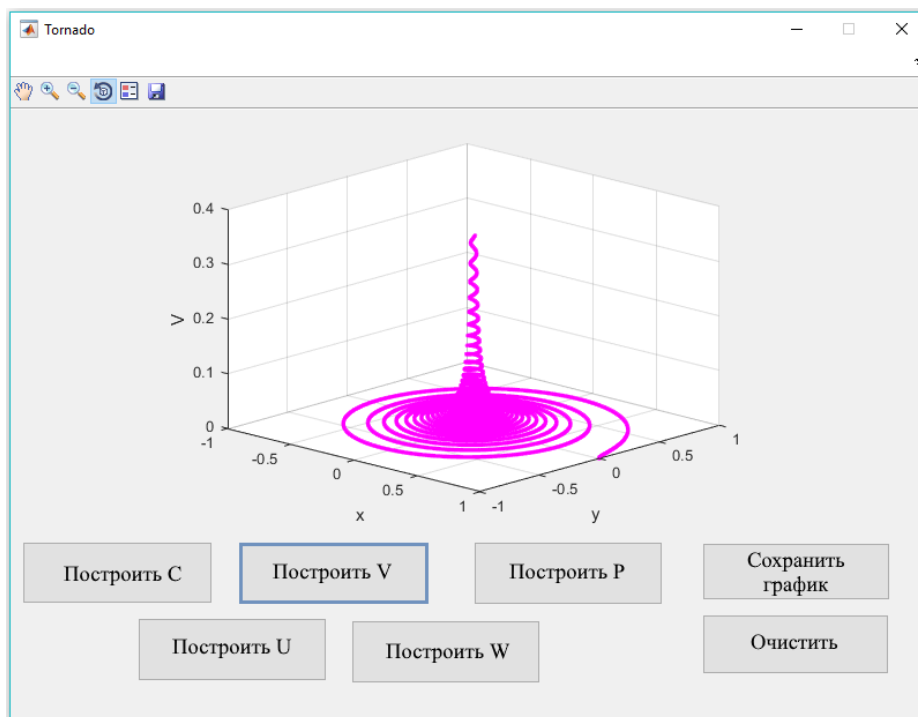


Рис. 2.9 - V , торнадо класса F50

дить построение приближенных решений, описывающих стационарные трехмерные течения газа в придонной части потока и обеспечивает вычисление кинетической энергии потока.

2.5 Выводы по второй главе

Вторая глава диссертационного исследования посвящается системе компьютерного и имитационного моделирования, которая была реализована на основе математического моделирования газодинамических параметров потока в рамках рассматриваемой математической модели Баутина для стационарного случая.

Для того, чтобы определить радиус, где начинается закрученное движение вихря - r_{in} , была применена таблица Фудзиты, где торнадо классифицированы по скорости ветра и ширине следа. С помощью комбинации численных методов Рунге-Кутты четвертого порядка точности и метода дихотомии определяется на радиусе стока вихря r_0 радиальная и окружная скорости газа.

Описывается разработанный алгоритм численного метода для определения газодинамических параметров потока и кинетической энергии вихря.

Реализован программный блок для расчета радиуса притока с таблицами исходных данных для каждого класса торнадо, которые нужно определить. Описан пошаговый алгоритм нахождения радиальной и окружной скорости газа на радиусе стока и определения радиуса притока r_{in} .

Разработан программный блок для расчета газодинамических параметров и кинетической энергии восходящего закрученного потока с выбором широты, на которой функционирует торнадо, количества слагаемых ряда, высоты придонной части вихря.

Представлена визуальная оболочка системы компьютерного и имитационного моделирования с доступным интерфейсом пользователя и визуализацией результатов вычислительных экспериментов.

Описана схема работы системы компьютерного и имитационного моделирования на основе математической модели Баутина, которая позволяет моделировать природное стационарное течение воздуха в придонной части восходящего закрученного потока при формировании вихря от поверхности Земли в соответствии с данными натурных наблюдений.

Глава 3

Вычислительные эксперименты

Для верификации численной модели обычно используют данные эксперимента или аналитическое решение задачи. В данном случае, проводится построение аналитического решения при помощи математической модели, которая описывает стационарное придонное течение газа в восходящих закрученных потоках при формировании торнадо от поверхности Земли. В диссертационной работе в качестве экспериментальных данных выступают данные натурального эксперимента (скорость ветра и ширина следа) известных классов торнадо. При построении численного решения для первых коэффициентов ряда (строится численное решение математической модели Баутина для радиальных течений) моделируется аналог натурального эксперимента, который повторяет данные классов торнадо из таблицы Фудзиты. Далее проводится верификация численных экспериментов с учетом двух и трех коэффициентов степенного ряда с определением погрешности относительно натурального эксперимента. Реализован расчет кинетической энергии трех частей потока с изменением высоты придонной части. Проведен анализ полученных результатов.

3.1 Численное моделирование натурального эксперимента

В параграфе описаны результаты вычислительных экспериментов газодинамических параметров: c_0 , u_0 , v_0 для модели Баутина в стационарном случае для радиальных течений. Ниже показаны поверхности газодинамических величин в декартовой системе координат для торнадо различных классов и тропического циклона средней интенсивности. Газодинамические параметры изображаются на траекториях движения частиц в каждой точке по радиусу от r_0 до r_{in} .

Скорость звука газа

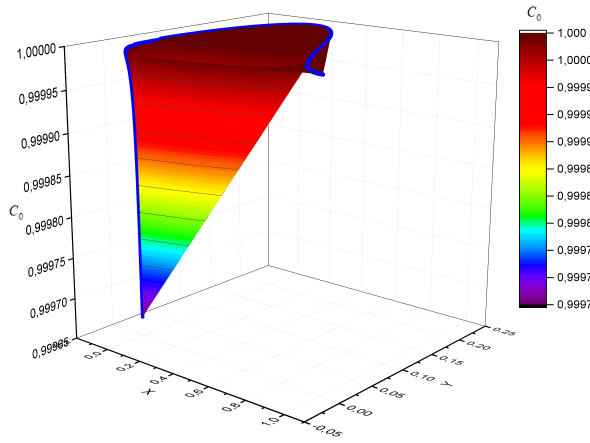


Рис. 3.1 - Торнадо класса F00, c_0 на траектории движения частицы

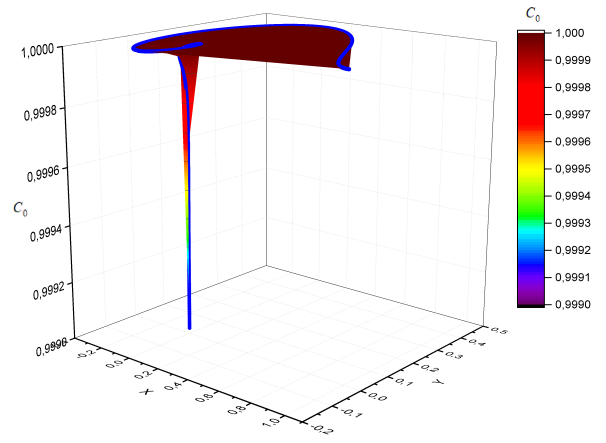


Рис. 3.2 - Торнадо класса F10, c_0 на траектории движения частицы

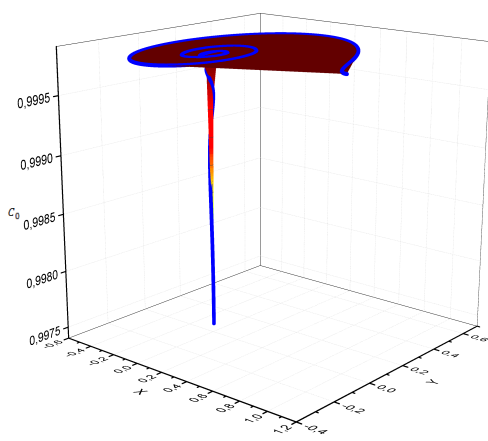


Рис. 3.3 - Торнадо класса F20, c_0 на траектории движения частицы

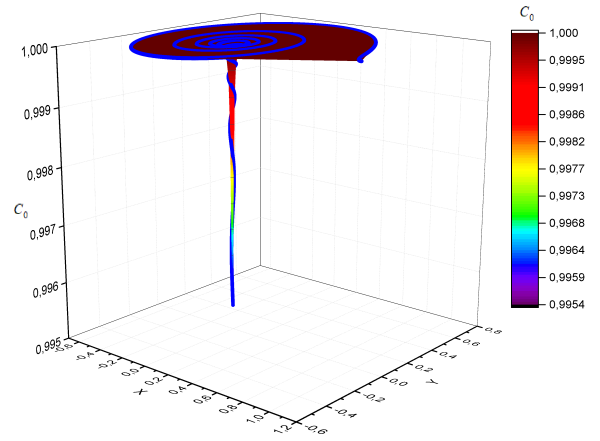


Рис. 3.4 - Торнадо класса F30, c_0 на траектории движения частицы

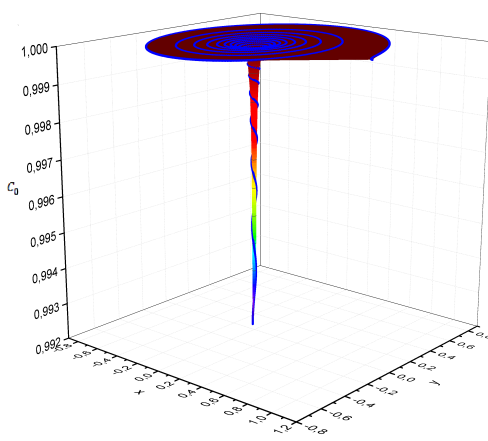


Рис. 3.5 - Торнадо класса F40, c_0 на траектории движения частицы

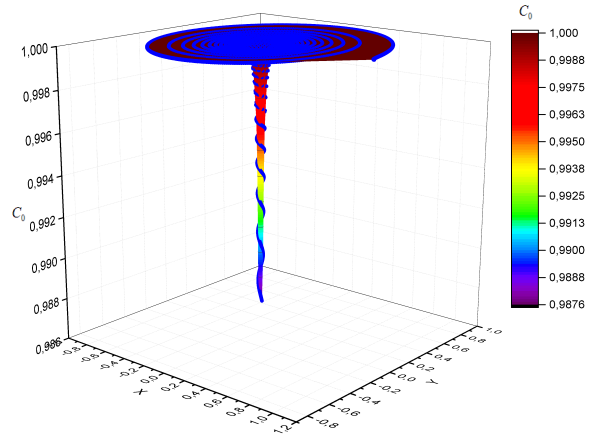


Рис. 3.6 - Торнадо класса F50, c_0 на траектории движения частицы

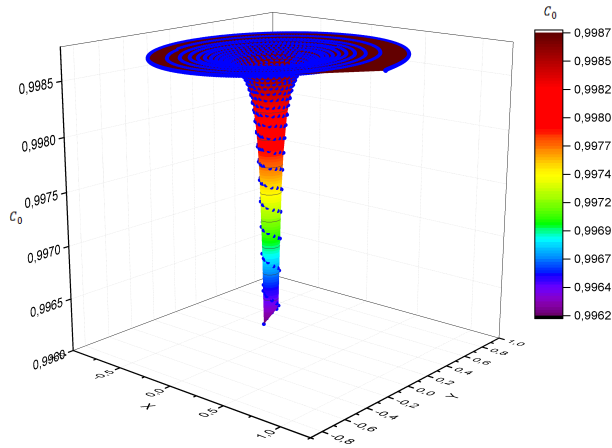


Рис. 3.7 - Тропический циклон, c_0 на траектории движения частицы

На рис. 3.1 – 3.7 показаны поверхности газодинамических распределений для скорости звука газа c_0 в декартовой системе координат xOy , изображенных на траекториях движения частиц газа для торнадо F00 – F50 и тропического циклона средней интенсивности. В таблице 3.1 представлены значения плотности, давления и изменения этих величин в процентном соотношении. Процент для изменения плотности и давления рассчитывается следующим образом:

$\% = (f(r_{in}) - f(r_0)) \times 100 / f(r_{in})$, где f принимает значения функций плотности и давления: ρ, P .

Таблица 3.1 - Скорость звука газа c_0

Класс торнадо	c_0 , безразм.	c_0 , м/с разм.	$\downarrow c_0$ %	ρ безразм.	$\downarrow \rho$, %	$P(r_{in})$, безразм.	$P(r_0)$, безразм.	$\downarrow P$, %
F00	0.999674	332.891	0.03	0.998	0.2	0.714	0.712	0.23
F10	0.999018	332.673	0.10	0.995	0.5	0.714	0.709	0.68
F20	0.997651	332.217	0.23	0.988	1.2	0.714	0.703	1.70
F30	0.995444	331.483	0.50	0.977	2.3	0.714	0.692	3.15
F40	0.992164	330.390	0.80	0.961	3.9	0.714	0.676	5.30
F50	0.987581	328.865	1.26	0.939	6.1	0.714	0.654	8.40
ТЦ	0.997469	332.157	0.25	0.987	1.3	0.714	0.702	1.80

Для торнадо **класса F00** значение c_0 уменьшается вблизи радиуса стока $r \rightarrow r_0$. Величина c_0 меняется от единичного безразмерного значения (333 м/с – размерное значение) до 0.9997 (332.891 м/с), изменение скорости звука газа равно 0.033 %. Безразмерное значение плотности при $r \rightarrow r_0$ равно 0.998, изменение плотности – 0.16 %. Давление понижается на 0.23 %.

Для торнадо **класса F10** c_0 меняет свою величину от единичного безразмерного значения (333 м/с) до 0.9990 (332.673 м/с), изменение значения скорости

звука газа равно 0.098 %. Безразмерное значение плотности при $r \rightarrow r_0$ равно 0.995, изменение плотности – 0.49 %. Давление понижается на 0.68 %.

Для торнадо **класса F20** c_0 меняет свою величину от единичного безразмерного значения (333 м/с) до 0.9971 (332.22 м/с), изменение значения скорости звука газа равно 0.24 %. Безразмерное значение плотности при $r \rightarrow r_0$ равно 0.988, изменение плотности – 1.2 %. Давление понижается на 1.7 %.

Для торнадо **класса F30** c_0 меняет свою величину от единичного безразмерного значения (333 м/с) до 0.9954 (331.48 м/с), изменение значения скорости звука газа равно 0.46 %. Безразмерное значение плотности при $r \rightarrow r_0$ равно 0.977, изменение плотности – 2.26 %. Давление понижается на 3.15 %.

Для торнадо **класса F40** c_0 меняет свою величину от единичного безразмерного значения (333 м/с) до 0.9920 (330.390 м/с), изменение значения скорости звука газа равно 0.80 %. Безразмерное значение плотности при $r \rightarrow r_0$ равно 0.961, изменение плотности – 4.86 %. Давление понижается на 5.3 %.

Для торнадо **класса F50** c_0 меняет свою величину от единичного безразмерного значения (333 м/с) до 0.9876 (328.865 м/с), изменение значения скорости звука газа равно 1.26 %. Безразмерное значение плотности при $r \rightarrow r_0$ равно 0.939, изменение плотности – 6.1 %. Давление понижается на 8.4 %.

Для **тропического циклона** c_0 меняет свою величину от единичного безразмерного значения (333 м/с) до 0.9971 (332.157 м/с), изменение значения скорости звука газа равно 0.25 %. Безразмерное значение плотности при $r \rightarrow r_0$ равно 0.987, плотность изменилась на 1.3 %, давление понизилось на 1.8 %.

Для газодинамического параметра – скорости звука газа c_0 вычислительными экспериментами в рамках модели подтверждается, что вблизи радиуса стока в центре вихревого потока находится область пониженного давления. С увеличением класса торнадо давление понижается на бóльшую величину.

Радиальная скорость газа

На рис. 3.8 – 3.14 представлены поверхности газодинамических распределений для радиальной скорости газа u_0 в декартовой системе координат xOy с выделенными линиями тока для торнадо F00 – F50 и тропического циклона средней интенсивности. В таблице 3.2 показаны значения радиальной скорости в безразмерных и размерных единицах.

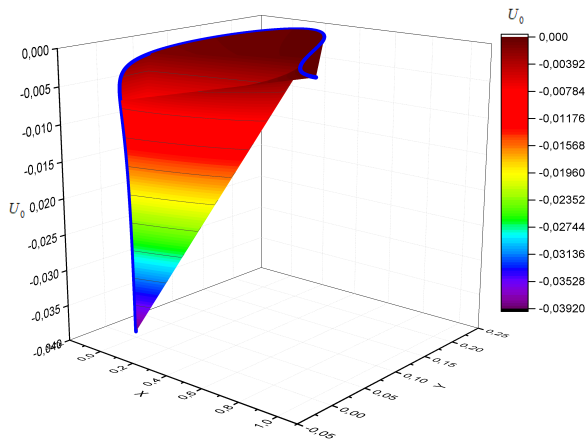


Рис. 3.8 - Торнадо класса F00, u_0 на траектории движения частицы

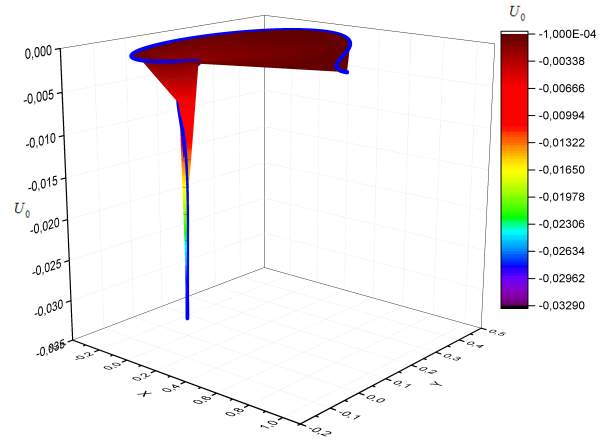


Рис. 3.9 - Торнадо класса F10, u_0 на траектории движения частицы

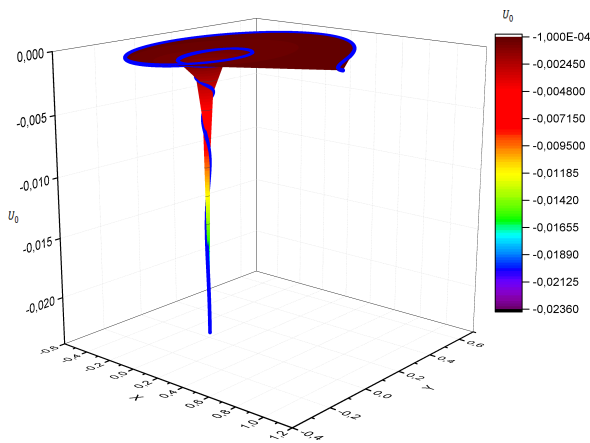


Рис. 3.10 - Торнадо класса F20, u_0 на траектории движения частицы

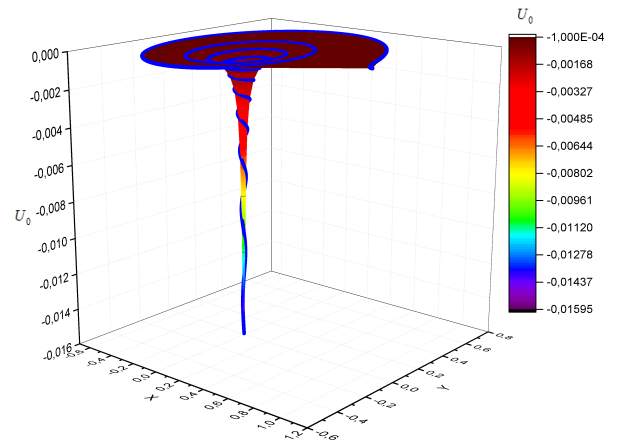


Рис. 3.11 - Торнадо класса F30, u_0 на траектории движения частицы

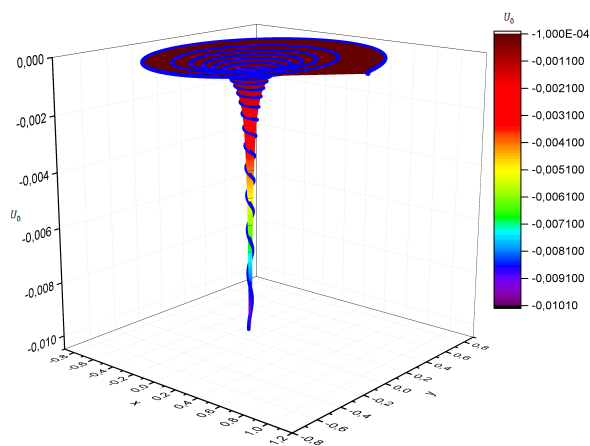


Рис. 3.12 - Торнадо класса F40, u_0 на траектории движения частицы

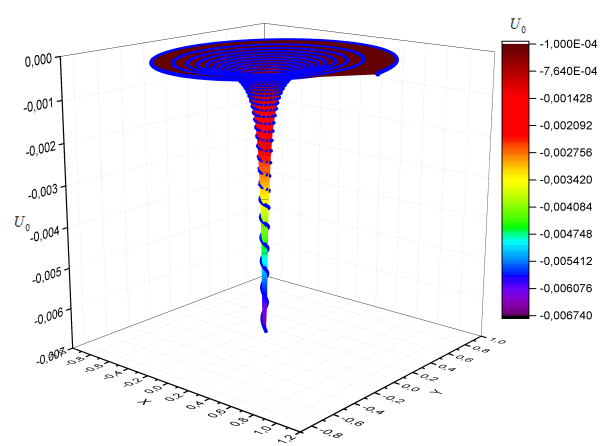


Рис. 3.13 - Торнадо класса F50, u_0 на траектории движения частицы

Отрицательный знак радиальной компоненты вектора скорости говорит о том, что радиальная скорость газа направлена к центру, к стоку торнадо r_0 .

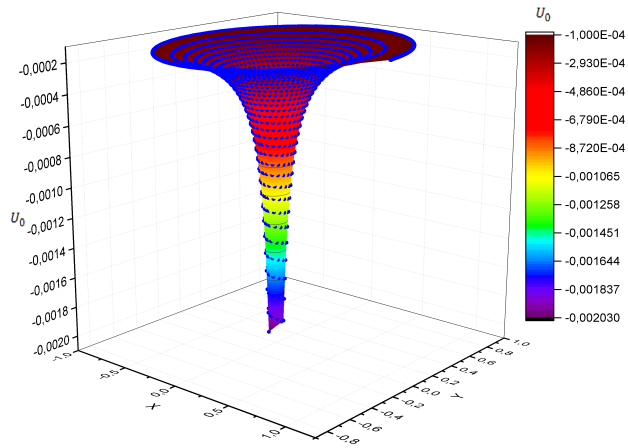


Рис. 3.14 - Тропический циклон, u_0 на траектории движения частицы

Таблица 3.2 - Радиальная скорость газа

Класс торнадо	u_0 безразм.	u_0 разм., м/с
F00	0.039104	-13.021
F10	0.032874	-10.947
F20	0.023593	-7.856
F30	0.015915	-5.299
F40	0.010059	-3.350
F50	0.006733	-2.242
ТЦ	0.002026	-0.675

Область пониженного давления способствует направлению газа к центру потока. С увеличением класса торнадо уменьшается величина радиальной скорости газа.

Окружная скорость газа

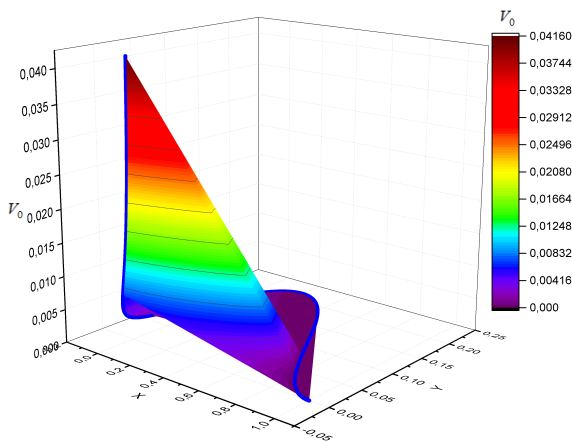


Рис. 3.15 - Торнадо класса F00, v_0 на траектории движения частицы

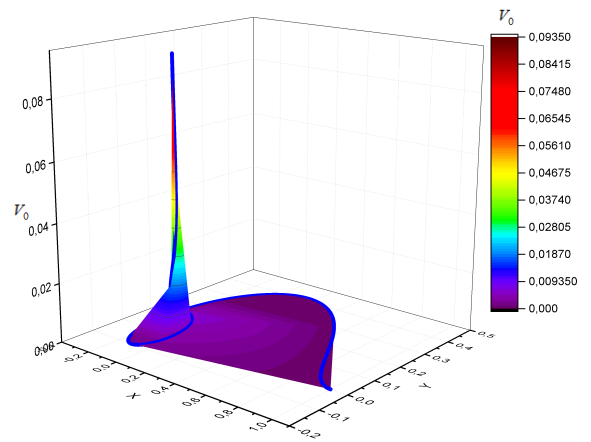


Рис. 3.16 - Торнадо класса F10, v_0 на траектории движения частицы

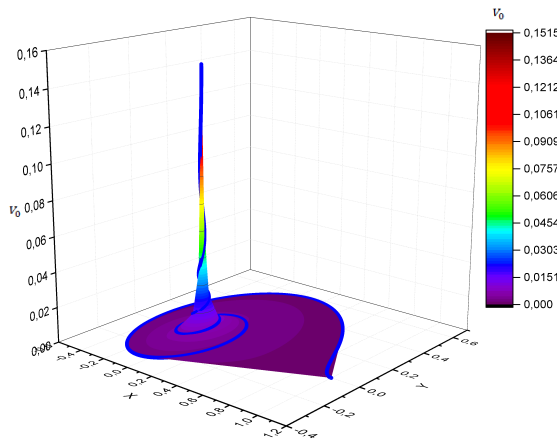


Рис. 3.17 - Торнадо класса F20, v_0 на траектории движения частицы

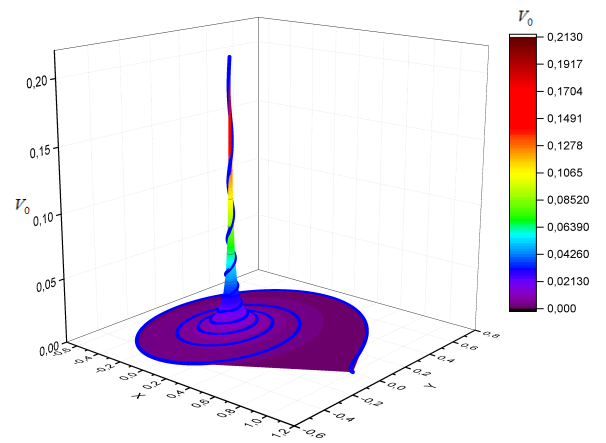


Рис. 3.18 - Торнадо класса F30, v_0 на траектории движения частицы

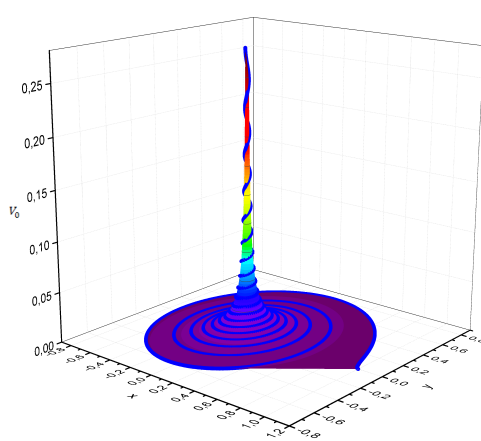


Рис. 3.19 - Торнадо класса F40, v_0 на траектории движения частицы

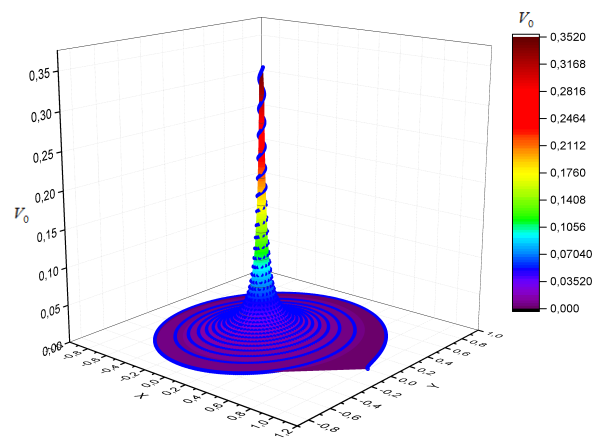


Рис. 3.20 - Торнадо класса F50, v_0 на траектории движения частицы

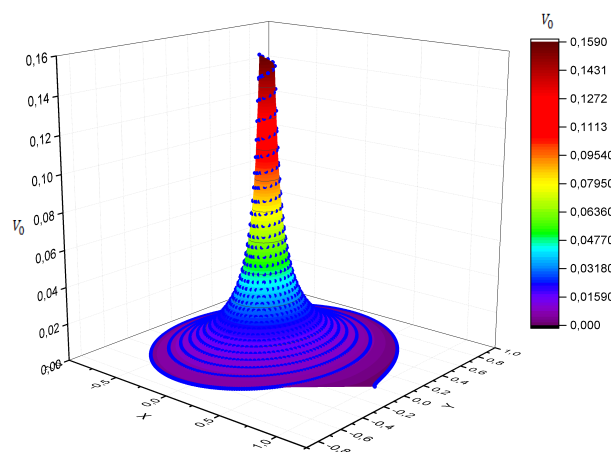


Рис. 3.21 - Тропический циклон, v_0 на траектории движения частицы

На рис. 3.15 – 3.21 представлены поверхности газодинамических распределений для окружной скорости газа v_0 в декартовой системе координат xOy с изображенными линиями тока для торнадо F00 – F50 и тропического циклона средней интенсивности. В таблице 3.3 показаны значения v_0 в безразмерных и размерных единицах.

Таблица 3.3 - Окружная скорость газа

Класс торнадо	v_0 безразм.	v_0 разм., м/с
F00	0.041593	13.850
F10	0.093449	31.119
F20	0.151343	50.397
F30	0.212615	70.800
F40	0.279195	92.972
F50	0.351241	116.963
ТЦ	0.158974	52.938

Положительное значение окружной скорости говорит о том, что закрутка газа направлена против хода часовой стрелки, что соответствует расположению потока в северном полушарии. С увеличением класса торнадо возрастает окружная скорость газа.

Результаты вычислительных экспериментов для первых коэффициентов ряда продемонстрировали, что с увеличением класса торнадо уменьшается значение скорости звука газа, плотности и давления на радиусе стока торнадо r_0 . Для модели Баутина в стационарном случае для радиальных течений вычислительными экспериментами было подтверждено наличие области пониженного давления. С увеличением класса торнадо увеличивается величина окружной скорости и снижается радиальная скорость газа вблизи радиуса стока.

Вычислительные эксперименты для радиальных течений на широтах: $\pi/6, \pi/4, \pi/3$

В данном пункте представлены вычислительные эксперименты для основных классов торнадо для широт: $\pi/6, \pi/4, \pi/3$.

Скорость звука газа

На рис. 3.22 – 3.28 показаны значения скорости звука газа $c_0(r)$ для классов торнадо F00 – F50 и тропического циклона средней интенсивности, в таблицах 3.4 – 3.6 подробно описаны значения скорости звука газа для перечисленных выше классов на широтах: $\pi/6, \pi/4, \pi/3$.

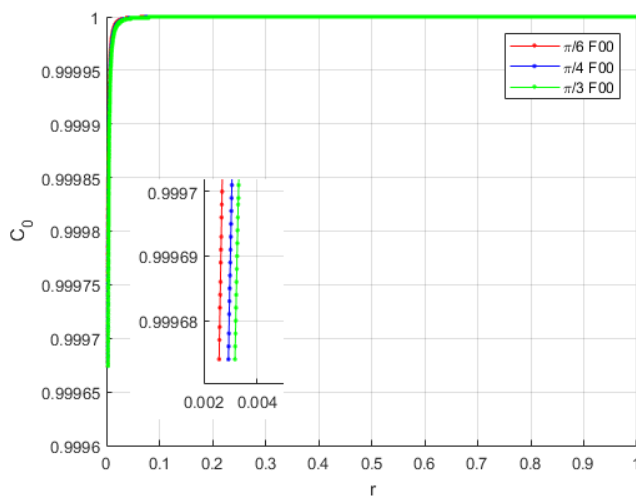


Рис. 3.22 - Торнадо класса F00, c_0 для широт: $\pi/6, \pi/4, \pi/3$

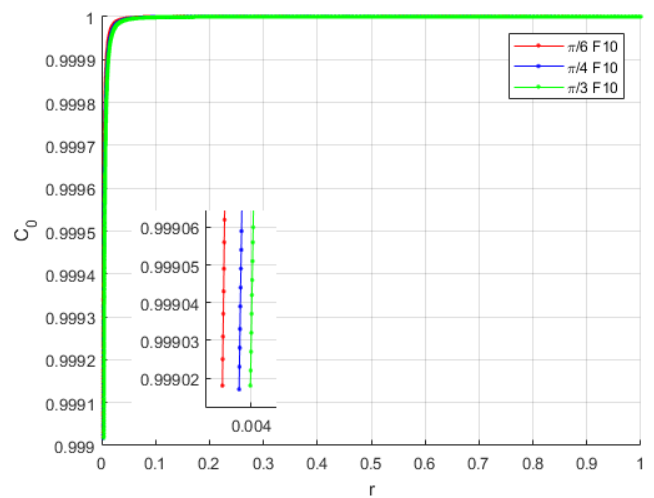


Рис. 3.23 - Торнадо класса F10, c_0 для широт: $\pi/6, \pi/4, \pi/3$

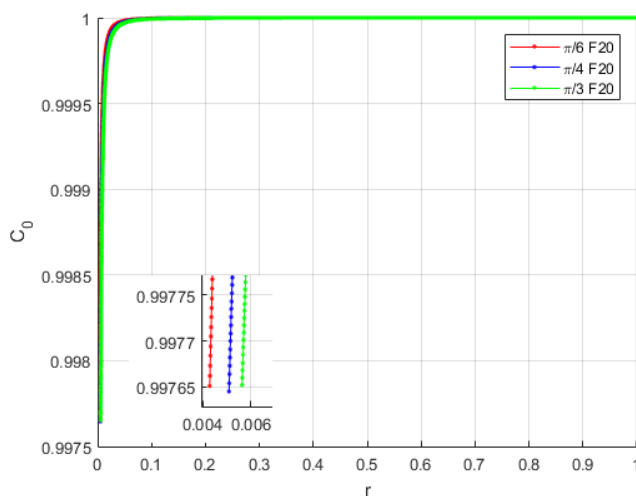


Рис. 3.24 - Торнадо класса F20, c_0 для широт: $\pi/6, \pi/4, \pi/3$

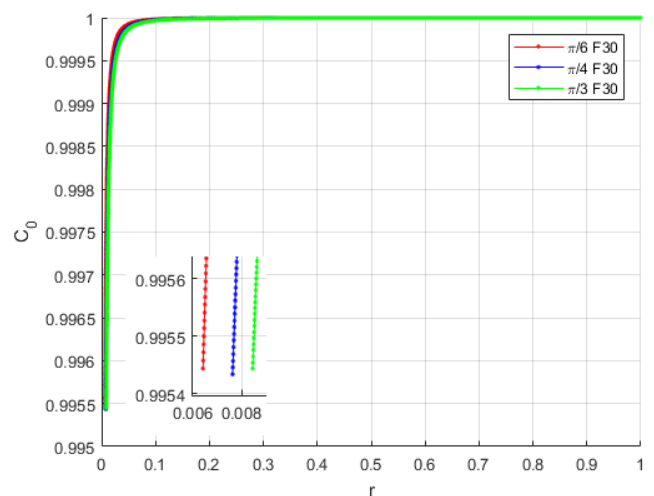


Рис. 3.25 - Торнадо класса F30, c_0 для широт: $\pi/6, \pi/4, \pi/3$

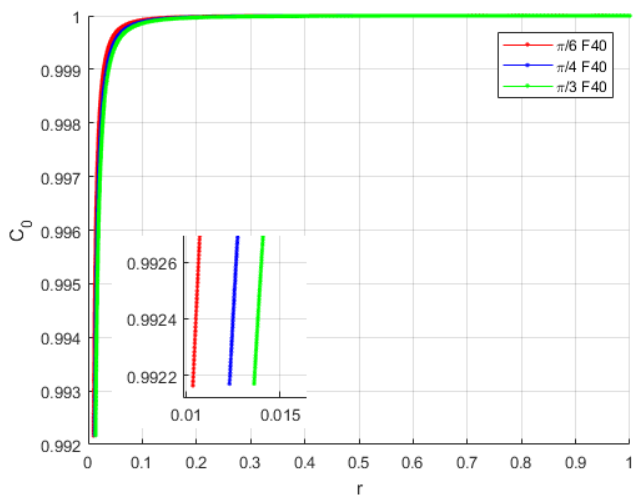


Рис. 3.26 - Торнадо класса F40, c_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

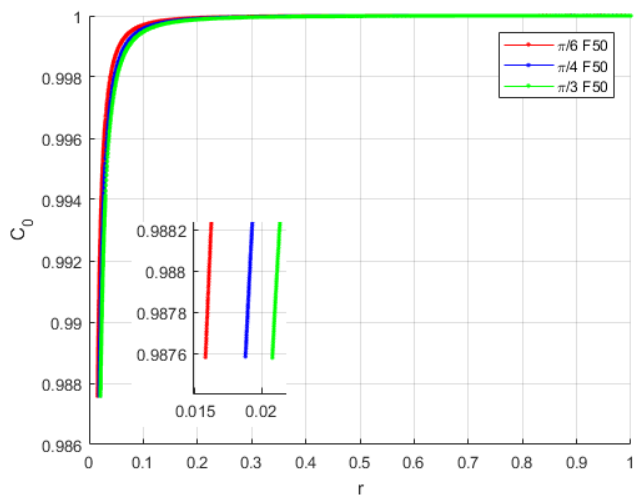


Рис. 3.27 - Торнадо класса F50, c_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

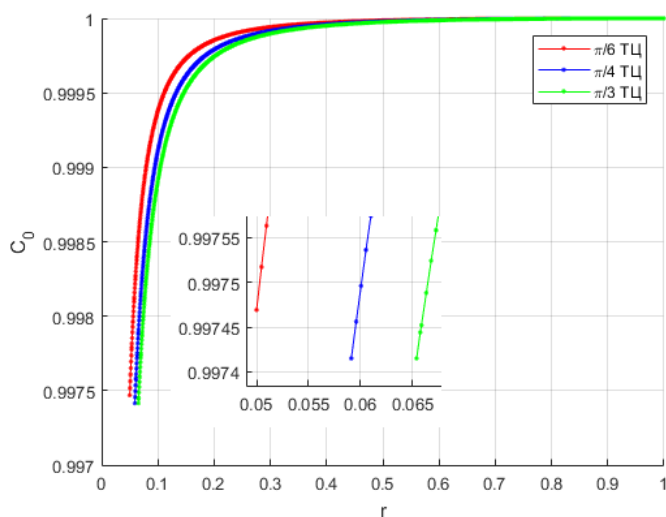


Рис. 3.28 - Тропический циклон, c_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

Таблица 3.4 - Значение скорости звука газа c_0 для широты $\psi = \pi/6$

Класс торнадо	F00	F10	F20	F30	F40	F50	ТЦ
безразмерное значение	0.999674	0.999018	0.997651	0.995444	0.992164	0.987581	0.997469
размерное значение, м/с	332.891	332.673	332.218	331.483	330.391	328.865	332.157

В таблицах 3.4 – 3.6 продемонстрированы безразмерные и размерные значения скорости звука газа для основных классов торнадо на широтах: $\pi/6$, $\pi/4$,

Таблица 3.5 - Значение скорости звука газа c_0 для широты $\psi = \pi/4$

Класс торнадо	F00	F10	F20	F30	F40	F50	ТЦ
безразмерное значение	0.999674	0.999017	0.99764551	0.995434	0.99217	0.987584	0.997415
размерное значение, м/с	332.891	332.673	332.216	331.479	330.393	328.866	332.139

Таблица 3.6 - Значение скорости звука газа c_0 для широты $\psi = \pi/3$

Класс торнадо	F00	F10	F20	F30	F40	F50	ТЦ
безразмерное значение	0.999674	0.999018	0.997652	0.995444	0.99217	0.987578	0.997415
размерное значение, м/с	332.892	332.673	332.218	331.483	330.393	328.864	332.139

$\pi/3$.

На перечисленных широтах плотность и давление на радиусе стока торнадо $r = r_0$ стремятся к одной и той же величине для соответствующего класса торнадо.

Радиальная скорость газа

На рис. 3.29 – 3.35 представлены графики распределения радиальной скорости газа для классов торнадо F00 – F50 и тропического циклона средней интенсивности. В таблицах 3.7 – 3.9 подробно описаны результаты вычислительных экспериментов для радиальной скорости газа вблизи радиуса стока r_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$.

В таблицах 3.7 – 3.9 показаны безразмерные и размерные значения радиальной скорости газа для торнадо основных классов на широтах: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$. В таблицах 3.8 – 3.9 добавлена строка, в которой указан процент изменения значения радиальной скорости газа относительно значения u_0 на широте $\psi = \pi/6$ того же класса.

На описанных широтах вблизи радиуса стока $r = r_0$ значение радиальной

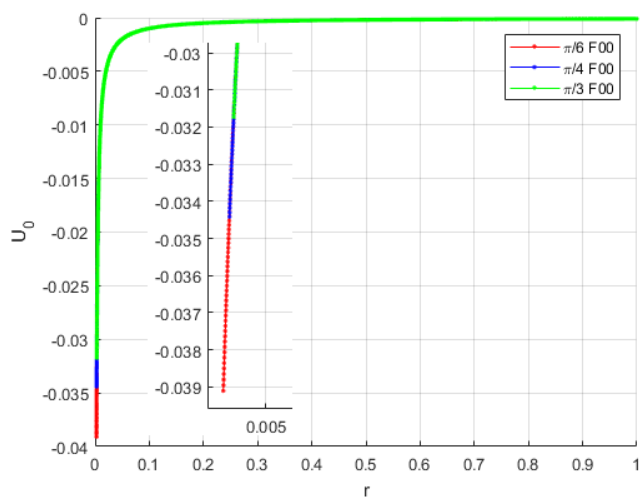


Рис. 3.29 - Торнадо класса F00, u_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

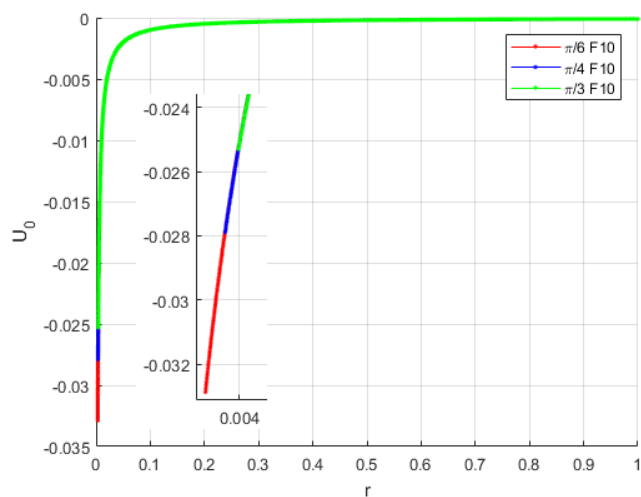


Рис. 3.30 - Торнадо класса F10, u_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

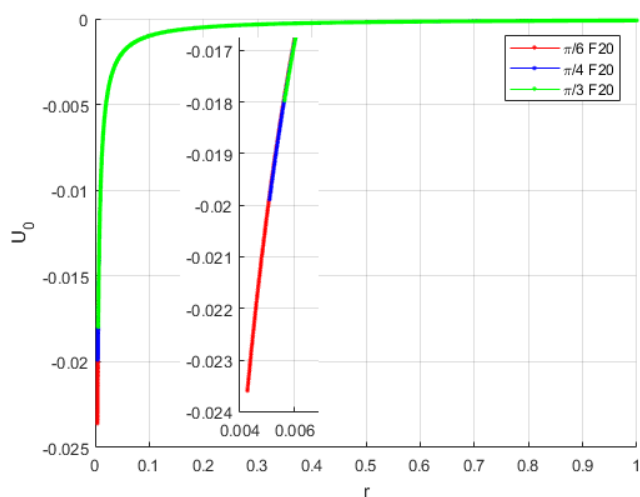


Рис. 3.31 - Торнадо класса F20, u_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

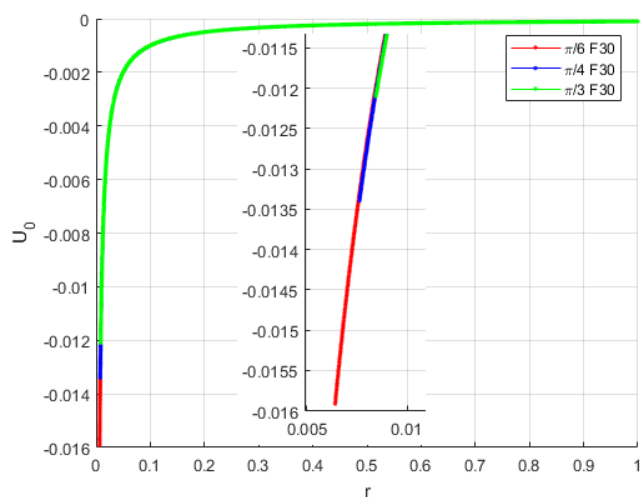


Рис. 3.32 - Торнадо класса F30, u_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

Таблица 3.7 - Значение радиальной скорости газа u_0 для широты $\psi = \pi/6$

Класс торнадо	F00	F10	F20	F30	F40	F50	ТЦ
безразмерное значение	-0.0391	-0.03287	-0.02359	-0.01592	-0.010059	-0.006733	-0.00203
размерное значение, м/с	-13.0215	-10.9469	-7.85662	-5.29954	-3.34961	-2.24204	-0.6745

скорости газа меняется на 12 – 24%. С увеличением класса торнадо уменьшается максимальное значение радиальной скорости газа. С увеличением широты, на которой был сформирован восходящий закрученный поток, уменьшается

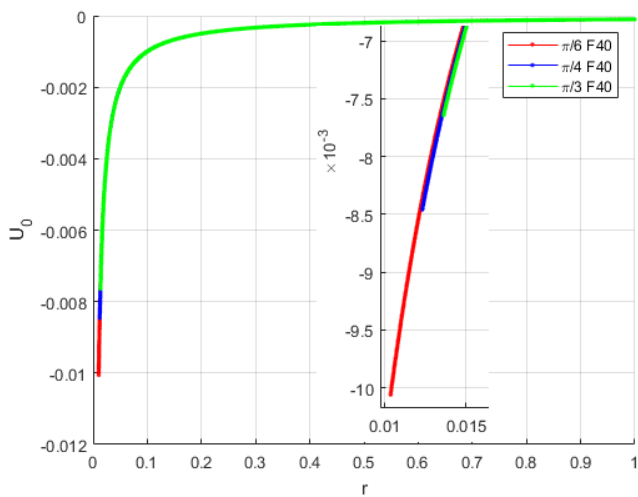


Рис. 3.33 - Торнадо класса F40, u_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

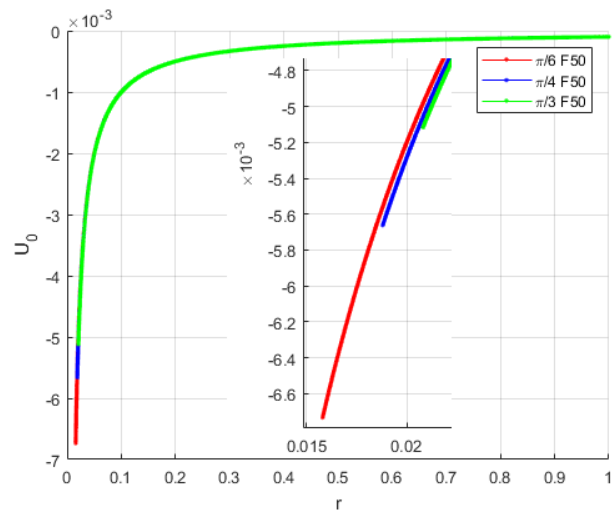


Рис. 3.34 - Торнадо класса F50, u_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

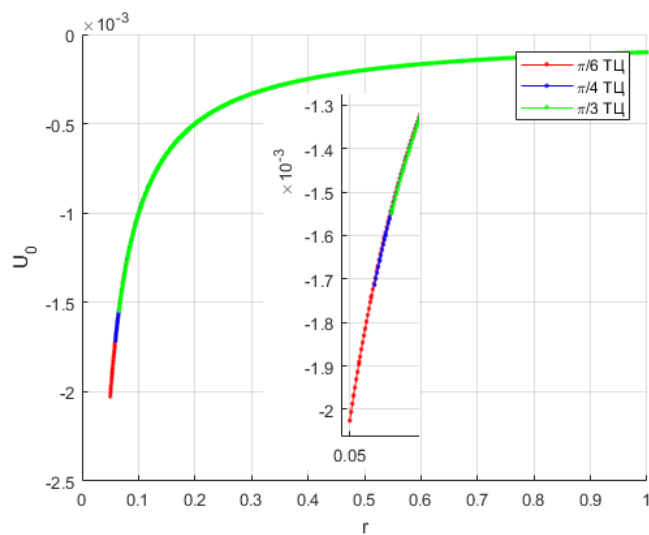


Рис. 3.35 - Тропический циклон, u_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

Таблица 3.8 - Значение радиальной скорости газа u_0 для широты $\psi = \pi/4$

Класс торнадо	F00	F10	F20	F30	F40	F50	ТЦ
безразмерное значение	-0.03442	-0.02789	-0.01989	-0.01339	-0.0084576	-0.00566	-0.0017135
размерное значение, м/с	-11.4606	-9.28629	-6.62269	-4.46095	-2.81637	-1.88534	-0.570603
изменение u_0 относительно $\psi = \pi/6, \%$	12	15	16	16	16	16	15

Таблица 3.9 - Значение радиальной скорости газа u_0 для широты $\psi = \pi/3$

Класс торнадо	F00	F10	F20	F30	F40	F50	ТЦ
безразмерное значение	-0.03173	-0.02529	-0.01797	-0.012099	-0.00764	-0.00512	-0.00155
размерное значение, м/с	-10.567	-8.4225	-5.9845	-4.029	-2.545	-1.704	-0.5157
изменение u_0 относительно $\psi = \pi/6, \%$	19	23	24	24	24	24	23

значение радиальной скорости газа. С увеличением класса торнадо снижается радиальная скорость газа на перечисленных широтах.

Окружная скорость газа

На рис. 3.36 – 3.42 представлено распределение окружной скорости газа для основных классов торнадо и тропического циклона средней интенсивности. В таблицах 3.10 – 3.12 показаны безразмерные и размерные значения окружной скорости газа для торнадо основных классов на широтах: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$. В таблицах 3.11 – 3.12 добавлена строка, в которой указан процент изменения окружной скорости газа относительно v_0 на широте $\psi = \pi/3$.

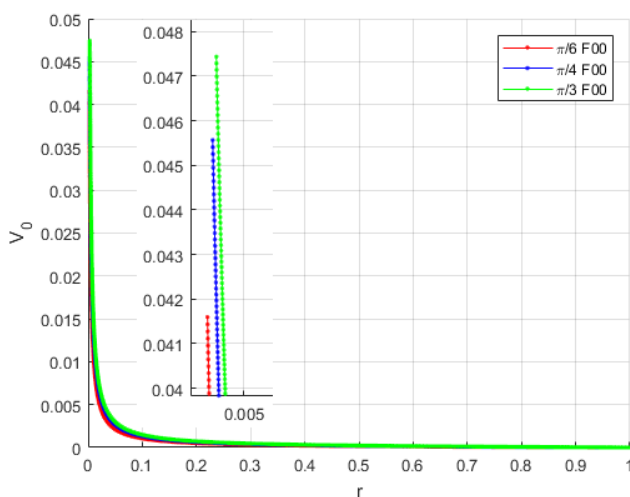


Рис. 3.36 - Торнадо класса F00, v_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

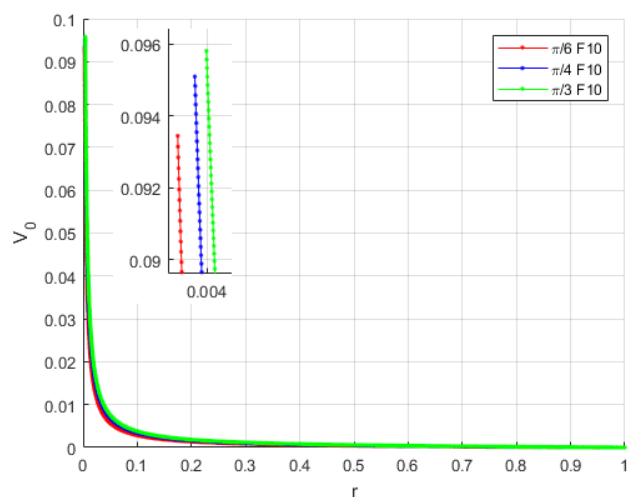


Рис. 3.37 - Торнадо класса F10, v_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

С увеличением класса торнадо увеличивается окружная скорость газа. Небольшое увеличение окружной скорости наблюдается при увеличении широты, на

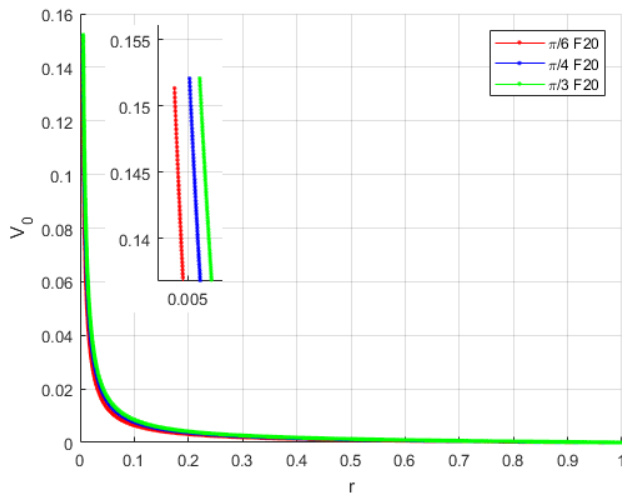


Рис. 3.38 - Торнадо класса F20, v_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

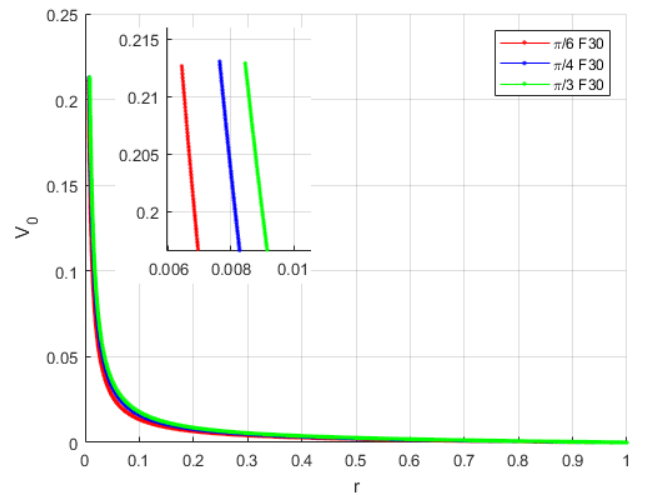


Рис. 3.39 - Торнадо класса F30, v_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

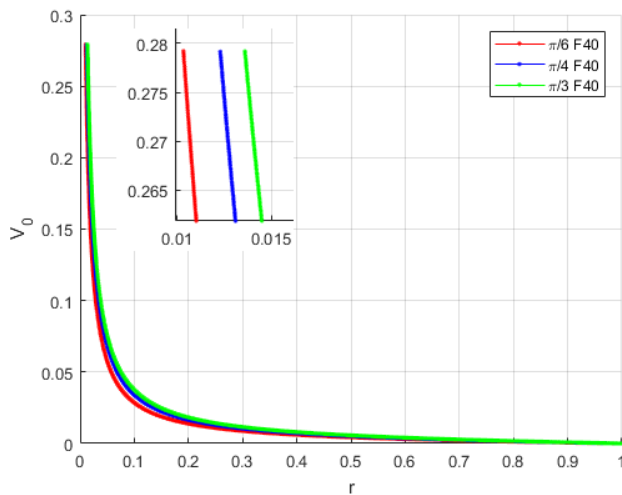


Рис. 3.40 - Торнадо класса F40, v_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

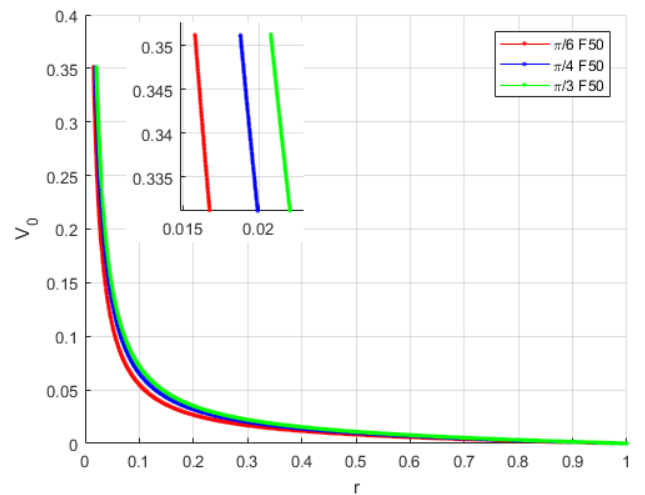


Рис. 3.41 - Торнадо класса F50, v_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

Таблица 3.10 - Значение окружной скорости газа v_0 для широты $\psi = \pi/3$

Класс торнадо	F00	F10	F20	F30	F40	F50	ТЦ
безразмерное значение	0.04744	0.09581	0.1521	0.2129	0.2792	0.3513	0.161
размерное значение, м/с	15.797	31.906	50.647	70.886	92.964	116.986	53.498

которой был сформирован торнадо. Для старших классов торнадо окружная скорость на разных широтах стремится к одной и той же величине. Значение v_0 положительно, что говорит о закручивающем движении в положительном на-

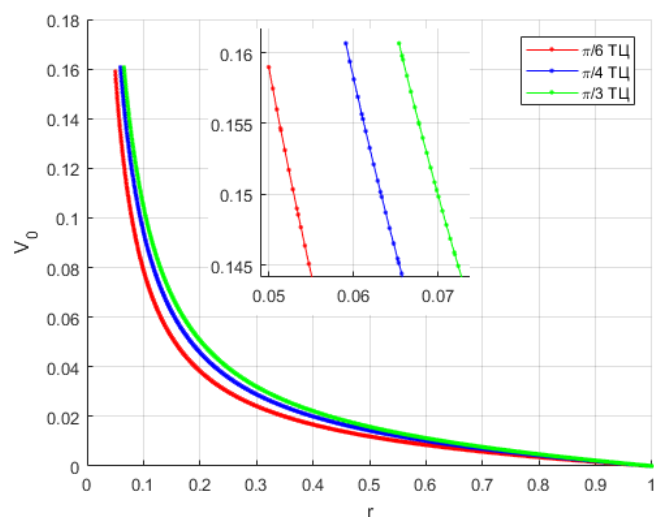


Рис. 3.42 - Тропический циклон, v_0 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

Таблица 3.11 - Значение окружной скорости газа v_0 для широты $\psi = \pi/4$

Класс торнадо	F00	F10	F20	F30	F40	F50	ТЦ
безразмерное значение	0.0456	0.0951	0.1521	0.213	0.2791	0.3512	0.161
размерное значение, м/с	15.1725	31.6684	50.6391	70.9374	92.9527	116.955	53.4968
изменение v_0 относительно $\psi = \pi/3$, %	4	0.75	0.02	0.07	0.01	0.03	0.002

Таблица 3.12 - Значение окружной скорости газа v_0 для широты $\psi = \pi/6$

Класс торнадо	F00	F10	F20	F30	F40	F50	ТЦ
безразмерное значение	0.04159	0.09345	0.1513	0.212615	0.2792	0.35124	0.15897
размерное значение, м/с	13.8504	31.118	50.397	70.801	92.972	116.963	52.938
изменение v_0 относительно $\psi = \pi/3$, %	14	2,5	0,5	0,12	0,01	0,02	1,06

правлении, противоположном ходу часовой стрелки для северного полушария.

Траектория движения частиц

На рис. 3.43 – 3.49 построены траектории движения частицы газа в придонной области восходящего закрученного потока для задачи (3.1):

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{v_0}{ru_0}; \quad \varphi(r_{in}) = \varphi_0; \quad \varphi_0 = \text{const.} \quad (3.1)$$

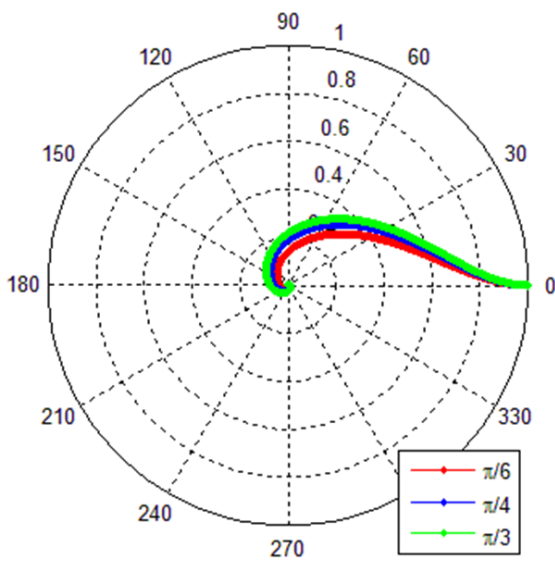


Рис. 3.43 - Торнадо класса F00, траектория движения частицы для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

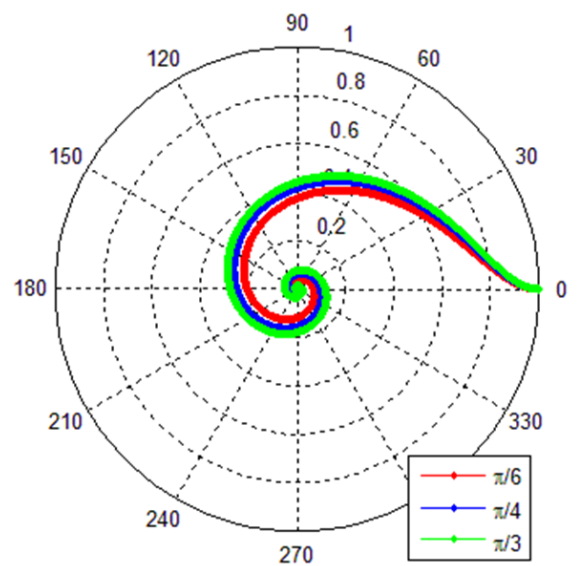


Рис. 3.44 - Торнадо класса F10, траектория движения частицы для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

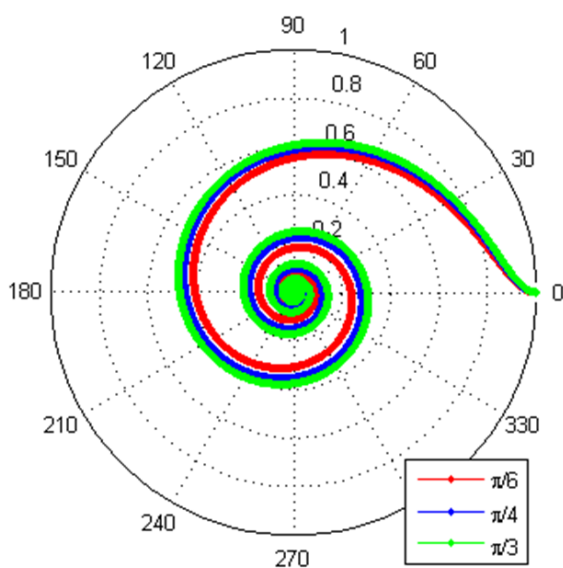


Рис. 3.45 - Торнадо класса F20, траектория движения частицы для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

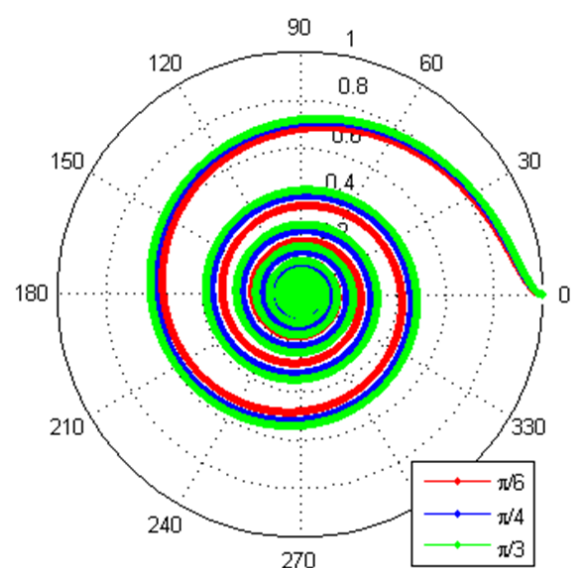


Рис. 3.46 - Торнадо класса F30, траектория движения частицы для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

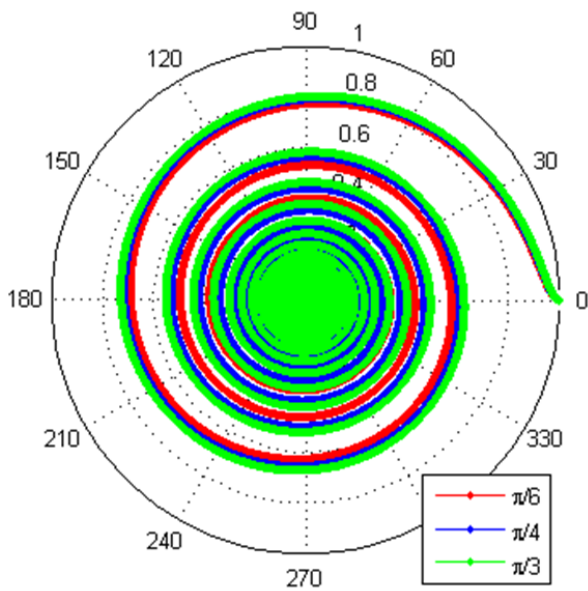


Рис. 3.47 - Торнадо класса F40, траектория движения частицы для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

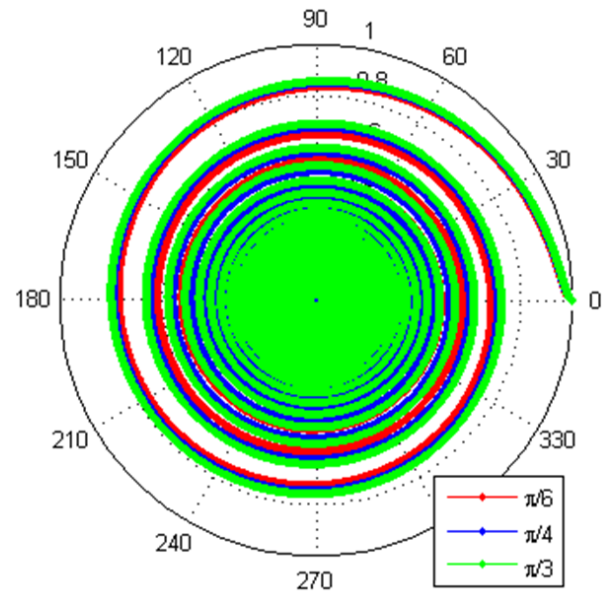


Рис. 3.48 - Торнадо класса F50, траектория движения частицы для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

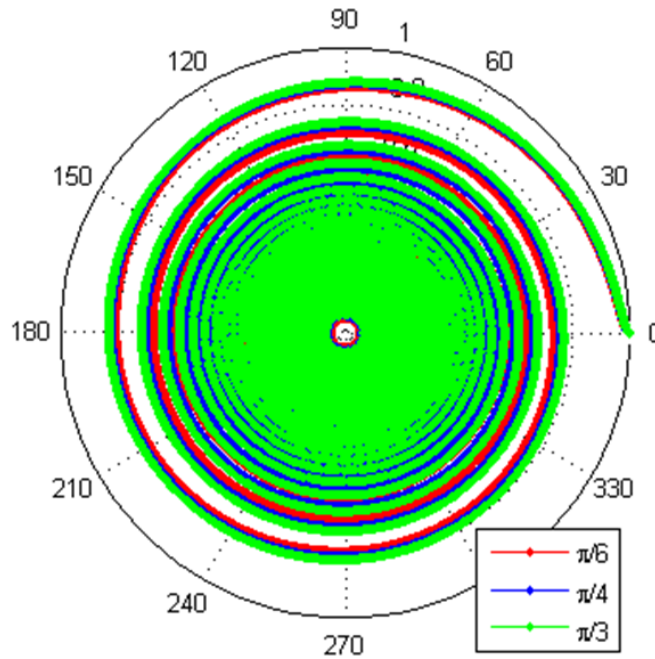


Рис. 3.49 - Тропический циклон, траектория движения частицы для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

На широте с бóльшим значением частицы газа проделывают бóльший путь, при совпадающих скорости ветра из таблицы Фудзиты на радиусе стока и найденных радиальной и окружной скоростей полученного решения. Чем выше класс торнадо, тем интенсивнее закрутка (больше оборотов вокруг стока торнадо).

Линии тока торнадо

В данном пункте представлено построенное решение для задачи 3.1 в трехмерном представлении. Значение скорости звука газа для торнадо класса F40 показано на траектории движения частицы (рис. 3.51, рис. 3.52).

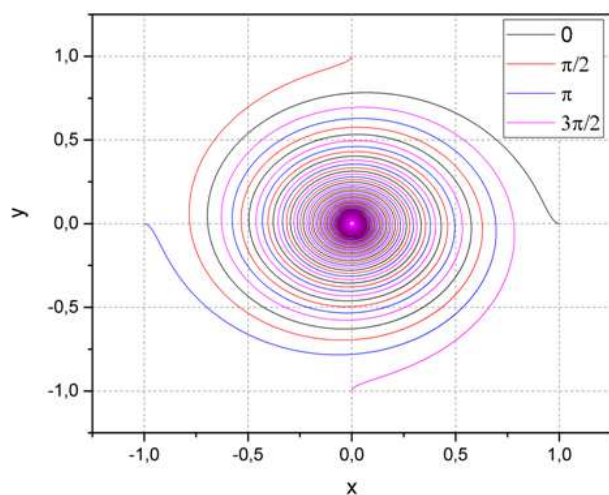


Рис. 3.50 - Торнадо класса F40, линии тока, вид сверху

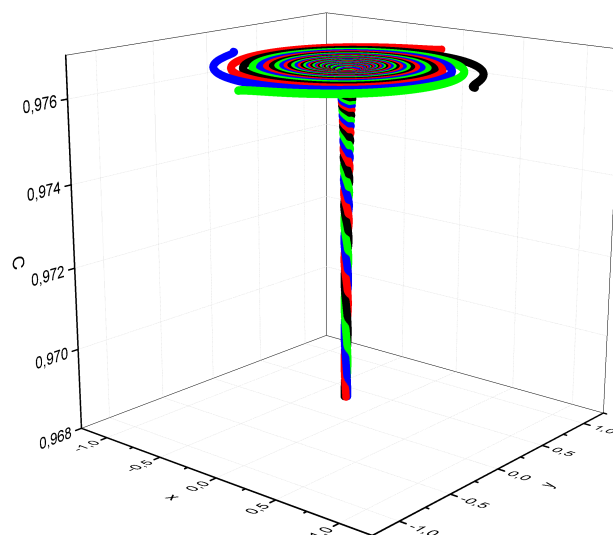


Рис. 3.51 - Торнадо класса F40, линии тока для скорости звука газа

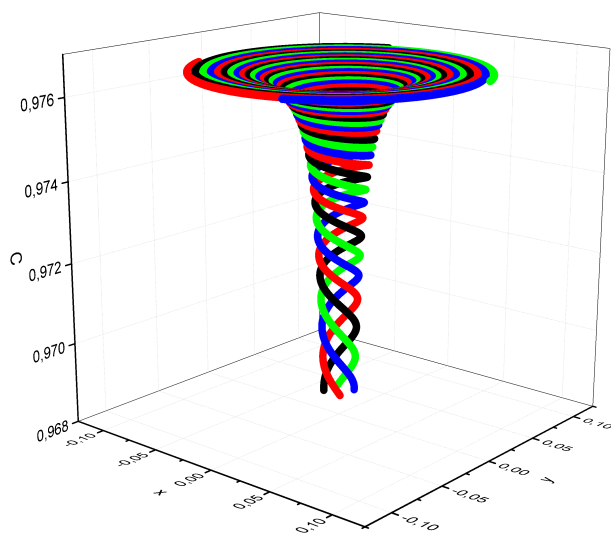


Рис. 3.52 - Торнадо класса F40, линии тока вблизи радиуса стока



Рис. 3.53 - Торнадо над морем

Полученные траектории – линии тока, вдоль которых движутся частицы. На рисунках 3.50 – 3.53 изображено четыре траектории движения частиц, выходящих из разных точек.

На рисунке 3.50 продемонстрированы линии тока в области $[-1; 1] \times [-1; 1]$. На рисунке 3.51 представлены трехмерные линии тока, вдоль третьего направ-

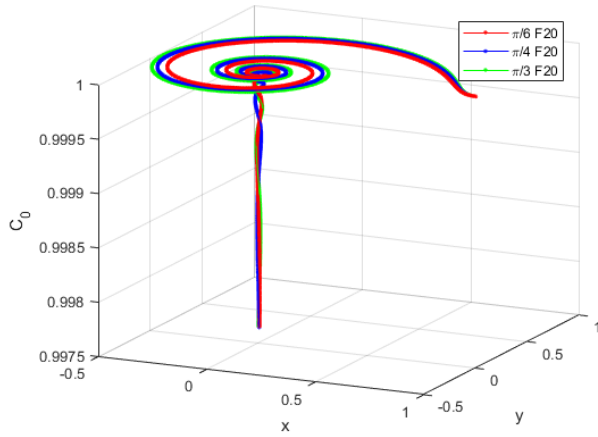


Рис. 3.54 - Значение c_0 на линии тока торнадо класса F20 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

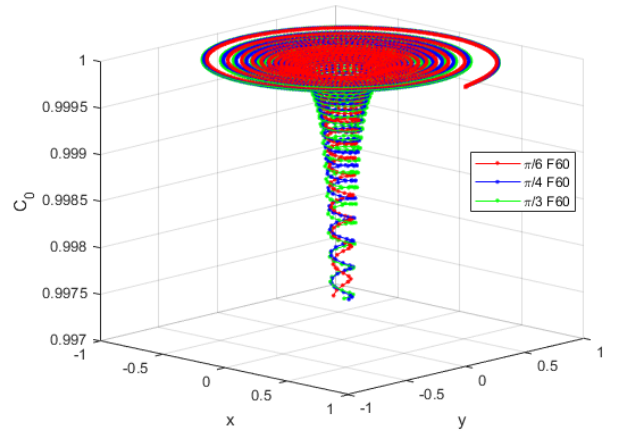


Рис. 3.55 - Значение c_0 на линии тока тропического циклона для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

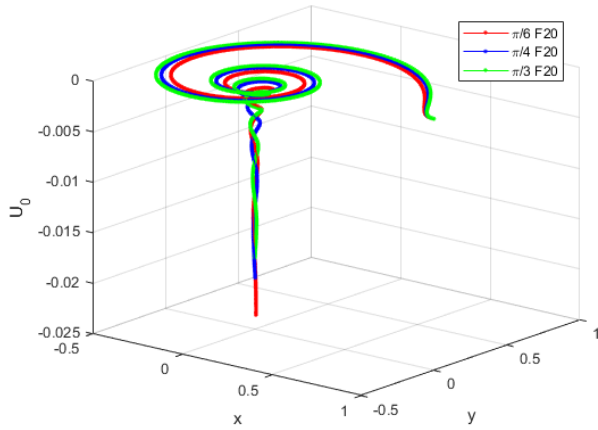


Рис. 3.56 - Значение u_0 на линии тока торнадо класса F20 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

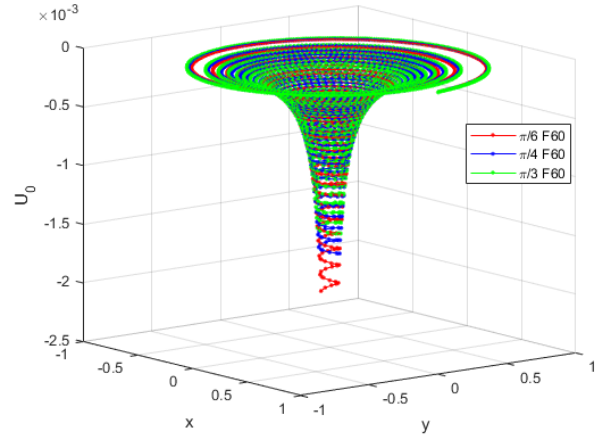


Рис. 3.57 - Значение u_0 на линии тока тропического циклона для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

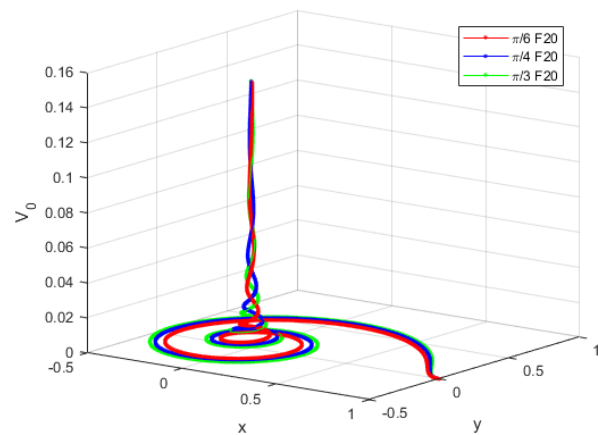


Рис. 3.58 - Значение v_0 на линии тока торнадо класса F20 для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

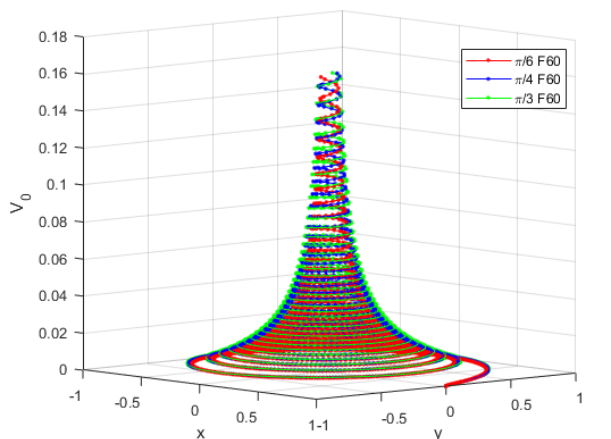


Рис. 3.59 - Значение v_0 на линии тока тропического циклона для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$

ления расположена величина скорости звука газа. На рисунке 3.52 изображен фрагмент линий тока, который расположен вблизи радиуса стока в области

$$[-0.1; 0.1] \times [-0.1; 0.1].$$

На рисунках 3.54 – 3.59 изображены линии тока для c_0 – скорости звука газа, u – радиальной и v – окружной скоростей газа в декартовой системе координат для широт: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ для торнадо F20 и тропического циклона средней интенсивности.

С уменьшением значения широты скорость падения частицы к стоку торнадо увеличивается, движение идет по меньшему радиусу.

3.2 Численное моделирование газодинамических параметров, входящих в состав вторых коэффициентов ряда

Коэффициенты c_1, u_1, v_1, w_1 тригонометрического ряда (1.15) определяются с помощью дифференцирования по переменной z системы (1.2), последующей подстановкой в результат дифференцирования $z = 0$ и уже найденных ранее коэффициентов. Таким образом, получается новая система уравнений для c_1, u_1, v_1, w_1 .

Коэффициент c_1 определяется единственным образом (1.22). Коэффициент w_1 полагается тождественно равным нулю. Коэффициенты u_1, v_1 определяются из вида (1.26) при нахождении функций $u_{11}, u_{12}, v_{11}, v_{12}$ из (1.27) с начальными данными при $r = r_{in}$.

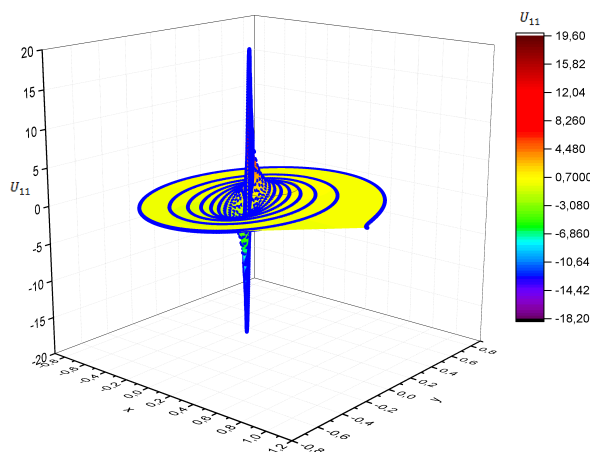


Рис. 3.60 - Торнадо класса F40, u_{11}

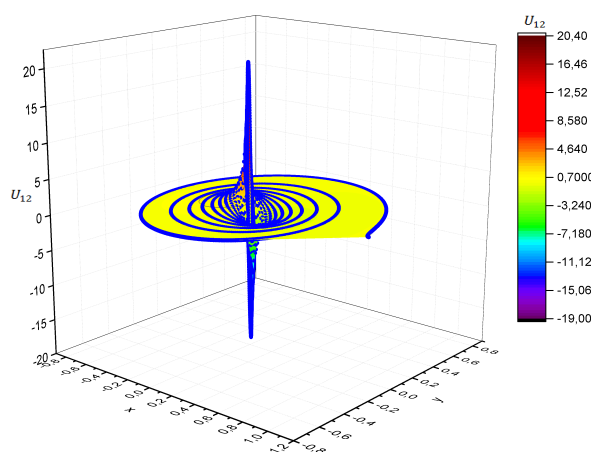


Рис. 3.61 - Торнадо класса F40, u_{12}

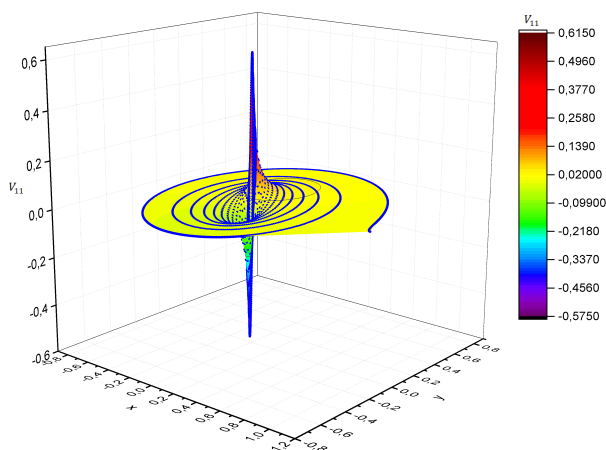


Рис. 3.62 - Торнадо класса F40, v_{11}

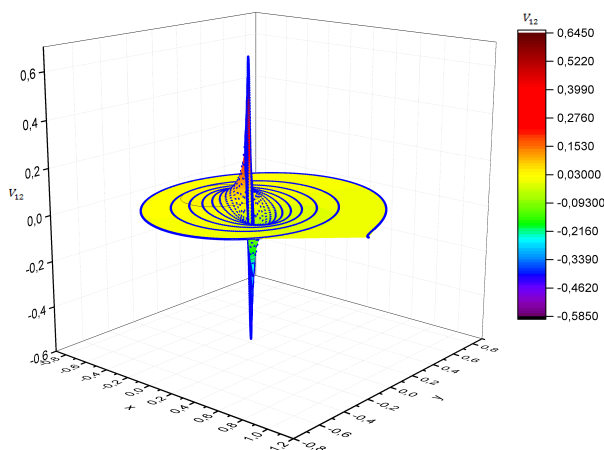


Рис. 3.63 - Торнадо класса F40, v_{12}

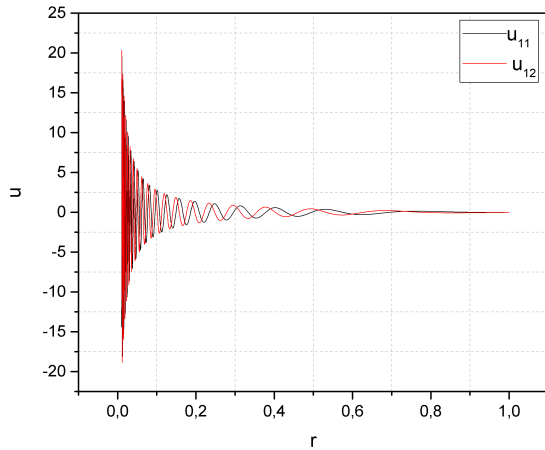


Рис. 3.64 - Торнадо класса F40, u_{11} и u_{12}

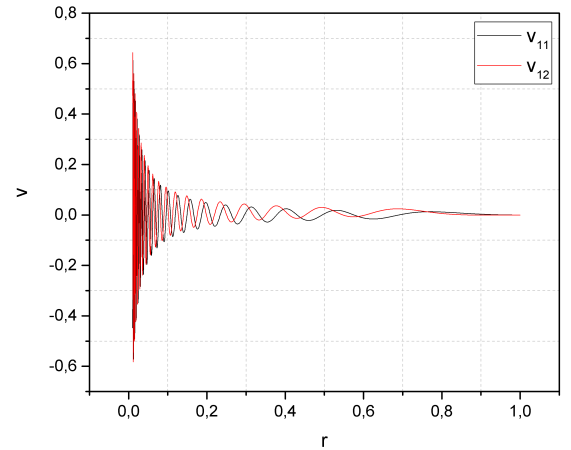


Рис. 3.65 - Торнадо класса F40, v_{11} и v_{12}

Для системы уравнений в стационарном случае получим следующие численно найденные решения для u_{11} , u_{12} , v_{11} , v_{12} . На рис. 3.60 – 3.63 показаны поверхности газодинамических распределений u_{11} , u_{12} , v_{11} , v_{12} в декартовой системе координат xOy на траектории движения частиц.

На рисунках 3.64 – 3.65 на одном графике представлены u_{11} u_{12} и v_{11} v_{12} для торнадо F40 при значении $z = 10$ метров – высота флюгера [43] при учете неровностей Земной поверхности.

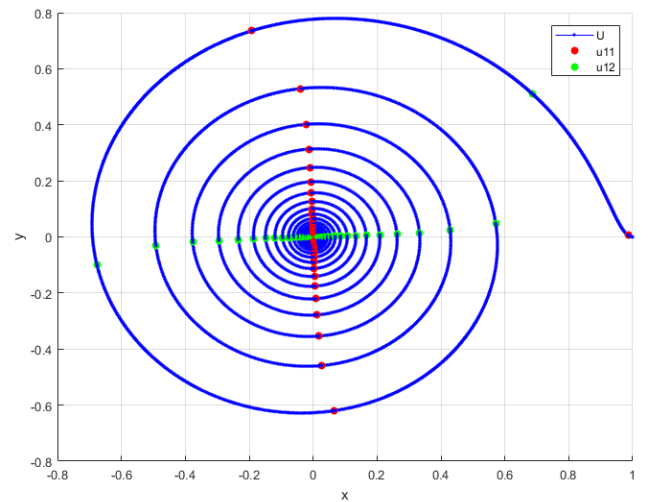
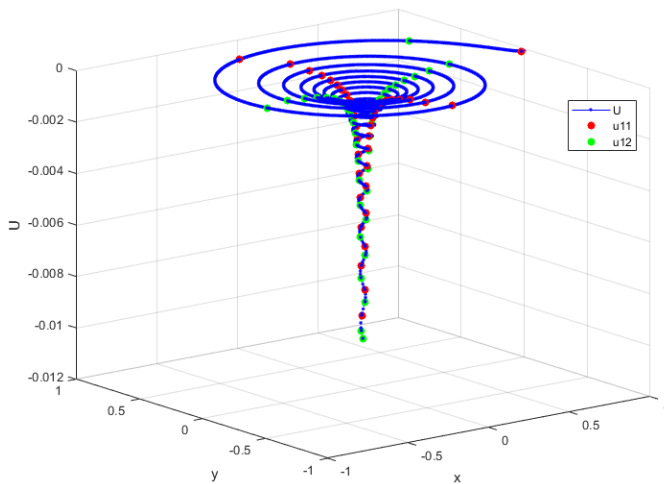


Рис. 3.66 - Торнадо класса F40, значения u_{11} и u_{12} на траектории движения частицы, от центра вверх - локальные *max*, от центра вниз - локальные *min*, от центра влево - локальные *min*, от центра вправо - локальные *max*

Локальные экстремумы для u_{11} и v_{11} при одном и том же значении по r , совпадают. Знаки экстремумов: у *max* – плюс, у *min* - минус. Качественное поведение одинаково, абсолютное значение – разное. Аналогично для u_{12} и v_{12} ,

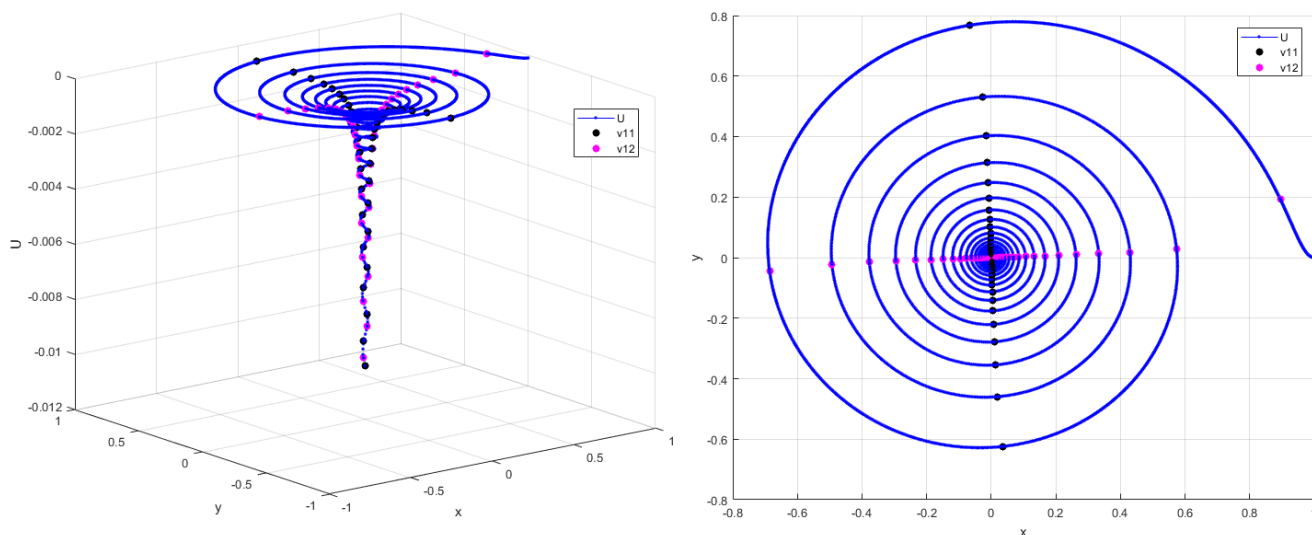


Рис. 3.67 - Торнадо класса F40, значения v_{12} и v_{11} на траектории движения частицы, от центра вверх - локальные *max*, от центра вниз - локальные *min*, от центра влево - локальные *min*, от центра вправо - локальные *max*

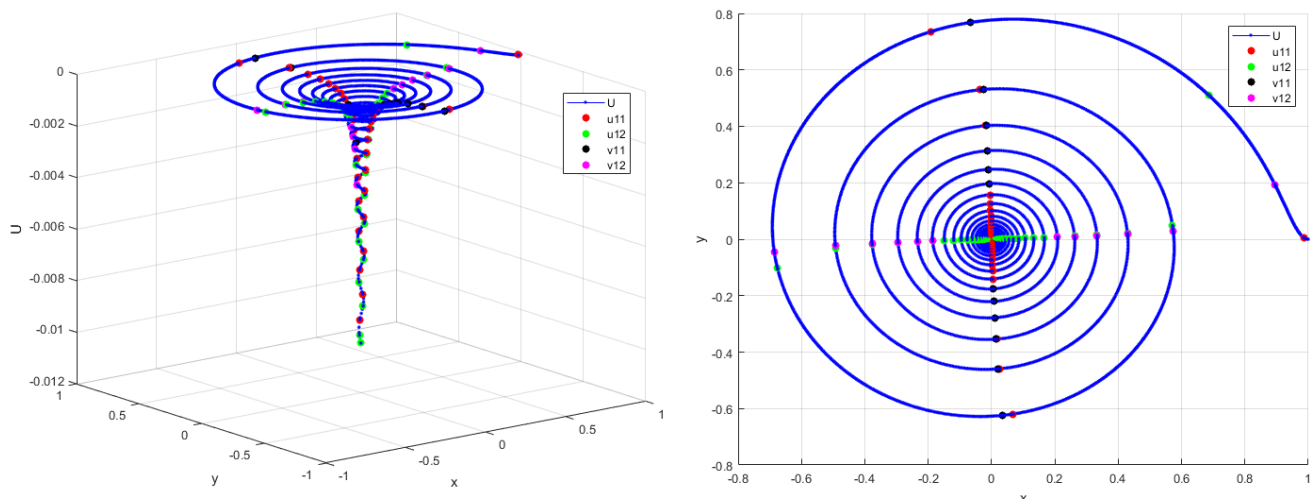


Рис. 3.68 - Торнадо класса F40, значения u_{11} , u_{12} , v_{11} , v_{12} на траектории движения частицы, от центра вверх - локальные *max*, от центра вниз - локальные *min*, от центра влево - локальные *min*, от центра вправо - локальные *max*

точки локальных экстремумов совпадают. Знаки величин u_{11} , v_{11} и u_{12} , v_{12} одинаковы, значения по r в экстремальных точках у u_{11} , v_{11} и u_{12} , v_{12} – различны.

Рассмотрим класс торнадо F40. На рисунках 3.66 – 3.67 изображены локальные минимумы и максимумы функций u_{11} , u_{12} и v_{11} , v_{12} . Количество положительных экстремумов составляет половину от общего числа. Другая половина – это отрицательные экстремумы. И по два экстремума (положительный и отрицательный) приходится на один виток вокруг r_0 – радиуса стока потока.

На рисунке 3.68 изображены все локальные максимумы и минимумы функций u_{11} , u_{12} и v_{12} , v_{11} на траектории движения частицы. Значения функций u_{11}

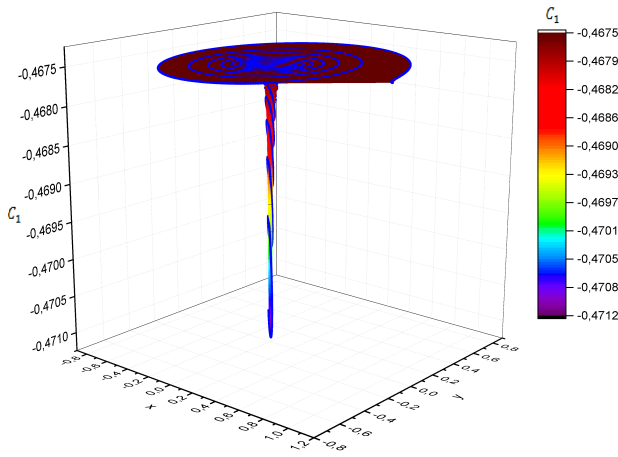


Рис. 3.69 - Торнадо класса F40, c_1

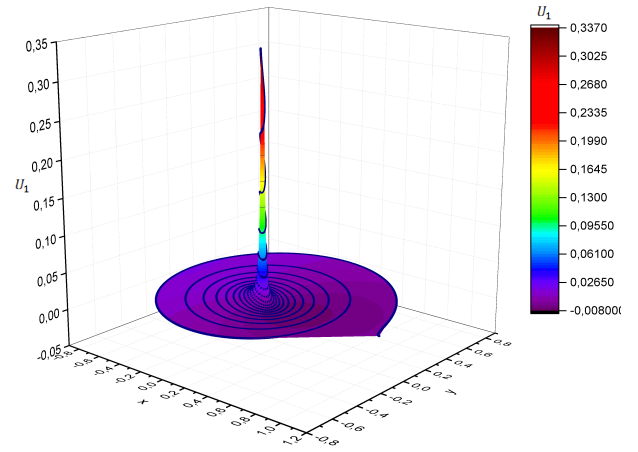


Рис. 3.70 - Торнадо класса F40, u_1

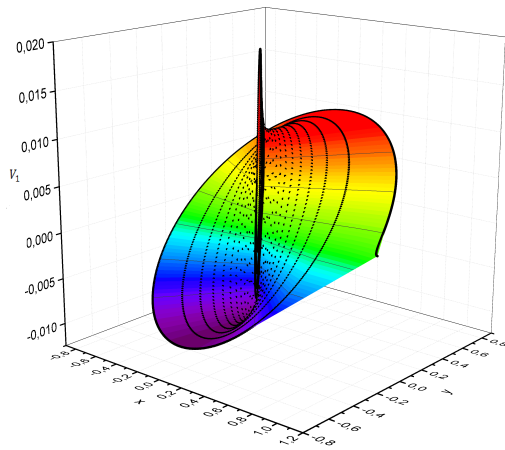


Рис. 3.71 - Торнадо класса F40, v_1

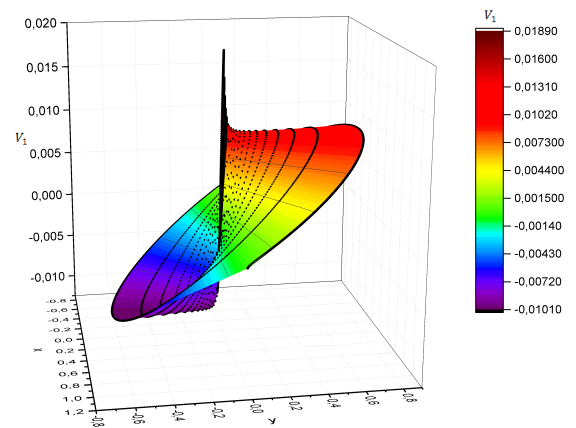


Рис. 3.72 - Торнадо класса F40, v_1

и u_{12} практически совпадают, как и значения функций v_{11} , v_{12} .

На рисунках 3.69 – 3.72 показаны вторые коэффициенты ряда отдельно. Для каждого из представленных коэффициентов на траектории движения частицы видны локальные минимумы и максимумы.

Значение функции u_{11} усиливает значение функции u_{12} . Значение функции v_{11} усиливает значение функции v_{12} , что дает дополнительное усиление для общего параметра u – радиальной скорости и v – окружной скорости газа. Для c – скорости звука газа дополнительное усиление создает параметр c_1 .

Выбор шага для численных расчётов

Так как задача не имеет полного аналитического решения, поэтому в качестве эталонного решения используются значения, полученные при числе шагов сетки $N = 10^7$ для класса торнадо F20.

Для оценки порядка сходимости результатов были также проведены вычислительные эксперименты с числом шагов $N = 10^4$, $N = 10^5$, $N = 10^6$. На рисунках 3.73 – 3.76 показаны разности между результатами счета шага для u_{11} , u_{12} , v_{11} , v_{12} .

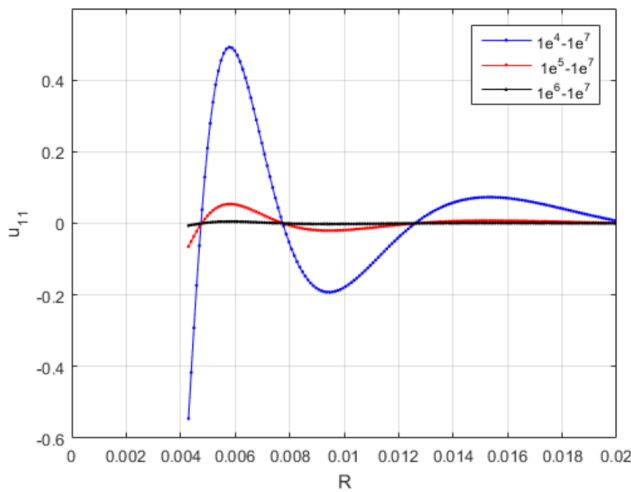


Рис. 3.73 - Торнадо класса F20, разности между результатами счета шага для u_{11}

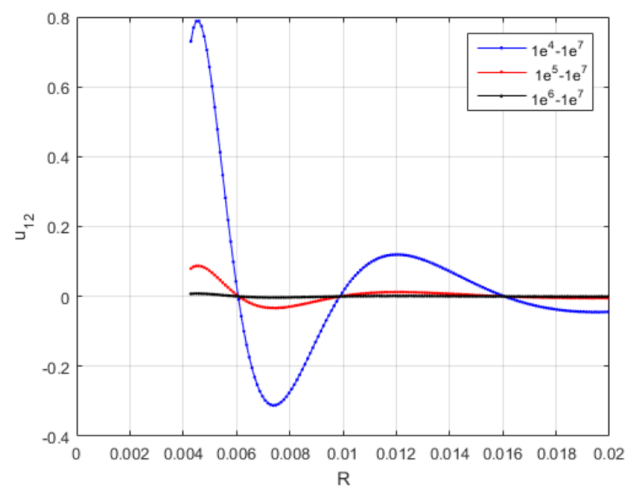


Рис. 3.74 - Торнадо класса F20, разности между результатами счета шага для u_{12}

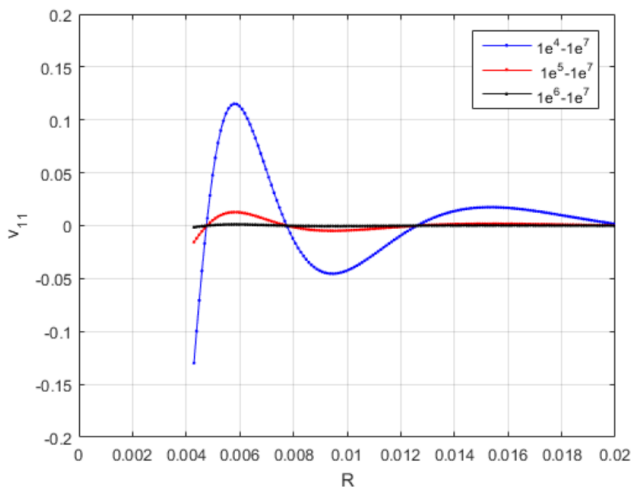


Рис. 3.75 - Торнадо класса F20, разности между результатами счета шага для v_{11}

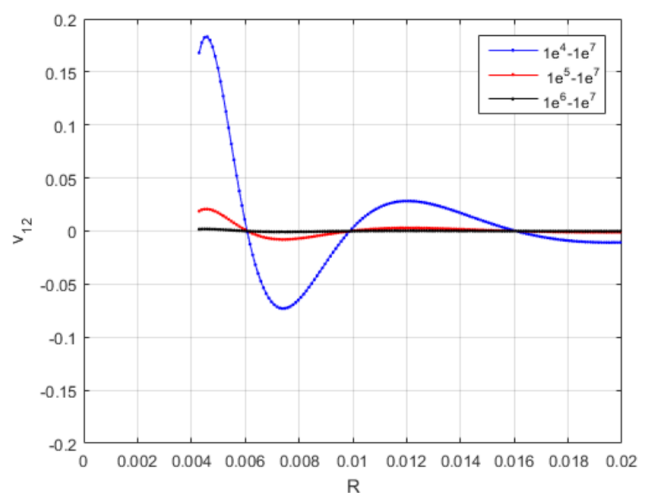


Рис. 3.76 - Торнадо класса F20, разности между результатами счета шага для v_{12}

Для $N = 10^4$ и $N = 10^7$ (синяя линия), $N = 10^5$ и $N = 10^7$ (красная линия), $N = 10^6$ и $N = 10^7$ (черная линия).

Из полученных графиков видно, что при увеличении числа интервалов на-

блюдается уменьшение численной ошибки. Для случая $N = 10^6$ (черная линия) величина ошибки (по модулю) не превышает для v значения 0,0002, а для u значения 0,002. **Таким образом**, число шагов $N = 10^6$ позволяет достичь приемлемой точности для данного типа задач.

3.3 Верификация вычислительных экспериментов, численные модели которых построены на основе математических моделей для вторых коэффициентов ряда

Далее будут представлены результаты вычислительных экспериментов газодинамических параметров с учетом первых двух коэффициентов ряда (с индексом 0 и 1). Ниже, описаны сравнительные вычислительные эксперименты для c, u, v , входящие в систему уравнений (1.70), при варьировании значения высоты придонной части торнадо z . Вычислительные эксперименты с учетом первых коэффициентов ряда в дальнейшем будет называться базовым вычислительным экспериментом. Также рассматриваются результаты вычислительных экспериментов газодинамических параметров на высоте $z = 10$ – стандартная для метеорологии высота флюгера [43] с учетом всех неровностей Земной поверхности, и $z = 15$ – высота без учета зависимости от поверхности.

Скорость звука газа

На рисунках 3.77 – 3.83 на линиях тока показано распределение скорости звука газа для класса торнадо F00 – F50 и тропического циклона средней интенсивности. В таблице 3.13 представлены вычислительные эксперименты c_0 и $c_0 + c_1z$, размерные и безразмерные значения. Безразмерное значение радиуса стока $r_0 = 0.00256$ для **F00** соответствует размерному значению 2.5 м. Безразмерное значение радиуса стока $r_0 = 0.00305$ для **F10** – 8 м. Безразмерное значение радиуса стока $r_0 = 0.00428$ для **F20** – 25.5 м. Безразмерное значение радиуса стока $r_0 = 0.00643$ для **F30** – 80.5 м. Безразмерное значение радиуса стока $r_0 = 0.01034$ для **F40** – 273.5 м. Безразмерное значение радиуса стока $r_0 = 0.01581$ для **F50** – 804.5 м. Безразмерное значение радиуса стока $r_0 = 0.05$ для тропического циклона средней интенсивности – 3650 м.

Значение скорости звука газа для двух коэффициентов ряда $c_0 + c_1z$ при $z = 10$ м обозначается как C_{h_1} , при $z = 15$ м как C_{h_2} .

Далее на графиках верхняя линия (голубого цвета) – график скорости звука газа для базового расчета, средняя линия (синего цвета) – график скорости звука газа с учетом двух коэффициентов ряда, при значении $z = 10$ м – высота флюгера, нижняя линия (красного цвета) – график скорости звука газа с

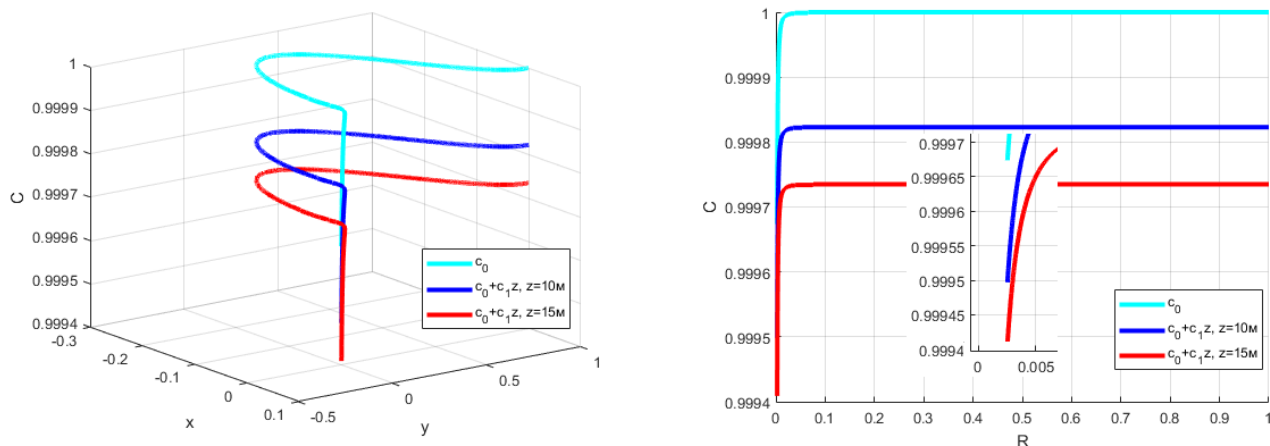


Рис. 3.77 - Торнадо класса F00: c_0 - базовый расчёт; $c_0 + c_1z, z = 10\text{ м}$; $c_0 + c_1z, z = 15\text{ м}$

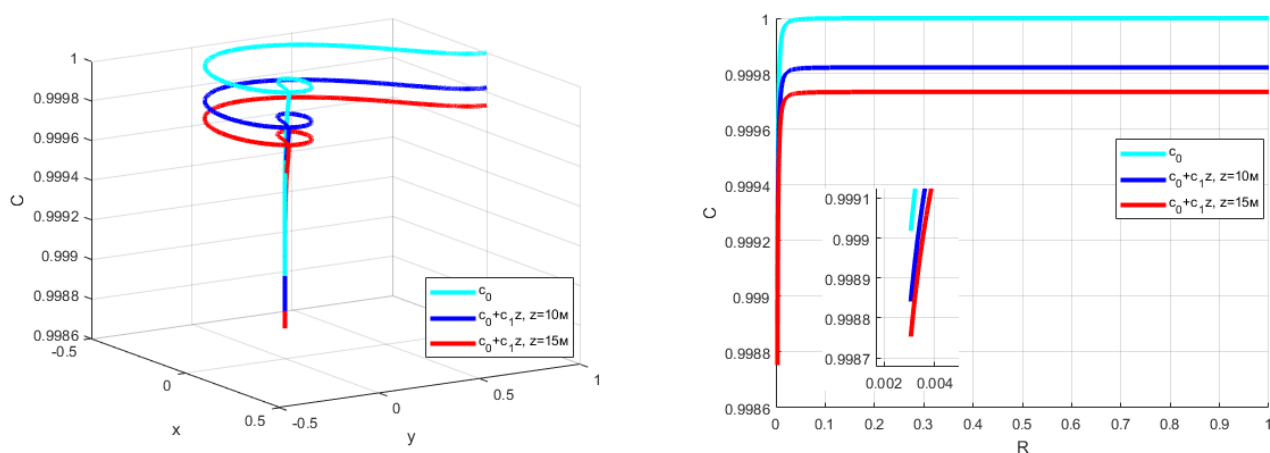


Рис. 3.78 - Торнадо класса F10: c_0 - базовый расчёт; $c_0 + c_1z, z = 10\text{ м}$; $c_0 + c_1z, z = 15\text{ м}$

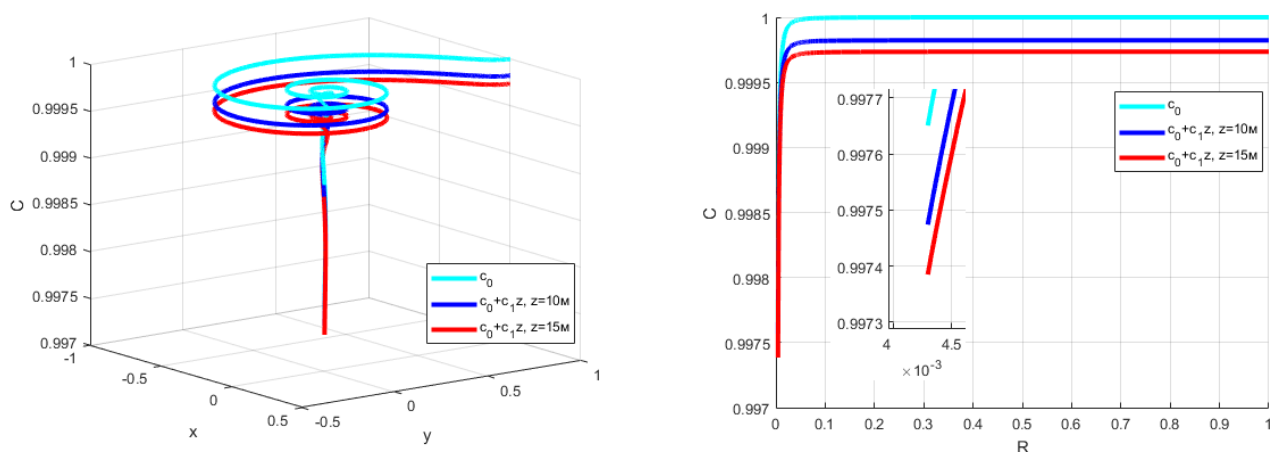


Рис. 3.79 - Торнадо класса F20: c_0 - базовый расчёт; $c_0 + c_1z, z = 10\text{ м}$; $c_0 + c_1z, z = 15\text{ м}$

учетом двух коэффициентов ряда при $z = 15\text{ м}$.

В таблице 3.13 представлены размерные и безразмерные значения скорости звука газа для основных классов торнадо F00 – F50 и тропического циклона средней интенсивности. Процент изменения параметра c рассчитывается по фор-

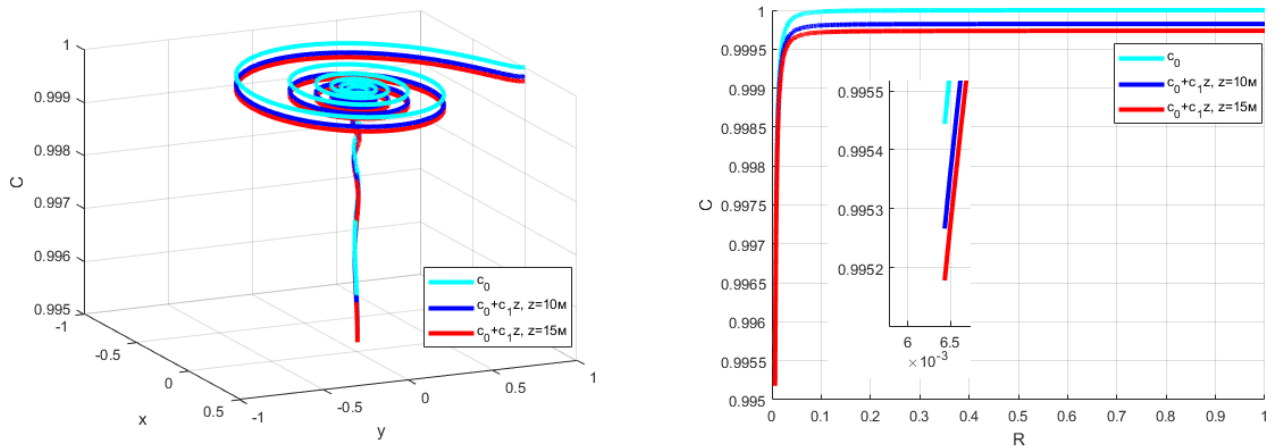


Рис. 3.80 - Торнадо класса F30: c_0 - базовый расчёт; $c_0 + c_1z, z = 10$ м; $c_0 + c_1z, z = 15$ м

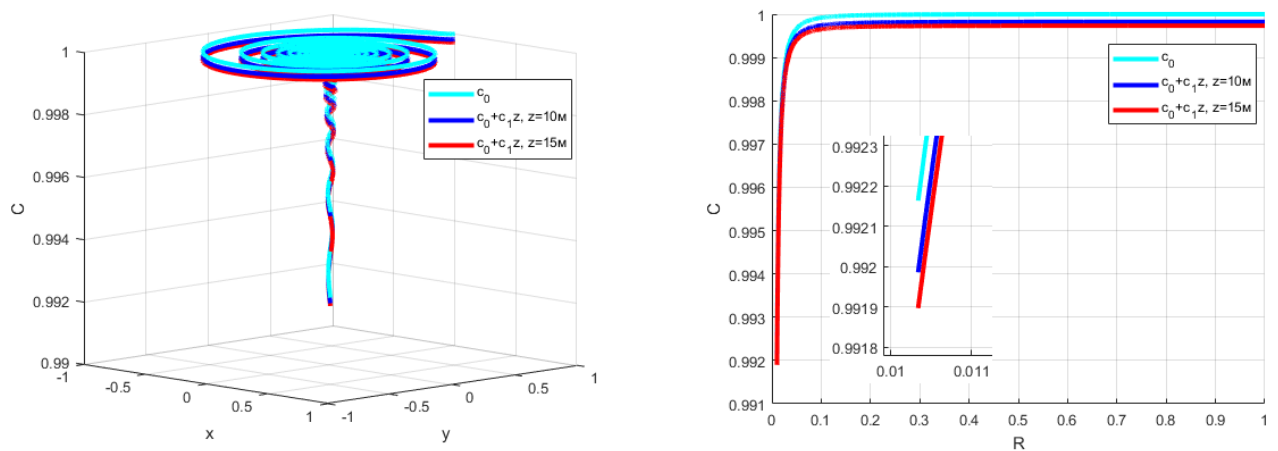


Рис. 3.81 - Торнадо класса F40: c_0 - базовый расчёт; $c_0 + c_1z, z = 10$ м; $c_0 + c_1z, z = 15$ м

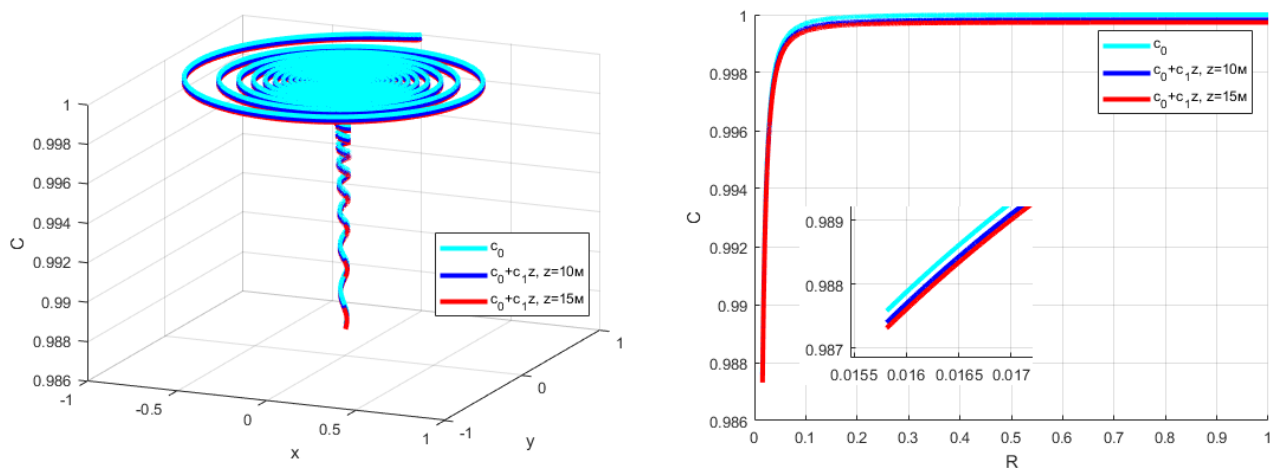


Рис. 3.82 - Торнадо класса F50: c_0 - базовый расчёт; $c_0 + c_1z, z = 10$ м; $c_0 + c_1z, z = 15$ м

муле: $\% = (c_0 - C_{h_{1,2}}) \times 100 / c_0$.

С учетом дополнительных слагаемых и варьировании высоты придонной части отмечается некоторое изменение в значении величины скорости звука газа. Относительная погрешность между базовыми вычислительными эксперимен-

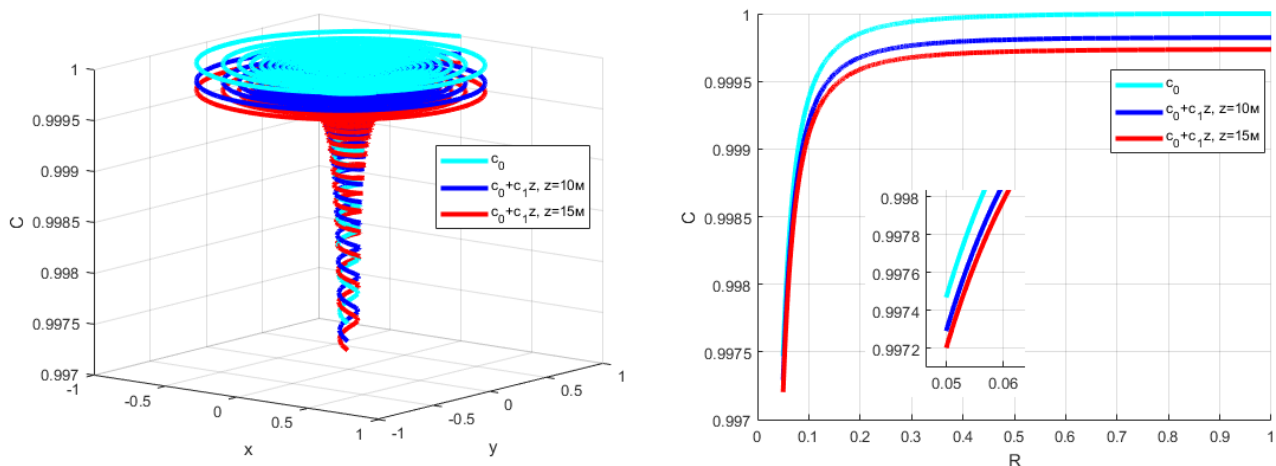


Рис. 3.83 - Тропический циклон: c_0 - базовый расчёт; $c_0 + c_1 z, z = 10\text{ м}$; $c_0 + c_1 z, z = 15\text{ м}$

Таблица 3.13 - Скорость звука газа торнадо

Класс торнадо	c_0 безразм.	$c_0, \text{ м/с}$ разм.	C_{h1} безразм.	$C_{h1}, \text{ м/с}$ разм.	$ C_{h1} - c_0 (\%)$ безразм.	C_{h2} безразм.	$C_{h2}, \text{ м/с}$ разм.	$ C_{h2} - c_0 (\%)$ безразм.
F00	0.999674	332.891	0.999497	332.833	1.7E-04(0.02)	0.999409	332.803	2.6E-04(0.026)
F10	0.999018	332.673	0.998841	332.614	1.7E-04(0.02)	0.998753	332.585	2.6E-04(0.026)
F20	0.997651	332.217	0.997474	332.159	1.7E-04(0.02)	0.997385	332.129	2.6E-04(0.026)
F30	0.995444	331.483	0.995266	331.424	1.7E-04(0.02)	0.995178	331.394	2.6E-04(0.027)
F40	0.992164	330.390	0.991986	330.331	1.7E-04(0.02)	0.991897	330.302	2.6E-04(0.027)
F50	0.987581	328.865	0.987402	328.805	1.7E-04(0.02)	0.987313	328.775	2.6E-04(0.027)
ТЦ	0.997469	332.157	0.997292	332.098	1.7E-04(0.02)	0.997203	332.069	2.6E-04(0.026)

тами и вычислительными экспериментами на высоте флюгера для основных классов торнадо не превышает 0.02%. Относительная погрешность между базовыми вычислительными экспериментами и вычислительными экспериментами для $z = 15$ не превышает 0.027%.

Радиальная скорость газа

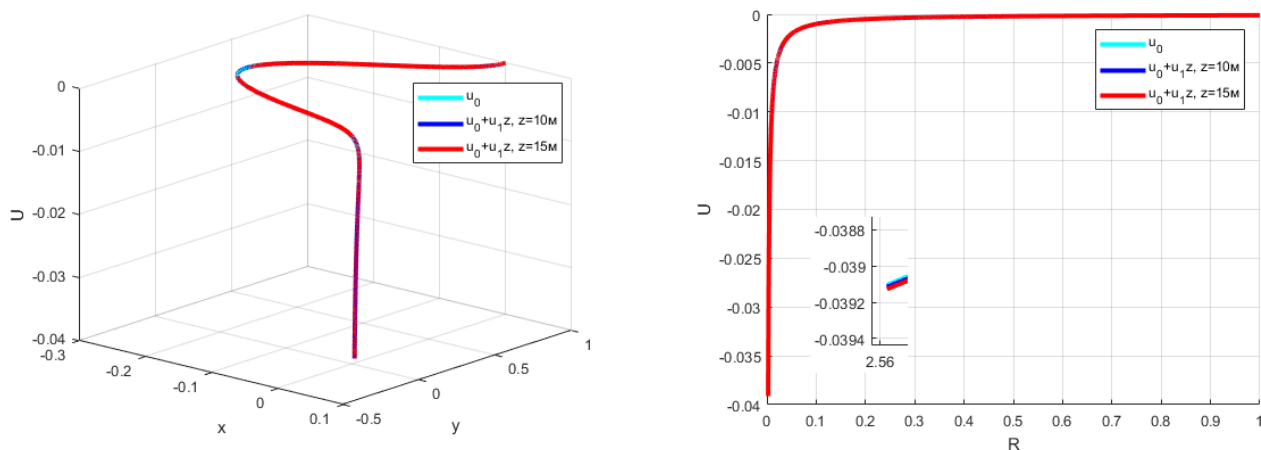


Рис. 3.84 - Торнадо класса F00: u_0 - базовый расчёт; $u_0 + u_1 z, z = 10\text{ м}$; $u_0 + u_1 z, z = 15\text{ м}$

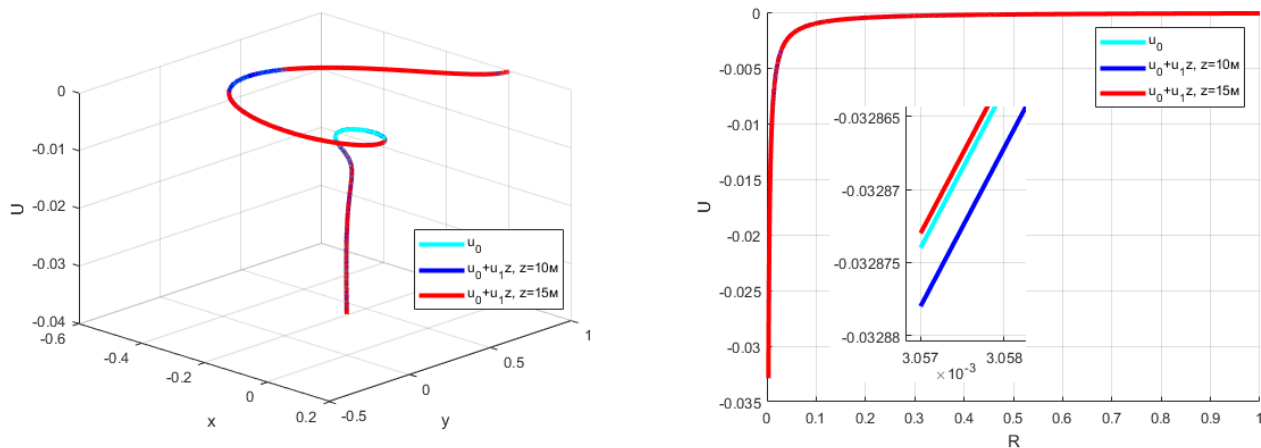


Рис. 3.85 - Торнадо класса F10: u_0 - базовый расчёт; $u_0 + u_1 z$, $z = 10$ м; $u_0 + u_1 z$, $z = 15$ м

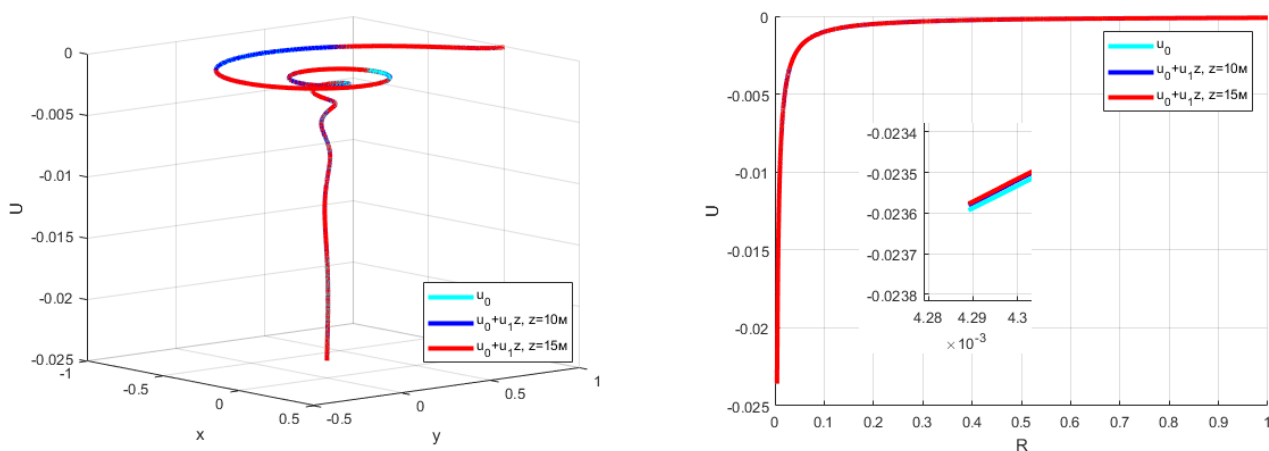


Рис. 3.86 - Торнадо класса F20: u_0 - базовый расчёт; $u_0 + u_1 z$, $z = 10$ м; $u_0 + u_1 z$, $z = 15$ м

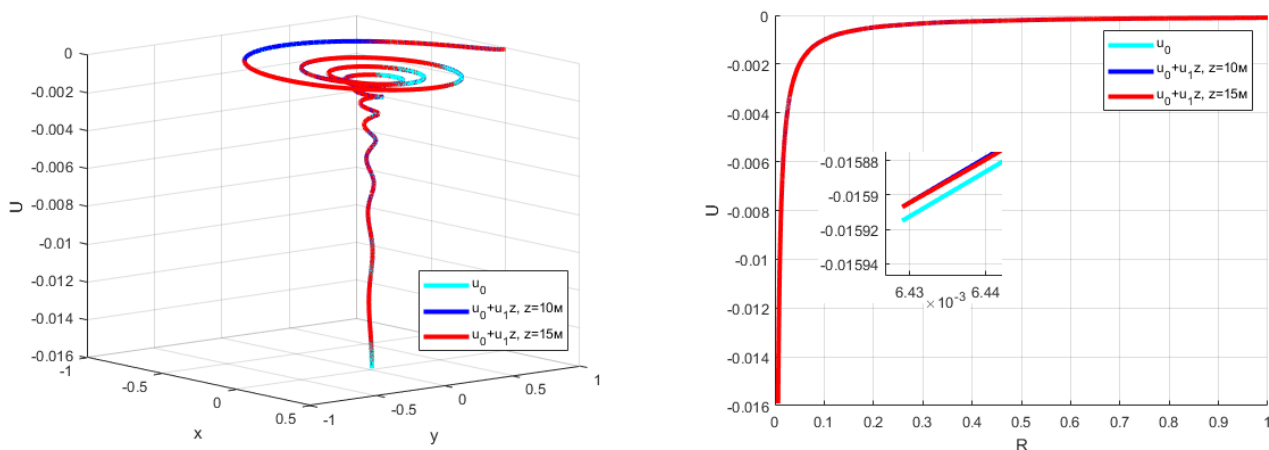


Рис. 3.87 - Торнадо класса F30: u_0 - базовый расчёт; $u_0 + u_1 z$, $z = 10$ м; $u_0 + u_1 z$, $z = 15$ м

На рисунках 3.84 – 3.90 на линиях тока показана радиальная скорости газа для торнадо классов F00 – F50 и тропического циклона средней интенсивности.

В таблице 3.14 представлены размерные и безразмерные значения радиальной скорости газа для классов торнадо F00 – F50 и тропического циклона сред-

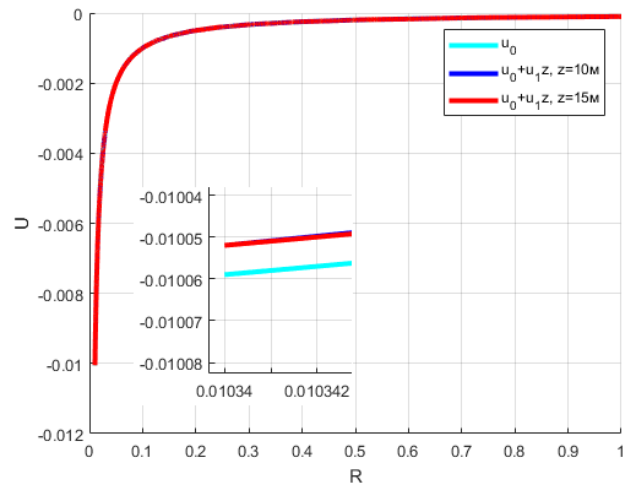
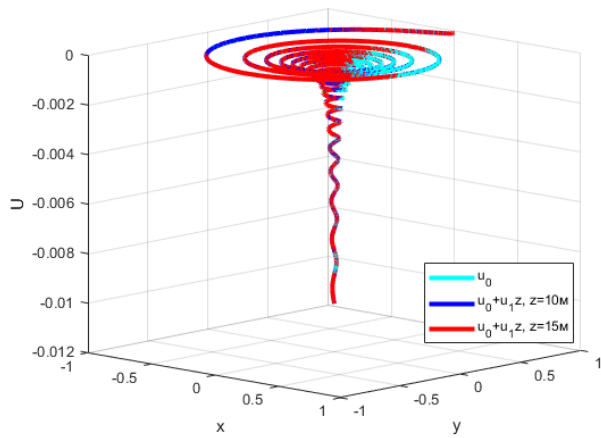


Рис. 3.88 - Торнадо класса F40: u_0 - базовый расчёт; $u_0 + u_1z$, $z = 10$ м; $u_0 + u_1z$, $z = 15$ м

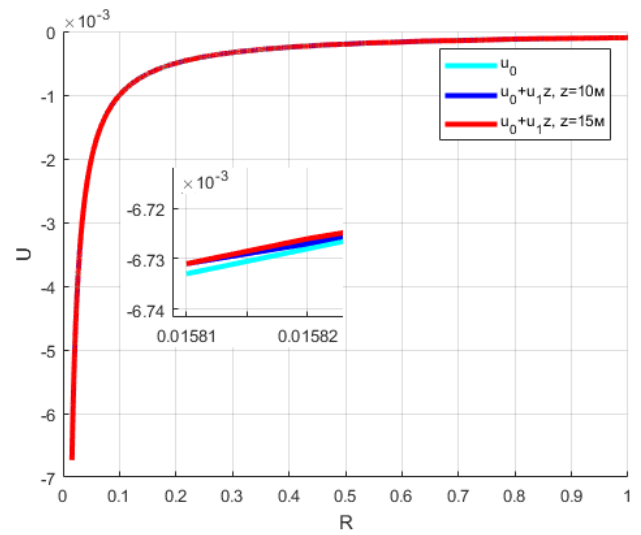
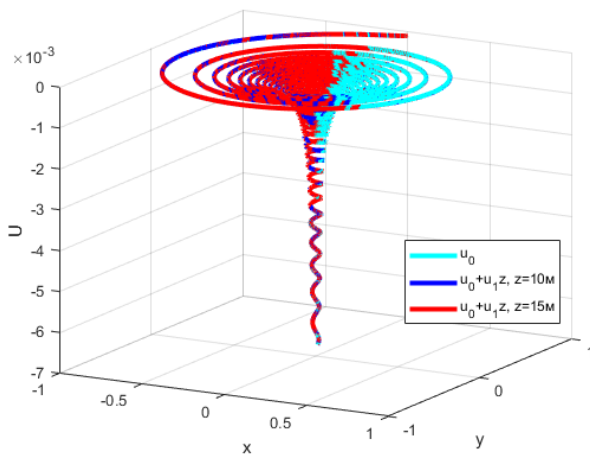


Рис. 3.89 - Торнадо класса F50: u_0 - базовый расчёт; $u_0 + u_1z$, $z = 10$ м; $u_0 + u_1z$, $z = 15$ м

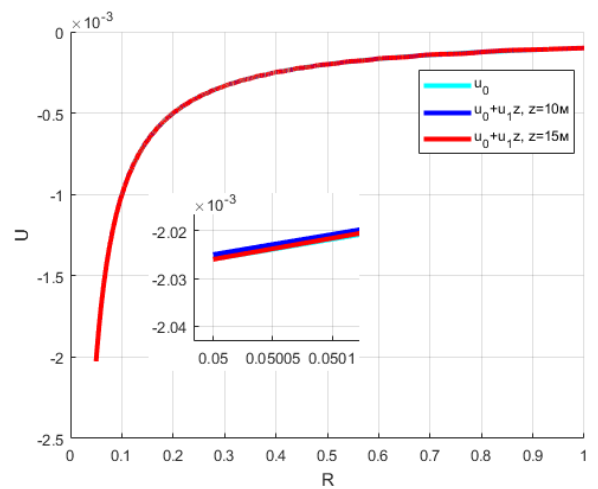
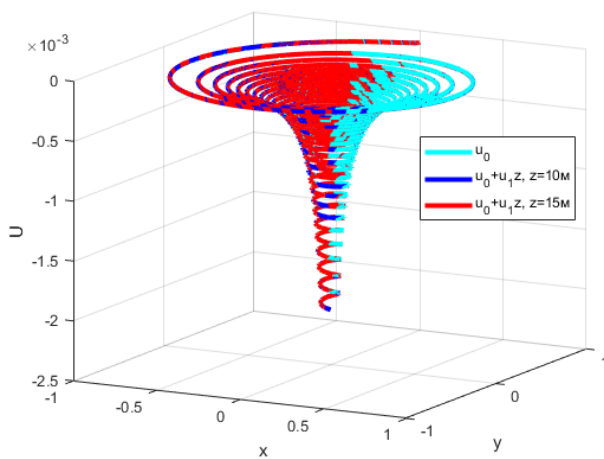


Рис. 3.90 - Тропический циклон: u_0 - базовый расчёт; $u_0 + u_1z$, $z = 10$ м; $u_0 + u_1z$, $z = 15$ м

ней интенсивности. Значение радиальной скорости газа для двух коэффициентов ряда $u_0 + u_1z$ при $z = 10$ м обозначается как U_{h_1} , при $z = 15$ м как U_{h_2} .

Таблица 3.14 - Радиальная скорость газа торнадо

Класс торнадо	u_0	u_0 , м/с	U_{h_1}	U_{h_1} , м/с	$ U_{h_1} - u_0 $ (%)	U_{h_2}	U_{h_2} , м/с	$ U_{h_2} - u_0 $ (%)
	безразм.	разм.	безразм.	разм.	безразм.	безразм.	разм.	безразм.
F00	-0.039104	13.021	-0.039116	13.026	1.2E-05(0.03)	-0.039127	13.029	2.3E-05(0.06)
F10	-0.032874	10.947	-0.032878	10.948	4.0E-06(0.01)	-0.032873	10.947	1.0E-06(0.00)
F20	-0.023593	7.856	-0.023580	7.852	1.3E-05(0.05)	-0.023577	7.851	1.6E-05(0.06)
F30	-0.015915	5.299	-0.015907	5.297	8.0E-06(0.04)	-0.015907	5.297	8.0E-06(0.04)
F40	-0.010059	3.350	-0.010052	3.347	7.0E-06(0.08)	-0.010052	3.347	7.0E-06(0.08)
F50	-0.006733	2.242	-0.006731	2.241	2.0E-06(0.04)	-0.006731	2.241	2.0E-06(0.04)
ТЦ	-0.002026	0.675	-0.002026	0.675	0.00(0.00)	-0.002026	0.675	0.000(0.00)

Процент изменения параметра u считается по формуле: $\% = (u_0 - U_{h_{1,2}}) \times 100 / u_0$.

С учетом дополнительных слагаемых и изменением высоты придонной части отмечается незначительно изменение радиальной скорости газа относительно базовых вычислительных экспериментов. Относительная погрешность между базовыми вычислительными экспериментами и вычислительными экспериментами для высоты флюгера для основных классов торнадо не превышает 0.08%. Относительная погрешность между базовыми вычислительными экспериментами и вычислительными экспериментами для $z = 15$ м также не превышает 0.08%.

Окружная скорость газа

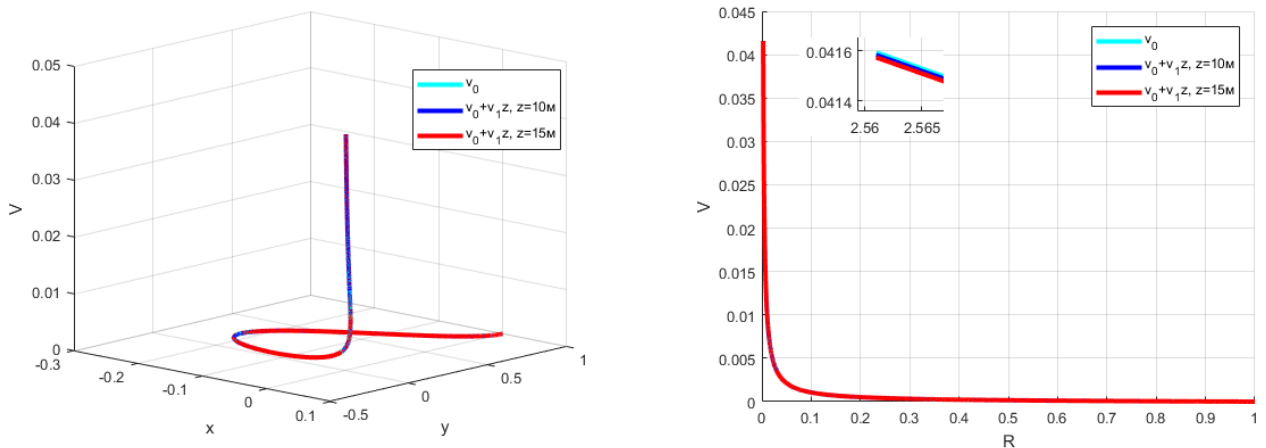


Рис. 3.91 - Торнадо класса F00: v_0 - базовый расчёт; $v_0 + v_1z$, $z = 10$ м; $v_0 + v_1z$, $z = 15$ м.

На рисунках 3.91 – 3.97 на траекториях движения частиц показана окружная скорость газа для классов торнадо F00 – F50 и тропического циклона средней интенсивности.

В таблице 3.15 представлены размерные и безразмерные значения окружной скорости газа для торнадо классов F00 – F50 и тропического циклона

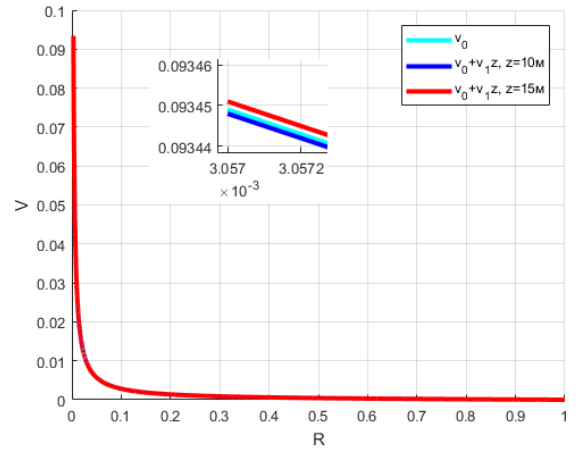
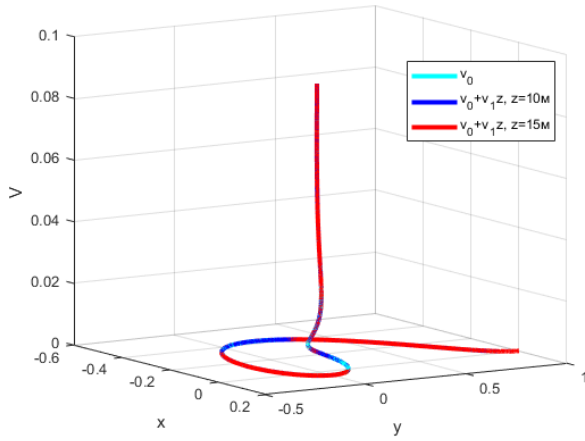


Рис. 3.92 - Торнадо класса F10: v_0 - базовый расчёт; $v_0 + v_1 z$, $z = 10$ м; $v_0 + v_1 z$, $z = 15$ м

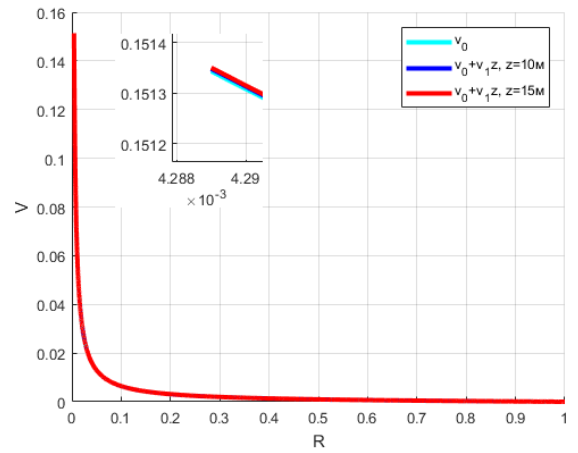
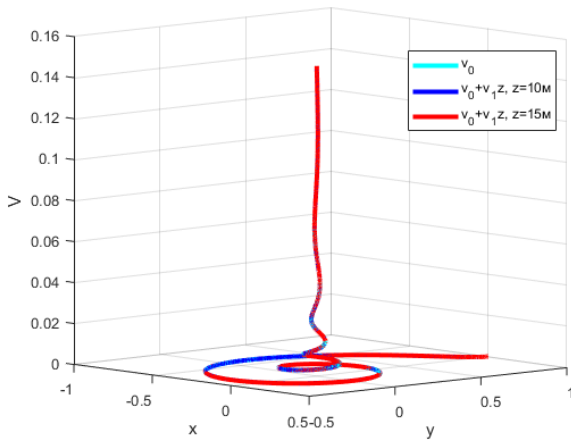


Рис. 3.93 - Торнадо класса F20: v_0 - базовый расчёт; $v_0 + v_1 z$, $z = 10$ м; $v_0 + v_1 z$, $z = 15$ м

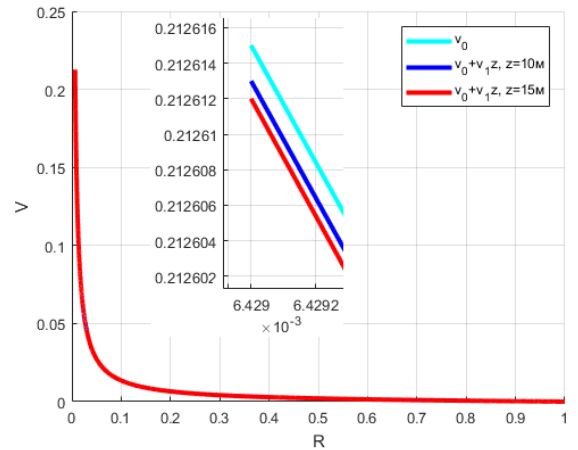
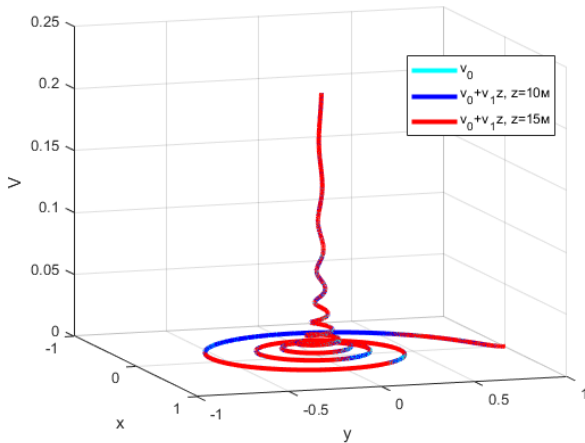


Рис. 3.94 - Торнадо класса F30: v_0 - базовый расчёт; $v_0 + v_1 z$, $z = 10$ м; $v_0 + v_1 z$, $z = 15$ м

средней интенсивности. Значение окружной скорости газа для двух коэффициентов ряда $v_0 + v_1 z$ при $z = 10$ м обозначается как V_{h_1} , при $z = 15$ м как V_{h_2} . Процент изменения окружной скорости газа рассчитывается по формуле: $\% = (v_0 - V_{h_{1,2}}) \times 100 / v_0$.

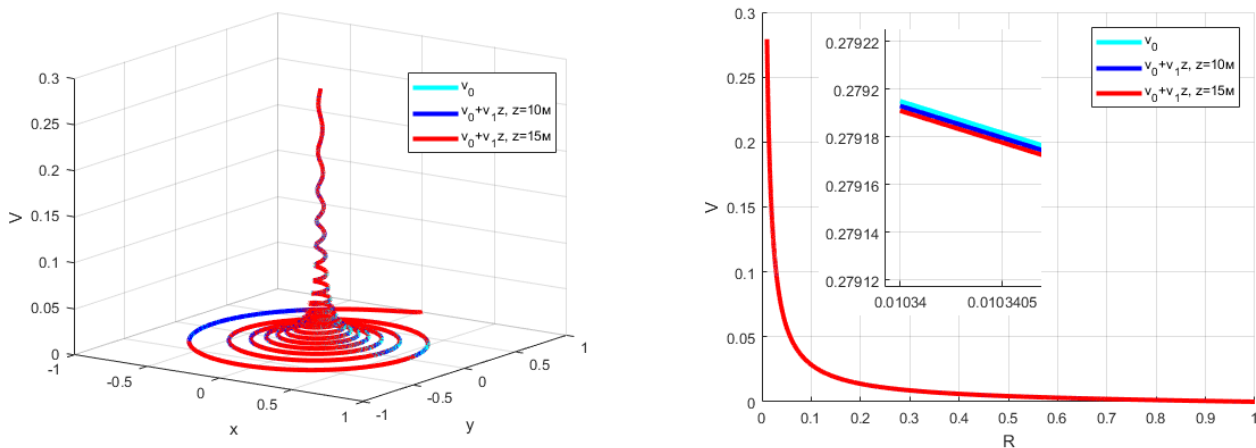


Рис. 3.95 - Торнадо класса F40: v_0 - базовый расчёт; $v_0 + v_1 z$, $z = 10$ м; $v_0 + v_1 z$, $z = 15$ м

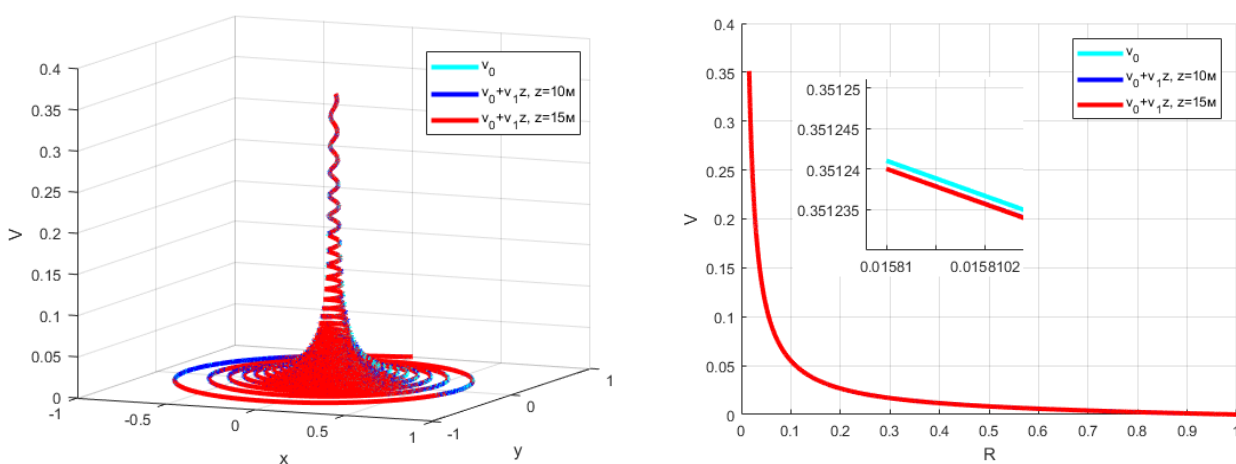


Рис. 3.96 - Торнадо класса F50: v_0 - базовый расчёт; $v_0 + v_1 z$, $z = 10$ м; $v_0 + v_1 z$, $z = 15$ м

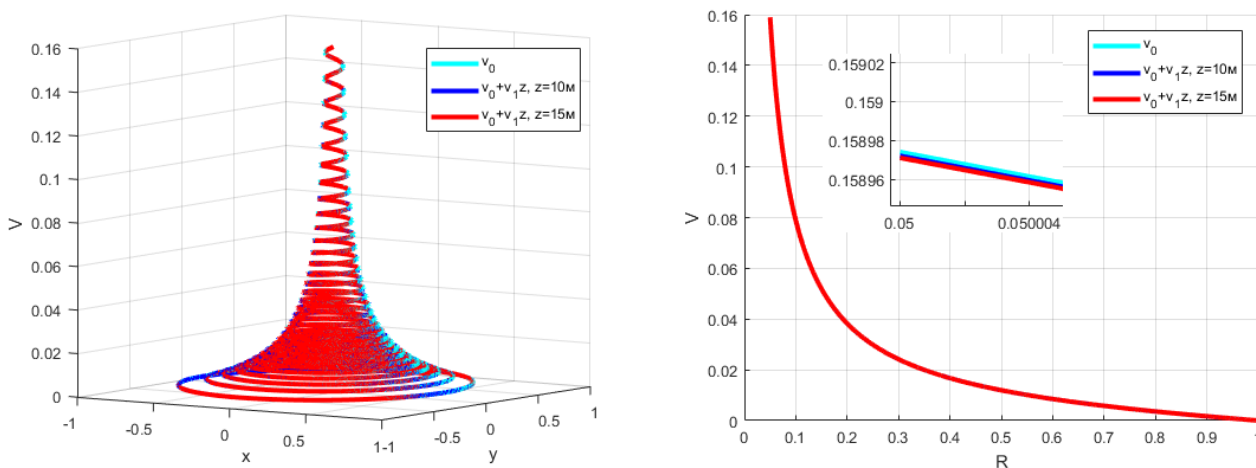


Рис. 3.97 - Тропический циклон: v_0 - базовый расчёт; $v_0 + v_1 z$, $z = 10$ м; $v_0 + v_1 z$, $z = 15$ м

С учетом дополнительных слагаемых и изменением высоты придонной части незначительно меняется значение окружной скорости газа. Относительная погрешность между базовыми вычислительными экспериментами и вычислитель-

Таблица 3.15 - Окружная скорость газа торнадо

Класс торнадо	v_0 безразм.	v_0 , м/с разм.	V_{h_1} безразм.	V_{h_1} , м/с разм.	$ V_{h_1} - v_0 $ (%) безразм.	V_{h_2} безразм.	V_{h_2} , м/с разм.	$ V_{h_2} - v_0 $ (%) безразм.
F00	0.041593	13.850	0.041583	13.848	1.0E-05(0.010)	0.041573	13.844	3.0E-06(0.04)
F10	0.093449	31.119	0.093448	31.118	1.0E-06(0.003)	0.093451	31.119	2.0E-06(0.00)
F20	0.151343	50.397	0.151348	50.399	5.0E-06(0.004)	0.151350	50.400	7.0E-06(0.002)
F30	0.212615	70.800	0.212613	70.800	2.0E-06(0.000)	0.212612	70.800	3.0E-06(0.00)
F40	0.279195	92.972	0.279193	92.971	2.0E-06(0.001)	0.279191	92.971	4.0E-06(0.001)
F50	0.351241	116.963	0.351240	116.963	1.0E-06(0.000)	0.351240	116.963	1.0E-06(0.00)
ТЦ	0.158974	52.938	0.158972	52.938	2.0E-06(0.000)	0.158971	52.938	3.0E-06(0.00)

ными экспериментами для высоты флюгера для соответствующего класса торнадо не превышает 0.01%. Относительная погрешность между базовыми вычислительными экспериментами и вычислительными экспериментами для $z = 15$ м для соответствующего класса торнадо не превышает 0.04%.

Наибольшее изменение величины v приходится на класс торнадо F00 – у этого класса наименьший радиус стока – r_0 . Высота придонной части торнадо для каждого класса имеет свое значение, и эта величина не измеряется человеком. Чем выше класс торнадо, тем погрешность между газодинамическими параметрами, полученными при вычислительных экспериментах более стремится к нулю вблизи Земной поверхности.

В задаче строятся приближенные решения, используя разное количество слагаемых ряда. Для того, чтобы проверить как построенные решения работают с природными значениями, берется одно слагаемое ряда затем два слагаемых ряда и сравнивается результат решения. Сравниваются параметры течения и разница между ними. На высоте флюгера 10 м и 15 м значения параметров в найденных решениях для больших классов торнадо практически полностью совпадают. Были проведены исследования для высоты придонной части потока равной 50 м и выше. При увеличении высоты придонной части расхождение между отрезками ряда оказалось достаточно значительным.

3.4 Верификация вычислительных экспериментов, численные модели которых построены на основе математических моделей для третьих коэффициентов ряда

В данном параграфе представлены результаты вычислительных экспериментов газодинамических параметров с учетом трех коэффициентов ряда. Ниже, описаны сравнительные вычислительные эксперименты для газодинамических параметров: c , u , v , входящие в систему уравнений (1.70), при значениях высоты придонной части торнадо $z = 3$ м.

Скорость звука газа

На рисунках 3.98 – 3.101 показаны значения параметров скорости звука газа для основных классов торнадо из таблицы Фудзиты для одного, двух и трех коэффициентов ряда. Высота придонной области равна трем метрам. В таблице 3.16 представлены вычислительные эксперименты для: c_0 , $c_0 + c_1z$ и $c_0 + c_1z + c_2z^2/2$, размерные и безразмерные значения, а также безразмерное значение третьего коэффициента в последнем столбце таблицы. Вычислительные эксперименты с учетом двух коэффициентов ряда на высоте $z = 3$ м обозначаются C_{h_3} , с учетом трех коэффициентов ряда на высоте $z = 3$ м – C_{h_4} .

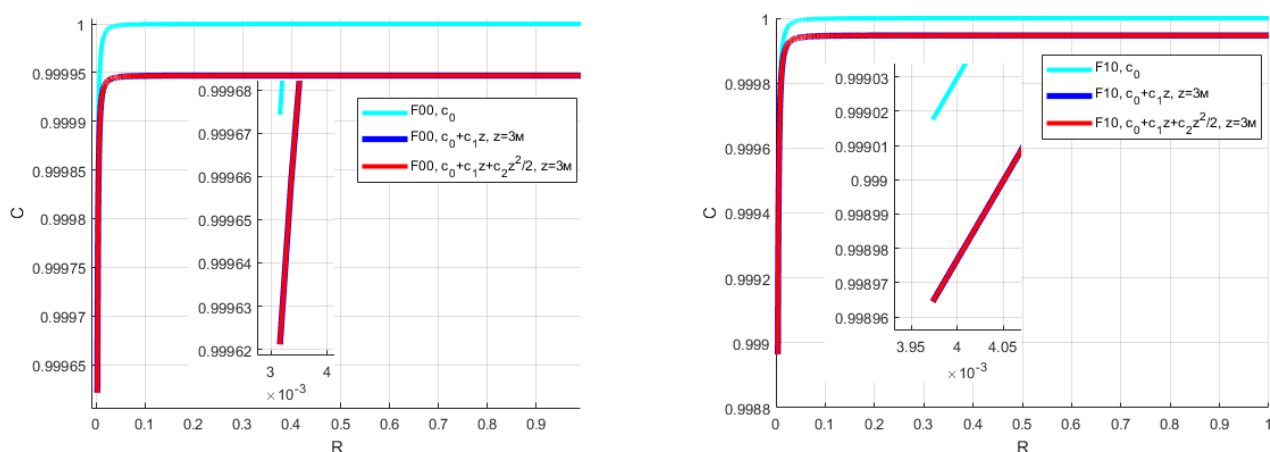


Рис. 3.98 - Торнадо класса F00, F10: c_0 - базовый расчёт; $c_0 + c_1z$, $z = 3$ м; $c_0 + c_1z + c_2z^2/2$, $z = 3$ м

Для скорости звука газа и значения высоты придонной части равной три метра относительная погрешность между вычислительными экспериментами с учетом трех коэффициентов ряда и базовыми расчетами не превышает 0.006%.

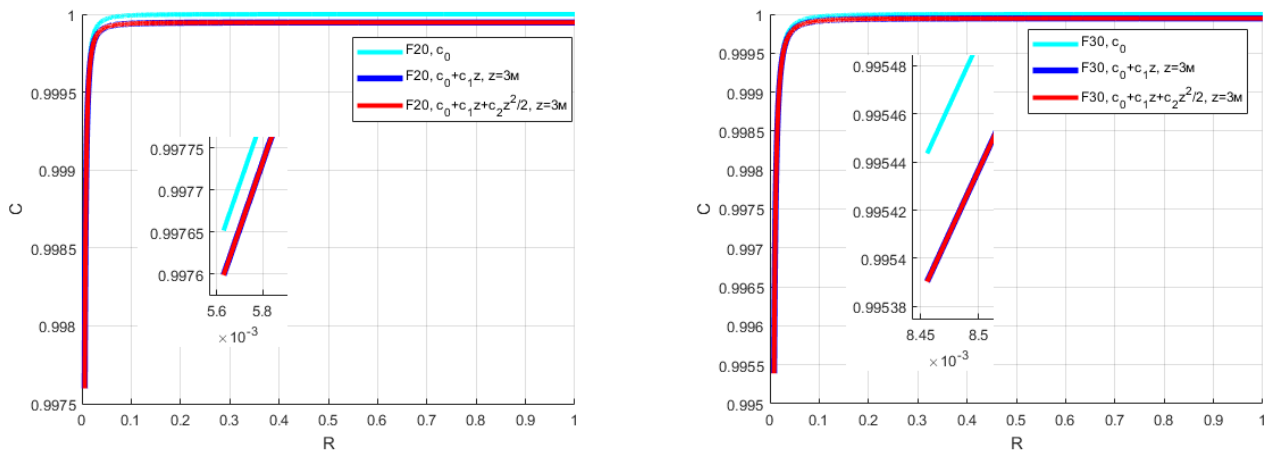


Рис. 3.99 - Торнадо класса F20, F30: c_0 - базовый расчёт; $c_0 + c_1z$, $z = 3$ м; $c_0 + c_1z + c_2z^2/2$, $z = 3$ м

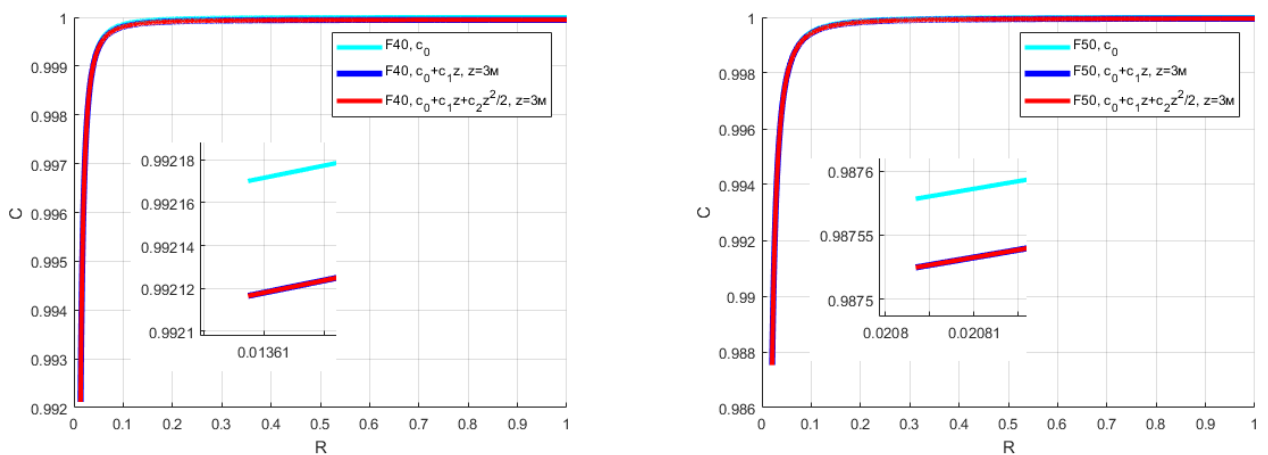


Рис. 3.100 - Торнадо класса F40, F50: c_0 - базовый расчёт; $c_0 + c_1z$, $z = 3$ м; $c_0 + c_1z + c_2z^2/2$, $z = 3$ м

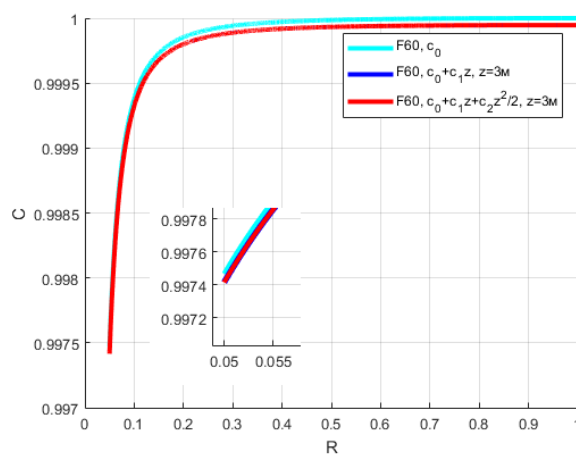


Рис. 3.101 - Тропический циклон: c_0 - базовый расчёт; $c_0 + c_1z$, $z = 3$ м; $c_0 + c_1z + c_2z^2/2$, $z = 3$ м

Радиальная скорость газа

На рисунках 3.102 – 3.105 показано значение радиальной скорости газа для основных классов торнадо из таблицы Фудзиты для одного, двух и трех коэффициентов ряда. Высота придонной области равна три метра. В таблице 3.17

Таблица 3.16 - Скорость звука газа

Класс торнадо	c_0 безразм.	c_0 , м/с разм.	C_{h_3} безразм.	C_{h_3} , м/с разм.	C_{h_4} безразм.	C_{h_4} , м/с разм.	$ C_{h_4} - c_0 $ (%) безразм.
F00	0.99967	332.891	0.99962	332.874	0.99962	332.874	5.0E-05(0.005)
F10	0.99902	332.673	0.99896	332.655	0.99896	332.655	6.0E-05(0.006)
F20	0.99765	332.218	0.99759	332.200	0.99759	332.200	6.0E-05(0.006)
F30	0.99544	331.483	0.99539	331.465	0.99539	331.465	5.0E-05(0.005)
F40	0.99216	330.391	0.99211	330.373	0.99211	330.373	5.0E-05(0.005)
F50	0.98758	328.865	0.98753	328.846	0.98753	328.847	5.0E-05(0.005)
ТЦ	0.99747	332.157	0.99742	332.139	0.99742	332.139	5.0E-05(0.005)

представлены вычислительные эксперименты для: u_0 , u_0+u_1z и $u_0+u_1z+u_2z^2/2$, размерные и безразмерные значения, а также абсолютную погрешность между вычислительными экспериментами с учетом трех коэффициентов ряда и базовыми расчетами (последний столбец). Вычислительные эксперименты с учетом двух коэффициентов ряда на высоте $z = 3$ м обозначаются как U_{h_3} , с учетом трех коэффициентов ряда при $z = 3$ м как U_{h_4} .

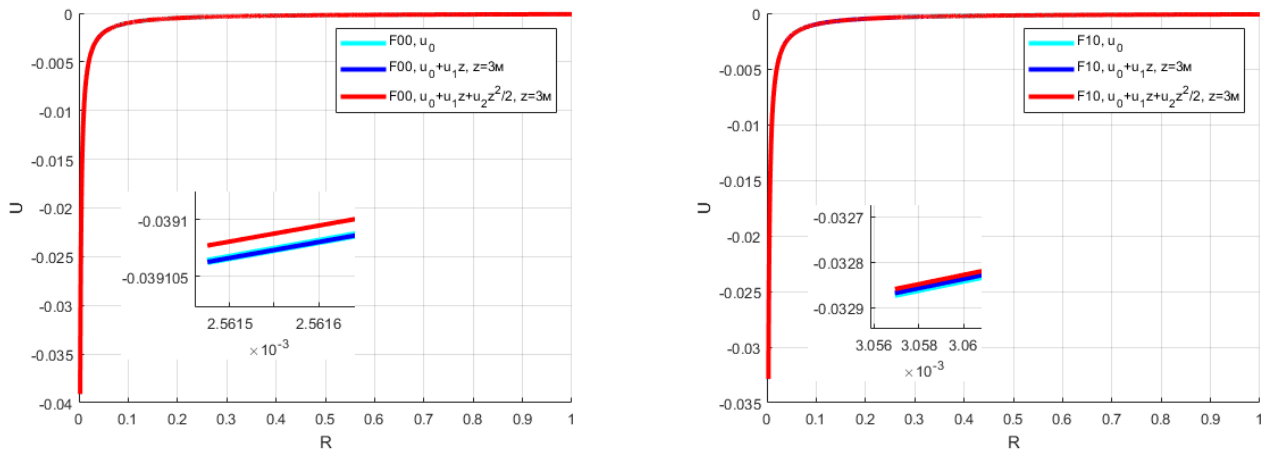


Рис. 3.102 - Торнадо класса F00, F10: u_0 - базовый расчёт; $u_0 + u_1z$, $z = 3$ м; $u_0 + u_1z + u_2z^2/2$, $z = 3$ м

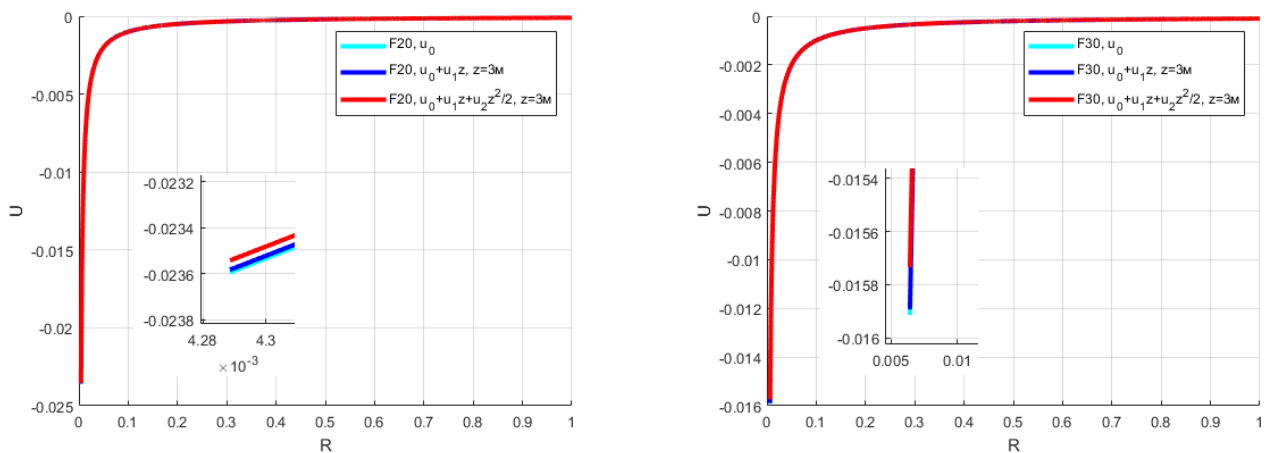


Рис. 3.103 - Торнадо класса F20, F30: u_0 - базовый расчёт; $u_0 + u_1z$, $z = 3$ м; $u_0 + u_1z + u_2z^2/2$, $z = 3$ м

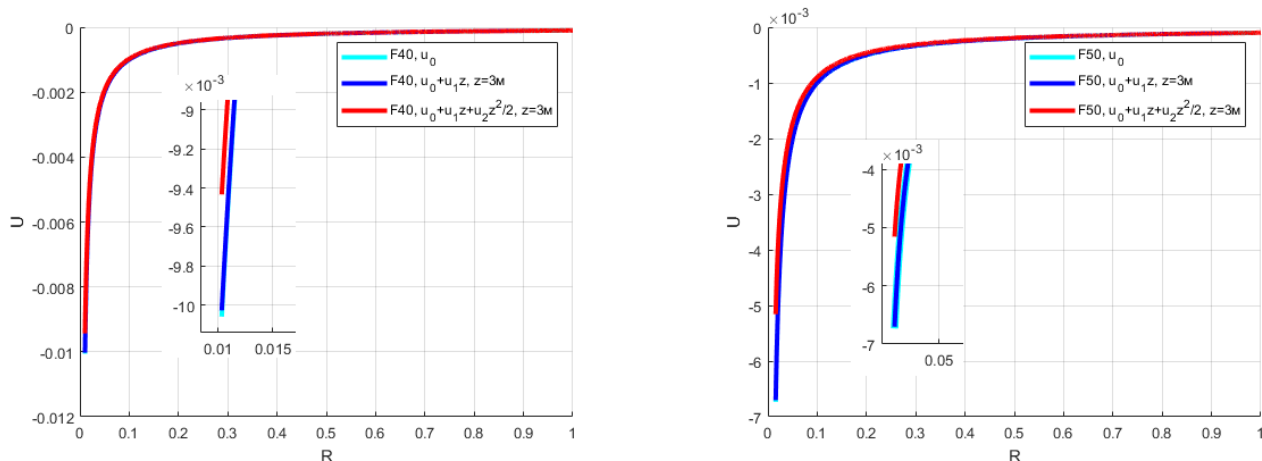


Рис. 3.104 - Торнадо класса F40, F50: u_0 - базовый расчёт; $u_0 + u_1z$, $z = 3$ м; $u_0 + u_1z + u_2z^2/2$, $z = 3$ м

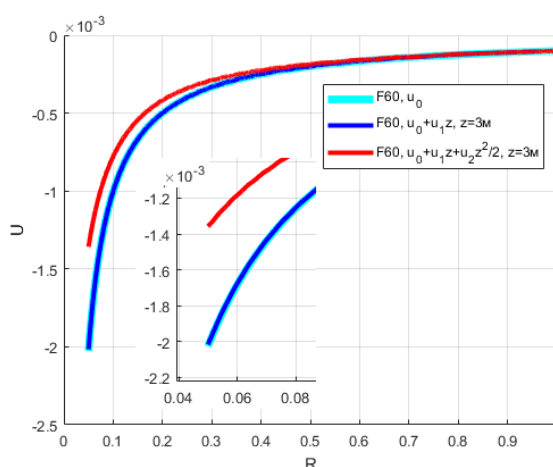


Рис. 3.105 - Тропический циклон: u_0 - базовый расчёт; $u_0 + u_1z$, $z = 3$ м; $u_0 + u_1z + u_2z^2/2$, $z = 3$ м

Таблица 3.17 - Радиальная скорость газа

Класс торнадо	u_0 безразм.	u_0 , м/с разм.	U_{h_3} безразм.	U_{h_3} , м/с разм.	U_{h_4} безразм.	U_{h_4} , м/с разм.	$ U_{h_4} - u_0 $ (%) безразм.
F00	-0.03910	13.021	-0.03910	13.021	-0.03910	13.021	5.0E-08(0.0001)
F10	-0.03287	10.946	-0.03287	10.946	-0.03286	10.942	1.0E-05(0.03)
F20	-0.02359	7.855	-0.02358	7.852	-0.02354	7.839	6.0E-05(0.25)
F30	-0.01591	5.299	-0.01589	5.292	-0.015734	5.239	2.0E-04(1.26)
F40	-0.01005	3.349	-0.01003	3.339	-0.009433	3.141	6.0E-04(5.97)
F50	-0.00673	2.241	-0.00670	2.232	-0.005157	1.717	1.6E-03(23.77)
ТЦ	-0.00203	0.675	-0.00202	0.672	-0.001358	0.452	6.6E-04(32.51)

Для радиальной скорости газа и значения высоты придонной части равной три метра абсолютная погрешность между вычислительными экспериментами с учетом трех коэффициентов ряда и базовыми расчетами с увеличением класса торнадо начинает возрастать. Радиальная скорость газа с увеличением класса торнадо начинает значительно уменьшаться, в результате чего на этом параметре наиболее заметны расхождения. Наибольшая величина в расхождении радиальной скорости газа приходится на торнадо класса F50 и тропический циклон –

самые разрушительные классы, которые представлены в вычислительных экспериментах. Для класса торнадо F50 и тропического циклона относительная погрешность составляет практически 24% и 33%.

Окружная скорость газа

На рисунках 3.106 – 3.109 показано значение параметра окружной скорости газа для основных классов торнадо из таблицы Фудзиты для одного, двух и трех коэффициентов ряда. Высота придонной области равна три метра. В таблице 3.18 представлены вычислительные эксперименты для: v_0 , $v_0 + v_1z$ и $v_0 + v_1z + v_2z^2/2$, размерные и безразмерные значения, а также безразмерное значение третьего коэффициента в последнем столбце таблицы. Вычислительные эксперимент с учетом двух коэффициентов ряда на высоте $z = 3$ м обозначаются как V_{h_3} , с учетом трех коэффициентов ряда при $z = 3$ м как V_{h_4} .

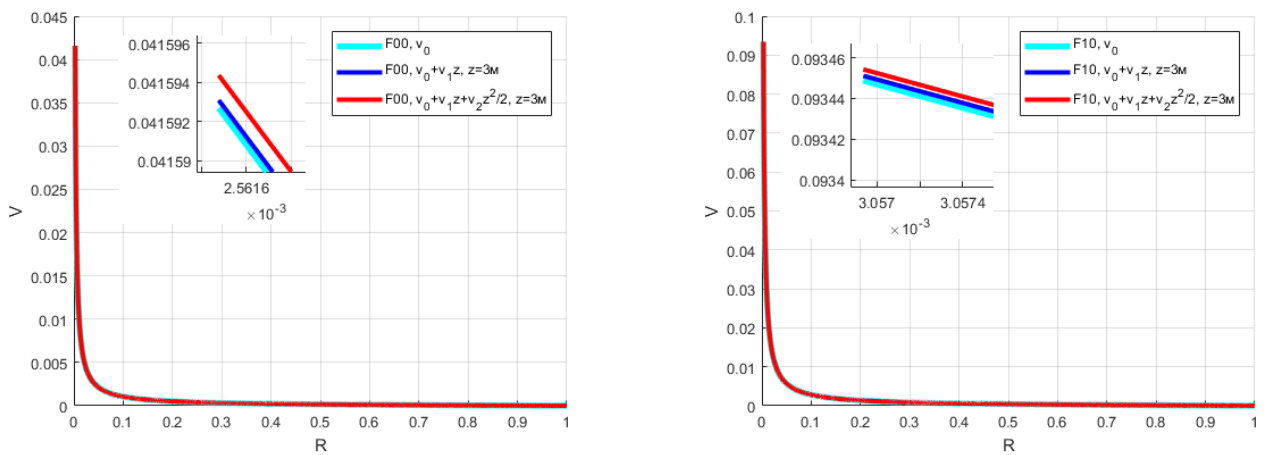


Рис. 3.106 - Торнадо класса F00, F10: v_0 - базовый расчёт; $v_0 + v_1z$, $z = 3$ м; $v_0 + v_1z + v_2z^2/2$, $z = 3$ м

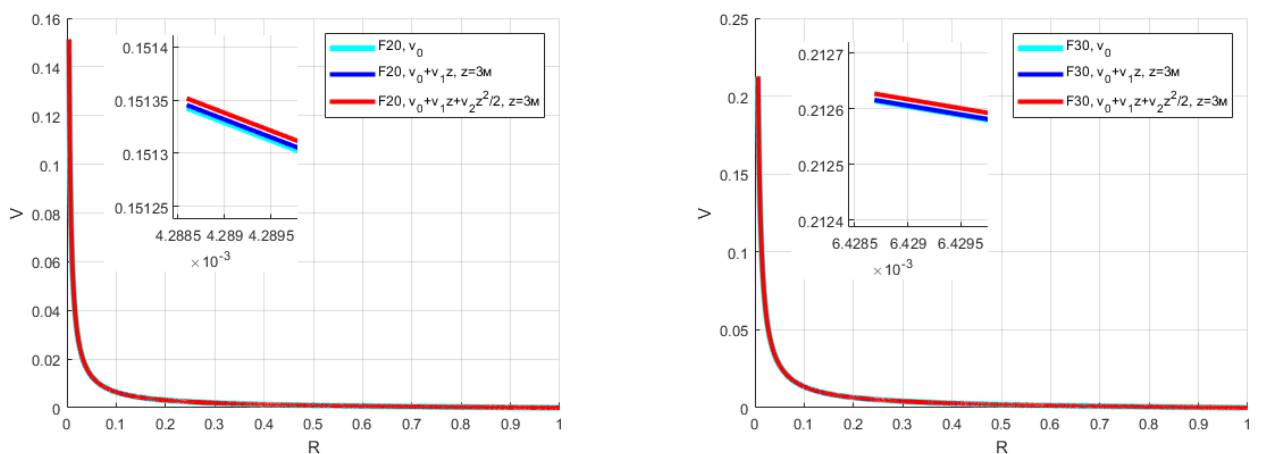


Рис. 3.107 - Торнадо класса F20, F30: v_0 - базовый расчёт; $v_0 + v_1z$, $z = 3$ м; $v_0 + v_1z + v_2z^2/2$, $z = 3$ м

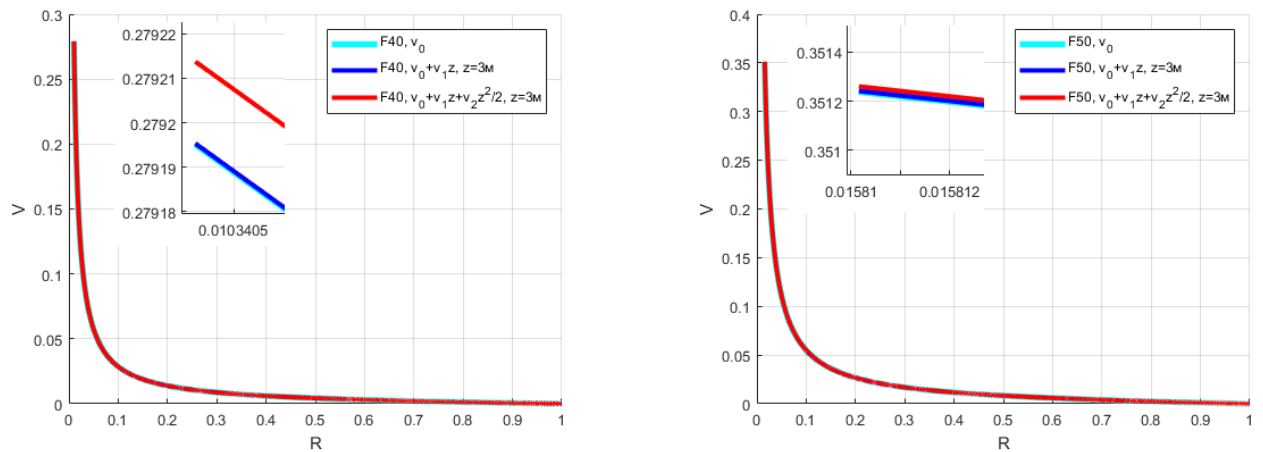


Рис. 3.108 - Торнадо класса F40, F50: v_0 - базовый расчёт; $v_0 + v_1z$, $z = 3$ м; $v_0 + v_1z + v_2z^2/2$, $z = 3$ м

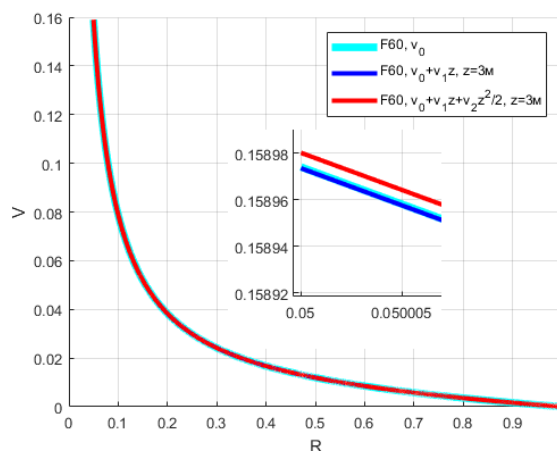


Рис. 3.109 - Тропический циклон: v_0 - базовый расчёт; $v_0 + v_1z$, $z = 3$ м; $v_0 + v_1z + v_2z^2/2$, $z = 3$ м

Таблица 3.18 - Окружная скорость газа

Класс торнадо	v_0 безразм.	v_0 , м/с разм.	V_{h_3} безразм.	V_{h_3} , м/с разм.	V_{h_4} безразм.	V_{h_4} , м/с разм.	$ V_{h_4} - v_0 $ (%) безразм.
F00	0.041592	13.850	0.041593	13.850	0.041594	13.851	2.0E-06(0.005)
F10	0.093448	31.118	0.093451	31.119	0.093454	31.120	6.0E-06(0.006)
F20	0.151342	50.397	0.151345	50.398	0.151351	50.400	9.0E-06(0.006)
F30	0.212614	70.800	0.212615	70.801	0.212626	70.804	1.2E-05(0.006)
F40	0.279195	92.972	0.279195	92.972	0.279213	92.978	1.8E-05(0.006)
F50	0.351240	116.962	0.351241	116.963	0.351260	116.969	2.0E-05(0.006)
ТЦ	0.158973	52.938	0.158973	53.938	0.158980	52.940	7.0E-06(0.004)

Далее приведены вычислительные эксперименты для $z = 10$ м при учете двух и трех коэффициентов ряда, а также базовыми экспериментами.

Для окружной скорости газа и значения высоты придонной части равной три метра относительная погрешность между вычислительными экспериментами с учетом трех коэффициентов ряда и базовыми расчетами не превышает 0.006%. Это говорит о том, что полученные приближенные решения попадают в область сходимости ряда.

При сравнении вычислительных экспериментов с учетом трех коэффициентов ряда и базовыми вычислительными экспериментами была получена абсолютная погрешность, не превышающая четвертого знака после запятой, что позволяет остановить последующие вычисления коэффициентов ряда.

Газодинамические параметры при разном значении высоты придонной части потока

В таблице 3.19 представлены абсолютные и относительные погрешности для вычислительных экспериментов при $z = 3$ м с учетом трех коэффициентов ряда относительно базовых вычислительных экспериментов.

Таблица 3.19 - Скорость звука газа, радиальная и окружная скорости газа для $z = 3$ метров

Класс торнадо	$ C_{h_4} - c_0 $ (%) безразм.	$ U_{h_4} - u_0 $ (%) безразм.	$ V_{h_4} - v_0 $ (%) безразм.
F00	5.0E-05(0.005)	5.0E-08(0.0001)	2.0E-06(0.005)
F10	6.0E-05(0.006)	1.0E-05(0.03)	6.0E-06(0.006)
F20	6.0E-05(0.006)	6.0E-05(0.25)	9.0E-06(0.006)
F30	5.0E-05(0.005)	2.0E-04(1.26)	1.2E-05(0.006)
F40	5.0E-05(0.005)	6.0E-04(5.97)	1.8E-05(0.006)
F50	5.0E-05(0.005)	1.6E-03(23.77)	2.0E-05(0.006)
ТЦ	5.0E-05(0.005)	6.6E-04(32.51)	7.0E-06(0.004)

В таблице 3.20 представлены абсолютные и относительные погрешности для вычислительных экспериментов при $z = 10$ м с учетом трех коэффициентов ряда относительно базовых вычислительных экспериментов.

Таблица 3.20 - Скорость звука газа, радиальная и окружная скорости газа для $z = 10$ метров

Класс торнадо	$ C_{h_4} - c_0 $ (%) безразм.	$ U_{h_4} - u_0 $ (%) безразм.	$ V_{h_4} - v_0 $ (%) безразм.
F00	1.8E-04(0.02)	1.6E-05(0.04)	1.5E-05(0.04)
F10	1.8E-04(0.02)	1.2E-04(0.36)	4.3E-05(0.05)
F20	1.8E-04(0.02)	4.9E-04(2.08)	7.7E-05(0.05)
F30	1.8E-04(0.02)	1.8E-03(11.31)	2.1E-04(0.09)
F40	1.8E-04(0.02)	9.7E-03(96.4)	2.1E-04(0.07)
F50	1.8E-04(0.02)	3.7E-03(54.9)	2.1E-04(0.06)
ТЦ	1.8E-04(0.02)	3.3E-03(162.9)	7.2E-05(0.05)

По полученным результатам отметим, что возрастает величина абсолютной и относительной погрешности для радиальной скорости газа при увеличении высоты придонной части потока z . Особенно это отмечается для классов торнадо: F40, F50 и тропического циклона, поскольку радиальная скорость газа с увеличением класса торнадо значительно уменьшается. У отмеченных классов торнадо наблюдаются самые высокие скоростные и разрушительные значения.

Вертикальная скорость газа

Вертикальная скорость газа определяется при учете третьего коэффициента ряда (1.15), поскольку два первых коэффициента полагались равными нулю (1.70). Коэффициент w_2 определяется по формуле (1.29).

Значение вертикальной скорости газа при $z = 10$ м обозначается как W_{h_1} , при $z = 15$ м как W_{h_2} .

На рисунках 3.110 – 3.116 показана трехмерная поверхность вертикальной скорости газа (рисунок слева) для расчета W_{h_1} в декартовых координатах для торнадо классов F00 – F50 и тропического циклона средней интенсивности на широте $\pi/6$, для: W_{h_1} , W_{h_2} – рисунки справа.

В таблице 3.21 представлены размерные и безразмерные значения вертикальной скорости газа для торнадо классов F00 – F50 и тропического циклона средней интенсивности для: W_{h_1} , W_{h_2} .

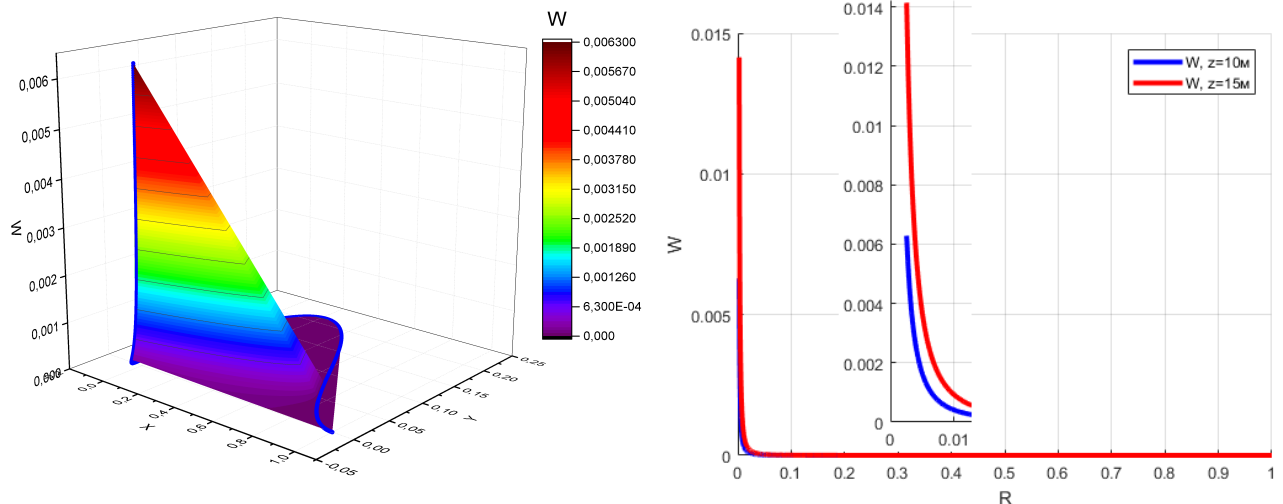


Рис. 3.110 - Вертикальная скорость газа F00: W_{h_1} , W_{h_2}

Таблица 3.21 - Вертикальная скорость газа

Класс торнадо	W_{h_1} безразм.	W_{h_1} разм. м/с	W_{h_2} безразм.	W_{h_2} разм. м/с
F00	0.0063	2.098	0.0141	4.695
F10	0.0069	2.298	0.0157	5.228
F20	0.0071	2.364	0.0159	5.295
F30	0.0059	1.965	0.0134	4.462
F40	0.0039	1.299	0.0089	2.964
F50	0.0021	0.699	0.0048	1.598
ТЦ	0.0005	0.167	0.0010	0.339

Для торнадо классов F00 – F50 и тропического циклона средней интенсивности значение W_{h_2} увеличивается больше чем в 2 раза относительно W_{h_1} .

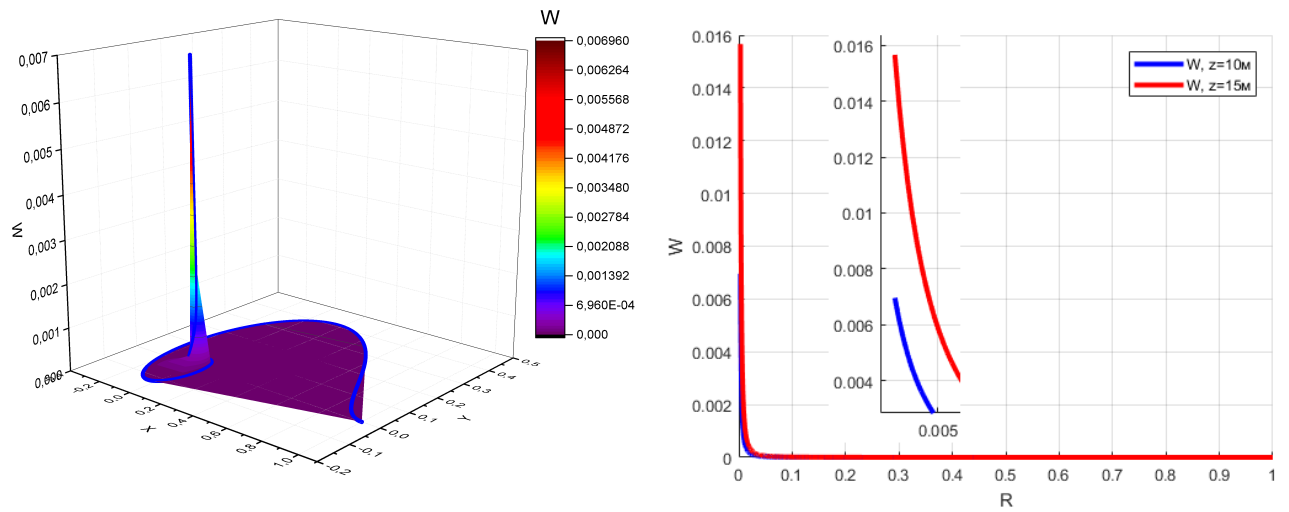


Рис. 3.111 - Вертикальная скорость газа F10: W_{h_1}, W_{h_2}

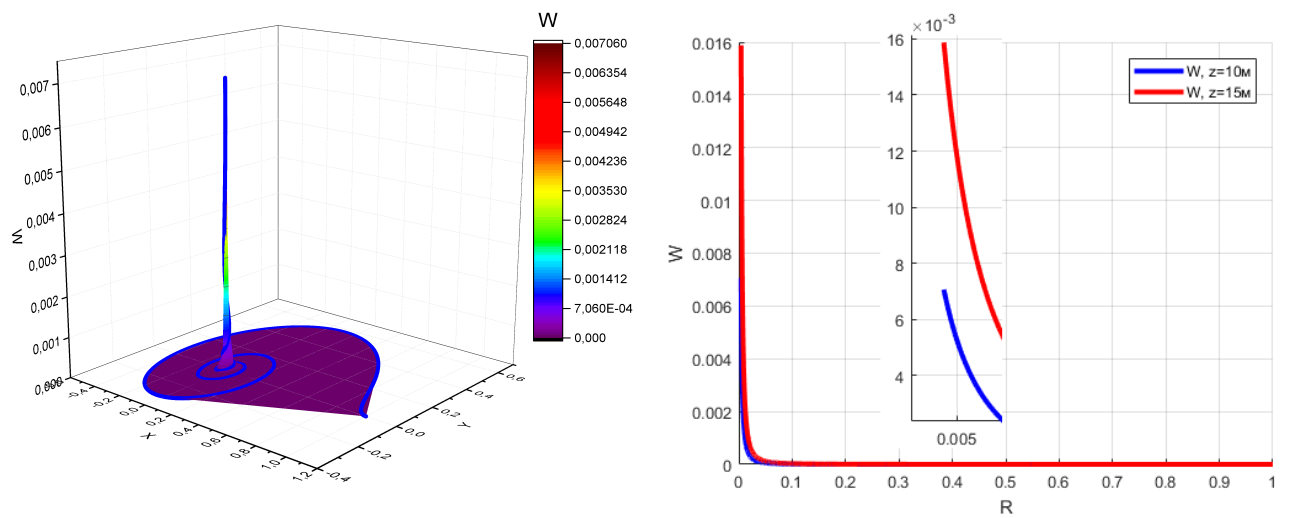


Рис. 3.112 - Вертикальная скорость газа F20: W_{h_1}, W_{h_2}

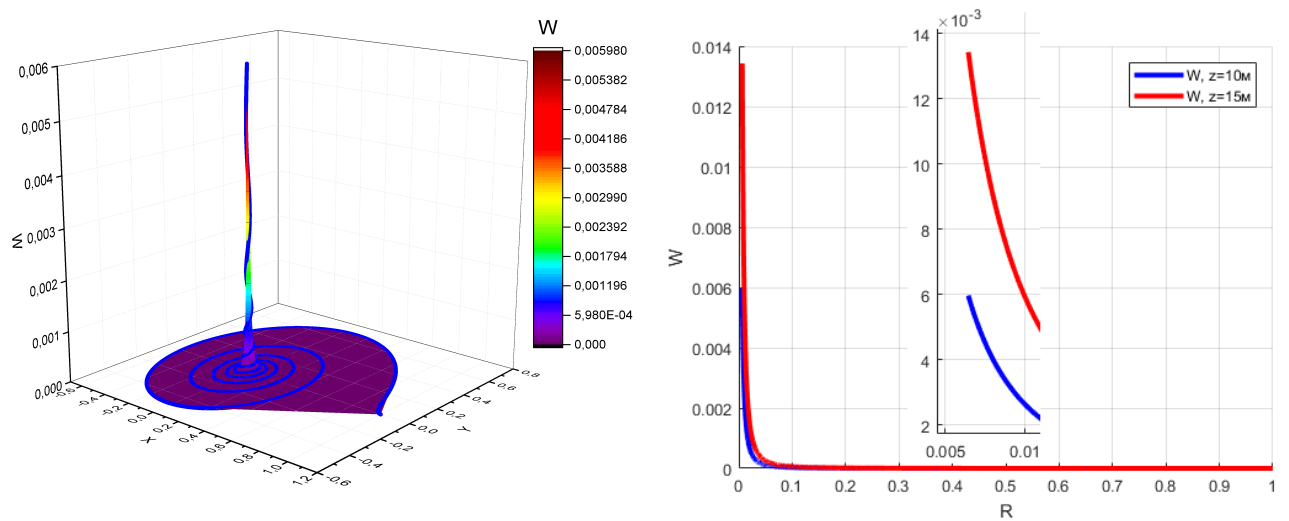


Рис. 3.113 - Вертикальная скорость газа F30: W_{h_1}, W_{h_2}

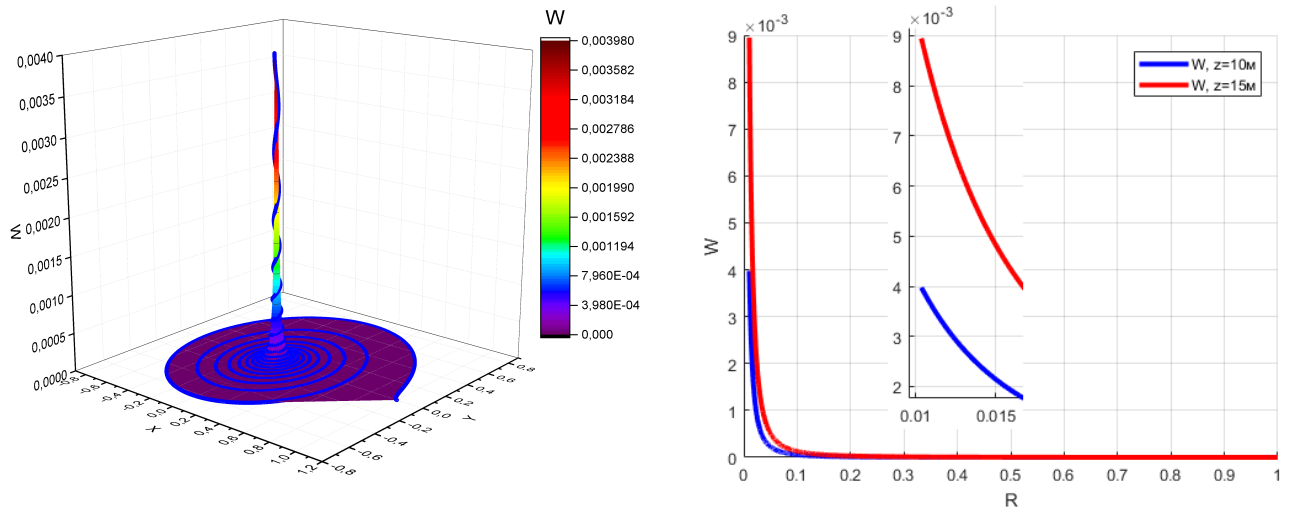


Рис. 3.114 - Вертикальная скорость газа F40: W_{h_1} , W_{h_2}

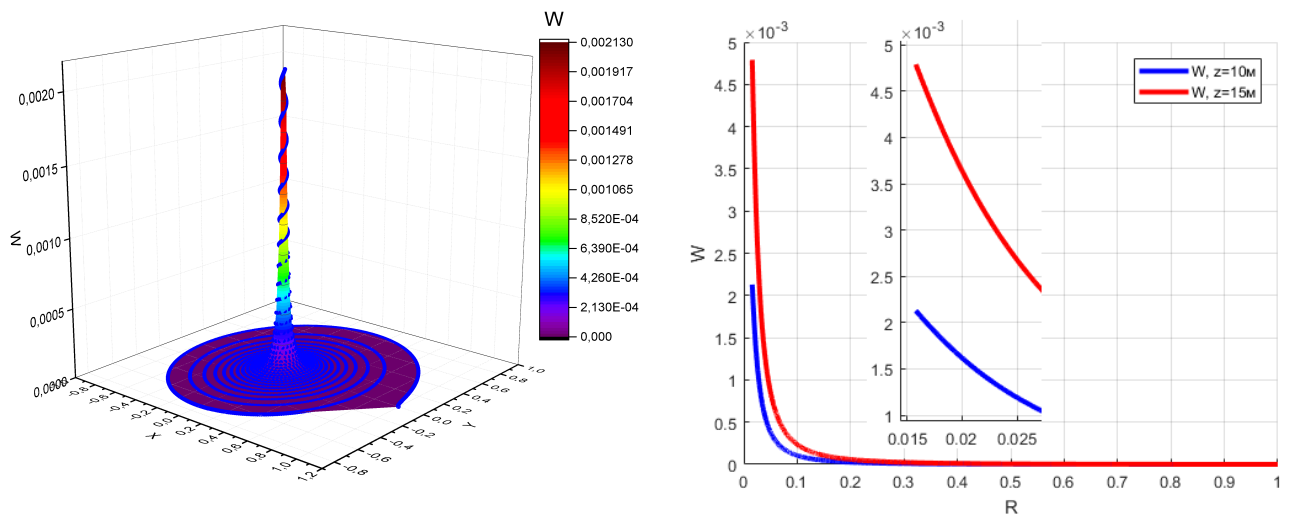


Рис. 3.115 - Вертикальная скорость газа F50: W_{h_1} , W_{h_2}

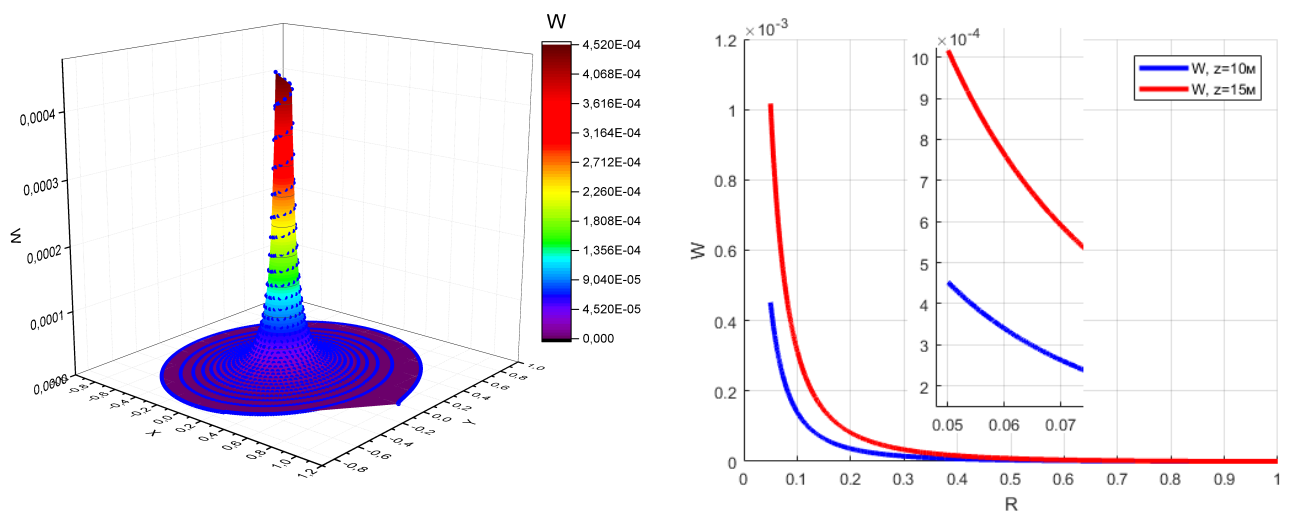


Рис. 3.116 - Вертикальная скорость газа, тропический циклон: W_{h_1} , W_{h_2}

По представленным вычислительным экспериментам стоит отметить, что для W_{h_1} и W_{h_2} максимальное значение вертикальной скорости газа приходится на торнадо класса F20. Наименьшее значение вертикальной скорости – на тропический циклон. В придонной области вертикальная скорость газа близка к нулю, преобладающую величину составляет окружное движение, и небольшая доля приходится на радиальное.

3.5 Кинетическая энергия восходящих закрученных потоков

Для области

$$(D) : \{r_0 \leq r \leq r_{in}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq h\}$$

кинетическая энергия определяется по формуле (1.72).

Кинетическая энергия была определена при учете одного коэффициента и двух коэффициентов ряда (1.70) с изменением значения высоты придонной части потока для скорости звука газа, радиальной и окружной скоростей газа. Для вертикальной скорости вычислительный эксперимент проводился по третьему коэффициенту ряда, поскольку первые два полагались равными нулю. Способ определения кинетической энергии радиальной, окружной и вертикальной частей потока описан в пункте 1.6 диссертационной работы.

Ниже представлены таблицы с вычислительными экспериментами для кинетической энергии трех частей потока для всех классов торнадо из расширенной таблицы Фудзиты: с учетом первых коэффициентов ряда (табл. 3.22), с учетом двух коэффициентов ряда при $z = 10$ м – высота флюгера (табл. 3.23), при $z = 15$ м (табл. 3.24).

Таблица 3.22 - Кинетическая энергия для базового расчета, широта $\pi/6$

Класс торнадо	W_U МДж	W_V МДж	W МДж	W_V/W
F00	2.560E-01	2.540E-01	5.100E-01	0.4980
F01	8.220E-01	2.658E+00	3.480E+00	0.7638
F10	1.787E+00	1.268E+01	1.447E+01	0.8763
F11	4.615E+00	8.746E+01	9.207E+01	0.9499
F20	8.690E+00	3.150E+02	3.237E+02	0.9731
F21	2.040E+01	1.809E+03	1.830E+03	0.9885
F30	3.572E+01	5.655E+03	5.690E+03	0.9939
F31	8.049E+01	3.008E+04	3.016E+04	0.9974
F40	1.447E+02	9.988E+04	1.000E+05	0.9988
F41	2.811E+02	3.919E+05	3.922E+05	0.9992
F50	4.873E+02	1.211E+06	1.212E+06	0.9992
ТЦ	7.205E+02	3.417E+06	3.418E+06	0.9997
F51	1.026E+03	5.658E+06	5.659E+06	0.9998
F52	1.636E+03	1.472E+07	1.472E+07	0.9999

Для базовых вычислительных экспериментов основную долю кинетической энергии составляет кинетическая энергия окружной части потока от 50% – 99% с увеличением класса торнадо наибольшее значение кинетической энергии радиальной части потока приходится на минимальный класс торнадо.

Таблица 3.23 - Кинетическая энергия с учетом двух коэффициентов ряда при $z = 10$ м, $\psi = \pi/6$

Класс торнадо	W_U МДж	W_U/W	W_V МДж	W_V/W	W_W МДж	W_W/W	W МДж
F00	2.558E-01	0.5021	2.536E-01	0.4974	5.548E-05	1.09E-04	5.095E-01
F01	8.218E-01	0.2362	2.654E+00	0.7629	2.187E-04	6.29E-05	3.476E+00
F10	1.788E+00	0.1237	1.266E+01	0.8755	7.043E-04	4.87E-05	1.445E+01
F11	4.630E+00	0.0503	8.734E+01	0.9489	2.736E-03	2.97E-05	9.197E+01
F20	8.755E+00	0.0271	3.146E+02	0.9722	7.563E-03	2.34E-05	3.234E+02
F21	2.080E+01	0.0114	1.807E+03	0.9879	2.471E-02	1.35E-05	1.828E+03
F30	3.698E+01	0.0065	5.649E+03	0.9929	5.735E-02	1.01E-05	5.686E+03
F31	8.707E+01	0.0029	3.006E+04	0.9970	1.616E-01	5.36E-06	3.015E+04
F40	1.658E+02	0.0017	9.979E+04	0.9980	3.427E-01	3.43E-06	9.996E+04
F41	3.588E+02	0.0009	3.916E+05	0.9987	7.175E-01	1.83E-06	3.920E+05
F50	7.090E+02	0.0006	1.211E+06	0.9992	1.246E+00	1.03E-06	1.212E+06
ТЦ	1.396E+03	0.0004	3.415E+06	0.9994	7.931E-01	2.32E-07	3.416E+06
F51	1.922E+03	0.0003	5.654E+06	0.9995	2.186E+00	3.86E-07	5.656E+06
F52	3.689E+03	0.0003	1.471E+07	0.9993	2.848E+00	1.94E-07	1.471E+07

В таблицах 3.22 и 3.23 для классов торнадо от F00 – F30 включительно, значения радиальной части потока кинетической энергии с учетом двух коэффициентов при $z = 10$ м практически совпадают. Для классов F31 – ТЦ увеличение радиальной части потока кинетической энергии возрастает двукратно, окружная часть потока кинетической энергии остается практически неизменной. Доля кинетической энергии вертикальной части потока минимальна при $z = 10$ м.

Таблица 3.24 - Кинетическая энергия с учетом двух коэффициентов ряда при $z = 15$ м, $\psi = \pi/6$

Класс торнадо	W_U МДж	W_U/W	W_V МДж	W_V/W	W_W МДж	W_W/W	W МДж
F00	3.840E-01	0.5018	3.809E-01	0.4977	4.211E-04	5.50E-04	7.653E-01
F01	1.235E+00	0.2365	3.983E+00	0.7632	1.660E-03	3.18E-04	5.220E+00
F10	2.688E+00	0.1239	1.901E+01	0.8759	5.347E-03	2.46E-04	2.170E+01
F11	6.986E+00	0.0506	1.311E+02	0.9493	2.077E-02	1.50E-04	1.381E+02
F20	1.327E+01	0.0273	4.721E+02	0.9725	5.741E-02	1.18E-04	4.855E+02
F21	3.199E+01	0.0117	2.712E+03	0.9883	1.876E-01	6.83E-05	2.744E+03
F30	5.790E+01	0.0068	8.475E+03	0.9932	4.354E-01	5.10E-05	8.534E+03
F31	1.431E+02	0.0032	4.509E+04	0.9968	1.226E+00	2.71E-05	4.524E+04
F40	2.884E+02	0.0019	1.497E+05	0.9981	2.601E+00	1.73E-05	1.500E+05
F41	6.842E+02	0.0012	5.875E+05	0.9988	5.447E+00	9.26E-06	5.882E+05
F50	1.480E+03	0.0008	1.816E+06	0.9992	9.458E+00	5.20E-06	1.817E+06
ТЦ	3.360E+03	0.0007	5.122E+06	0.9993	6.021E+00	1.17E-06	5.125E+06
F51	4.561E+03	0.0005	8.481E+06	0.9995	1.659E+01	1.96E-06	8.486E+06
F52	9.381E+03	0.0004	2.207E+07	0.9996	2.162E+01	9.79E-07	2.208E+07

В таблицах 3.23 и 3.24 сравнивая третьи столбцы стоит отметить, что радиальная часть потока кинетической энергии для классов торнадо F10 – F31 для высоты $z = 15$ метров в 1,5 раза больше чем при расчете для $z = 10$ м, для F40 – F52 – постепенно возрастает до 2,5 раз. Радиальная часть потока кинети-

ческой энергии максимальна для минимального класса торнадо и минимальна для наибольших классов.

Основную долю кинетической энергии в придонной части составляет окружная часть потока. Сравнивая пятые столбцы таблиц 3.23 и 3.24: кинетическая энергия окружной части потока для $z = 15$ метров возрастает в 1,5 раза для каждого класса торнадо. Кинетическая энергия окружной части потока минимальна для наименьшего класса и составляет 99% для наибольших классов. Так как в придонной части максимальная доля энергии приходится на кинетическую энергию окружной части потока, то именно в ней сосредоточена разрушительная сила торнадо. Это следует из таблицы Фудзиты и это подтверждается полученными результатами для рассматриваемой модели Баутина в стационарном случае.

Доля, приходящаяся на вертикальной части потока – мала, но возрастает при увеличении высоты. Сравнивая седьмые столбцы таблиц 3.23 и 3.24: кинетическая энергия вертикальной части потока для высоты $z = 15$ метров возрастает в 7,5 раз для каждого класса торнадо. Вертикальная часть потока кинетической энергии с увеличением высоты увеличивается многократно.

3.6 Выводы по третьей главе

В данной работе проводится аналитическое решение для моделирования стационарного течения газа в придонной области вихря. На этой основе строится численное решение. В качестве экспериментальных данных берутся данные натуральных наблюдений. И моделируется аналог натурального эксперимента. Проводится построение газодинамических параметров для первых коэффициентов ряда, которые определяются при численном решении модели Баутина для радиальных течений. По полученным результатам подтверждается, что скоростные характеристики совпадают с природными значениями.

В третьей главе диссертационного исследования подробно описаны вычислительные эксперименты для известных классов торнадо для разных широт, на которых могут функционировать потоки. Строятся траектории движения частиц. Моделируются газодинамические параметры, которые входят в состав вторых коэффициентов ряда. Определяется шаг сетки для численных расчетов.

Проводится верификация вычислительных экспериментов, численные модели которых построены на основе математических моделей для вторых и третьих коэффициентов ряда. Определены погрешности для вычислительных экспериментов с учетом трех коэффициентов степенного ряда.

Проведены численные расчеты, определяющие кинетическую энергию восходящих закрученных потоков для разного числа слагаемых ряда с изменением высоты придонной части потока. Установлено, что для того, чтобы торнадо был разрушительным, необходимо, чтобы отношение кинетической энергии окружающей части потока к общей была половиной и больше.

При нахождении газодинамических параметров потока для стационарного придонного течения вихря установлено, что математическая модель Баутина для стационарного случая хорошо имитирует данные придонных стационарных течений для малых и средних классов торнадо на небольших высотах придонной части потока. Для старших классов торнадо для радиальной скорости газа возрастает погрешность относительно базовых вычислительных экспериментов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги выполненного исследования

В диссертационной работе были представлены аналитические и численные результаты по исследуемой модели Баутина в стационарном случае. Разработан математический метод моделирования газодинамических параметров потока. Разработана и реализована система компьютерного и имитационного моделирования при формировании потока от поверхности Земли, позволяющая моделировать стационарное придонное течение и рассчитывать кинетическую энергию торнадо. Проведено комплексное исследование построения газодинамических параметров придонной области восходящего закрученного потока для известных классов торнадо на основе математического и численного моделирования с применением вычислительного эксперимента. Во введении были представлены цель и задачи исследования. Подводя итоги следует отметить:

1. На основе математической модели Баутина для стационарного случая был разработан математический метод моделирования течения газа в придонной части потока, определяющий газодинамические параметры торнадо.

2. На основе математического моделирования газодинамических параметров восходящих закрученных потоков был разработан численный метод нахождения газодинамических параметров торнадо, повторяющих данные природных вихрей с дальнейшим определением кинетической энергии потока.

3. Разработанные алгоритмы численных методов были реализованы в виде системы компьютерного и имитационного моделирования с доступным интерфейсом пользователя.

4. В ходе исследования были проведены вычислительные эксперименты по известным данным натуральных наблюдений для основных классов торнадо из таблицы Фудзиты.

Таким образом, в диссертационном исследовании были решены все постав-

ленные задачи и достигнута цель работы. Результаты, которые были получены в ходе данного исследования представляют новизну для теории восходящих закрученных потоков. Диссертационное исследование соответствует следующим областям специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

- разработка новых математических методов и алгоритмов валидации математических моделей объектов на основе данных натурального эксперимента или на основе анализа математических моделей;

- разработка систем компьютерного и имитационного моделирования, алгоритмов и методов имитационного моделирования на основе анализа математических моделей (технические науки);

- комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Рекомендации

Результаты диссертационного исследования, а именно методика нахождения приближенных решений системы уравнений газовой динамики для стационарного течения при развитии и адаптации может быть применена при решении задач высокоскоростного обтекания объектов газовым потоком в осесимметричной постановке для получения первичных оценок параметров потока и нагрузок на объект обтекания.

Перспективы дальнейшей разработки

Продолжение аналитических и численных исследований различных частей восходящих закрученных потоков. Исследования нестационарных течений газа с учетом добавления влияния других физических процессов. Изучение вертикальной части торнадо, которая примыкает к внешнему окружающему потоку и вертикальной части в окрестности внутренней области пониженного давления.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ВЗП – восходящие закрученные потоки;

СУГД – система уравнений газовой динамики;

СОДУ – система обыкновенных дифференциальных уравнений;

ТЦ – тропический циклон;

Ω – вектор угловой скорости вращения Земли;

V – вектор скорости газа в декартовой системе координат;

U – вектор, в качестве компонент которого выступают функции: c, u, v, w .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Абдубакова, Л.В. Математическое моделирование течений газа в восходящих закрученных потоках в условиях действия сил тяжести и Кориолиса / Л.В. Абдубакова. – Диссертация. – Тюмень. 2014. – 125 с.
- [2] Алексеенко, С.В. Введение в теорию концентрированных вихрей / С.В. Алексеенко, П.А. Куйбин, В.Л. Окулов. – Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003. – 504 с.
- [3] Арсентьев, С.А. Теория мезомасштабной турбулентности. Вихри атмосферы и океаны. / С.А. Арсентьев, В.А. Бабкин, А.Ю. Губарь, В.Н. Николаевский. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2010. – 308 с.
- [4] Баранникова, Д.Д. Математическое численное моделирование температурных закрученных потоков воздуха в условиях действия сил тяжести и Кориолиса / Д.Д. Баранникова. – Диссертация. – Тюмень. 2017. – 144 с.
- [5] Баутин, С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа / С.П. Баутин. – Новосибирск: Наука, 1997. – 160 с.
- [6] Баутин, С.П. Математическая моделирование истечения идеального газа в вакуум / С.П. Баутин. – Новосибирск: Наука, 2005. – 390 с.
- [7] Баутин, С.П. Математическая моделирование сильного сжатия газа / С.П. Баутин. – Новосибирск: Наука, 2007. – 312 с.
- [8] Баутин, С.П. Торнадо и сила Кориолиса / С.П. Баутин. – Новосибирск: Наука, 2008. – 96 с.
- [9] Баутин, С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике / С.П. Баутин. – Новосибирск: Наука, 2009. – 368 с.

- [10] Баутин, С.П. Моделирование спиральных течений в придонной части восходящего закрученного потока / С.П. Баутин. – Екатеринбург: УрГУПС, 2011. – 80 с.
- [11] Баутин, С.П. Задача о плавном стоке в переменных r, t как характеристическая задача Коши стандартного вида / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. – 2011. – Т.1, № 9. – С. 4-13.
- [12] Баутин, С.П. Аналитическое и численное построение решений системы уравнений газовой динамики, имеющих спиральный характер / С.П. Баутин, А.В. Рощупкин // Вычислительные технологии. – 2011. – Т.16, № 1. – С. 16-24.
- [13] Баутин, С.П. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей / С.П. Баутин. – Новосибирск: Наука, 2012. – 152 с.
- [14] Баутин, С.П. Закрутка газа при плавном стоке в условиях действия сил тяжести и Кориолиса / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Теплофизика высоких температур. – 2012. – Т. 50, № 3. – С. 473-475.
- [15] Баутин, С.П. Математическое моделирование и численные расчеты течений в придонной части тропического циклона / С.П. Баутин, А.Г. Обухов // Вестник Тюменского государственного университета. – 2012. – № 4. – С. 175-172.
- [16] Баутин, С.П. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов, К. В. Баутин – Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2013. – 215 с.
- [17] Баутин, С.П. Моделирование трехмерного стационарного течения в придонной части тропического циклона / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика. – 2013. – № 7. – С. 124-132.
- [18] Баутин, С.П. Одно точное стационарное решение системы уравнений газовой динамики / С.П. Баутин, А.Г. Обухов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2013. – № 4. – С. 81-86.

- [19] Баутин, С.П. Об одном виде краевых условий при расчете трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа / С.П. Баутин, А.Г. Обухов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2013. – № 5. – С. 55-63.
- [20] Баутин, С.П. Учет влияния центробежной силы при численном моделировании восходящего закрученного потока газа / С.П. Баутин, А.Г. Обухов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2015. – № 4. – С. 92-97.
- [21] Баутин, С.П. Аналитическое, численное и экспериментальное моделирование потоков типа торнадо / С.П. Баутин // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». – 2015. – Т.4, № 5. – С. 397-400.
- [22] Баутин, С.П. Закрутка огненного вихря при учете сил тяжести и Кориолиса / С.П. Баутин // Теплофизика высоких температур. – 2015. – Т.53, № 6. – С. 961-964.
- [23] Баутин, С.П. Проблема предсказания и уничтожения смерча / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Технологии гражданской безопасности. – 2016. – Т.1, № 47. – С. 70-75.
- [24] Баутин, С.П. Восходящие закрученные потоки воздуха, примыкающие к "глазу тайфуна" / С.П. Баутин, С.Л. Дерябин // Вестник УрГУПС. – 2016. – Т.2, № 30. – С. 4-9.
- [25] Баутин, С.П. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси / С.П. Баутин, С.Л. Дерябин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов – Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2017. – 335 с.
- [26] Баутин, С.П. Газодинамическая теория восходящих закрученных потоков: монография / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов – Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2020. – 399 с.
- [27] Вараксин, А.Ю. О возможности воздействия на вихревые атмосферные образования / А.Ю. Вараксин, М.Э. Ромаш, В.Н. Копейцев // Теплофизика высоких температур. – 2010. – Т. 48, № 3. – С. 433-437.
- [28] Вараксин, А.Ю. Моделирование свободных тепловых вихрей: генерация, устойчивость, управление / А.Ю. Вараксин, М.Э. Ромаш, В.Н. Копейцев,

- М.А. Горбачев // Теплофизика высоких температур. – 2010. – Т. 48, № 6. – С. 965-972.
- [29] Вараксин, А.Ю. Торнадо / А.Ю. Вараксин. – М. : Физматлит, 2011. – 312 с.
- [30] Дейтел, Х. Как программировать на C++, 5-е издание. Пер. с англ. / Х. Дейтел, П. Дейтел – М: Бином, 2005. – 1037 с.
- [31] Казачинский, А.О. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике / А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова – Препринт. – Снежинск : Изд - во СФТИ НИЯУ МИФИ, 2016. – 60 с.
- [32] Крутова, И.Ю. Построение течений в придонной части восходящих закрученных потоков как решение одной характеристической задачи Коши / А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова // Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». – 2017. – Т. 6, № 6. – С. 496-502.
- [33] Крутова, И.Ю. Задача о движении газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости / И.Ю. Крутова // Вестник УрГУПС. – 2012. – Т. 1, № 13. – С. 14-21.
- [34] Крутова, И.Ю. Трехмерный стационарный поток газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости / И.Ю. Крутова // Вестник УрГУПС. – 2012. – Т. 3, № 15. – С. 16-24.
- [35] Крутова, И.Ю. Расчеты газодинамических параметров в придонной части торнадо / И.Ю. Крутова // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». – 2015. – Т. 4, № 6. – С. 523-527.
- [36] Крутова, И.Ю. Математическое обоснование влияния вращения Земли на торнадо и тропические циклоны // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». – 2017. – Т. 6, № 2. – С. 101-107.
- [37] Krutova, I.Y. Destructive atmospheric vortices and the Earth rotation around its axis / I.Y. Krutova // Proceedings of the XLV Summer School – Conference advanced problems in mechanics (A P M 2 0 1 7). – 2017. – С. 270-273.

- [38] Крутова, И.Ю. Расчеты газодинамических параметров в придонной части торнадо / И.Ю. Крутова // Вычислительные технологии. – 2017. – Т. 22, № 1. – С. 17-24.
- [39] Крутова, И.Ю. Аналитическое и численное моделирование течений газа в восходящих закрученных потоках / И.Ю. Крутова. – Диссертация. – Снежинск. 2018. – 233 с.
- [40] Львовский, С.М. Набор и верстка в системе LATEX / С.М. Львовский. – 3-е издание, исправленное и дополненное, 2003. – 448 с.
- [41] Наливкин, Д.В. Ураганы, бури и смерчи. Географические особенности и геологическая деятельность / Д.В. Наливкин. – Л. : Наука, 1969. – 487 с.
- [42] Наливкин, Д.В. Смерчи / Д.В. Наливкин. – М. : Наука, 1984. – 112 с.
- [43] Нездиуров, Д.Ф. Инспекция метеорологической сети / Д.Ф. Нездиуров. – Гидрометеорологическое Изд-во, 1955. – 315 с.
- [44] Никулин, В.В. Исследование взаимодействия торнадоподобного вихря с твердыми границами / В.В. Никулин // Прикладная механика и техническая физика. –1980. – № 1. – С. 68-75.
- [45] Никулин, В.В. Аналог уравнений мелкой воды для полых торнадоподобных вихрей. Высота стационарного торнадоподобного вихря / В.В. Никулин // Прикладная механика и техническая физика. – 1992. – № 2. – С. 45-51.
- [46] Никулин, В.В. Распад вертикального торнадоподобного вихря / В.В. Никулин // Прикладная механика и техническая физика. – 1992. – № 4. – С. 42-47.
- [47] Никулин, В.В. Движение завихренной жидкости в ядре вертикального торнадоподобного вихря / В.В. Никулин // Прикладная механика и техническая физика. –1995. – Т. 36 № 2. – С. 81-87.
- [48] Овсянников, Л.В. Лекции по основам газовой динамики / Л.В. Овсянников. – Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. – 336 с.
- [49] Павловская, Т.А. С/С++ Программирование на языке высокого уровня / Т.А. Павловская. – СПб: Питер, 2003. – 462 с.

- [50] Хаинт, А.П. Математическое моделирование тропических циклонов / А.П. Хаинт. – Л. : Гидрометеоиздат, 1984. – 248 с.
- [51] Шилдт, Г. Полный справочник по C++, 4-е издание. Пер. с англ. / Г. Шилдт. – М: Издательский дом "Вильямс" 2006. – 800 с.
- [52] Юсупалиев, У. Численное моделирование самоподдержания и усиления вихрей / У. Юсупалиев, Н.П. Савенкова, С.А. Шутеев, С.А. Складчиков // ВМУ. Серия 3. Физика. Астрономия. – 2013. – № 4. – С. 51-54.
- [53] Bluestein, H.B. Observations of the boundary layer near tornadoes and in supercells using a mobile, collocated, pulsed Doppler lidar and radar / H.B. Bluestein, J.D. Houser, M.M. French, J.C. Snyder, G.D. Emmit, I. PopStefanija, C. Baldi, R.T. Bluth // Journal of Atmospheric and Oceanic Technology. – 2014. – V.31. – P. 302-325.
- [54] Bluestein, H.B. A multi-scale overview of the El Reno, Oklahoma, tornadic supercell of 31 May 2013 / H.B. Bluestein, J.C. Snyder, J.B. Houser // Weather Forecasting. – 2015. – V.30. – P. 525-552.
- [55] Bluestein, H.B. Doppler-radar observations of anticyclonic tornadoes in cyclonically rotating, right-moving supercells / H.B. Bluestein, M.M. French, J.C. Snyder, J.B. Houser // Monthly Weather Review. – 2016. – V.144. – P. 1591-1616.
- [56] Bluestein, H.B. A comparison of the fine-scale structures of a prefrontal wind-shift line and a strong cold front in the Southern Plains of the U.S. / H.B. Bluestein, Z.B. Wienhoff, D.D. Turner, D.W. Reif, J.C. Snyder, K.J. Thiem, J.B. Houser // Monthly Weather Review. – 2017. – V.145. – P. 3307-3330.
- [57] Emanuel, K.A. On hurricane outflow structure / K.A. Emanuel // Journal of the Atmospheric Sciences. – 1994. – V.51, № 13. – P. 1995-2003.
- [58] Emanuel, K.A. The behavior of a simple hurricane model using a convective scheme based on subcloud-layer equilibrium / K.A. Emanuel // Journal of the Atmospheric Sciences. – 1995. – V.52, № 22. – P. 3960-3968.
- [59] Emanuel, K.A. A statical Analysis of Tropical Cyclone Intensity / K.A. Emanuel // Journal of the Atmospheric Sciences. – 2000. – V.128, № 22. – P. 1139-1152.

- [60] Fiedler, B.H. A theory for the maximum windspeeds in tornado-like vortices / B.H. Fiedler // Journal of the Atmospheric Sciences. – 1986. – V.43, № 21. – P. 2328-2340.
- [61] Houser, J.B. Polarimetric Doppler Radar Observations of Kelvin–Helmholtz Waves in a Winter Storm / J.B. Houser, H.B. Bluestein // Journal of the Atmospheric Sciences. – 2011. – V.68. – P. 1676-1700.
- [62] Houser, J.B. Rapid-Scan, Polarimetric, Doppler Radar Observations of Tornadogenesis and Tornado Dissipation in a Tornadic Supercell: The “El Reno, Oklahoma” Storm of 24 May 2011 / J.B. Houser, H.B. Bluestein, J.C. Snyder // Monthly Weather Review. – 2015. – V.143. – P. 2685-2710.
- [63] Houser, J.B. A fine-scale radar examination of the tornadic debris signature and weak reflectivity band associated with a large, violent tornado / J.B. Houser, H.B. Bluestein, J.C. Snyder // Monthly Weather Review. – 2016. – V.144. – P. 4104-4130.
- [64] Lewellen, W.S. Large-eddy simulation of a tornado’s interaction with the surface / W.S. Lewellen // Journal of the Atmospheric Sciences. – 1997. – V.54, № 5. – P. 581-605.
- [65] Lewellen, D.C. The influence of a local swirl ratio on tornado intensification near the surface / D.C. Lewellen, W.S. Lewellen // Journal of the Atmospheric Sciences. – 2000. – V.57. – P. 527-544.
- [66] Lewellen, W.S. Large-eddy simulation of a tornado’s interaction with the surface / W.S. Lewellen, D.C. Lewellen // Journal of the Atmospheric Sciences. – 2007. – V.64. – P. 2195-2209.
- [67] Lewellen, D.C. Near-surface intensification of tornado vortices / D.C. Lewellen, W.S. Lewellen // Journal of the Atmospheric Sciences. – 2007. – V.64. – P. 2176-2184.
- [68] Pazmany, Andrew L. A Mobile Rapid-Scanning X-band Polarimetric (RaXPoL) Doppler Radar System / Andrew L. Pazmany, B. Mead James, Howard B. Bluestein, Jeffrey C. Snyder, Jana B. Houser // Journal of Atmospheric and Oceanic Technology. – 2013. – V.30. – P. 1398-1413.

- [69] Rotunno, R. Numerical simulation of a laboratory vortex / R. Rotunno // Journal of the Atmospheric Sciences. – 1977. – V.34. – P. 1942-1956.
- [70] *Rotunno, R.* A study in tornado-like vortex dynamics / R. Rotunno // Journal of the Atmospheric Sciences. – 1978. – V.36. – P. 140-155.
- [71] Tanamachi, Robin L. Mobile, X-band, Polarimetric Doppler Radar Observations of the 4 May 2007 Greensburg, Kansas, Tornadic Supercell / Robin L. Tanamachi, Howard B. Bluestein, Jana B. Houser, Stephen J. Frasier, Kery M. Hardwick // Monthly Weather Review. – 2012. – V.140. – P. 2103-2125.
- [72] Tatom, F.B. The transfer of energy from tornado into the ground Seismological / F.B. Tatom, S.J. Witton // Research Letter. – 2001. – V.72, № 1. – P. 12-21.
- [73] Wakimoto, R.M. Photogrammetric Analysis of the 2013 El Reno Tornado Combined with Mobile X-Band Polarimetric Radar Data / R.M. Wakimoto, N.T. Atkins, K.M. Butler, H.B. Bluestein, K. Thiem, J. Snyder, J. Houser // Monthly Weather Review. – 2015. – V.145. – P. 2657-2683.
- [74] Wakimoto, R.M. Aerial Damage Survey of the 2013 El Reno Tornado Combined with Mobile Radar Data / R.M. Wakimoto, R.M. Wakimoto, N. T. Atkins, K. M. Butler, H.B. Bluestein, K. Thiem, J. C. Snyder, J. Houser, K. Kosiba, J. Wurman // Monthly Weather Review. – 2016. – V.144. – P. 1749-1776.
- [75] Xia, J. The influence of mach number on tornado corner flow dynamics / J. Xia, W.S. Lewellen, D.C. Lewellen // Journal of the Atmospheric Sciences. – 2003. – V.60. – P. 2820-2825.
- [76] Материалы портала "Научная Россия" Торнадо формируется у поверхности Земли. <https://scientificrussia.ru/articles/tornado-formiruetsya-u-poverhnosti-zemli> / [дата обращения: 10.04.2018].
- [77] Фото "Торнадо над морем" <https://yandex.ru/collections/card/5b2594611fe66dc5bcf8088a/> [дата обращения: 14.04.2018].

Основные публикации по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих российских рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК при Министерстве науки и высшего образования РФ

- [78] Крутова, И.Ю. Численное моделирование придонных частей торнадо в стационарном плоском случае / И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». – 2016. – Т. 5, №6. – С. 550 - 557.
- [79] Баутин, С.П. О геометрических, скоростных и энергетических характеристиках придонных частей торнадо и тропических циклонов / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Вестник Тюменского государственного университета, Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2018. – Т. 4, № 1. С. 55 - 67.
- [80] Крутова, И.Ю. Приближенный аналитический и численный расчет кинетической энергии специального потока / И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». – 2018. – Т. 7, – №4. - С. 298 - 303.

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных журналах и изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования

- [81] **Опрышко, О.В.** Расчёт параметров специальных трёхмерных стационарных потоков /**О.В. Опрышко**// Математические структуры и моделирование. – 2018. – №3(47). – С. 45 - 60. (MathSciNet, zbMATH)
- [82] **Opryshko, O.V.** Numerical simulation of near-bottom parts of a tornado and a tropical cyclone in a stationary case /**O.V. Opryshko**// Journal of computational and engineering mathematics. – 2023. – V.10, № 3. – P. 30 - 43. (MathSciNet, zbMATH)

Препринт

- [83] Крутова, И.Ю. Расчет кинетической энергии течений в придонной части торнадо и тропического циклона /И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Препринт. Снежинск, СФТИ НИЯУ МИФИ. – 2018. – 45 с.

Свидетельства о регистрации программ

- [84] Tornado, stationary case: Свидетельство № 2018613844 / **Опрышко О.В.** (RU), Крутова И.Ю. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ). – 2018611140; заявл. 07.02.2018; зарег. 23.03.2018, реестр программ для ЭВМ.
- [85] Tornado, calculation of zero coefficients of gas-dynamic parameters by the Runge-Kutta method: Свидетельство № 2018619944 / **Опрышко О.В.** (RU), Крутова И.Ю. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ). – 2018617589; заявл. 19.07.2018; зарег. 15.08.2018, реестр программ для ЭВМ.
- [86] Tornadoes, calculation of the first coefficients of gas-dynamic parameters by the Runge-Kutta method and the Euler method: Свидетельство № 2018660088 / **Опрышко О.В.** (RU), Крутова И.Ю. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ). – 2018617569; заявл. 19.07.2018; зарег. 16.08.2018, реестр программ для ЭВМ.
- [87] Tornado, kinetic energy: Свидетельство № 2018660087 / **Опрышко О.В.** (RU), Крутова И.Ю. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ). – 2018617563; заявл. 19.07.2018; зарег. 16.08.2018, реестр программ для ЭВМ.
- [88] Tornado, calculating the incoming radius: Свидетельство № 2018660024 / **Опрышко О.В.** (RU), Крутова И.Ю. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ). – 2018617587; заявл. 19.07.2018; зарег. 15.08.2018, реестр программ для ЭВМ.
- [89] Tornadoes, visualization: Свидетельство № 2018619601 / **Опрышко О.В.** (RU), Крутова И.Ю. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ). – 2018617555; заявл. 19.07.2018; зарег. 08.08.2018, реестор программ для ЭВМ.

Публикации

- [90] **Опрышко, О.В.** Моделирование придонных частей потоков типа торнадо в стационарном плоском случае / **О.В. Опрышко** // Академический

журнал Западной Сибири. -- 2017. – Т. 2. – С. 53 - 56.

- [91] Крутова, И.Ю. Численное моделирование придонных частей торнадо в стационарном плоском случае (Numerical simulation of the bottom part of tornadoes and tropical cyclones in a stationary plane case) / И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Журнал Пермского государственного национального исследовательского университета. – 2017. – Т. 2. – С. 31 - 33.

Публикации в трудах международных конференций

- [92] Баутин, С.П. Геометрические, скоростные и энергетические характеристики придонных частей торнадо и тропического циклона / С.П. Баутин, Р. Е. Волков, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов, **О.В. Опрышко** // Сборник материалов XIII Международной конференции "Забабахинские научные чтения". Снежинск, 20-24 марта, 2017. – С. 18-19.
- [93] **Опрышко, О.В.** Моделирование придонных частей восходящих закрученных потоков в стационарном плоском случае / **О.В. Опрышко** // Сборник материалов XIII Международной конференции "Забабахинские научные чтения". Снежинск, 20-24 марта, 2017. – С. 329.
- [94] Казачинский, А.О. Математическое моделирование придонных частей восходящих закрученных потоков / А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС 2017). Алушта, 24-31 мая, 2017. – С. 463-464.
- [95] Крутова, И.Ю. Аналитическое и численное моделирование течений в придонных частях торнадо и тропического циклона / И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Всероссийская конференция с международным участием, посвященная 60-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва». Новосибирск, 4-8 сентября 2017 г. – С. 148-149.
- [96] Казачинский, А.О. Математическое моделирование течений в придонных частях потоков типа торнадо и тропических циклонов / А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Всероссийской конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского.

- Москва, 21-23 ноября, 2017. – С. 233.
- [97] Krutova, I.Y. Calculations of three-dimensional stationary flows in lower parts of the tornado / I.Y. Krutova, A. O. Kazachinsky, **O. V. Opryshko** // XXX International Conference on Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter. Elbrus, march 1-6, 2018. – P. 250.
- [98] Казачинский, А.О. Аналитическое и численное моделирование течений в придонных частях восходящих закрученных потоков / А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // XIX Международная конференция по методам аэрофизических исследований (ICMAR). Новосибирск, 13 - 19 августа, 2018.
- [99] Крутова, И.Ю. Приближенный аналитический и численный расчет кинетической энергии восходящих закрученных потоков / И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Материалы V-ой Всероссийской конференции с международным участием «Пермские гидродинамические научные чтения». Пермь, 26-29 сентября 2018. – С. 165.
- [100] **Опрышко, О.В.** Numerical simulation of bottom parts of tornadoes in the stationary flat case (Численное моделирование придонных частей торнадо в стационарном плоском случае) / О.В. Опрышко // Discovery Science: University. Москва, 2018.
- [101] **Опрышко, О.В.** Расчёт газодинамических параметров трёхмерных стационарных потоков / **О.В. Опрышко** // Science, Society, Progress: III Международная научно-практическая конференция. Москва, 2018. – С. 10-18.
- [102] Крутова, И.Ю. Расчёт газодинамических параметров и кинетической энергии специальных трёхмерных стационарных потоков в придонной части торнадо и тропического циклона / И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Сборник материалов XIV Международной конференции "Забабахинские научные чтения". Снежинск, 11-15 марта, 2019.
- [103] **Опрышко, О.В.** Численное моделирование придонных частей торнадо и тропического циклона в стационарном случае / **О.В. Опрышко** // Сборник материалов XV Международной конференции "Забабахинские научные чтения". Снежинск, 27 сентября - 1 октября, 2021. – С. 206-207.
- [104] **Опрышко, О.В.** Численное моделирование придонных частей торнадо и тропического циклона в стационарном случае / А.А. Бугаенко, А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова, О.В. Опрышко // Сборник материалов XVI Меж-

дународной конференции "Забабахинские научные чтения". Снежинск, 29 мая - 2 июня, 2023. – С. 73.

Публикации в трудах всероссийских конференций

- [105] Казачинский, А.О. Моделирование трехмерных течений в придонных частях восходящих закрученных потоков типа торнадо / А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Всероссийская конференция "Нелинейные волны: теория и новые приложения посвященная 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН В. М. Тешукова. Новосибирск, 29 февраля – 2 марта, 2016. – С. 59-60.
- [106] Крутова, И.Ю. Численное моделирование придонных частей торнадо и тропического циклона в стационарном плоском случае/ И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // XVI Всероссийская научно-практическая конференции «ДНИ НАУКИ ОТИ НИЯУ МИФИ», посвященная 100-летию со дня рождения Б. В. Броховича. Озерск, 20-23 апреля, 2016.
- [107] Крутова, И.Ю. Моделирование придонных частей восходящих закрученных потоков в стационарном плоском случае / И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Сборник научных трудов всероссийской конференции "Научная сессия НИЯУ МИФИ". Снежинск, 12-13 декабря, 2016. – С. 84-85.
- [108] Баутин, С.П. Геометрические, скоростные и энергетические характеристики придонных частей торнадо и тропического циклона /С.П. Баутин, Р.Е. Волков, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов, **О.В. Опрышко** // Всероссийская научно-практическая конференция XX Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь, 13-16 февраля, 2017. – С. 39.
- [109] Крутова, И.Ю. Аналитическое и численное моделирование придонных частей восходящих закрученных потоков в стационарном плоском случае / И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Всероссийская научно-практическая конференция XX Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь, 13-16 февраля, 2017. – С. 183.
- [110] Крутова, И.Ю. Моделирование придонных частей восходящих закрученных потоков в стационарном плоском случае / И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Сборник материалов XI Всероссийской молодежной научно-инновационной школы. Саров, 2017. – С. 170-172.

- [111] Крутова, И.Ю. Аналитическое и численное моделирование придонных частей восходящих закрученных потоков в стационарном плоском случае / И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Материалы XVII Всероссийской научно-практической конференции «ДНИ НАУКИ ОТИ НИЯУ МИФИ». Озерск, 19-21 апреля, 2017. – С. 130.
- [112] **Опрышко, О.В.** Приближенное вычисление кинетической энергии специального потока в аналитическом виде / **О.В. Опрышко** // Всероссийская научно-практическая конференция «Математические методы решения исследовательских задач». Екатеринбург, 2 декабря, 2017.
- [113] Крутова, И.Ю. Приближенное вычисление кинетической энергии специального потока в аналитическом виде / И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Всероссийская конференция "Научная сессия НИЯУ МИФИ". Снежинск, 19-21 декабря, 2017. – С. 81.
- [114] **Опрышко, О.В.** Расчёт газодинамических параметров и кинетической энергии трехмерных стационарных потоков в придонной части торнадо / **О.В. Опрышко** // Всероссийская конференция "Научная сессия НИЯУ МИФИ". Снежинск, 19-21 декабря, 2018. – С. 87.
- [115] Крутова, И.Ю. Расчёт кинетической энергии восходящих закрученных потоков в придонной части торнадо в стационарном случае/И.Ю. Крутова, **О.В. Опрышко** // Всероссийская конференция "Научная сессия НИЯУ МИФИ". Снежинск, 18-20 декабря, 2019. – С. 89.
- [116] **Опрышко, О.В.** Численное моделирование придонных частей торнадо и тропического циклона в стационарном случае/**О.В. Опрышко** // Всероссийская конференция "Научная сессия НИЯУ МИФИ". Снежинск, 23-24 марта, 2022. – С. 146.
- [117] **Опрышко, О.В.** Численное моделирование придонных частей торнадо и тропического циклона в стационарном случае/**О.В. Опрышко** // Всероссийская конференция "Научная сессия НИЯУ МИФИ". Снежинск, 31 января - 3 февраля, 2023. – С. 12.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2018613844
«Tornado, stationary case»

Правообладатель: *федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ) (RU)*

Авторы: *Опрышко Ольга Владимировна (RU), Крутова Ирина Юрьевна (RU)*

Заявка № **2018611140**
Дата поступления **07 февраля 2018 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **23 марта 2018 г.**

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности
 **Г.П. Иlichev**



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2018619601
«Tornadoes, visualization»

Правообладатель: *федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ) (RU)*

Авторы: *Опрышко Ольга Владимировна (RU), Крутова Ирина Юрьевна (RU)*

Заявка № **2018617555**
Дата поступления **19 июля 2018 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **08 августа 2018 г.**

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности
 **Г.П. Иlichev**



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2018619944
«Tornado, calculation of zero coefficients of gas-dynamic parameters by the Runge-Kutta method»

Правообладатель: *федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ) (RU)*

Авторы: *Опрышко Ольга Владимировна (RU), Крутова Ирина Юрьевна (RU)*

Заявка № **2018617589**
Дата поступления **19 июля 2018 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **15 августа 2018 г.**

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности
 **Г.П. Иlichev**



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2018660024
«Tornado, calculating the incoming radius»

Правообладатель: *федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ) (RU)*

Авторы: *Опрышко Ольга Владимировна (RU), Крутова Ирина Юрьевна (RU)*

Заявка № **2018617587**
Дата поступления **19 июля 2018 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **15 августа 2018 г.**

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности
 **Г.П. Иlichev**



ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ А

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2018660088

«Tornadoes, calculation of the first coefficients of gas-dynamic parameters by the Runge-Kutta method and the Euler method»

Правообладатель: *федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ) (RU)*

Авторы: *Опрышко Ольга Владимировна (RU), Крутова Ирина Юрьевна (RU)*

Заявка № **2018617569**
Дата поступления **19 июля 2018 г.**
Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ **16 августа 2018 г.**



Г.П. Икшеев Г.П. Икшеев
Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2018660087

«Tornado, kinetic energy»

Правообладатель: *федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ) (RU)*

Автор: *Опрышко Ольга Владимировна (RU)*

Заявка № **2018617563**
Дата поступления **19 июля 2018 г.**
Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ **16 августа 2018 г.**



Г.П. Икшеев Г.П. Икшеев
Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности



РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

Федеральное государственное унитарное
предприятие «Российский Федеральный
Ядерный Центр – Всероссийский
научно-исследовательский институт
технической физики
имени академика Е.И. Забабахина»
(ФГУП «РФЯЦ – ВНИИТФ
им. академ. Е.И. Забабахина»)

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель директора

С.И. Вампилов



АКТ

24.02.2023 № РМД-11/349

г. Снежинск

об использовании результатов
диссертационной работы Опрышко О.В.
«Численное моделирование придонных
частей торнадо и тропического циклона в
стационарном случае» в производственной
деятельности ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им.
академика Е.И. Забабахина»

Научно-техническая комиссия в составе заместителя начальника отделения, д.ф.-м.н. Дремова В.В., помощника начальника отделения Уракова М.С., начальника отдела, к.ф.-м.н. Пронина Я.В. составила настоящий акт о том, что представленные в диссертации «Численное моделирование придонных частей торнадо и тропического циклона в стационарном случае» результаты исследования обладают научной новизной, а также практической значимостью в плане решения производственных задач, стоящих перед РФЯЦ-ВНИИТФ. В частности, интерес представляет методика нахождения приближенных решений системы уравнений газовой динамики для стационарного течения, что является следствием существования единственного локально-аналитического решения, представимого в виде бесконечного ряда по степеням z , сходящегося в окрестности плоскости, ограничивающей движение. После развития и адаптации методика может быть применена при решении задач высокоскоростного обтекания объектов газовым потоком в осесимметричной постановке для получения первичных оценок параметров потока и нагрузок на объект обтекания.

Председатель комиссии

Заместитель начальника отделения,

д.ф.-м.н.

В.В. Дремов

Члены комиссии:

Помощник начальника отделения

М.С. Ураков

Начальник отдела, к.ф.-м.н.

Я.В. Пронин