*На правах рукописи*

**Нигматулин Равиль Михайлович**

# УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО УРОВНЯ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ В ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ПИЕЛОУ С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

**05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ**

**АВТОРЕФЕРАТ**
**диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук**

**ЧЕЛЯБИНСК – 2008**

Работа выполнена на кафедре математического анализа ГОУ ВПО «Челябинский государственный педагогический университет».

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | доктор физико-математических наук, профессор Кипнис Михаил Маркович |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук, профессор Карачик Валерий Валентинович |
| | кандидат физико-математических наук, доцент Чудинов Кирилл Михайлович |
| Ведущая организация: | ГОУ ВПО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина» |

Защита состоится « 17 » декабря 2008 г. в 16.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук при ГОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» по адресу:

454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ГОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет».

Автореферат разослан « 15 » ноября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Л.Б. Соколинский

# Общая характеристика работы

**Цель работы.** Целью диссертационного исследования является изучение глобальной и локальной устойчивости стационарных уровней численности популяции обобщенной дискретной модели Пиелоу[1]

$$x_n = \frac{\alpha x_{n-m}}{1+\gamma x_{n-m}+\beta x_{n-k}}, \quad \alpha > 1,\ \beta, \gamma \geqslant 0, \tag{1}$$

с двумя запаздываниями $k, m \in \mathbb{N}$. Здесь $x_n$— численность популяции в $n$-й момент наблюдения, $\alpha$ — коэффициент автоприроста, $\beta, \gamma$ — коэффициенты, характеризующие жесткость обратной связи по численности популяции в предшествующие периоды.

В диссертации поставлены и решены три задачи. Первая — получить полное описание области локальной устойчивости ненулевого стационарного уровня численности популяции в модели (1). Эта задача сводится к исследованию устойчивости линейного уравнения вида

$$y_n = a y_{n-m} + b y_{n-k}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Для уравнения (2) мы намерены исследовать влияние теоретико-числовых характеристик запаздываний $k, m$ (совпадение четности, наличие общих множителей) на величину области устойчивости в пространстве параметров, а также указать возможности увеличения областей устойчивости посредством управления запаздываниями.

Вторая задача — изучить глобальную устойчивость модели (1). В рамках этой задачи мы намерены найти условия, при которых гарантируется глобальная устойчивость ненулевого стационарного уровня численности популяции в модели (1). Мы намерены также изучить влияние теоретико-числовых характеристик запаздываний $k, m$ на расширение и сужение области устойчивости в модели (1).

Третья задача — исследовать частные случаи уравнения (2), в которых проявляется эффект возникновения устойчивости, когда одно запаздывание является делителем другого, и потеря устойчивости в противном случае.

**Актуальность темы.** Исследование модели (1) с двумя запаздываниями актуально потому, что более простые модели менее достоверны, а более сложные в настоящее время не поддаются точному анализу.[2]

Модель (1) происходит от модели Пиелоу

$$x_n = \frac{\alpha x_{n-1}}{1+\beta x_{n-k}},$$

которая в свою очередь является наследницей модели Бевертона-Холта[3]

[1] *Pielou E.C.* An introduction to mathematical ecology. Wiley Interscience, N.Y. 1969.

[2] *Ризниченко Г.Ю.* Математические модели в биофизике и экологии. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003

[3] *Beverton R.J.H., Holt S.J.* On the dynamics of exploited fish populations // Fish Invest. Ministry of Agriculture. Fish. Food. London. 1957. Ser. 2. V. 19. P. 1–533.

$x_n = \dfrac{\alpha x_{n-1}}{1+\beta x_{n-1}}$. Впоследствии обобщение модели Пиелоу с несколькими запаздываниями

$$x_n = \frac{\alpha x_{n-1}}{1+\sum\limits_{i=1}^{s} \beta_i x_{n-k_i}},$$

где $\alpha > 1$, $\beta_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, исследовали V.L. Kocic и G. Ladas[4]. Они получили достаточные условия глобальной устойчивости ненулевого стационарного уровня численности популяции в виде ограничений на максимальное из запаздываний и коэффициенты. Позже для модели с неограниченной памятью

$$x_n = \frac{\alpha x_{n-1}}{1+x_{n-1}+\beta \sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j x_{n-j}},$$

где $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} c_j = 1$, P. Liu и X. Cui[5] дали достаточное условие глобальной устойчивости этой модели в виде ограничений на $\alpha$ и $\beta$.

Многочисленные публикации, посвященные изучению проблемы глобальной устойчивости в моделях динамики популяций, таких авторов как V.L. Kocic, G. Ladas, I. Györi, S.N. Elaydi, M.E. Fisher, P. Liu, X. Cui, J.S. Yu, Chen Ming-Po, S. Zhang и других, также подтверждают актуальность темы диссертации.

Обобщение уравнения Пиелоу с вовлечением в него двух запаздываний в нашей постановке ранее не встречалось. Исследуемая нами модель (1) по сложности находится между моделями Бевертона-Холта, Пиелоу с одной стороны, и моделями Косича-Ладаса, Лью-Сая, с другой. В работах указаных выше авторов и других работах не выявлено влияние взаимодействия запаздываний на устойчивость ненулевого стационарного уровня численности популяции, что также подтверждает актуальность темы диссертации.

В научных публикациях последних лет уравнению (2) уделялось больше внимания, чем уравнениям, схожим с (1). Приведем ниже наиболее важные результаты. Впервые уравнение (2) при $a = 1$, $m = 1$ исследовали в 1976 г. S.A. Levin и R. May[6], связав его с динамикой популяции китов. Они получили необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения. В 1994 г. их результат обобщил S. Kuruklis[7]. Он указал область устойчивости в пространстве параметров $(a, b)$ для уравнения (2) при $m = 1$. Некоторые варианты уравнения (2) рассматривались в работах

[4] *Kocic V.L., Ladas G.* Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications. Kluwer Academic Publishers. 1993.

[5] *Liu P., Cui X.* Hyperbolic logistic difference equation with infinitely many delays // Math. and Comp. in Simulation. 2000. No 52. P. 231–250.

[6] *Levin S.A., May R.* A note on difference-delay equations // Theor. Pop. Biol. 1976. V. 9. P. 178–187.

[7] *Kuruklis S.A.* The asymptotic stability of $x(n+1) - ax(n) + bx(n-k) = 0$ // J. Math. Anal. Appl. 1994. V. 188. P. 719–731.

В.Б. Колмановского[8] и А.М. Родионова[9] при изучении систем управления с последействием, а также как результат дискретизации линейных дифференциальных уравнений с запаздываниями. С помощью дискретных аналогов функций Ляпунова были получены достаточные условия устойчивости для частных случаев уравнения (2).

В 2001-2004 г.г. несколько авторов, в том числе автор диссертации и его научный руководитель, одновременно решают общую проблему устойчивости нулевого решения уравнения (2). В работах Ю.П. Николаева[10,11] на основе метода $D$-разбиений получены графически области асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (2) для различных запаздываний $k, m$, и без полного математического обоснования приведены формулы границ этих областей. Уравнение (2) при $k = m - 1$ исследовали F.M. Dannan и S.N. Elaydi[12]. Для этого случая они получили необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (2), прослеживая траектории корней характеристического уравнения. Аналогичным методом F.M. Dannan[13] получил решение проблемы асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения (2). Однако форма результатов сложна, громоздка и не позволяет получить графическое изображение областей асимптотической устойчивости, проводить их сравнение для различных запаздываний $k, m$.

Поэтому решаемая в диссертации проблема получения точных формул для границ области асимптотической устойчивости (с указанием точных интервалов изменения параметров на границе) нулевого решения уравнения (2), позволяющих проводить сравнение областей при различных запаздываниях $k, m$, является актуальной.

**Методы исследования.** Для исследования устойчивости нулевого решения линейного уравнения (2) использовался геометрический (частотный) критерий (известный в теории непрерывных систем как критерий Михайлова), основанный на известном результате теории функции комплексного переменного – принципе аргумента, а также привлекались идеи метода $D$-разбиения и теоретико-числовые факты.

Для исследования локальной устойчивости ненулевого стационарного

[8] *Колмановский В.Б.* Об устойчивости некоторых систем с последействием // АиТ. 1993. № 11. С. 45–59.

[9] *Родионов А.М.* Некоторые модификации теорем второго метода Ляпунова для дискретных уравнений // АиТ. 1992. № 9. С. 86–93.

[10] *Николаев Ю.П.* К исследованию геометрии множества устойчивых полиномов линейных дискретных систем // АиТ. 2002. № 7. С. 44–54.

[11] *Николаев Ю.П.* Анализ геометрии $D$-разбиения двумерной плоскости произвольных коэффициентов характеристического полинома дискретной системы // АиТ. 2004. № 12. С. 49–61.

[12] *Dannan F.M., Elaydi S.N.* Asymptotic stability of linear difference equations of advanced type // J. Comp. Anal. Appl. 2004. V. 6. No 2. P. 423–428.

[13] *Dannan F.M.* The asymptotic stability of $x(n+k) + ax(n) + bx(n-l) = 0$ // J. Difference Equ. Appl. 2004. V. 10. No 6. P. 589-599.

решения нелинейного уравнения (1) в работе используется классический метод линеаризации (исследование устойчивости по первому приближению), восходящий к работам О. Перрона и получивший развитие в 50-х годах в работах Ю.И. Неймарка, E.I. Jury и других.

Для исследования глобальной устойчивости стационарного решения уравнения (1) в диссертации используется «метод последовательного сжатия оценок для отклонения траекторий от стационарной». Этот метод применяли G. Seifert, K. Gopalsamy для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, P. Liu, X. Cui для дискретных аналогов некоторых интегро-дифференциальных уравнений.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые научные результаты.

1. Указаны точные границы области асимптотической устойчивости уравнения (2) на плоскости $(a, b)$. Границы описываются параметрическими уравнениями с указанием точных промежутков изменения параметра на границе. Этот результат полностью закрывает проблему локальной устойчивости ненулевого стационарного уровня численности популяции модели (1).
2. Проведено сравнение областей асимптотической устойчивости уравнения (2) по квадрантам плоскости $(a, b)$ при различных запаздываниях $k, m$. Такое сравнение стало возможным благодаря точным формулам для границ областей асимптотической устойчивости. Это было невозможно на основе результатов предшественников[11–13].
3. Выявлен эффект влияния делимости запаздываний $k, m$ на устойчивость нулевого решения уравнения (2) и его некоторых вариантов.
4. Получены достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости ненулевого стационарного уровня численности популяции модели (1), в некоторых случаях расширяющие известные границы областей устойчивости[4].
5. Для некоторых комбинаций четности и нечетности запаздываний $k, m$ получены необходимые и достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости ненулевого стационарного уровня численности популяции модели (1). Этот факт обнаруживает влияние взаимодействия запаздываний $k, m$ на устойчивость. Это влияние не обнаружено в работах V.L. Kocic, G. Ladas[4] и P. Liu, X. Cui[5].

**Теоретическая значимость.** Полученные результаты об асимптотической устойчивости уравнения (2) позволяют исследовать локальную устойчивость широкого класса нелинейных разностных уравнений с двумя запаздываниями, линеаризация которых дает уравнение вида (2). Результаты диссертации полностью закрывают проблему исследования устойчивости ненулевого стационарного уровня численности популяции в модели (1) относительно малых возмущений. Результаты о глобальной устойчивости ненулевого стационарного уровня численности популяции модели (1) значительно дополняют известные результаты, расширяя пространство параметров, гарантирующее устойчивость.

Кроме того, полученные в диссертации точные формулы для границ области асимптотической устойчивости с указанием точных промежутков изменения параметра на границе позволяют легко строить области асимптотической устойчивости уравнения (2) и проводить наглядное сравнение областей по квадрантам плоскости $(a, b)$, чего не удавалось сделать другим авторам.

**Практическая значимость.** Многие дискретные системы являются неточно определенными из-за трудности вычисления параметров или их нестабильности. Поэтому практически значимыми являются предпринятые в диссертации исследования пространства параметров линейных систем с двумя запаздываниями с точным вычислением границ их областей устойчивости. Благодаря этому расширяются возможности предвидения поведения популяции, прогнозирования развития экосистем, понимания влияния взаимодействия времени созревания особей популяции и длительности возобновления кормовых ресурсов на устойчивость популяции. Эти же результаты благодаря разработанной в диссертации программе «Delays & Stability» позволяют уточнить и упростить расчет устойчивости дискретных (импульсных) систем управления[8–11] и дискретных моделей динамики популяции с двумя запаздываниями.

**Апробация работы.** Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на 12-й межвузовской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2002), на 12-й всероссийской конференции молодых ученых «Математическое моделирование в естественных науках» (Пермь, 2003), на 10-й и 12-й международных конференциях «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 2003; Пущино, 2005), на международной конференции «Physics and Control» (Санкт-Петербург, 2003), на семинаре проф. Ю.Н. Смолина в Магнитогорском государственном университете (2005 г.), на семинаре проф. В.П. Тананы в Южно-Уральском государственном университете (2008 г.), на семинаре проф. М.М. Кипниса в Челябинском государственном педагогическом университете.

Результаты работы используются также в специальных курсах по разностным уравнениям и методам математической биологии в Челябинском государственном педагогическом университете и Южно-Уральском государственном университете.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах, из них 4 – в изданиях, включенных в перечень ВАК. В работах [1, 2, 5, 6, 10] М.М. Кипнису принадлежит постановка задачи и общее руководство, Р.М. Нигматулину принадлежат все полученные результаты.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Общий объем диссертации составляет 132 страницы печатного текста. Библиография содержит 123 наименования работ отечественных и зарубежных авторов.

# Краткое содержание диссертации

**Во введении** определяются задачи и формулируются цели исследования. Здесь же обосновывается актуальность темы диссертации, дается обзор литературы по исследуемой проблематике, указываются методы исследования, кратко излагаются основные результаты.

**Первая глава** посвящена исследованию асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (2).

В **§ 1.1** дана биологическая мотивация выбора исследуемой модели. Приводятся примеры конкретных видов популяций, развитие особей которых соответствует сделанным в этом параграфе допущениям.

В **§ 1.2** приводятся определения устойчивости, характеризуются методы исследования, цитируются необходимые теоремы.

В **§ 1.3** ставится задача исследования, цитируются теоремы об устойчивости, необходимые для дальнейшего изложения, вводится определение области асимптотической устойчивости уравнения (2).

**Определение 1** Область асимптотической устойчивости уравнения (2) — это множество $D(k,m)$ таких пар $(a,b)$, что нулевое решение уравнения (2) с данными коэффициентами $a,b$ и запаздываниями $k,m$ асимптотически устойчиво.

В **§ 1.4** сформулирована и доказана лемма, в которой определяются натуральные числа $j$, $s$, необходимые для полного решения задач первой главы

**Лемма 1** *Пусть натуральные числа $k,m$ взаимно просты и $k>m$. Тогда существует пара натуральных чисел $(j,s)$, такая что*

$$|mj-ks|=1, \quad j<k, \quad s \text{ нечетно.} \tag{3}$$

*Если $m$ нечетно, то такая пара единственна; если $m$ четно, то таких пар ровно две: в одной $j$ четно, в другой нечетно.*

Основной результат первой главы изложен в **§ 1.5**. Здесь сформулирована

**Теорема 1** *Пусть $k,m$ взаимно просты и $k>m$. Нулевое решение уравнения (2) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда пара $(a,b)$ есть внутренняя точка конечной области, ограниченной линиями*

I. $a+b=1$,

II. $a=\dfrac{\sin k\omega}{\sin(k-m)\omega}$, $b=-\dfrac{\sin m\omega}{\sin(k-m)\omega}$,

III. $(-1)^m a+(-1)^k b=1$,

IV. $a=(-1)^m\dfrac{\sin k\omega}{\sin(k-m)\omega}$, $b=-(-1)^k\dfrac{\sin m\omega}{\sin(k-m)\omega}$,

*где значения $\omega$ изменяются между $\frac{j\pi}{k}$ и $\frac{s\pi}{m}$; здесь $j,s$ натуральные числа, удовлетворяющие условию (3).*

Здесь же делаются замечания, приводятся примеры, дается иллюстрация областей асимптотической устойчивости для различных четностей запаздываний $k, m$ (см. рис. 1). Область асимптотической устойчивости обладает важным свойством симметрии. А именно, справедлива

**Лемма 2** *Пусть $k$, $m$ взаимно просты и $k > m$. Тогда если $(a, b) \in D(k, m)$ (см. определение 1), то $((-1)^m a, (-1)^k b) \in D(k, m)$.*

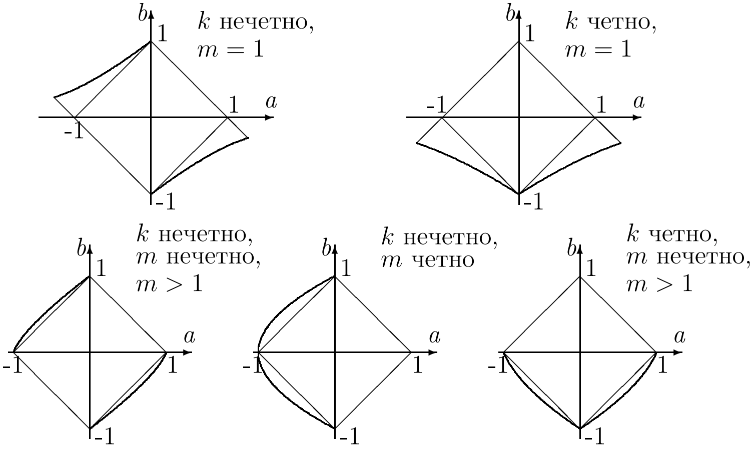


Рис. 1. Области асимптотической устойчивости уравнения (2); $k, m$ взаимно просты; $k > m$. Выделена общая для всех $k, m$ область устойчивости $|a| + |b| < 1$.

**§ 1.6** содержит леммы, необходимые для доказательства теоремы 1. В лемме 1.6.1 определяются условия неустойчивости нулевого решения уравнения (2), тем самым отсекаются лишние области на плоскости $(a, b)$. В лемме 1.6.2 фиксируются свойства нулей годографа на действительной оси комплексной плоскости: локализация в интервалах, движение по оси при изменении коэффициента $a$. В лемме 1.6.3 описано поведение годографа в точках его пересечения с действительной осью на комплексной плоскости, а именно, направление таких пересечений. Лемма 1.6.4 носит сугубо технический характер. В лемме 1.6.5 устанавливается связь между расположением нулей годографа уравнения (2) на действительной оси, их нумерацией и натуральными числами из лемм, изложенных в § 1.4.

В **§ 1.7** приводится доказательство основной теоремы (теорема 1) первой главы об асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (2).

В **§ 1.8** проводится сравнение областей асимптотической устойчивости для различных запаздываний $k, m$ по квадрантам плоскости $(a, b)$. Для этого введено на множестве пар натуральных чисел бинарное отношение $\succ$ — „больше“.

**Определение 2** Будем говорить, что $(k_1, m_1) \succ (k_2, m_2)$ в квадранте

$Q_{rt} = \{(a,b) : (-1)^r a \geqslant 0, (-1)^t b \geqslant 0\}$ $(r,t = 0,1)$, если $D(k_1,m_1) \cap Q_{rt} \supset D(k_2,m_2) \cap Q_{rt}$. Будем говорить, что $(k_1,m_1) \approx (k_2,m_2)$ в $Q_{rt}$, если $D(k_1,m_1) \cap Q_{rt} = D(k_2,m_2) \cap Q_{rt}$. Будем говорить, что пары $(k_1,m_1)$ и $(k_2,m_2)$ несравнимы в $Q_{rt}$, если в $Q_{rt}$ неверна дизъюнкция

$$(k_1,m_1) \succ (k_2,m_2) \textit{ или } (k_2,m_2) \succ (k_1,m_1) \textit{ или } (k_1,m_1) \approx (k_2,m_2). \qquad (4)$$

Результаты сравнения областей асимптотической устойчивости отражены в следующей теореме.

**Теорема 2** *Пусть $(k_1,m_1)$, $(k_2,m_2)$, $(k_3,m_3)$, $(k_4,m_4)$ — четыре пары взаимно простых натуральных чисел, пусть $k_r > m_r$ $(1 \leqslant r \leqslant 4)$.*
*1. Имеет место соотношение $(k_1,m_1) \approx (k_2,m_2)$ в $Q_{00}$.*
*2. Пусть $k_1$ и $k_2$ нечетны, $k_3$ и $k_4$ четны.*
*2.1. Если $k_1 < k_2$, $m_1 \leqslant m_2$ или $k_1 \leqslant k_2$, $m_1 < m_2$, то*
*$(k_1,m_1) \succ (k_2,m_2) \succ (k_3,m_3) \approx (k_4,m_4)$ в $Q_{10}$.*
*2.2. Если $k_1 > k_2$, $m_1 < m_2$, то $(k_1,m_1)$ и $(k_2,m_2)$ несравнимы в $Q_{10}$.*
*3. Пусть $k_1 + m_1$ и $k_2 + m_2$ нечетны, $k_3 + m_3$ и $k_4 + m_4$ четны.*
*3.1. Если $k_1 < k_2$, $m_1 \leqslant m_2$ или $k_1 \leqslant k_2$, $m_1 < m_2$, то*
*$(k_1,m_1) \succ (k_2,m_2) \succ (k_3,m_3) \approx (k_4,m_4)$ в $Q_{11}$.*
*3.2. Если $k_1 > k_2$, $m_1 < m_2$, то $(k_1,m_1)$ и $(k_2,m_2)$ несравнимы в $Q_{11}$.*
*4. Пусть $m_1$ и $m_2$ нечетны, $m_3$ и $m_4$ четны.*
*4.1. Если $k_1 < k_2$, $m_1 \leqslant m_2$ или $k_1 \leqslant k_2$, $m_1 < m_2$, то*
*$(k_1,m_1) \succ (k_2,m_2) \succ (k_3,m_3) \approx (k_4,m_4)$ в $Q_{01}$.*
*4.2. Если $k_1 > k_2$, $m_1 < m_2$, то $(k_1,m_1)$ и $(k_2,m_2)$ несравнимы в $Q_{01}$.*

Эта теорема дает возможность для любых пар запаздываний либо установить, какой член дизъюнкции (4) имеет место, либо констатировать несравнимость пар. Это продемонстрировано на следующем примере.

*П р и м е р. Положим, в уравнении (2) мы имеем возможность управлять запаздываниями, выбирая $82 \leqslant k \leqslant 89$, $63 \leqslant m \leqslant 69$. Для каждого квадранта укажем такие пары $(k,m)$, которые доставляли бы максимальные области асимптотической устойчивости. Для этого каждую пару $(k,m)$ из предписанного диапазона сократим на общие делители (см. таблицу 1). Теорема 2 дает следующие результаты. В $Q_{00}$ все области одинаковы; в $Q_{10}$ максимальная область устойчивости при $(k,m) = (85,68) \approx (5,4)$; в $Q_{11}$, так же, как в $Q_{01}$, при $(k,m) = (84,63) \approx (88,66) \approx (4,3)$.*

В **§ 1.9** приводятся примеры и даются комментарии к теореме 2. Даются рекомендации по увеличению области асимптотической устойчивости посредством управления запаздываниями.

В **§ 1.10** проводится сравнение результатов первой главы с ранее известными результатами. Указаны преимущества результатов диссертации перед конкурирующими работами.

В **§ 1.11** представлена программа «Delays&Stability», разработанная автором диссертации. Указаны функциональное назначение, область применения, используемые для разработки программы технические средства и рас-

Таблица 1.

| $(k,m)$ | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 82 | (82,63) | (41,32) | (82,65) | (41,33) | (82,67) | (41,34) | (82,69) |
| 83 | (83,63) | (83,64) | (83,65) | (83,66) | (83,67) | (83,68) | (83,69) |
| 84 | (4,3) | (21,16) | (84,65) | (14,11) | (84,67) | (21,17) | (28,23) |
| 85 | (85,63) | (85,64) | (17,13) | (85,66) | (85,67) | (5,4) | (85,69) |
| 86 | (86,63) | (43,32) | (86,65) | (43,33) | (86,67) | (43,34) | (86,69) |
| 87 | (29,21) | (87,64) | (87,65) | (29,22) | (87,67) | (87,68) | (29,23) |
| 88 | (88,63) | (11,8) | (88,65) | (4,3) | (88,67) | (22,17) | (88,69) |
| 89 | (89,63) | (89,64) | (89,65) | (89,66) | (89,67) | (89,68) | (89,69) |

сматриваются примеры применения. В одном из примеров по заданным коэффициентам уравнения (2) находится список всех пар взаимно простых запаздываний $k, m$, обеспечивающих асимптотическую устойчивость этого уравнения.

В другом примере по заданной паре запаздываний и приближенным значениям коэффициентов указываются возможные изменения коэффициентов, при которых сохраняется асимптотическая устойчивость уравнения (2).

Листинг основных файлов программы приводится в приложении к диссертации.

**Во второй главе** рассматривается модель (1) динамики популяций. Для удобства мы изучаем уравнение

$$x_n = \frac{\alpha x_{n-m}}{1 + x_{n-m} + \beta x_{n-k}}, \tag{5}$$

которое получается из (1) линейной заменой переменной $x_n$ и в отношении устойчивости ведет себя в точности так же, как уравнение (1). Здесь получены достаточные условия, а для некоторых комбинаций запаздываний $k, m$ необходимые и достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости ненулевого стационарного уровня численности популяции в этой модели.

В **§ 2.1** ставится задача и дается определение глобальной асимптотической устойчивости. Это понятие введено следующим образом.

Рассмотрим нелинейное разностное уравнение $s$-го порядка

$$x_n = F(x_{n-1}, \ldots, x_{n-s}), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

где $F$ непрерывная функция своих аргументов, $F : \mathbb{R}_+^s \to \mathbb{R}_+$. Каждое решение $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ уравнения (6) однозначно определяется начальными условиями

$$x_i = \alpha_i, \quad \alpha_i > 0, \quad -s \leqslant i \leqslant -1, \tag{7}$$

где $\alpha_i$ – заданные константы (положительность требуется для содержательной интерпретации). Пусть $x_n \equiv \bar{x}$ стационарное решение уравнения (6).

**Определение 3** Стационарная траектория $x_n \equiv \bar{x}$ уравнения (6) называется глобально асимптотически устойчивой, если она локально асимптотически устойчива и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ для любых начальных условий (7).

В **§ 2.2** излагаются основные результаты второй главы, сформулированные в следующих теоремах.

**Теорема 3** *Если* $\alpha > 1$, $\beta \geqslant 0$, *то для любых запаздываний* $k, m \in \mathbb{N}$ *условие* $\beta < 1$ *достаточно для глобальной асимптотической устойчивости нетривиального стационарного решения уравнения* (5).

При некоторых запаздываниях $k, m$ указанное в теореме 3 условие глобальной асимптотической устойчивости является неулучшаемым. Этот результат сформулирован в следующей теореме.

**Теорема 4** *Если* $\alpha > 1$, $\beta \geqslant 0$, *запаздывания* $k$ *и* $m$ *взаимно просты,* $k$ *нечетно,* $m$ *четно, то условие* $\beta < 1$ *является необходимым и достаточным для глобальной асимптотической устойчивости нетривиального стационарного решения уравнения* (5).

**Замечание 1** Если порядок уравнения (1) большой, а запаздывания не взаимно просты $k = dk_1$, $m = dm_1$ $(d > 1)$, то можно понизить порядок уравнения, сократив запаздывания на наибольший общий делитель $d$, и перейти к исследованию уравнения меньшего порядка.

В **§ 2.3** доказываются леммы к теоремам 3, 4, отражающие важное свойство перманентности (ограниченности сверху и отделимости от нуля) всех траекторий модели (5).

В **§ 2.4** приводятся доказательства теорем 3, 4.

В **§ 2.5** проводится сравнение теорем 3, 4 с ранее известными результатами. Здесь же с привлечением результатов первой главы сравниваются области локальной и глобальной асимптотической устойчивости уравнения (5). В конце параграфа указаны некоторые открытые вопросы, и приводятся рекомендации по управлению западываниями для увеличения области устойчивости в плоскости параметров.

На рисунке 2 проиллюстрированы для сравнения результаты теорем 3, 4 второй главы диссертации, теоремы 1 первой главы диссертации и результаты, которые получили V.L. Kocic и G. Ladas (области глобальной устойчивости $G_1$ и $G_2$).

**В третьей главе** исследуется асимптотическая устойчивость ненулевого стационарного решения двух вариантов дискретного логистического уравнения с двумя запаздываниями.

В **§ 3.1** ставится задача. Интересным объектом исследования в нелинейной динамике[14] является дискретное логистическое уравнение

$$x_n = (a - bx_{n-1})x_{n-1}. \tag{8}$$

Запаздывания в (8) введены двумя различными способами. Получены сле-

[14] *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир. 1990.

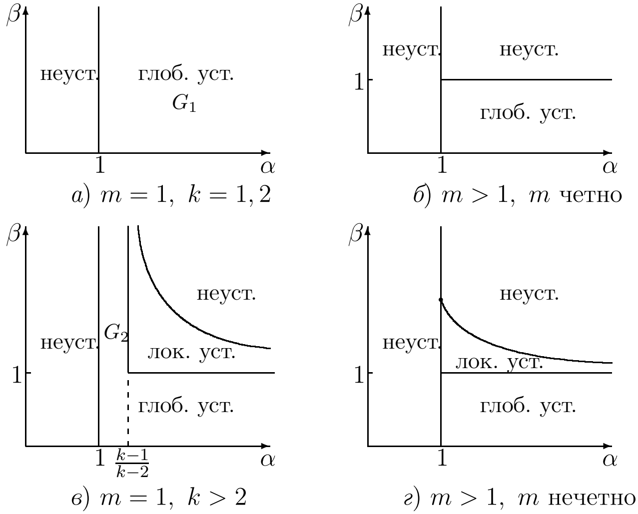


Рис. 2. Области устойчивости уравнения (1) с взаимно простыми запаздываниями $k, m$. Области глобальной устойчивости $G_1 = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha > 1, \beta > 0\}$ и $G_2 = \left\{(\alpha,\beta) \,\middle|\, 1 < \alpha \leqslant \frac{k-1}{k-2}, \beta > 0\right\}$ получили V.L. Kocic и G. Ladas.

дующие уравнения:

$$x_n = ax_{n-m} - bx_{n-k}x_{n-m}, \tag{9}$$

$$x_n = ax_{n-m} - bx_{n-k}^2. \tag{10}$$

Результатом линеаризации уравнений (9), (10) вокруг их стационарного решения $x_n = y_n + \dfrac{a-1}{b}$ являются линейные уравнения вида (2). Это соответственно уравнения

$$y_n = y_{n-m} - (a-1)y_{n-k}, \tag{11}$$

$$y_n = ay_{n-m} - 2(a-1)y_{n-k}. \tag{12}$$

В этой главе представлено независимое от первой главы диссертации решение задачи об асимптотической устойчивости нулевого решения уравнений (11), (12). Примененный нами метод исследования позволяет обнаружить качественный эффект: влияние делимости запаздываний $k, m$ в уравнениях (11), (12) на устойчивость. Кроме того, полученные результаты удалось представить в общей для уравнений (11), (12) форме.

Результаты об асимптотической устойчивости нулевого решения уравнений (11), (12) позволили получить необходимые и достаточные условия локальной асимптотической устойчивости нетривиального стационарного решения нелинейных уравнений (9), (10).

В **§ 3.2** доказываются теоремы об асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (11) и о локальной асимптотической устойчивости нетривиального стационарного решения нелинейного уравнения (9). Ввиду очевидной связи между этими теоремами, приведем текст только одной.

**Теорема 5** *1) Если $a < 1$, то нулевое решение уравнения* (11) *неустойчиво.*
*2) Если $k$ делится на $m$, то при выполнении неравенства*

$$1 < a < 1 + 2\sin\frac{\pi}{2(2\frac{k}{m} - 1)} \tag{13}$$

*нулевое решение уравнения* (11) *асимптотически устойчиво; при*

$$a > 1 + 2\sin\frac{\pi}{2(2\frac{k}{m} - 1)} \tag{14}$$

*оно неустойчиво.*
*3) Если $k$ не делится на $m$, то нулевое решение уравнения* (11) *неустойчиво при любых $a \neq 1$.*

В **§ 3.3** рассматриваются уравнения (10) и (12). Для этих уравнений здесь решены аналогичные с § 3.2 задачи.

**Теорема 6** *1) Если $|a - 2| > 1$, то нулевое решение уравнения* (12) *неустойчиво.*
*2) Если $1 < a < 3$ и $k$ делится на $m$, то при выполнении неравенства*

$$\frac{k}{m} < \frac{\arccos\frac{5-3a}{4}}{\arccos\frac{-3a^2+8a-3}{2a}} \tag{15}$$

*нулевое решение уравнения* (12) *асимптотически устойчиво; при*

$$\frac{k}{m} > \frac{\arccos\frac{5-3a}{4}}{\arccos\frac{-3a^2+8a-3}{2a}} \tag{16}$$

*оно неустойчиво.*
*3) Если $k$ не делится на $m$, то нулевое решение уравнения* (12) *неустойчиво при любых $a \neq 1$.*

Далее переформулирован текст теоремы 5, для сближения его с текстом теоремы 6.

**Теорема 7** *1)Если $|a - 2| > 1$, то нулевое решение уравнения* (11) *неустойчиво.*
*2) Если $1 < a < 3$ и $k$ делится на $m$, то при выполнении неравенства*

$$\frac{k}{m} < \frac{\arccos\frac{-(a-1)}{2}}{\arccos\frac{2-(a-1)^2}{2}} \tag{17}$$

*нулевое решение уравнения* (11) *асимптотически устойчиво; при*

$$\frac{k}{m} > \frac{\arccos\frac{-(a-1)}{2}}{\arccos\frac{2-(a-1)^2}{2}} \tag{18}$$

*оно неустойчиво.*
*3) Если $k$ не делится на $m$, то нулевое решение уравнения* (11) *неустойчиво при любых $a \neq 1$.*

В **§ 3.4** проведено сравнение интервалов устойчивости для уравнений (11), (12) и уравнения

$$y_n = y_{n-m} - \frac{a-1}{a} y_{n-k}, \tag{19}$$

которое происходит от модели Пиелоу с двумя запаздываниями

$$x_n = \frac{a x_{n-m}}{1 + b x_{n-k}}. \tag{20}$$

В таблице 2 указаны области асимптотической устойчивости нулевого решения уравнений (11), (12), (19) при $\frac{k}{m} \in \mathbb{N}$. Эти области суть интервалы $(1,\, a^*)$ тех значений параметра $a$, при которых нулевое решение соответствующего уравнения асимптотически устойчиво.

Таблица 2.

| $\frac{k}{m} \in \mathbb{N}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a^*$ для (11) | 3 | 2 | 1.6180 | 1.4450 | 1.3473 | 1.2846 | 1.2410 |
| $a^*$ для (12) | 3 | 1.5 | 1.2743 | 1.1888 | 1.1439 | 1.1163 | 1.0975 |
| $a^*$ для (19) | $\infty$ | $\infty$ | 2.6180 | 1.8019 | 1.5321 | 1.3979 | 1.3176 |

При одинаковых целых $\frac{k}{m}$ наибольшие интервалы устойчивости у уравнения (19), наименьшие — у уравнения (12). Таблица дает и области локальной асимптотической устойчивости нетривиального стационарного решения нелинейных уравнений (9), (10) и (20), из которых получаются линеаризацией уравнения (11), (12) и (19) соответственно.

## Основные результаты диссертационной работы

На защиту выносятся следующие новые научные результаты.

1. Получено полное решение проблемы локальной устойчивости ненулевого стационарного уровня численности популяции в дискретной модели Пиелоу с двумя запаздываниями.
2. На основе результатов диссертации предложен алгоритм для сравнения областей локальной устойчивости модели Пиелоу при различных парах запаздываний.

3. Установлено влияние числовых характеристик запаздываний (делимость одного из запаздываний на другое, наличие общих делителей) на устойчивость вышеуказанной модели.
4. Для дискретной модели Пиелоу получены достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости ненулевого стационарного уровня численности популяции.
5. Доказано, что условия устойчивости, указанные в предыдущем пункте, являются и необходимыми для некотрых комбинаций запаздываний.

## Публикации по теме диссертации

*Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, определенных ВАК*

1. Кипнис, М.М. Устойчивость некоторых разностных уравнений с двумя запаздываниями / М.М. Кипнис, Р.М. Нигматулин // Автоматика и телемеханика.– 2003.– № 5.– С. 122–130.
2. Кипнис, М.М. Устойчивость трехчленных линейных разностных уравнений с двумя запаздываниями / М.М. Кипнис, Р.М. Нигматулин // Автоматика и телемеханика.– 2004.– № 11.– С. 25–39.
3. Нигматулин, Р.М. Глобальная устойчивость дискретной модели динамики популяции с двумя запаздываниями / Р.М. Нигматулин // Автоматика и телемеханика.– 2005.– № 12.– С. 105–113.
4. Нигматулин, Р.М. Устойчивость стационарного уровня численности популяции в дискретной модели Пиелоу с двумя запаздываниями / Р.М. Нигматулин // Системы управления и информационные технологии. – 2008.– № 2.3(32).– С. 369–372.

*Другие публикации*

5. Кипнис, М.М. Дискретные модели динамики популяций с запаздываниями / М.М. Кипнис, Р.М. Нигматулин // Математическое моделирование и краевые задачи : Труды двенадцатой межвуз. конф. Часть 2, Самара, 2002.– Самара : СамГТУ, 2002.– С. 53–55.
6. Кипнис, М.М. Устойчивость дискретных моделей динамики популяции с двумя запаздываниями / М.М. Кипнис, Р.М. Нигматулин // Математика. Компьютер. Образование : Тезисы докладов X международной конференции, Пущино, 2003.– Ижевск : НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2003.– С. 271.
7. Нигматулин, Р.М. Глобальная устойчивость разностного уравнения динамики популяции с двумя запаздываниями / Р.М. Нигматулин // Математика. Компьютер. Образование : Тезисы докладов XII междуна-

родной конференции, Пущино, 2005.– Ижевск : НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2005.– С. 139.

8. Нигматулин, Р.М. Устойчивость обобщенной модели Пьелу динамики популяции с запаздываниями / Р.М. Нигматулин // Математическое моделирование в естественных науках : Тезисы докладов XII Всероссийской конференции молодых ученых, Пермь, 2003.– Пермь : ПермГТУ, 2003.– С. 62.
9. Программа нахождения всех пар запаздываний, обеспечивающих устойчивость линейного разностного уравнения с двумя запаздываниями «Delays & Stability»: свидетельство об отраслевой регистрации разработки № 11551 / Р.М. Нигматулин. – № ГР 50200802036; 10.10.08. – М.: ВНТИЦ, 2008.
10. Nigmatulin, R. Stability of the discrete population model with two delays / R. Nigmatulin, M. Kipnis // Proc. Int. Conf. Physics and Control, St. Petersburg : IEEE, 2003, P. 314–316.

Нигматулин Равиль Михайлович

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО УРОВНЯ
ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ В ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ПИЕЛОУ
С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 10 ноября 2008 г.
Формат 60×84 1/16. Объем 1,0 уч.-изд. л.
Тираж 100 экз. Заказ
Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе в типографии ЧГПУ
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69.