

ФБГОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет»
(Национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

Манакова Наталья Александровна

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ПОЛУЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ
ГИДРОДИНАМИКИ И УПРУГОСТИ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор Г.А. Свиридов

Челябинск – 2015

Содержание

Обозначения и соглашения	5
Введение	6
Глава 1. Полулинейные математические модели	
процессов фильтрации и деформации	
1.1. Элементы нелинейного функционального анализа в исследовании и построении математических моделей	41
1.2. Функциональные пространства и дифференциальные операторы в математических моделях	45
1.3. Морфология фазового пространства абстрактного уравнения с монотонным оператором	50
1.4. Математическая модель Осколкова нелинейной фильтрации . .	56
1.5. Математическая модель динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости	58
1.6. Обобщенная математическая модель Хоффа	61
1.7. Обобщенная математическая модель деформации конструкции из двутавровых балок	64
1.8. Математическая модель распределения потенциала электрического поля в полупроводнике	69
1.9. Обобщенная математическая фильтрационная модель Буссинеска	72
Глава 2. Задача оптимального управления для абстрактных	
полулинейных моделей соболевского типа	
2.1. Задача Коши с монотонным оператором	76
2.2. Задача Шоултера – Сидорова с монотонным оператором . . .	87
2.3. Оптимальное управление для задачи Шоултера – Сидорова с монотонным оператором	94

2.4. Оптимальное управление для задачи Коши с монотонным оператором	100
2.5. Задача Шоуолтера – Сидорова с билинейным оператором	104
2.6. Задача оптимального управления для математической модели с билинейным оператором	109

Глава 3. Задачи оптимального управления для математических моделей процессов фильтрации и деформации

3.1. Задача оптимального управления для модели Осколкова нелинейной фильтрации	112
3.2. Задача оптимального управления для модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости	117
3.3. Задача оптимального управления для обобщенной математической модели Хоффа	120
3.4. Задача оптимального управления для математической модели деформации конструкции из двутавровых балок	127
3.5. Задача оптимального управления для математической модели распределения потенциала электрического поля в полупроводнике	132
3.6. Задача оптимального управления для математической фильтрационной модели Буссинеска	138

Глава 4. Алгоритмы численных методов исследования задачи оптимального управления и описание программ

4.1. Метод декомпозиции в задаче оптимального управления	144
4.2. Метод штрафа в задаче оптимального управления	149
4.3. Алгоритм нахождения численного решения задачи Коши и задачи Шоуолтера – Сидорова для абстрактной модели	152
4.4. Алгоритм численного метода нахождения оптимального управления на основе метода декомпозиции	155

4.5. Алгоритм численного метода нахождения оптимального управления на основе метода покоординатного спуска	162
4.6. Описание программы численного решения задач Коши и Шоултера – Сидорова для полулинейных моделей соболевского типа	167
4.7. Описание программы численного решения задачи оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа	172
4.8. Описание программы численного решения задачи оптимального управления на основе метода покоординатного спуска	178
Глава 5. Численное исследование математических моделей и задач оптимального управления для процессов фильтрации и деформации	
5.1. Численное решение задач Шоултера – Сидорова и Коши для математических моделей упругости	183
5.2. Численное решение задачи оптимального управления для математических моделей упругости	190
5.3. Численное решение задач Шоултера – Сидорова и Коши для математических моделей фильтрации	199
5.4. Численное решение задачи оптимального управления для математических моделей фильтрации	210
5.5. Численное исследование задач оптимального управления на основе метода многошагового покоординатного спуска	217
Заключение	221
Список литературы	225
Приложения	252

Обозначения и соглашения

1. Множества будем обозначать заглавными буквами готического алфавита. Исключение составляют множества:

\mathbb{N} — множество натуральных чисел;

\mathbb{R} — множество действительных чисел;

\mathbb{C} — множество комплексных чисел;

$L_p(\Omega)$ — пространства Лебега;

$W_p^l(\Omega)$ — пространства Соболева и т.д.

2. Множества отображений множеств (множества операторов) будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита:

$\mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ — множество линейных непрерывных операторов, определенных на пространстве \mathfrak{X} и действующих в пространство \mathfrak{Y} ;

$C^k(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y}), k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ — множество операторов, имеющих непрерывные производные Фреше любого порядка, определенных на \mathfrak{X} и действующих в \mathfrak{Y} . Вместо $\mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{X})$ и $C^\infty(\mathfrak{X}; \mathfrak{X})$ будем писать соответственно $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ и $C^\infty(\mathfrak{X})$.

Элементы множеств операторов мы будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита. Элементы множеств обозначаются строчными буквами латинского или греческого алфавитов.

Символами \mathbb{I} и \mathbb{O} мы будем обозначать соответственно «единичный» и «нулевой» операторы, области определения которых ясны из контекста. Обозначим через:

$\text{dom } L$ — область определения оператора L ;

$\text{im } L$ — образ оператора L ;

$\text{coim } L$ — кообраз оператора L ;

$\ker L$ — ядро оператора L .

3. Все рассуждения проводятся в вещественных банаховых пространствах.

4. Символ \square лежит в конце доказательства.

Введение

Актуальность исследования. Постановка задачи. В связи с высоким темпом развития производства и техники возникает все большая потребность в построении и исследовании адекватных математических моделей, описывающих процессы упругости, гидродинамики, электрического поля. Проведение натурных экспериментов дорого, поэтому возможность изучения различных процессов при помощи математического моделирования имеет большую практическую значимость. Большой класс математических моделей основан на полулинейных неклассических уравнениях и системах уравнений в частных производных, не разрешенных относительно производной по времени. Основными трудностями исследования таких моделей являются их нелинейная структура и вырожденность. Лишь нахождение достаточных условий существования решений начально-краевых задач для исследования математических моделей на сегодняшний день не является достаточным; данные условия чаще всего не носят конструктивного характера и не позволяют находить решения поставленных задач. Поэтому разработка и реализация численных методов нахождения приближенных решений математических моделей в виде комплекса программ остаются актуальными и востребованными.

Как правило, процессы, протекающие в механике, технике и производстве, управляемы [48, 59]. Особую роль играет исследование внешнего воздействия на изучаемые процессы, при помощи которого мы можем добиться желаемого результата. Поэтому возникают задачи нахождения наилучшего в том или ином смысле воздействия – оптимального управления. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(x, u) \rightarrow \min, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}, \quad (0.0.1)$$

где пары (x, u) удовлетворяют

$$L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u, \quad x(0) = x_0 \quad (0.0.2)$$

или

$$L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u, \quad L(x(0) - x_0) = 0. \quad (0.0.3)$$

Здесь $J(x, u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал стоимости; управление $u \in \mathfrak{U}_{ad}$, где \mathfrak{U}_{ad} – некоторое непустое, замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений \mathfrak{U} . Изучение задач оптимального управления носит несомненно как теоретический, так и практический характер. Основными этапами исследования задач оптимального управления являются нахождение условий существования решения задачи оптимального управления, необходимых условий существования оптимального управления и самого решения – пары состояния системы и управления.

Диссертационная работа посвящена исследованию оптимального управления для математических моделей, основанных на уравнениях, не разрешенных относительно производной по времени [20, 97, 109]

$$L \dot{x} = M(x) + f, \quad \ker L \neq \{0\}. \quad (0.0.4)$$

Такие уравнения называют «уравнениями не типа Коши – Ковалевской» [54, 67, 118], «псевдопараболическими уравнениями» [129, 160], «вырожденными уравнениями» [110, 136, 137, 161]. С работ Р.Е. Шоултера возникла традиция, поддерживаемая работами как отечественных [46, 64, 73, 133, 164, 166], так и зарубежных исследователей [150, 162], называть уравнения вида (0.0.4) уравнениями соболевского типа. Мы используем именно этот термин, считая все остальные синонимами. К настоящему времени уравнения соболевского типа составляют обширную область в неклассических уравнениях математической физики [15]. Математические модели, основанные на уравнениях или системах уравнений соболевского типа, будем называть моделями соболевского типа.

В диссертационной работе исследуется оптимальное управление для математических моделей, которые можно отнести к классу s -монотонных и p -коэрцитивных полулинейных моделей соболевского типа: математическая

модель динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости, математическая модель Осколкова нелинейной фильтрации, обобщенная математическая модель Хоффа, обобщенная математическая модель деформации конструкции из двутавровых балок, математическая модель распределения потенциала электрического поля в полупроводнике, обобщенная математическая фильтрационная модель Буссинеска. Рассмотрим каждую отдельно.

1. Математическая модель Осколкова нелинейной фильтрации.

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \quad (0.0.5)$$

для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации

$$(\lambda - \Delta)x_t - \alpha\Delta x + |x|^{p-2}x = u. \quad (0.0.6)$$

Искомая функция $x = x(s, t)$ соответствует давлению фильтрующейся жидкости; параметры $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$ характеризуют вязкие и упругие свойства жидкости соответственно; свободный член $u = u(s, t)$ отвечает внешнему воздействию. Условие Дирихле (0.0.5) и уравнение (0.0.6) образуют модель Осколкова нелинейной фильтрации, которая описывает процесс фильтрации вязкоупругой несжимаемой жидкости (например, нефти). Физический смысл задачи оптимального управления заключается в том, чтобы под действием внешнего управляющего воздействия (истоки и стоки жидкости соответственно) с наименьшими затратами было достигнуто требуемое давление жидкости в пласте (модель регулирования давления фильтрующейся жидкости).

Различные начально-краевые задачи для уравнения (0.0.6) в разных аспектах были исследованы А.П. Осколковым и его учениками [63] в случае положительности параметра λ . Однако экспериментально [3] было показано, что параметр λ может принимать отрицательные значения. В работе [170] показано, что фазовым пространством уравнения (0.0.6) при $\alpha \neq 0, p \geq 2$ служит простое гладкое банахово многообразие.

2. Математическая модель динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим систему уравнений движения жидкости Кельвина – Фойгта, которую принято называть системой уравнений Осколкова

$$(1 - \varkappa \nabla^2) x_t = \nu \nabla^2 x - (x \cdot \nabla) x - \mathbf{p} + u, \quad \nabla(\nabla \cdot x) = 0, \quad (0.0.7)$$

где $\mathbf{p} = \nabla p$ – градиент давления; вектор-функция $x = x(s, t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор скорости жидкости; $u = u(s, t) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор объемных внешних сил, характеризующий внешнее воздействие; коэффициент системы $\varkappa^{-1} \geq \lambda_1$ – время ретардации, характеризующий упругие свойства жидкости; $\nu \in \mathbb{R}_+$ – кинематический коэффициент вязкости, характеризующий вязкие свойства жидкости Кельвина – Фойгта нулевого порядка. Для уравнения (0.0.7) рассмотрим условие Дирихле (0.0.5). Условие Дирихле (0.0.5) и уравнение (0.0.7) образуют математическую модель динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости, которая описывает процесс движения жидкости Кельвина – Фойгта нулевого порядка. Физический смысл задачи оптимального управления заключается в том, чтобы под действием внешнего управляемого воздействия с наименьшими затратами была достигнута требуемая скорость движения жидкости (модель регулирования скорости движения жидкости Кельвина – Фойгта нулевого порядка).

А.П. Осколков совместно с учениками построил теорию глобальной разрешимости задачи Коши – Дирихле для невырожденного уравнения (0.0.7) на $[0, +\infty)$ в слабом смысле в случае $n = 3$ и $\varkappa^{-1} > \lambda_1$ [62, 63, 65]. В вырожденном случае изучением фазового пространства уравнения (0.0.7) занимались Г.А. Свиридов и его ученики [83, 87]. Ими были получены условия простоты фазового пространства уравнения (0.0.7) и условия существования решения задачи Коши – Дирихле для него [86]. Исследования Г.А. Свиридюка продолжила Т.Г. Сукачева [104–106]. Ею были изучены фазовые пространства различных моделей гидродинамики ненулевого порядка. В работе М.О. Корпун-

сова, А.Г. Свешникова [43] рассмотрен вопрос разрушения решения системы уравнений Осколкова с кубическим источником в классе слабых обобщенных решений.

3. Обобщенная математическая модель Хоффа. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле (0.0.5) для обобщенного уравнения Хоффа

$$(-\lambda - \Delta)x_t + \alpha_1x + \alpha_2x^3 + \alpha_2x^5 + \dots + \alpha_{k-1}x^{2k-3} + \alpha_kx^{2k-1} = u. \quad (0.0.8)$$

Условие Дирихле (0.0.5) и уравнение (0.0.8) образуют обобщенную математическую модель Хоффа. Уравнение (0.0.8) получено Н.Дж. Хоффом [143] в случае $n = 1$. Искомая функция $x = x(s, t)$ показывает отклонение балки от вертикали под действием постоянной нагрузки $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Параметры $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$ характеризуют свойства материала балки; свободный член $u = u(s, t)$ соответствует внешней (боковой, в случае $n = 1$) нагрузке. Задача (0.0.5), (0.0.8) представляет собой математическую модель изменения формы двутавровой балки, находящейся под постоянной нагрузкой λ . Физический смысл задачи оптимального управления заключается в том, чтобы под действием внешнего воздействия (нагрузки $u(s, t)$) с наименьшими затратами двутавровая балка приняла требуемую форму.

Однозначная разрешимость задачи Коши для модели (0.0.5), (0.0.8) была установлена Г.А. Свиридиюком [82]. Здесь было показано, что фазовое пространство локально является банаевым C^∞ -многообразием. В работе Г.А. Свиридиюка и В.О. Казака [89] было установлено, что фазовое пространство уравнения (0.0.8) в случае $k = 1$ при $\alpha_1 \cdot \alpha_2 > 0$ есть простое гладкое банаево многообразие. В работе [92] найдены условия для параметров уравнения (0.0.8), при которых фазовое пространство уравнения образует сборку Уитни.

4. Обобщенная математическая модель деформации конструкции из двутавровых балок. Рассмотрим конечный связный ориентированный граф $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$, где $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^M$ – множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}_{j=1}^N$ – множество дуг. Предположим, что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и площадь

поперечного сечения $d_j > 0$. На графе \mathbf{G} рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} -\lambda x_{jt} - x_{jtss} + \alpha_j^1 x_j + \alpha_j^2 x_j^3 + \dots + \alpha_j^k x_j^{2k-1} = u_j \\ \text{для всех } s \in (0, l_j), t \in \mathbb{R}, j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (0.0.9)$$

Для уравнений (0.0.9) в каждой вершине V_i , $i = \overline{1, M}$ зададим краевые условия

$$\sum_{j:E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(0, t) - \sum_{r:E_r \in E^\omega(V_i)} d_r x_{rs}(l_r, t) = 0, \quad (0.0.10)$$

$$x_r(0, t) = x_j(0, t) = x_h(l_h, t) = x_m(l_m, t), \quad (0.0.11)$$

для всех $E_r, E_j \in E^\alpha(V_i)$, $E_h, E_m \in E^\omega(V_i)$, которые являются аналогами законов Кирхгоффа. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i . Краевые условия (0.0.9), (0.0.11) определяют, что поток через каждую вершину должен равняться нулю и решение в каждой вершине должно быть непрерывным. Искомая функция $x_j = x_j(s, t)$ показывает отклонение j -й балки от вертикали под действием постоянной нагрузки $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Параметры $\alpha_j^i \in \mathbb{R}_+$ характеризуют свойства материала j -й балки; свободный член $u_j = u_j(s, t)$ соответствует внешней нагрузке на j -ый элемент конструкции. Задача (0.0.9) – (0.0.11) представляет собой математическую модель изменения формы двутавровых балок в конструкции. Физический смысл задачи оптимального управления заключается в том, чтобы под действием внешнего воздействия (боковой нагрузки $u_j(s, t)$) с наименьшими затратами конструкция из двутавровых балок приняла требуемую форму.

В связи с возникающими прикладными задачами теория графов привлекает все большее внимание. Краевыми и начально-краевыми задачами для дифференциальных уравнений на графах впервые в России начал заниматься Ю.В. Покорный со своими учениками [69]. Уравнения Хоффа на графах в случае $k = 1$ впервые были изучены в [94]. В своей кандидатской диссертации А.А. Баязитова исследовала прямые и обратные задачи для обобщенного уравнения Хоффа в области и на графике [7]. Задача оптимального управления для лианеризованной модели Хоффа на графике исследовалась в работе [199].

5. Математическая модель распределения потенциала электрического поля в полупроводнике. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле (0.0.5) для неклассического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda x - \Delta x) - \Delta_p x + \alpha|x|^{p-2}x = u, \quad \Delta_p x \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial s_i} \left(|\frac{\partial x}{\partial s_i}|^{p-2} \frac{\partial x}{\partial s_i} \right), \quad (0.0.12)$$

где $p > 2, \alpha \geq 0$, причем область Ω занимает полупроводник, в котором имеется источник тока свободных зарядов и он «заземлен». Задача (0.0.5), (0.0.12) определяет распределение потенциала электрического поля в полупроводнике. Физический смысл задачи оптимального управления заключается в том, чтобы под действием внешнего воздействия с наименьшими затратами было достигнуто необходимое распределение потенциала электрического поля (модель регулирования распределения потенциала электрического поля в полупроводнике).

Начально-краевая задача для уравнения (0.0.12) в случае отрицательности параметра α рассматривалась в работе [42], и была доказана локальная разрешимость и единственность данной задачи в слабом обобщенном смысле. Причем в зависимости от рассматриваемых нелинейностей и начальных условий доказана разрешимость в любом конечном цилиндре $(s, t) \in \Omega \times [0, T]$ или разрушение за конечное время.

6. Обобщенная фильтрационная модель Буссинеска. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле (0.0.5) для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска

$$(\lambda - \Delta)x_t - \Delta(|x|^{p-2}x) = u. \quad (0.0.13)$$

Условие Дирихле (0.0.5) и уравнение (0.0.13) образуют обобщенную фильтрационную модель Буссинеска. Уравнение (0.0.13) получено Е.С. Дзекцером [22]. Данное уравнение более точно описывает процесс фильтрации, в отличие от фильтрационного уравнения Буссинеска [68]. Более общее уравнение (0.0.13) устраняет этот недостаток. Здесь искомая функция $x = x(s, t)$ отвечает потенциальному скорости движения свободной поверхности фильтрующейся

жидкости; параметры $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}$ характеризуют среду, причем параметр λ может принимать отрицательные значения; свободный член $u = u(s, t)$ соответствует внешнему воздействию. Задача (0.0.5), (0.0.13) моделирует процесс фильтрации жидкости. Физический смысл задачи оптимального управления заключается в том, чтобы под действием внешнего управляющего воздействия (истоки и стоки жидкости соответственно) с наименьшими затратами было достигнуто требуемое распределение потенциала скорости движения свободной поверхности фильтрующейся жидкости (модель регулирования распределения потенциала скорости движения свободной поверхности фильтрующейся жидкости).

Начально-краевые задачи для уравнения (0.0.13) в различных постановках изучались Г.А. Свиридиюком и его учениками; исследование разрешимости неоднородной задачи для уравнения (0.0.13) было начато в [77] и продолжено в [79].

Рассмотренные математические модели в специальным образом подобранных функциональных банаховых пространствах \mathfrak{X} и \mathfrak{U} редуцируются к абстрактному полулинейному уравнению соболевского типа

$$L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u, \quad \ker L \neq \{0\}, \quad (0.0.14)$$

что позволило разработать общий метод исследования задачи оптимального управления для рассматриваемого класса математических моделей, математический аппарат для реализации численных методов исследования.

Сегодня уравнения соболевского типа составляют самостоятельную часть теории неклассических уравнений математической физики; сформировались научные направления и школы по изучению различных аспектов таких уравнений. Наше исследование примыкает к направлению, созданному и возглавляемому Г.А. Свиридиюком, основным методом исследования которого является метод фазового пространства, основы чего были заложены в работах [75, 80].

Для изучения задачи оптимального управления (0.0.1), (0.0.2) в первую очередь найдем условия разрешимости задачи Коши

$$x(0) = x_0 \quad (0.0.15)$$

для уравнения (0.0.14). Основной трудностью изучения задачи Коши является принципиальная неразрешимость задачи (0.0.14), (0.0.15) при x_0 , взятых пусть даже из плотного в \mathfrak{X} линеала. Наряду с условием Коши (0.0.15) будем рассматривать условие Шоуолтера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0. \quad (0.0.16)$$

В [95] показано, что условие (0.0.16) для уравнения (0.0.14) является более естественным и позволяет избежать трудностей, связанных с изучением задачи Коши (0.0.14), (0.0.15). Условие Шоуолтера – Сидорова является прямым обобщением условия Коши. Далее исследуем задачу оптимального управления и найдем достаточные условия существования оптимального управления (0.0.1) решениями задач (0.0.14), (0.0.15) и (0.0.14), (0.0.16).

Целью работы является математическое моделирование, аналитическое и численное исследования оптимального управления в полулинейных задачах гидродинамики и теории упругости с разработкой и реализацией в виде комплекса программ методов и алгоритмов численного решения. Для достижения поставленной цели необходимо реализовать следующие задачи:

1. Исследовать математическую модель динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости; математическую модель Осколкова нелинейной фильтрации; обобщенную математическую модель Хоффа; математическую модель деформации конструкции из двутавровых балок; математическую модель распределения потенциала электрического поля в полупроводнике; математическую фильтрационную модель Буссинеска с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши.

2. Разработать численный метод исследования задачи Шоуолтера – Сидорова или Коши для абстрактных полулинейных математических моделей

соболевского типа. Доказать сходимость численного метода.

3. Исследовать оптимальное управление в абстрактных полулинейных математических моделях соболевского типа с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши.

4. Разработать численный метод исследования задачи оптимального управления для абстрактных полулинейных математических моделей соболевского типа с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши.

5. Исследовать оптимальное управление в математической модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости с начальным условием Шоуолтера – Сидорова; математической модели Осколкова нелинейной фильтрации с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши; обобщенной математической модели Хоффа с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши; обобщенной математической модели деформации конструкции из двутавровых балок с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши; математической модели распределения потенциала электрического поля в полупроводнике с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши; обобщенной математической фильтрационной модели Буссинеска с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши.

6. Разработать и реализовать комплекс программ нахождения численного решения задачи Шоуолтера – Сидорова или Коши для моделей, основанных на полулинейных уравнениях соболевского типа.

7. Разработать и реализовать комплекс программ нахождения численного решения задачи оптимального управления с условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши для моделей, основанных на полулинейных уравнениях соболевского типа.

8. Провести вычислительные эксперименты для модельных и реальных задач, подтверждающих эффективность предложенных алгоритмов, методов, подходов.

Научная новизна. В диссертационной работе впервые проведено аналитическое и численное исследования полулинейных математических моделей, описывающих процессы упругости, гидродинамики, электрического поля, основанных на полулинейных уравнениях соболевского типа, и оптимального управления в них. Создана теоретическая основа для численного исследования изучаемых моделей: доказаны теоремы существования и единственности решений задачи Коши и задачи Шоуолтера – Сидорова для полулинейного уравнения соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором, билинейным оператором, устанавливающие сходимость приближенных решений к точному. Полученные теоретические результаты развивают и обобщают метод Галеркина – Петрова.

Впервые предложен общий метод исследования задачи оптимального управления для рассматриваемого класса математических моделей; приведены необходимые условия существования оптимального управления для них. Полученные теоретические результаты позволяют системно исследовать класс изучаемых моделей и могут быть применены к обширному классу задач математической физики.

На основе развития методов Галеркина – Петрова и декомпозиции, Галеркина – Петрова и многомерного покоординатного спуска с памятью разработаны новые алгоритмы численных методов, позволяющие находить приближенные решения задач оптимального управления для изучаемых полулинейных моделей математической физики. В области программного обеспечения разработан комплекс программ, позволяющий проводить вычислительные эксперименты для модельных и реальных задач, а также позволяющий выявлять эффективность предложенных алгоритмов, методов, подходов.

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично. Достоверность полученных результатов обеспечена полными доказательствами всех утверждений, соответствующими современному уровню математической строгости.

Историография вопроса. Уравнения, не разрешенные относительно старшей производной, впервые появились, видимо, в работах А. Пуанкаре (см. обзор [20]). Позднее они изучались в работах С.В. Озенна, Ф.К.Ж. Одквиста, У. Буссинеска, С.Г. Россби и многих других ученых при исследовании различных задач гидродинамики. Систематическое изучение начально-краевых задач для линейных уравнений вида

$$L \dot{x} = Mx, \quad (0.0.17)$$

где L и M – дифференциальные операторы в частных производных по «пространственным» переменным, начал С.Л. Соболев. В 1954 г. им было получено уравнение, моделирующее колебания гравитирующей жидкости, и была изучена задача Коши для него [100]. Данная работа повлекла развитие нового направления в исследованиях прикладных моделей, основанных на уравнениях в частных производных [101]. Первоначально оно развивалось учениками С.Л. Соболева: Р.А. Александряном [81], С.А. Гальперном [17], А.Г. Костюченко и Г.И. Эскиным [44], Т.И. Зеленяком [33] и многими другими. К настоящему моменту сформировалось направление по исследованию начально-краевых задач для неклассических уравнений математической физики, к которому можно отнести работы В.Н. Врагова [15], А.И. Кожанова [41, 145], С.Г. Пяткова [24, 156], А.Г. Свешникова, А.Б. Альшина, М.О. Корпусова [73] и ряда других математиков.

С другой стороны, возникло направление изучения абстрактных уравнений вида (0.0.17). Первыми, кто начал изучать разрешимость задачи Коши для абстрактного линейного операторного уравнения (0.0.17), были С.Г. Крейн и его ученики [47]. В их работах показано, что фазовым пространством уравнения (0.0.17) в случае (L, σ) -ограниченного оператора M служит некоторое подпространство в \mathfrak{X} коразмерности, равной размерности M -корневого пространства фредгольмова оператора L . Данные работы носят теоретический характер и не содержат приложений. К данному направлению примыкают исследования И.В. Мельниковой и ее учеников [58, 138].

Важность и необходимость создания общей теории уравнений вида (0.0.4), (0.0.17) отмечали И.Г. Петровский [67] и Ж.-Л. Лионс [54].

Также возникло направление изучения абстрактных уравнений (0.0.17) в их связи с уравнениями в частных производных. Одними из первых такие уравнения начали изучать Р.Е. Шоултер, М.И. Вишик. М.И. Вишик рассмотрел задачу Коши для уравнения (0.0.17) и разработал численные методы ее решения [13]. Р.Е. Шоултер [163] и независимо от него Н.А. Сидоров со своими учениками [97, 99] первыми начали изучать полулинейные уравнения вида (0.0.4) с вырожденным оператором L и применять абстрактные результаты к конкретным начально-краевым задачам для уравнений в частных производных. Задача (0.0.16) для уравнения соболевского типа впервые появилась в работе Р.Е. Шоултера [161]; независимо от работ Р.Е. Шоултера данную задачу рассмотрел Н.А. Сидоров и его ученики [97–99]. В работе [95] представлен обзор данных исследований и показана естественность применения условия (0.0.16) при изучении линейных и полулинейных уравнений соболевского типа, которое позволяет избежать трудностей, связанных с изучением задачи Коши (0.0.4), (0.0.15). Условие Шоултера – Сидорова (0.0.16) является прямым обобщением условия Коши (0.0.15). Более общим начальным условием для линейных уравнений соболевского типа, чем условие (0.0.16), является начально-конечное условие [26].

Уравнения соболевского типа являются самостоятельной частью неклассических уравнений математической физики. Их изучению посвящены многие работы как отечественных, так и зарубежных исследователей. Одной из первых появилась монография Р.Е. Шоултера [163], в которой рассматриваются уравнения (0.0.4), (0.0.17) с самосопряженным оператором L , определенные в полугильбертовом пространстве. Р.Е. Шоултер получил результаты о разрешимости задачи (0.0.16) для уравнения (0.0.4), где в качестве прообраза оператора L выступает эллиптический оператор, вырождающийся на множестве ненулевой меры.

Монография Г.Е. Демиденко и С.В. Успенского [20] посвящена изучению задачи Коши (0.0.15) и смешанной задачи для уравнения

$$L_0(D_s)D_t^l x + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_s)D_t^k x = f(s, t)$$

с квазиэллиптическим оператором методом построения последовательностей приближенных решений. Получены результаты однозначной разрешимости рассматриваемых задач.

Монографии А. Фавини и А. Яги [136] посвящена построению теории полугрупп операторов, на основе которой исследуется разрешимость дифференциальных включений

$$x_t \in A(x)$$

с линейным многозначным оператором. Теория проиллюстрирована различными примерами и приложениями.

В монографии Н.А. Сидорова, Б.В. Логинова, А.В. Синицына и М.А. Фалалеева [164] предложено применять метод Ляпунова – Шмидта к исследованию полулинейных уравнений. Доказано существование и единственность решения задачи Коши (0.0.15) для неоднородного уравнения (0.0.4) с сильно измеримой и интегрируемой по Бехнеру неоднородностью в классе непрерывных функций.

Монография Ю.Е. Бояринцева и В.Ф. Чистякова [8] посвящена изучению алгебро-дифференциальных неоднородных систем (0.0.17) с прямоугольной или вырожденной при всех $t \in [0, T]$ матрицей $L(t)$. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши для алгебро-дифференциальных систем с регулярной и сингулярной парами постоянных $(m \times n)$ -матриц. В работах Г.А. Свиридиюка и С.В. Брычева [90], Г.А. Свиридиюка и И.В. Бурлачко [91] на основе метода фазового пространства построен численный алгоритм решения задачи Коши для вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (0.0.17), которые в современной научной литературе наряду с другими названиями именуются системами леон-

тьевского типа. А.В. Келлер [38] рассмотрела условие Шоуолтера – Сидорова (0.0.16) для систем леонтьевского типа (0.0.17), что привело к упрощению численных исследований и построению эффективных численных алгоритмов в ее работах.

В монографии И.В. Мельниковой и А.И. Филенкова [138] изучаются абстрактные задачи. Авторами получены необходимые и достаточные условия равномерной корректности в терминах условий типа Хилле – Иосиды и расщепления исходных пространств в прямые суммы ядра и образа оператора при производной по времени.

В монографии И.Е. Егорова, С.Г. Пяткова и С.В. Попова [24] исследована разрешимость краевой нелокальной задачи для неоднородного уравнения (0.0.17), где операторы L, M – самосопряженные или диссипативные операторы, определенные в гильбертовом пространстве.

В монографии Х. Гаевского, К. Грегера и К. Захариаса [16] исследуется задача Коши для псевдопараболического уравнения (0.0.4) с равномерно липшиц-непрерывным и сильно монотонным оператором L и липшиц-непрерывным оператором Вольтерры M . При помощи метода Галеркина устанавливается сходимость приближенного решения к точному и доказываются теоремы существования и единственности решения данной задачи.

Принципиальная неразрешимость задачи (0.0.4), (0.0.15) при произвольных начальных данных, пусть даже из плотного в \mathfrak{X} множества, была отмечена в [130, 148]. В работах Г.А. Свиридука и Т.Г. Сукачевой [80, 81] с точки зрения предложенного ими метода фазового пространства была исчерпывающе решена данная проблема. Суть этого метода заключается в редукции уравнений (0.0.4) или (0.0.17) к регулярному уравнению

$$\dot{x} = Sx + F(x) \text{ или } \dot{x} = Sx$$

соответственно, определенному не на всем пространстве, а на некотором его подпространстве, понимаемом как фазовое пространство уравнения. Таким образом, изучение начально-краевых задач для различных линейных и по-

лулинейных уравнений соболевского типа в первую очередь сводится к изучению их фазовых пространств. В работах [75, 81] Г.А. Свиридюк впервые ввел понятие фазового пространства как множества, являющегося замыканием множества допустимых начальных значений задачи Коши и содержащего все решения уравнения. Его работы по изучению фазовых пространств различных уравнений соболевского типа легли в основу возглавляемого им направления по исследованию фазовых пространств полулинейных и линейных уравнений вида (0.0.4), (0.0.17).

Применение методов фазового пространства и относительно спектральной теории, предложенных Г.А. Свиридюком для изучения уравнений вида (0.0.17), позволило ему и его ученикам построить теорию вырожденных (полу)групп операторов [166]. К настоящему времени В.Е. Федоров расширил теорию вырожденных (полу)групп операторов на случай локально выпуклых пространств [113]. На сегодняшний день ведутся работы по развитию теории уравнений соболевского типа в квазибанаховых пространствах [40, 96]. На основе методов изучения уравнений первого порядка, разработанного Г.А. Свиридюком, А.А. Замышляевой построена теория пропагаторов для линейных уравнений соболевского типа высокого порядка [29]. В работе А.А. Замышляевой и Е.В. Бычкова [31] исследована разрешимость задачи Коши для полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка, описано фазовое пространство модифицированного уравнения Буссинеска. В работах В.Е. Федорова и П.Н. Давыдова [114] найдены условия существования нелокального решения задачи Коши и задачи Шоултера (Шоултера – Сидорова) для полулинейного уравнения соболевского типа с нелинейным равномерно липшицевым оператором, заданном на некотором подпространстве основного пространства. Абстрактные результаты использованы при рассмотрении начально-краевых задач для некоторых систем уравнений, не разрешенных относительно производной по времени с условием липшиц ограниченности.

Большое число исследований посвящено детерминированным линейным уравнениям и системам соболевского типа. Однако детерминированные модели не учитывают, что в натурных экспериментах правая часть уравнения может быть подвержена случайному возмущению (например, в виде белого шума). В последнее время появляются исследования, посвященные стохастическим дифференциальным уравнениям. Одни из первых результатов [27, 32] по линейным стохастическим уравнениям соболевского типа (0.0.17) основываются на подходе Ито – Стратоновича – Скорохода. С другой стороны, возник [122] и развивается новый подход к исследованиям стохастических уравнений вида (0.0.17), где под «белым шумом» понимается производная Нельсона – Гликлиха винеровского процесса [11, 19, 158, 201, 202, 206, 215].

Изучение фазовых пространств полулинейных уравнений соболевского типа (0.0.4) начато Г.А. Свиридиюком в 1986 г. для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска [75]. В своих работах он дает полное описание фазовых пространств абстрактного линейного уравнения (0.0.17) в случае (L, p) -ограниченного и (L, p) -секториального операторов. Продолжением работы [75] по изучению фазового пространства для линейного и полулинейного уравнений соболевского типа являются работы Г.А. Свиридиюка и его учеников [84, 86, 89, 170]. Сформировавшееся научное направление позволило защищить ученикам Г.А. Свиридиюка более 20 кандидатских и 5 докторских диссертаций; наиболее близкие к теме настоящего исследования – [18, 37, 39, 106, 124].

В современной научной литературе рассматриваются различные постановки задач оптимального управления для систем дифференциальных уравнений. Существует несколько научных направлений по изучению оптимального управления для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^r), \quad i = 1, \dots, n. \quad (0.0.18)$$

Л.С. Понтрягину, Р.В. Гамкрелидзе, В.Г. Болтянскому, их ученикам и соратникам принадлежит решение значительного числа вариационных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (0.0.18), объеди-

ненных общим методом – принципом максимума [71]. Н.Н. Красовским и его учениками была изучена задача о построении управляющего воздействия u , которое приводит объект в заданное состояние [46]. В.И. Зубовым была решена проблема стабилизации программных движений, включая их построение, а также методы синтеза управлений, в том числе построения оптимальных управлений [35]. В.М. Матросовым и его учениками был применен метод вектор-функций Ляпунова для анализа устойчивости и других динамических свойств для нелинейных распределенных систем вида (0.0.18) [60].

Несмотря на большой охват исследований оптимального управления для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, остаются недостаточно исследованными вопросы управления для вырожденных систем

$$L \frac{dx}{dt} = Mx + y + Bu. \quad (0.0.19)$$

Одной из первых работ, посвященных данной проблематике, была монография Л. Даи [132]. В ней было проведено исследование задачи управления сингулярными системами. Л. Пандолфи впервые рассмотрел управление системой (0.0.19) в случае вырожденности матрицы L , $\det L = 0$ [153, 154]. В работах Г.А. Куриной [50, 51] изучаются матрично сингулярно возмущенные задачи оптимального управления с $L = A + \varepsilon B$. Исследовано поведение решений этих задач при стремлении к нулю малого параметра, доказаны теоремы о структуре множества достижимости, равномерной сходимости по ε . В.Ф. Чистяков и С.В. Гайдомак [118] исследовали задачи оптимального управления вырожденными гиперболическими системами, где L, M – $(n \times n)$ -матрицы с элементами, зависящими от переменных (s, t) . Найдены условия непрерывности аппроксимации целевого квадратичного функционала по управлению. Создан комплекс программ, позволяющий решать задачи оптимального управления для алгебро-дифференциальных систем.

В работах А.В. Келлер исследованы различные постановки задач управления для систем леонтьевского типа с условием Шоултера – Сидорова (0.0.16), разработаны эффективные численные алгоритмы нахождения при-

ближенных решений рассматриваемых задач [38, 39]. Реализованы в виде комплекса программ численные методы решения задач оптимального, стартового и жесткого управления для моделей леонтьевского типа. Предложенные алгоритмы могут быть применены для широкого класса задач. В последнее время появились приложения задач оптимального управления для систем леонтьевского типа к проблемам динамических измерений – задачам восстановления динамически искаженных сигналов [120, 121, 123].

С. Кэмпбелл и В. Террел [128, 167] исследовали наблюдаемость системы (0.0.19) с наблюдением $y = Cx$, где L, M – квадратные матрицы (матрица L идентично сингулярна на некотором интервале), C – гладкая матричная функция, определяющая вход системы y . П. Мюллер [151] рассматривает дескрипторную линейную систему уравнений (0.0.19) с наблюдением $y = Cx + Du$, где $\text{rank } L < n$, и задачу управления для нее. Вопросам точной управляемости для невырожденных уравнений в конечномерных пространствах посвящена работа Б. Шкляра [159].

Многие методы и принципы изучения задач оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений применимы к исследованию оптимального управления для распределенных систем [4, 23, 149]. В монографии К.А. Лурье [56] дается общая постановка задач оптимизации для классических систем в частных производных, приводятся необходимые условия оптимальности, основанные на принципе максимума Понтрягина. В работе Г.О. Фатторини и С.С. Сритхарана [135] изучен класс задач оптимального управления для невырожденного полулинейного уравнения. Решение строится при помощи теории аналитических полугрупп операторов. Основным результатом является принцип максимума Понтрягина, который получается двумя совершенно разными способами. В монографии И. Лазицкой и Р. Триджиани [147] изучена задача оптимального управления для невырожденных линейных дифференциальных уравнений в конечном и бесконечномерном пространствах с квадратичным функционалом стоимости на основе

операторного подхода при помощи теории полугрупп операторов и уравнения Риккати. Наряду с аналитическим исследованием строятся численные методы.

Чаще всего в работах, посвященных исследованиям оптимального управления для систем с распределенными параметрами, рассматриваются одна или несколько прикладных задач [34, 125, 131, 144, 165]. Для каждой из этих задач разрабатываются специальные методы исследования. Монография Ж.-Л. Лионса [53] была одной из первых работ, в которой систематически изучаются задачи управления для уравнений с частными производными. В монографии рассмотрены задачи управления линейными эллиптическими, параболическими, гиперболическими системами с квадратичным функционалом стоимости, изучены свойства квадратичных функционалов, при которых существует решение целого класса задач. В монографии [55] Ж.-Л. Лионс рассматривает управление различными сингулярными нелинейными распределенными системами. В таких системах заданному управлению может не соответствовать единственное устойчивое состояние или оно разрушается со временем. Ж.-Л. Лионсом отмечено, что структура множества оптимальных пар в данной ситуации неизвестна. Предлагаются различные методы (метод декомпозиции, штрафа, растущего лагранжиана), на основе которых могут быть разработаны численные алгоритмы по нахождению приближенных решений.

А.В. Фурсиков в своей монографии [115] исследовал абстрактные задачи оптимального управления для линейного и нелинейного уравнений состояния

$$L(x, u) + F(y) = 0$$

с условием Коши. Показано, что линейная экстремальная задача разрешима при условии нетривиальности множества допустимых пар, коэрцитивности, ограниченности снизу, полунепрерывности снизу относительно слабой сходимости функционала стоимости. Для разрешимости нелинейной экстремальной задачи к указанным выше условиям добавляется условие компактности,

применение которого для рассмотренных задач накладывает условие подлинейшего роста для нелинейного уравнения. Все абстрактные результаты были применены к различным классам невырожденных задач оптимального управления.

В монографии В.И. Иваненко [36] дано систематическое изучение задач оптимального управления для объектов, описываемых нелинейными операторными, а также дифференциально-операторными уравнениями в банаховых пространствах с ограничениями на управляющие и фазовые переменные. Приводятся условия разрешимости и регулярности рассматриваемых задач, необходимые условия оптимальности управления в форме вариационных неравенств.

В работах Н. Папагеоргиу [142, 155] рассматривается задача оптимального управления для нелинейного эволюционного уравнения

$$\dot{x} + M(t, x) = B(t)u, \quad x(0) = x_0, \quad u \in \mathfrak{U},$$

в банаховом пространстве \mathfrak{X} с измеримым по t , монотонным и хеминепрерывным по x оператором M . Причем $(M(t, x), x) \geq c_1(t)\|x\|^2$, $\|M(t, x)\|_* \leq a(t) + b\|x\|$, $a, c_1 \in L_+^\infty$, $c_1(t) \geq c > 0$. Развивается теория существования решений, и находятся необходимые условия оптимальности.

В работах Г.А. Свиридюка и А.А. Ефремова [25, 85, 88] впервые была изучена задача оптимального управления с квадратичным функционалом стоимости для линейных уравнений соболевского типа в случае (L, p) -ограниченного и (L, p) -секториального оператора M с условием Коши (0.0.15) и получены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения. Разработаны приложения для линейных вырожденных уравнений математической физики. Эти исследования легли в основу целого ряда работ учеников и последователей Г.А. Свиридюка по изучению задач оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа на основе теории вырожденных разрешающих групп и полугрупп операторов [166]. В монографии [70] изучены различные постановки задач управления для линей-

ных уравнений соболевского типа с (L, p) -секториальным и сильно (L, p) -радиальным оператором M с начальным условием Коши и обобщенным условием Шоултера (Шоултера – Сидорова). Применение обобщенного условия Шоултера позволило снять ограничение на начальное условие, которое присутствовало при рассмотрении задачи Коши. Как уже отмечалось, обобщением условия Коши на случай линейных уравнений соболевского типа является начально-конечное условие [28] (или еще более общее многоточечное начально-конечное условие [27]). Задача оптимального управления для линейного уравнения соболевского типа с начально-конечным условием была изучена в [187, 190, 195, 199, 213]. В [30, 116] были получены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения задач оптимального управления для уравнений соболевского типа высокого порядка с начально-конечным условием.

Управляемость интегро-дифференциальных уравнений соболевского типа исследовали К. Балачандран и Дж. Дауэр [126]. Результаты Г.А. Свиридюка и А.А. Ефремова по управляемости для уравнения (0.0.19) инициировали дальнейшее изучение В.Е. Федоровым и О.А. Рузаковой вопросов управляемости решений данных уравнений [111].

В работе [93] была впервые исследована задача оптимального управления для полулинейного уравнения соболевского типа. Методами теории (L, σ) -ограниченных операторов авторами была изучена задача оптимального управления для уравнения Осколкова. В работе [112] была исследована задача стартового управления для полулинейного уравнения соболевского типа с нелинейным оператором N ($\|N(t, x)\|_{\mathfrak{Y}} \leq K(1 + \|x\|_{\mathfrak{X}})$, $\forall x \in \mathfrak{X}$, $\forall t \in [0, T]$, $\text{im } N \subset \mathfrak{Y}^1 \subset \mathfrak{Y}$) с применением теории вырожденных полугрупп операторов.

С развитием современных технологий на первый план выходят исследование и построение численных методов решения задач оптимального управления для нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных. Получение аналитического решения для них не всегда возможно. Существу-

ют различные подходы к численному решению таких задач [66, 103, 140, 152, 157, 168].

Теоретическая и практическая значимость. В диссертации построена завершенная теория оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа с s -монотонными и p -коэрцитивными операторами. Проведенное исследование развивает теории уравнений соболевского типа, оптимального управления, дифференциальных уравнений в частных производных, дифференциальных уравнений на графах. Получены достаточные условия существования слабого обобщенного решения задачи Коши или задачи Шоуолтера – Сидорова для полулинейного уравнения соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором. Доказаны теоремы существования оптимального управления для данного класса математических моделей. Разработаны численные методы решения задачи оптимального управления, доказана сходимость приближенного решения к точному. Полученные абстрактные результаты легли в основу исследования математических моделей, описывающих процессы упругости, фильтрации, электрического поля.

Результаты, полученные при исследовании математических моделей Осколкова и Буссинеска, могут быть использованы в гидродинамике, геологии при изучении фильтрации жидкости, в нефтедобыче. Результаты, полученные при исследовании математических моделей Хоффа, моделей деформации конструкций из двутавровых балок, могут быть использованы в теории упругости. Результаты, полученные при исследовании математической модели распределения потенциала электрического поля в полупроводнике, могут быть востребованы в электродинамике. Данные математические модели относятся к различным предметным областям, их объединяют единые методы и подходы исследования, которые могут быть применены и к другим математическим моделям. Результаты, представленные в диссертации, могут быть полезными в дальнейшем развитии аналитических и численных методов исследования для полулинейных моделей математической физики. Разработан-

ные алгоритмы численных методов реализованы в виде комплекса программ (Maple 18.0, C++), с помощью которых были проведены вычислительные эксперименты. Программы построены на модульной основе и могут быть модифицированы для исследования различных математических моделей.

Методы исследования. В диссертационной работе проведены аналитическое и численное исследования задач оптимального управления для математических моделей, описывающих процессы фильтрации, деформации и электрического поля. В первую очередь исследуется вопрос существования и единственности решения задачи Коши или задачи Шоуолтера – Сидорова для математических моделей (0.0.7), (0.0.5); (0.0.6), (0.0.5); (0.0.8), (0.0.5); (0.0.12), (0.0.5); (0.0.13), (0.0.5) и (0.0.9), (0.0.10), (0.0.11). Данные модели в подходящим образом подобранных функциональных пространствах редуцируются к абстрактному полулинейному уравнению соболевского типа (0.0.14). Для рассмотрения вопроса разрешимости математических моделей существенную роль играет выбор функциональных пространств, в которых решается конкретная задача. Эта трудность связана с вопросом о гладкости: если удается доказать, что рассматриваемая нелинейная задача является корректной в некотором функциональном классе, то решение может и не быть гладким, даже если этим свойством обладают данные задачи. Важность этого факта отмечали О.А. Ладыженская и Ж.-Л. Лионс [54].

Для исследования вопроса разрешимости задачи Коши (0.0.2) и задачи Шоуолтера – Сидорова (0.0.3) существенным является построение и исследование фазового пространства исходного уравнения. Основным методом исследования является метод фазового пространства, основы которого были разработаны Г.А. Свиридиюком. Этот метод в применении к линейным и полулинейным уравнениям соболевского типа позволил изучить принципиальную неразрешимость задачи Коши для них и исследовать феномены неединственности решения в случае начальных условий Коши и Шоуолтера – Сидорова.

Для исследования существования решения задачи Коши (0.0.2) и задачи

Шоултера – Сидорова (0.0.3) с самосопряженным, неотрицательно определенным, фредгольмовым оператором L и s -монотонным и p -коэрцитивным оператором M наряду с методом фазового пространства используется метод монотонности. Данный метод нашел широкое применение в исследовании нелинейных задач [12, 16, 54, 74].

С развитием современных технологий на первый план выходят исследование и построение численных методов решения начально-краевых задач для нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных. Получение аналитического решения для них не всегда возможно. Существуют различные подходы к численному решению таких задач [127]. В случае вырожденных полулинейных уравнений наиболее подходящим является метод Галеркина – Петрова [11, 18, 116, 181]. При помощи метода Галеркина – Петрова строятся приближенные решения моделей (0.0.7), (0.0.5); (0.0.6), (0.0.5); (0.0.8), (0.0.5); (0.0.12), (0.0.5); (0.0.13), (0.0.5) и (0.0.9), (0.0.10), (0.0.11), коэффициенты которых удовлетворяют системе алгебро-дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями. Существование решений начальной задачи для системы алгебро-дифференциальных уравнений доказывается с помощью метода фазового пространства и теоремы существования решения для сингулярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений [76]. Для метода монотонности требуется построение априорных оценок. Пользуясь теоремой Банаха – Алаоглу, переходя к слабому пределу, доказывается, что он и есть искомое решение. Доказательство единственности решения существенным образом опирается на свойство s -монотонности оператора M . Таким образом удается установить сходимость приближенных решений к точному.

После исследования разрешимости задач (0.0.2), (0.0.3) и построения множества допустимых пар переходим к исследованию существования оптимального управления задачи (0.0.1) решениями задачи Коши (0.0.2) и задачи Шоултера – Сидорова (0.0.3); здесь управление u берется из некоторого непу-

стого, замкнутого и выпуклого множества \mathfrak{U}_{ad} в пространстве управлений \mathfrak{U} . В силу коэрцитивности функционала $J(x, u)$ получим ограниченность последовательностей $\{x_n\}$, $\{u_n\}$. Переходя к слабым пределам и используя методы компактности и монотонности, получим, что слабые пределы последовательностей $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ удовлетворяют уравнению состояния. Поскольку решение получается непрерывным, то функционал стоимости (0.0.1) можно записать в виде $J(x, u) = J(u)$ и, пользуясь теоремой Мазура и полунепрерывностью относительно слабой сходимости функционала стоимости, получить существование оптимального управления.

Опираясь на построенную абстрактную теорию для задач (0.0.1), (0.0.2) и (0.0.1), (0.0.3), исследуем задачи оптимального управления для математических моделей (0.0.7), (0.0.5); (0.0.6), (0.0.5); (0.0.8), (0.0.5); (0.0.12), (0.0.5); (0.0.13), (0.0.5) и (0.0.9), (0.0.10), (0.0.11). Необходимые условия минимума функционала строятся в терминах сопряженной задачи. Получающиеся граничные задачи, которые являются линейными, также могут исследоваться методом монотонности.

После исследования сходимости приближенного решения к точному рассмотрим вопрос нахождения численного решения задач (0.0.1), (0.0.2) и (0.0.1), (0.0.3). Приближенные решения строятся при помощи метода Галеркина – Петрова. Функционал стоимости зависит от неизвестных функций состояния x и управления u . Для того чтобы использовать один из наиболее часто применяемых подходов: уравнение состояния понимается как средство для явного задания зависимости функции состояния системы от управления, применим метод декомпозиции. Метод декомпозиции позволяет переходить к рассмотрению эквивалентной задачи, в которой исходное уравнение состояния редуцируется к системе линейных относительно x уравнений [5, 55]. Далее применяются известные методы минимизации функционалов на заданном множестве допустимых управлений. В другом случае будем рассматривать уравнение состояния как ограничение, налагаемое на систему. В результате

получается задача минимизации заданного функционала на множестве допустимых пар управление – состояние, которая решается методом многошагового покоординатного спуска с памятью с использованием основных идей алгоритма, разработанного А.В. Келлер [39].

Краткое содержание диссертации. Диссертационная работа, кроме введения, заключения, приложений и списка литературы, содержит пять глав. Список литературы включает 220 наименований работ отечественных и зарубежных авторов, составляющих информационную базу диссертации.

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, постановка задачи, определяются цель и задачи работы, дается обзор литературы по исследуемой проблематике.

Первая глава посвящена построению математических моделей, которые можно отнести к классу s -монотонных и p -коэрцитивных полулинейных моделей соболевского типа: математическая модель Осколкова нелинейной фильтрации, математическая модель динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости, обобщенная математическая модель Хоффа, обобщенная математическая модель деформации конструкции из двутавровых балок, математическая модель распределения потенциала электрического поля в полупроводнике, обобщенная математическая фильтрационная модель Буссинеска и состоит из девяти параграфов. **В первом параграфе** содержатся некоторые сведения нелинейного функционального анализа, используемые в дальнейшем исследовании и построении математических моделей из теории банаховых пространств, операторов в банаховых пространствах [16, 61] и алгебро-дифференциальных систем [79]. Этот параграф носит вспомогательный характер. **Во втором параграфе** содержатся некоторые сведения о функциональных пространствах и дифференциальных операторах, используемые в дальнейшем исследовании и построении математических моделей. Данный параграф носит вспомогательный характер. **Третий параграф** посвящен исследованию морфологии фазового пространства уравнения (0.0.14)

в эволюционном и динамическом случаях. Показано, что фазовое пространство \mathfrak{M} уравнения (0.0.14) с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором M является простым банаховым многообразием. **Четвертый параграф** содержит аналитическое исследование математической модели Осколкова нелинейной фильтрации (0.0.6), (0.0.5). Проводится и обосновывается редукция математической модели к абстрактному уравнению (0.0.14), и строится фазовое пространство уравнения (0.0.6). **Пятый параграф** содержит аналитическое исследование математической модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости (0.0.7), (0.0.5). Проводится и обосновывается редукция математической модели к абстрактному уравнению (0.0.14). **Шестой параграф** содержит аналитическое исследование обобщенной математической модели Хоффа (0.0.8), (0.0.5). Проводится и обосновывается редукция математической модели к абстрактному уравнению (0.0.14), и строится фазовое пространство уравнения (0.0.8). **Седьмой параграф** содержит аналитическое исследование обобщенной математической модели деформации конструкции из двутавровых балок (0.0.9) – (0.0.11). Проводится и обосновывается редукция математической модели к абстрактному уравнению (0.0.14), и строится фазовое пространство уравнения (0.0.9). **Восьмой параграф** содержит аналитическое исследование математической модели распределения потенциала электрического поля в полупроводнике (0.0.12), (0.0.5). Проводится и обосновывается редукция математической модели к абстрактному уравнению (0.0.14), и строится фазовое пространство уравнения (0.0.12). **Девятый параграф** содержит аналитическое исследование обобщенной математической фильтрационной модели Буссинеска (0.0.13), (0.0.5). Проводится и обосновывается редукция математической модели к абстрактному уравнению (0.0.14), и строится фазовое пространство уравнения (0.0.13).

Вторая глава содержит шесть параграфов и посвящена исследованию задачи оптимального управления для абстрактных полулинейных уравнений соболевского типа. **Первый параграф** посвящен исследованию разрешимо-

сти задачи Коши (0.0.15) для уравнения (0.0.14) для динамического и эволюционного случаев. Доказаны теоремы существования и единственности рассмотренных задач, показана сходимость приближенного решения к точному.

Второй параграф содержит исследование разрешимости задачи Шоуолтера – Сидорова (0.0.16) для уравнения (0.0.14) для динамического и эволюционного случаев. Доказаны теоремы существования и единственности рассмотренных задач, показана сходимость приближенного решения к точному.

Третий параграф содержит исследование задачи оптимального управления (0.0.1) для полулинейного уравнения соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором и условием Шоуолтера – Сидорова, доказывается теорема существования решения данной задачи.

Четвертый параграф содержит исследование задачи оптимального управления (0.0.1) для полулинейного уравнения соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным

оператором и условием Коши, доказывается теорема существования решения данной задачи. В случае условия Коши на множество допустимых управлений \mathfrak{U}_{ad} накладывается дополнительное условие.

В пятом параграфе содержится исследование разрешимости задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения с билинейным оператором. Доказывается теорема существования

и единственности задачи Шоуолтера – Сидорова для модели с билинейным оператором на основе метода Галеркина – Петрова, показывается сходимость приближенных решений к аналитическому.

В шестом параграфе содержится исследование задачи оптимального управления (0.0.1) для уравнения с билинейным оператором и условием Шоуолтера – Сидорова, доказывается теорема существования решения данной задачи.

Третья глава посвящена исследованию задач оптимального управления для математических моделей процессов фильтрации, деформации и электрического поля и состоит из шести параграфов. **В первом параграфе** изучается задача оптимального управления для математической модели Осколкова нелинейной фильтрации. На основе абстрактных результатов второй главы

находятся достаточные условия существования решения задачи Коши и задачи Шоултера – Сидорова для нее. Находятся достаточные условия существования оптимального управления решениями рассмотренных задач. Строятся необходимые условия, которым должно удовлетворять оптимальное управление задачи. **Во втором параграфе** исследуется задача оптимального управления для математической модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости. На основе абстрактных результатов второй главы находятся достаточные условия существования единственного решения задачи Шоултера – Сидорова для нее. Доказывается теорема существования решения задачи оптимального управления решениями рассмотренных задач. **Третий параграф** посвящен изучению задачи оптимального управления для обобщенной математической модели Хоффа. На основе абстрактных результатов второй главы находятся достаточные условия существования решения задачи Коши и задачи Шоултера – Сидорова для нее. Находятся достаточные условия существования оптимального управления решениями рассмотренных задач. В случае $k = 1$ строятся необходимые условия, которым должно удовлетворять оптимальное управление. **В четвертом параграфе** изучается задача оптимального управления для математической модели деформации конструкции из двутавровых балок. На основе абстрактных результатов второй главы находятся достаточные условия существования решения задачи Коши и задачи Шоултера – Сидорова для нее. В случае $k = 1$ строятся необходимые условия, которым должно удовлетворять оптимальное управление задачи. **Пятый параграф** содержит изучение задачи оптимального управления для модели распределения потенциала электрического поля в полупроводнике. На основе абстрактных результатов второй главы находятся достаточные условия существования единственного решения задач Коши и Шоултера – Сидорова для нее. Доказывается теорема существования решения задачи оптимального управления. Строятся необходимые условия, которым должно удовлетворять оптимальное управление задачи. **В шестом параграфе** изу-

чается задача оптимального управления для математической фильтрационной модели Буссинеска. На основе абстрактных результатов второй главы находятся достаточные условия существования решения задачи Коши и задачи Шоултера – Сидорова для нее. Находятся достаточные условия существования оптимального управления решениями рассмотренных задач. Строятся необходимые условия, которым должно удовлетворять оптимальное управление задачи.

Четвертая глава содержит восемь параграфов и посвящена построению алгоритмов и описанию программ для численного исследования задач оптимального управления, изученных в главах 2 и 3. **В первом параграфе** исследуется применение метода декомпозиции для полулинейной задачи оптимального управления (0.0.14), (0.0.1) с начальным условием Шоултера – Сидорова или Коши, в которой искомой является пара (x, u) . При помощи данного метода строится эквивалентная задача оптимального управления с линейным уравнением и тремя искомыми функциями (x, v, u) . Доказывается теорема о существовании решения данной задачи оптимального управления. **Во втором параграфе** описывается метод штрафа для нахождения приближенных решений задач оптимального управления. Доказывается теорема о сходимости данного метода. **Третий параграф** посвящен разработке алгоритма численного метода нахождения приближенного решения задачи Коши и задачи Шоултера – Сидорова для абстрактного уравнения (0.0.14) на основе методов фазового пространства и Галеркина – Петрова. В силу возможного вырождения уравнения (0.0.14) данный численный метод модифицирован. **Четвертый параграф** посвящен разработке алгоритма численного метода решения задач оптимального управления на основе методов декомпозиции и штрафа, разработанных в пп. 4.1 и 4.2, и методов фазового пространства, Галеркина – Петрова и Ритца. **Пятый параграф** посвящен разработке алгоритма численного метода решения задач оптимального управления на основе метода покоординатного спуска с памятью. Следуя методу

Галеркина – Петрова, задачи сводятся к начальной задаче для нелинейной алгебро-дифференциальной системы с соответствующим функционалом стоимости. При помощи представления управления в виде многочленов и метода многошагового покоординатного спуска с памятью строится численный метод нахождения приближенного решения. **В параграфах шесть – восемь** содержится описание программ «Численное моделирование процесса нелинейной диффузии», «Численное моделирование неравновесной противоточной капиллярной пропитки в круге», «Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей фильтрации», «Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа», реализующих алгоритмы, представленные в пп. 4.3 – 4.5.

Пятая глава посвящена нахождению приближенных решений математических моделей и задач оптимального управления процессов фильтрации, деформации и электрического поля и состоит из четырех параграфов. В ней приведены результаты вычислительных экспериментов. **В первом параграфе** содержатся результаты вычислительного эксперимента для математических моделей упругости на отрезке и граfe. Рассмотрены различные комбинации параметров. Проведены исследования вычислительной точности численного метода. **Второй параграф** посвящен численному исследованию задачи оптимального управления для математических моделей упругости на основе метода декомпозиции при помощи программы «Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей фильтрации». Рассмотрены различные комбинации параметров функционала стоимости, которые позволяют сделать выводы о их значимости в нахождении приближенных решений. **Третий параграф** содержит результаты вычислительного эксперимента для математических моделей фильтрации в случае прямоугольника и параллелепипеда. **Четвертый параграф** посвящен численному исследованию задачи оптимального управления для математических моделей фильтрации на основе метода декомпозиции при помощи программы

«Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей фильтрации». Рассмотрены различные комбинации параметров функционала качества стоимости, которые позволяют сделать выводы о их значимости в нахождении приближенных решений. **Пятый параграф** посвящен численному исследованию задачи оптимального управления для обобщенной математической модели Буссинеска, математической модели распределения потенциала электрического поля в полупроводнике на основе метода многошагового покоординатного спуска с памятью при помощи программы «Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа».

Апробация. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались на VI международной конференции, посвященной 105-летию со дня рождения акад. М.А. Лаврентьева, «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2005) [175], Всероссийской научной конференции «Математика, механика, информатика» (Челябинск, 2006) [176], Международной конференции «Тихонов и современная математика» (Москва, 2006) [177], Международной конференции по дифференциальным уравнениям, посвященной 100-летию со дня рождения Я.Б. Лопатинского (International Conference on Differential Equations, dedicated to the 100th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky) (Львов, Украина, 2006) [212], Международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященной 100-летию со дня рождения акад. И.Н. Векуа (Новосибирск, 2007) [180], X всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи, 2009) [182], Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа» (Воронеж, 2012) [194], Всероссийском научном семинаре «Неклассические уравнения математической физики», посвященном 65-летию проф. В.Н. Врагова (Якутск, 2010) [184], Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященной 90-летию со дня рождения акад.

Н.Н. Яненко (Новосибирск, 2011) [188], Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», (СамДиф – 2011) (Самара, 2011) [189], Международной конференции «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», посвященной памяти В.К. Иванова (ААНЗ-2011) (Екатеринбург, 2011) [185], XIII всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Москва, 2012) [192], Международной научно-практической конференции «Измерения: состояние, перспективы развития» (Челябинск, 2012) [193], XXIII национальном научном симпозиуме с международным участием «Метрология и метрологическое обеспечение 2013» (XXIII National Scientific Symposium with International Participation «Metrology and Metrology Assurance 2013» (Созополь, Болгария, 2013) [197], Международной конференции «Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова» (Одесса, Украина, 2013) [196], Международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященной 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 2013) [198], Международной конференции «Semigroups of Operators: Theory and Applications» (Бжедлево, Польша, 2013) [213, 216], Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Сузdalь, 2014) [204], XII всероссийском совещании по проблемам управления (ВСПУ-2014) (Москва, 2014) [203], Всероссийской конференции с международным участием «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», посвященной памяти В.К. Иванова (ААНЗ-2014) (Челябинск, 2014) [207], Международном симпозиуме «Вырожденные полугруппы и пропагаторы уравнений соболевского типа» (Челябинск, 2014) [202], XV всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи, 2014) [206].

Ряд результатов диссертационного исследования был представлен и обсужден на семинарах профессора Г.А. Свиридиюка в Южно-Уральском государственном университете (г. Челябинск), профессора А. Фавини в Болонском университете (г. Болонья, Италия).

Результаты диссертационного исследования были представлены и обсуждены на Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», (СамДиф – 2015) (Самара, 2015), XVI всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Челябинск, 2015) [208], на семинаре профессора С.И. Кадченко в Магнитогорском государственном техническом университете им. Носова (г. Магнитогорск).

Благодарности. Считаю своим приятным долгом выразить благодарность научному консультанту, профессору Георгию Анатольевичу Свиридионову, за стимулирующие беседы и предоставленные возможности; коллективу кафедры уравнений математической физики за конструктивную критику и ценные советы; Алевтине Викторовне Келлер за помощь в подготовке работы; своей семье за неоценимую помощь, поддержку и терпение.

Глава 1. Полулинейные математические модели процессов фильтрации и деформации

1.1. Элементы нелинейного функционального анализа для исследования и построения математических моделей

Слабая сходимость

Определение 1.1.1. Пусть \mathfrak{X} – банахово пространство. Последовательность $\{x_n\} \subset \mathfrak{X}$ называется *слабо сходящейся*, если в \mathfrak{X} существует элемент x такой, что

$$\lim x^*(x_n) = x^*(x) \quad \forall x^* \in \mathfrak{X}^*.$$

Лемма 1.1.1. [134] Пусть $x_n \rightharpoonup x$ слабо в банаховом пространстве \mathfrak{X} . Тогда

- (i) последовательность $\{x_n\}$ ограничена;
- (ii) x принадлежит замыканию линейной оболочки множества $\{x_n\}$;
- (iii) $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

Определение 1.1.2. Подмножество S банахова пространства называется *относительно слабо секвенциально компактным*, если всякая последовательность в S содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. Если, вдобавок, слабые пределы всех таких подпоследовательностей лежат в S , то оно называется *слабо секвенциально компактным*.

Теорема 1.1.1. (теорема Банаха – Алаоглу) Замкнутый единичный шар в сепарабельном рефлексивном банаховом пространстве слабо секвенциально компактен.

Теорема 1.1.2. (теорема Мазура) Выпуклое замкнутое множество банахова пространства слабо секвенциально замкнуто.

Лемма 1.1.2. [54] Пусть Q_T ограниченная область в $\mathbb{R}_s^n \times \mathbb{R}_t$, g_n и g такие функции из $L_p(Q_T)$, $1 < p < \infty$, что

$$\|g_n\|_{L_p(Q_T)} < C, \quad g_n \rightarrow g \text{ п.в. в } Q_T,$$

тогда $g_n \rightharpoonup g$ слабо в $L_p(Q_T)$.

Лемма 1.1.3. [54] Пусть Q_T ограниченная область в $\mathbb{R}_s^n \times \mathbb{R}_t$, x_n и x такие функции из $L_p(Q_T)$, $1 < p < \infty$, что $|x_n|^{p-2}x_n \rightarrow |x|^{p-2}x$ п.в. в Q_T , и $|x_n|^{p-2}x_n \rightharpoonup \mu$ слабо в $L_q(Q_T)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, тогда $\mu = |x|^{p-2}x$.

Лемма 1.1.4. [54] Пусть $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1$ – рефлексивные банаховы пространства, причем

$$\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_1,$$

а вложение

$$\mathfrak{B}_0 \Subset \mathfrak{B}$$

компактно. Пусть множество

$$W = \{v \mid v \in L_{p_0}(0, T; \mathfrak{B}_0), \frac{dv}{dt} \in L_{p_1}(0, T; \mathfrak{B}_1)\},$$

где T конечно и $1 < p_i < \infty, i = 0, 1$. Тогда вложение W в $L_{p_0}(0, T; \mathfrak{B})$ компактно.

Операторы в банаховых пространствах

Пусть \mathfrak{X} – вещественное рефлексивное сепарабельное банахово пространство.

Определение 1.1.3. Оператор $A : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ называется *радикально непрерывным*, если при любых фиксированных $x, y \in \mathfrak{X}$ вещественная функция

$$\sigma \rightarrow \langle A(x + \sigma y), y \rangle$$

непрерывна на $[0, 1]$.

Определение 1.1.4. Пусть x, y – произвольные элементы из \mathfrak{X} . Оператор $A : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ называется

монотонным, если

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq 0;$$

строго монотонным, если

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle > 0 \quad \text{для } x \neq y;$$

сильно монотонным (с постоянной монотонностью μ), если

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2, \quad \mu > 0;$$

s-монотонным, если $A \in C^r(\mathfrak{X}; \mathfrak{X}^*)$, $r \geq 1$ и

$$\langle A'_y x, x \rangle > 0, \quad x, y \neq 0.$$

Лемма 1.1.5. [79] Для гладких операторов имеют место следующие включения: множество строго монотонных операторов \supset множество s-монотонных операторов \supset множество сильно монотонных операторов.

Определение 1.1.5. Оператор $A : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ называется *коэрцитивным*, если

$$\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} \frac{\langle A(y), y \rangle}{\|y\|} = +\infty.$$

Определение 1.1.6. Оператор $A : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ называется *сильно коэрцитивным*, если

$$\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} \frac{\langle A(x + y), y \rangle}{\|y\|} = +\infty \quad \forall x \in \mathfrak{X}.$$

Определение 1.1.7. Оператор $A : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ называется *p-коэрцитивным*, если $\exists C^A, C_A > 0$, и $\exists p \geq 2$ такие, что $\langle A(x), x \rangle \geq C_A \|x\|^p$ и $\|A(x)\|_* \leq C^A \|x\|^{p-1} \forall x \in \mathfrak{X}$.

Лемма 1.1.6. [79] *p-коэрцитивный оператор $A : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ сильно коэрцитивен.*

Теорема 1.1.3. [16] (теорема Вишика – Минти – Браудера) *Пусть оператор $A : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ – радиально непрерывный строго монотонный коэрцитивный оператор. Тогда при любом $y \in \mathfrak{X}^*$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ уравнения*

$$A(x) = y.$$

Пусть \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} – банаховы пространства и $A : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ – непрерывный оператор, определенный на некотором открытом подмножестве в \mathfrak{X} .

Определение 1.1.8. Оператор A называется *дифференцируемым по Фреше в точке $x_0 \in \mathfrak{X}$* , если существует такой линейный непрерывный оператор $F \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, что

$$\|A(x_0 + y) - A(x_0) - Fy\| = \tilde{o}(r)$$

для $\|y\| \leq r$ при $r \rightarrow 0$.

Оператор F называется *производной Фреше оператора A в точке x_0* и обозначается $F = A'_{x_0}$.

Свойства производной Фреше:

- (i) Если A'_{x_0} существует, то она единственная.
- (ii) Если $x_0 \mapsto A'_{x_0}$ – непрерывное линейное отображение из \mathfrak{X} в $\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, то говорят, что A принадлежит *классу C^1* . По индукции определяются отображения класса C^p , $p = 1, 2, \dots$, запись $A \in C^p$ означает, что $D(D^{p-1}A)(x_0)$ лежит в

$$\underbrace{\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \dots, \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \dots))}_p.$$

- (iii) Композиция C^p -отображений есть C^p -отображение.

Теорема 1.1.4. [61] (теорема о неявной функции) *Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ – банаховы пространства и A – непрерывное отображение открытого множества $U \subset \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ в \mathfrak{Z} . Предположим, что A имеет производную Фреше $A'_x(x, y)$ по x , которая непрерывна в U . Пусть $(x_0, y_0) \in U$ и $A(x_0, y_0) = 0$. Если оператор $F = A'_x(x_0, y_0)$ – изоморфизм пространства \mathfrak{X} на \mathfrak{Z} , то*

- (i) *существуют шар $\{y : \|y - y_0\| < r\} = B_r(y_0)$ и единственное непрерывное отображение $\delta : B_r(y_0) \rightarrow \mathfrak{X}$ такие, что*

$$\delta(y_0) = x_0 \text{ и } A(\delta(y), y) = 0;$$

- (ii) *в случае, когда A принадлежит классу C^1 , $\delta(y)$ тоже принадлежит классу C^1 и*

$$\delta_y(y) = -[A'_x(\delta(y), y)]^{-1} \circ A'_y(\delta(y), y);$$

(iii) в случае, когда A принадлежит классу $C^p, p > 1$, $\delta(y)$ тоже принадлежит C^p .

Лемма 1.1.7. [74] Пусть $A \in C^r(\mathfrak{X}; \mathfrak{X}^*)$, $r \in \mathbb{N}$ – однородный оператор порядка $k \in \overline{\mathbb{R}}_+$, имеющий симметричную производную Фреше. Тогда имеет место следующее соотношение

$$\frac{d}{dt} \langle A(u), u \rangle = (k+1) \langle A(u), \dot{u} \rangle.$$

Лемма 1.1.8. [21] (лемма Гронуолла – Беллмана) Пусть $x, f \in C[t_0, +\infty)$ и $x(t) \geq 0, f(t) \geq 0$ для всех $t \geq t_0$. Тогда, если

$$x(t) \leq C + \int_{t_0}^t f(\tau)x(\tau)d\tau \quad \forall t \geq t_0$$

при некотором $C > 0$, то

$$x(t) \leq C \cdot \exp \left\{ \int_{t_0}^t f(\tau)d\tau \right\} \quad \forall t \geq t_0.$$

Алгебро-дифференциальные системы

Теорема 1.1.5. [76] Пусть A – квадратная матрица порядка n , $\text{rang } A \leq n$; P^A (P_A) – проектор на $\text{coker } A$ ($\ker A$) вдоль $\text{im } A$ ($\text{coim } A$); $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ – вектор-функция на \mathbb{R}^n , $F_i \in C^r$, $r \geq 1$. Задача

$$A \dot{x} = F(x), \quad A(x(0) - x_0) = 0$$

локально разрешима при $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, если

$$\text{rang } P^A F'_{x_0} P_A = n - \text{rang } A,$$

где F'_{x_0} – матрица Якоби отображения F в точке x_0 .

1.2. Функциональные пространства и дифференциальные операторы в математических моделях

Определение 1.2.1. Ограниченнюю областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ будем называть областью класса C^k , если существуют числа $\alpha, \beta > 0$ и конечное число локальных карт $\{a_i : i = 1, \dots, m\} \subset C^k$, соответствующих локальным системам

координат $\{O_i; x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i, i = 1, \dots, m\}$, таким, что граница области $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^m \{(x_1^i, \bar{x}^i) : x_1^i = a_i(\bar{x}^i), |\bar{x}^i| < \alpha\}$, причем

$$\begin{aligned} \{(x_1^i, \bar{x}^i) : a_i(\bar{x}^i) < x_1^i < a_i(\bar{x}^i) + \beta, |\bar{x}^i| < \alpha\} &\subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \\ \{(x_1^i, \bar{x}^i) : a_i(\bar{x}^i) - \beta < x_1^i < a_i(\bar{x}^i), |\bar{x}^i| < \alpha\} &\subset \Omega, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

$\varepsilon \partial e \bar{x}^i = (x_2^i, \dots, x_n^i)$, а условие $|\bar{x}^i| < \alpha$ означает, что $|x_j^i| < \alpha$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 2, \dots, n$.

В дальнейшем предполагаем, что область Ω класса C^∞ . Введем обозначение

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, α_i — неотрицательные целые числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Пространства Соболева

$$W_p^l(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L_p(\Omega) \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \ | \alpha | \leq l\},$$

где l — неотрицательное целое число, $1 \leq p < \infty$. Пространство $W_p^l(\Omega)$ является банаховым относительно нормы

$$\|x\|_{l,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \int_{\Omega} |\partial^\alpha x|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пространство $W_p^l(\Omega)$ рефлексивно при $1 < p < \infty$, что эквивалентно утверждению о слабой компактности единичного шара. При $l > l'$ ограниченное множество $\{x \in W_p^l(\Omega) : \|x\|_{l,p} \leq \text{const}\}$ компактно в $W_p^{l'}(\Omega)$. Если при $p = 2$ пространство $W_p^l(\Omega)$ снабдить скалярным произведением

$$(x, v)_l = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq l} \partial^\alpha x \overline{\partial^\alpha v} ds,$$

то оно будет гильбертовым.

Теорема 1.2.1. [108] (теорема вложения Соболева) *Если целое число k , $0 \leq k < l$ такое, что $0 \leq \frac{1}{q} \equiv \frac{1}{p} - \frac{l-k}{n} \leq 1$, то вложение $W_p^l(\Omega) \hookrightarrow W_q^k(\Omega)$ непрерывно. Если, вдобавок, $q' < q$, то вложение $W_p^l(\Omega) \Subset W_{q'}^k(\Omega)$ компактно.*

Эллиптические дифференциальные операторы

Семейство $\{B_j : j = 0, 1, \dots, k\}$ дифференциальных операторов на $\partial\Omega$

$$B_j = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_\alpha^j(s) \partial^\alpha, \quad b_\alpha^j \in C^\infty(\partial\Omega) \quad (1.2.1)$$

называется *нормальной системой*, если $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k$ и для всякого нормального к $\partial\Omega$ вектора ν_s , $s \in \partial\Omega$ выполнено условие

$$\sum_{|\alpha|=m_j} b_\alpha^j(s) \nu_s^\alpha \neq 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Пусть семейство $\{B_j : j = 0, 1, \dots, k\}$ образует нормальную систему, причем $m_j < l$. Введем в рассмотрение пространства

$$W_{p,\{B_j\}}^l = \{x \in W_p^l(\Omega) : B_j x = 0, s \in \partial\Omega\}.$$

$W_{p,\{B_j\}}^l$ – банаховы подпространства пространств $W_p^l(\Omega)$.

Определение 1.2.2. *Дифференциальный оператор*

$$A = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(s) \partial^\alpha, \quad a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

удовлетворяет условию эллиптичности (по Петровскому), если

$$a(s, \xi) \equiv \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(s) \xi^\alpha \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \forall s \in \bar{\Omega}.$$

Определение 1.2.3. *Семейство $\{B_j, j = 0, 1, \dots, m-1\}$ дифференциальных операторов на $\partial\Omega$ вида (1.2.1) удовлетворяет условию дополнительности (Шапиро – Лопатинского) по отношению к A , если $\forall s \in \partial\Omega$, для соответствующего нормального вектора ν_s и любого касательного вектора $\xi_s \neq 0$ многочлены*

$$b_j(s, \xi_s + \tau \nu_s) = \sum_{|\alpha|=m_j} b_\alpha^j(s) (\xi_s + \tau \nu_s)^\alpha$$

от переменной τ линейно независимы по модулю многочлена

$$a^+(s; \xi, \eta, \tau) = \prod_{k=1}^m (\tau - \tau_k^+),$$

где $\tau_k^+ = \tau_k^+(s, \xi, \eta)$, $k = 1, \dots, m$ — корни с положительной мнимой частью многочлена $a(s, \xi + \tau\eta)$ от переменного $\tau; \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ и линейно независимы.

Пусть k — неотрицательное целое число, $\{B_j : j = 0, 1, \dots, m-1\}$ — нормальная система дифференциальных операторов, дополнительная по отношению к оператору A , удовлетворяющему условию эллиптичности. Оператор A , определенный на пространствах $W_{p, \{B_j\}}^{2m+k}$, будем называть эллиптическим дифференциальным оператором.

Теорема 1.2.2. (i) Эллиптический дифференциальный оператор

$$A : W_{p, \{B_j\}}^{2m+k}(\Omega) \rightarrow W_p^k(\Omega)$$

является нетеровым, и его индекс $\text{ind} A$ не зависит от $k = 0, 1, \dots$;

(ii) $\forall x \in W_{p, \{B_j\}}^{2m+k}(\Omega)$ имеет место оценка:

$$c_1 \|x\|_{2m+k, p} \leq \|Ax\|_{k, p} + \|x\|_{0, 1} \leq c_2 \|x\|_{2m+k, p},$$

где c_1, c_2 — константы, зависящие от $\Omega, A, \{B_j\}, k, p$, но не зависящие от x ;

(iii) если $x \in W_p^{2m}(\Omega)$, $Ax \in W_p^k(\Omega)$ и $B_j x \in W_{p, p}^{2m+k-m_j-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$, то x принадлежит пространству $W_p^{2m+k}(\Omega)$;

(vi) существует проектор P вдоль $\ker A$ на $\text{coim} A$, причем имеют место оценки:

$$c_3 \|x\|_{2m+k, p} \leq \|Ax\|_{k, p} \leq c_4 \|x\|_{2m+k, p}; \quad x \in PW_{p, \{B_j\}}^{2m+k}(\Omega),$$

где c_3, c_4 — константы, не зависящие от x ;

(v) ядро $\ker A$ и коядро $\text{coker} A$ не зависят от $1 < p < \infty$, $0 < \mu < 1$ и $k = 0, 1, \dots$. Имеют место включения

$$\ker A \subset \{x \in C^\infty(\bar{\Omega}) : B_j x = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad \text{coker} A \subset C^\infty(\bar{\Omega});$$

(vi) либо резолювентное множество оператора A пусто, либо спектр $\sigma(A)$ состоит из изолированных точек, являющихся собственными значениями конечной кратности, сгущающихся только на бесконечности; оператор A_p , заданный соотношениями $A_p x = Ax$, $D(A_p) = W_{p, B_j}^{2m}(\Omega)$, рассматриваемый как отображение из $D(A_p)$ в $L_p(\Omega)$, является фредгольмовским.

Пространства векторных полей

Обозначим через $\overset{\circ}{\mathbb{H}}^1 = (\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$ пространства вектор-функций $x = x(s, t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенных на области Ω .

Рассмотрим линеал

$$\mathcal{V} = \{x \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot x = 0\}$$

соленоидальных вектор-функций. Обозначим через \mathbb{L}_σ и \mathbb{H}_σ замыкание по норме пространства \mathbb{L}_2 и $\overset{\circ}{\mathbb{H}}^1$ линеала \mathcal{V} соответственно. Пространство \mathbb{L}_σ гильбертово со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из пространства \mathbb{L}_2 . Кроме того, в работе [52] показано, что существует расщепление $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_\sigma \oplus \mathbb{L}_\pi$, где \mathbb{L}_π – ортогональное дополнение к \mathbb{L}_σ . Обозначим через $\Sigma : \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{L}_\sigma$ соответствующий ортопроектор. Пространство $\overset{\circ}{\mathbb{H}}^1$ непрерывно и плотно вложено в пространство \mathbb{L} . Сужение проектора Σ на подпространство $\overset{\circ}{\mathbb{H}}^1$ является непрерывным оператором $\tilde{\Sigma} : \overset{\circ}{\mathbb{H}}^1 \rightarrow \overset{\circ}{\mathbb{H}}^1$, для которого $\text{im } \tilde{\Sigma} = \mathbb{H}_\sigma$, $\ker \tilde{\Sigma} = \mathbb{H}_\pi$. Тогда $\overset{\circ}{\mathbb{H}}^1 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, $\mathbb{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbb{H}}^1 = \mathbb{H}_\sigma^2 \oplus \mathbb{H}_\pi^2$.

Теорема 1.2.3. [107] Пусть Ω – открытое ограниченное липшицево множество. Тогда

$$\mathbb{H}_\sigma = \{x \in \overset{\circ}{\mathbb{H}}^1 : \nabla \cdot x = 0\}.$$

Лемма 1.2.1. [43] Пусть $f \in \mathbb{L}_2(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, тогда для того чтобы имело место равенство

$$\int_0^T \langle f, v \rangle dt = 0 \quad \forall v \in \mathbb{L}_2(0, T; \mathbb{H}_\sigma),$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая функция $p(t, x)$, $p \in \mathbb{L}_2(0, T; \mathbb{L}_2(\Omega)/\mathbb{R})$, что $f = \nabla_s p$.

Теорема 1.2.4. [102] Формулой $A = (-\nabla^2)^n : \mathbb{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbb{H}}^1 \rightarrow \mathbb{L}_2$ задается линейный непрерывный оператор с положительным дискретным конечнократным спектром, сгущающимся к точке $+\infty$, причем отображение $A : \mathbb{H}_{\sigma(\pi)}^2 \rightarrow \mathbb{H}_{\sigma(\pi)}$ биективно.

Обозначим через \tilde{A} сужение оператора A на \mathbb{H}_{σ}^2 .

Теорема 1.2.5. (теорема Солонникова – Воровича – Юдовича) Спектр оператора \tilde{A} положителен, дискретен, конечнократен и сгущается к точке $+\infty$.

Положим \mathbb{H}_{σ}^* пространство, двойственное к пространству \mathbb{H}_{σ} относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Построим оператор

$$\langle B(x, y), z \rangle = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} x_i \frac{\partial y_j}{\partial s_i} z_j ds.$$

Теорема 1.2.6. [107] (i) При $n = 2, 3, 4$ оператор $B : \mathbb{H}_{\sigma} \times \mathbb{H}_{\sigma} \rightarrow \mathbb{H}_{\sigma}^*$ удовлетворяет неравенству

$$|\langle B(x, y), z \rangle| \leq C^B \|x\| \|y\| \|z\|, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{H}_{\sigma}.$$

$$(ii) \quad \langle B(x, y), z \rangle = -\langle B(x, z), y \rangle \quad \forall x, y, z \in \mathbb{H}_{\sigma}.$$

$$(iii) \quad \forall x, y \in \mathbb{H}_{\sigma} \text{ имеет место равенство } \langle B(y, x), x \rangle = 0.$$

1.3. Морфология фазового пространства абстрактного уравнения с монотонным оператором

Динамический случай

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}_j, \mathfrak{B}_j^*)$, $j = \overline{1, k}$, $k \in \mathbb{N}$ – дуальные (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_1^* \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_k^* \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \quad (1.3.1)$$

плотны и непрерывны. Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, самосопряженный, неотрицательно определенный, фредгольмов оператор, чей ортонормальный (в смысле \mathcal{H}) набор собственных векторов $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве \mathfrak{H} , а $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, симметричный, 2-коэрцитивный оператор. Пусть $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*), r \geq 1, j = \overline{1, k}$ – s-монотонные и p_j -коэрцитивные операторы, где $p_j \geq 2$ и $p_k = \max_j p_j$, имеющие симметричную производную Фреше.

Рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0 \quad (1.3.2)$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u. \quad (1.3.3)$$

Ввиду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $\mathfrak{H} \supset \ker L \equiv \text{coker } L \subset \mathfrak{H}^*$. Поскольку $\text{coker } L$ конечномерно, то $\mathfrak{H}^* = \text{coker } L \oplus \text{im } L$, $\mathfrak{B}_k^* = \text{coker } L \oplus [\text{im } L \cap \mathfrak{B}_k^*]$. Значит, существует проектор Q вдоль $\text{coker } L$ на $\text{im } L$.

Сделаем допущение:

$$(\mathbb{I} - Q)u \text{ не зависит от } t \in (0, T). \quad (1.3.4)$$

Тогда, если $x = x(t), t \in (0, T)$ – решение уравнения (1.3.3), то оно лежит во множестве

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{H} : (\mathbb{I} - Q)Mx + (\mathbb{I} - Q) \sum_{j=1}^k N_j(x) = (\mathbb{I} - Q)u\}, \\ \quad \text{если } \ker L \neq \{0\}; \\ \mathfrak{H}, \quad \text{если } \ker L = \{0\}, \end{cases} \quad (1.3.5)$$

т.е. $x(t) \in \mathfrak{M} \forall t \in (0, T)$.

Введем в рассмотрение множество

$$\text{coim } L = \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi \rangle = 0 \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}.$$

В силу фредгольмовости оператора L получим $\mathfrak{H} = \text{coim } L \oplus \ker L$. Обозначим за $\overline{\text{coim } L}$ замыкание $\text{coim } L$ в топологии \mathfrak{B}_k . Тогда $\mathfrak{B}_k = \ker L \oplus \overline{\text{coim } L}$. Обозначим через P проектор вдоль $\ker L$ на $\text{coim } L$. Пусть точка $x_0 \in \mathfrak{M}$. Положим $x_0^1 = Px_0 \in \text{coim } L$.

Определение 1.3.1. Назовем множество \mathfrak{M} *банаховым C^r -многообразием в точке $x_0 \in \mathfrak{M}$* , если существуют окрестности $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{O}_1 \subset \text{coim } L$ точек x_0 и $x_0^1 = Px_0$ соответственно и существует C^r -диффеоморфизм $D : \mathfrak{O}_1 \rightarrow \mathfrak{O}$ такой, что D^{-1} есть сужение на \mathfrak{O} проектора P . Назовем пару (D, \mathfrak{O}_1) *картой*. Множество \mathfrak{M} называется *банаховым C^r -многообразием*, моделируемым пространством $\text{coim } L$, если в каждой своей точке оно имеет карту. Связное банахово C^r -многообразие называется *простым*, если любой его атлас эквивалентен атласу, содержащему единственную карту.

Теорема 1.3.1. *Пусть выполнено условие (1.3.4), тогда множество \mathfrak{M} есть банахово C^r -многообразие, диффеоморфно проектирующееся вдоль $\ker L$ на $\text{coim } L$ всюду, за исключением, быть может, точки нуль.*

Доказательство. В силу представления пространства $\mathfrak{H} = \ker L \oplus \text{coim } L$ и существования проектора P , любой вектор $x \in \mathfrak{H}$ представим единственным способом в виде $x = x^0 + x^1$, где $x^0 \in \ker L$, а $x^1 \in \text{coim } L$. Зафиксируем $x^1 \in \text{coim } L$ и докажем существование единственного корня уравнения

$$(\mathbb{I} - Q)M(x^0 + x^1) + (\mathbb{I} - Q)\sum_{j=1}^k N_j(x^0 + x^1) = (\mathbb{I} - Q)u, \quad x^0 \in \ker L. \quad (1.3.6)$$

Для этого рассмотрим оператор $A \equiv (\mathbb{I} - Q)(M + \sum_{j=1}^k N_j)(\cdot + x^1) : \ker L \rightarrow \text{coker } L$. В силу p_j -коэрцитивности операторов $N_j : \mathfrak{B}_j \rightarrow \mathfrak{B}_j^*$ и 2-коэрцитивности оператора $M \forall x^1 \in \text{coim } L$ имеем

$$\lim_{\|x^0\| \rightarrow \infty} \frac{\langle A(x^0), x^0 \rangle}{\|x^0\|} = \lim_{\|x^0\| \rightarrow \infty} \frac{\langle (\mathbb{I} - Q)(M + \sum_{j=1}^k N_j)(x^0 + x^1), x^0 \rangle}{\|x^0\|} =$$

$$= \lim_{\|x^0\| \rightarrow \infty} \frac{M(x^0 + x^1), x^0}{\|x^0\|} + \sum_{j=1}^k \lim_{\|x^0\| \rightarrow \infty} \frac{\langle N_j(x^0 + x^1), x^0 \rangle}{\|x^0\|} = +\infty.$$

В силу s -монотонности операторов $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*)$, $r \geq 1$ и неотрицательной определенности оператора M оператор A строго монотонен, поскольку

$$\begin{aligned} \langle A(x_1^0) - A(x_2^0), x_1^0 - x_2^0 \rangle &= \langle M(x_1^0 - x_2^0), (x_1^0 - x_2^0) \rangle + \\ &+ \sum_{j=1}^k \langle N_j(x_1^0 + x^1) - N_j(x_2^0 + x^1), (x_1^0 + x^1) - (x_2^0 + x^1) \rangle > 0 \\ \forall x_1^0, x_2^0 \in \ker L, \quad x_1^0 &\neq x_2^0; \end{aligned}$$

и в силу своей конструкции оператор $A \in C^r(\ker L, \operatorname{coker} L)$. Следовательно, в силу теоремы 1.1.3 существует единственный корень $x^0 \in \ker L$ уравнения (1.3.6). Итак, установлено отображение $\delta : \operatorname{coim} L \rightarrow \ker L$ такое, что

$$x^0 = \delta(x^1) \quad \forall x^1 \in \operatorname{coim} L. \quad (1.3.7)$$

Это, в свою очередь, означает, что для любого вектора $x^1 \in \operatorname{coim} L$ существует единственный вектор $x^0 \in \ker L$ такой, что $x^0 + x^1 \in \mathfrak{M}$.

Покажем, что $\delta \in C^r$, $r \geq 1$. Для этого воспользуемся теоремой 1.1.4, применив ее к отображению $A \equiv (\mathbb{I} - Q)(M + \sum_{j=1}^k N_j)(\cdot + x^1) : \ker L \rightarrow \operatorname{coker} L$.

Пусть $x = x^0 + x^1 \in \mathfrak{M}$. Производная Фреше в точке x есть $((\mathbb{I} - Q)(M + \sum_{j=1}^k N_j)'_x = (\mathbb{I} - Q)M(\mathbb{I} - P) + (\mathbb{I} - Q)\sum_{j=1}^k N'_{jx}(\mathbb{I} - P)$. Ввиду s -монотонности операторов N_j имеем $\forall z \in \ker L \setminus \{0\}$

$$\langle (\mathbb{I} - Q)M'_x z, z \rangle + \sum_{j=1}^k \langle (\mathbb{I} - Q)N'_{jx} z, z \rangle = \langle Mz, z \rangle + \sum_{j=1}^k \langle N'_{jx} z, z \rangle > 0.$$

Поэтому существуют окрестности $\mathfrak{O}_0 \subset \ker L$ и $\mathfrak{O}_1 \subset \operatorname{coim} L$ точек x^0 и x^1 и отображение $D \in C^r(\mathfrak{O}_1; \mathfrak{O}_0)$, $r \geq 1$, такое, что $D(x^1) = x^0$. В силу единственности решения уравнения (1.3.6)

$$D = \delta.$$

Тогда искомый диффеоморфизм $\Gamma : \operatorname{coim} L \rightarrow \mathfrak{M}$ имеет вид $\Gamma(x^1) = x^1 + \delta(x^1)$. Оператор Γ^{-1} есть сужение проектора P на \mathfrak{M} . \square

Эволюционный случай

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*)$ – дуальные (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаевых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{B}_k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_1 \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \hookrightarrow \mathfrak{B}_1^* \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_k^* \quad (1.3.8)$$

плотны и непрерывны.

Рассмотрим задачу Коши (1.3.2) для полулинейного уравнения соболевского типа (1.3.3). Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ и $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*)$, $j = \overline{1, k}$ обладают всеми свойствами, введенными в начале параграфа.

Ввиду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $\mathfrak{H} \supset \ker L \equiv \text{coker } L \subset \mathfrak{H}^*$, тогда $\mathfrak{H}^* = \text{coker } L \oplus \text{im } L$. Обозначим через $\overline{\text{im } L}$ замыкание $\text{im } L$ в топологии \mathfrak{B}_k^* , тогда $\mathfrak{B}_k^* = \text{coker } L \oplus \overline{\text{im } L}$. Обозначим через Q проектор \mathfrak{B}_k^* вдоль $\text{coker } L$ на $\overline{\text{im } L}$ и аналогично динамическому случаю сделаем допущение:

$$(\mathbb{I} - Q)u \text{ не зависит от } t \in (0, T). \quad (1.3.9)$$

Тогда, если $x = x(t), t \in [0, T]$ – решение уравнения (1.3.3), то оно с необходимостью лежит во множестве

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{B}_k : (\mathbb{I} - Q)Mx + (\mathbb{I} - Q) \sum_{j=1}^k N_j(x) = (\mathbb{I} - Q)u\}, \\ \text{если } \ker L \neq \{0\}; \\ \mathfrak{B}_k, \quad \text{если } \ker L = \{0\}. \end{cases} \quad (1.3.10)$$

Аналогично динамическому случаю введем в рассмотрение множество

$$\text{coim } L = \{u \in \mathfrak{H} : \langle u, v \rangle = 0 \ \forall v \in \ker L \setminus \{0\}\}.$$

Обозначим через P проектор вдоль $\ker L$ на $\text{coim } L \cap \mathfrak{B}_k \equiv \tilde{\mathfrak{B}}_k$. Ввиду (1.3.8) $\mathfrak{B}_k = \ker L \oplus \tilde{\mathfrak{B}}_k$.

Определение 1.3.2. Назовем множество \mathfrak{M} *банаховым C^r -многообразием в точке $x_0 \in \mathfrak{M}$* , если существуют окрестности $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{O}_1 \subset \tilde{\mathfrak{B}}_k$ точек x_0 и $x_0^1 = Px_0$ соответственно и существует C^r -диффеоморфизм $D : \mathfrak{O}_1 \rightarrow \mathfrak{O}$ такой, что D^{-1} есть сужение на \mathfrak{O} проектора P . Назовем пару (D, \mathfrak{O}_1) *картой*. Множество \mathfrak{M} называется *банаховым C^r -многообразием*, моделируемым пространством $\tilde{\mathfrak{B}}_k$, если в каждой своей точке оно имеет карту. Связное банахово C^r -многообразие называется *простым*, если любой его атлас эквивалентен атласу, содержащему единственную карту.

Теорема 1.3.2. *Пусть выполнено условие (1.3.9), тогда множество \mathfrak{M} есть банахово C^r -многообразие, диффеоморфно проектирующееся вдоль $\ker L$ на $\tilde{\mathfrak{B}}_k$ всюду, за исключением, быть может, точки нуль.*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.3.1. В силу представления пространства $\mathfrak{B}_k = \ker L \oplus \tilde{\mathfrak{B}}_k$ и существования проектора P любой вектор $x \in \mathfrak{B}_k$ представим единственным способом в виде $x = x^0 + x^1$, где $x^0 \in \ker L$, а $x^1 \in \tilde{\mathfrak{B}}_k$. Зафиксируем $x^1 \in \tilde{\mathfrak{B}}_k$. В силу теоремы 1.1.3 существует единственный корень $x^0 \in \ker L$ уравнения

$$(\mathbb{I} - Q)M(x^0 + x^1) + (\mathbb{I} - Q) \sum_{j=1}^k N_j(x^0 + x^1) = (\mathbb{I} - Q)u, \quad x^0 \in \ker L. \quad (1.3.11)$$

Итак, существует отображение $\delta : \tilde{\mathfrak{B}}_k \rightarrow \ker L$ такое, что

$$x^0 = \delta(x^1) \quad \forall x^1 \in \tilde{\mathfrak{B}}_k. \quad (1.3.12)$$

Что, в свою очередь, означает, что для любого вектора $x^1 \in \tilde{\mathfrak{B}}_k$ существует единственный вектор $x^0 \in \ker L$ такой, что $x^0 + x^1 \in \mathfrak{M}$.

В силу единственности решения уравнения (1.3.11) и теоремы 1.1.4 отображение $\delta \in C^r$, $r \geq 1$. Тогда искомый диффеоморфизм $\Gamma : \tilde{\mathfrak{B}}_k \rightarrow \mathfrak{M}$ имеет вид $\Gamma(x^1) = x^1 + \delta(x^1)$, а оператор Γ^{-1} есть сужение проектора P на \mathfrak{M} . \square

1.4. Математическая модель Осколкова нелинейной фильтрации

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле

$$x(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \quad (1.4.1)$$

для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации

$$(\lambda - \Delta)x_t - \alpha\Delta x + |x|^{p-2}x = u. \quad (1.4.2)$$

Условие Дирихле (1.4.1) и уравнение (1.4.2) образуют модель Осколкова нелинейной фильтрации.

Рассмотрим условие Шоуолтера – Сидорова

$$(\lambda - \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, s \in \Omega \quad (1.4.3)$$

или условие Коши

$$x(s, 0) = x_0(s), s \in \Omega \quad (1.4.4)$$

для модели (1.4.1), (1.4.2).

Обозначим через $\mathfrak{H} = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{B} = L_p(\Omega)$, $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ (все функциональные пространства определены на области Ω). Заметим, что в силу теоремы 1.2.1 при $n \geq 2$ и $2 \leq p \leq 2 + \frac{4}{n-2}$ пространство $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$ непрерывно, если $2 \leq p < 2 + \frac{4}{n-2}$, то $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \Subset L_p(\Omega)$ компактно. Если $n = 2$, то вложение пространств $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \Subset L_p(\Omega)$ компактно. Положим пространство $\mathfrak{H}^* = W_2^{-1}(\Omega)$, $\mathfrak{B}^* = L_q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда в силу теоремы 1.2.1 выполнены вложения (1.3.1). Операторы L , M и N определим формулами:

$$\langle Lx, y \rangle = \int_{\Omega} (\lambda xy + \nabla x \cdot \nabla y) ds \quad \forall x, y \in \mathfrak{H},$$

$$\langle Mx, y \rangle = \int_{\Omega} \alpha \nabla x \cdot \nabla y ds \quad \forall x, y \in \mathfrak{H},$$

$$\langle N(x), y \rangle = \int_{\Omega} |x|^{p-2}xy ds \quad \forall x, y \in \mathfrak{B},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в \mathcal{H} . Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω , а через $\{\lambda_k\}$ – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности.

Лемма 1.4.1. (i) *При всех $\lambda \geq -\lambda_1$ оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен, причем ортонормальное семейство $\{\varphi_k\}$ его функций тотально в пространстве \mathfrak{B} .*

(ii) *При всех $\alpha \in \mathbb{R}_+$ оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ симметричен и 2-коэрцитивен.*

(iii) *Оператор $N \in C^1(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ s -монотонен и p -коэрцитивен.*

Доказательство. Утверждение (i), (ii) следует из теоремы 1.2.2 и построения оператора M :

$$\langle Mx, x \rangle = \int_{\Omega} \alpha \nabla x^2 ds > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{W} \frac{1}{2}(\Omega), \quad x \neq 0.$$

Покажем справедливость утверждения (iii). Производная Фреше оператора N в точке $x \in \mathfrak{B}$ определяется формулой

$$|\langle N'_x y, w \rangle| = \left| \int_{\Omega} (p-1)|x|^{p-2} y w \, ds \right| \leq (p-1) \|x\|_{L^p(\Omega)}^{p-2} \|y\|_{L^p(\Omega)} \|w\|_{L^p(\Omega)}.$$

Отсюда вытекает, что оператор $N \in C^1(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ s -монотонен

$$\langle N'_x y, y \rangle = \int_{\Omega} (p-1)|x|^{p-2} y^2 \, ds > 0, \quad x, y \in \mathfrak{B}, \quad x, y \neq 0$$

и p -коэрцитивен

$$\langle N(x), x \rangle = \int_{\Omega} |x|^p \, ds = \|x\|_{L_p(\Omega)}^p.$$

□

При условии $\lambda \geq -\lambda_1$

$$\ker L = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \text{span}\{\varphi_1\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\text{im } L = \begin{cases} \mathfrak{H}^*, \text{ если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{H}^* : \langle x, \varphi_1 \rangle = 0\}, \text{ если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases}$$

$$\text{coim } L = \begin{cases} \mathfrak{H}, \text{ если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi_1 \rangle = 0\}, \text{ если } \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Отсюда проекторы

$$P = Q = \begin{cases} \mathbb{I}, \text{ если } \lambda > -\lambda_1; \\ \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi_1 \rangle, \text{ если } \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Таким образом мы провели редукцию задачи (1.4.1) – (1.4.3) к задаче Шоуолтера – Сидорова (0.0.16) для полулинейного уравнения соболевского типа (1.3.3) и задачи (1.4.1), (1.4.2), (1.4.4) к задаче Коши (0.0.15) для полулинейного уравнения соболевского типа (1.3.3).

Построим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{H}, \text{ если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{H} : \int_{\Omega} (-\alpha \Delta x + |x|^{p-2} x) \varphi_1 \, ds = \int_{\Omega} u \varphi_1 \, ds\}, \text{ если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases}$$

и сделаем допущение:

$$(\mathbb{I} - Q)u \text{ не зависит от } t \in (0, T). \quad (1.4.5)$$

Теорема 1.4.1. Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $n > 2$, $2 \leq p \leq 2 + \frac{4}{n-2}$ или $n = 2$, $p \in (1, +\infty)$ и выполнено условие (1.4.5). Тогда множество \mathfrak{M} – простое банахово C^1 -многообразие, моделируемое подпространством $\text{coim } L$.

Доказательство. Из теоремы 1.3.1 и леммы 1.4.1 следует данный результат. □

1.5. Математическая модель динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим систему уравнений движения жидкости Кельвина

– Фойгта, которую принято называть системой уравнений Осколкова

$$(1 - \varkappa \nabla^2) x_t = \nu \nabla^2 x - (x \cdot \nabla) x - \mathbf{p} + u, \quad \nabla(\nabla \cdot x) = 0, \quad (1.5.1)$$

где $\mathbf{p} = \nabla p$ – градиент давления; вектор-функция $x = x(s, t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор скорости жидкости; $u = u(s, t) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор объемных внешних сил, характеризующий внешнее воздействие; коэффициент системы $\varkappa^{-1} \geq \lambda_1$ – время ретардации, характеризующее упругие свойства жидкости, где λ_1 – наименьшее собственное значение спектральной задачи

$$-\nabla^2 x + \nabla p = \lambda x, \quad \nabla \cdot x = 0, \quad x|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1.5.2)$$

в области Ω ; $\nu \in \mathbb{R}_+$ – кинематический коэффициент вязкости, характеризующий вязкие свойства жидкости Кельвина – Фойгта нулевого порядка. Для уравнения (1.5.1) рассмотрим условие Дирихле

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \quad (1.5.3)$$

и начальное условие Шоуолтера – Сидорова

$$(1 - \varkappa \nabla^2)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, \quad s \in \Omega. \quad (1.5.4)$$

Условие Дирихле (1.5.3) и уравнение (1.5.1) образуют модель динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости.

Положим $\mathfrak{H} = \mathbb{H}_{\sigma}^1$, $\mathcal{H} = \mathbb{L}_{\sigma}$, тогда через \mathfrak{H}^* обозначим пространство, двойственное к пространству \mathfrak{H} относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Построим операторы

$$\begin{aligned} \langle Lx, y \rangle &= \int_{\Omega} (x \cdot y - \varkappa \nabla x \cdot \nabla y) ds \quad \forall x, y \in \mathfrak{H}; \\ \langle Mx, y \rangle &= \alpha \int_{\Omega} \nabla x \cdot \nabla y ds \quad \forall x, y \in \mathfrak{H}; \\ \langle B(x, y), z \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} x_i \frac{\partial y_j}{\partial s_i} z_j ds \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{H}. \end{aligned}$$

Вложение $\mathbb{H}^1 \hookrightarrow \mathbb{L}_4$ имеет место при $n \leq 4$, и вложение $\mathbb{H}^1 \Subset \mathbb{L}_2$ компактно.

Рассмотрим уравнение

$$(1 - \varkappa \nabla^2) x_t - \nu \nabla^2 x + (x \cdot \nabla) x = u. \quad (1.5.5)$$

Лемма 1.5.1. (i) *При всех $\varkappa^{-1} \geq \lambda_1$ оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен, причем ортонормальное семейство $\{\varphi_k\}$ его функций образует базис пространства \mathfrak{H} .*

(ii) *При $\alpha \in \mathbb{R}_+$ $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – 2-коэрцитивный, симметричный оператор.*

(iii) *При $n = 2, 3, 4$ оператор $B : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}^*$ удовлетворяет неравенству*

$$|\langle B(x, y), z \rangle| \leq C^B \|x\|_{\mathfrak{H}} \|y\|_{\mathfrak{H}} \|z\|_{\mathfrak{H}}, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{H}.$$

(iv) $\langle B(x, y), z \rangle = -\langle B(x, z), y \rangle \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{H}.$

(v) *Для любого $x \in \mathfrak{H}$ имеет место равенство $\langle B(x, z), z \rangle = 0$.*

Доказательство. Справедливость п. (i) гарантирует теорема 1.2.5 (теорема Солонникова – Воровича – Юдовича). Доказательство п. (ii) вытекает из построения оператора

$$\langle Mx, x \rangle = \alpha \int_{\Omega} \nabla x^2 ds, \quad \forall x \in \mathfrak{H}.$$

Доказательство пп. (iii), (iv), (v) следует из теоремы 1.2.6. \square

Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций спектральной задачи (1.5.2), а через $\{\lambda_k\}$ – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности. При условии $\varkappa^{-1} \geq \lambda_1$

$$\ker L = \begin{cases} \{0\}, & \varkappa^{-1} > \lambda_1; \\ \text{span}\{\varphi_1\}, & \varkappa^{-1} = \lambda_1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\text{im } L = \begin{cases} \mathfrak{H}^*, & \varkappa^{-1} > \lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{H}^* : \langle x, \varphi_1 \rangle = 0\}, & \varkappa^{-1} = \lambda_1, \end{cases}$$

$$\text{coim } L = \begin{cases} \mathfrak{H}, & \varkappa^{-1} > \lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi_1 \rangle = 0\}, & \varkappa^{-1} = \lambda_1. \end{cases}$$

Отсюда проекторы

$$P = Q = \begin{cases} \mathbb{I}, & \varkappa^{-1} > \lambda_1; \\ \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi_1 \rangle, & \varkappa^{-1} = \lambda_1. \end{cases}$$

Таким образом мы провели редукцию задачи (1.5.3) – (1.5.5) к задаче Шоуолтера – Сидорова (0.0.16) для полулинейного уравнения соболевского типа с билинейным оператором (0.0.14).

1.6. Обобщенная математическая модель Хоффа

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле

$$x(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (1.6.1)$$

и условие Шоуолтера – Сидорова

$$(\lambda + \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, s \in \Omega \quad (1.6.2)$$

или условие Коши

$$x(s, 0) = x_0(s), s \in \Omega \quad (1.6.3)$$

для обобщенного уравнения Хоффа

$$(-\lambda - \Delta)x_t + \alpha_1 x + \alpha_2 x^3 + \alpha_2 x^5 + \dots + \alpha_{k-1} x^{2k-3} + \alpha_k x^{2k-1} = u. \quad (1.6.4)$$

Чтобы редуцировать задачу (1.6.1), (1.6.2), (1.6.4) к задаче Шоуолтера – Сидорова (0.0.16) для абстрактного уравнения соболевского типа (1.3.3) и задачу (1.6.1), (1.6.3), (1.6.4) к задаче Коши (0.0.15) для абстрактного уравнения соболевского типа (1.3.3), положим $\mathfrak{H} = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{B}_j = L_{2j}(\Omega)$, $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ (все функциональные пространства определены на области Ω). Заметим, что, если $k = 2$ при $n = 4$ или $k \leq 3$ при $n = 3$ или $k \in \mathbb{N}$ при $n = 1, 2$, в силу теоремы 1.2.1 имеют место плотные и непрерывные вложения (1.3.1). Операторы

L и N_j определим следующим образом:

$$\begin{aligned}\langle Lx, y \rangle &= \int_{\Omega} (\nabla x \nabla y - \lambda xy) ds \quad \forall x, y \in \mathfrak{H}, \\ \langle N_j(x), y \rangle &= \alpha_j \int_{\Omega} x^{2j-1} y ds \quad \forall x, y \in \mathfrak{B}_j, \quad j = 1, \dots, k,\end{aligned}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в \mathcal{H} . Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω , а через $\{\lambda_k\}$ – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности.

Лемма 1.6.1. (i) *При всех $\lambda \leq \lambda_1$ оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен, причем ортонормальное семейство $\{\varphi_k\}$ его функций образует базис пространства \mathfrak{H} .*

(ii) *При всех $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$ операторы $N_j \in C^\infty(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*)$ s -монотонны и $(2j)$ -коэрцитивны.*

Доказательство. Утверждение (i) следует из теоремы 1.2.2. Покажем справедливость утверждения (ii). Производная Фреше оператора N_j в точке $x \in \mathfrak{B}_j$ определяется формулой

$$\langle N'_{jx} y, w \rangle = \alpha_j (2j-1) \int_{\Omega} x^{2j-2} y w ds.$$

Отсюда вытекает C^∞ -гладкость. Действительно,

$$|\langle N_j(x), x \rangle| \leq \text{const} \|x\|_{L_{2j}(\Omega)}^{2j},$$

$$|\langle N'_{jx} y_1, y_1 \rangle| \leq \text{const} \|x\|_{L_{2j}(\Omega)}^{2j-2} \|y_1\|_{L_{2j}(\Omega)}^2,$$

...

$$|\langle N_{jx}^{(2j-1)}(y_1, y_2, \dots, y_j), z \rangle| \leq \text{const} \|y_1\|_{L_{2j}(\Omega)} \|y_2\|_{L_{2j}(\Omega)} \cdots \|y_{2j-1}\|_{L_{2j}(\Omega)} \|z\|_{L_{2j}(\Omega)},$$

где символом const обозначены разные константы, но все они не зависят от векторов $y_1, y_2, \dots, y_{2j-1}, z \in L_{2j}(\Omega)$, а через $N'_{jx}, \dots, N_{jx}^{(2j-1)}$ обозначены соответственно производные Фреше оператора N_j в точке x . Производная Фреше

$N_x^{(2j)} \equiv 0$. Поскольку

$$\langle N'_{jx}y, y \rangle = \alpha_j(2j-1) \int_{\Omega} x^{2j-2}y^2 ds > 0 \quad \forall y \in L_{2j}(\Omega), \quad y \neq 0,$$

то оператор N s -монотонен. Из того, что

$$|\langle N_j(x), x \rangle| = |\alpha_j| \|x\|_{L_{2j}(\Omega)}^{2j},$$

вытекает $(2j)$ -коэрцитивность операторов N_j . \square

При условии $\lambda \leq \lambda_1$

$$\ker L = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } \lambda < \lambda_1; \\ \text{span}\{\varphi_1\}, & \text{если } \lambda = \lambda_1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\text{im } L = \begin{cases} \mathfrak{H}^*, & \text{если } \lambda < \lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{H}^* : \langle x, \varphi_1 \rangle = 0\}, & \text{если } \lambda = \lambda_1, \end{cases}$$

$$\text{coim } L = \{x \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) : \langle x, \varphi \rangle = 0, \text{ если } \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}.$$

Отсюда проекторы

$$P = Q = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } \lambda < \lambda_1; \\ \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi_1 \rangle, & \text{если } \lambda = \lambda_1. \end{cases}$$

Таким образом мы провели редукцию задачи (1.6.1), (1.6.2), (1.6.4) к задаче Шоуолтера – Сидорова (0.0.16) для полулинейного уравнения соболевского типа (1.3.3) и задачи (1.6.1), (1.6.3), (1.6.4) к задаче Коши (0.0.15) для полулинейного уравнения соболевского типа (1.3.3).

Построим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} L_{2k}(\Omega), & \text{если } \lambda < \lambda_1; \\ \{x \in L_{2k}(\Omega) : \int_{\Omega} (\alpha_1 x + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^5 + \dots + \\ + \alpha_{k-1} x^{2k-3} + \alpha_k x^{2k-1}) \varphi_1 ds = \int_{\Omega} u \varphi_1 ds\}, & \text{если } \lambda = \lambda_1, \end{cases} \quad (1.6.5)$$

и сделаем допущение:

$$(\mathbb{I} - Q)u \text{ не зависит от } t \in (0, T). \quad (1.6.6)$$

Теорема 1.6.1. Пусть $k = 2$ при $n = 4$ или $k \leq 3$ при $n = 3$ или $k \in \mathbb{N}$ при $n = 1, 2$ и $\lambda \leq \lambda_1$, $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$ и выполнено условие (1.6.6). Тогда множество \mathfrak{M} есть простое банахово C^∞ -многообразие, моделируемое пространством $\text{coim } L$.

Доказательство. В силу леммы 1.6.1 выполнены все условия теоремы 1.3.1. Следовательно, множество \mathfrak{M} – простое банахово C^∞ -многообразие, моделируемое подпространством $\text{coim } L$. \square

1.7. Обобщенная математическая модель деформации конструкции из двутавровых балок

Нас интересует поведение конструкции из двутавровых балок, находящихся под постоянной нагрузкой. Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^M$ – множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}_{j=1}^N$ – множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и площадь поперечного сечения $d_j > 0$. На графе \mathbf{G} рассмотрим уравнения

$$-\lambda x_{jt} - x_{jtss} + \alpha_j^1 x_j + \alpha_j^2 x_j^3 + \dots + \alpha_j^k x_j^{2k-1} = u_j, \quad (1.7.1)$$

для всех $s \in (0, l_j)$, $t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, N}$.

Для уравнений (1.7.1) в каждой вершине V_i , $i = \overline{1, M}$ зададим краевые условия

$$\sum_{j: E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(0, t) - \sum_{r: E_r \in E^\omega(V_i)} d_r x_{rs}(l_r, t) = 0, \quad (1.7.2)$$

$$x_r(0, t) = x_j(0, t) = x_h(l_h, t) = x_m(l_m, t), \quad (1.7.3)$$

для всех $E_r, E_j \in E^\alpha(V_i)$, $E_h, E_m \in E^\omega(V_i)$, которые являются аналогами законов Кирхгоффа. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i . Условие (1.7.2) означает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю, а условие (1.7.3) – что решение в каждой вершине должно быть непрерывным. В частном случае, когда граф \mathbf{G} состоит из единственной нециклической дуги, условие (1.7.3) исчезает, а условие (1.7.2) превращается в однородное условие Неймана. Краевые условия

(1.7.2), (1.7.3) и уравнение (1.7.1) образуют математическую модель деформации конструкции из двутавровых балок.

Если дополнить (1.7.2), (1.7.3) начальными условиями Коши

$$x_j(s, 0) = x_{0j}(s) \text{ для всех } s \in (0, l_j) \quad (1.7.4)$$

или начальными условиями Шоуолтера – Сидорова

$$(\lambda + \Delta)(x_j(s, 0) - x_{0j}(s)) = 0 \text{ для всех } s \in (0, l_j), \quad (1.7.5)$$

то мы получим задачу Коши – Неймана или задачу Шоуолтера – Сидорова – Неймана для уравнений (1.7.1).

Пусть

$$\mathcal{H} = L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}.$$

Множество $L_2(\mathbf{G})$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j(s) h_j(s) ds.$$

Пусть $\mathfrak{H} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots) : x_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ и выполнено условие (1.7.3)}\}$. Пространство \mathfrak{H} является банаховым пространством с нормой

$$\|x\|_{\mathfrak{H}}^2 = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (x_{js}^2(s) + x_j^2(s)) ds.$$

Положим

$$\mathfrak{B}_n = L_{2n}(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_{2n}(0, l_j)\}.$$

Множество $L_{2n}(\mathbf{G})$ является банаховым пространством с нормой

$$\|x\|_{\mathfrak{B}_n}^{2n} = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} |x_j(s)|^{2n} ds.$$

В силу теорем вложения Соболева пространство $W_2^1(0, l_j)$ состоит из абсолютно непрерывных функций, а значит \mathfrak{H} корректно определено, плотно и

компактно вложено в $L_2(\mathbf{G})$. Отождествим $L_2(\mathbf{G})$ со своим сопряженным и обозначим через \mathfrak{H}^* , \mathfrak{B}_n^* пространства, сопряженные к пространствам \mathfrak{H} , \mathfrak{B}_n относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$, тогда справедливы вложения (2.1.1).

Формулой

$$\langle Ax, z \rangle = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (x_{js}(s)z_{js}(s) + ax_j(s)z_j(s))ds,$$

где $a > 0$, $x, z \in \mathfrak{H}$, зададим оператор, определенный на пространстве \mathfrak{H} . Поскольку

$$|\langle Ax, z \rangle| \leq C_1 \|x\|_{\mathfrak{H}} \|z\|_{\mathfrak{H}},$$

в силу неравенства Коши – Буняковского и

$$C_2 \|x\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq |\langle Ax, x \rangle| \leq C_3 \|x\|_{\mathfrak{H}}^2 \quad (1.7.6)$$

при всех $x, z \in \mathfrak{H}$ и некоторых $C_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, линейный оператор $A : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}^*$ непрерывен и инъективен. В силу рефлексивности пространства \mathfrak{H} и самосопряженности оператора A получаем, что оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ биективен. Отсюда по теореме Банаха следует существование оператора $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}^*; \mathfrak{H})$. Поскольку вложение \mathfrak{H} в \mathfrak{H}^* компактно, то оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}^*; \mathfrak{H})$ является компактным. Значит, спектр оператора A вещественен, дискретен, конечно-кратен и сгущается только к $+\infty$, а его собственные функции образуют базис в пространстве \mathfrak{H} . Обозначим через $\{\varphi_i\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора A на графе \mathbf{G} , а через $\{\mu_i\}$ – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом их кратности.

Фиксируем $\alpha_j^n > 0$ и $\lambda + a \leq \mu_1$ и построим операторы

$$\langle Lx, z \rangle = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j(-\lambda - a) \int_0^{l_j} x_j z_j ds + \langle Ax, z \rangle \quad \forall x, z \in \mathfrak{H},$$

$$\langle N_n(x), y \rangle = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \alpha_j^n \int_0^{l_j} x_j^{2n-1} z_j ds \quad \forall x, z \in \mathfrak{B}_n, n = 1, \dots, k.$$

Лемма 1.7.1. (i) При всех $\lambda + a \leq \mu_1$ оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен, причем ортонормальное семейство $\{\varphi_i\}$ его функций образует базис пространства \mathfrak{H} .

(ii) При всех $\alpha_j^n \in \mathbb{R}_+$ операторы $N_n \in C^\infty(\mathfrak{B}_n; \mathfrak{B}_n^*)$, $n = 1, \dots, k - s$ -монотонны и $(2n)$ -коэрцитивны.

Доказательство. Утверждение (i) следует из свойств оператора A . Покажем справедливость утверждения (ii). Производная Фреше оператора N_n в точке $x \in \mathfrak{B}_n$ определяется формулой

$$\langle N'_{nx} z, w \rangle = \sum_{E_j \in E} d_j \alpha_j^n (2n-1) \int_0^{l_j} x_j^{2n-2} z_j w_j ds.$$

Отсюда вытекает C^∞ -гладкость. Действительно,

$$|\langle N_n(x), x \rangle| \leq \text{const} \|x\|_{L_{2n}(\mathbf{G})}^{2n},$$

$$|\langle N'_{nx} z_1, z_1 \rangle| \leq (2n-1) \max_j \{|\alpha_j^n|\} \|x\|_{L_{2n}(\mathbf{G})}^{2n-2} \|z_1\|_{L_{2n}(\mathbf{G})}^2 \leq \text{const} \|x\|_{L_{2n}(\mathbf{G})}^{2n-2} \|z_1\|_{L_{2n}(\mathbf{G})}^2,$$

...

$$|\langle N^{(2n-1)}_{nx}(z_1, z_2, \dots, z_n), w \rangle| \leq \text{const} \|z_1\|_{L_{2n}(\mathbf{G})} \|z_2\|_{L_{2n}(\mathbf{G})} \cdots \|z_n\|_{L_{2n}(\mathbf{G})} \|w\|_{L_{2n}(\mathbf{G})},$$

где символом const обозначены разные константы, но все они не зависят от векторов $z_1, z_2, \dots, z_n, w \in L_{2n}(\mathbf{G})$, а через $N'_{nx}, \dots, N^{(2n-1)}_{nx}$ обозначены соответственно производные Фреше оператора N_n в точке x . Производная Фреше $N_x^{(2n)} \equiv 0$. Оператор N s -монотонен, поскольку

$$\langle N'_{nx} z, z \rangle = \sum_{E_j \in E} d_j \alpha_j^n (2n-1) \int_0^{l_j} x_j^{2n-2} z_j^2 ds > 0 \quad \forall z \in L_{2n}(\mathbf{G}), z \neq 0.$$

Из того, что

$$\langle N_n(x), x \rangle \geq \min_j \{|\alpha_j^n|\} \|x\|_{L_{2n}(\mathbf{G})}^{2n} \geq \text{const} \|x\|_{L_{2n}(\mathbf{G})}^{2n},$$

$$|\langle N_n(x), z \rangle| \leq \max_j \{|\alpha_j^n|\} \|x\|_{L_{2n}(\mathbf{G})}^{2n-1} \|z\|_{L_{2n}(\mathbf{G})} \leq \text{const} \|x\|_{L_{2n}(\mathbf{G})}^{2n-1} \|z\|_{L_{2n}(\mathbf{G})},$$

вытекает $(2n)$ -коэрцитивность операторов N_n . \square

Построим множество

$$\ker L = \begin{cases} \{0\}, \lambda + a < \mu_1; \\ \text{span}\{\varphi_{1_1}, \dots, \varphi_{1_r}\}, \lambda + a = \mu_1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \text{im } L &= \begin{cases} \mathfrak{H}^*, \lambda + a < \mu_1; \\ \{x \in \mathfrak{H}^* : \langle x, \varphi_{1_i} \rangle = 0\}, \lambda + a = \mu_1, \end{cases} \\ \text{coim } L &= \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}. \end{aligned}$$

Отсюда проекторы

$$P = Q = \begin{cases} \mathbb{I}, \lambda + a < \mu_1; \\ \mathbb{I} - \sum_{\lambda+a=\mu_1} \langle \cdot, \varphi_{1_i} \rangle. \end{cases}$$

Сделаем допущение:

$$(\mathbb{I} - Q)u \text{ не зависит от } t \in (0, T). \quad (1.7.7)$$

Таким образом проведена редукция задачи (1.7.1) – (1.7.3), (1.7.5) к задаче Шоуолтера – Сидорова (0.0.16) для полулинейного уравнения соболевского типа (1.3.3) и задачи (1.7.1) – (1.7.4) к задаче Коши (0.0.15) для полулинейного уравнения соболевского типа (1.3.3).

Построим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} L_{2k}(\mathbf{G}), \lambda + a < \mu_1; \\ \{x \in L_{2k}(\mathbf{G}) : \sum_{E_j \in \mathbf{E}} d_j \int_0^{l_j} (\alpha_j^1 x_j + \alpha_j^2 x_j^3 + \alpha_j^3 x_j^5 + \dots + \alpha_j^{k-1} x_j^{2k-3} + \\ + \alpha_j^k x_j^{2k-1}) \varphi_{1_i} ds = \sum_{E_j \in \mathbf{E}} d_j \int_0^{l_j} u_j \varphi_{1_i} ds\}, i = \overline{1, r}, \lambda + a = \mu_1. \end{cases} \quad (1.7.8)$$

Теорема 1.7.1. Пусть $\lambda + a \leq \mu_1$, и $\alpha_j^n \in \mathbb{R}_+$ и выполнено условие (1.7.7). Тогда множество \mathfrak{M} есть простое банахово C^∞ -многообразие, моделируемое пространством $\text{coim } L$.

Доказательство. В силу леммы 1.7.1 выполнены все условия теоремы 1.3.1. Следовательно, множество \mathfrak{M} – простое банахово C^∞ -многообразие, моделируемое пространством $\text{coim } L$. \square

1.8. Математическая модель распределения потенциала электрического поля в полупроводнике

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , причем область Ω занимает полупроводник. Предположим, что в полупроводнике имеется источник тока свободных зарядов и он «заземлен». Рассмотрим неклассическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda x - \Delta x) - \Delta_p x + \alpha|x|^{p-2}x = u, \quad \Delta_p x \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial s_i} \left(|\frac{\partial x}{\partial s_i}|^{p-2} \frac{\partial x}{\partial s_i} \right), \quad (1.8.1)$$

где $p > 2, \alpha \geq 0$. Уравнение (1.8.1) описывает распределение потенциала электрического поля в полупроводнике [42]. В цилиндре $\Omega \times (0, T)$ рассмотрим условие Дирихле

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \quad (1.8.2)$$

и начальное условие Шоултера – Сидорова

$$(\lambda - \Delta)(x(s, 0)) - x_0(s) = 0, \quad s \in \Omega \quad (1.8.3)$$

или начальное условие Коши

$$(\lambda - \Delta)(x(s, 0)) - x_0(s) = 0, \quad s \in \Omega \quad (1.8.4)$$

для неклассического уравнения (1.8.1). Уравнение (1.8.1) совместно с условием Дирихле (1.8.2) будем называть математической моделью распределения потенциала электрического тока в полупроводнике.

Положим $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$, $\mathfrak{H} = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{B} = \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$, $\mathfrak{H}^* = W_2^{-1}(\Omega)$, $\mathfrak{B}^* = W_q^{-1}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (все функциональные пространства определены на области Ω). Определим в \mathcal{H} скалярное произведение формулой

$$\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} xy ds \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

При таком определении пространств \mathfrak{H} и \mathfrak{B} имеют место плотные и непрерывные вложения (1.3.8). Операторы L и M определим формулами:

$$\begin{aligned}\langle Lx, y \rangle &= \int_{\Omega} (\lambda xy + x_{s_i} y_{s_i}) ds \quad \forall x, y \in \mathfrak{H}; \\ \langle N(x), y \rangle &= \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial x}{\partial s_i} \right|^{p-2} \frac{\partial x}{\partial s_i} \frac{\partial y}{\partial s_i} + \alpha |x|^{p-2} xy \right) ds \quad \forall x, y \in \mathfrak{H},\end{aligned}$$

где $x, y \in \mathfrak{B}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Заметим, что всюду выполняется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω , а через $\{\lambda_k\}$ – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности.

Лемма 1.8.1. (i) *При всех $\lambda \geq -\lambda_1$ оператор L самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен, причем ортонормальное семейство $\{\varphi_k\}$ его функций тотально в пространстве \mathfrak{B} .*

(ii) *При всех $\alpha \in \mathbb{R}_+$ оператор $N \in C^1(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ s -монотонен и p -коэрцитивен.*

Доказательство. Утверждение (i) следует из теоремы 1.2.2. Что же касается утверждения (ii), то производная Фреше оператора N в точке $x \in \mathfrak{B}$ определяется формулой

$$\begin{aligned}|\langle N'_x y, w \rangle| &= \left| \int_{\Omega} ((p-1)|x_{s_i}|^{p-2} y_{s_i} w_{s_i} + \alpha(p-1)|x|^{p-2} y w) ds \right| \leq \\ &\leq C_1 (\|x\|_{W_p^1(\Omega)}^{p-2} \|y\|_{W_p^1(\Omega)} \|w\|_{W_p^1(\Omega)} + \|x\|_{L_p(\Omega)}^{p-2} \|y\|_{L_p(\Omega)} \|w\|_{L_p(\Omega)}) \leq \\ &\leq C_2 \|x\|_{W_p^1(\Omega)}^{p-2} \|y\|_{W_p^1(\Omega)} \|w\|_{W_p^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что оператор $M \in C^1(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ s -монотонен:

$$\langle N'_x y, y \rangle = \int_{\Omega} ((p-1)|x_{s_i}|^{p-2} y_{s_i}^2 + \alpha(p-1)|x|^{p-2} y^2) ds > 0$$

$$\forall x, y \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega), \quad x, y \neq 0$$

и p -коэрцитивен:

$$\langle N(x), x \rangle = \int_{\Omega} (|x_{s_i}|^p + \alpha|x|^p) ds = \|x\|_{W_p^1(\Omega)}^{p-1} + \alpha \|x\|_{L_p(\Omega)}^p \geq \|x\|_{W_p^1(\Omega)}^p;$$

$$|\langle N(x), y \rangle| \leq |\alpha| \|x\|_{L_p(\Omega)}^{p-1} \|y\|_{L_p(\Omega)} + \|x\|_{W_p^1(\Omega)}^{p-1} \|y\|_{W_p^1(\Omega)} \leq C \|x\|_{W_p^1(\Omega)}^{p-1} \|y\|_{W_p^1(\Omega)}.$$

□

При условии $\lambda \geq -\lambda_1$

$$\ker L = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \text{span}\{\varphi_1\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\text{im } L = \begin{cases} \mathfrak{B}^*, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{B}^* : \langle x, \varphi_1 \rangle = 0\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases}$$

$$\text{coim } L = \{x \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) : \langle x, \varphi \rangle = 0, \text{ если } \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}.$$

Отсюда проекторы

$$P = Q = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi_1 \rangle, & \text{если } \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Таким образом мы провели редукцию задачи (1.8.1) – (1.8.3) к задаче Шоуолтера – Сидорова (0.0.16) для полулинейного уравнения соболевского типа (1.3.3) и задачи (1.8.1), (1.8.2), (1.8.4) к задаче Коши (0.0.15) для полулинейного уравнения соболевского типа (1.3.3).

Построим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{B}, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{B} : \int_{\Omega} (-\Delta_p x + \alpha|x|^{p-2}x) \varphi_1 ds = \int_{\Omega} u \varphi_1 ds\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases}$$

и сделаем допущение:

$$(\mathbb{I} - Q)u \text{ не зависит от } t \in (0, T). \quad (1.8.5)$$

Теорема 1.8.1. Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и выполнено условие (1.8.5). Тогда множество \mathfrak{M} есть простое банахово C^∞ -многообразие, моделируемое пространством $\text{coim } L \cap \mathfrak{B}$.

Доказательство. В силу леммы 1.8.1 выполнены все условия теоремы 1.3.2. Следовательно, множество \mathfrak{M} – простое банахово C^∞ -многообразие, моделируемое подпространством $\text{coim } L \cap \mathfrak{B}$. \square

1.9. Обобщенная математическая фильтрационная модель Буссинеска

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \quad (1.9.1)$$

для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска

$$(\lambda - \Delta)x_t - \Delta(|x|^{p-2}x) = u. \quad (1.9.2)$$

Условие Дирихле (1.9.1) и уравнение (1.9.2) образуют обобщенную фильтрационную модель Буссинеска.

Рассмотрим условие Шоултера – Сидорова

$$(\lambda - \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, \quad s \in \Omega \quad (1.9.3)$$

или условие Коши

$$x(s, 0) = x_0(s), \quad s \in \Omega \quad (1.9.4)$$

для модели (1.9.1), (1.9.2).

Положим $\mathcal{H} = W_2^{-1}(\Omega)$, $\mathfrak{H} = L_2(\Omega)$, $\mathfrak{B} = L_p(\Omega)$ (все функциональные пространства определены на области Ω). Заметим, что при $p \geq \frac{2n}{n+2}$ $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$, поэтому $L_p(\Omega) \hookrightarrow W_2^{-1}(\Omega)$. Определим в \mathcal{H} скалярное произведение формулой

$$\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x \tilde{y} ds \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \quad (1.9.5)$$

где \tilde{y} – обобщенное решение однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω . Положим $\mathfrak{B}^* = (L_p(\Omega))^*$ и $\mathfrak{H}^* = (L_2(\Omega))^*$, где $(L_p(\Omega))^*$ – сопряженное относительно двойственности (1.9.5) пространство.

Покажем, что $W_q^{-1}(\Omega) \subset (L_p(\Omega))^*$.

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle x, \tilde{y} \rangle_{L_2(\Omega)}| \leq \|x\|_{W_q^{-1}(\Omega)} \|\tilde{y}\|_{\overset{\circ}{W}_p(\Omega)} \leq \text{const} \|x\|_{W_q^{-1}(\Omega)} \|y\|_{L_p(\Omega)}.$$

При таком определении \mathfrak{H}^* и \mathfrak{B}^* имеют место плотные и непрерывные вложения (1.3.8). Операторы L и M определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle Lx, y \rangle &= \int_{\Omega} (\lambda x \tilde{y} + xy) ds, \quad x, y \in \mathfrak{H}; \\ \langle N(x), y \rangle &= \int_{\Omega} |x|^{p-2} xy ds, \quad x, y \in \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω , а через $\{\lambda_k\}$ – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности.

Лемма 1.9.1. (i) *При всех $\lambda \geq -\lambda_1$ оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен, причем ортонормальное семейство $\{\varphi_k\}$ его функций тотально в пространстве \mathfrak{H} .*

(ii) *Оператор $N \in C^1(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ s -монотонен и p -коэрцитивен.*

Доказательство. Утверждение (i) следует из теоремы 1.2.2. Что же касается утверждения (ii), то производная Фреше оператора N в точке $x \in \mathfrak{B}$ определяется формулой

$$|\langle N'_x y, w \rangle| = (p-1) \left| \int_{\Omega} |x|^{p-2} y w ds \right| \leq \text{const} \|x\|_{L_p(\Omega)}^{p-2} \|y\|_{L_p(\Omega)} \|w\|_{L_p(\Omega)}.$$

Отсюда следует, что оператор $N \in C^1(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ s -монотонен:

$$\langle N'_x y, y \rangle = (p-1) \int_{\Omega} |x|^{p-2} y^2 dx > 0, \quad x, y \in L_p(\Omega), \quad x, y \neq 0$$

и p -коэрцитивен:

$$\langle N(x), x \rangle = \int_{\Omega} |x|^p ds = \|x\|_{L_p(\Omega)}^p;$$

$$|\langle N(x), y \rangle| \leq \int_{\Omega} |x|^{p-1} |y| ds \leq \|x\|_{L_p(\Omega)}^{p-1} \|y\|_{L_p(\Omega)}.$$

□

При условии $\lambda \geq -\lambda_1$

$$\ker L = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \text{span}\{\varphi_1\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\text{im } L = \begin{cases} \mathfrak{H}^*, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{H}^* : \langle x, \varphi_1 \rangle = 0\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases}$$

$$\text{coim } L = \begin{cases} \mathfrak{H}, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi_1 \rangle = 0\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Отсюда проекторы

$$P = Q = \begin{cases} \mathbb{I}, & \lambda > -\lambda_1; \\ \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi_1 \rangle, & \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Таким образом мы провели редукцию задачи (1.9.1) – (1.9.3) к задаче Шоуолтера – Сидорова (0.0.16) для полулинейного уравнения соболевского типа (1.3.3) и задачи (1.9.1), (1.9.2), (1.9.4) к задаче Коши (0.0.15) для полулинейного уравнения соболевского типа (1.3.3).

Построим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{B}, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{B} : \int_{\Omega} |x|^{p-2} x \varphi_1 ds = \int_{\Omega} u \tilde{\varphi}_1 ds\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases}$$

и сделаем допущение:

$$(\mathbb{I} - Q)u \text{ не зависит от } t \in (0, T). \quad (1.9.6)$$

Теорема 1.9.1. Пусть $p \geq \frac{2n}{n+2}$, $\lambda \geq -\lambda_1$ и выполнено условие (1.9.6). Тогда множество \mathfrak{M} – простое банахово C^1 -многообразие, моделируемое пространством $\text{coim } L \cap \mathfrak{B}$.

Доказательство. Из теоремы 1.3.2 и леммы 1.9.1 следует данный результат. □

Глава 2. Задача оптимального управления для абстрактных полулинейных моделей соболевского типа

2.1. Задача Коши с монотонным оператором

Динамический случай

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}_j, \mathfrak{B}_j^*), j = \overline{1, k}, k \in \mathbb{N}$ – дуальные (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_1^* \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_k^* \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \quad (2.1.1)$$

плотны и непрерывны. Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, самосопряженный, неотрицательно определенный, фредгольмов оператор, чей ортонормальный (в смысле \mathcal{H}) набор собственных векторов $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве \mathfrak{H} , а $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, симметричный, 2-коэрцитивный оператор. Пусть $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*), r \geq 1, j = \overline{1, k}$ – s-монотонные и p_j -коэрцитивные операторы, где $p_j \geq 2$ и $p_k = \max_j p_j$, имеющие симметричную производную Фреше.

Рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0 \quad (2.1.2)$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u. \quad (2.1.3)$$

Ввиду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $\mathfrak{H} \supset \ker L \equiv \text{coker } L \subset \mathfrak{H}^*$. Поскольку $\text{coker } L$ конечномерно, то $\mathfrak{H}^* = \text{coker } L \oplus \text{im } L$, $\mathfrak{B}_k^* = \text{coker } L \oplus [\text{im } L \cap \mathfrak{B}_k^*]$. Значит, существует проектор Q вдоль $\text{coker } L$ на $\text{im } L$.

Аналогично п. 1.3 сделаем допущение:

$$(\mathbb{I} - Q)u \text{ не зависит от } t \in (0, T) \quad (2.1.4)$$

и построим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{H} : (\mathbb{I} - Q)Mx + (\mathbb{I} - Q) \sum_{j=1}^k N_j(x) = (\mathbb{I} - Q)u\}, \\ \text{если } \ker L \neq \{0\}; \\ \mathfrak{H}, \text{ если } \ker L = \{0\}. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Введем в рассмотрение множество

$$\text{coim } L = \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi \rangle = 0 \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}.$$

Тогда в силу фредгольмовости оператора L получим $\mathfrak{H} = \text{coim } L \oplus \ker L$. Обозначим за $\overline{\text{coim } L}$ замыкание $\text{coim } L$ в топологии \mathfrak{B}_k . Тогда $\mathfrak{B}_k = \ker L \oplus \overline{\text{coim } L}$. Обозначим через P проектор вдоль $\ker L$ на $\text{coim } L$.

Построим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_{p_k}(0, T; \mathfrak{M}), \dot{x} \in L_2(0, T; \mathfrak{H})\}.$$

Определение 2.1.1. Слабым обобщенным решением уравнения (2.1.3) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию

$$\begin{aligned} & \int_0^T \varphi(t) \left[\left\langle L \frac{d}{dt} x, w \right\rangle + \langle Mx, w \rangle + \sum_{j=1}^k \langle N_j(x), w \rangle \right] dt = \\ & = \int_0^T \varphi(t) \langle u, w \rangle dt \quad \forall w \in \mathfrak{H}, \forall \varphi \in L_2(0, T). \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Решение уравнения (2.1.3) назовем *решением задачи Коши*, если оно удовлетворяет (2.1.2).

Замечание 2.1.1. Аналогично работе [43] можно показать, что слабое обобщенное решение уравнения (2.1.3), удовлетворяющее (2.1.6), эквивалентно решению, удовлетворяющему

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[\left\langle L \frac{d}{dt} x, w \right\rangle + \langle Mx, w \rangle + \sum_{j=1}^k \langle N_j(x), w \rangle \right] dt = \int_0^T \langle u, w \rangle dt \\ & \forall w \in \mathfrak{H}, \forall \varphi \in L_2(0, T). \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

В дальнейшем мы будем отождествлять эти решения.

Система $\{\varphi_k\}$ собственных векторов оператора L тотальна в пространстве \mathfrak{H} , а значит в силу вложений (2.1.1) тотальна в пространствах \mathfrak{B}_k и \mathcal{H} .

Построим галеркинские приближения решения задачи (2.1.2), (2.1.3). Для этого выберем в \mathfrak{H} ортонормальную (в смысле \mathcal{H}) тотальную систему $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l\} = \ker L$, $\dim \ker L = l$. Построим галеркинские приближения решения задачи (2.1.2), (2.1.3) в виде

$$x^m(s, t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \varphi_i(s), \quad m > l, \quad (2.1.8)$$

где коэффициенты $a_i = a_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ определяются следующей задачей:

$$\left\langle L \frac{dx^m}{dt}, \varphi_i \right\rangle + \left\langle Mx^m + \sum_{j=1}^k N_j(x^m), \varphi_i \right\rangle = \langle u, \varphi_i \rangle, \quad (2.1.9)$$

$$\langle x^m(0) - x_0, \varphi_i \rangle = 0, \quad (2.1.10)$$

$$x^m(0) \rightarrow x_0 \text{ сильно в пространстве } \mathfrak{H}. \quad (2.1.11)$$

Уравнения (2.1.9) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $T_m \in \mathbb{R}_+$, $T_m = T_m(x_0)$, $\mathfrak{H}^m = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$. Рассмотрим подмножество множества \mathfrak{M} :

$$\mathfrak{M}^m = \begin{cases} \{x^m \in \mathfrak{H}^m : \left\langle Mx^m + \sum_{j=1}^k N_j(x^m), \varphi_i \right\rangle = \langle u, \varphi_i \rangle, i = 1, \dots, m\}, \\ \quad \text{если } \ker L \neq \{0\}; \\ \mathfrak{H}^m, \quad \text{если } \ker L = \{0\}. \end{cases}$$

Лемма 2.1.1. *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$ и $m > \dim \ker L$ существует единственное локальное решение $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{M}^m)$ задачи (2.1.9), (2.1.10).*

Доказательство. В силу фредгольмовости оператора L и того, что $\mathfrak{H} = \text{coim } L \oplus \ker L$, задача (2.1.3), (2.1.9), эквивалентна

$$\left\langle (\mathbb{I} - Q)Mx + (\mathbb{I} - Q) \sum_{j=1}^k N_j(x), \varphi_i \right\rangle = \langle (\mathbb{I} - Q)u, \varphi_i \rangle, \quad (2.1.12)$$

$$\langle QL\dot{x}^1, \varphi_i \rangle = \left\langle QMx + Q \sum_{j=1}^k N_j(x) + u^1, \varphi_i \right\rangle, \quad \langle x^1(0) - x_0^1, \varphi_i \rangle = 0. \quad (2.1.13)$$

По условиям леммы $x_0 \in \mathfrak{M}$, следовательно $\langle x^0(0) - x_0^0, \varphi_i \rangle = 0$ в силу соотношения (2.1.12). В силу теоремы 1.1.5 для разрешимости задачи (2.1.12), (2.1.13) достаточно установить невырожденность матрицы

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_s} \left\langle Mx^m + \sum_{j=1}^k N_j(x^m) - u, \varphi_i \right\rangle \right\|, \quad i, s = 1, \dots, m,$$

в точке $x_0 = (x_1(0), \dots, x_m(0))$ или, что то же самое, невырожденность оператора $(\mathbb{I} - Q)(M + \sum_{j=1}^k N_j)'_{x_0}(\mathbb{I} - P)$. Однако $\forall v \in \ker L, v \neq 0$, имеем

$$\left\langle (\mathbb{I} - Q)(M + \sum_{j=1}^k N_j)'_{x_0}(\mathbb{I} - P)v, v \right\rangle = \langle Mv, v \rangle + \left\langle \sum_{j=1}^k N_j'_{x_0}v, v \right\rangle > 0$$

ввиду s -монотонности операторов N_j , неотрицательной определенности оператора M , конструкции проектора $(\mathbb{I} - Q)$ пространства \mathfrak{H}^* вдоль $\text{im } L$ на $\text{coker } L$ и проектора $(\mathbb{I} - P)$ пространства \mathfrak{H} вдоль $\text{coim } L$ на $\ker L$. \square

Теорема 2.1.1. *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}, T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ таких, что выполнено (2.1.4), существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (2.1.2), (2.1.3).*

Доказательство. Единственность. Пусть $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = x_2(t)$ – два решения задачи (2.1.2), (2.1.3). Тогда для их разности $w = x_1 - x_2$ имеем

$$\partial_t \langle Lw, w \rangle + 2 \langle Mw, w \rangle + 2 \sum_{j=1}^k \langle N_j(x_1) - N_j(x_2), w \rangle = 0.$$

Интегрируя это равенство на промежутке $(0, t)$, получим

$$\langle Lw, w \rangle + 2 \int_0^t \left\langle Mw + \sum_{j=1}^k (N_j(x_1) - N_j(x_2)), w \right\rangle d\tau = 0. \quad (2.1.14)$$

Первое слагаемое в (2.1.14) неотрицательно в силу неотрицательной определенности оператора L , а второе неотрицательно в силу s -монотонности операторов N_j , неотрицательной определенности оператора M и леммы 1.1.5. Значит, равенство (2.1.14) удовлетворяется лишь в случае $w \equiv 0$.

Существование. Введем в $\text{coim } L$ норму $|x|^2 = \langle Lx, x \rangle$. В силу принципа Куранта эта норма эквивалента норме, индуцированной из надпространства \mathcal{H} . Умножим i -ое уравнение (2.1.9) на $a_i(t)$ соответственно, результаты сложим по $i = 1, \dots, m$ и проинтегрируем на $(0, t)$:

$$\begin{aligned} & \langle Lx^m(t), x^m(t) \rangle + 2 \int_0^t \langle Mx^m, x^m \rangle d\tau + 2 \sum_{j=1}^k \int_0^t \langle N_j(x^m(\tau)), x^m(\tau) \rangle d\tau = \\ & = 2 \int_0^t \langle u(\tau), x^m(\tau) \rangle d\tau + \langle Lx^m(0), x^m(0) \rangle \leq \\ & \leq 2 \int_0^t \|u(\tau)\|_{\mathfrak{H}^*} \|x^m(\tau)\|_{\mathfrak{H}} d\tau + \langle Lx^m(0), x^m(0) \rangle \leq \\ & \leq 2 \|u\|_{L_2(0,T;\mathfrak{H}^*)} \|x^m\|_{L_2(0,T;\mathfrak{H})} + |x^m(0)|^2 \leq \\ & \leq \varepsilon^2 \|u\|_{L_2(0,T;\mathfrak{H}^*)}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|x^m\|_{L_2(0,T;\mathfrak{H})}^2 + |x^m(0)|^2. \end{aligned}$$

Ввиду p_j -коэрцитивности операторов N_j получим

$$\begin{aligned} & \langle Lx^m(t), x^m(t) \rangle + 2 \int_0^t \langle Mx^m, x^m \rangle d\tau + 2 \sum_{j=1}^k \int_0^t \langle N_j(x^m), x^m \rangle d\tau \geq \\ & \geq |x^m(t)|^2 + 2C_{N_k} \int_0^t \|x^m(\tau)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} d\tau + 2C_M \int_0^t \|x^m(\tau)\|_{\mathfrak{H}}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Тогда для любой произвольной константы ε такой, что $2C_M - \frac{1}{\varepsilon^2} > 0$, получим

$$\begin{aligned} & |x^m(t)|^2 + C_1 \int_0^t \|x^m(\tau)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} d\tau + C_2 \int_0^t \|x^m(\tau)\|_{\mathfrak{H}}^2 d\tau \leq \\ & \leq \varepsilon^2 \int_0^T \|u(\tau)\|_{\mathfrak{H}^*}^2 d\tau + |x^m(0)|^2, \quad C_i = \text{const} > 0. \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Обозначим через

$$x_t^m(t) = \sum_{i=1}^m a'_i(t) \varphi_i.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям умножим i -ое уравнение (2.1.9) на $a'_i(t)$ соответственно, результаты сложим по $i = 1, \dots, m$ и получим

$$\langle Lx_t^m, x_t^m \rangle + \left\langle Mx^m + \sum_{j=1}^k N_j(x^m), x_t^m \right\rangle = \langle u, x_t^m \rangle.$$

Из того, что

$$\frac{d}{dt} \langle Mx^m, x^m \rangle = 2 \langle Mx^m, x_t^m \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle N_j(x^m), x^m \rangle = p_j \langle N(x^m), x_t^m \rangle,$$

следует

$$\langle Lx_t^m, x_t^m \rangle + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle Mx^m, x^m \rangle + \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j} \frac{d}{dt} \langle N_j(x^m), x^m \rangle = \langle u, x_t^m \rangle.$$

Получившееся уравнение проинтегрируем на $(0, t)$:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle Lx_\tau^m(\tau), x_\tau^m(\tau) \rangle d\tau + \frac{1}{2} \langle Mx^m, x^m \rangle + \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j} \langle N_j(x^m), x^m \rangle = \\ & = \int_0^t \langle u(\tau), x_\tau^m(\tau) \rangle d\tau + \frac{1}{2} \langle Mx^m(0), x^m(0) \rangle + \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j} \langle N_j(x^m(0)), x^m(0) \rangle. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_0^t |x_\tau^m(\tau)|^2 d\tau \leq C_3. \quad (2.1.16)$$

Из оценки (2.1.15) следует, что все T_m , гарантированные леммой 2.1.1, можно взять равными друг другу: $T_m = T$. Кроме того, в силу теоремы 1.1.1 и ввиду рефлексивности бахнеровских пространств $L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k)$ и $L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$ существуют слабые пределы

$$x^m \rightharpoonup x \text{ --слабо в } L_\infty(0, T; \text{coim } L);$$

$$x^m \rightharpoonup x \text{ слабо в } L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k);$$

$$x_t^m \rightharpoonup x \text{ слабо в } L_2(0, T; \text{coim } L);$$

$$x^m(T) \rightharpoonup \xi \text{ слабо в } \text{coim } L;$$

$$x^m(0) \rightarrow x_0 \text{ сильно coim } L.$$

В силу p_j -коэрцитивности операторов $N_j, j = 1, \dots, k$, получим

$$\int_0^T \langle N_j(x^m), x^m \rangle d\tau \leq \int_0^T \|N_j(x^m)\|_{\mathfrak{B}_j^*} \|x^m\|_{\mathfrak{B}_j} d\tau \leq C^{N_j} \int_0^T \|x^m\|_{\mathfrak{B}_j}^{p_j-1} \|x^m\|_{\mathfrak{B}_j} d\tau,$$

и, следовательно, $N_j(x^m)$ ограничены в $L_{q_j}(0, T; \mathfrak{B}_j^*)$. В силу вложений (2.1.1) и того, что $p_k = \max_{1 \leq j \leq k} p_j$, получим

$$L_{q_j}(0, T; \mathfrak{B}_j^*) \hookrightarrow L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*).$$

Тогда $N_j(x^m)$ ограничены в $L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$. В силу рефлексивности пространства $L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$ и теоремы 1.1.1

$$N(x^m) = \sum_{j=1}^k N_j(x^m) \rightharpoonup \mu \text{ слабо в } L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*),$$

где $x^m : m \in \mathbb{N}$ – некоторая подпоследовательность последовательности галеркинских приближений, гарантированных леммой 2.1.1.

Продолжим $x^m(t), N(x^m(t))$ на \mathbb{R} нулем вне $[0, T]$; соответствующее продолжение обозначим через $\tilde{x}^m(t), N_j(\tilde{x}^m(t))$. Тогда из (2.1.9) следует, что

$$\begin{aligned} & \langle L\tilde{x}_t^m(t), \varphi_i \rangle + \langle M\tilde{x}^m(t) + N(\tilde{x}^m(t)), \varphi_i \rangle = \\ & = \langle \tilde{u}(t), \varphi_i \rangle + \langle Lx_0^m, \varphi_i \rangle \delta(t - 0) + \langle Lx^m(T), \varphi_i \rangle \delta(t - T). \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Теперь мы можем перейти к пределу в (2.1.17) при фиксированном j , откуда выведем, что

$$\begin{aligned} & \langle L\tilde{x}_t(t), \varphi_j \rangle + \langle M\tilde{x}, \varphi_j \rangle + \langle \tilde{\mu}, \varphi_j \rangle = \\ & = \langle \tilde{u}(t), \varphi_j \rangle + \langle Lx_0, \varphi_j \rangle \delta(t - 0) - \langle \xi, \varphi_j \rangle \delta(t - T) \forall j \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$L\tilde{x}_t(t) + M\tilde{x} + \tilde{\mu} = \tilde{u}(t) + Lx_0 \delta(t - 0) - \xi \delta(t - T). \quad (2.1.18)$$

Сужая (2.1.18) на $(0, T)$, получим, что

$$L\dot{x} + Mx + \mu = u. \quad (2.1.19)$$

Из (2.1.16) вытекает, что $\dot{x} \in L_2(0, T; \text{coim } L)$, тогда $\dot{x}^1 \in L_2(0, T; \text{coim } L)$. В силу соотношения (1.3.7) $\dot{x}^0 \in L_2(0, T; \ker L)$, следовательно, $x(0)$ имеет смысл, из (2.1.18) получим, что $x(0) = x_0$.

Итак, мы докажем существование решения, если покажем, что

$$\mu = N(x) = \sum_{j=1}^k N_j(x).$$

Из монотонности оператора N следует, что

$$X_m = \int_0^T \langle N(x^m(t)) - N(z(t)), x^m(t) - z(t) \rangle dt \geq 0 \quad \forall z \in L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k).$$

Согласно (2.1.9),

$$\int_0^T \langle N(x^m(t)), x^m(t) \rangle dt = \int_0^T \langle u(t) - Mx^m(t), x^m(t) \rangle dt + \frac{1}{2}|x_0^m|^2 - \frac{1}{2}|x_m(T)|^2$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} X_m &= \int_0^T \langle u(t) - Mx^m(t), x^m(t) \rangle dt + \frac{1}{2}|x_0^m|^2 - \frac{1}{2}|x^m(T)|^2 - \\ &\quad - \int_0^T \langle N(x^m(t)), z(t) \rangle dt - \int_0^T \langle N(z(t)), x^m(t) - z(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

По лемме 1.1.1 $\liminf |x^m(T)|^2 \geq |x(T)|^2$, тогда

$$\begin{aligned} \limsup X_m &\leq \int_0^T \langle u, x(t) \rangle dt - \int_0^T \langle Mx(t), x(t) \rangle dt + \frac{1}{2}|x_0|^2 - \frac{1}{2}|x(T)|^2 - \\ &\quad - \int_0^T \langle \mu, z(t) \rangle dt - \int_0^T \langle N(z(t)), x(t) - z(t) \rangle dt. \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Из (2.1.19) мы можем заключить, что

$$\int_0^T \langle u, x(t) \rangle dt - \int_0^T \langle Mx(t), x(t) \rangle dt + \frac{1}{2}|x_0|^2 - \frac{1}{2}|x(T)|^2 = \int_0^T \langle \mu, x(t) \rangle dt.$$

Тогда получим

$$\int_0^T \langle \mu - N(z), x - z \rangle dt \geq 0. \tag{2.1.21}$$

Положим $z = x - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in L_p(0, T; \mathfrak{B})$ и произвольно, тогда из (2.1.21) следует, что

$$\lambda \int_0^T \langle \mu - N(x - \lambda w), w \rangle dt \geq 0,$$

откуда

$$\int_0^T \langle \mu - N(x - \lambda w), w \rangle dt \geq 0.$$

Устремляя $\lambda \rightarrow 0$ в силу непрерывности оператора N и теоремы Лебега, мы получим, что

$$\int_0^T \langle \mu - N(x), w \rangle dt \geq 0 \quad \forall w.$$

Следовательно,

$$\mu = N(x).$$

□

Рассмотрим задачу Коши (2.1.2) для уравнения

$$L \dot{x} + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u. \quad (2.1.22)$$

Аналогично предыдущим рассуждениям исследуем вопрос существования единственного слабого обобщенного решения задачи (2.1.2), (2.1.22).

Определение 2.1.2. Слабым обобщенным решением уравнения (2.1.22) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию

$$\int_0^T \varphi(t) \left[\left\langle L \frac{d}{dt} x, w \right\rangle + \sum_{j=1}^k \langle N_j(x), w \rangle \right] dt = \int_0^T \varphi(t) \langle u, w \rangle dt \quad (2.1.23)$$

$$\forall w \in \mathfrak{H}, \forall \varphi \in L_2(0, T).$$

Решение уравнения (2.1.22) назовем *решением задачи Коши*, если оно удовлетворяет (2.1.2).

Построим галеркинские приближения решения задачи (2.1.2), (2.1.22). Для этого выберем в \mathfrak{H} ортонормальную (в смысле \mathcal{H}) тотальную систему $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l\} = \ker L$, $\dim \ker L = l$. Построим галеркинские приближения решения задачи (2.1.2), (2.1.3) в виде

$$x^m(t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \varphi_i, \quad m > l, \quad (2.1.24)$$

где коэффициенты $a_i = a_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ определяются следующей задачей:

$$\left\langle L \frac{dx^m}{dt}, \varphi_i \right\rangle + \left\langle \sum_{j=1}^k N_j(x^m), \varphi_i \right\rangle = \langle u, \varphi_i \rangle, \quad (2.1.25)$$

$$\langle x^m(0) - x_0, \varphi_i \rangle = 0, \quad (2.1.26)$$

$$x^m(0) \rightarrow x_0 \text{ сильно в пространстве } \mathfrak{H}. \quad (2.1.27)$$

Теорема 2.1.2. *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$ таких, что выполнено (2.1.4), существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (2.1.2), (2.1.22).*

Доказательство. Доказательство теоремы проводится в два этапа и аналогично доказательству теоремы 2.1.1.

Единственность. Пусть $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = x_2(t)$ – два решения задачи (2.1.2), (2.1.22). Тогда для их разности $w = x_1 - x_2$ имеем

$$\langle Lw, w \rangle + 2 \int_0^t \left\langle \sum_{j=1}^k (N_j(x_1) - N_j(x_2)), w \right\rangle d\tau = 0. \quad (2.1.28)$$

Первое слагаемое в (2.1.28) неотрицательно в силу неотрицательной определенности оператора L , а второе неотрицательно в силу s -монотонности операторов N_j и леммы 1.1.5. Значит, равенство (2.1.28) удовлетворяется лишь в случае $w \equiv 0$.

Существование. Введем в $\text{coim } L$ норму $|x|^2 = \langle Lx, x \rangle$. В силу принципа Куранта эта норма эквивалента норме, индуцированной из надпространства \mathcal{H} . Умножим i -ое уравнение (2.1.25) на $a_i(t)$ соответственно, результаты сложим по $i = 1, \dots, m$ и проинтегрируем на $(0, t)$:

$$\begin{aligned} & \langle Lx^m(t), x^m(t) \rangle + 2 \sum_{j=1}^k \int_0^t \langle N_j(x^m(\tau)), x^m(\tau) \rangle d\tau \leq \\ & \leq 2 \int_0^t \|u(\tau)\|_{\mathfrak{B}_k^*} \|x^m(\tau)\|_{\mathfrak{B}_k} d\tau + \langle Lx^m(0), x^m(0) \rangle. \end{aligned}$$

Ввиду p_j -коэрцитивности операторов N_j получим

$$|x^m(t)|^2 + C_1 \int_0^t \|x^m(\tau)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} d\tau \leq C_2, \quad C_i = \text{const} > 0. \quad (2.1.29)$$

Аналогично предыдущим рассуждениям умножим i -ое уравнение (2.1.25) на $a'_i(t)$ соответственно, результаты сложим по $i = 1, \dots, m$ и получим

$$\int_0^t |x_\tau^m(\tau)|^2 d\tau \leq C_3. \quad (2.1.30)$$

Из оценки (2.1.29) следует, что все T_m , гарантированные леммой 2.1.1, можно взять равными друг другу: $T_m = T$. Кроме того, в силу теоремы 1.1.1 и ввиду рефлексивности бахнеровских пространств $L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k)$ и $L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$ существуют слабые пределы

$$x^m \rightharpoonup x \text{ --слабо в } L_\infty(0, T; \text{coim } L);$$

$$x^m \rightharpoonup x \text{ слабо в } L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k);$$

$$x_t^m \rightharpoonup x \text{ слабо в } L_2(0, T; \text{coim } L);$$

$$x^m(T) \rightharpoonup \xi \text{ слабо в coim } L;$$

$$x^m(0) \rightarrow x_0 \text{ сильно coim } L.$$

В силу p_j -коэрцитивности и s -монотонности операторов $N_j, j = 1, \dots, k$, получим

$$N(x^m) = \sum_{j=1}^k N_j(x^m) \rightharpoonup N(x) \text{ слабо в } L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*),$$

где $x^m : m \in \mathbb{N}$ – некоторая подпоследовательность последовательности галеркинских приближений, гарантированных леммой 2.1.1.

Переходя к пределу в (2.1.17) при фиксированном j , получим, что

$$L\dot{x} + N(x) = u. \quad (2.1.31)$$

Из (2.1.30) вытекает, что $\dot{x} \in L_2(0, T; \text{coim } L)$, тогда $\dot{x}^1 \in L_2(0, T; \text{coim } L)$. Тогда в силу соотношения (1.3.7) $\dot{x}^0 \in L_{p_k}(0, T; \ker L)$, следовательно $x(0)$ имеет смысл. \square

Эволюционный случай

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*)$ – дуальные

(относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{B}_k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_1 \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \hookrightarrow \mathfrak{B}_1^* \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_k^* \quad (2.1.32)$$

плотны и непрерывны.

Рассмотрим задачу Коши (2.1.2) для полулинейного уравнения соболевского типа (2.1.22). Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ и $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*), j = \overline{1, k}$ обладают всеми свойствами, введенными в начале параграфа.

Ввиду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $\mathfrak{H} \supset \ker L \equiv \text{coker } L \subset \mathfrak{H}^*$. Очевидно, $\mathfrak{H}^* = \text{coker } L \oplus \text{im } L$. Обозначим через $\overline{\text{im } L}$ замыкание $\text{im } L$ в топологии \mathfrak{B}_k^* , тогда $\mathfrak{B}_k^* = \text{coker } L \oplus \overline{\text{im } L}$. Обозначим через Q проектор \mathfrak{B}_k^* вдоль $\text{coker } L$ на $\overline{\text{im } L}$ и аналогично динамическому случаю сделаем допущение:

$$(\mathbb{I} - Q)u \text{ не зависит от } t \in (0, T) \quad (2.1.33)$$

и введем в рассмотрение множество

$$\text{coim } L = \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, v \rangle = 0, \forall v \in \ker L \setminus \{0\}\}.$$

Обозначим через P проектор вдоль $\ker L$ на $\text{coim } L \cap \mathfrak{B}_k \equiv \tilde{\mathfrak{B}}_k$. Ввиду (1.3.8) $\mathfrak{B}_k = \ker L \oplus \tilde{\mathfrak{B}}_k$.

Теорема 2.1.3. *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$ таких, что выполнено (2.1.33), существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (2.1.2), (2.1.22).*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1.2. \square

2.2. Задача Шоултера – Сидорова с монотонным оператором

Динамический случай

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}_j, \mathfrak{B}_j^*), j = \overline{1, k}, k \in \mathbb{N}$ – дуальные (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения (2.1.1) плотны и непрерывны. Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$, $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*), r \geq 1, j = \overline{1, k}$ удовлетворяют условиям п. 2.1.

Рассмотрим задачу Шоултера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \quad (2.2.1)$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u. \quad (2.2.2)$$

Ввиду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $\mathfrak{H} \supset \ker L \equiv \text{coker } L \subset \mathfrak{H}^*$. Поскольку $\text{coker } L$ конечномерно, то $\mathfrak{H}^* = \text{coker } L \oplus \text{im } L$, $\mathfrak{B}_j^* = \text{coker } L \oplus [\text{im } L \cap \mathfrak{B}_j^*]$. Значит, существует проектор Q вдоль $\text{coker } L$ на $\text{im } L$. Введем в рассмотрение множество

$$\text{coim } L = \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi \rangle = 0 \ \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}.$$

Обозначим через P проектор вдоль $\ker L$ на $\text{coim } L$. Положим $x^1 = Px_0 \in \text{coim } L$.

Построим пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k), \ \dot{x}^1 \in L_2(0, T; \text{coim } L)\}.$$

Определение 2.2.1. *Слабым обобщенным решением* уравнения (2.2.2) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}_1$, удовлетворяющую условию

$$\begin{aligned} & \int_0^T \varphi(t) \left[\left\langle L \frac{d}{dt} x, w \right\rangle + \langle Mx, w \rangle + \sum_{j=1}^k \langle N_j(x), w \rangle \right] dt = \\ & = \int_0^T \varphi(t) \langle u, w \rangle dt \ \forall w \in \mathfrak{H}, \forall \varphi \in L_2(0, T). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Решение уравнения (2.2.2) назовем *решением задачи Шоултера – Сидорова*, если оно удовлетворяет (2.2.1).

Система $\{\varphi_k\}$ собственных векторов оператора L тотальна в пространстве \mathfrak{H} , а значит в силу вложений (2.1.1) тотальна в пространствах \mathfrak{B}_k и \mathcal{H} .

Построим галеркинские приближения решения задачи (2.2.1), (2.2.2). Для этого выберем в \mathfrak{H} ортонормальную (в смысле \mathcal{H}) тотальную систему $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l\} = \ker L$, $\dim \ker L = l$. Построим галеркинские приближения решения задачи (2.2.1), (2.2.2) в виде

$$x^m(s, t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \varphi_i(s), \quad m > l, \quad (2.2.4)$$

где коэффициенты $a_i = a_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ определяются следующей задачей:

$$\langle Lx_t^m, \varphi_i \rangle + \langle Mx^m, \varphi_i \rangle + \left\langle \sum_{j=1}^k N_j(x^m), \varphi_i \right\rangle = \langle u, \varphi_i \rangle, \quad (2.2.5)$$

$$\langle L(x^m(0) - x_0), \varphi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.2.6)$$

$$Lx^m(0) \rightarrow Lx_0 \text{ сильно в подпространстве } \text{coim} L. \quad (2.2.7)$$

Уравнения (2.2.5) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $T_m \in \mathbb{R}_+$, $T_m = T_m(x_0)$, $\mathfrak{H}^m = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$.

Лемма 2.2.1. *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$ и $m > \dim \ker L$ существует единственное локальное решение $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{H}^m)$ задачи (2.2.5), (2.2.6).*

Доказательство. В силу теоремы 1.1.5 для разрешимости задачи (2.2.5), (2.2.6) достаточно установить невырожденность матрицы

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle Mx^m + \sum_{j=1}^k N_j(x^m) - u, \varphi_i \right\rangle \right\|, \quad i, j = 1, \dots, m,$$

в точке $x_0 = (x_1(0), \dots, x_m(0))$ или, что то же самое, невырожденность оператора $\sum_{j=1}^k (\mathbb{I} - Q)N'_{jx_0}(\mathbb{I} - P)$. Однако $\forall v \in \ker L$, $v \neq 0$, имеем

$$\left\langle \sum_{j=1}^k (\mathbb{I} - Q)M'_{jx_0}(\mathbb{I} - P)v, v \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^k M'_{jx_0}v, v \right\rangle > 0$$

ввиду s -монотонности операторов M_j и конструкции проектора $(\mathbb{I} - Q)$ пространства \mathfrak{H}^* вдоль im на $\text{coker } L$ и проектора $(\mathbb{I} - P)$ пространства \mathfrak{H} вдоль $\text{coim } L$ на $\ker L$. \square

Теорема 2.2.1. *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}_1$ задачи (2.2.2), (2.2.1).*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1.1 и проводится в несколько этапов.

Единственность. Пусть $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = x_2(t)$ — два решения задачи (2.2.2), (2.2.1). Тогда для их разности $w = x_1 - x_2$ получим

$$\langle Lw, w \rangle + 2 \int_0^t \left\langle Mw + \sum_{j=1}^k (N_j(x_1) - N_j(x_2)), w \right\rangle d\tau = 0. \quad (2.2.8)$$

Первое слагаемое в (2.2.8) неотрицательно в силу неотрицательной определенности оператора L , а второе неотрицательно в силу s -монотонности операторов N_j , неотрицательной определенности оператора M и леммы 1.1.1. Значит, равенство (2.2.8) удовлетворяется лишь в случае $w \equiv 0$.

Существование. Введем в $\text{coim } L$ норму $|x|^2 = \langle Lx, x \rangle$. В силу принципа Куранта эта норма эквивалента норме, индуцированной из надпространства \mathcal{H} . Умножим i -ое уравнение (2.2.3) на $a_i(t)$ соответственно, результаты сложим по $i = 1, \dots, m$ и проинтегрируем на $(0, t)$. Ввиду p_j -коэрцитивности операторов N_j для любой произвольной константы ε такой, что $2C_M - \frac{1}{\varepsilon^2} > 0$, получим

$$|x^m(t)|^2 + C_1 \int_0^t \|x^m(\tau)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} d\tau \leq \varepsilon^2 \int_0^T \|u(\tau)\|_{\mathfrak{H}^*}^2 d\tau + |x^m(0)|^2, \quad C_1 = \text{const} > 0.$$

Из оценки следует, что все T_m , гарантированные леммой 2.2.1, можно взять равными друг другу: $T_m = T$.

Аналогично получается оценка

$$\int_0^t |x_t^m(\tau)|^2 d\tau \leq C_2 = \text{const} > 0.$$

Кроме того, в силу теоремы 1.1.1 и ввиду рефлексивности бахнеровских пространств $L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k)$ и $L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$ существуют слабые пределы

$$x^m \rightharpoonup x \text{ --слабо в } L_\infty(0, T; \text{coim } L);$$

$$x^m \rightharpoonup x \text{ слабо в } L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k);$$

$$x_t^m \rightharpoonup x \text{ --слабо в } L_\infty(0, T; \text{coim } L);$$

$$x_t^m \rightharpoonup x \text{ слабо в } L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k);$$

$$x^m(T) \rightharpoonup \xi \text{ слабо в coim } L;$$

$$x^m(0) \rightarrow x_0 \text{ сильно coim } L.$$

В силу p_j -коэрцитивности операторов $N_j, j = 1, \dots, k$, получим

$$\int_0^T \langle N_j(x^m), x^m \rangle d\tau \leq \int_0^T \|N_j(x^m)\|_{\mathfrak{B}_j^*} \|x^m\|_{\mathfrak{B}_j} d\tau \leq C^{N_j} \int_0^T \|x^m\|_{\mathfrak{B}_j}^{p_j-1} \|x^m\|_{\mathfrak{B}_j},$$

и, следовательно, $N_j(x^m)$ ограничены в $L_{q_j}(0, T; \mathfrak{B}_j^*)$. В силу вложений (2.1.1) и того, что $p_k = \max_{1 \leq j \leq k} p_j$, получим

$$L_{q_j}(0, T; \mathfrak{B}_j^*) \hookrightarrow L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*).$$

Тогда $N_j(x^m)$ ограничены в $L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$. В силу рефлексивности пространства $L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$ и теоремы 1.1.1

$$N(x^m) = \sum_{j=1}^k N_j(x^m) \rightharpoonup \mu \text{ слабо в } L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*),$$

где $x^m : m \in \mathbb{N}$ – некоторая подпоследовательность последовательности галеркинских приближений, гарантированных леммой 2.1.1.

Продолжим $x^m(t), N(x^m(t))$ на \mathbb{R} нулем вне $[0, T]$; соответствующее продолжение обозначим через $\tilde{x}^m(t), N_j(\tilde{x}^m(t))$. Тогда из (2.2.3) следует, что

$$\begin{aligned} & \langle L\tilde{x}_t^m(t), \varphi_i \rangle + \langle M\tilde{x}^m(t) + N(\tilde{x}^m(t)), \varphi_i \rangle = \\ & \langle \tilde{u}(t), \varphi_i \rangle + \langle Lx_0^m, \varphi_i \rangle \delta(t - 0) + \langle Lx^m(T), \varphi_i \rangle \delta(t - T). \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Теперь мы можем перейти к пределу в (2.2.9) при фиксированном j , откуда мы выведем, что

$$\begin{aligned} \langle L\tilde{x}_t(t), \varphi_j \rangle + \langle M\tilde{x}, \varphi_j \rangle + \langle \tilde{\mu}, \varphi_j \rangle = \\ = \langle \tilde{u}(t), \varphi_j \rangle + \langle Lx_0, \varphi_j \rangle \delta(t - 0) - \langle \xi, \varphi_j \rangle \delta(t - T) \forall j, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$L\tilde{x}_t(t) + M\tilde{x} + \tilde{\mu} = \tilde{u}(t) + Lx_0\delta(t - 0) - \xi\delta(t - T). \quad (2.2.10)$$

Сужая (2.2.9) на $(0, T)$, мы получим, что

$$L\dot{x} + Mx + \mu = u, \quad (2.2.11)$$

следовательно, $L\dot{x} \in L_2(0, T; \text{im } L) \cap L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$, откуда в силу непрерывности оператора L вытекает, что $\dot{x}^1 \in L_2(0, T; \text{coim } L) \cap L_{p_k}(0, T; \text{coim } L)$. Тогда получим: $Lx(0) = Lx_0$.

Итак, мы докажем существование решения, если покажем, что

$$\mu = N(x) = \sum_{j=1}^k N_j(x).$$

Используя метод монотонности аналогично теореме 2.1.1, получим $\mu = N(x)$.

□

Рассмотрим задачу Шоуолтера – Сидорова (2.2.1) для уравнения

$$L\dot{x} + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u. \quad (2.2.12)$$

Аналогично предыдущим рассуждениям исследуем вопрос существования единственного слабого обобщенного решения задачи (2.2.1), (2.2.12).

Определение 2.2.2. *Слабым обобщенным решением* уравнения (2.2.12) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi(t) \left[\left\langle L \frac{d}{dt} x, w \right\rangle + \sum_{j=1}^k \langle N_j(x), w \rangle \right] dt = \int_0^T \varphi(t) \langle u, w \rangle dt \\ \forall w \in \mathfrak{H}, \forall \varphi \in L_2(0, T). \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Решение уравнения (2.2.12) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова*, если оно удовлетворяет (2.2.1).

Построим галеркинские приближения решения задачи (2.2.1), (2.2.12). Для этого выберем в \mathfrak{H} ортонормальную (в смысле \mathcal{H}) тотальную систему $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l\} = \ker L$, $\dim \ker L = l$. Построим галеркинские приближения решения задачи (2.2.1), (2.2.2) в виде

$$x^m(s, t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \varphi_i(s), \quad m > l, \quad (2.2.14)$$

где коэффициенты $a_i = a_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ определяются следующей системой уравнений:

$$\left\langle L \frac{dx^m}{dt}, \varphi_i \right\rangle + \left\langle \sum_{j=1}^k N_j(x^m), \varphi_i \right\rangle = \langle u, \varphi_i \rangle \quad (2.2.15)$$

с условиями (2.2.6), (2.2.7).

Теорема 2.2.2. *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$ существует единственное решение $x \in X_1$ задачи (2.2.1), (2.2.12).*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.2.1. \square

Эволюционный случай

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*)$ – дуальные (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаевых пространств, причем вложения (1.3.8) плотны и непрерывны.

Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ и $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*)$, $j = \overline{1, k}$ обладают всеми свойствами, введенными в начале параграфа. Рассмотрим задачу Шоуолтера – Сидорова (2.2.1) для полулинейного уравнения соболевского типа (2.2.12).

Ввиду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $\mathfrak{H} \supset \ker L \equiv \text{coker } L \subset \mathfrak{H}^*$. Очевидно, $\mathfrak{H}^* = \text{coker } L \oplus \text{im } L$. Обозначим через

$\overline{\text{im } L}$ замыкание $\text{im } L$ в топологии \mathfrak{B}_k^* , тогда $\mathfrak{B}_k^* = \text{coker } L \oplus \overline{\text{im } L}$. Обозначим через Q проектор \mathfrak{B}_k^* вдоль $\text{coker } L$ на $\overline{\text{im } L}$.

Аналогично динамическому случаю введем в рассмотрение множество

$$\text{coim } L = \{u \in \mathfrak{H} : \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in \ker L \setminus \{0\}\}.$$

Обозначим через P проектор вдоль $\ker L$ на $\text{coim } L \cap \mathfrak{B}_k \equiv \tilde{\mathfrak{B}}_k$. Ввиду (1.3.8) $\mathfrak{B}_k = \ker L \oplus \tilde{\mathfrak{B}}_k$.

Теорема 2.2.3. *При любых $x_0 \in \mathfrak{B}_k$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}_1$ задачи (2.2.1), (2.2.12).*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.2.2. \square

2.3. Оптимальное управление для задачи Шоултера – Сидорова с монотонным оператором

Динамический случай

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}_j, \mathfrak{B}_j^*)$, $j = \overline{1, k}$, $k \in \mathbb{N}$ – дуальные (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_1^* \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_k^* \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \quad (2.3.1)$$

плотны и непрерывны, а вложение

$$\mathfrak{H} \Subset \mathcal{H} \quad (2.3.2)$$

компактно. Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$, $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*)$, $r \geq 1$, $j = \overline{1, k}$ удовлетворяют условиям п. 2.1.

Построим пространство $\mathfrak{U} = L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ и определим в пространстве \mathfrak{U} непустое, замкнутое и выпуклое множество \mathfrak{U}_{ad} . Рассмотрим задачу опти-

мального управления

$$L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u, \quad L(x(0) - x_0) = 0, \quad (2.3.3)$$

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}, \quad (2.3.4)$$

где функционал штрафа задается формулой

$$J(x, u) = \beta \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + (1 - \beta) \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{H}}^2 dt, \quad \beta \in (0, 1), \quad (2.3.5)$$

здесь $z_d = z_d(t)$ – желаемое состояние. Обозначим через $x^1 = Px$, где P проектор вдоль $\ker L$ на $\text{coim } L$.

Построим пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k), \quad \dot{x}^1 \in L_2(0, T; \text{coim } L)\}.$$

Определение 2.3.1. Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$ назовем *решением задачи оптимального управления* (2.3.3), (2.3.4), если

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{(x, u)} J(x, u),$$

где пары $(x, u) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$ удовлетворяют (2.3.3) в смысле определения 2.2.1; вектор-функцию \tilde{u} назовем *оптимальным управлением*.

Замечание 2.3.1. Допустимым элементом задачи (2.3.3), (2.3.4) назовем пару $(x, u) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$, удовлетворяющую задаче (2.3.3), для которой

$$J(x, u) < +\infty.$$

Поскольку множество $\mathfrak{U}_{ad} \neq \emptyset$, то для любого $u \in \mathfrak{U}_{ad} \subset \mathfrak{U}$ в силу теоремы 2.2.1 существует единственное решение $x = x(u)$ задачи (2.3.3).

Теорема 2.3.1. При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (2.3.3), (2.3.4).

Доказательство. Из теоремы 2.2.1 вытекает, что оператор

$$(L \frac{d}{dt} + M + N) : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{U}$$

есть гомеоморфизм. Поэтому функционал стоимости (2.3.5) можно представить

$$J(x, u) = J(u) = \beta \|x(u) - z_d\|_{L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k)}^{p_k} + (1 - \beta) \|u\|_{L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)}^2. \quad (2.3.6)$$

Пусть $\{u_m\} \subset \mathfrak{U}_{ad}$ – последовательность такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(u_m) = \inf_{u \in \mathfrak{U}_{ad}} J(u),$$

тогда из (2.3.6) вытекает, что

$$\|u_m\|_{L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)} \leq \text{const} \quad (2.3.7)$$

при всех $m \in \mathbb{N}$. Из (2.3.7) (переходя, если надо, к подпоследовательности) извлечем слабо сходящуюся последовательность $u_m \rightharpoonup \tilde{u}$. В силу теоремы 1.1.2 точка $\tilde{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$. Обозначим за $x_m = x(u_m)$ слабо обобщенное решение уравнения

$$L \dot{x}_m + M x_m + \sum_{j=1}^k N_j(x_m) = u_m. \quad (2.3.8)$$

Используя рассуждения теоремы 2.2.1, получим

$$N(x_m) = \sum_{j=1}^k N_j(x_m) \in L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*).$$

Значит, в силу (2.3.8) $L \dot{x}_m \in L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*) \cap L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$. Но тогда $\{L \dot{x}_m\}$ остается в ограниченном множестве из $L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$; $\{x_m\}$ остается в ограниченном множестве из $L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k)$; значит, можно извлечь такую подпоследовательность, которую снова обозначим $\{x_m\}$, что

$$x_m \rightharpoonup \tilde{x} \text{ --слабо в } L_\infty(0, T; \text{coim } L),$$

$$x_m \rightharpoonup \tilde{x} \text{ --слабо в } L_{p_k}((0, T; \mathfrak{B}_k)),$$

$$x_m \rightharpoonup \tilde{x} \text{ --слабо в } L_2(0, T; \mathfrak{H}^*),$$

$$L \dot{x}_m \rightharpoonup L \dot{\tilde{x}} \text{ — слабо в } L_2(0, T; \mathfrak{H}^*),$$

$$N(x_m) \rightharpoonup \mu \text{ — слабо в } L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*).$$

Перейдем к пределу в уравнении состояния (2.3.8) и получим

$$L \dot{\tilde{x}} + M \tilde{x} + \mu = \tilde{u}. \quad (2.3.9)$$

Необходимо показать, что

$$\mu = N(\tilde{x}).$$

Для этого воспользуемся априорными оценками, полученными в теореме 2.2.1, и методом монотонности. Поскольку

$$\begin{aligned} |x_m(t)|^2 + C_1 \int_0^t \|x_m(\tau)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} d\tau + C_2 \int_0^t \|x_m(\tau)\|_{\mathfrak{H}}^2 d\tau &\leq \\ \leq C_3 \int_0^T \|u_m(\tau)\|_{\mathfrak{H}^*}^2 d\tau + |x_m(0)|^2 &\leq C_4, \quad C_i = \text{const} > 0 \end{aligned}$$

и

$$\int_0^t |\dot{x}_m(\tau)|^2 d\tau \leq C_5, \quad C_5 = \text{const} > 0,$$

то x_m ограничены в $L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{H})$, \dot{x}_m ограничены в $L_2(0, T; \mathfrak{H})$, тогда в силу компактного вложения (2.3.2) получим, что последовательность x_m сходится сильно и почти всюду в $L_2(0, T; \mathcal{H})$.

Из монотонности оператора N следует, что

$$X_m = \int_0^T \langle N(x^m(t)) - N(z(t)), x^m(t) - z(t) \rangle dt \geq 0 \quad \forall z \in L_{p_k}(0, T, \mathfrak{B}_k).$$

Согласно (2.3.8)

$$\int_0^T \langle N(x^m(t)), x^m(t) \rangle dt = \int_0^T \langle u_m(t) - Mx^m(t), x^m(t) \rangle dt + \frac{1}{2}|x_0^m|^2 - \frac{1}{2}|x_m(T)|^2$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} X_m &= \int_0^T \langle u_m(t) - Mx^m(t), x^m(t) \rangle dt + \frac{1}{2}|x_0^m|^2 - \frac{1}{2}|x^m(T)|^2 - \\ &- \int_0^T \langle N(x^m(t)), z(t) \rangle dt - \int_0^T \langle N(z(t)), x^m(t) - z(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

По лемме 1.1.1 $\liminf |x^m(T)|^2 \geq |x(T)|^2$ и x_m сходится сильно в $L_2(0, T; \mathcal{H})$, тогда

$$\begin{aligned} \limsup X_m &\leq \int_0^T \langle \tilde{u}, \tilde{x}(t) \rangle dt - \int_0^T \langle M\tilde{x}(t), \tilde{x}(t) \rangle dt + \frac{1}{2}|\tilde{x}_0|^2 - \frac{1}{2}|\tilde{x}(T)|^2 - \\ &- \int_0^T \langle \mu, z(t) \rangle dt - \int_0^T \langle N(z(t)), \tilde{x}(t) - z(t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Из (2.3.9) мы можем заключить, что

$$\int_0^T \langle \tilde{u}, \tilde{x}(t) \rangle dt - \int_0^T \langle M\tilde{x}(t), \tilde{x}(t) \rangle dt + \frac{1}{2}|\tilde{x}_0|^2 - \frac{1}{2}|\tilde{x}(T)|^2 = \int_0^T \langle \mu, \tilde{x}(t) \rangle dt.$$

Тогда получим

$$\int_0^T \langle \mu - N(z), \tilde{x} - z \rangle dt \geq 0. \quad (2.3.11)$$

Положим $z = \tilde{x} - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in L_p(0, T; \mathfrak{B})$ и произвольно, тогда из (2.3.11) следует, что

$$\lambda \int_0^T \langle \mu - N(\tilde{x} - \lambda w), w \rangle dt \geq 0,$$

откуда

$$\int_0^T \langle \mu - N(\tilde{x} - \lambda w), w \rangle dt \geq 0,$$

устремляя $\lambda \rightarrow 0$ в силу непрерывности оператора N и теоремы Лебега, мы получим, что

$$\int_0^T \langle \mu - N(\tilde{x}), w \rangle dt \geq 0 \quad \forall w.$$

Следовательно,

$$\mu = N(\tilde{x}).$$

Значит, переходя к пределу в уравнении состояния (2.3.8), получим

$$L \dot{\tilde{x}} + M\tilde{x} + N(\tilde{x}) = \tilde{u}.$$

Следовательно $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{u})$ и $\liminf J(u_m) \geq J(\tilde{u})$. Значит, \tilde{u} есть оптимальное управление задачи (2.3.3), (2.3.4). \square

Построим пространство $\mathfrak{U}^1 = L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$ и определим в пространстве \mathfrak{U}^1 непустое, замкнутое и выпуклое множество \mathfrak{U}_{ad}^1 . Рассмотрим задачу оптимального управления

$$L \dot{x} + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u, \quad L(x(0) - x_0) = 0, \quad (2.3.12)$$

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}^1, \quad (2.3.13)$$

где функционал штрафа задается формулой

$$J(x, u) = \beta \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + (1 - \beta) \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{B}_k^*}^{q_k} dt, \quad \beta \in (0, 1), \quad (2.3.14)$$

здесь $z_d = z_d(t)$ – желаемое состояние.

Теорема 2.3.2. *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (2.3.12), (2.3.13).*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.3.1 и строится, используя результаты теоремы 2.2.2. \square

Эволюционный случай

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*)$ – дуальные (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаевых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{B}_k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_1 \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \hookrightarrow \mathfrak{B}_1^* \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_k^* \quad (2.3.15)$$

плотны и непрерывны, а вложение

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H} \quad (2.3.16)$$

компактно. Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ и $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*)$, $j = \overline{1, k}$ обладают всеми свойствами, введенными в начале параграфа. Аналогично динамическому случаю рассмотрим задачу оптимального управления (2.3.12), (2.3.13). Тогда справедлива

Теорема 2.3.3. *При любых $x_0 \in \mathfrak{B}_k$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (2.3.12), (2.3.13).*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.3.1 и строится, используя результаты теоремы 2.2.3. \square

2.4. Оптимальное управление для задачи Коши с монотонным оператором

Динамический случай

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}_j, \mathfrak{B}_j^*)$, $j = \overline{1, k}$, $k \in \mathbb{N}$ – дуальные (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_1^* \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_k^* \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \quad (2.4.1)$$

плотны и непрерывны, а вложение

$$\mathfrak{H} \Subset \mathcal{H} \quad (2.4.2)$$

компактно. Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$, $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*)$, $r \geq 1$, $j = \overline{1, k}$ удовлетворяют условиям п. 2.1.

Аналогично п. 2.1 построим проектор Q . Ввиду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $\mathfrak{H} \supseteq \ker L \equiv \text{coker } L \subset \mathfrak{H}^*$, тогда $\mathfrak{H}^* = \text{coker } L \oplus \text{im } L$, $\mathfrak{B}_k^* = \text{coker } L \oplus [\text{im } L \cap \mathfrak{B}_k^*]$. Значит, существует проектор Q вдоль $\text{coker } L$ на $\text{im } L \cap \mathfrak{B}_k^*$. Построим пространство $\mathfrak{U} = \{u \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*) : (\mathbb{I} - Q)u = 0, t \in (0, T)\}$ и определим в пространстве \mathfrak{U} непустое замкнутое

и выпуклое множество \mathfrak{U}_{ad} . Рассмотрим задачу оптимального управления

$$L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u, \quad x(0) = x_0, \quad (2.4.3)$$

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}, \quad (2.4.4)$$

где функционал штрафа задается формулой (2.3.5).

Построим пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{im } L) \cap L_{p_k}(0, T; \mathfrak{M}), \quad \dot{x} \in L_2(0, T; \mathfrak{H})\}.$$

Определение 2.4.1. Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$ назовем *решением задачи оптимального управления* (2.4.3), (2.4.4), если

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{(x, u)} J(x, u),$$

где пары $(x, u) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$ удовлетворяют (2.4.4) в смысле определения 2.1.1; вектор-функцию \tilde{u} назовем *оптимальным управлением*.

Замечание 2.4.1. Допустимым элементом задачи (2.4.3), (2.4.4) назовем пару $(x, u) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$, удовлетворяющую задаче (2.4.3), для которой

$$J(x, u) < +\infty.$$

Поскольку множество $\mathfrak{U}_{ad} \neq \emptyset$, то для любого $u \in \mathfrak{U}_{ad} \subset \mathfrak{U}$ в силу теоремы 2.1.1 существует единственное решение $x = x(u)$ задачи (2.4.3).

Построим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{H} : (\mathbb{I} - Q)Mx + (\mathbb{I} - Q) \sum_{j=1}^k N_j(x) = 0\}, \\ \quad \text{если } \ker L \neq \{0\}; \\ \mathfrak{H}, \quad \text{если } \ker L = \{0\}. \end{cases} \quad (2.4.5)$$

Теорема 2.4.1. При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (2.4.3), (2.4.4).

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.3.1. Из теоремы 2.2.1 вытекает, что оператор

$$(L \frac{d}{dt} + M + N) : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{U}$$

есть гомеоморфизм. Поэтому функционал стоимости (2.3.5) можно записать в виде

$$J(x, u) = J(u) = \beta \|x(u) - z_d\|_{L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B})}^{p_k} + (1 - \beta) \|u\|_{L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)}^2. \quad (2.4.6)$$

Пусть $\{u_m\} \subset \mathfrak{U}_{ad}$ – последовательность такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(u_m) = \inf_{u \in \mathfrak{U}_{ad}} J(u),$$

тогда из (2.4.6) вытекает, что

$$\|u_m\|_{L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)} \leq \text{const} \quad (2.4.7)$$

при всех $m \in \mathbb{N}$. Из (2.4.7) (переходя, если надо, к подпоследовательности) извлечем слабо сходящуюся последовательность $u_m \rightharpoonup \tilde{u}$. В силу теоремы 1.1.2 точка $\tilde{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$. Обозначим через $x_m = x(u_m)$ слабое обобщенное решение уравнения

$$L \dot{x}_m + M x_m + \sum_{j=1}^k N_j(x_m) = u_m. \quad (2.4.8)$$

Тогда, используя рассуждения теоремы 2.1.1, получим

$$N(x_m) = \sum_{j=1}^k N_j(x_m) \in L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*).$$

Значит, в силу (2.4.8) $L \dot{x}_m \in L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*) \cap L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$. Но тогда $\{L \dot{x}_m\}$ остается в ограниченном множестве из $L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$; $\{x_m\}$ остается в ограниченном множестве из $L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k)$; значит, можно извлечь такую подпоследовательность, которую снова обозначим $\{x_m\}$, что

$$x_m \rightharpoonup \tilde{x} \text{ – слабо в } L_\infty(0, T; \text{coim } L),$$

$$x_m \rightharpoonup \tilde{x} \text{ – слабо в } L_{p_k}((0, T; \mathfrak{B}_k),$$

$x_m \rightharpoonup \tilde{x}$ – слабо в $L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$,

$L \dot{x}_m \rightharpoonup L \dot{\tilde{x}}$ – слабо в $L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$,

$N(x_m) \rightharpoonup N(\tilde{x})$ – слабо в $L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$.

Переходя к пределу в уравнении состояния (2.4.8), получим

$$L \dot{\tilde{x}} + M\tilde{x} + N(\tilde{x}) = \tilde{u}.$$

Следовательно, $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{u})$ и $\liminf J(u_m) \geq J(\tilde{u})$. Значит, u есть оптимальное управление. \square

Построим пространство $\mathfrak{U}^1 = \{u \in L_{q_k}(0, T; \mathfrak{H}^*) : (\mathbb{I} - Q)u = 0, t \in (0, T)\}$ и определим в пространстве \mathfrak{U}^1 непустое замкнутое и выпуклое множество \mathfrak{U}_{ad}^1 . Рассмотрим задачу оптимального управления

$$L \dot{x} + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u, \quad x(0) = x_0, \quad (2.4.9)$$

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}^1, \quad (2.4.10)$$

где функционал штрафа задается формулой (2.3.14).

Теорема 2.4.2. *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (2.4.9), (2.4.10).*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.4.1 и строится, используя результаты теоремы 2.1.2.

Эволюционный случай

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*)$ – дуальные (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаевых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{B}_k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_1 \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \hookrightarrow \mathfrak{B}_1^* \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_k^* \quad (2.4.11)$$

плотны и непрерывны, а вложение

$$\mathfrak{H} \Subset \mathcal{H} \quad (2.4.12)$$

компактно. Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ и $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*)$, $j = \overline{1, k}$ обладают всеми свойствами, введенными в начале параграфа.

Аналогично п. 2.1 построим проектор Q . Ввиду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $\mathfrak{H} \supset \ker L \equiv \text{coker } L \subset \mathfrak{H}^*$. Очевидно, $\mathfrak{H}^* = \text{coker } L \oplus \text{im } L$. Обозначим через $\overline{\text{im } L}$ замыкание $\text{im } L$ в топологии \mathfrak{B}_k^* , тогда $\mathfrak{B}_k^* = \text{coker } L \oplus \overline{\text{im } L}$. Обозначим через Q проектор \mathfrak{B}_k^* вдоль $\text{coker } L$ на $\overline{\text{im } L}$ и аналогично динамическому случаю построим пространство $\mathfrak{U}^2 = \{u \in L_{q_k}(0, T; \mathfrak{H}^*) : (\mathbb{I} - Q)u = 0, t \in (0, T)\}$ и определим в пространстве \mathfrak{U}^2 непустое замкнутое и выпуклое множество \mathfrak{U}_{ad}^2 . Рассмотрим задачу оптимального управления

$$L \dot{x} + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u, \quad x(0) = x_0, \quad (2.4.13)$$

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}^2, \quad (2.4.14)$$

где функционал штрафа задается формулой (2.3.14).

Построим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{B}_k : (\mathbb{I} - Q)Mx + (\mathbb{I} - Q) \sum_{j=1}^k N_j(x) = 0\}, & \text{если } \ker L \neq \{0\}; \\ \mathfrak{B}_k, & \text{если } \ker L = \{0\}. \end{cases} \quad (2.4.15)$$

Теорема 2.4.3. *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (2.4.13), (2.4.14).*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.4.1 и строится, используя результаты теоремы 2.1.3. \square

2.5. Задача Шоуолтера – Сидорова с билинейным оператором

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ – дуальная (относи-

тельно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \quad (2.5.1)$$

плотны и непрерывны, а вложение $\mathfrak{H} \Subset \mathcal{H}$ компактно. Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, самосопряженный, неотрицательно определенный, фредгольмов оператор, чей ортонормальный (в смысле \mathcal{H}) набор собственных векторов $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве \mathfrak{H} ; $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, 2-коэрцитивный оператор; билинейный непрерывный оператор $B : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}^*$ такой, что $| \langle B(x, y), z \rangle | \leq C^B \|x\|_{\mathfrak{H}} \|y\|_{\mathfrak{H}} \|z\|_{\mathfrak{H}}$ $\forall x, y, z \in \mathfrak{H}$; $\langle B(x, y), z \rangle = -\langle B(x, z), y \rangle \forall x, y, z \in \mathfrak{H}$; $\langle B(y, x), x \rangle = 0 \forall y, x \in \mathfrak{H}$.

Рассмотрим задачу Шоултера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \quad (2.5.2)$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L \dot{x} + Mx + B(x, x) = u. \quad (2.5.3)$$

Ввиду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $\mathfrak{H} \supset \ker L \equiv \text{coker } L \subset \mathfrak{H}^*$. Поскольку $\text{coker } L$ конечномерно, то $\mathfrak{H}^* = \text{coker } L \oplus \text{im } L$. Значит, существует проектор Q вдоль $\text{coker } L$ на $\text{im } L$. Введем в рассмотрение множество

$$\text{coim } L = \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi \rangle = 0 \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}.$$

Обозначим через P проектор вдоль $\ker L$ на $\text{coim } L$, тогда $\mathfrak{H} = \ker L \oplus \text{coim } L$.

Построим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{H})\}.$$

Определение 2.5.1. *Слабым обобщенным решением* уравнения (2.5.3) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi(t) \left[\left\langle L \frac{dx}{dt}, w \right\rangle + \langle Mx, w \rangle + \langle B(x, x), w \rangle \right] dt &= \int_0^T \varphi(t) \langle u, w \rangle dt \\ \forall w \in \mathfrak{H}, \forall \varphi \in L_2(0, T). \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Решение уравнения (2.5.4) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова*, если оно удовлетворяет (2.5.2).

Замечание 2.5.1. Аналогично работе [43] можно показать, что слабое обобщенное решение уравнения (2.5.3), удовлетворяющее (2.5.4), эквивалентно решению, удовлетворяющему

$$\int_0^T \left[\left\langle L \frac{d}{dt} x, w \right\rangle + \langle Mx, w \rangle + \langle B(x, x), w \rangle - \langle u, w \rangle \right] dt = 0, \quad \forall w \in \mathfrak{H}.$$

В дальнейшем мы будем отождествлять эти решения.

Система $\{\varphi_k\}$ собственных векторов оператора L тотальна в пространстве \mathfrak{H} , а значит, в силу вложений (2.5.1) тотальна в пространстве \mathcal{H} . Построим галеркинские приближения решения задачи (2.5.2), (2.5.3). Для этого выберем в \mathfrak{H} ортонормальную (в смысле \mathcal{H}) тотальную систему $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l\} = \ker L$, $\dim \ker L = l$. Построим галеркинские приближения решения задачи (2.5.2), (2.5.3) в виде:

$$x^m(s, t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \varphi_i(s), \quad m > l, \quad (2.5.5)$$

где коэффициенты $a_i = a_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ в силу основной леммы вариационного исчисления определяются следующей задачей:

$$\langle Lx_t^m, \varphi_i \rangle + \langle Mx^m, \varphi_i \rangle + \langle B(x^m, x^m), \varphi_i \rangle = \langle u, \varphi_i \rangle, \quad (2.5.6)$$

$$\langle L(x^m(0) - x_0), \varphi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.5.7)$$

Уравнения (2.5.6) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $T_m \in \mathbb{R}_+$, $T_m = T_m(x_0)$, $\mathfrak{H}^m = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$.

Лемма 2.5.1. При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$ и $m > \dim \ker L$ существует единственное локальное решение $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{H}^m)$ задачи (2.5.6), (2.5.7).

Доказательство. В силу теоремы 1.1.5 для разрешимости задачи (2.5.6), (2.5.7) достаточно установить невырожденность матрицы

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \langle Mx^m + B(x^m, x^m) - u, \varphi_i \rangle \right\|, \quad i, j = 1, \dots, m,$$

в точке $x_0 = (x_1(0), \dots, x_m(0))$ или, что то же самое, невырожденность оператора $(\mathbb{I} - Q)(M + B)'_{x_0}(\mathbb{I} - P)$. В силу положительной определенности оператора M и конструкции проектора $(\mathbb{I} - Q)$ пространства \mathfrak{H}^* вдоль $\text{im } L$ на $\text{coker } L$ и проектора $(\mathbb{I} - P)$ пространства \mathfrak{H} вдоль $\text{coim } L$ на $\ker L$ и $\forall v \in \ker L, v \neq 0$, имеем

$$\begin{aligned} \langle (\mathbb{I} - Q)(M + B)'_{x_0}(\mathbb{I} - P)v, v \rangle &= \langle Mv + B(v, x^m) + B(x^m, v), v \rangle = \\ &= \langle Mv + B(v, x^m), v \rangle \neq 0. \end{aligned}$$

□

Теорема 2.5.1. *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (2.5.2), (2.5.3).*

Доказательство. Доказательство теоремы проводится в несколько этапов.

Существование. Введем в $\text{coim } L$ норму $|x|^2 = \langle Lx, x \rangle$. В силу принципа Куранта эта норма эквивалента норме, индуцированной из надпространства \mathcal{H} . Умножим i -ое уравнение (2.5.6) на $a_i(t)$ соответственно, результаты сложим по $i = 1, \dots, m$, проинтегрируем на $(0, t)$ и получим

$$\begin{aligned} &\langle Lx^m(t), x^m(t) \rangle + 2 \int_0^t \langle Mx^m, x^m \rangle d\tau + \\ &+ 2 \int_0^t \langle B(x^m(\tau), x^m(\tau)), x^m(\tau) \rangle d\tau = \\ &= 2 \int_0^t \langle u(\tau), x^m(\tau) \rangle d\tau + \langle Lx^m(0), x^m(0) \rangle \leq \\ &\leq \varepsilon^2 \|u\|_{L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|x^m\|_{L_2(0, T; \mathfrak{H})}^2 + |x^m(0)|^2. \end{aligned}$$

В силу свойств оператора M и того, что для любого $x \in \mathfrak{H}$ имеет место равенство $\langle B(x, x), x \rangle = 0$, получим

$$\begin{aligned} |x^m(t)|^2 + C_1 \int_0^t \|x^m(\tau)\|_{\mathfrak{H}}^2 d\tau &\leq \varepsilon^2 \int_0^T \|u(\tau)\|_{\mathfrak{H}^*}^2 d\tau + |x^m(0)|^2, \\ C_1 = 2C_M - \frac{1}{\varepsilon^2} &> 0. \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Из оценки (2.5.8) следует, что все T_m , гарантированные леммой 2.5.1, можно взять равными друг другу: $T_m = T$. Кроме того, в силу рефлексивности бахнеровских пространств $L_2(0, T; \mathfrak{H})$ и $L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ существуют слабые пределы

$$x^m \rightharpoonup x \text{ --слабо в } L_\infty(0, T; \text{coim } L);$$

$$x^m \rightharpoonup x \text{ слабо в } L_2(0, T; \mathfrak{H});$$

$$x_t^m \rightharpoonup x \text{ слабо в } L_2(0, T; \mathfrak{H}).$$

В силу свойств билинейного оператора B получим

$$| \langle B(x^m, x^m), y \rangle | \leq C^B \|x^m\|_{\mathfrak{H}}^2 \|y\|_{\mathfrak{H}},$$

и, следовательно, $B(x^m, x^m)$ ограничены в $L_\infty(0, T; \mathfrak{H}^*)$. Поскольку вложение $\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H}$ компактно и выполнено $\langle B(x^m, x^m), y \rangle = -\langle B(x^m, y), x^m \rangle \forall y \in \mathfrak{H}$, получим, что

$$B(x^m, x^m) \rightharpoonup B(x, x) \text{ --слабо в } L_\infty(0, T; \mathfrak{H}^*),$$

где $x^m : m \in \mathbb{N}$ – некоторая подпоследовательность последовательности галеркинских приближений, гарантированных леммой 2.5.1.

Теперь мы можем при фиксированном i перейти к пределу в

$$\langle Lx_t^m(t), \varphi_i \rangle + \langle Mx^m(t) + B(x^m(t), x^m(t)), \varphi_i \rangle = \langle u(t), \varphi_i \rangle$$

и получим

$$L\dot{x} + Mx + B(x, x) = u,$$

откуда $L\dot{x} \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*) \cap L_\infty(0, T; \mathfrak{H}^*)$, следовательно, $Lx(0)$ имеет смысл.

Единственность. Пусть $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = x_2(t)$ – два решения задачи (2.5.2), (2.5.3). Тогда для их разности $w = x_1 - x_2$ получим

$$\begin{aligned} \langle Lw, w \rangle + 2 \int_0^t \langle Mw + (B(x_1, x_1) - B(x_2, x_2)), w \rangle d\tau &= 0, \\ \langle Lw, w \rangle + 2 \int_0^t \langle Mw, w \rangle d\tau &= 2 \int_0^t \langle B(x_2, x_2) - B(x_1, x_1), w \rangle d\tau. \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

В силу неотрицательной определенности оператора L , 2-коэрцитивности оператора M , свойств билинейного оператора $B(x, y)$ и того, что

$$\langle B(x_2, x_2) - B(x_1, x_1), w \rangle = \langle B(w, x_2), x_1 \rangle,$$

получим

$$\|w\|_{L_2(0,T;\text{coim}L)}^2 \leq 2 \int_0^t \|w(\tau)\|_{\mathfrak{H}} \|x_2(\tau)\|_{\mathfrak{H}} \|x_1(\tau)\|_{\mathfrak{H}} d\tau.$$

Откуда в силу леммы Гронуола – Белмана 1.1.8 следует, что $w \equiv 0$. \square

2.6. Задача оптимального управления для математической модели с билинейным оператором

В п. 2.5 была доказана разрешимость задачи Шоултера – Сидорова (2.5.2) для полулинейного уравнения соболевского типа с билинейным оператором (2.5.3). Переходим к нахождению достаточных условий существования оптимального управления решениями задачи (2.5.2), (2.5.3). Построим пространство управлений $\mathfrak{U} = L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ и определим в пространстве \mathfrak{U} непустое, замкнутое и выпуклое множество \mathfrak{U}_{ad} . Рассмотрим задачу оптимального управления

$$L(x(0) - x_0) = 0, \quad (2.6.1)$$

$$L \dot{x} + Mx + B(x, x) = u, \quad (2.6.2)$$

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}, \quad (2.6.3)$$

где функционал качества зададим формулой

$$J(x, u) = \beta \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{H}}^2 dt + (1 - \beta) \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{H}^*}^2 dt, \quad \beta \in (0, 1), \quad (2.6.4)$$

здесь $z_d = z_d(t)$ – желаемое состояние.

Определение 2.6.1. Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ назовем *решением задачи оптимального управления* (2.6.1) – (2.6.3), если

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{(x,u)} J(x, u),$$

где пары $(x, u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ удовлетворяют (2.6.1), (2.6.2) в смысле определения 2.5.1; вектор-функцию \tilde{u} назовем *оптимальным управлением*.

Замечание 2.6.1. Допустимым элементом задачи (2.6.1) – (2.6.3) назовем пару $(x, u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$, удовлетворяющую задаче (2.6.1), (2.6.2). Поскольку множество $\mathfrak{U}_{ad} \neq \emptyset$, то для любого $u \in \mathfrak{U}_{ad} \subset \mathfrak{U}$ в силу теоремы 2.5.1 существует единственное решение $x = x(u)$ задачи (2.6.1), (2.6.2).

Теорема 2.6.1. При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (2.6.1) – (2.6.3).

Доказательство. Из теоремы 2.5.1 вытекает, что оператор

$$(L \frac{d}{dt} + M + B) : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{U}$$

есть гомеоморфизм. Поэтому функционал качества (2.6.4) можно записать в виде

$$J(x, u) = J(u) = \beta \|x(u) - z_d\|_{L_2(0, T; \mathfrak{H})}^2 + (1 - \beta) \|u\|_{L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)}^2. \quad (2.6.5)$$

Пусть $\{u_m\} \subset \mathfrak{U}_{ad}$ – последовательность такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(u_m) = \inf_{u \in \mathfrak{U}_{ad}} J(u),$$

тогда из (2.6.5) вытекает, что

$$\|u_m\|_{L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)} \leq \text{const}, \quad \|x_m\|_{L_2(0, T; \mathfrak{H})} \leq \text{const} \quad (2.6.6)$$

при всех $m \in \mathbb{N}$. Из (2.6.6) (переходя, если надо, к подпоследовательности) извлечем слабо сходящуюся последовательность $u_m \rightharpoonup \tilde{u}$. В силу теоремы Мазура 1.1.2 точка $\tilde{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$. Обозначим через $x_m = x(u_m)$ слабое обобщенное решение уравнения

$$L \dot{x}_m + M x_m + B(x_m, x_m) = u_m. \quad (2.6.7)$$

Используя рассуждения теоремы 2.5.1, в силу априорных оценок (2.5.8) получим, что

$$x^m \rightharpoonup \tilde{x} * -\text{слабо в } L_\infty(0, T; \text{coim } L);$$

$x^m \rightharpoonup \tilde{x}$ слабо в $L_2(0, T; \mathfrak{H})$;

$B(x_m, x_m) \rightharpoonup B(\tilde{x}, \tilde{x}) * -\text{слабо в } L_\infty(0, T; \mathfrak{H}^*)$.

Перейдем к пределу в уравнении состояния (2.6.7) и получим

$$L \dot{\tilde{x}} + M\tilde{x} + B(\tilde{x}, \tilde{x}) = \tilde{u}.$$

Следовательно, $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{u})$ и $\liminf J(u_m) \geq J(u)$. Значит, u есть оптимальное управление в задаче (2.6.1) – (2.6.3). \square

**Глава 3. Задачи оптимального управления
для математических моделей процессов
фильтрации и деформации**

**3.1. Задача оптимального управления для модели Осколкова
нелинейной фильтрации**

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле

$$x(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \quad (3.1.1)$$

для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации

$$(\lambda - \Delta)x_t - \alpha\Delta x + |x|^{p-2}x = u. \quad (3.1.2)$$

Рассмотрим условие Шоултера – Сидорова

$$(\lambda - \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, s \in \Omega \quad (3.1.3)$$

или условие Коши

$$x(s, 0) = x_0(s), s \in \Omega \quad (3.1.4)$$

для модели (1.4.1), (1.4.2).

Как и в п. 1.4, обозначим через $\mathfrak{H} = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{B} = L_p(\Omega)$, $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$, $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω , $\{\lambda_k\}$ – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности. Построим множества

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{H}, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{H} : \int_{\Omega} (-\alpha\Delta x + |x|^{p-2}x)\varphi_1 \, ds = \int_{\Omega} u\varphi_1 \, ds\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases}$$

$$\text{coim } L = \begin{cases} \mathfrak{H}, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi_1 \rangle = 0\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases}$$

и проекторы

$$P = Q = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi_1 \rangle, & \text{если } \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Пусть $x^1 = Px$. Построим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_{p_k}(0, T; \mathfrak{M}), \dot{x} \in L_2(0, T; \mathfrak{H})\}.$$

Определение 3.1.1. Слабым обобщенным решением уравнения (3.1.2) назовем функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \varphi(t) \left[\int_{\Omega} (\lambda x_t w + \nabla x_t \cdot \nabla w + \alpha \nabla x \cdot \nabla w + |x|^{p-2} x w) ds \right] dt = \\ & = \int_0^T \left[\varphi(t) \int_{\Omega} u w ds \right] dt \quad \forall w \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \quad \forall \varphi \in L_2(0, T). \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Решение уравнения (3.1.2) назовем *решением задачи Коши*, если оно удовлетворяет (3.1.4).

Построим пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_{2k}(0, T; L_{2k}(\Omega)), \frac{dx^1}{dt} \in L_2(0, T; \text{coim } L)\}.$$

Определение 3.1.2. Слабым обобщенным решением уравнения (3.1.2) назовем функцию $x \in \mathfrak{X}_1$, удовлетворяющую условию (3.1.5). Решение уравнения (3.1.2) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова*, если оно удовлетворяет (3.1.3).

Система $\{\varphi_k\}$ собственных векторов оператора L в силу вложений (2.1.1) образует базис в пространстве $L_2(\Omega)$. Выберем в $L_2(\Omega)$ ортонормальную систему $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l\} = \ker L$, $\dim \ker L = l$. Построим галеркинские приближения решения задачи (3.1.1) – (3.1.3) и задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.1.4) в виде

$$x_m(s, t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \varphi_i(s), \quad m > l, \tag{3.1.6}$$

где коэффициенты $a_i = a_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\lambda x_{mt} w + \nabla x_{mt} \cdot \nabla \varphi_i(s) + \alpha \nabla x_m \cdot \nabla \varphi_i(s) + |x_m|^{p-2} x_m \varphi_i(s)) ds = \\ = \int_{\Omega} u \varphi_i(s) ds, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

и в случае условия Шоуолтера – Сидорова (3.1.3) – условиями

$$\int_{\Omega} [\lambda (x_m(s, 0) - x_0(s)) \varphi_i(s) + \nabla (x_m(s, 0) - x_0(s)) \cdot \nabla \varphi_i(s)] ds = 0, \quad (3.1.8)$$

а в случае условия Коши (3.1.4) – условиями

$$\int_{\Omega} (x_m(s, 0) - x_0(s)) \varphi_i(s) ds = 0. \quad (3.1.9)$$

Теорема 3.1.1. Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $n > 2$, $2 \leq p \leq 2 + \frac{4}{n-2}$ или $n = 2$, $p \in (1, +\infty)$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ таких, что выполнено (2.1.4), существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.1.4).

Доказательство. Введем в $\text{coim } L$ норму $|x|^2 = \langle Lx, x \rangle$. Умножим уравнение (3.1.2) скалярно на x , проинтегрируем по $(0, t)$ и получим

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} ((\lambda - \Delta)x_{\tau}x - \alpha \Delta xx + |x|^p) ds d\tau &= \int_0^t \int_{\Omega} ux ds d\tau; \\ \int_0^t \int_{\Omega} (\lambda x_{\tau}x + \nabla x_{\tau} \cdot \nabla x + \alpha(\nabla x)^2 + |x|^p) ds d\tau &\leq \int_0^t \|x\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)} \|u\|_{W_2^{-1}(\Omega)} d\tau; \\ \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\lambda x^2 + (\nabla x)^2) + \alpha(\nabla x)^2 + |x|^p \right) ds d\tau &\leq \int_0^t \|x\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)} \|u\|_{W_2^{-1}(\Omega)} d\tau; \\ C_3|x|_{L_{\infty}(0, t; \text{coim } L)} + C_4 \|x\|_{L_2(0, t; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))}^2 + C_5 \|x\|_{L_p(0, t; L_p(\Omega))}^p &\leq \\ \leq C_1 \|u\|_{L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))} + C_2 \|x(0)\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)}^2, \quad C_i > 0, \quad i = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Из теоремы 2.1.1 и леммы 1.4.1 вытекает данный результат. \square

Построим пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{B}), \quad \dot{x}^1 \in L_2(0, T; \text{coim } L)\}.$$

Теорема 3.1.2. *Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $n > 2$, $2 \leq p \leq 2 + \frac{4}{n-2}$ или $n = 2$, $p \in (1, +\infty)$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}_1$ задачи (3.1.1) – (3.1.4).*

Доказательство. Из теоремы 2.2.1 и леммы 1.4.1 вытекает данный результат. \square

В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \|x - z_d\|_{W_2^1(\Omega)}^2 dt + \frac{N}{2} \int_0^T \|u\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 dt \rightarrow \inf \quad (3.1.10)$$

для модели Осколкова нелинейной фильтрации (3.1.1), (3.1.2) с условием Коши (3.1.4). Выберем $\mathfrak{U}_{ad} \subset L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество, для которого выполнено $(\mathbb{I} - Q)u = 0$.

Теорема 3.1.3. *Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $n > 2$, $2 \leq p \leq 2 + \frac{4}{n-2}$ или $n = 2$, $p \in (1, +\infty)$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует оптимальное управление в задаче (3.1.1), (3.1.2), (3.1.4), (3.1.10).*

Доказательство. Из теоремы 2.4.1 и леммы 1.4.1 вытекает данный результат. \square

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для модели Осколкова нелинейной фильтрации (3.1.1), (3.1.2) с условием Шоултера – Сидорова (3.1.3). Введем пространство управлений $\mathfrak{U}^1 = L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$ и выберем непустое, замкнутое, выпуклое множество \mathfrak{U}_{ad}^1 , тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1.4. *Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $n > 2$, $2 \leq p \leq 2 + \frac{4}{n-2}$ или $n = 2$, $p \in (1, +\infty)$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует оптимальное управление в задаче (3.1.1) – (3.1.3), (3.1.10).*

Доказательство. Из теоремы 2.3.1 и леммы 1.4.1 вытекает данный результат. \square

Приведем теперь необходимые условия, которым удовлетворяет любое оптимальное управление u решениями задачи (3.1.1) – (3.1.3).

Теорема 3.1.5. *Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $n > 2$, $2 \leq p \leq 2 + \frac{4}{n-2}$ или $n = 2$, $p \in (1, +\infty)$, если u – оптимальное управление в задаче (3.1.10), то существует вектор-функция $y \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{H})$ такая, что*

$$(\lambda - \Delta)x_t - \alpha\Delta x + |x|^{p-2}x = u,$$

$$(-\lambda + \Delta)y_t - \alpha\Delta y + (p-1)|x|^{p-2}y = (-\Delta)(x(u) - z_d), (s, t) \in Q_T,$$

$$x(s, t) = y(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T),$$

$$(\lambda - \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, (-\lambda + \Delta)y(s, T) = 0, s \in \Omega,$$

$$\int_{Q_T} (y + N(-\Delta)^{-1}(u))(v - u) dsdt \geq 0 \quad \forall v \in \mathfrak{U}_{ad}^1.$$

Доказательство. Пусть u – оптимальное управление, а $x = x(u)$ – соответствующее состояние. Покажем, что функционал $u \rightarrow J(u)$ дифференцируем по Гато. Для этого вычислим

$$\begin{aligned} X &= \frac{d}{d\tau} J(u + \tau(v - u))|_{\tau=0} = \\ &= \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2} \int_{Q_T} (\nabla(x(u + \tau(v - u)) - z_d))^2 dsdt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{N}{2} \int_{Q_T} ((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}(u + \tau(v - u)))^2 dsdt \right]|_{\tau=0} = \\ &= \left[\int_{Q_T} \nabla(x(u + \tau(v - u)) - z_d) \nabla(x'_\tau(u + \tau(v - u))) dsdt + \right. \\ &\quad \left. + N \int_{Q_T} (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}(u + \tau(v - u)) (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}(v - u) dsdt \right]|_{\tau=0} = \\ &= \int_{Q_T} (-\Delta)(x(u) - z_d) \hat{x} dsdt + \int_{Q_T} (-\Delta)^{-1}(u)(v - u) dsdt, \end{aligned}$$

где \hat{x} задается как решение задачи

$$(\lambda - \Delta)\hat{x}_t - \Delta\hat{x} + (p-1)|x|^{p-2}\hat{x} = v - u, \quad (3.1.11)$$

$$(\lambda - \Delta)(\hat{x}(s, 0)) = 0, \quad s \in \Omega; \quad \hat{x}(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (3.1.12)$$

Используя рассуждения теоремы 2.2.1, нетрудно убедиться в существовании единственного решения задачи (3.1.11), (3.1.12). Кроме того, если u – оптимальное управление, то $X \geq 0 \forall u \in \mathfrak{U}_{ad}^1$.

Введем сопряженное состояние y при помощи задачи

$$(-\lambda + \Delta)y_t - \Delta y + (p-1)|x|^{p-2}y = (-\Delta)(x(u) - z_d), \quad (3.1.13)$$

$$(-\lambda + \Delta)y(s, T) = 0, \quad s \in \Omega; \quad y(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (3.1.14)$$

По теореме 2.2.1 существует единственное решение задачи (3.1.13), (3.1.14).

Умножим (3.1.13) на \hat{x} и, проинтегрировав по Q_T , получим

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} [(-\lambda + \Delta)y_t - \Delta y + (p-1)|x|^{p-2}y] \hat{x} ds dt &= \\ &= \int_{Q_T} (-\Delta)(x(u) - z_d) \hat{x} ds dt. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Преобразуя (3.1.15), применив формулу Грина и (3.1.14), получаем

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} [(\lambda - \Delta)\hat{x}_t - \Delta\hat{x} + (p-1)|x|^{p-2}\hat{x}] y ds dt &= \\ \int_{Q_T} (x(u) - z_d) \hat{x} ds dt &= \int_{Q_T} (v - u) y ds dt, \end{aligned}$$

тогда

$$\int_{Q_T} y(v - u) ds dt + \int_{Q_T} N(-\Delta)^{-1}(u)(v - u) ds dt \geq 0.$$

□

3.2. Задача оптимального управления для модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим математическую модель движения жидкости Кельвина – Фойгта

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad (3.2.1)$$

$$(1 - \kappa \nabla^2) x_t = \nu \nabla^2 x - (x \cdot \nabla) x - \mathbf{p} + u, \quad \nabla(\nabla \cdot x) = 0, \quad (3.2.2)$$

где коэффициент системы $\kappa^{-1} \geq \lambda_1$ – время ретардации, характеризующее упругие свойства жидкости (λ_1 – наименьшее собственное значение спектральной задачи (1.5.2)). Для модели (3.2.1), (3.2.2) рассмотрим начальное условие Шоуолтера – Сидорова

$$(1 - \kappa \nabla^2)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, \quad s \in \Omega. \quad (3.2.3)$$

Рассмотрим уравнение

$$(1 - \kappa \nabla^2)x_t - \nu \nabla^2 x + (x \cdot \nabla)x = u. \quad (3.2.4)$$

Как и в п. 1.5, положим $\mathfrak{H} = \mathbb{H}_\sigma^1$, $\mathcal{H} = \mathbb{L}_\sigma$, тогда через \mathfrak{H}^* обозначим пространство, двойственное к пространству \mathfrak{H} , относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций спектральной задачи (1.5.2), а через $\{\lambda_k\}$ – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности.

При условии $\kappa^{-1} \geq \lambda_1$ множество

$$\text{coim } L = \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi \rangle = 0 \ \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}.$$

Построим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{H})\}.$$

Определение 3.2.1. Слабым обобщенным решением уравнения (3.2.4) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \varphi(t) \left[\int_{\Omega} \left((x_t \cdot w) + \kappa \left(\frac{\partial x_t}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial w}{\partial s_i} \right) + \left(\frac{\partial x}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial w}{\partial s_i} \right) + \sum_{i=1}^n x_i \left(x \cdot \frac{\partial w}{\partial s_i} \right) \right) ds \right] dt = \\ & = \int_0^T \left[\varphi(t) \int_{\Omega} u \cdot w ds \right] dt \quad \forall w \in \mathbb{H}_\sigma, \quad \forall \varphi \in \mathbb{L}_2(0, T), \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

где под (\cdot, \cdot) понимаем скалярное произведение в \mathbb{R}^n . Решение уравнения (3.2.4) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова*, если оно удовлетворяет (3.2.3).

Система $\{\varphi_k\}$ в силу вложений (2.1.1) образует базис в пространствах \mathbb{L}_σ , \mathbb{H}_σ . Выберем в \mathbb{L}_σ ортонормальную систему $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l\} = \ker L$, $\dim \ker L = l$. Построим галеркинские приближения решения задачи (3.2.1), (3.2.3), (3.2.4) в виде

$$x_m(t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \varphi_i, \quad m > l, \quad (3.2.6)$$

где коэффициенты $a_i = a_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left((x_{mt} \cdot \varphi_i) + \varkappa \left(\frac{\partial x_{mt}}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_i} \right) + \left(\frac{\partial x_m}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_i} \right) + \sum_{i=1}^n x_{mi} \left(x_m \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_i} \right) \right) ds = \\ & = \int_{\Omega} (u \cdot \varphi_i) ds, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

и условием Шоуолтера – Сидорова

$$\int_{\Omega} (1 - \varkappa \nabla^2) (x_m(s, 0) - x_0(s)) \cdot \varphi_i(s) ds = 0. \quad (3.2.8)$$

Теорема 3.2.1. *Пусть $\varkappa^{-1} \geq \lambda_1$, $\nu \in \mathbb{R}_+$, $n = 2, 3, 4$, тогда при любых $x_0 \in \mathbb{H}_\sigma$ и $u \in L_2(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (3.2.1), (3.2.3), (3.2.4).*

Доказательство. Доказательство теоремы вытекает из теоремы 2.5.1 и леммы 1.5.1.

Замечание 3.2.1. *Перепишем уравнение (3.2.2) в виде:*

$$(1 - \varkappa \nabla^2)x_t - \nu \nabla^2 x + (x \cdot \nabla)x - u = -\mathbf{p}$$

и определим оператор

$$A(x) \equiv L \dot{x} + Mx + B(x, x).$$

Лемма 3.2.1. *Пусть $\varkappa^{-1} \geq \lambda_1$, $\nu \in \mathbb{R}_+$, $n = 2, 3, 4$ и при любых $x_0 \in \mathbb{H}_\sigma$ и $u \in L_2(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ функция $x \in \mathfrak{X}$ является решением задачи (3.2.1), (3.2.3), (3.2.4) тогда и только тогда, когда существует функция $p \in L_2(0, T; \mathbb{L}_2(\Omega)/\mathbb{R})$ такая, что пара (x, \mathbf{p}) удовлетворяет задаче (3.2.1) – (3.2.3).*

Доказательство. Вектор-функция x является слабым обобщенным решением задачи (3.2.1) – (3.2.3), если выполнено

$$\int_0^T \varphi(t) \langle A(x) - u, w \rangle dt = 0, \quad \forall w \in \mathbb{H}_\sigma.$$

В силу основной леммы вариационного исчисления данное равенство эквивалентно

$$\langle A(x) - u, w \rangle = 0, \quad \forall w \in \mathbb{H}_\sigma,$$

где $A(x) - u \in L_2(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Тогда в силу леммы 1.2.1 существует $p \in L_2(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$ такой, что $A(x) - u = -p$. \square

Зададим пространство управлений $\mathfrak{U} = L_2(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, построим функционал качества

$$J(x, u) = \beta \|x - z_d\|_{L_2(0, T; \mathbb{H}_\sigma)}^2 + (1 - \beta) \|u\|_{L_2(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))}^2.$$

Выберем $\mathfrak{U}_{ad} \subset L_2(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}, \tag{3.2.9}$$

решениями задачи (3.2.1) – (3.2.3). Тогда справедлива следующая

Теорема 3.2.2. *Пусть $\varkappa^{-1} \geq \lambda_1$, $\nu \in \mathbb{R}_+$, $n = 2, 3, 4$, тогда существует оптимальное управление в задаче (3.2.1) – (3.2.3), (3.2.9).*

Доказательство. Доказательство теоремы вытекает из теоремы 2.6.1 и леммы 1.5.1.

3.3. Задача оптимального управления для обобщенной математической модели Хоффа

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{3.3.1}$$

и условие Шоуолтера – Сидорова

$$(\lambda + \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, \quad s \in \Omega \quad (3.3.2)$$

или условие Коши

$$x(s, 0) = x_0(s), \quad s \in \Omega \quad (3.3.3)$$

для обобщенного уравнения Хоффа

$$(-\lambda - \Delta)x_t + \alpha_1 x + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^5 + \dots + \alpha_{k-1} x^{2k-3} + \alpha_k x^{2k-1} = u. \quad (3.3.4)$$

Аналогично п. 1.6 положим $\mathfrak{H} = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{B}_j = L_{2j}(\Omega)$, $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω , а через $\{\lambda_k\}$ – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности. При условии $\lambda \leq \lambda_1$

$$\text{coim } L = \{x \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) : \langle x, \varphi \rangle = 0, \text{ если } \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}.$$

Проекторы

$$P = Q = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } \lambda < \lambda_1; \\ \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi_1 \rangle, & \text{если } \lambda = \lambda_1. \end{cases}$$

Пусть $x^1 = Px$. Построим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} L_{2k}(\Omega), & \text{если } \lambda < \lambda_1; \\ \{x \in L_{2k}(\Omega) : \int_{\Omega} (\alpha_1 x + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^5 + \dots + \alpha_{k-1} x^{2k-3} + \alpha_k x^{2k-1}) \varphi_1 \, ds = \int_{\Omega} u \varphi_1 \, ds\}, & \text{если } \lambda = \lambda_1. \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Построим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x \mid x \in L_{\infty}(0, T; \text{coim } L) \cap L_{2k}(0, T; \mathfrak{M}), \frac{dx}{dt} \in L_2(0, T; \mathfrak{H})\}.$$

Определение 3.3.1. Слабым обобщенным решением уравнения (3.3.4) назовем функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию:

$$\int_0^T \varphi(t) \left[\int_{\Omega} (-\lambda x_t w + \nabla x_t \cdot \nabla w + (\alpha_1 x + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^5 + \dots + \alpha_{k-1} x^{2k-3} + \alpha_k x^{2k-1}) \varphi_1) \, ds \right] dt = \int_0^T \varphi(t) u \, dt.$$

$$\begin{aligned} & + \alpha_k x^{2k-1})w) ds] dt = \int_0^T \left[\varphi(t) \int_{\Omega} uw ds \right] dt \\ & \forall w \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \forall \varphi \in L_2(0, T). \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Решение уравнения (3.3.4) назовем *решением задачи Коши*, если оно удовлетворяет (3.3.3).

Построим пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x \mid x \in L_{\infty}(0, T; \text{coim } L) \cap L_{2k}(0, T; L_{2k}(\Omega)), \frac{dx^1}{dt} \in L_2(0, T; \text{coim } L)\}.$$

Определение 3.3.2. Слабым обобщенным решением уравнения (3.3.4) назовем функцию $x \in \mathfrak{X}_1$, удовлетворяющую условию (3.3.6). Решение уравнения (3.3.4) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова*, если оно удовлетворяет (3.3.2).

Система $\{\varphi_k\}$ в силу вложений (2.1.1) образует базис в пространстве $L_2(\Omega)$. Выберем в $L_2(\Omega)$ ортонормальную систему $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l\} = \ker L$, $\dim \ker L = l$. Построим галеркинские приближения решения задачи (3.3.1), (3.3.2), (3.3.4) и задачи (3.3.1), (3.3.3), (3.3.4) в виде

$$x_m(s, t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \varphi_i(s), \quad m > l, \quad (3.3.7)$$

где коэффициенты $a_i = a_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (-\lambda x_t \varphi_i + \nabla x_t \cdot \nabla \varphi_i + (\alpha_1 x + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^5 + \dots + \alpha_{k-1} x^{2k-3} + \\ & + \alpha_k x^{2k-1}) \varphi_i) ds = \int_{\Omega} u \varphi_i ds, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

и в случае условия Шоуолтера – Сидорова (3.3.2) – условиями

$$\int_{\Omega} [-\lambda (x_m(s, 0) - x_0(s)) \varphi_i(s) + \nabla (x_m(s, 0) - x_0(s)) \cdot \nabla \varphi_i(s)] ds = 0, \quad (3.3.9)$$

а в случае условия Коши (3.3.3) – условиями

$$\int_{\Omega} (x_m(s, 0) - x_0(s)) \varphi_i(s) ds = 0. \quad (3.3.10)$$

Уравнения (3.3.8) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $T_m \in \mathbb{R}_+$, $T_m = T_m(x_0)$, $\mathfrak{B}^m = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$.

Лемма 3.3.1. *При любых $x_0 \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и $m > \dim \ker L$ существует единственное локальное решение $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{B}^m)$ задачи (3.3.8), (3.3.9).*

Доказательство. Доказательство леммы вытекает из лемм 1.6.1, 2.2.1. \square

Лемма 3.3.2. *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$ и $m > \dim \ker L$ существует единственное локальное решение $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{M})$ задачи (3.3.8), (3.3.10).*

Доказательство. Доказательство леммы вытекает из лемм 1.6.1, 2.1.1. \square

Теорема 3.3.1. *Пусть $k = 2$ при $n = 4$, или $k \leq 3$ при $n = 3$, или $k \in \mathbb{N}$ при $n = 1, 2$ и $\lambda \leq \lambda_1$, $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$. Тогда при любых $x_0 \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и $u \in L_{\frac{2k}{2k-1}}(0, T; L_{\frac{2k}{2k-1}}(\Omega))$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}_1$ задачи (3.3.1), (3.3.2), (3.3.4).*

Доказательство. Введем в $\text{coim } L$ норму $|x|^2 = \langle Lx, x \rangle$. В силу принципа Куранта эта норма эквивалента норме, индуцированной из надпространства $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Умножим i -ое уравнение (3.3.8) на $a_i(t)$ соответственно, результаты сложим по $i = 1, \dots, m$ и проинтегрируем на $(0, t)$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} \left[-\lambda x_m \frac{dx_m(s, \tau)}{d\tau} - x_m(s, \tau) \Delta \left(\frac{dx_m(s, \tau)}{d\tau} \right) + \alpha_1 x_m^2(s, \tau) + \alpha_2 x_m^4(s, \tau) + \dots + \right. \\ & \quad \left. + \alpha_k x_m^{2k}(s, \tau) \right] ds d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} u(s, \tau) x_m(s, \tau) ds d\tau; \\ & \int_0^t \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (-\lambda x_m^2 + \nabla x_m \cdot \nabla x_m) + \alpha x_m^2 + \alpha_1 x_m^4 + \dots + \alpha_k x_m^{2k} \right] ds d\tau \leq \\ & \leq \int_0^t \|x_m\|_{L_{2k}(\Omega)} \|u\|_{L_{\frac{2k}{2k-1}}(\Omega)} d\tau \leq \|x_m\|_{L_{2k}(0, T; L_{2k}(\Omega))} \|u\|_{L_{\frac{2k}{2k-1}}(0, T; L_{\frac{2k}{2k-1}}(\Omega))}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |x_m|_{L_\infty(0,t;\text{coim } L)}^2 + C_1 \|x_m\|_{L_{2k}(0,t;L_{2k}(\Omega))}^{2k} \leq \\ & \leq C_3 \|u\|_{L_{\frac{2k}{2k-1}}(0,T;L_{\frac{2k}{2k-1}}(\Omega))} + C_2 \|x_m(0)\|_{L_\infty(0,t;\text{coim } L)}^2, \quad C_i > 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Из теоремы 2.2.2 и леммы 1.6.1 вытекает данный результат. \square

Теорема 3.3.2. Пусть $k = 2$ при $n = 4$, или $k \leq 3$ при $n = 3$, или $k \in \mathbb{N}$ при $n = 1, 2$ и $\lambda \leq \lambda_1$, $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$. Тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{M}$ и $L_{\frac{2k}{2k-1}}(0, T; L_{\frac{2k}{2k-1}}(\Omega))$ таких, что выполнено (2.1.4), существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (3.3.1), (3.3.3), (3.3.4).

Доказательство. Из теоремы 2.1.2 и леммы 1.6.1 вытекает данный результат. \square

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для обобщенной модели Хоффа. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(x, u) = \frac{1}{2k} \|x - z_d\|_{L_{2k}(Q_T)}^{2k} + \frac{2k-1}{2k} \|u\|_{L_{\frac{2k}{2k-1}}(Q_T)}^{\frac{2k}{2k-1}}, \quad J(x, u) \rightarrow \inf \quad (3.3.11)$$

решениями задачи (3.3.1), (3.3.2), (3.3.4) или (3.3.1), (3.3.3), (3.3.4).

Выберем $\mathfrak{U}_{ad} \subset L_{\frac{2k}{2k-1}}(Q_T)$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество.

Определение 3.3.3. Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ назовем *решением задачи оптимального управления* (3.3.1), (3.3.2), (3.3.4), (3.3.11), если

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{(x,u)} J(x, u),$$

где пары $(x, u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ удовлетворяют (3.3.1), (3.3.2), (3.3.4); вектор-функцию \tilde{u} назовем *оптимальным управлением*.

Теорема 3.3.3. Пусть $k = 2$ при $n = 4$, или $k \leq 3$ при $n = 3$, или $k \in \mathbb{N}$ при $n = 1, 2$ и $\lambda \leq \lambda_1$, $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$, тогда при любых $x_0 \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ существует оптимальное управление в задаче (3.3.1), (3.3.2), (3.3.4), (3.3.11).

Доказательство. Из теоремы 2.3.2 и леммы 1.6.1 вытекает данный результат. \square

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для обобщенной математической модели Хоффа (3.3.1), (3.3.4) с условием Коши (3.3.3). Выберем $\mathfrak{U}_{ad}^1 \subset L_{\frac{2k}{2k-1}}(Q_T)$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество для которого выполнено $(\mathbb{I} - Q)u = 0$.

Теорема 3.3.4. *Пусть $k = 2$ при $n = 4$, или $k \leq 3$ при $n = 3$, или $k \in \mathbb{N}$ при $n = 1, 2$ и $\lambda \leq \lambda_1$, $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{M}$ существует оптимальное управление в задаче (3.3.1), (3.3.3), (3.3.4), (3.3.11).*

Доказательство. Из теоремы 2.4.2 и леммы 1.6.1 вытекает данный результат. \square

Приведем теперь необходимые условия, которым удовлетворяет любое оптимальное управление u решениями задачи Шоултера – Сидорова для модели Хоффа при $k = 1$.

Теорема 3.3.5. *Пусть $k = 1$ при $n \leq 4$ и $\lambda \leq \lambda_1$, $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$, если u – оптимальное управление в задаче (3.3.11), то существует вектор $y \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{H})$ такой, что*

$$(-\lambda - \Delta)x_t + \alpha x + \beta x^3 = u,$$

$$(\lambda + \Delta)y_t + \alpha y + 3\beta x^2y = (x - z_d)^3, (s, t) \in Q_T,$$

$$x(s, t) = y(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T),$$

$$(\lambda + \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, (\lambda + \Delta)y(s, T) = 0, s \in \Omega, \quad (3.3.12)$$

$$\int_{Q_T} (y + u^{\frac{1}{3}})(v - u) ds dt \geq 0 \quad \forall v \in \mathfrak{U}_{ad}. \quad (3.3.13)$$

Доказательство. Пусть u – оптимальное управление, а $x = x(u)$ – соответствующее состояние. Покажем, что функционал $u \rightarrow J(u)$ дифференцируем по Фреше; вычислим

$$\frac{d}{d\tau} J(u + \tau(v - u))|_{\tau=0} = X.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} J(u + \tau(v - u))|_{\tau=0} &= \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{4} \int_{Q_T} (x(u + \tau(v - u)) - z_d)^4 ds dt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{4} \int_{Q_T} (u + \tau(v - u))^{\frac{4}{3}} ds dt \right]|_{\tau=0} = \\
&= \left[\int_{Q_T} (x(u + \tau(v - u)) - z_d)^3 x'_\tau(u + \tau(v - u)) ds dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_{Q_T} (u + \tau(v - u))^{\frac{1}{3}}(v - u) ds dt \right]|_{\tau=0} = \\
&= \int_{Q_T} (x(u) - z_d)^3 \hat{x} ds dt + \int_{Q_T} u^{\frac{1}{3}}(v - u) ds dt,
\end{aligned}$$

где \hat{x} задается как решение задачи

$$(-\lambda - \Delta)\hat{x}_t + \alpha\hat{x} + 3\beta x^2\hat{x} = v - u, \quad (3.3.14)$$

$$\hat{x}(s, 0) = 0, \quad s \in \Omega; \quad \hat{x}(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (3.3.15)$$

Используя рассуждения теоремы 2.2.1, нетрудно убедиться в существовании единственного решения задачи (3.3.14), (3.3.15). Кроме того, если u – оптимальное управление, то $X \geq 0 \forall u \in \mathfrak{U}_{ad}$.

Введем сопряженное состояние y при помощи задачи

$$(\lambda + \Delta)y_t + \alpha y + 3\beta x^2y = (x - z_d)^3, \quad (3.3.16)$$

$$(\lambda + \Delta)y(s, T) = 0, \quad s \in \Omega; \quad y(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (3.3.17)$$

По теореме 2.2.1 существует единственное решение задачи (3.3.16), (3.3.17).

Скалярно умножим (3.3.16) на \hat{x} и получим

$$\int_{Q_T} [(\lambda + \Delta)y_t + \alpha y + 3\beta x^2y] \hat{x} ds dt = \int_{Q_T} (x - z_d)^3 \hat{x} ds dt. \quad (3.3.18)$$

Преобразуем (3.3.18), применив формулу Грина и (3.3.17), и получим

$$\int_{Q_T} [(-\lambda - \Delta)\hat{x}_t + \alpha\hat{x} + 3\beta x^2\hat{x}] y ds dt = \int_{Q_T} (x - z_d)^3 \hat{x} ds dt = \int_{Q_T} (v - u) y ds dt,$$

тогда

$$\int_{Q_T} (v - u) y ds dt + \int_{Q_T} (v - u) u^{\frac{1}{3}} ds dt = \int_{Q_T} (v - u)(y + u^{\frac{1}{3}}) ds dt \geq 0.$$

□

3.4. Задача оптимального управления для математической модели деформации конструкции из двутавровых балок

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^M$ – множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}_{j=1}^N$ – множество дуг. На графе \mathbf{G} рассмотрим модель деформации конструкции из двутавровых балок

$$-\lambda x_{jt} - x_{jtss} + \alpha_j^1 x_j + \alpha_j^2 x_j^3 + \dots + \alpha_j^k x_j^{2k-1} = u_j, \quad (3.4.1)$$

для всех $s \in (0, l_j)$, $t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, N}$,

$$\sum_{j:E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(0, t) - \sum_{r:E_r \in E^\omega(V_i)} d_r x_{rs}(l_r, t) = 0, \quad (3.4.2)$$

$$x_r(0, t) = x_j(0, t) = x_h(l_h, t) = x_m(l_m, t). \quad (3.4.3)$$

Для модели (3.4.1) – (3.4.3) рассмотрим начальные условия Коши

$$x_j(s, 0) = x_{0j}(s), \quad \text{для всех } s \in (0, l_j), \quad (3.4.4)$$

или начальные условия Шоултера – Сидорова

$$(\lambda + \Delta)(x_j(s, 0) - x_{0j}(s)) = 0, \quad \text{для всех } s \in (0, l_j). \quad (3.4.5)$$

Как и в п. 1.7, положим $\mathcal{H} = L_2(\mathbf{G})$, $\mathfrak{H} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots) : x_j \in W_2^1(0, l_j)\}$, $\mathfrak{B}_n = L_{2n}(\mathbf{G})$ и построим множества

$$\text{coim } L = \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\},$$

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} L_{2k}(\mathbf{G}), \lambda + a < \mu_1; \\ \{x \in L_{2k}(\mathbf{G}) : \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} (\alpha_j^1 x_j + \alpha_j^2 x_j^3 + \alpha_j^3 x_j^5 + \dots + \alpha_j^{k-1} x_j^{2k-3} + \alpha_j^k x_j^{2k-1}) \varphi_{1i} ds = \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} u_j \varphi_{1i} ds\}, i = \overline{1, r}, \lambda + a = \mu_1, \end{cases} \quad (3.4.6)$$

и проекторы

$$P = Q = \begin{cases} \mathbb{I}, \lambda + a < \mu_1; \\ \mathbb{I} - \sum_{\lambda + a = \mu_1} \langle \cdot, \varphi_{1i} \rangle. \end{cases}$$

Построим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_{2k}(0, T; \mathfrak{M}), \frac{dx}{dt} \in L_2(0, T; \mathfrak{H})\}.$$

Определение 3.4.1. Слабым обобщенным решением уравнения (3.4.1) назовем функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию:

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi(t) \left[\sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} (-\lambda x_{jt} w_j + \nabla x_{jt} \cdot \nabla w_j + (\alpha_j^1 x_j + \alpha_j^2 x_j^3 + \alpha_j^k x_j^{2k-1}) w_j) ds \right] dt = \\ = \int_0^T \left[\varphi(t) \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} u_j w_j ds \right] dt \quad \forall w \in \mathfrak{H}, \forall \varphi \in L_2(0, T). \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Решение уравнения (3.4.1) назовем *решением задачи Коши*, если оно удовлетворяет (3.4.4).

Пусть $x^1 = Px$. Построим пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_{2k}(0, T; L_{2k}(\mathbf{G})), \frac{dx^1}{dt} \in L_2(0, T; \text{coim } L)\}.$$

Определение 3.4.2. Слабым обобщенным решением уравнения (3.4.1) назовем функцию $x \in \mathfrak{X}_1$, удовлетворяющую условию (3.4.7). Решение уравнения (3.4.1) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова*, если оно удовлетворяет (3.4.5).

Система $\{\varphi_k\}$ собственных векторов оператора L в силу вложений (2.1.1) образует базис в пространстве $L_2(\mathbf{G})$. Выберем в $L_2(\mathbf{G})$ ортонормальную систему $\{\varphi^i = (\varphi_1^i, \varphi_2^i, \dots, \varphi_j^i, \dots)\}$ так, чтобы $\text{span}\{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^l\} = \ker L$, $\dim \ker L = l$. Построим галеркинские приближения решения задачи (3.4.1) – (3.4.3), (3.4.4) и задачи (3.4.1) – (3.4.3), (3.4.5) в виде

$$x_j^m(s, t) = \sum_{i=1}^m a^i(t) \varphi_j^i(s), \quad m > l, \quad (3.4.8)$$

где коэффициенты $a^i = a^i(t)$, $i = 1, \dots, m$ определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} (-\lambda x_{jt} \varphi_j^i + \nabla x_{jt} \cdot \nabla \varphi_j^i + (\alpha_j^1 x_j^m + \alpha_j^2 (x_j^m)^3 + \alpha_j^3 (x_j^m)^5 + \\ + \dots + \alpha_j^{k-1} (x_j^m)^{2k-3} + \alpha_j^k (x_j^m)^{2k-1}) \varphi_j^i) ds = \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} u_j \varphi_j^i ds, \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

и в случае условия Шоуолтера – Сидорова (3.4.5) – условиями

$$\begin{aligned} \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} & \left[-\lambda \left(x_j^m(s, 0) - x_{j0}(s) \right) \varphi_j^i(s) + \right. \\ & \left. + \nabla \left(x_j^m(s, 0) - x_{j0}(s) \right) \cdot \nabla \varphi_j^i(s) \right] ds = 0, \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

а в случае условия Коши (3.4.4) – условиями

$$\sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} \left(x_j^m(s, 0) - x_{0j}(s) \right) \varphi_j^i(s) ds = 0. \quad (3.4.11)$$

Уравнения (3.4.9) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $T_m \in \mathbb{R}_+$, $T_m = T_m(x_0)$, $\mathfrak{B}^m = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$.

Лемма 3.4.1. *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$ и $m > \dim \ker L$ существует единственное локальное решение $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{B}^m)$ задачи (3.4.9), (3.4.10).*

Доказательство. Доказательство леммы вытекает из лемм 1.7.1, 2.2.1. \square

Лемма 3.4.2. *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$ и $m > \dim \ker L$ существует единственное локальное решение $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{M})$ задачи (3.4.9), (3.4.11).*

Доказательство. Доказательство леммы вытекает из лемм 1.7.1, 2.1.1. \square

Теорема 3.4.1. *Пусть $\lambda + a \leq \mu_1$ и $\alpha_j^n \in \mathbb{R}_+$, $n = 1, \dots, k$. Тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $u \in L_{\frac{2k}{2k-1}}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$ таких, что выполнено (2.1.4), существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (3.4.1) – (3.4.4).*

Доказательство. Введем в $\text{coim } L$ норму $|x|^2 = \langle Lx, x \rangle$. В силу принципа Куранта эта норма эквивалента норме, индуцированной из надпространства $L_2(\Omega)$. Умножим i -ое уравнение (3.4.9) на $a_j^i(t)$ соответственно, результаты сложим по $i = 1, \dots, m$ и проинтегрируем на $(0, t)$

$$\begin{aligned} \int_0^t \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} & \left[-\lambda x_j^m \frac{dx_j^m}{d\tau} - x_j^m \Delta \left(\frac{dx_j^m}{d\tau} \right) + \alpha_j^1 (x_j^m)^2 + \alpha_j^2 (x_j^m)^4 + \dots + \right. \\ & \left. + \alpha_j^k (x_j^m)^{2k} \right] ds d\tau = \int_0^t \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} u_j x_j^m ds d\tau; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} \left[\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (-\lambda(x_j^m)^2 + (\frac{dx_j^m}{ds})^2 + \alpha_j^1(x_j^m)^2 + \alpha_j^2(x_j^m)^4 + \dots + \right. \\
& \quad \left. + \alpha_j^k(x_j^m)^{2k}) \right] ds d\tau = \int_0^t \|u\|_{\mathfrak{B}_k^*} \|x^m\|_{\mathfrak{B}_k} d\tau; \\
& |x_m|_{L_\infty(0,t;\text{coim } L)} + C_1 \|x_m\|_{\mathfrak{B}_k}^{2k} \leq \\
& \leq C_2 \|u\|_{L_{\frac{2k}{2k-1}}(0,t;\mathfrak{B}_k^*)}^{\frac{2k}{2k-1}} + C_3 \|x_m(0)\|_{L_\infty(0,t;\text{coim } L)}^2, \quad C_i > 0, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Из теоремы 2.2.2 и леммы 1.7.1 вытекает данный результат. \square

Теорема 3.4.2. Пусть $\lambda + a \leq \mu_1$ и $\alpha_j^n \in \mathbb{R}_+$, $n = 1, \dots, k$. Тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{H}$ и $u \in L_{\frac{2k}{2k-1}}(0,T;\mathfrak{B}_k^*)$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}_1$ задачи (3.4.1) – (3.4.3), (3.4.5).

Доказательство. Из теоремы 2.1.2 и леммы 1.7.1 вытекает данный результат. \square

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для математической модели деформации конструкции из двутавровых балок (3.4.1) – (3.4.3). Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(x, u) \rightarrow \inf \tag{3.4.12}$$

решениями задачи (3.4.1) – (3.4.4) или (3.4.1) – (3.4.3), (3.4.5), где функционал стоимости задан в виде:

$$J(x, u) = \frac{1}{2k} \|x - z_d\|_{L_{2k}(0,T;L_{2k}(\mathbf{G}))}^{2k} + \frac{2k}{2k-1} \|u\|_{L_{\frac{2k}{2k-1}}(0,T;L_{\frac{2k}{2k-1}}(\mathbf{G}))}^{\frac{2k-1}{2k}}.$$

Определение 3.4.3. Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ назовем *решением задачи оптимального управления* (3.4.1) – (3.4.3), (3.4.5), (3.4.12), если

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{(x,u)} J(x, u),$$

где пары $(x, u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ удовлетворяют (3.4.1) – (3.4.3), (3.4.5); вектор-функцию \tilde{u} назовем *оптимальным управлением*.

Выберем $\mathfrak{U}_{ad} \subset L_{\frac{2k}{2k-1}}(0, T; L_{\frac{2k}{2k-1}}(\mathbf{G}))$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4.3. Пусть $\lambda \leq \lambda_1$, $\alpha_j^n \in \mathbb{R}_+$, $n = 1, \dots, k$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{H}$ существует оптимальное управление в задаче (3.4.1) – (3.4.3), (3.4.5), (3.4.12).

Доказательство. Из теоремы 2.3.2 и леммы 1.7.1 вытекает данный результат. \square

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для математической модели деформации конструкции из двутавровых балок (3.4.1) – (3.4.3) с условием Коши (3.4.4). Выберем $\mathfrak{U}_{ad}^1 \subset L_{\frac{2k}{2k-1}}(\mathbf{G})$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество, для которого выполнено $(\mathbb{I} - Q)u = 0$.

Теорема 3.4.4. Пусть $\lambda \leq \lambda_1$, $\alpha_j^n \in \mathbb{R}_+$, $n = 1, \dots, k$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{M}$ существует оптимальное управление в задаче (3.4.1) – (3.4.4), (3.4.12).

Доказательство. Из теоремы 2.4.2 и леммы 1.7.1 вытекает данный результат. \square

Приведем теперь необходимые условия, которым удовлетворяет любое оптимальное управление u решениями задачи Шоултера – Сидорова для модели деформации конструкции из двутавровых балок при $k = 1$.

Теорема 3.4.5. Пусть $\lambda \leq \lambda_1$, $\alpha_j^1, \alpha_j^2 \in \mathbb{R}_+$, если u – оптимальное управление в задаче (3.4.12), то существует вектор $y \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{H})$ такой, что

$$-\lambda x_{jt} - x_{jtss} + \alpha_j^1 x_j + \alpha_j^2 x_j^3 = u_j, \quad \text{для всех } s \in (0, l_j), \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, N},$$

$$\lambda y_{jt} + y_{jtss} + \alpha_j^1 y_j + \alpha_j^2 3x_j^2 y = (x_j - z_{jd})^3, \quad \text{для всех } s \in (0, l_j), \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, N},$$

$$\sum_{j:E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(0, t) - \sum_{r:E_r \in E^\omega(V_i)} d_r x_{rs}(l_r, t) = 0,$$

$$x_r(0, t) = x_j(0, t) = x_h(l_h, t) = x_m(l_m, t),$$

$$\sum_{j:E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j y_{js}(0, t) - \sum_{r:E_r \in E^\omega(V_i)} d_r y_{rs}(l_r, t) = 0,$$

$$y_r(0, t) = y_j(0, t) = y_h(l_h, t) = y_m(l_m, t),$$

$$(\lambda + \Delta)(x_j(s, 0) - x_{0j}(s)) = 0, \text{ для всех } s \in (0, l_j),$$

$$(\lambda + \Delta)(y_j(s, T) - y_{0j}(s)) = 0, \text{ для всех } s \in (0, l_j),$$

$$\int_0^T \varphi(t) \left[\sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} (y_j + u_j^{\frac{1}{3}})(v_j - u_j) ds \right] dt \geq 0 \quad \forall v \in \mathfrak{U}_{ad}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3.4.4. \square

3.5. Задача оптимального управления для математической модели распределения потенциала электрического поля в полупроводнике

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим модель распределения потенциала электрического поля в полупроводнике

$$x(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (3.5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda x - \Delta x) - \Delta_p x + \alpha|x|^{p-2}x = u, \quad p > 2, \alpha \geq 0. \quad (3.5.2)$$

Для модели (3.5.1), (3.5.2) рассмотрим начальное условие Шоуолтера – Сидорова

$$(\lambda - \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, \quad s \in \Omega \quad (3.5.3)$$

или условие Коши

$$x(s, 0) = x_0(s), \quad s \in \Omega. \quad (3.5.4)$$

Как и в п. 1.8, положим $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$, $\mathfrak{H} = \overset{\circ}{W} \frac{1}{2}(\Omega)$, $\mathfrak{B} = \overset{\circ}{W} \frac{1}{p}(\Omega)$, $\mathfrak{H}^* = W_2^{-1}(\Omega)$, $\mathfrak{B}^* = W_q^{-1}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω , а через $\{\lambda_k\}$ – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности. Построим множества

$$\text{coim } L = \{x \in \overset{\circ}{W} \frac{1}{2}(\Omega) : \langle x, \varphi \rangle = 0, \text{ если } \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\},$$

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{B}, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{B} : \int_{\Omega} (-\Delta_p x + \alpha|x|^{p-2}x) \varphi_1 \, ds = \int_{\Omega} u \varphi_1 \, ds\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1 \end{cases}$$

и проекторы

$$P = Q = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi_1 \rangle, & \text{если } \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Построим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x \mid x \in L_{\infty}(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{M}), \frac{dx}{dt} \in L_2(0, T; \mathbf{H})\}.$$

Определение 3.5.1. Слабым обобщенным решением уравнения (3.5.2) назовем функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \varphi(t) \left[\int_{\Omega} \left(\lambda x_t w + \nabla x_t \cdot \nabla w + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial x}{\partial s_i} \right|^{p-2} \frac{\partial x}{\partial s_i} \frac{\partial w}{\partial s_i} + \alpha |x|^{p-2} x w \right) ds \right] dt = \\ & = \int_0^T \left[\varphi(t) \int_{\Omega} u w ds \right] dt \quad \forall w \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega), \quad \forall \varphi \in L_2(0, T). \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Решение уравнения (3.5.2) назовем *решением задачи Коши*, если оно удовлетворяет (3.5.4).

Пусть $x^1 = Px$. Построим пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x \mid x \in L_{\infty}(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)), \frac{dx^1}{dt} \in L_2(0, T; \text{coim } L)\}.$$

Определение 3.5.2. Слабым обобщенным решением уравнения (3.5.2) назовем функцию $x \in \mathfrak{X}_1$, удовлетворяющую условию (3.5.5). Решение уравнения (3.5.2) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова*, если оно удовлетворяет (3.5.3).

Система $\{\varphi_k\}$ собственных векторов оператора L в силу вложений (1.3.8) образует базис в пространстве $L_2(\Omega)$. Выберем в $L_2(\Omega)$ ортонормальную систему $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l\} = \ker L$, $\dim \ker L = l$. Построим галеркинские приближения решения задачи (3.5.1) – (3.5.3) и задачи (3.5.1), (3.5.2), (3.5.4) в виде

$$x_m(s, t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \varphi_i(s), \quad m > l, \quad (3.5.6)$$

где коэффициенты $a_i = a_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ определяются системой уравнений

$$\int_{\Omega} \left(\lambda x_t \varphi_i + \nabla x_t \cdot \nabla \varphi_i + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial x}{\partial s_i} \right|^{p-2} \frac{\partial x}{\partial s_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_i} + \alpha |x|^{p-2} x \varphi_i \right) ds = \int_{\Omega} u \varphi_i ds, \quad (3.5.7)$$

и в случае условия Шоуолтера – Сидорова (3.5.3) – условиями

$$\int_{\Omega} [\lambda (x_m(s, 0) - x_0(s)) \varphi_i(s) + \nabla (x_m(s, 0) - x_0(s)) \cdot \nabla \varphi_i(s)] = 0, \quad (3.5.8)$$

а в случае условия Коши (3.5.4) – условиями

$$\int_{\Omega} (x_m(0) - x_0) \varphi_i ds = 0. \quad (3.5.9)$$

Уравнения (3.5.7) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $T_m \in \mathbb{R}_+$, $T_m = T_m(x_0)$, $\mathfrak{B}^m = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$.

Лемма 3.5.1. *При любых $x_0 \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ и $m > \dim \ker L$ существует единственное локальное решение $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{B}^m)$ задачи (3.5.7), (3.5.8).*

Доказательство. Доказательство леммы вытекает из лемм 2.2.1, 1.8.1. \square

Теорема 3.5.1. *Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{B}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_q(0, T; \mathfrak{B}^*)$, существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}_1$ задачи (3.5.1) – (3.5.3).*

Доказательство. Из теоремы 2.2.3 и леммы 1.8.1 вытекает данный результат. \square

Лемма 3.5.2. *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$ и $m > \dim \ker L$ существует единственное локальное решение $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{M})$ задачи (3.5.7), (3.5.9).*

Доказательство. Доказательство леммы вытекает из лемм 2.1.1, 1.8.1. \square

Теорема 3.5.2. *Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_q(0, T; \mathfrak{B}^*)$ таких, что выполнено (2.1.33), существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (3.5.1), (3.5.2), (3.5.4).*

Доказательство. Из теоремы 2.1.3 и леммы 1.8.1 вытекает данный результат. \square

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для математической модели распределения потенциала электрического поля в полупроводнике. В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(x, u) \rightarrow \inf \quad (3.5.10)$$

решениями задачи (3.5.1), (3.5.2), (3.5.4) или (3.5.1) – (3.5.3), где функционал стоимости задается формулой

$$J(x, u) = \frac{1}{p} \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}}^p dt + \frac{N}{q} \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{B}^*}^q dt,$$

$z_d = z_d(t)$ – желаемое состояние. Фиксируем $T \in \mathbb{R}_+$. Выберем $\mathfrak{U}_{ad}^1 \subset L_q(0, T; W_q^{-1}(\Omega))$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество, для которого выполнено $(\mathbb{I} - Q)u(t) = 0$.

Теорема 3.5.3. *Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{M}$ существует оптимальное управление в задаче (3.5.1), (3.5.2), (3.5.4), (3.5.10).*

Доказательство. Из теоремы 2.4.1 и леммы 1.8.1 вытекает данный результат. \square

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для математической модели распределения потенциала электрического поля в полупроводнике (3.5.1), (3.5.2) с условием Шоуолтера – Сидорова (3.5.3). Выберем $\mathfrak{U}_{ad} \subset L_q(0, T; W_q^{-1}(\Omega))$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество.

Теорема 3.5.4. *Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{B}$ существует оптимальное управление в задаче (3.5.1) – (3.5.3), (3.5.10).*

Доказательство. Из теоремы 2.3.1 и леммы 1.8.1 вытекает данный результат. \square

Приведем теперь необходимые условия, которым удовлетворяет любое оптимальное управление u решениями задачи (3.5.1) – (3.5.3).

Теорема 3.5.5. *Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, если u – оптимальное управление в задаче (3.5.10), то существует вектор $y \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{B})$ такой, что*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\lambda x - \Delta x) - \Delta_p x + \alpha \lambda |x|^{p-2} x = u, \\ & \frac{\partial}{\partial t}(-\lambda + \Delta)y - \frac{\partial}{\partial s_i}((p-1)|x_{s_i}|^{p-2})y + \alpha(p-1)|x|^{p-2}y = \\ & = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial s_i} \left(\left| \frac{\partial}{\partial s_i}(x(u) - z_d) \right|^{p-1} \right) \text{sign} \left(\frac{\partial}{\partial s_i}(x(u) - z_d) \right), \\ & x(s, t) = y(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ & (\lambda - \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, \quad (\lambda - \Delta)y(s, T) = 0, \quad s \in \Omega, \\ & \int_{Q_T} y(u - v) ds dt + \int_0^T \|u\|_{W_q^{-1}(\Omega)}^{q-1} (\|u\|_{W_q^{-1}(\Omega)})'_u (v - u) dt \geq 0 \quad \forall v \in \mathfrak{U}_{ad}. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть u – оптимальное управление, а $x = x(u)$ – соответствующее состояние. Покажем, что функционал $u \rightarrow J(u)$ дифференцируем по Гато.

$$\begin{aligned} X &= \frac{d}{d\tau} J(u + \tau(v - u))|_{\tau=0} = \\ &= \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{p} \int_0^T \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial s_i} (x(u + \tau(v - u)) - z_d) \right\|_{L_p(\Omega)}^p dt + \frac{N}{q} \int_0^T \|u + \tau(v - u)\|_{W_q^{-1}(\Omega)}^q dt \right]|_{\tau=0} = \\ &= \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{p} \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial s_i} (x(u + \tau(v - u)) - z_d) \right|_{L_p(\Omega)}^p ds dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{N}{q} \int_0^T \|u + \tau(v - u)\|_{W_q^{-1}(\Omega)}^q dt \right]|_{\tau=0} = \\ &= \left[\int_0^T \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial s_i} (x(u + \tau(v - u)) - z_d) \right|^{p-1} \left| \frac{\partial}{\partial s_i} (x(u + \tau(v - u)) - z_d) \right|'_{\tau} ds dt + \right. \\ &\quad \left. + N \int_0^T \|u + \tau(v - u)\|_{W_q^{-1}(\Omega)}^{q-1} (\|u + \tau(v - u)\|_{W_q^{-1}(\Omega)})'_{(u+\tau(v-u))} (v - u) dt \right]|_{\tau=0} = \\ &= \left[\int_0^T \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial s_i} (x(u) - z_d) \right|^{p-1} \text{sign} \left(\frac{\partial}{\partial s_i} (x(u) - z_d) \right) \frac{\partial \hat{x}}{\partial s_i} ds dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \|u\|_{W_q^{-1}(\Omega)}^{q-1} (\|u\|_{W_q^{-1}(\Omega)})'_u (v - u) dt \right], \end{aligned}$$

где \hat{x} задается как решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda - \Delta)\hat{x} + (p-1)|x_{s_i}|^{p-2}\hat{x}_{s_i} + \alpha(p-1)|x|^{p-2}\hat{x} = v - u, \quad (3.5.11)$$

$$(\lambda - \Delta)\hat{x}(s, 0) = 0, \quad s \in \Omega; \quad \hat{x}(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (3.5.12)$$

Используя рассуждения теоремы 2.2.3, нетрудно убедиться в существовании единственного решения задачи (3.5.11), (3.5.12). Кроме того, если u – оптимальное управление, то $X \geq 0 \forall u \in \mathfrak{U}_{ad}$.

Введем сопряженное состояние y при помощи задачи

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(-\lambda + \Delta)y - \frac{\partial}{\partial s_i}((p-1)|x_{s_i}|^{p-2})y + \alpha(p-1)|x|^{p-2}y = \\ & = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial s_i} \left(\left| \frac{\partial}{\partial s_i} (x(u) - z_d) \right|^{p-1} \right) \text{sign} \left(\frac{\partial}{\partial s_i} (x(u) - z_d) \right), \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

$$(-\lambda + \Delta)y(s, T) = 0, \quad s \in \Omega; \quad y(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (3.5.14)$$

По теореме 2.2.3 существует единственное решение задачи (3.5.13), (3.5.14).

Умножим (3.5.13) на \hat{x} и получим

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left[\frac{\partial}{\partial t}(-\lambda + \Delta)y - (p-1)\frac{\partial}{\partial s_i}(|x_{s_i}|^{p-2})y + \alpha(p-1)|x|^{p-2}y \right] \hat{x} ds dt = \\ & = \int_{Q_T} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial s_i} \left(\left| \frac{\partial}{\partial s_i} (x(u) - z_d) \right|^{p-1} \right) \text{sign} \left(\frac{\partial}{\partial s_i} (x(u) - z_d) \right) \hat{x} ds dt. \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

Преобразуем (3.5.13), применив формулу Грина и (3.5.14), получим

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\lambda - \Delta)\hat{x} - (p-1)\frac{\partial}{\partial s_i}(|x_{s_i}|^{p-2})\hat{x} + \alpha(p-1)|x|^{p-2}\hat{x} \right] y ds dt = \\ & = \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial s_i} \left| \frac{\partial}{\partial s_i} (x(u) - z_d) \right|^{p-1} \text{sign} \left(\frac{\partial}{\partial s_i} (x(u) - z_d) \right) \hat{x} ds dt = \int_{Q_T} (v - u) y ds dt, \end{aligned}$$

тогда

$$\int_{Q_T} y(u - v) ds dt + \int_0^T \|u\|_{W_q^{-1}(\Omega)}^{q-1} (\|u\|_{W_q^{-1}(\Omega)})'_u (v - u) dt \geq 0.$$

□

3.6. Задача оптимального управления для математической фильтрационной модели Буссинеска

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим математическую фильтрационную модель Буссинеска

$$x(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (3.6.1)$$

$$(\lambda - \Delta)x_t - \Delta(|x|^{p-2}x) = u. \quad (3.6.2)$$

Для модели (3.6.1), (3.6.2) рассмотрим начальное условие Шоуолтера – Сидорова

$$(\lambda - \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, s \in \Omega \quad (3.6.3)$$

или условие Коши

$$x(s, 0) = x_0(s), s \in \Omega. \quad (3.6.4)$$

Как и в п. 1.9, положим $\mathcal{H} = W_2^{-1}(\Omega)$, $\mathfrak{H} = L_2(\Omega)$, $\mathfrak{B} = L_p(\Omega)$. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω , а через $\{\lambda_k\}$ – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности. Построим множества

$$\text{coim } L = \begin{cases} \mathfrak{H}, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi_1 \rangle = 0\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases}$$

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{B}, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{B} : \int_{\Omega} |x|^{p-2}x \varphi_1 \, ds = \int_{\Omega} u \tilde{\varphi}_1 \, ds\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases}$$

и проекторы

$$P = Q = \begin{cases} \mathbb{I}, & \lambda > -\lambda_1; \\ \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi_1 \rangle, & \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Построим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x \mid x \in L_{\infty}(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{M}), \frac{dx}{dt} \in L_2(0, T; \text{coim } L)\}.$$

Определение 3.6.1. Слабым обобщенным решением уравнения (3.6.2) назовем функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \varphi(t) \left[\int_{\Omega} (\lambda x_t \tilde{w} + x_t w + \alpha |x|^{p-2} x w) ds \right] dt = \\ & = \int_0^T \left[\varphi(t) \int_{\Omega} u \tilde{w} ds \right] dt \quad \forall w \in L_2(\Omega), \quad \forall \varphi \in L_2(0, T). \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

Решение уравнения (3.6.2) назовем *решением задачи Коши*, если оно удовлетворяет (3.6.4).

Построим пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x \mid x \in L_{\infty}(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; L_p(\Omega)), \quad \frac{dx}{dt} \in L_2(0, T; \text{coim } L)\}.$$

Определение 3.6.2. Слабым обобщенным решением уравнения (3.6.2) назовем функцию $x \in \mathfrak{X}_1$, удовлетворяющую условию (3.6.5). Решение уравнения (3.6.2) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова*, если оно удовлетворяет (3.6.3).

Система $\{\varphi_k\}$ в силу вложений (1.3.8) образует базис в пространстве $W_2^{-1}(\Omega)$. Выберем в $W_2^{-1}(\Omega)$ ортонормальную систему $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l\} = \ker L$, $\dim \ker L = l$. Построим галеркинские приближения решения задачи (3.6.1) – (3.6.3) и задачи (3.6.1), (3.6.2), (3.6.4) в виде

$$x_m(s, t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \varphi_i(s), \quad m > l, \quad (3.6.6)$$

где коэффициенты $a_i = a_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ определяются системой уравнений

$$\int_{\Omega} (\lambda x_t \tilde{\varphi}_i + x_t \varphi_i + \alpha |x|^{p-2} x \tilde{\varphi}_i) ds = \int_{\Omega} u \tilde{\varphi}_i ds, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.6.7)$$

и в случае условия Шоуолтера – Сидорова (3.6.3) – условиями

$$\int_{\Omega} [\lambda(x_m(s, 0) - x_0(s)) \tilde{\varphi}_i + (x_m(s, 0) - x_0(s)) \varphi_i(s)] ds = 0, \quad (3.6.8)$$

а в случае условия Коши (3.6.4) – условиями

$$\int_{\Omega} (x_m(s, 0) - x_0(s)) \tilde{\varphi}_i(s) ds = 0. \quad (3.6.9)$$

Уравнения (3.6.7) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $T_m \in \mathbb{R}_+$, $T_m = T_m(x_0)$, $\mathfrak{B}^m = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$.

Лемма 3.6.1. *При любых $x_0 \in L_p(\Omega)$ и $m > \dim \ker L$ существует единственное локальное решение $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{B}^m)$ задачи (3.6.7), (3.6.8).*

Доказательство. Доказательство леммы вытекает из лемм 2.2.1, 1.9.1. \square

Теорема 3.6.1. *Пусть $p \geq \frac{2n}{n+2}$, $\lambda \geq -\lambda_1$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{B}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_q(0, T; \mathfrak{B}^*)$, существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}_1$ задачи (3.6.1) – (3.6.3).*

Доказательство. Введем в $\text{coim } L$ норму $|x|^2 = \langle Lx, x \rangle$. Скалярно умножим уравнение (3.6.2) на x , проинтегрируем по $(0, t)$ и получим

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} ((\lambda - \Delta)(x_{\tau})\tilde{x} + |x|^{p-2}x^2) ds d\tau &= \int_0^t \int_{\Omega} u \tilde{x} ds d\tau; \\ \int_0^t \int_{\Omega} (\lambda x_{\tau} \tilde{x} + x_{\tau} x + |x|^p) ds d\tau &\leq \int_0^t \|x\|_{L_p(\Omega)} \|u\|_{(L_p(\Omega))^*} d\tau; \\ \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\lambda x \tilde{x} + x^2) + |x|^p \right) ds d\tau &\leq \int_0^t \|x\|_{L_p(\Omega)} \|u\|_{(L_p(\Omega))^*} d\tau; \\ C_3 |x|_{L_{\infty}(0, t; \text{coim } L)}^2 + C_4 \|x\|_{L_p(0, t; L_p(\Omega))}^p &\leq \\ \leq C_1 \|u\|_{L_q(0, T; (L_p(\Omega))^*)} + C_2 |x(0)|_{L_{\infty}(0, t; \text{coim } L)}^2, \quad C_i > 0, i = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы вытекает из леммы 1.9.1 и теоремы 2.2.3. \square

Лемма 3.6.2. *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$ и $m > \dim \ker L$ существует единственное локальное решение $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{M})$ задачи (3.6.7), (3.6.9).*

Доказательство. Доказательство леммы вытекает из лемм 2.1.1, 1.9.1. \square

Теорема 3.6.2. Пусть $p \geq \frac{2n}{n+2}$, $\lambda \geq -\lambda_1$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_q(0, T; \mathfrak{B}^*)$ таких, что выполнено (2.1.33), существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (3.6.1), (3.6.2), (3.6.4).

Доказательство. Доказательство теоремы вытекает из леммы 1.9.1 и теоремы 2.1.3. \square

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для обобщенной фильтрационной модели Буссинеска. В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(x, u) = \frac{1}{p} \|x - z_d\|_{L_p(Q)}^p + \frac{N}{q} \int_0^T \|u\|_{(L_p(\Omega))^*}^q dt, \quad J(x, u) \rightarrow \inf. \quad (3.6.10)$$

Наконец, выберем $\mathfrak{U}_{ad} \subset L_q(0, T; (L_p(\Omega))^*)$ – замкнутое, выпуклое множество, для которого выполнено $(\mathbb{I} - Q)u(t) = 0$.

Теорема 3.6.3. Пусть $p \geq \frac{2n}{n+2}$, $\lambda \geq -\lambda_1$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{M}$ существует оптимальное управление в задаче (3.6.1), (3.6.2), (3.6.4), (3.6.10).

Доказательство. Из теоремы 3.6.2 и теоремы 2.4.3 непосредственно вытекает теорема 3.6.3. \square

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для обобщенной математической модели Буссинеска (3.6.1), (3.6.2) с условием Шоултера – Сидорова (3.6.3). Выберем $\mathfrak{U}_{ad} \subset L_q(0, T; (L_p(\Omega))^*)$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество.

Теорема 3.6.4. Пусть $p \geq \frac{2n}{n+2}$, $\lambda \geq -\lambda_1$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{B}$ существует оптимальное управление в задаче (3.6.1), – (3.6.3), (3.6.10).

Доказательство. Из теоремы 3.6.1 и теоремы 2.4.3 непосредственно вытекает теорема 3.6.4. \square

Приведем теперь необходимые условия, которым удовлетворяет любое оптимальное управление u решениями обобщенной фильтрационной моделью Буссинеска.

Теорема 3.6.5. Пусть $p \geq \frac{2n}{n+2}$, $\lambda \geq -\lambda_1$, если u – оптимальное управление в задаче (3.6.10), то существует вектор $y \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{B})$ такой, что

$$(\lambda - \Delta)x_t - \Delta(|x|^{p-2}x) = u,$$

$$(-\lambda + \Delta)y_t - \Delta((p-1)|x|^{p-2}y) = (-\Delta)(|x - z_d|^{p-1}\text{sign}(x - z_d)), (s, t) \in Q_T,$$

$$x(s, t) = y(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T),$$

$$(\lambda - \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, (\lambda - \Delta)y(s, T) = 0, s \in \Omega,$$

$$\int_{Q_T} (v - u)\tilde{y} dsdt + \int_0^T N\|u\|_{\mathfrak{B}^*}^{q-1}(\|u\|_{\mathfrak{B}^*})'_u(v - u) dt \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}.$$

Доказательство. Пусть u – оптимальное управление, а $x = x(u)$ – соответствующее состояние. Покажем, что функционал $u \rightarrow J(u)$ дифференцируем по Гато; вычислим

$$\frac{d}{d\tau} J(u + \tau(v - u))|_{\tau=0} = X.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} J(u + \tau(v - u))|_{\tau=0} &= \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{p} \int_{Q_T} |x(u + \tau(v - u)) - z_d|^p dsdt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{N}{q} \int_0^T \|u + \tau(v - u)\|_{(L_p(\Omega))^*}^q dt \right]|_{\tau=0} = \\ &= \left[\int_{Q_T} (x(u + \tau(v - u)) - z_d)^{p-1} \text{sign}(x(u + \tau(v - u)) - z_d) x'_\tau(u + \tau(v - u)) dsdt + \right. \\ &\quad \left. + N \int_0^T \|u + \tau(v - u)\|_{(L_p(\Omega))^*}^{q-1} (\|u + \tau(v - u)\|_{(L_p(\Omega))^*})'_{(u+\tau(v-u))}(v - u) dt \right]|_{\tau=0} = \\ &= \int_{Q_T} (x(u) - z_d)^{p-1} \text{sign}(x(u) - z_d) \hat{x} dsdt + \int_0^T \|u\|_{(L_p(Q))^*}^{q-1} (\|u\|_{(L_p(\Omega))^*})'_u(v - u) dt, \end{aligned}$$

где \hat{x} задается как решение задачи

$$(\lambda - \Delta)\hat{x}_t - \Delta((p-1)|x|^{p-2}\hat{x}) = v - u, \quad (3.6.11)$$

$$(\lambda - \Delta)\hat{x}(s, 0) = 0, \quad s \in \Omega; \quad \hat{x}(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (3.6.12)$$

Используя рассуждения теоремы 2.1.3, нетрудно убедиться в существовании единственного решения задачи (3.6.11), (3.6.12). Далее, из теоремы 2.1.3 вытекает, что оператор $(L \frac{d}{dt} + M) : L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{M}) \rightarrow \mathfrak{U}$ есть гомеоморфизм. Кроме того, если u – оптимальное управление, то $X \geq 0 \forall u \in \mathfrak{U}_{ad}$.

Введем сопряженное состояние y при помощи задачи

$$\begin{aligned} & (-\lambda + \Delta)y_t - \Delta((p-1)|x|^{p-2}y) = \\ & = (-\Delta)(|x - z_d|^{p-1}\text{sign}(x - z_d)), \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

$$(-\lambda + \Delta)y(s, T) = 0, \quad s \in \Omega; \quad y(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (3.6.14)$$

По теореме 2.1.3 существует единственное решение задачи (3.6.13), (3.6.14). Умножим (3.6.13) на \hat{x} и получим

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} [(-\lambda + \Delta)y_t - \Delta((p-1)|x|^{p-2}y)]\tilde{\hat{x}} dsdt = \\ & = \int_{Q_T} (|x - z_d|^{p-1}\text{sign}(x - z_d))\hat{x} dsdt. \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

Преобразуем (3.6.15), применив формулу Грина и (3.6.14):

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} [(\lambda - \Delta)\hat{x}_t - \Delta((p-1)|x|^{p-2}\hat{x})]\tilde{y} dsdt = \\ & \int_{Q_T} |x - z_d|^{p-1}\text{sign}(x - z_d)\hat{x} dsdt = \int_{Q_T} (v - u)\tilde{y} dsdt, \end{aligned}$$

тогда

$$\int_{Q_T} (v - u)\tilde{y} dsdt + \int_0^T N\|u\|_{\mathfrak{B}^*}^{q-1}(\|u\|_{\mathfrak{B}^*})'_u(v - u) dt \geq 0.$$

□

Глава 4. Алгоритмы численных методов исследования задачи оптимального управления и описание программ

4.1. Метод декомпозиции в задаче оптимального управления

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}_j, \mathfrak{B}_j^*), j = \overline{1, k}, k \in \mathbb{N}$ – дуальные (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_1^* \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_k^* \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \quad (4.1.1)$$

плотны и непрерывны, а вложение

$$\mathfrak{H} \Subset \mathcal{H}$$

компактно. Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, самосопряженный, неотрицательно определенный, фредгольмов оператор, чей ортонормальный (в смысле \mathcal{H}) набор собственных векторов $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве \mathfrak{H} , а $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, симметричный, 2-коэрцитивный оператор. Пусть $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*), r \geq 1, j = \overline{1, k} - s$ – монотонные и p_j -коэрцитивные операторы, где $p_j \geq 2$ и $p_k = \max_j p_j$, имеющие симметричную производную Фреше.

Ввиду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $\mathfrak{H} \supset \ker L \equiv \text{coker } L \subset \mathfrak{H}^*$. Поскольку $\text{coker } L$ конечномерно, то $\mathfrak{H}^* = \text{coker } L \oplus \text{im } L$ и существует проектор Q вдоль $\text{coker } L$ на $\text{im } L$. Аналогично получим, что $\mathfrak{H} = \text{coim } L \oplus \ker L$ и существует проектор P вдоль $\ker L$ на $\text{coim } L$. Пусть $x^1 = Px$.

Построим пространство $\mathfrak{U} = L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ и определим в пространстве \mathfrak{U} непустое, замкнутое и выпуклое множество \mathfrak{U}_{ad} . Рассмотрим задачу оптимального управления

$$L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u, \quad L(x(0) - x_0) = 0, \quad (4.1.2)$$

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}, \quad (4.1.3)$$

где функционал стоимости задается формулой

$$J(x, u) = \beta \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + (1 - \beta) \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{H}^*}^2 dt, \quad \beta \in (0, 1), \quad (4.1.4)$$

$z_d = z_d(t)$ – желаемое состояние.

Линеаризуем уравнение (4.1.2) при помощи введения дополнительной иско-
мой вектор-функции v . Для этого определим $x = x(u, v) = x(t, u, v)$ как
решение линейной задачи, относительно вектор-функции x

$$\begin{aligned} L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(v) &= u, \\ L(x(0) - x_0) &= 0, \\ u \in \mathfrak{U}_{ad}, \quad v \in L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k). \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Построим пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{H}), \frac{dx^1}{dt} \in L_2(0, T; \text{coim } L)\}.$$

Теорема 4.1.1. *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in \mathfrak{U}_{ad}$, $v \in L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k)$ задача (4.1.5) имеет единственное слабое обобщенное решение $x \in \mathfrak{X}_1$.*

Доказательство. Перепишем задачу (4.1.5) в виде

$$\begin{aligned} L \dot{x} + Mx &= y, \\ L(x(0) - x_0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

где $y = u - \sum_{j=1}^k N_j(v)$, $y \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*) \cap L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$. Тогда в силу тео-
ремы 2.2.1 существует единственное слабое обобщенное решение задачи (4.1.5) в
смысле определения 2.2.1. \square

Задача оптимального управления (4.1.2), (4.1.3) эквивалентна задаче

$$\begin{aligned} L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(v) &= u, \\ x(u, v) &= v, \\ L(x(0) - x_0) &= 0, \\ u \in \mathfrak{U}_{ad}, \quad v \in L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k), \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

$$\begin{aligned}
J_\theta(x, u, v) = & \theta \cdot \beta \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + \\
& +(1 - \theta) \cdot \beta \int_0^T \|v(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + (1 - \beta) \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{H}^*}^2 dt \rightarrow \inf,
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

где $\theta \in (0, 1)$. В силу равенства $x(u, v) = v$ функционал (4.1.8) эквивалентен функционалу (4.1.4).

Определение 4.1.1. Тройку $(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X}_1 \times L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k) \times \mathfrak{U}_{ad}$ назовем *решением задачи оптимального управления* (4.1.8), если

$$J_\theta(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{u}) = \inf_{(x, v, u)} J_\theta(x, v, u),$$

где (x, u, v) удовлетворяет (4.1.7) в смысле определения 2.2.1.

Теорема 4.1.2. При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (4.1.7), (4.1.8).

Доказательство. Пусть $\{u_m\} \subset \mathfrak{U}_{ad}$, $\{v_m\} \subset L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k)$ – последовательности такие, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(v_m, u_m) = \inf J(v, u),$$

тогда из (4.1.8) вытекает, что

$$\begin{aligned}
\|u_m\|_{L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)} &\leq \text{const}, \\
\|v_m\|_{L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k)} &\leq \text{const}
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

при всех $m \in \mathbb{N}$. Из (4.1.9) (переходя, если надо, к подпоследовательности) извлечем слабо сходящиеся последовательности:

$$u_m \rightharpoonup \tilde{u} \text{ слабо в пространстве } L_2(0, T; \mathfrak{H}^*),$$

$$v_m \rightharpoonup \tilde{v} \text{ слабо в пространстве } L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k).$$

В силу теоремы 1.1.2 точка $\tilde{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$. Обозначим за $x_m = x(v_m, u_m)$ решение системы уравнений

$$L \dot{x}_m + M x_m + \sum_{j=1}^k N_j(v_m) = u_m, \quad x_m = v_m. \tag{4.1.10}$$

Тогда в силу рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 2.2.1, получим

$$Mx_m \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*), \quad N(v_m) = \sum_{j=2}^k N_j(v_m) \in L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*).$$

Из (4.1.7) получим, что $L \dot{x}_m \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*) \cap L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$. Тогда, аналогично теореме 2.3.1, можно извлечь такую подпоследовательность, которую снова обозначим $\{x_m\}$, $\{v_m\}$, $\{u_m\}$, что

$$x_m \rightharpoonup \tilde{x} \text{ — слабо в } L_\infty(0, T; \text{coim } L),$$

$$x_m \rightharpoonup \tilde{x} \text{ — слабо в } L_{p_k}((0, T; \mathfrak{B}_k),$$

$$L \dot{x}_m \rightharpoonup L \dot{\tilde{x}} \text{ — слабо в } L_2(0, T; \text{im } L),$$

$$Mx_m \rightharpoonup M\tilde{x} \text{ — слабо в } L_2(0, T; \mathfrak{H}^*),$$

$$N(v_m) \rightharpoonup \mu \text{ — слабо в } L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*).$$

Перейдем к пределу в уравнении состояния (4.1.10) и получим

$$L \dot{\tilde{x}} + M\tilde{x} + \mu = \tilde{u}.$$

Аналогично теореме 2.3.1 получим, что

$$\mu = N(\tilde{v}).$$

Значит, переходя к пределу в уравнении состояния (4.1.10), получим

$$L \dot{\tilde{x}} + M\tilde{x} + \sum_{j=1}^k N_j(\tilde{v}) = \tilde{u}.$$

Следовательно, $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{v}, \tilde{u}) = \tilde{v}$ и $\liminf J(u_m, v_m) \geq J(\tilde{u}, \tilde{u})$. Значит, (\tilde{u}, \tilde{v}) есть оптимальное управление. \square

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления (4.1.3) для полулинейного уравнения соболевского типа с условием Коши. Построим пространство управлений $\mathfrak{U}_1 = \{u \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*) : (\mathbb{I} - Q)u = 0, t \in (0, T)\}$ и определим в пространстве \mathfrak{U}_1 непустое замкнутое и выпуклое множество

\mathfrak{U}_{ad}^1 . Рассмотрим задачу оптимального управления (4.1.3) решениями задачи Коши

$$L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u, \quad x(0) = x_0. \quad (4.1.11)$$

Построим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_{p_k}(0, T; \mathfrak{M}), \dot{x} \in L_2(0, T; \mathfrak{H})\}.$$

Линеаризуем уравнение (4.1.11) при помощи введения дополнительной иско-
мой вектор-функции v . Для этого определим $x = x(u, v) = x(t, u, v)$ как
решение линейной задачи, относительно вектор-функции x

$$\begin{aligned} L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(v) &= u, \\ x(0) &= x_0, \\ u &\in \mathfrak{U}_{ad}^1, \quad v \in L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k). \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Теорема 4.1.3. *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in \mathfrak{U}_{ad}^1$, $v \in L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k)$ задача (4.1.12) имеет единственное слабое обобщенное решение $x \in \mathfrak{X}$.*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству тео-
ремы 4.1.1 и является следствием теоремы 2.4.1. \square

Задача оптимального управления (4.1.3), (4.1.11) эквивалентна задаче (4.1.8),

$$\begin{aligned} L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(v) &= u, \\ x(0) &= x_0, \\ x(u, v) &= v, \\ u &\in \mathfrak{U}_{ad}^1, \quad v \in L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k). \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Определение 4.1.2. Тройку $(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X} \times L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k) \times \mathfrak{U}_{ad}^1$ назовем *ре-
шением задачи оптимального управления* (4.1.8), если

$$J_\theta(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{u}) = \inf_{(x, v, u)} J_\theta(x, v, u),$$

где (x, u, v) удовлетворяет (4.1.13) в смысле определения 2.1.1.

Теорема 4.1.4. При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (4.1.8), (4.1.13).

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1.2. \square

4.2. Метод штрафа в задаче оптимального управления

Рассмотрим задачу нахождения приближенного решения задачи (4.1.7), (4.1.8). Для этого будем использовать метод штрафа и рассмотрим систему состояний

$$\begin{aligned} L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(v) &= u, \\ L(x(0) - x_0) &= 0, \\ u \in \mathfrak{U}_{ad}, v &\in L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k), \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

и задачу управления

$$J_\theta^\varepsilon(x, u, v) \rightarrow \inf, \tag{4.2.2}$$

где функционал стоимости задан в виде

$$\begin{aligned} J_\theta^\varepsilon(x, u, v) = \theta \cdot \beta \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + (1 - \theta) \cdot \beta \int_0^T \|v(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^2 dt + \\ + (1 - \beta) \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{B}_k^*}^2 dt + r_\varepsilon \int_0^T \|x(t, v, u) - v(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt, \quad \theta \in (0, 1), \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

где $x(t, v, u)$ есть решение задачи (4.2.1), а параметр штрафа $r_\varepsilon \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Теорема 4.2.1. При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon > 0$ существует решение $(x_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon)$ задачи (4.2.1), (4.2.2).

Доказательство. Доказательство теоремы строится аналогично доказательству теоремы 4.1.2. \square

Теорема 4.2.2. При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ и при $\varepsilon \rightarrow 0+$ существует последовательность $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ такая, что

$$v_\varepsilon \rightarrow \tilde{v},$$

$$u_\varepsilon \rightarrow \tilde{u},$$

где пара $(\tilde{v}, \tilde{u}) = (\tilde{x}, \tilde{u})$ есть решение задачи (2.3.3), (2.3.4).

Доказательство. В силу теоремы 4.2.1 найдется пара $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon\}$, удовлетворяющая

$$J_\theta^\varepsilon(v_\varepsilon, u_\varepsilon) = \inf_{(v, u)} J_\theta^\varepsilon(v, u).$$

Пусть пара (\hat{x}, \hat{u}) удовлетворяет задачи (2.3.3), тогда $\hat{x} = \hat{v}$ и в силу конструкций функционалов J_θ^ε , J_θ , J выполняется

$$J_\theta^\varepsilon(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq J_\theta^\varepsilon(\hat{v}, \hat{u}) \leq J_\theta^\varepsilon(\hat{x}, \hat{u}) = J_\theta(\hat{x}, \hat{u}) = J(\hat{x}, \hat{u}).$$

Обозначим за $x_\varepsilon = x(v_\varepsilon, u_\varepsilon)$ решение уравнения

$$L \dot{x}_\varepsilon + Mx_\varepsilon + \sum_{j=1}^k N_j(v_\varepsilon) = u_\varepsilon. \quad (4.2.4)$$

Из (4.2.3) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)} &\leq \text{const}, \\ \|v_\varepsilon\|_{L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k)} &\leq \text{const}, \\ \|\sqrt{r_\varepsilon}(x_\varepsilon - v_\varepsilon)\|_{L_2(0, T; \mathcal{H})} &\leq \text{const}. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

В силу (4.2.5) извлечем слабо сходящиеся последовательности (переходя, если надо, к подпоследовательностям)

$u_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{u}$ слабо в пространстве $L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$,

$v_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{v}$ слабо в пространстве $L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k)$,

$x_\varepsilon - v_\varepsilon \rightarrow 0$ в пространстве $L_2(0, T; \mathcal{H})$.

Аналогично теореме 2.2.1, в силу оценки (2.1.15) получим, что

$$|x_\varepsilon(t)|^2 + C_1 \int_0^t \|x_\varepsilon(\tau)\|_{\mathfrak{H}}^2 d\tau \leq C_2; C_i = \text{const} > 0, i = 1, 2;$$

$$\int_0^t \|N(v_\varepsilon(\tau))\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} d\tau \leq C_3; C_3 = \text{const} > 0.$$

Тогда в силу рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 2.2.1, получим

$$Mx_\varepsilon \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*), \quad N(v_\varepsilon) = \sum_{j=2}^k N_j(v_\varepsilon) \in L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*).$$

Из (4.2.4) получим, что $L \dot{x}_\varepsilon \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*) \cap L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$. Тогда, аналогично теореме 2.3.1, можно извлечь такие подпоследовательности, которые снова обозначим $\{x_\varepsilon\}$, $\{v_\varepsilon\}$, $\{u_\varepsilon\}$, что

$$x_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{x} \text{ -- слабо в } L_\infty(0, T; \text{coim } L),$$

$$x_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{x} \text{ -- слабо в } L_{p_k}((0, T; \mathfrak{B}_k),$$

$$L \dot{x}_\varepsilon \rightharpoonup L \dot{\tilde{x}} \text{ -- слабо в } L_2(0, T; \text{im } L),$$

$$Mx_\varepsilon \rightharpoonup M\tilde{x} \text{ -- слабо в } L_2(0, T; \mathfrak{H}^*).$$

$$N(v_\varepsilon) \rightharpoonup \mu \text{ -- слабо в } L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*).$$

Перейдем к пределу в уравнении состояния (4.2.4) и получим

$$L \dot{\tilde{x}} + M\tilde{x} + \mu = \tilde{u}.$$

В силу теоремы 1.1.2 точка $\tilde{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$.

Из (4.2.5) следует, что

$$x_\varepsilon - v_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ в пространстве } L_2(0, T; \mathcal{H}),$$

и в силу компактного вложения $\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H}$ получим, что

$$x_\varepsilon \rightarrow \tilde{x} \text{ в пространстве } L_2(0, T; \mathcal{H}).$$

Тогда и

$$w_\varepsilon \rightarrow \tilde{x} \text{ в пространстве } L_2(0, T; \mathcal{H}),$$

а, значит, и почти всюду. Аналогично рассуждениям теоремы 2.3.1, получим, что

$$\mu = N(\tilde{v}) = N(\tilde{x}).$$

Значит, переходя к пределу в уравнении состояния (4.2.4), получим

$$L \dot{\tilde{x}} + M\tilde{x} + \sum_{j=1}^k N_j(\tilde{v}) = \tilde{u}.$$

Следовательно, $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{v}, \tilde{u}) = \tilde{v}$.

По построению

$$J_\theta^\varepsilon(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq J_\theta(v_\varepsilon, u_\varepsilon).$$

Переходя к пределу, получим, что

$$\liminf J_\theta^\varepsilon(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq \liminf J_\theta(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq J_\theta(\tilde{v}, \tilde{u}) = J(\tilde{x}, \tilde{u})$$

в силу конструкций функционалов J_θ и J и того, что $\tilde{x} = \tilde{v}$.

С другой стороны,

$$J_\theta^\varepsilon(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq J_\theta^\varepsilon(v, u) = J_\theta(\hat{x}, \hat{u}) = J(\hat{x}, \hat{u}).$$

Переходя к пределу получим $\liminf J_\theta^\varepsilon(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq \inf J(x, u)$, тогда

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) \leq \inf J(x, u),$$

значит, пара (\tilde{x}, \tilde{u}) – решение задачи (2.3.3), (2.3.4) и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} J_\theta(v_\varepsilon, u_\varepsilon) = J_\theta(\tilde{v}, \tilde{u}),$$

из чего вытекает, что

$$v_\varepsilon \rightarrow \tilde{v}, \quad u_\varepsilon \rightarrow \tilde{u}.$$

□

4.3. Алгоритм нахождения численного решения задачи Коши и задачи Шоуолтера – Сидорова для абстрактной модели

На основе теоретических результатов пп. 1 и 2 главы 2 был разработан алгоритм нахождения приближенного решения задачи Коши

$$x(0) = x_0 \tag{4.3.1}$$

или задачи Шоуолтера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \quad (4.3.2)$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u. \quad (4.3.3)$$

Приближенное решение задачи (4.3.1), (4.3.3) и задачи (4.3.2), (4.3.3) будем искать при помощи метода Галеркина – Петрова. В силу возможного вырождения уравнения (4.3.3) нам придется модифицировать численный метод. Опишем модифицированный метод Галеркина – Петрова в применении к численному исследованию задач (4.3.1), (4.3.3) и (4.3.2), (4.3.3).

Обозначим через $\sigma(L)$ спектр оператора L . В силу свойств оператора L его спектр $\sigma(L)$ неотрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ множество собственных значений, занумерованных по неубыванию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k\}$ – семейство соответствующих собственных функций, ортонормированных относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$, которое определяется в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Система функций $\{\varphi_k\}$ образует ортонормированный базис в пространстве \mathcal{H} .

Следуя методу Галеркина – Петрова, будем искать приближенное решение в виде суммы

$$\tilde{x}(s, t) = x^m(s, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) \varphi_k(s), \quad (4.3.4)$$

где $m \in \mathbb{N}$ необходимо брать $m > l$, где $l = \dim \ker L$ (чтобы учесть эффекты вырожденного уравнения).

Представим правую часть уравнения в виде

$$\tilde{u}(s, t) = \sum_{k=1}^m \langle u(s, t), \varphi_k(s) \rangle \varphi_k(s) = \sum_{k=1}^m u_k(t) \varphi_k(s). \quad (4.3.5)$$

Подставим галеркинские суммы (4.3.4) в уравнение (4.3.1). Затем скалярно умножим полученное уравнение на собственные функции $\varphi_i(s)$, $i = 1, \dots, N$ и

получим систему уравнений относительно неизвестных $a_k(t)$

$$\langle Lx_t^m, \varphi_i \rangle + \langle Mx^m, \varphi_i \rangle + \left\langle \sum_{j=1}^k N_j(x^m), \varphi_i \right\rangle = \langle u, \varphi_i \rangle, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.3.6)$$

При этом, в зависимости от параметра λ (в силу теорем 2.1.1, 2.1.3, 2.2.1, 2.2.3 в зависимости от случая), уравнения в этой системе могут получиться дифференциальными или алгебраическими. Рассмотрим эти случаи подробнее:

(i) Если $\lambda \notin \sigma(L)$, то уравнения системы (4.3.6) – обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Для решения этой системы относительно $a_k(t), k = 1, \dots, m$ из условий (4.3.2), умножив их скалярно в \mathcal{H} на собственные функции $\varphi_k(s), k = 1, \dots, m$, найдем m начальных условий. Далее численно решается полученная система нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями, и находятся неизвестные функциональные коэффициенты $a_k(t), k = 1, \dots, m$ в приближенном решении $\tilde{x}(s, t) = x^m(s, t)$.

(ii) Если $\lambda \in \sigma(L)$, где l – кратность первого собственного значения оператора C , тогда уравнения системы (4.3.6) с номерами $1_1, \dots, 1_l$ будут алгебраическими, а остальные – дифференциальными. Рассмотрим отдельно системы, составленные из дифференциальных уравнений первого порядка и из алгебраических уравнений. Начальные условия получим аналогично случаю (i). Если рассматриваем задачу Коши (4.3.1), (4.3.3), то решение задачи будет существовать, согласно теоремам 2.1.1 или 2.1.3, лишь при начальной функции $x_0(s)$, принадлежащей фазовому пространству (2.1.5). Тогда исключаем начальные условия, соответствующие $a_{1_j}(0), j = 1, \dots, l$ (они выполняются автоматически), и решаем алгебро-дифференциальную систему численно. Если же начальные функции не принадлежат фазовому пространству, то задача Коши (4.3.1), (4.3.3), согласно теоремам 2.1.1 или 2.1.3, решения не имеет. В случае задачи Шоултера – Сидорова (4.3.2), (4.3.3) в силу теорем 2.2.1, 2.2.3 решение существует при любых начальных функциях. Исключаем начальные условия, соответствующие $a_{1_j}(0), j = 1, \dots, l$, и решаем алгебро-

дифференциальную систему численно.

Алгоритм нахождения приближенного решения задачи Коши (4.3.1), (4.3.3) сводится к пяти этапам.

Этап 1. Нахождение собственных значений и собственных функций для оператора L , то есть решение задачи

$$\langle L\varphi, v \rangle = \lambda \langle \varphi, v \rangle$$

с соответствующими граничными условиями.

Этап 2. Нахождение числа m , начиная с которого можно вычислять приближенное решение из условия: $m > l$, $l = \dim \ker L$.

Этап 3. Проверка по заданному параметру λ , к какому из двух случаев относится математическая модель (вырожденный или невырожденный случай).

Этап 4. Построение фазового многообразия уравнения. Проверка существования решения.

Этап 5. Вычисление приближенного решения с помощью модифицированного метода Галеркина – Петрова по заданной начальной функции (в зависимости от случаев (i), (ii)).

Замечание 4.3.1. Алгоритм нахождения приближенного решения задачи Шоултера – Сидорова (4.3.2), (4.3.3) строится аналогично алгоритму нахождения приближенного решения задачи Коши за исключением четвертого этапа (проверки существования решения).

4.4. Алгоритм численного метода нахождения оптимального управления на основе метода декомпозиции

Нас интересует процесс управления решениями задачи Коши

$$x(0) = x_0 \tag{4.4.1}$$

или задачи Шоултера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \tag{4.4.2}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u, \quad (4.4.3)$$

где функция $u = u(s, t)$ характеризует внешнее управляющее воздействие. Алгоритм нахождения приближенного решения задачи (4.4.1), (4.4.3) и задачи (4.4.2), (4.4.3) на основе метода Галеркина – Петрова был описан в п. 4.3. В силу возможного вырождения уравнения (4.4.3) нами был модифицирован численный метод Галеркина – Петрова.

Нашей целью является нахождение приближенного решения задачи оптимального управления

$$J(x, u) \rightarrow \inf \quad (4.4.4)$$

решениями задачи (4.4.1), (4.4.3) и задачи (4.4.2), (4.4.3), где функционал стоимости задан в виде

$$J(x, u) = \beta \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + (1 - \beta) \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{H}}^2 dt, \quad \beta \in (0, 1), \quad (4.4.5)$$

где $z_d = z_d(t)$ – желаемое состояние системы, которое требуется достичь при помощи управления.

Опишем алгоритм численного решения задачи (4.4.1), (4.4.3), (4.4.4) и задачи (4.4.2) – (4.4.4), построенный на основе модифицированных методов Галеркина – Петрова и Ритца.

Обозначим через $\sigma(L)$ спектр оператора L . В силу свойств оператора L его спектр $\sigma(L)$ неотрицателен, дискретен, конечноократен и сгущается только к $+\infty$. Обозначим через $\{\lambda_i\}$ множество собственных значений, занумерованных по неубыванию с учетом кратности, а через $\{\varphi_i\}$ – семейство соответствующих собственных функций, ортонормированных относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из \mathcal{H} . Они образуют ортонормированный базис в пространстве \mathcal{H} .

Приближенное решение $\tilde{x}(s, t)$ задачи (4.4.1), (4.4.3) и задачи (4.4.2), (4.4.3)

будем искать в виде суммы

$$\tilde{x}(s, t) = x^m(s, t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \varphi_i(s), \quad (4.4.6)$$

где $m \in \mathbb{N}$ необходимо в силу теорем 2.1.1, 2.1.3, 2.2.1, 2.2.3 (в зависимости от случая) брать $m > l$, где $l = \dim \ker L$ (чтобы учесть эффекты вырожденного уравнения).

Представим правую часть уравнения (4.4.3) в виде

$$\tilde{u}(s, t) = \sum_{i=1}^m \langle u(s, t), \varphi_i(s) \rangle \varphi_i(s) = \sum_{i=1}^m u_i(t) \varphi_i(s). \quad (4.4.7)$$

Подставим галеркинские суммы (4.4.6) и (4.4.7) в уравнение (4.4.3). Получим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\langle Lx_t^m, \varphi_i \rangle + \langle Mx^m, \varphi_i \rangle + \left\langle \sum_{j=1}^k N_j(x^m), \varphi_i \right\rangle = \langle u, \varphi_i \rangle, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.4.8)$$

При этом, в зависимости от параметра λ , уравнения в этой системе могут получиться дифференциальными или алгебраическими. В силу нелинейности уравнений мы не сможем явно получить зависимость $a_i(t)$ от $a_j(t)$, $i = 1, \dots, m$, $i \neq j$ и $u_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, что не позволит нам решать задачу нахождения минимума функционала относительно $u_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, как это можно было бы сделать в линейном случае [181]. Поэтому прежде чем переходить к последовательным приближениям метода Галеркина – Петрова, мы произведем декомпозицию уравнения (4.4.2), при помощи которой произойдет линеаризация уравнения, а затем введем функционал штрафа, позволяющий найти приближенное решение исходной задачи. Для этого введем в уравнение (4.4.3) неизвестную функцию $v(s, t)$ такую, что

$$L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(v) = u, \quad x(s, t) = v(s, t). \quad (4.4.9)$$

Уравнения в (4.4.9) являются линейными относительно функции $x(s, t)$. В силу второго равенства в (4.4.9) функционал качества (4.4.5) эквивалентен

функционалу

$$\begin{aligned} J(x, u) = J_\theta(x, u, v) &= \theta \cdot \beta \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + \\ &+ (1 - \theta) \cdot \beta \int_0^T \|v(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + (1 - \beta) \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{H}^*}^2 dt, \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

где константы $\theta \in (0, 1)$. В силу теоремы 4.1.2 решение задачи (4.4.1), (4.4.3), (4.4.4) и задачи (4.4.2) – (4.4.4) с функционалом качества (4.4.5) эквивалентно решению задачи (4.4.1), (4.4.4), (4.4.9) и задачи (4.4.2), (4.4.4), (4.4.9) с функционалом качества (4.4.10).

Для нахождения требуемого приближенного решения будем использовать метод штрафа. Зададим функционал качества в виде

$$\begin{aligned} J_\theta^\varepsilon(x, v, u) &= \theta \cdot \beta \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + (1 - \theta) \cdot \beta \int_0^T \|v(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + \\ &+ (1 - \beta) \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{B}_k^*}^2 dt + r_\varepsilon \int_0^T \|x(t, v, u) - v(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt, \quad \theta \in (0, 1). \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Тогда поставленная задача сводится к поиску тройки минимизирующих функций (x, v, u) .

Опишем алгоритм нахождения приближенного решения задачи (4.4.1), (4.4.4), (4.4.9) и задачи (4.4.2), (4.4.4), (4.4.9) на основе модифицированных методов декомпозиции, Галеркина – Петрова и Ритца. Для этого представим $\tilde{v}(s, t)$ в виде суммы

$$\tilde{v}(s, t) = v^m(s, t) = \sum_{i=1}^m v_i(t) \varphi_i(s). \quad (4.4.12)$$

Подставим галеркинские суммы (4.4.6), (4.4.7), (4.4.12) в уравнение (4.4.9). Получим дифференциальное уравнение

$$L \dot{\tilde{x}} + M \tilde{x} + \sum_{j=1}^k N_j(\tilde{v}) = \tilde{u}. \quad (4.4.13)$$

Затем умножим полученное уравнение (4.4.13) скалярно в \mathcal{H} на собственные функции $\varphi_i(s), i = 1, \dots, m$, и получим систему уравнений

$$\langle Lx_t^m, \varphi_i \rangle + \langle Mx^m, \varphi_i \rangle + \left\langle \sum_{j=1}^k N_j(v^m), \varphi_i \right\rangle = \langle u^m, \varphi_i \rangle, \quad (4.4.14)$$

$i = 1, \dots, m$.

Замечание 4.4.1. В случае задачи Коши (4.4.1), (4.4.9), (4.4.4) пространство управления определяется следующим образом:

$$\mathfrak{U} = \{u \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*) : (\mathbb{I} - Q)u = 0\}.$$

Поэтому в случае $\lambda \in \sigma(L)$ $u_{1_j}(t) = 0, j = 1, \dots, l$. В случае задачи Шоуолтера – Сидорова (4.4.2), (4.4.9), (4.4.4) пространство управления

$$\mathfrak{U} = L_2(0, T; \mathfrak{H}^*),$$

и никаких дополнительных условий не накладывается.

В зависимости от параметра λ (в силу теорем 2.1.1, 2.1.3, 2.2.1, 2.2.3 в зависимости от случая) уравнения системы (4.4.14) могут получиться дифференциальными или алгебраическими.

Рассмотрим эти случаи подробнее:

(i) Если $\lambda \notin \sigma(L)$, то в этом случае все уравнения системы (4.4.14) будут обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка. Для решения этой системы, относительно $a_i(t), i = 1, \dots, m$, из условий (4.4.1) или (4.4.2), умножив их скалярно в \mathcal{H} на собственные функции $\varphi_i(s), i = 1, \dots, m$, найдем m начальных условий. Далее решается полученная система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями, и выражаются неизвестные функциональные коэффициенты $a_j(t), j = 1, \dots, m$ в приближенном решении $\tilde{x}(s, t) = x^m(s, t)$ через $a_i(t), i = 1, \dots, m, i \neq j$, $v_i(t), i = 1, \dots, m$, $u_i(t), i = 1, \dots, m$.

(ii) Если $\lambda \in \sigma(L)$, где l – кратность первого собственного значения оператора C , тогда уравнения системы (4.4.14) с номерами $1_1, \dots, 1_l$ будут алгебраическими, а остальные – дифференциальными. Рассмотрим отдельно

системы, составленные из дифференциальных уравнений первого порядка и алгебраических уравнений.

(ii a) Для нахождения решения системы алгебро-дифференциальных уравнений относительно $a_i(t), i = 1, \dots, m$, из условия Коши (4.4.1) найдем начальные условия. Для этого скалярно умножим начальную функцию $x_0(s)$ в \mathcal{H} на собственные функции $\varphi_i(s), i = 1, \dots, m$ и найдем m начальных условий. Решение задачи будет существовать, согласно теореме 2.1.1 или 2.1.3, лишь при начальной функции x_0 , принадлежащей фазовому многообразию (2.1.5). Тогда исключаем начальные условия, соответствующие $a_{1_j}(0), j = 1, \dots, l$ (они выполняются автоматически), и решаем алгебро-дифференциальную систему. Из полученной системы линейных алгебро-дифференциальных уравнений первого порядка выражаются неизвестные функциональные коэффициенты $a_i(t), i = 1, \dots, m$ в приближенном решении $\tilde{x}(s, t) = x^m(s, t)$ через $v_i(t), i = 1, \dots, m, u_i(t), i = 1, \dots, m$. Если же начальные функции не принадлежат фазовому пространству, то задача Коши (4.4.1), (4.4.3), согласно теореме 2.1.1 или 2.1.3, решения не имеет.

(ii b) Для решения системы алгебро-дифференциальных уравнений относительно $a_i(t), i = 1, \dots, m$ из условия Шоултера – Сидорова (4.4.2) найдем $m - l$ начальных условий. В силу теоремы 2.2.1 или 2.2.3 решение алгебро-дифференциальной системы существует при любых начальных функциях. Исключаем начальные условия, соответствующие $a_{1_j}(0), j = 1, \dots, l$, и решаем алгебро-дифференциальную систему. Далее выражаются неизвестные функциональные коэффициенты $a_i(t), i = 1, \dots, m$ в приближенном решении $\tilde{x}(s, t) = x^m(s, t)$ через $v_i(t), i = 1, \dots, m, u_i(t), i = 1, \dots, m$.

(iii) Перейдем к нахождению минимума функционала. Для этого подставим получившееся представление для $\tilde{x}(s, t) = x^m(s, t)$ и (4.4.7), (4.4.12) в функционал (4.4.11). Затем, опираясь на метод Ритца, будем искать неиз-

вестные $v_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, $u_i(t)$, $i = r, \dots, m$ в виде

$$v_i(t, N) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right), \quad u_i(t, N) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right) \quad (4.4.15)$$

или

$$v_i(t, N) = \sum_{n=0}^N b_n t^n, \quad u_i(t, N) = \sum_{n=0}^N c_n t^n, \quad (4.4.16)$$

выбирая коэффициенты b_n и c_n так, чтобы функции $v_i(t, N)$, $u_i(t, N)$ доставляли минимум функционалу (4.4.11). Таким образом, задача свелась к отысканию экстремума функции $2N$ переменных.

Алгоритм нахождения приближенного решения задачи Коши (4.4.1), (4.4.3), (4.4.4) сводится к шести этапам.

Этап 1. Нахождение собственных значений и собственных функций для оператора L , то есть решение задачи

$$\langle L\varphi, v \rangle = \lambda \langle \varphi, v \rangle$$

с соответствующими граничными условиями.

Этап 2. Нахождение числа m , начиная с которого можно вычислять приближенное решение из условия: $m > l$, $l = \dim \ker L$.

Этап 3. Проверка по заданному параметру λ , к какому из двух случаев относится математическая модель (вырожденный или невырожденный случай). Проверка существования решения.

Этап 4. По заданным начальным функциям, в зависимости от случаев (i), (ii), выражаем $a_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ в приближенном решении $\tilde{x}(s, t) = x^m(s, t)$ через $v_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, $u_i(t)$, $i = 1, \dots, m$.

Этап 5. Представление неизвестных функций $v_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, $u_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ через разложение (4.4.15) или (4.4.16) в функционал качества (4.4.11).

Этап 6. Нахождение минимума функционала и функций $\tilde{x}(s, t)$, $\tilde{v}(s, t)$, $\tilde{u}(s, t)$.

4.5. Алгоритм численного метода нахождения оптимального управления на основе метода покоординатного спуска

Нас интересует процесс управления решениями задачи Коши

$$x(0) = x_0 \quad (4.5.1)$$

или задачи Шоуолтера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \quad (4.5.2)$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u, \quad (4.5.3)$$

где функция $u = u(s, t)$ характеризует внешнее управляемое воздействие. Алгоритм нахождения приближенного решения задачи (4.5.1), (4.5.3) и задачи (4.5.2), (4.5.3) на основе метода Галеркина – Петрова был описан в п. 4.3. В силу возможного вырождения уравнения (4.5.3) нами был модифицирован данный численный метод.

Нашей целью является нахождение приближенного решения задачи оптимального управления

$$J(x, u) \rightarrow \inf \quad (4.5.4)$$

решениями задачи (4.5.1), (4.5.3) и задачи (4.5.2), (4.5.3), где функционал стоимости задан в виде

$$J(x, u) = \beta \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + (1 - \beta) \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{H}}^2 dt, \quad \beta \in (0, 1), \quad (4.5.5)$$

где $z_d = z_d(t)$ – желаемое состояние системы, которое требуется достичь при помощи управления.

Опишем алгоритм численного решения задачи (4.5.1), (4.5.3), (4.5.4) и задачи (4.5.2) – (4.5.4), построенный на основе модифицированных методов Галеркина – Петрова и многошагового покоординатного спуска с памятью.

Аналогично п. 4.4 обозначим через $\sigma(L)$ спектр оператора L . В силу свойств оператора L его спектр $\sigma(L)$ неотрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к ∞ . Обозначим через $\{\lambda_i\}$ множество собственных значений, занумерованных по неубыванию с учетом кратности, а через $\{\varphi_i\}$ – семейство соответствующих собственных функций, ортонормированных относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из \mathcal{H} , образующих ортонормированный базис в пространстве \mathcal{H} .

Приближенное решение $\tilde{x}(s, t)$ задачи (4.5.1), (4.5.3) и задачи (4.5.2), (4.5.3) будем искать в виде суммы

$$\tilde{x}(s, t) = x^m(s, t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \varphi_i(s), \quad (4.5.6)$$

где $m \in \mathbb{N}$ необходимо в силу теорем 2.1.1, 2.1.3, 2.2.1, 2.2.3 (в зависимости от случая) брать $m > l$, где $l = \dim \ker L$ (чтобы учесть эффекты вырожденного уравнения).

Представим правую часть уравнения (4.5.3) в виде

$$\tilde{u}(s, t) = \sum_{i=1}^m \langle u(s, t), \varphi_i(s) \rangle \varphi_i(s) = \sum_{i=1}^m u_i(t) \varphi_i(s). \quad (4.5.7)$$

Подставим галеркинские суммы (4.5.6) и (4.5.7) в уравнение (4.5.3). Получим систему нелинейных алгебро-дифференциальных уравнений

$$\langle Lx_t^m, \varphi_i \rangle + \langle Mx^m, \varphi_i \rangle + \left\langle \sum_{j=1}^k N_j(x^m), \varphi_i \right\rangle = \langle u, \varphi_i \rangle, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.5.8)$$

Так как система (4.5.8) состоит из нелинейных уравнений, то выразить неизвестные $a_i(t)$ через управление $u_i(t)$ невозможно, что накладывает дополнительные трудности для нахождения решения задачи оптимального управления.

Подставим галеркинские суммы (4.5.6) и (4.5.7) в функционал стоимости (4.5.5) и получим

$$J(x^m, u^m) = \beta \int_0^T \|x^m(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + (1 - \beta) \int_0^T \|u^m(t)\|_{\mathfrak{H}}^2 dt. \quad (4.5.9)$$

После вычисления $\|x^m(\cdot, t) - z_d(\cdot, t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k}$ и $\|u^m(\cdot, t)\|_{\mathfrak{H}}^2$ функционал (4.5.9) преобразуется в определенный интеграл от функции, зависящей от неизвестных $a_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, $u_i(t)$, $i = r, \dots, m$, по отрезку $[0, T]$. Будем искать неизвестные $u_i(t)$, $i = r, \dots, m$ в виде

$$u_i(t, N) = \sum_{n=1}^N b_{in} \sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right) \quad (4.5.10)$$

или

$$u_i(t, N) = \sum_{n=0}^N b_{in} t^n, \quad (4.5.11)$$

выбирая коэффициенты b_{in} так, чтобы функции $u_i(t, N)$ доставляли минимум функционалу (4.5.9). Коэффициенты управления b_{in} образуют матрицу B размера $m \times (N + 1)$. Подставляем представления функций $u_i(t, N)$ (4.5.10) или (4.5.11) в систему уравнений (4.5.8) и функционал (4.5.9).

Для реализации численного алгоритма требуется вычисление определенных интегралов. Вычисление определенного интеграла осуществляется при помощи квадратурной формулы Гаусса

$$\int_0^T f(t) dt \approx \frac{T}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j f\left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2}\tau_j\right),$$

где τ_j – нули полинома Лежандра

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n],$$

а веса определяются формулой

$$\omega_j = \frac{2}{[P'_n(s_j)]^2 (1 - \tau_j)^2}.$$

Алгоритм нахождения приближенного решения задачи оптимального управления сводится к семи этапам.

Этап 1. Нахождение собственных значений и собственных функций для оператора L , то есть решение задачи

$$\langle L\varphi, v \rangle = \lambda \langle \varphi, v \rangle$$

с соответствующими граничными условиями.

Этап 2. Нахождение числа m , начиная с которого можно вычислять приближенное решение из условия: $m > l$, $l = \dim \ker L$.

Этап 3. Проверка по заданному параметру λ , к какому из двух случаев относится математическая модель (вырожденный или невырожденный случаи). Проверка существования решения осуществляется аналогично п. 4.4.

Этап 4. По заданным начальным функциям в зависимости от случаев (i), (ii) п. 4.4 составляем систему алгебро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных $a_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ и b_{in} , $i = 1, \dots, m$, $n = 1, \dots, N$.

Этап 5. Составляем матрицу управления B и подставляем ее в правую часть системы уравнений (4.5.8). На основе метода Эйлера численно находим неизвестные $a_i(\tau_j)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$.

Этап 6. В заданных точках $\tau_j \in [0, T]$ при заданных значениях b_{in} вычисляется значение функционала $J(x^m, u^m)$ (4.5.9).

Этап 7. Находится минимум функционала (4.5.9) и точка минимума $u^m = \text{col} \left(\sum_{n=0}^N b_{1n} t^n, \dots, \sum_{n=0}^N b_{mn} t^n \right)$ на основе алгоритма метода покоординатного спуска с памятью, предложенного А.В. Келлер [39]. Нахождение неизвестных b_{in} сводится к следующим подэтапам.

Этап 7.1. Задаются значения параметров, необходимых для расчета: максимальный шаг $h_{\max} > 0$, минимальный шаг $h_{\min} > 0$, величина допустимой погрешности вычисления функционала стоимости $\varepsilon > 0$, величина изменения шага $r \in (0, 1)$, начальное значение матрицы-управления B .

Этап 7.2. Обозначим через ρ номер итерации основного расчета ($\rho = 0, 1, \dots$); \hat{b}_{in}^ρ – коэффициенты функции $u_i(t)$, образующие матрицу $n \times (N + 1)$ на ρ -м шаге; J_ρ – приближенное значение функционала качества, вычисленное на ρ -м шаге. В каждой, начиная с первой и последовательно до последней, строке массива B определяется коэффициент \hat{b}_{in}^ρ , подлежащий изменению по следующей схеме:

1) Вычисление значения функционала J при заданной начальной матри-

це B .

2) Первым изменяется элемент b_{10} при неизменных значениях остальных элементов массива: $b_{10}^+ = b_{10} + h_{max}$ и $b_{10}^- = b_{10} - h_{max}$. Для каждого из этих двух значениях вычисляется значение функционала J_{10}^+ и J_{10}^- соответственно.

Если $J_{10}^+ > J_{10}$ и $J_{10}^- > J_{10}$, то значение b_{10} изменению не подлежит, переход к элементу b_{11} .

2) Если $J_{10}^+ < J_{10}$ или $J_{10}^- < J_{10}$, то $\tilde{J}_{10} = J_{10}^+$ ($\tilde{J}_{10} = J_{10}^-$) и $\tilde{b}_{10} = b_{10}^+$ ($\tilde{b}_{10} = b_{10}^-$). Затем изменяем значение элемента \tilde{b}_{10} : $\tilde{b}_{10}^+ = \tilde{b}_{10} + h_{max} \cdot r$ и $\tilde{b}_{10}^- = \tilde{b}_{10} - h_{max} \cdot r$. Если $\tilde{J}_{10}^+ > \tilde{J}_{10}$ и $\tilde{J}_{10}^- > \tilde{J}_{10}$, то $\hat{b}_{10} = \tilde{b}_{10}$ и $J_{10} = \tilde{J}_{10}$, затем происходит переход к элементу b_{11} .

3) Если $\tilde{J}_{10}^+ < \tilde{J}_{10}$ или $\tilde{J}_{10}^- < \tilde{J}_{10}$, то $\tilde{J}_{10} = \tilde{J}_{10}^+$ ($\tilde{J}_{10} = \tilde{J}_{10}^-$) и $\tilde{b}_{10} = \tilde{b}_{10}^+$ ($\tilde{b}_{10} = \tilde{b}_{10}^-$). И так далее изменяем значение элемента \tilde{b}_{10} до тех пор, пока $h_{max} \cdot r^i < h_{min}$, выполняется условие принадлежности множеству допустимых управлений или не происходит переход к следующему элементу строки.

Изменяя элементы b_{1j} при первоначальном значении всех остальных элементов, определяется, при каком значении \hat{b}_{1j} полученное значение J_{1j} наименьшее. Обозначим соответствующий элемент \hat{b}_{1j} , только он подлежит изменению в первой строке массива. Затем происходит переход к циклу по элементам второй строки и так далее. В результате получим новый массив, в каждой строке которого изменен один элемент. Именно этот, измененный массив и используется в основном расчете. При расчете для каждой строки фиксируется значение Δ_i шага, при котором достигается наименьшее значение функционала качества. При следующей итерации изменение элементов в i -той строке начинается не с h_{max} , а с Δ_i , что существенно увеличивает скорость расчетов.

Этап 7.3. Вычисляется значение функционала J_ρ по найденной матрице B .

Этап 7.4. Проверяем выполнение условия останова:

$$\left| J_k \left(\hat{b}_{ij}^\rho \right) - J_k \left(\hat{b}_{ij}^{\rho-1} \right) \right| < \varepsilon.$$

Если оно выполняется, то примем

$$b_{ij} = \hat{b}_{ij}^\rho, i = \overline{1, n}, j = \overline{0, N}$$

и

$$\hat{J} = J_\rho.$$

Таким образом, найдено значение $\tilde{u}_i(t)$, вычисляется значение $\tilde{a}_i(t)$, а затем $\tilde{x}(s, t)$.

Если условие останова не выполнено, переходим к этапу 7.2.

4.6. Описание программы численного решения задач Коши и Шоултера – Сидорова для полулинейных моделей соболевского типа

Программы «Численное моделирование процесса нелинейной диффузии» и «Численное моделирование неравновесной противоточной капиллярной пропитки в круге» предназначены для нахождения приближенного решения задач Коши и Шоултера – Сидорова для полулинейных моделей соболевского типа и реализуют алгоритмы, представленные в п. 4.3. Программа написана на языке Maple и реализована в системе компьютерной математики Maple 18.0.

Функциональное назначение

Программы «Численное моделирование процесса нелинейной диффузии» и «Численное моделирование неравновесной противоточной капиллярной пропитки в круге» предназначены для численного исследования задач Коши и Шоултера – Сидорова для полулинейных моделей соболевского типа с граничным условием Дирихле на отрезке, на граfe, в прямоугольнике, в круге в зависимости от заданных параметров уравнения и начальных данных. В программе реализованы метод фазового пространства, модифицированный метод Галеркина – Петрова, метод Рунге–Кутты 4-го порядка. В каждой из программ вычисляются собственные значения и собственные функции для

оператора Лапласа в соответствующей области, строится приближенное решение задачи в виде галеркинской суммы по некоторым первым собственным функциям, генерируется система алгебро-дифференциальных уравнений и соответствующих начальных условий. Программы позволяют находить численное решение задач Коши и Шоултера – Сидорова для полулинейных моделей соболевского типа, строить график приближенного решения.

Логическая структура программы

Опишем логическую структуру программы. В начале программы пользователю в диалоговом окне предлагается выбрать тип задачи в зависимости от области. По выбору пользователя запускается один из четырех модулей. Каждый из них включает в себя следующие этапы:

- ввод данных;
- нахождение собственных значений и собственных векторов;
- нахождение численного решения;
- вывод решения и его графика.

На рис. 4.6.1 представлена обобщенная схема алгоритма решения задачи Коши, а на рис. 4.6.2 представлена обобщенная схема алгоритма решения задачи Шоултера – Сидорова работы программ.

Шаг 1. Ввод данных осуществляется пользователем в диалоговом окне. Вводятся параметры уравнения; функция, задающая начальное условие; количество слагаемых t в приближенном решении. После выбора области, в которой ищется решение задачи вводятся ее параметры: в случае отрезка – длина; графа – длина ребер; круга – радиус; прямоугольника – длина и ширина.

Шаг 2. Нахождение решения задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в соответствующей области. Вычисляются собственные функции и собственные значения соответствующей задачи.

Шаг 3. Формирование приближенного решения в виде галеркинской сум-

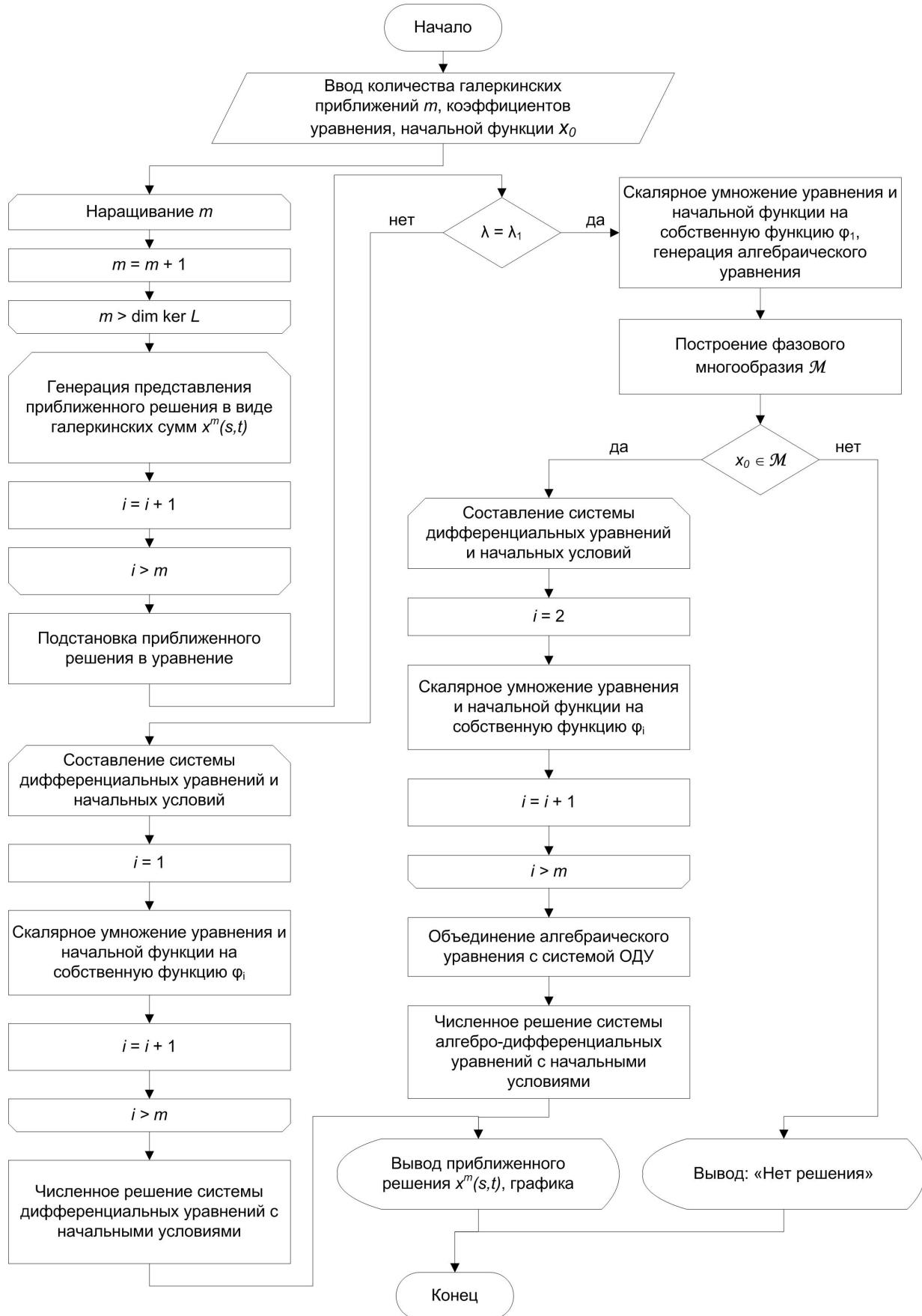


Рис. 4.6.1. Обобщенная схема алгоритма решения задачи Коши работы программ

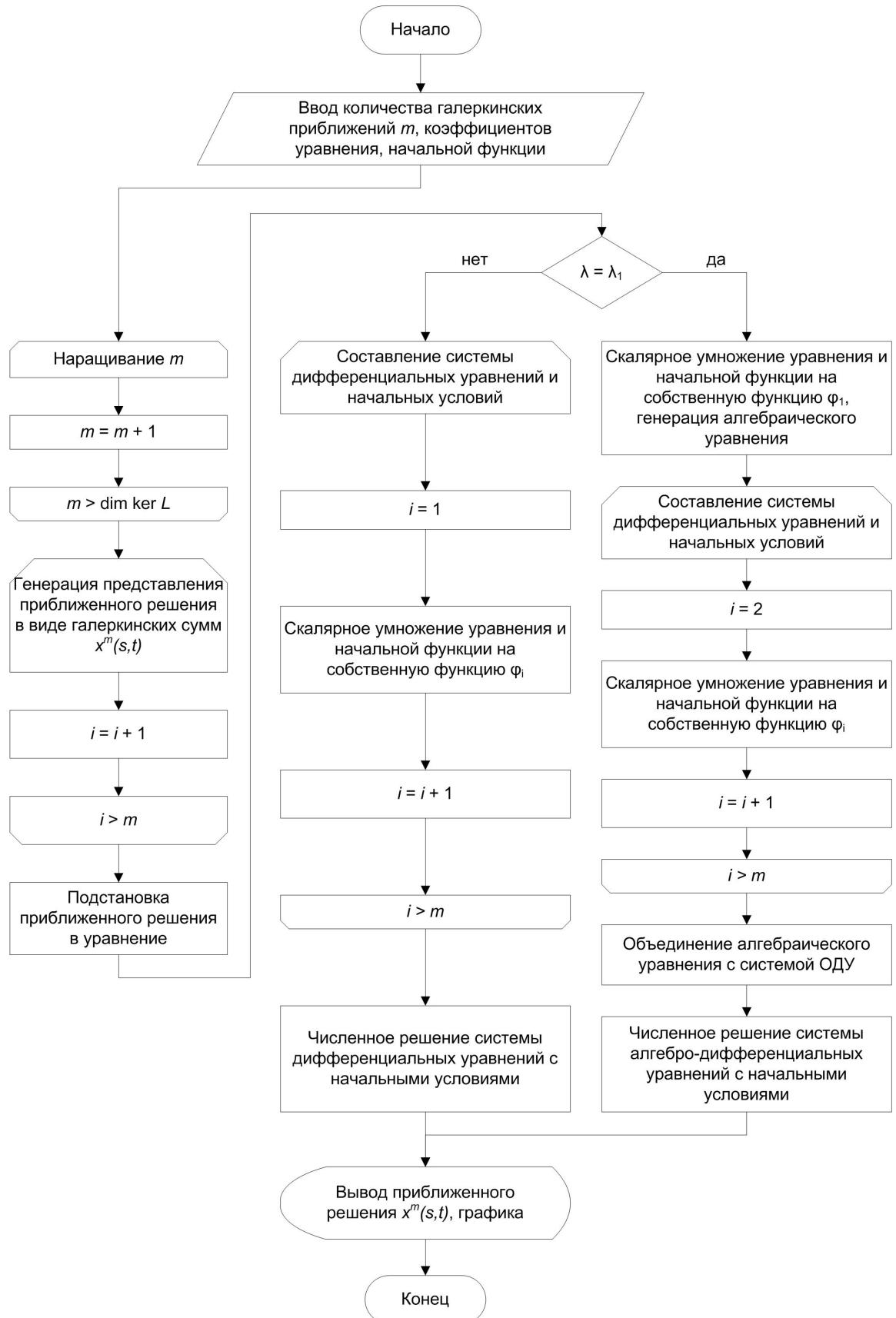


Рис. 4.6.2. Обобщенная схема алгоритма решения задачи Шоуолтера – Сидорова работы программ

мы осуществляется при помощи цикла **for()** от 1 до m :

$$\tilde{x}(s, t) = x^m(s, t) = \sum_{i=1}^m x_i(t) \varphi_i(s).$$

Шаг 4. Подстановка приближенного решения в уравнение осуществляется с помощью процедуры **subs** с помощью скалярного умножения получившегося уравнения на собственные функции $\varphi_i(s)$, генерируется система дифференциальных уравнений. Далее проверяется условие вырожденности $\lambda < \lambda_1$ ($\lambda > -\lambda_1$) уравнений, а именно, является ли λ собственным значением оператора Лапласа или нет. Если уравнение вырождено, то количество слагаемых приближенного решения увеличивается до тех пор, пока $m < \dim \ker L$. Генерируются система невырожденных дифференциальных уравнений и система алгебраических уравнений.

Шаг 5. Формируются начальные данные задачи при помощи разложения начальной функции по собственным функциям $\varphi_i(s)$.

Шаг 6. В случае задачи Коши строится фазовое пространство уравнения и производится проверка начальных условий на существование решения. Если начальные данные не принадлежат фазовому пространству, то программа выводит сообщение, что решений нет, и заканчивает работу. В случае условий Шоултера – Сидорова или, если начальные данные принадлежат фазовому пространству, переходим к следующему шагу.

Шаг 7. Формируется система алгебро-дифференциальных уравнений. Находится решение системы алгебро-дифференциальных уравнений с одним начальным условием для каждой неизвестной функции с помощью встроенной процедуры **dsolve** относительно неизвестных функций $a_i(t)$.

Шаг 8. Полученное решение выводится на экран в виде аналитического представления и графика.

Используемые технические средства

Для реализации разработанных алгоритмов использовались встроенные функции и стандартные операторы программного пакета Maple 18.0. Для со-

здания диалоговых окон подключен пакет **Maplets [Elements]**. При вычислении интегралов от специальных функций используется пакет **Integration Tools**. Графические изображения получены при помощи пакета **plots**. Автором создан файл для нахождения приближенного решения математических моделей соболевского типа на отрезке, на граfe, в прямоугольнике и в круге. Программа эксплуатируется на персональном компьютере платформы Intel, работает под управлением операционной системы Microsoft Windows.

Выходные данные

Выходными данными являются вывод на экран собственных значений и собственных функций, компонент приближенного решения $\tilde{x}(s, t)$, график решения в определенные промежутки времени.

Программный комплекс зарегистрирован в Реестре программ для ЭВМ [217, 218] (Приложение 1, 2).

4.7. Описание программы численного решения задачи оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа

Программа «Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей фильтрации» предназначена для нахождения приближенного решения задачи оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа и реализует алгоритм, представленный в п. 4.4. Программа написана на языке Maple и реализована в системе компьютерной математики Maple 18.0.

Функциональное назначение

Программа «Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей фильтрации» состоит из четырех модулей и предназначена для численного исследования задачи оптимального управления решениями задачи Шоултера – Сидорова или задачи Коши с граничным условием Дирихле на отрезке, на граfe, в прямоугольнике, в круге для полули-

нейных уравнений соболевского типа в зависимости от заданных параметров уравнения и начальных данных. В программе реализованы метод фазового пространства, модифицированный метод Галеркина – Петрова, метод декомпозиции и метод Ритца. В каждом из модулей вычисляются собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа в соответствующей области, производится декомпозиция уравнения, позволяющая линеаризовать уравнение состояния системы, строится приближенное решение модели и оптимального управления в виде галеркинской суммы по нескольким первым собственным функциям, генерируется функционал качества задачи и проводится нахождение минимума функционала на основе метода Ритца. Программа позволяет находить приближенное решение задачи оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа, получать приближенное решение задачи – пару состояния системы и управления – и строить график приближенного решения.

Логическая структура программы

Опишем логическую структуру программы. В начале программы пользователю в диалоговом окне предлагается выбрать тип задачи в зависимости от области. По выбору пользователя запускается один из четырех модулей. Каждый из них включает в себя следующие этапы:

- ввод данных;
- нахождение собственных значений и собственных векторов;
- декомпозиция исходного уравнения;
- построение функционала качества;
- минимизация функционала качества;
- нахождение приближенного решения;
- вывод решения и его графика.

На рис. 4.7.1, 4.7.2 представлены обобщенные схемы алгоритма работы модулей программ с условиями Коши и Шоултера – Сидорова соответственно.

Шаг 1. Ввод данных осуществляется пользователем в диалоговом окне.

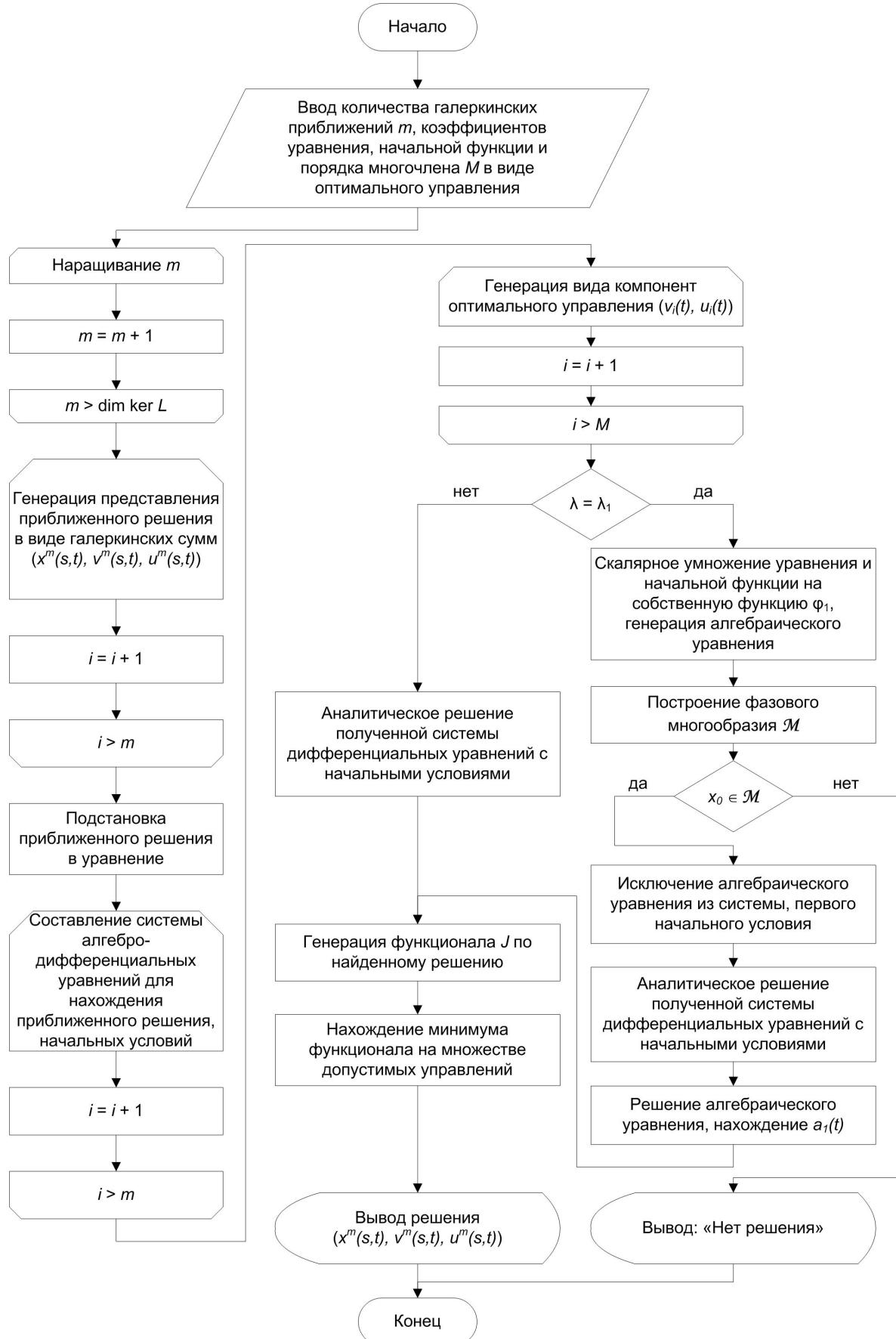


Рис. 4.7.1. Обобщенная схема алгоритма работы программы с условием Коши

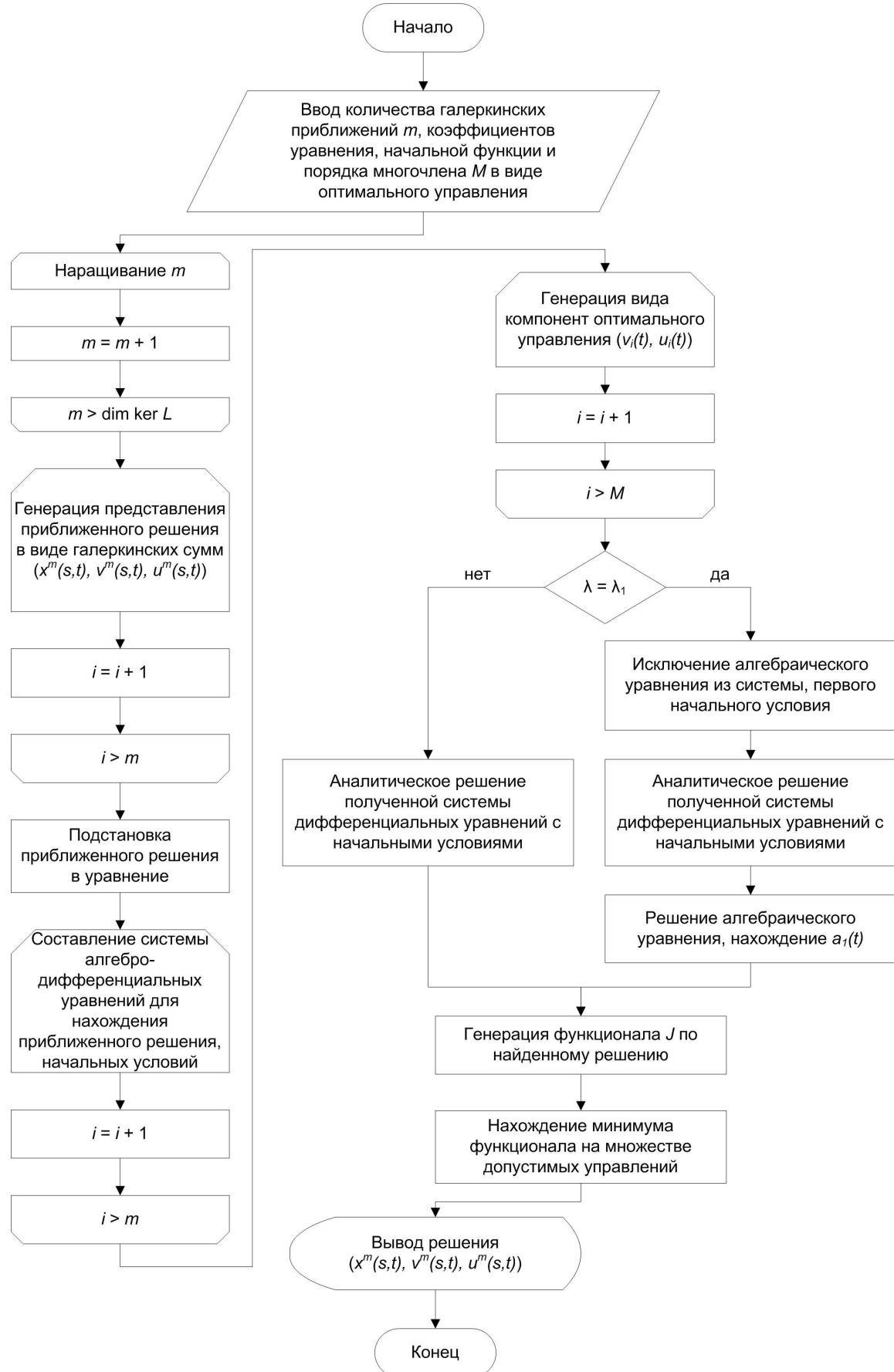


Рис. 4.7.2. Обобщенная схема алгоритма работы программы с условием Шоултера – Сидорова

Вводятся параметры уравнения; функция, задающая начальное условие; количество слагаемых m в приближенном решении. После выбора области, в которой ищется решение задачи, вводятся ее параметры: в случае отрезка – длина; графа – длина ребер; круга – радиус; прямоугольника – длина и ширина.

Шаг 2. Нахождение решения задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в соответствующей области. Вычисление собственных функций и собственных значений соответствующей задачи.

Шаг 3. Формирование приближенного решения и управления в виде галеркинской суммы осуществляется при помощи цикла **for()** от 1 до m :

$$\begin{aligned}\tilde{x}(s, t) &= x^m(s, t) = \sum_{i=1}^m x_i(t) \varphi_i(s), \\ \tilde{v}(s, t) &= v^m(s, t) = \sum_{i=1}^m v_i(t) \varphi_i(s), \\ \tilde{u}(s, t) &= \sum_{i=1}^m \langle u(s, t), \varphi_i(s) \rangle \varphi_i(s) = \sum_{i=1}^m u_i(t) \varphi_i(s).\end{aligned}$$

Шаг 4. Подстановка приближенного решения в уравнение осуществляется с помощью процедуры **subs** с помощью скалярного умножения получившегося уравнения на собственные функции $\varphi_i(s)$, генерируется система дифференциальных уравнений. Далее проверяется условие вырожденности (невырожденности) уравнений, а именно, является ли λ собственным значением оператора Лапласа или нет. Если уравнение вырождено, то количество слагаемых приближенного решения увеличивается до тех пор, пока $m < \dim \ker L$. Генерируются система невырожденных дифференциальных уравнений и система алгебраических уравнений.

Шаг 5. Формируются начальные данные задачи при помощи разложения начальной функции по собственным функциям $\varphi_i(s)$.

Шаг 6. В случае задачи Коши строится фазовое пространство уравнения и производится проверка начальных условий на существование решения. Если начальные данные не принадлежат фазовому пространству, то программа

выводит сообщение, что решений нет, и заканчивает работу. В случае условий Шоуолтера – Сидорова или, если начальные данные принадлежат фазовому пространству, переходим к следующему шагу.

Шаг 7. Формируется система алгебро-дифференциальных уравнений. Находится решение системы алгебро-дифференциальных уравнений с одним начальным условием для каждой неизвестной функции с помощью встроенной процедуры **dsolve** относительно неизвестных функций $a_i(t)$, которые зависят от $u_i(t), v_i(t)$.

Шаг 8. Генерируется функционал качества относительно неизвестных $u_i(t), v_i(t)$ с использованием процедуры **subs**. Неизвестные компоненты управления приближаются при помощи многочленов. Строится выпуклое и замкнутое множество допустимых управлений.

Шаг 9. На заданном множестве управлений при помощи пакета **Optimization** и процедуры **Minimize()** находится минимум функционала, далее находится соответствующее состояние системы.

Шаг 10. Полученное решение выводится на экран в виде аналитического представления и графика.

Используемые технические средства

Для реализации разработанных алгоритмов использовались встроенные функции и стандартные операторы программного пакета Maple 18.0. Для создания диалоговых окон подключен пакет **Maplets [Elements]**. При вычислении интегралов от специальных функций используется пакет **Integration Tools**. Графические изображения получены при помощи пакета **plots**. Автоматом создан файл для нахождения приближенного решения математических моделей соболевского типа на отрезке, на графике, в прямоугольнике и в круге. Программа эксплуатируется на персональном компьютере платформы Intel, работает под управлением операционной системы Microsoft Windows.

Выходные данные

Выходными данными являются вывод на экран собственных значений и

собственных функций, компонент приближенного решения тройки $(\tilde{x}(s, t), \tilde{v}(s, t), \tilde{u}(s, t))$, график решения $\tilde{x}(s, t)$, $\tilde{v}(s, t)$ и $\tilde{u}(s, t)$ в определенные промежутки времени, а также минимальное значение функционала качества J .

Программный комплекс зарегистрирован в Реестре программ для ЭВМ [219].

4.8. Описание программы численного решения задачи оптимального управления на основе метода покоординатного спуска

Программа «Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа» предназначена для нахождения приближенного решения задачи оптимального управления для системы алгебро-дифференциальных уравнений с начальным условием Коши или Шоултера – Сидорова и реализует алгоритм, представленный в п. 4.5.

Программа написана на языке C++ с использованием компилятора Microsoft Visual Studio 2008. Язык C++ является современным языком программирования, позволяющим эффективно осуществлять работу алгоритмов любой сложности.

Функциональное назначение

Программа предназначена для нахождения численного решения задачи оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа с начальным условием Шоултера – Сидорова или Коши. Программа позволяет находить приближенное решение задачи оптимального управления для полулинейных моделей математической физики, заданных в виде системы алгебро-дифференциальных уравнений, получает приближенное решение задачи – пару состояния системы и управления. В программе реализованы методы фазового пространства решения начальной задачи для системы вырожденных дифференциальных уравнений при производной по времени и многошагового покоординатного перебора для нахождения минимума функци-

ционала. Начально-краевые задачи для уравнений в частных производных при помощи метода Галеркина – Петрова могут быть сведены к начальной задаче для системы вырожденных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Логическая структура программы

Опишем логическую структуру программы. В ее состав входят следующие модули:

- ввод данных;
- нахождение численного решения системы алгебро-дифференциальных уравнений;
- минимизация функционала качества;
- вывод решения – пары состояние системы и управление.

На рис. 4.8.1, 4.8.2 представлены обобщенные схемы алгоритма работы модулей программ с условиями Коши и Шоултера – Сидорова соответственно.

Шаг 1. Для начала работы программы пользователю необходимо сформировать систему алгебро-дифференциальных уравнений, состоящую из k алгебрических и $m - k$ дифференциальных уравнений. Для этого может быть использована программа «Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей фильтрации» (шаги 1 – 6).

Шаг 2. При помощи метода прямых переход от дифференциальных уравнений к разностным.

Шаг 3. Ввод данных осуществляется из конфигурационного текстового файла, задающего параметры расчета и имена файлов, из которых загружаются необходимые массивы. Пользователь помещает в папку с программой файл gauss51.txt (файл с корнями уравнения Лежандра и весами квадратурной формулы Гаусса для вычисления определенного интеграла) и файл a.txt (файл, содержащий матрицу-управление B с коэффициентами при соответствующей степени многочлена). Также входными являются следующие

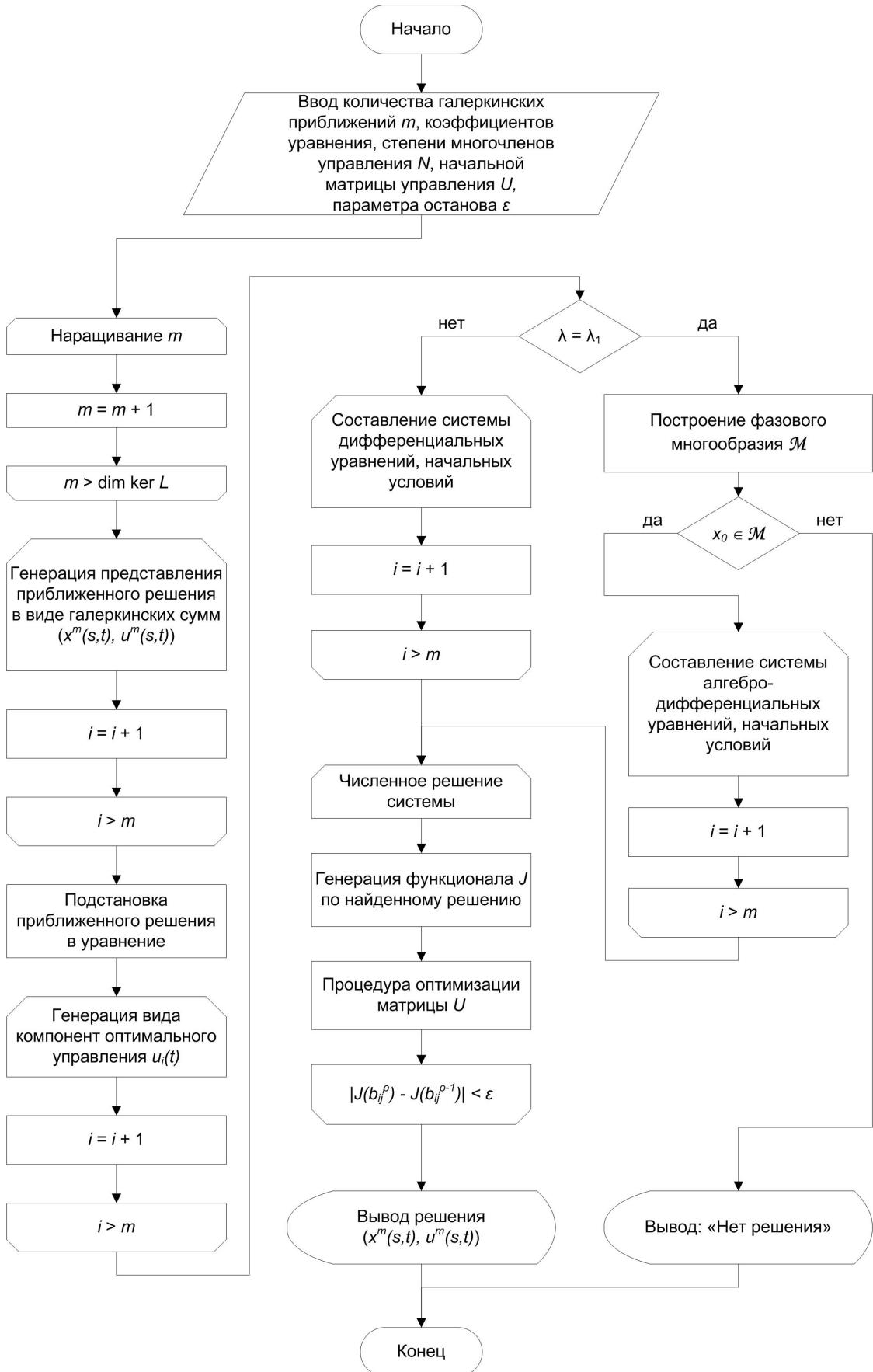


Рис. 4.8.1. Обобщенная схема алгоритма работы программы с условием Коши

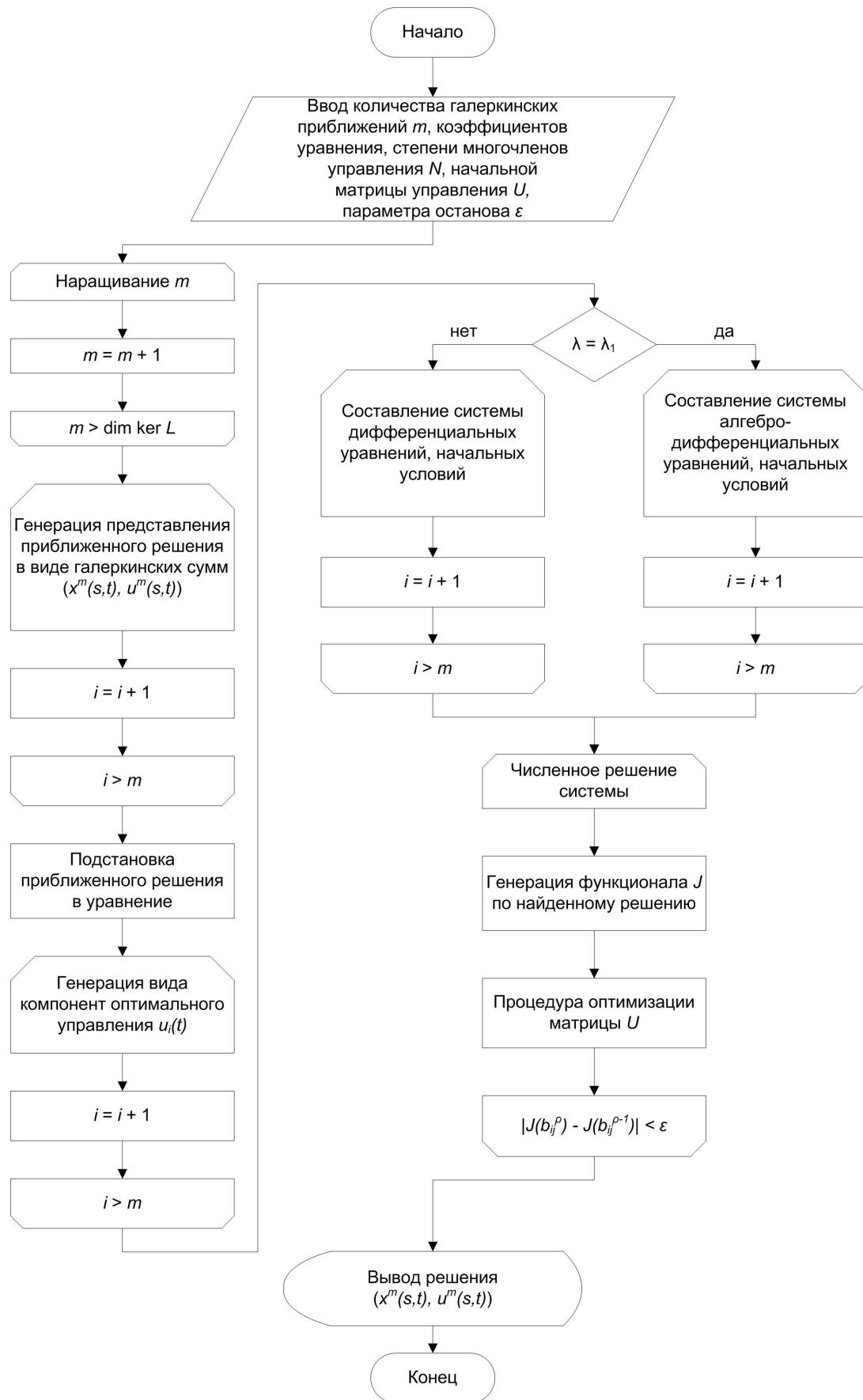


Рис. 4.8.2. Обобщенная схема алгоритма работы программы с условием Шоултера – Сидорова

данные: система разностных уравнений; начальные условия; функционал качества; значения параметров расчета – минимальный h_{min} и максимальный h_{max} шаги изменения элементов матрицы (b_{ij}) ; коэффициент изменения шага r ; τ – правая граница отрезка, на котором рассматривается задача; η – порядок квадратурной формулы Гаусса.

Шаг 4. Считывается матрица управления B и узлы квадратурной формулы Гаусса. Производится формирование значения массива управления и подстановка его в систему разностных уравнений.

Шаг 5. При помощи подпрограммы производится расчет приближенного решения системы – значения матрицы-состояния X .

Шаг 6. Вычисляется значение функционала качества J . Запоминается значение функционала и ищется следующий оптимальный шаг.

Шаг 7. Цикл повторяется до тех пор, пока разница значений функционала на i и $i + 1$ шагах не будет меньше требуемого значения. Если условие останова выполнено, то программа заканчивает работу и формирует файл с решением, если нет, то переходит к шагу 4.

Используемые технические средства

Программа эксплуатируется на персональном компьютере платформы Intel, работает под управлением операционной системы Microsoft Windows. Для представления чисел используется вещественный тип двойной точности (long double). Для величин такого типа под порядок и мантиссу отводится 11 и 52 разряда соответственно. Длина мантиссы определяет точность числа, а длина порядка – его диапазон.

Выходные данные

Вывод результатов расчета: пары $(\tilde{x}(s, t), \tilde{u}(s, t))$ в определенные промежутки времени, а также минимального значения функционала стоимости J осуществляется в текстовый файл. В ходе работы программы выводится подробный протокол расчета.

Программа зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ [220].

Глава 5. Численное исследование математических моделей и задач оптимального управления для процессов фильтрации и деформации

5.1. Численное решение задач Шоуолтера – Сидорова и Коши для математических моделей упругости

В цилиндре $Q_T = (0, l) \times (0, T)$, $T > 0$ рассмотрим условие Дирихле

$$x(s, t) = 0, (s, t) \in (0, l) \times (0, T) \quad (5.1.1)$$

и условие Шоуолтера – Сидорова

$$(\lambda + \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, s \in (0, l) \quad (5.1.2)$$

или условие Коши

$$x(s, 0) = x_0(s) = 0, s \in (0, l) \quad (5.1.3)$$

для обобщенного уравнения Хоффа

$$(-\lambda - \Delta)x_t + \alpha x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^5 + \dots + \alpha_{k-1} x^{2k-1} + \alpha_k x^{2k+1} = u, \quad (5.1.4)$$

где функция $u = u(s, t)$ характеризует внешнее управляемое воздействие (боковая нагрузка), а оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{s^2}$. Представим правую часть уравнения (5.1.4) в виде

$$\tilde{u}(s, t) = \sum_{i=1}^m \langle u(s, t), \varphi_i(s) \rangle \varphi_i(s) = \sum_{i=1}^m u_i(t) \varphi_i(s). \quad (5.1.5)$$

Приближенное решение $\tilde{x}(s, t)$ задачи (5.1.1), (5.1.2), (5.1.4) и задачи (5.1.1), (5.1.3), (5.1.4) мы будем искать в виде суммы

$$\tilde{x}(s, t) = x^m(s, t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \varphi_i(s), \quad (5.1.6)$$

где $m \in \mathbb{N}$ необходимо брать таким, чтобы $m > \dim \ker L$, а $\{\varphi_i\}$ – множество всех решений задачи Штурма – Лиувилля на собственные значения

$$(\lambda - \Delta)X(s) = 0, s \in (0, l);$$

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Данная спектральная задача разрешима для счетного набора собственных чисел λ_i , причем функции $\{\varphi_i\}$ образуют ортонормальную с весом $\frac{2}{l}$ систему функций

$$\frac{2}{l} \int_0^l \varphi_i \varphi_l ds = \langle \varphi_i, \varphi_l \rangle = \begin{cases} 1, & l = i; \\ 0, & l \neq i, \end{cases}$$

где $\varphi_i = \varphi_i(s) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\frac{\pi i s}{l})$, а $\lambda_i = -i^2$.

На основе алгоритмов численных методов, представленных в п. 4.3, проведем вычислительные эксперименты, иллюстрирующие работу программ, описанных в п. 4.6.

Пример 5.1.1. Требуется найти приближенное решение задачи (5.1.1), (5.1.3), (5.1.4) при заданных начальных данных: $l = 1$, $m = 5$, $\lambda = \pi^2$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 4$, $\alpha_4 = 3$, $T = 2$,

$$x_0(s) = \sqrt{2}(-\frac{1}{2} \sin(3\pi s) - \frac{1}{3} \sin(2\pi s) + \frac{1}{4} \sin(\pi s))$$

и

$$u(s, t) = \sqrt{2}(\frac{109145165}{31850496} \sin(\pi s) + t \sin(2\pi s) + 4(t^2 + 1) \sin(3\pi s)).$$

В силу теоремы 3.4.3 существует единственное решение задачи (5.1.1), (5.1.3), (5.1.4) при $\lambda \geq \pi^2$ и $x_0 \in \mathfrak{M}$. Скалярно умножив (5.1.1) на функции $\varphi_i(s)$, $i = 1, \dots, 5$, получим систему алгебро-дифференциальных уравнений с начальными условиями

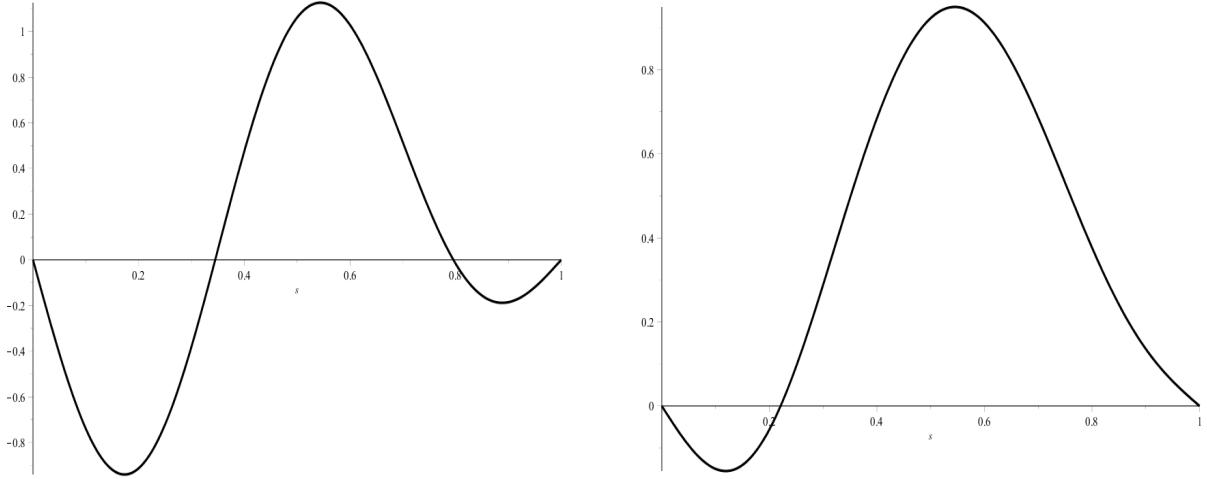
$$a_1(0) = 1/4, a_2(0) = -1/3, a_3(0) = -1/2, a_4(0) = 0, a_5(0) = 0.$$

В результате вычислений найдено приближенное решение задачи (5.1.1), (5.1.3), (5.1.4), представленное в табл. 5.3.1 (с точностью до 10^{-6}), которое в случае $t = 0$, $t = 2$ изображено на рис. 5.1.1.

Замечание 5.1.1. Для задачи, рассмотренной в примере 5.1.1, при различных количествах галеркинских приближений t была найдена вычислительная точность решений $\delta_{m_1, m_2} = \|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{l_{p_k}(0, l)}^{p_k}$. В случае $p_k = 8$,

Таблица 5.1.1

t	$a_1(t)$	$a_2(t)$	$a_3(t)$	$a_4(t)$	$a_5(t)$
0	0.250000	-0.333333	-0.500000	0	0
0.4	0.280082	-0.297320	-0.455271	-0.002090	-0.002230
0.8	0.315484	-0.263596	-0.408007	-0.004395	-0.004335
1.2	0.359570	-0.229464	-0.350668	-0.006702	-0.006277
1.6	0.415164	-0.193377	-0.276458	-0.008862	-0.007966
2.0	0.482696	-0.154331	-0.179111	-0.010747	-0.009251



a)

б)

Рис. 5.1.1. График численного решения задачи (5.1.1), (5.1.3), (5.1.4): а) в момент времени $t = 0$; б) в момент времени $t = 2$

$m_1 = 3, m_2 = 4$ при $t = 2$ получена вычислительная точность $\delta_{3,4} = 6.166157912 \cdot 10^{-14}$; $m_1 = 4, m_2 = 5$ при $t = 2$ получена вычислительная точность $\delta_{4,5} = 6.143309389 \cdot 10^{-16}$. Полученные результаты позволяют утверждать об вычислительной сходимости приближенных решений.

Пример 5.1.2. Требуется найти приближенное решение задачи (5.1.1), (5.1.2), (5.1.4) при заданных начальных данных: $l = \pi, m = 6, \lambda = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, T = 2$,

$$x_0(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin s + \sin(2s) + 4\sin(3s) - \sin(4s) + \sin(5s))$$

и

$$\begin{aligned} u(s, t) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2 \sin s + (3t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 2) \sin(2s) + \\ & +(1 + 0.5t + t^2 + 2t^3 + t^4 + t^5) \sin(3s) + (5t^5 + t^4 + 7t^3 + t^2 + t + 4) \sin(4s) + \\ & +(t^5 + t^4 + t^3 + 6t^2 + t + 1) \sin(5s)). \end{aligned}$$

В силу теоремы 3.3.1 при заданных параметрах задачи существует единственное решение задачи (5.1.1), (5.1.3), (5.1.4). Скалярно умножив (5.1.1) на функции $\varphi_i(s)$, $i = 1, \dots, 6$, получим систему алгебро-дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$a_2(0) = 1, a_3(0) = 4, a_4(0) = -1, a_5(0) = 1, a_6(0) = 0.$$

В результате вычислений найдено приближенное решение задачи (5.1.1), (5.1.2), (5.1.4), представленное в табл. 5.1.2 (с точностью до 10^{-6}), и в случае $t = 2$ на рис. 5.1.2.

Таблица 5.1.2

t	$a_1(t)$	$a_2(t)$	$a_3(t)$	$a_4(t)$	$a_5(t)$	$a_6(t)$
0	-0.138777	1	4	-1	1	0
0.4	0.013429	0.735675	2.79196	-0.692492	0.846784	-0.00133770
0.8	0.0977441	0.799004	2.27761	-0.440436	0.815123	-0.00162823
1.2	-0.184066,	1.31031	2.10847	0.0440608	0.912381	-0.0135984
1.6	-1.29926	2.80351	2.11763	1.32418	1.15061	-0.0666648
2.0	-2.24942	4.28734	1.89902	3.90555	1.34018	-0.170907

Пример 5.1.3. Требуется найти приближенное решение задачи (5.1.1), (5.1.3), (5.1.4) при начальных данных примера 5.1.2. В силу теоремы 3.4.3 при заданных параметрах решение задачи (5.1.1), (5.1.2), (5.1.4) не существует, поскольку начальная функция x_0 не принадлежит фазовому многообразию \mathfrak{M} , т.к. не выполнено

$$\frac{1}{2\pi}(3a_1(0)^3 - 12a_1(0)^2 + 96a_1(0) + 27 + 2a_1(0)\pi) = 2.$$

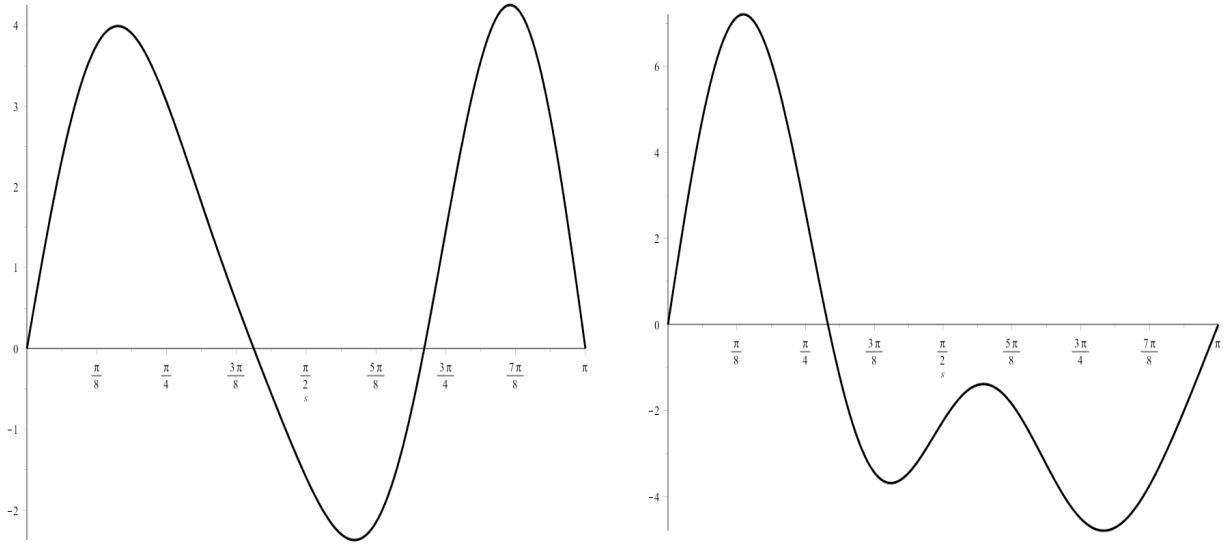


Рис. 5.1.2. График численного решения задачи (5.1.1), (5.1.3), (5.1.4): а) в момент времени $t = 0$; б) в момент времени $t = 2$

Рассмотрим конечный связный ориентированный граф $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$, где $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^N$ – множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}_{j=1}^N$ – множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и площадь поперечного сечения ребра $d_j > 0$. На графе \mathbf{G} рассмотрим уравнения

$$-\lambda x_{jt} - x_{jtss} + \alpha_j x_j + \alpha_j^1 x_j^3 + \dots + \alpha_j^k x_j^{2k+1} = u_j, \quad (5.1.7)$$

для всех $s \in (0, l_j)$, $t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, N}$.

Для уравнений (5.1.7) в каждой вершине V_i , $i = \overline{1, M}$ зададим краевые условия

$$\sum_{j:E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(0, t) - \sum_{r:E_r \in E^\omega(V_i)} d_r x_{rs}(l_r, t) = 0, \quad (5.1.8)$$

$$u_r(0, t) = u_j(0, t) = u_h(l_h, t) = u_m(l_m, t), \quad (5.1.9)$$

для всех $E_r, E_j \in E^\alpha(V_i)$, $E_h, E_m \in E^\omega(V_i)$. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i .

Если дополнить (5.1.8), (5.1.9) начальными условиями Коши

$$x_j(s, 0) = x_{0j}(s), \text{ для всех } s \in (0, l_j), \quad (5.1.10)$$

или начальными условиями Шоуолтера – Сидорова

$$(\lambda + \Delta)(x_j(s, 0) - x_{0j}(s)) = 0, \text{ для всех } s \in (0, l_j), \quad (5.1.11)$$

то мы получим задачу Коши – Неймана или задачу Шоуолтера – Сидорова – Неймана для уравнений (5.1.7).

Рассмотрим оператор

$$\langle Ax, z \rangle = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (x_{js}(s)z_{js}(s) + ax_j(s)z_j(s))ds,$$

где $a > 0$, $x, z \in \mathfrak{H}$, определенный на пространстве \mathfrak{H} . Обозначим через $\sigma(A)$ спектр оператора A . Напомним, что спектр $\sigma(A)$ неотрицателен, дискретен, конечноократен и сгущается только к ∞ . Обозначим через $\{\lambda_k\}$ множество собственных значений, занумерованное по неубыванию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k = (\varphi_k^1, \dots, \varphi_k^N)\}$ – семейство соответствующих собственных функций, ортонормированных относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L_2(\Omega)$. Они образуют ортонормированный базис в пространстве \mathfrak{H} .

Обозначим через

$$\tilde{x}(s, t) = (\tilde{x}_1(s, t), \dots, \tilde{x}_j(s, t), \dots, \tilde{x}_N(s, t))$$

искомое приближенное решение задачи, где $\tilde{x}_j(s, t)$ – это приближенное решение на j -м ребре графа. Следуя методу Галеркина – Петрова, мы будем искать приближенное решение в виде суммы

$$\tilde{x}(s, t) = x^m(s, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) \varphi_k(s), \quad (5.1.12)$$

тогда приближенное решение на j -м ребре графа примет вид

$$\tilde{x}_j(s, t) = x_j^m(s, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) \varphi_k^j(s), \quad (5.1.13)$$

где $m \in \mathbb{N}$ необходимо брать таким, чтобы $m > l$, где $l = \dim \ker L$ (чтобы учесть эффекты вырожденного уравнения).

Представим правую часть j -го уравнения в виде

$$\tilde{u}_j(s, t) = \sum_{k=1}^m \langle u_j(s, t), \varphi_k(s) \rangle \varphi_k^j(s) = \sum_{k=1}^m u_k(t) \varphi_k^j(s). \quad (5.1.14)$$

Подставим галеркинские суммы (5.2.10) в соответствующее j -е уравнение (5.1.7). Получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m (-\lambda + \mu_k - a) a'_{kt} \varphi_k^j(s) + \alpha_j^1 \sum_{k=1}^m a_k(t) \varphi_k^j(s) + \alpha_j^2 \left(\sum_{k=1}^m a_k(t) \varphi_k^j(s) \right)^3 + \\ & + \dots + \alpha_j^k \left(\sum_{k=1}^m a_k(t) \varphi_k^j(s) \right)^{2k-1} \varphi_k^j(s) = \sum_{k=1}^m u_k(t) \varphi_k^j(s), \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Умножим полученную систему скалярно в $L_2(\mathbf{G})$ на собственные функции $\varphi_k(s), k = 1, \dots, N$ и получим систему уравнений относительно неизвестных $a_k(t)$. При этом, в зависимости от параметра λ (в силу теоремы 3.4.1), уравнения в этой системе могут получиться дифференциальными или алгебраическими.

На основе алгоритмов численных методов, представленных в п. 4.3, проведем вычислительные эксперименты иллюстрирующие работу программ, описанных в п. 4.6.

Пример 5.1.4. Требуется найти приближенное решение задачи (5.1.7) – (5.1.9), (5.1.11) на ориентируемом графе \mathbf{G} , состоящем из двух последовательно соединенных ребер и трех вершин (см. рис. 5.1.3), при параметрах задачи: $k = 4$, $\lambda = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $l_1 = \pi$, $l_2 = \pi$, $N = 2$ и начальных функциях

$$x_{01}(s) = 1 - \cos(s) + \cos\left(\frac{1}{2}s\right) + \cos\left(\frac{3}{2}s\right), \quad x_{02}(s) = 2 \cos(s) - \sin\left(\frac{1}{2}s\right),$$

$$u_1(s) = 1 - \cos(s) + \cos\left(\frac{1}{2}s\right) + \cos\left(\frac{3}{2}s\right), \quad u_2(s) = 2 \cos(s) - \sin\left(\frac{1}{2}s\right).$$

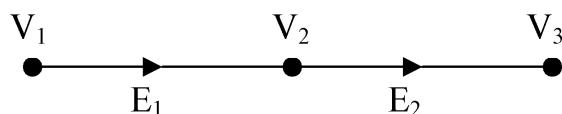


Рис. 5.1.3. Граф \mathbf{G}

В работе [32] были получены собственные функции и собственные значения

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= (\varphi_0^1, \varphi_0^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right), \quad \lambda_0 = 0; \\ \varphi_1 &= (\varphi_1^1, \varphi_1^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{x}{2}, -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{x}{2} \right), \quad \lambda_1 = -1/4; \\ \varphi_2 &= (\varphi_2^1, \varphi_2^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x \right), \quad \lambda_2 = -1\end{aligned}$$

задачи Штурма – Лиувилля для графа \mathbf{G}

$$X_1'' = \lambda X_1, \quad X_2'' = \lambda X_2,$$

$$X_1'(0) = X_2'(\pi) = 0, \quad X_1'(\pi) = X_2'(0),$$

$$X_1(\pi) = X_2(0).$$

В результате работы программы получено приближенное решение задачи (5.1.7) – (5.1.9), (5.1.11). На рис. 5.1.4 представлены графики решения при $t \in [0, 1]$ с шагом 0.2. Колебания в первом ребре изображены красным, во втором – зеленым.

5.2. Численное решение задачи оптимального управления для математических моделей упругости

Нас интересует процесс управления поведением двутавровой балки, находящейся под постоянной нагрузкой. Рассмотрим вопрос нахождения численного решения задачи оптимального управления для обобщенной математической модели Хоффа (5.1.1), (5.1.4). В цилиндре $Q_T = (0, l) \times (0, T)$, $T > 0$ рассмотрим обобщенную математическую модель Хоффа (5.1.1), (5.1.4) с начальным условием Коши (5.1.3) или условием Шоуолтера – Сидорова (5.1.2). Нашей целью является нахождение приближенного решения задачи оптимального управления

$$J(x, u) \rightarrow \inf \tag{5.2.1}$$

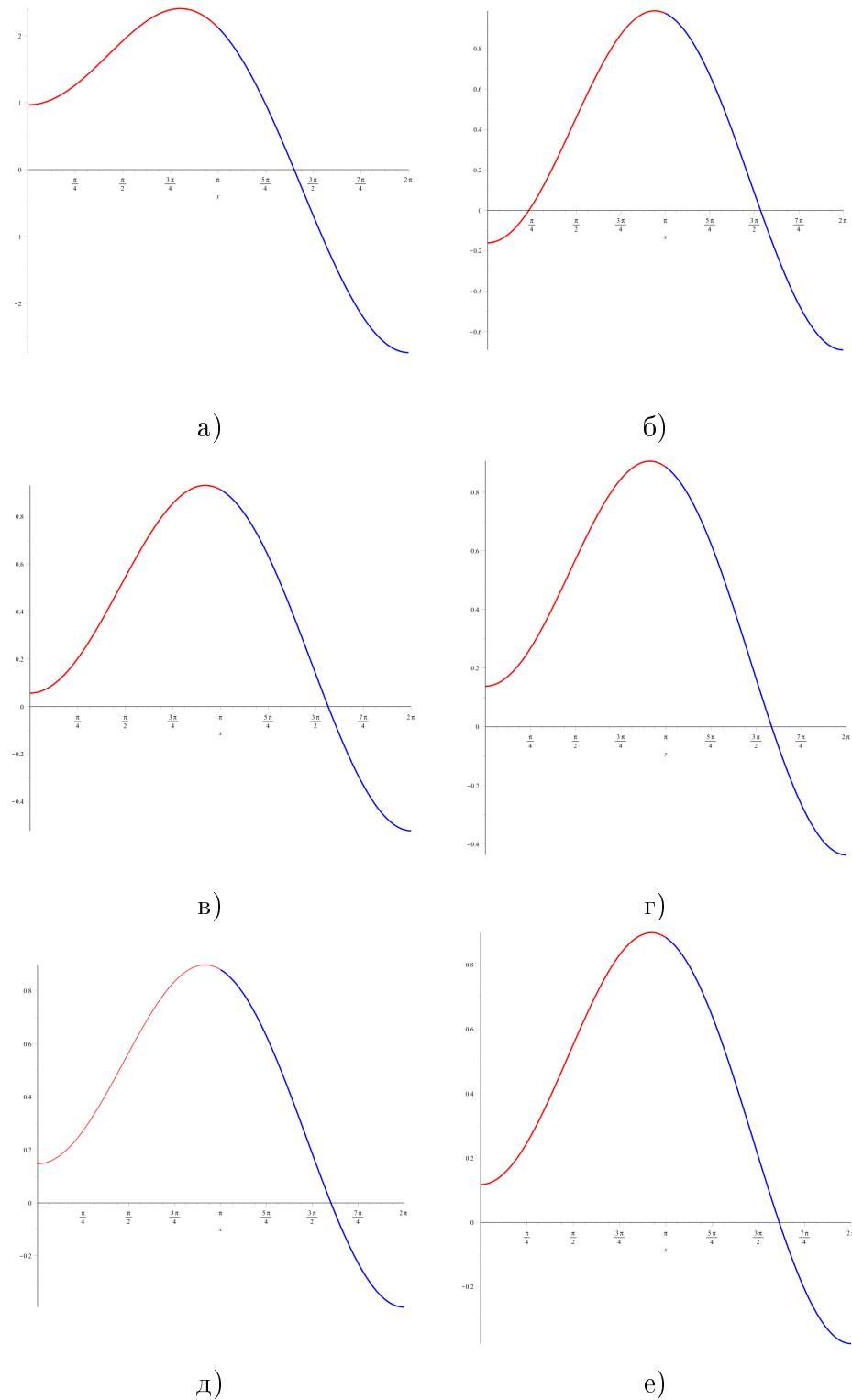


Рис. 5.1.4. Графики приближенного решения задачи (5.1.7) – (5.1.9), (5.1.11) из примера 5.4.1:
 а) функции $x_1(s, t)$, $x_2(s, t)$ при $t = 0$; б) функции $x_1(s, t)$, $x_2(s, t)$ при $t = 0.2$; в) функции $x_1(s, t)$, $x_2(s, t)$ при $t = 0.4$; г) функции $x_1(s, t)$, $x_2(s, t)$ при $t = 0.6$; д) функции $x_1(s, t)$, $x_2(s, t)$ при $t = 0.8$; е) функции $x_1(s, t)$, $x_2(s, t)$ при $t = 1$

решениями задачи (5.1.1), (5.1.2), (5.1.4) и задачи (5.1.1), (5.1.3), (5.1.4), где функционал стоимости задан в виде

$$J(x, u) = \beta \int_0^T \int_0^l |x(s, t) - z_d(s, t)|^{2k+2} ds dt + (1 - \beta) \int_0^T \int_0^l |u|^2 ds dt. \quad (5.2.2)$$

Алгоритм нахождения приближенного решения задачи (5.1.1), (5.1.2), (5.1.4) и задачи (5.1.1), (5.1.3), (5.1.4) с помощью методов декомпозиции, штрафа, Галеркина – Петрова был описан в п. 4.4. В силу предложенного метода в цилиндре Q_T рассмотрим условие Дирихле (5.1.1) и условие Шоултера – Сидорова (5.1.2) или условие Коши (5.1.3) для уравнения

$$(-\lambda - \Delta)x_t + \alpha x + \alpha_1 v^3 + \alpha_2 v^5 + \dots + \alpha_{k-1} v^{2k-1} + \alpha_k v^{2k+1} = u. \quad (5.2.3)$$

Уравнение (5.2.3) является линейными относительно функции $x(s, t)$. Зададим функционал качества в виде

$$\begin{aligned} J_\theta^\varepsilon(x, v, u) &= \beta \theta \int_0^T \int_0^l |x(s, t) - z_d(s, t)|^{2k+2} ds dt + \\ &\quad \beta(1 - \theta) \int_0^T \int_0^l |v(s, t) - z_d(s, t)|^{2k+2} ds dt + \\ &\quad +(1 - \beta) \int_0^T \int_0^l |u|^2 ds dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_0^l |x - v|^2 ds dt. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Приближенное решение $\tilde{x}(s, t)$ задачи (5.1.1), (5.1.2), (5.1.4), (5.2.2) и задачи (5.1.1), (5.1.3), (5.1.4), (5.2.2) будем искать в виде суммы (5.1.6). Представим правую часть уравнения (5.1.4) в виде

$$\tilde{u}(s, t) = \sum_{i=1}^m \langle u(s, t), \varphi_i(s) \rangle \varphi_i(s) = \sum_{i=1}^m u_i(t) \varphi_i(s), \quad (5.2.5)$$

$$\tilde{v}(s, t) = v^m(s, t) = \sum_{i=1}^m v_i(t) \varphi_i(s). \quad (5.2.6)$$

Затем, опираясь на метод Ритца, будем искать неизвестные $v_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, $u_i(t)$, $i = r, \dots, m$ в виде

$$v_i(t, N) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right), \quad u_i(t, N) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right) \quad (5.2.7)$$

или

$$v_i(t, N) = \sum_{n=0}^N c_n t^n, \quad u_i(t, N) = \sum_{n=0}^N b_n t^n, \quad (5.2.8)$$

выбирая коэффициенты b_n и c_n так, чтобы функции $w_i(t, N)$, $u_i(t, N)$ доставляли минимум функционалу (5.2.4).

Пример 5.2.1. Рассмотрим задачу (5.1.1), (5.1.2), (5.1.4), (5.2.2) в случае $\lambda = 1$, $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 2$, $l = \pi$, $T = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{99}{100}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $x_0(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin s + 2 \sin(2s) + 2 \sin(3s))$, $z_d(s, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin s + (t+2) \sin(2s) + (t^2+2) \sin(3s))$, $m = 3$, $N = 3$. Графики функций $x_0(s)$, $z_d(s, t)$ представлены на рис. 5.2.1.

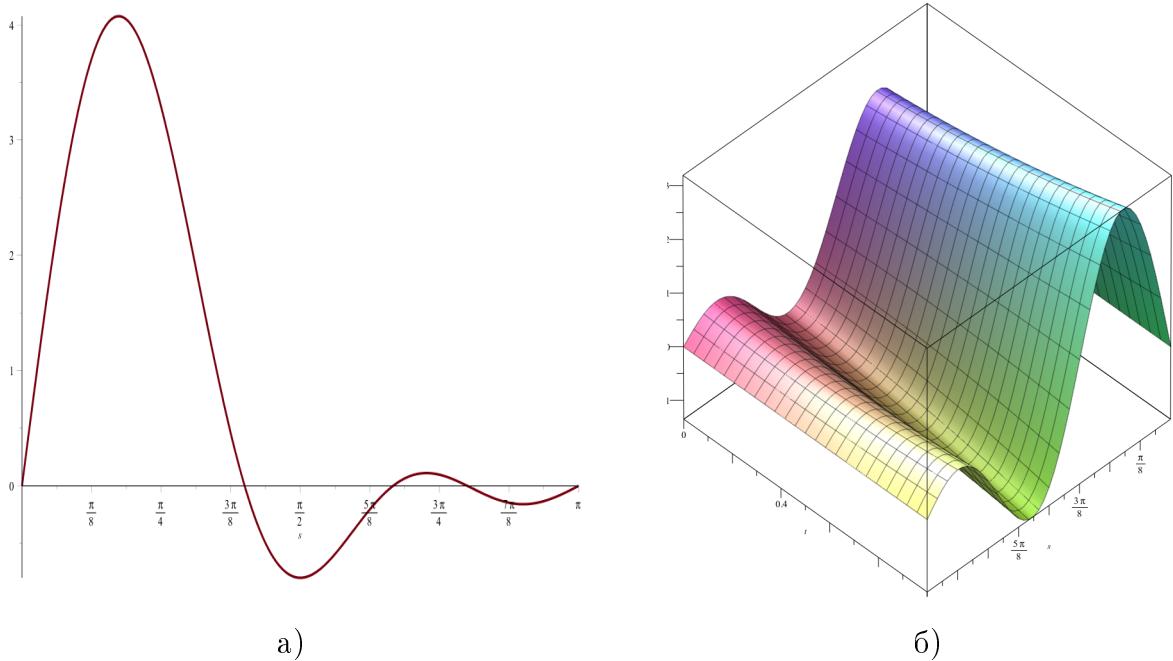


Рис. 5.2.1. Начальные функции задачи (5.1.1), (5.1.2), (5.1.4), (5.2.2): а) функция $x_0(s)$; б) функция $z_d(s, t)$

В результате вычислений были найдены коэффициенты управления (см. табл. 5.2.1), при которых значения функционала $J = 4.098527$.

Таблица 5.2.1

$b_{10} = 3.78551$	$b_{11} = 0.191363$	$b_{12} = 0.332450$	$b_{13} = 0.014591$
$b_{20} = 9.54792$	$b_{21} = -5.66737$	$b_{22} = 13.4783$	$b_{23} = -10.5349$
$b_{30} = -0.125106$	$b_{31} = 6.52025$	$b_{32} = 1.12257$	$b_{33} = -7.21200$
$c_{10} = 0.232990$	$c_{11} = -0.020644$	$c_{12} = 0.051504$	$c_{13} = 0.000723$
$c_{20} = 0.941092$	$c_{21} = 0.780535$	$c_{22} = -0.235198$	$c_{23} = -0.000466$
$c_{30} = 1.90204$	$c_{31} = -1.23850$	$c_{32} = 0.447985$	$c_{33} = 0.001871$

Приближенное решение задачи (5.1.1), (5.1.2), (5.1.4), (5.2.2) примет вид:

$$\begin{aligned} x(s, t) = & 0.207035 \sin(s) + 1.94309 \cdot 10^5 \sin(2s) - 1.33263 \cdot 10^7 \sin(3s) - \\ & - 3.94892 \cdot 10^{-9} \sin(s)t^9 - 7.12624 \cdot 10^{-9} \sin(3s)t^9 - 1.9430810^5 e^{-\frac{1}{3}t} \sin(2s) + \\ & + 1.16963 \cdot 10^{-8} \sin(2s)t^9 + 1.33263 \cdot 10^7 e^{-\frac{1}{8}t} \sin(3s) + 1.66578 \cdot 10^6 \sin(3s)t - \\ & - 1.04111 \cdot 10^5 \sin(3s)t^2 + 0.002711 \sin(2s)t^7 + 0.000011 \sin(2s)t^8 + \\ & + 4337.61 \sin(3s)t^3 - 135.521 \sin(3s)t^4 + 3.30193 \sin(3s)t^5 - 0.049447 \sin(3s)t^6 - \\ & - 0.000959 \sin(3s)t^7 - 0.000005 \sin(3s)t^8 + 0.198778 \sin(2s)t^6 - \\ & - 5.92736 \sin(2s)t^5 - 64768.6 \sin(2s)t + 96.5275 \sin(2s)t^4 - \\ & - 1195.08 \sin(2s)t^3 + 10792.9 \sin(2s)t^2 + 0.089563 \sin(s)t - \\ & - 0.000003 \sin(s)t^8 - 0.000553 \sin(s)t^7 + .292602 \sin(s)t^5 - \\ & - 0.035173 \sin(s)t^6 - 0.871872 \sin(s)t^4 + 1.05038 \sin(s)t^3 - 0.499923 \sin(s)t^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(s, t) = & 0.576594e - 3 \sin(s)t^3 + 0.0410941 \sin(s)t^2 - \\ & - 0.0164711 \sin(s)t + 0.185899 \sin(s) - 0.000372 \sin(2s)t^3 - \\ & - 0.187661 \sin(2s)t^2 + 0.622777 \sin(2s)t + 0.750882 \sin(2s) + \\ & + 0.001493 \sin(3s)t^3 + 0.357441 \sin(3s)t^2 - 0.988178 \sin(3s)t + 1.51761 \sin(3s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(s, t) = & 0.011642 \sin(s)t^3 + 0.265256 \sin(s)t^2 + 0.152685 \sin(s)t + \\ & + 3.02040 \sin(s) - 8.40566 \sin(2s)t^3 + 10.7541 \sin(2s)t^2 - 4.52191 \sin(2s)t + \\ & + 7.61814 \sin(2s) - 5.75434 \sin(3s)t^3 + 0.895680 \sin(3s)t^2 + 5.20241 \sin(3s)t - \\ & - 0.099820 \sin(3s). \end{aligned}$$

Графики приближенного решения задачи (5.1.1), (5.1.2), (5.1.4), (5.2.2) изображены на рис. 5.2.2 и 5.2.3. На рис. 5.2.4 представлены графики функций $x(s, 1)$, $v(s, 1)$, $z_d(s, 1)$ при $t = 1$.

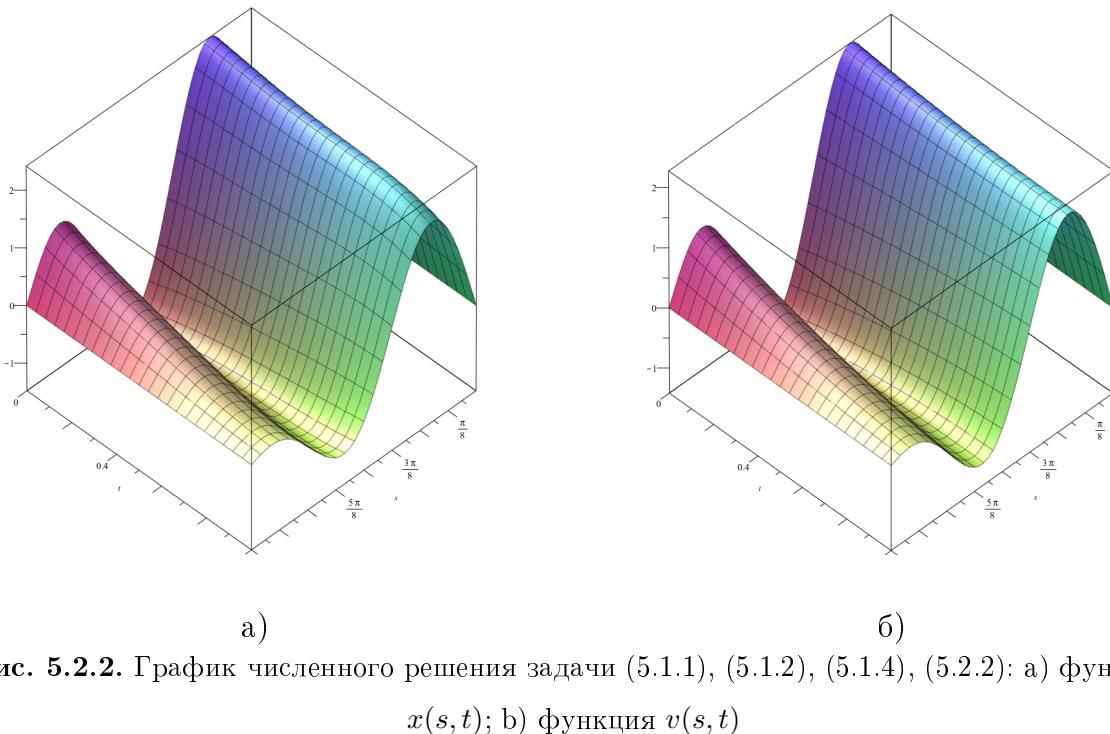


Рис. 5.2.2. График численного решения задачи (5.1.1), (5.1.2), (5.1.4), (5.2.2): а) функция $x(s, t)$; б) функция $v(s, t)$

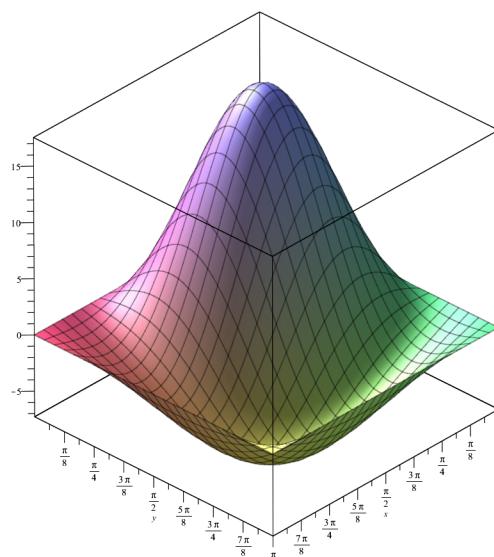


Рис. 5.2.3. График оптимального управления $u(s, t)$ решениями задачи (5.1.1), (5.1.2), (5.1.4),
 (5.2.2)

Нас интересует процесс управления поведением конструкции из двутавровых балок, находящихся под постоянной нагрузкой. На конечном связном ориентированном графе $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$ рассмотрим обобщенную математическую модель выпучивания конструкции из двутавровых балок (5.1.7) – (5.1.9)

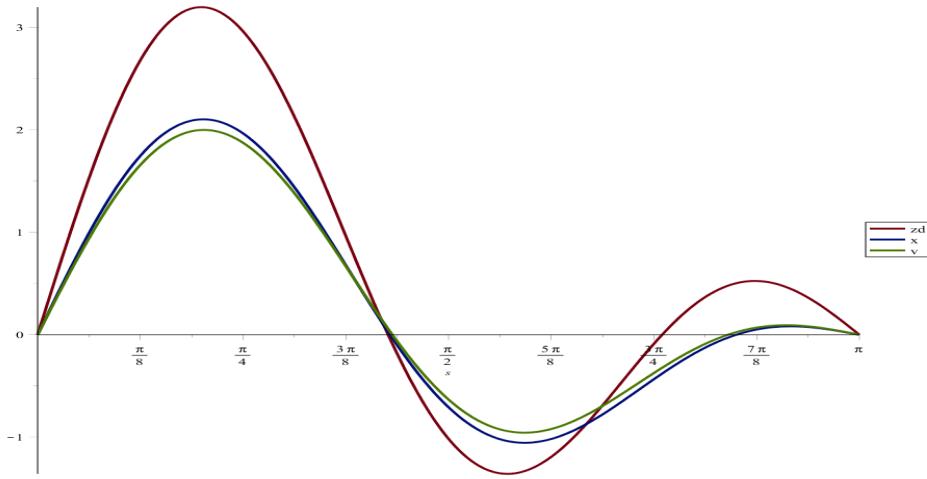


Рис. 5.2.4. График численного решения задачи (5.1.1), (5.1.2), (5.1.4), (5.2.2) в момент времени $t = 1$

с начальным условием Коши (5.1.10) или условием Шоуолтера – Сидорова (5.1.11).

Нашей целью является нахождение приближенного решения задачи оптимального управления

$$J(x, u) \rightarrow \inf \quad (5.2.9)$$

решениями задачи (5.1.7) – (5.1.9), (5.1.10) и задачи (5.1.7) – (5.1.9), (5.1.11), где функционал стоимости задан в виде

$$\begin{aligned} J(x, u) = & \sum_{E_j \in E} \beta \int_0^T d_j \int_0^{l_j} |x_j(s, t) - z_{jd}(s, t)|^{2k+2} ds dt + \\ & +(1 - \beta) \sum_{E_j \in E} \int_0^T \int_0^{l_j} d_j |u_j|^2 ds dt. \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Алгоритм нахождения приближенного решения задачи (5.1.7) – (5.1.9), (5.1.10), (5.2.9) и задачи (5.1.7) – (5.1.9), (5.1.11), (5.2.9) при помощи методов декомпозиции, штрафа, Галеркина – Петрова был описан в п. 4.4. В силу предложенного метода на графике **G** рассмотрим уравнения

$$-\lambda x_{jt} - x_{jsss} + \alpha_j x_j + \alpha_j^1 v_j^3 + \dots + \alpha_j^k v_j^{2k+1} = u_j. \quad (5.2.11)$$

Уравнения (5.2.11) являются линейными относительно функций $x_j(s, t)$. Зададим функционал качества в виде

$$\begin{aligned}
 J_\theta^\varepsilon(x, v, u) = & \sum_{E_j \in E} \beta \theta \int_0^T d_j \int_0^{l_j} |x_j(s, t) - z_{jd}(s, t)|^{2k+2} ds dt + \\
 & + \sum_{E_j \in E} \beta(1 - \theta) \int_0^T d_j \int_0^{l_j} |v_j(s, t) - z_{jd}(s, t)|^{2k+2} ds dt + \\
 & +(1 - \beta) \sum_{E_j \in E} \int_0^T \int_0^{l_j} d_j |u_j|^2 ds dt + \\
 & + \sum_{E_j \in E} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T d_j \int_0^{l_j} |x_j(s, t) - v_j(s, t)|^2 ds dt.
 \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Пример 5.2.2. Требуется найти приближенное решение задачи (5.1.7) – (5.1.9), (5.1.11), (5.2.9) на ориентируемом графе \mathbf{G} , состоящем из двух последовательно соединенных ребер и трех вершин (см. рис. 5.1.3) и $k = 1$, $\lambda = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta = \theta = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $l_1 = \pi$, $l_2 = \pi$, $N = 2$ и начальных функций (см. рис. 5.2.5)

$$x_{01}(s) = 0.225676 \cos s, \quad x_{02}(s) = -0.225676 \cos s,$$

$$z_{1d}(s) = (0.225676(t^2 + 1)) \cos s, \quad z_{2d}(s) = -(0.225676(t^2 + 1)) \cos s.$$

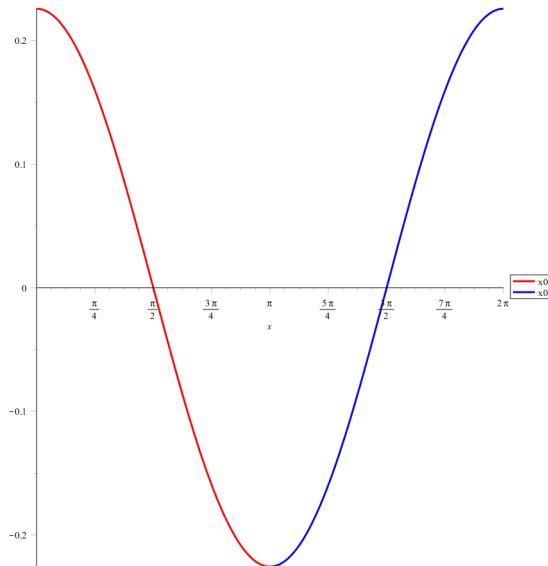


Рис. 5.2.5 Начальное отклонение x_{01} , x_{02}

В результате вычислений были найдены коэффициенты управления (см. табл. 5.2.2), при которых значения функционала $J = 0.758280$.

Таблица 5.2.2

$b_{00} = -0.000898$	$b_{01} = 0.000519$	$b_{02} = 0.004183$	$b_{03} = -0.004247$
$b_{10} = -0.150189$	$b_{11} = -0.009871$	$b_{12} = 1.003754$	$b_{13} = -0.804374$
$b_{20} = 0.664529$	$b_{21} = 0.074235$	$b_{22} = -.374667$	$b_{23} = -.360942$
$c_{00} = -0.000514$	$c_{01} = -0.009678$	$c_{02} = 0.028825$	$c_{03} = -0.019824$
$c_{10} = -0.008221$	$c_{11} = -0.495853$	$c_{12} = 1.146591$	$c_{13} = -0.595256$
$c_{20} = 1.000790$	$c_{21} = -0.522917$	$c_{22} = 0.438774$	$c_{23} = -0.306497$

Приближенное решение задачи (5.1.7) – (5.1.9), (5.1.11), (5.2.9) примет вид:

$$\begin{aligned} x_1(s, t) = & -0.000269 + 0.000858t - 0.035642t^2 + 0.016320t^9 - 0.085926t^8 - \\ & - 0.327578t^6 + 0.203202t^7 + 0.415751t^5 - 0.364575t^4 + 0.177582t^3 - \\ & - 0.000022e^{-4t}(-57885.8e^{4t}t^7 + 15705.2e^{4t}t^8 - 2048.73e^{4t}t^9 - \\ & - 2.53678 \cdot 10^5 e^{4t}t^5 - 3.62799 \cdot 10^5 e^{4t}t^3 + 2.66670 \cdot 10^5 e^{4t}t^2 - \\ & - 1.39073 \cdot 10^5 e^{4t}t + 3.53474 \cdot 10^5 e^{4t}t^4 + 1.40785 \cdot 10^5 e^{4t}t^6 + 38532.2e^{4t} - \\ & - 38532.3) \cos(0.5s) + 0.564191e^{-t}(39958.5 - 39957.8e^t + 39958.0e^t + \\ & + 332.582e^t t^5 - 55.1402e^t t^6 + 6659.28e^t t^3 - 1664.61e^t t^4 - 19978.8e^t t^2 + \\ & + 7.69238e^t t^7 - 0.866750e^t t^8 + 0.611560e^t t^9) \cos(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(s, t) = & -0.000269 - 3 + 0.00086t - 0.0356416t^2 + 0.016320t^9 - 0.085925t^8 - \\ & - 0.327578t^6 + 0.203202t^7 + 0.415751t^5 - 0.364575t^4 + 0.177582t^3 + \\ & + 0.000022e^{-4t}(-57885.8e^{4t}t^7 + 15705.2e^{4t}t^8 - 2048.73e^{4t}t^9 - 2.53678 \cdot 10^5 e^{4t}t^5 - \\ & - 3.62799 \cdot 10^5 e^{4t}t^3 + 2.66670 \cdot 10^5 e^{4t}t^2 - 1.39073 \cdot 10^5 e^{4t}t + 3.53474 \cdot 10^5 e^{4t}t^4 + \\ & + 1.40785 \cdot 10^5 e^{4t}t^6 + 38532.2e^{4t} - 38532.3) \sin(0.5s) - 0.564191e^{-t}(39958.5 - \\ & - 39957.8e^t + 39958.0e^t + 332.582e^t t^5 - 55.1402e^t t^6 + 6659.28e^t t^3 - \\ & - 1664.61e^t t^4 - 19978.8e^t t^2 + 7.69238e^t t^7 - \\ & - 0.866750e^t t^8 + 0.061156e^t t^9) \cos(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1(s, t) = & -0.007908t^3 + 0.011499t^2 - 0.003861t - 0.000204 + \\ & + 0.564191(-0.595256t^3 + 1.14659t^2 - 0.495853t - 0.008221) \cos(0.5s) + \\ & + 0.564191(-0.306497t^3 + .438774t^2 - 0.522917t + 1.00079) \cos(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2(s, t) &= -0.007908t^3 + 0.011499t^2 - 0.003861t - 0.000204 - \\
&- 0.564191(-0.595256t^3 + 1.14659t^2 - 0.495853t - 0.008221)) \sin(0.5s) - \\
&- 0.564191(-0.306497t^3 + .438774t^2 - 0.522917t + 1.00079)) \cos(s), \\
u_1(s, t) &= -0.001694t^3 + 0.001668t^2 + 0.000207t - 0.000358 + \\
&+ 0.564191(-0.804374t^3 + 1.00375t^2 - 0.009870t - 0.150189)) \cos(0.5s) + \\
&+ 0.564191(-0.360942t^3 - 0.374667t^2 + 0.0742352t + 0.664529)) \cos(s), \\
u_2(s, t) &= -0.001694t^3 + 0.001668t^2 + 0.000207t - 0.000358 - \\
&- 0.564191(-0.804374t^3 + 1.00375t^2 - 0.009870t - 0.150189)) \sin(0.5s) - \\
&- 0.564191(-0.360942t^3 - 0.374667t^2 + 0.0742352t + 0.664529)) \cos(s).
\end{aligned}$$

Графики приближенного решения задачи (5.1.7) – (5.1.9), (5.1.11), (5.2.9) изображены на рис. 5.2.6 и 5.2.7.

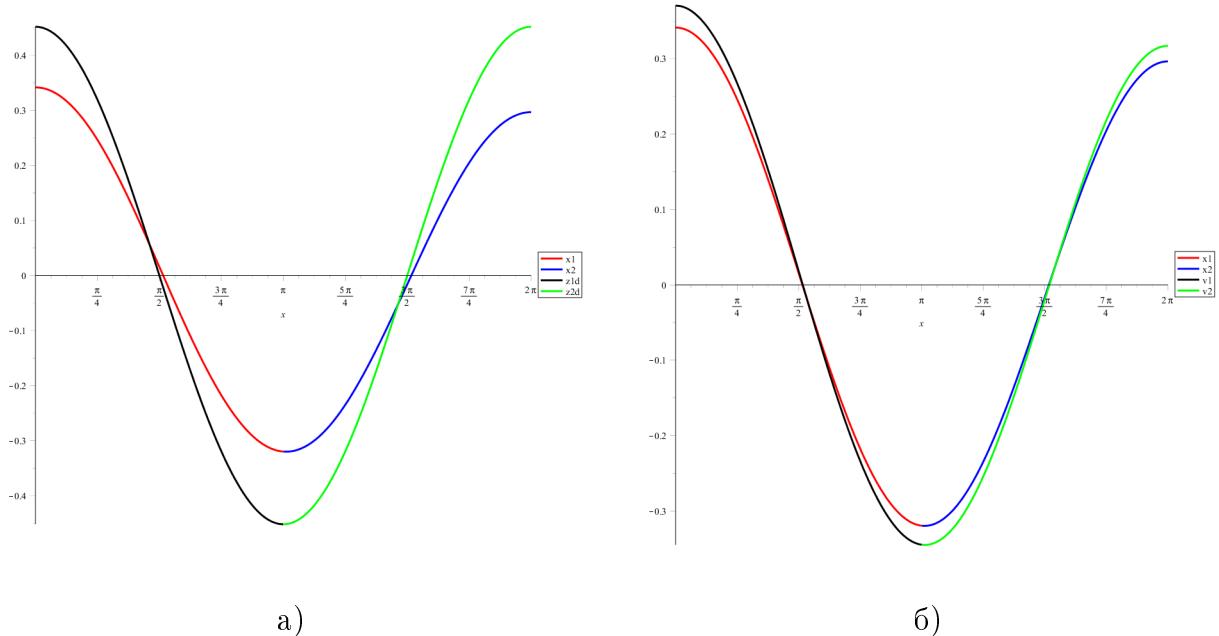


Рис. 5.2.6 График численного решения задачи (5.1.7) – (5.1.9), (5.1.11), (5.2.9): а) функции $x_1(s, 1)$, $x_2(s, 1)$, $z_{d1}(s, 1)$, $z_{d2}(s, 1)$; б) функция $x_1(s, 1)$, $x_2(s, 1)$, $v_1(s, 1)$, $v_2(s, 1)$

5.3. Численное решение задач Шоуолтера – Сидорова и Коши для математических моделей фильтрации

Рассмотрим модель Осколокова нелинейной фильтрации (3.1.1), (3.1.2) с начальным условием Шоуолтера – Сидорова (3.1.3) или условием Коши

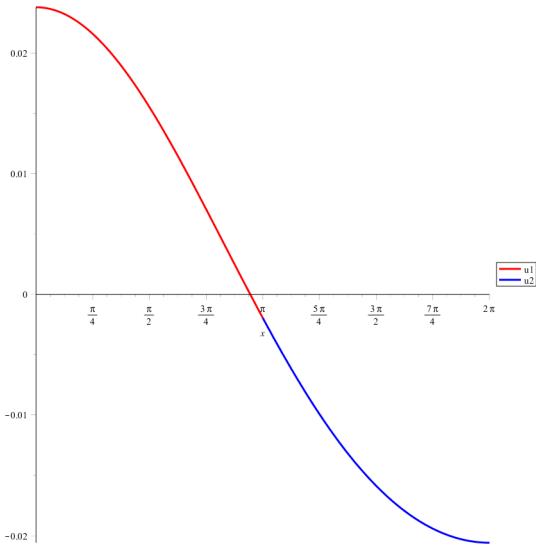


Рис. 5.2.7 Управление $u_1(s, 1)$, $u_2(s, 1)$

(3.1.4). На основе алгоритмов численных методов, представленных в п. 4.3, проведем вычислительные эксперименты, иллюстрирующие работу программ, описанных в п. 4.6.

Пример 5.3.1. Рассмотрим уравнение Осколкова нелинейной фильтрации при $n = 3$

$$(\lambda - \Delta)x_t(s_1, s_2, s_3, t) = \alpha\Delta x(s_1, s_2, s_3, t) - |x(s_1, s_2, s_3, t)|^{p-2}x(s_1, s_2, s_3, t) + u(s_1, s_2, s_3, t). \quad (5.3.1)$$

Зададим область $\Omega = \{(s_1, s_2, s_3) : 0 \leq s_1 \leq \pi, 0 \leq s_2 \leq \pi, 0 \leq s_3 \leq \pi\}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$(\lambda - \Delta)(x(s_1, s_2, s_3, 0) - x_0(s_1, s_2, s_3)) = 0, \quad (s_1, s_2, s_3) \in \Omega; \quad (5.3.2)$$

$$x(s_1, s_2, s_3, t) = 0, \quad (s_1, s_2, s_3, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \quad (5.3.3)$$

для уравнения (5.3.1). Приближенное решение начально-краевой задачи (5.3.1) – (5.3.3) будем искать в виде галеркинской суммы

$$x^m(s_1, s_2, s_3, t) = \sum_{n=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m a_{klm}(t) \varphi_{klm}(s_1, s_2, s_3), \quad m > 1,$$

где $\{\varphi_{klm}\}$ – множество всех решений краевой задачи на собственные значения

$$(\lambda - \Delta)x(s_1, s_2, s_3) = 0, \quad (s_1, s_2, s_3) \in \Omega;$$

$$\begin{aligned} x(0, s_2, s_3) &= x(\pi, s_2, s_3) = x(s_1, 0, s_3) = \\ &= x(s_1, \pi, s_3) = x(s_1, s_2, 0) = x(s_1, s_2, \pi) = 0. \end{aligned}$$

Данная спектральная задача разрешима для счетного набора собственных чисел $\lambda_{kln} = -(k^2 + l^2 + n^2)$, причем функции $\{\varphi_{kln} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3}} \sin ks_1 \sin ls_2 \sin ns_3\}$ образуют ортонормальную с весом $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3}}$ систему функций. В силу теоремы 3.1.1 существует единственное решение задачи (5.3.1) – (5.3.3) при $\lambda \geq -3$.

Для того чтобы были выполнены условия теоремы 3.1.1, возьмем $m = 2$, $p = 4$, $\lambda = -3$, $\alpha = 1$, $T = 1$,

$$\begin{aligned} x_0(s_1, s_2, s_3) &= \sin(s_1) \sin(s_2) \sin(s_3) + 10 \sin(s_1) \sin(2s_2) \sin(s_3) + \\ &+ 3 \sin(2s_1) \sin(s_2) \sin(s_3) + \sin(s_1) \sin(s_2) \sin(2s_3) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} u(s_1, s_2, s_3, t) &= \sin(s_1) \sin(s_2) \sin(s_3) + t 10 \sin(s_1) \sin(2s_2) \sin(s_3) + \\ &+ 3 \sin(2s_1) \sin(s_2) \sin(s_3) + t \sin(s_1) \sin(s_2) \sin(2s_3). \end{aligned}$$

Тогда, умножив скалярно (5.3.1) на функции φ_{kln} , $n = l = k = 1, 2$, получим систему алгебро-дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\begin{aligned} a_{112}(0) &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi^3}}, a_{121}(0) = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi^3}}, a_{122}(0) = 0, a_{211}(0) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi^3}}, \\ a_{212}(0) &= 0, a_{221}(0) = 0, a_{222}(0) = 0. \end{aligned}$$

В результате вычислений найдено приближенное решение задачи (5.3.1) – (5.3.3), представленное в табл. 5.3.1 (с точностью до 10^{-6}). В случае $t = 1$ приближенное решение задачи (5.3.1) – (5.3.3) примет вид (с точностью до 10^{-6}) и изображено на рис. 5.3.1:

$$\begin{aligned} x(s_1, s_2, s_3, 1) &= \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} (0.863574 \sin(s_1) \sin(s_2) \sin(s_3) + 0.462950 \sin(s_1) \sin(s_2) \sin(2s_3) + \\ &+ 5.05385 \sin(s_1) \sin(2s_2) \sin(s_3) - 0.012234 \sin(s_1) \cdot \sin(2s_2) \sin(2s_3) + \\ &+ 1.815293 \sin(2s_1) \sin(s_2) \sin(s_3) - 0.001775 \sin(2s_1) \sin(s_2) \sin(2s_3) - \\ &- 0.051710 \sin(2s_1) \sin(2s_2) \sin(s_3) - 0.070413 \sin(2s_1) \sin(2s_2) \sin(2s_3)). \end{aligned}$$

Таблица 5.3.1

t	$a_{11}(t)$	$a_{12}(t)$	$a_{21}(t)$	$a_{22}(t)$
0.1	-0.165122	1.833339	4.770067	1.033124
0.2	0.095721	1.357912	3.555937	0.783439
0.3	0.303341	1.100588	2.857804	0.625189
0.4	0.4745932	0.938770	2.392435	0.513252
0.5	0.614686	0.828999	2.057272	0.430096
0.6	0.727279	0.751231	1.804693	0.366951
0.7	0.816346	0.694635	1.608954	0.318683
0.8	0.886030	0.652716	1.454549	0.281942
0.9	0.9402098	0.621284	1.331338	0.254370
1.0	0.982221	0.597499	1.232258	0.234222

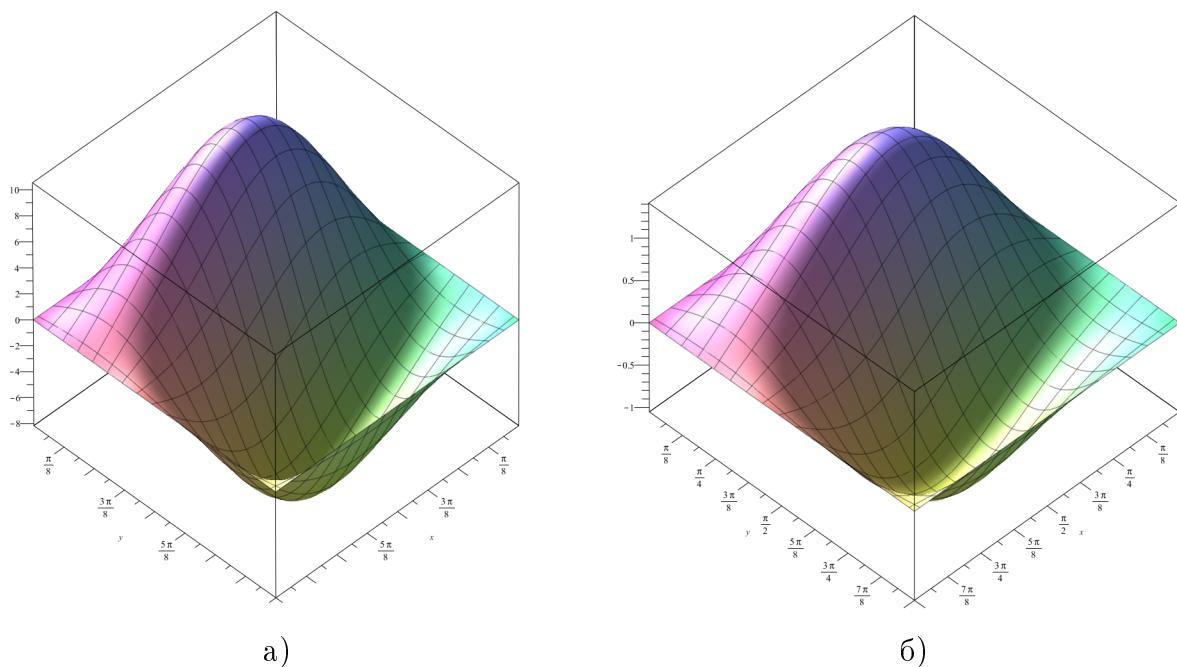


Рис. 5.3.1. График численного решения задачи (5.3.1) – (5.3.3): а) в момент времени $t = 0$; б) в момент времени $t = 1$

Пример 5.3.2. Требуется найти приближенное решение задачи (5.3.1), (5.3.3) с условием Коши

$$x(s_1, s_2, s_3, 0) = x_0(s_1, s_2, s_3), \quad (s_1, s_2, s_3) \in \Omega, \quad (5.3.4)$$

в случае $m = 2, p = 4, \lambda = 1, \alpha = 1, T = 2$,

$$\begin{aligned} x_0(s_1, s_2, s_3) &= 2 \sin(s_1) \sin(s_2) \sin(s_3) + \sin(s_1) \sin(2s_2) \sin(s_3) + \\ &+ 3 \sin(2s_1) \sin(2s_2) \sin(s_3) + \sin(2s_1) \sin(2s_2) \sin(2s_3) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} u(s_1, s_2, s_3, t) &= t \sin(s_1) \sin(s_2) \sin(s_3) + (t + 1) \sin(s_1) \sin(2s_2) \sin(s_3) + \\ &+ t^2 \sin(s_1) \sin(s_2) \sin(2s_3). \end{aligned}$$

Тогда, умножив скалярно (5.3.1) на функции $\varphi_{kln}, n = l = k = 1, 2$, получим систему алгебро-дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\begin{aligned} a_{111}(0) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi^3}}, a_{112}(0) = 0, a_{121}(0) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi^3}}, a_{122}(0) = 0, a_{211}(0) = 0, \\ a_{212}(0) &= 0, a_{221}(0) = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi^3}}, a_{222}(0) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi^3}}. \end{aligned}$$

В результате вычислений найдено приближенное решение задачи (5.3.1), (5.3.3), (5.3.4). В случае $t = 2$ приближенное решение задачи (5.3.1), (5.3.3), (5.3.4) примет вид (с точностью до 10^{-6})

$$\begin{aligned} x(s_1, s_2, s_3, 1) &= \\ &= 0.654143 \sin(s_1) \sin(s_2) \sin(s_3) - 0.0134260 \sin(s_1) \sin(s_2) \sin(2s_3) + \\ &+ 0.488290 \sin(s_1) \sin(2s_2) \sin(s_3) - 0.488290 \sin(s_1) \cdot \sin(2s_2) \sin(2s_3) - \\ &- 0.0218513 \sin(2s_1) \sin(s_2) \sin(s_3) - 0.005347 \sin(2s_1) \sin(s_2) \sin(2s_3) + \\ &+ 0.143582 \sin(2s_1) \sin(2s_2) \sin(s_3) + 0.432329 \sin(2s_1) \sin(2s_2) \sin(2s_3) \end{aligned}$$

и изображено на рис. 5.3.2.

Рассмотрим систему уравнений Осколкова при $n = 2$:

$$(1 - \varkappa \nabla^2)x_t = \nu \nabla^2 x - (x \cdot \nabla)x - \mathbf{p} + u, \quad \nabla(\nabla \cdot x) = 0, \quad (5.3.5)$$

где вектор-скорость $x = (x_1, x_2)$, $x_i = x_i(s_1, s_2, t)$, вектор-функция $u = (u_1, u_2)$, $u_i = u_i(s_1, s_2, t)$. Зададим область $\Omega = \{(s_1, s_2) : 0 \leq s_1 \leq \pi, 0 \leq s_2 \leq \pi\}$.

Введем функцию тока, определенную следующим образом:

$$x_1(s_1, s_2, t) = \frac{\partial \psi}{\partial s_2}, \quad x_2(s_1, s_2, t) = -\frac{\partial \psi}{\partial s_1}.$$

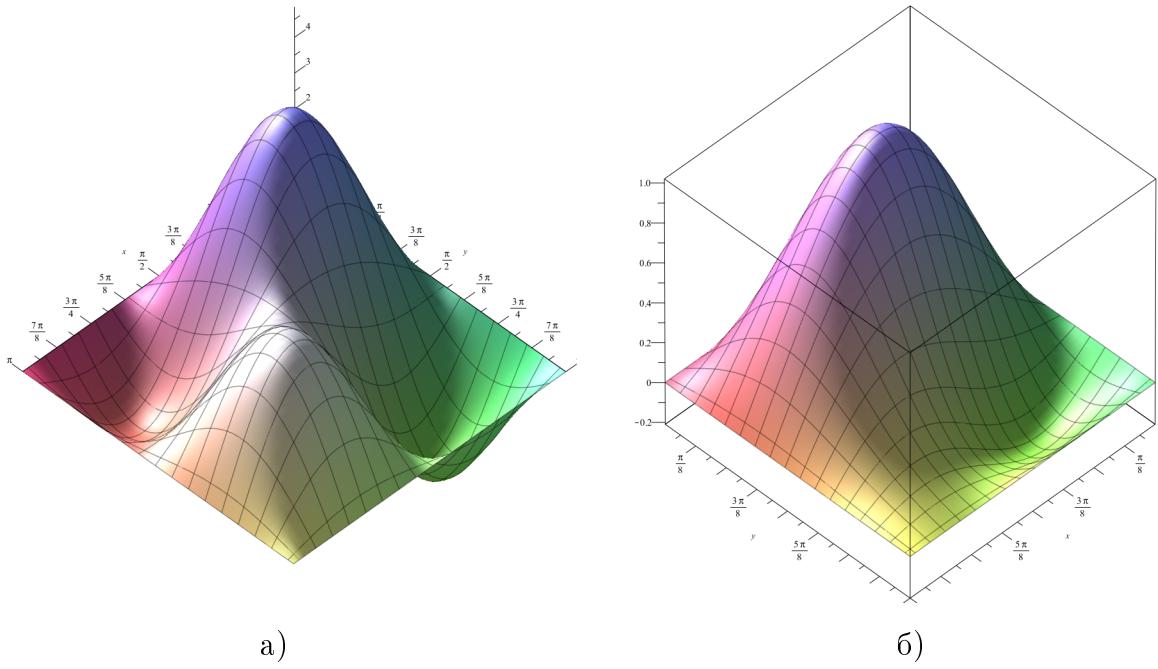


Рис. 5.3.2. График численного решения задачи (5.3.1), (5.3.3), (5.3.4): а) в момент времени $t = 0$; б) в момент времени $t = 2$

Тогда второе уравнение системы (5.3.5) выполняется, а первое преобразуется в уравнение

$$(1 - \lambda \nabla^2) \nabla^2 \psi_t = \nu \nabla^4 \psi - \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(s_1, s_2)} + w, \quad (5.3.6)$$

где $\frac{\partial(y, z)}{\partial(s_1, s_2)} = \frac{\partial y}{\partial s_1} \frac{\partial z}{\partial s_2} - \frac{\partial y}{\partial s_2} \frac{\partial z}{\partial s_1}$, $w = \frac{\partial u_1}{\partial s_2} - \frac{\partial u_2}{\partial s_1}$. Для уравнения (5.3.6) рассмотрим начально-краевые условия

$$\begin{aligned} (1 - \kappa \nabla^2)(\psi(s_1, s_2, 0) - \psi_0(s_1, s_2)) &= 0, \\ \psi(0, s_2) = \psi(\pi, s_2) = \psi(s_1, 0) = \psi(s_1, \pi) &= 0, \\ \nabla^2 \psi(0, s_2) = \nabla^2 \psi(\pi, s_2) = \nabla^2 \psi(s_1, 0) &= \nabla^2 \psi(s_1, \pi) = 0. \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Приближенное решение задачи (5.3.6), (5.3.7) будем искать в виде галеркинской суммы

$$\psi^m(s_1, s_2, t) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \psi_{kl}(t) \varphi_{kl}(s_1, s_2), \quad m > 1,$$

где $\{\varphi_{kl}\} = \frac{2}{\pi} \sin(k s_1) \sin(l s_2)$ – множество всех решений краевой задачи на собственные значения

$$(\lambda - \Delta)x(s_1, s_2) = 0, \quad (s_1, s_2) \in \Omega;$$

$$x(0, s_2) = x(\pi, s_2) = x(s_1, 0) = x(s_1, \pi) = 0.$$

Пример 5.3.3. Требуется найти численное решение задачи (5.3.6), (5.3.7) при заданных начальных данных:

$$m = 2, \quad \varkappa = -\frac{1}{2}, \quad \nu = 1, \quad T = 1,$$

$$\psi_0(s_1, s_2) = 2 \sin s_1 \sin s_2 + 3 \sin(2s_1) \sin(s_2) + \sin(2s_1) \sin(2s_2) + \sin s_1 \sin(2s_2)$$

и

$$w(s_1, s_2, t) = 2 \sin s_1 \sin s_2 + 3 \sin(2s_1) \sin(s_2) + t \sin(2s_1) \sin(2s_2) + \\ + 2 \sin(s_1) \sin(2s_2).$$

Умножив скалярно (5.3.6) на функции φ_{kl} , $l = k = 1, 2$, получим систему алгебро-дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\psi_{12}(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{21}(0) = \frac{3\pi}{2}, \quad \psi_{22}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

В результате вычислений приближенное решение задачи (5.3.6), (5.3.7), представленное в табл. 5.3.2 (с точностью до 10^{-6}), в случае $t = 1$ примет вид:

$$\psi(s_1, s_2, 1) = -0.5 \sin s_1 \sin s_2 + 16.9403 \sin(s_1) \sin(2s_2) + \\ + 90.80010 \sin(2s_1) \sin(s_2) + 14.454 \sin(2s_1) \sin(2s_2).$$

Для уравнения (5.3.6) рассмотрим начально-краевые условия

$$\begin{aligned} \psi(s_1, s_2, 0) &= \psi_0(s_1, s_2), \\ \psi(0, s_2) &= \psi(\pi, s_2), \quad \psi(s_1, 0) = \psi(s_1, \pi) = 0, \\ \nabla^2 \psi(0, s_2) &= \nabla^2 \psi(\pi, s_2), \quad \nabla^2 \psi(s_1, 0) = \nabla^2 \psi(s_1, \pi) = 0. \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Приближенное решение задачи (5.3.6), (5.3.8) будем искать в виде галеркинской суммы

$$\psi^m(s_1, s_2, t) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \psi_{kl}^1(t) \varphi_{kl}(s_1, s_2) + \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^m \psi_{ij}^2(t) \theta_{ij}(s_1, s_2), \quad m > 1,$$

где $\{\varphi_{kl} = \frac{1}{\pi} \sin(2ks_1) \sin(ls_2)\}$, $\{\theta_{ij} = \frac{1}{\pi} \cos(2is_1) \sin(js_2)\}$ – множество всех решений краевой задачи на собственные значения

$$(\lambda - \Delta)x(s_1, s_2) = 0, \quad (s_1, s_2) \in \Omega;$$

Таблица 5.3.2

t	$a_{11}(t)$	$a_{12}(t)$	$a_{21}(t)$	$a_{22}(t)$
0.1	-0.785398	2.142452	6.683772	2.051198
0.2	-0.785398	2.898904	9.446717	2.679163
0.3	-0.785398	3.896660	13.318117	3.499788
0.4	-0.785398	5.207944	18.741368	4.571949
0.5	-0.785398	6.924256	26.336723	5.972519
0.6	-0.785398	9.160295	36.971632	7.801862
0.7	-0.785398	12.057963	51.858981	0.191009
0.8	-0.785398	15.789887	72.694268	13.311043
0.9	-0.785398	20.561467	101.847096	17.385325
1.0	-0.785398	26.609727	142.628457	22.705479

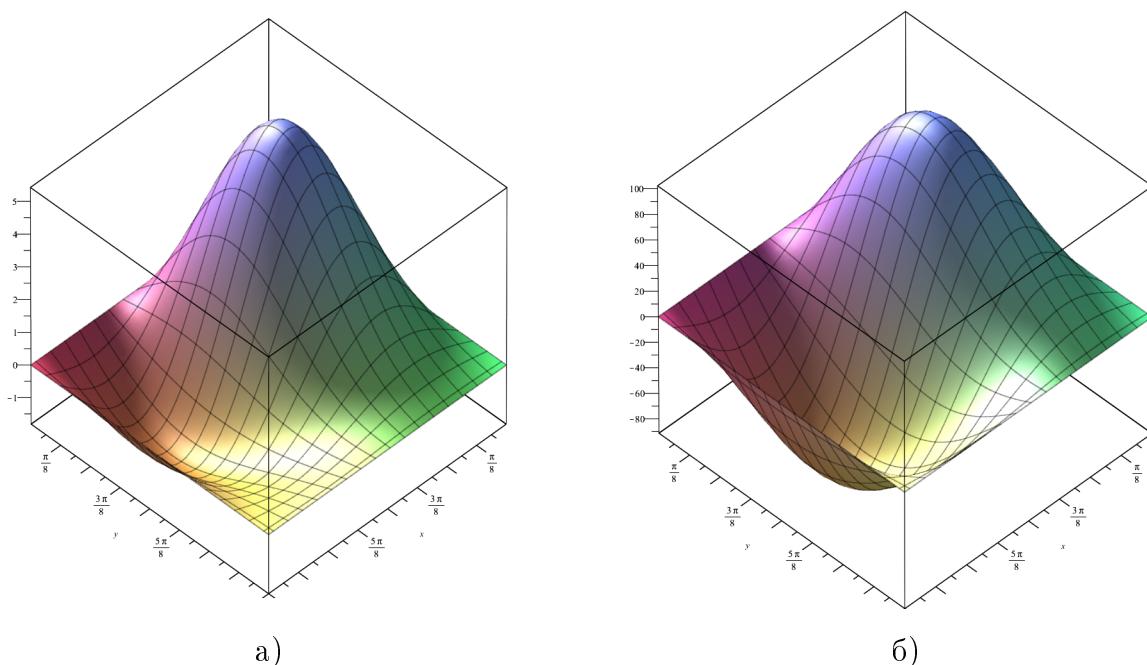


Рис. 5.3.3. График численного решения задачи (5.3.6), (5.3.7): а) в момент времени $t = 0$; б) в момент времени $t = 1$

$$x(0, s_2) = x(\pi, s_2), \quad x(s_1, 0) = x(s_1, \pi) = 0.$$

Пример 5.3.4. Требуется найти численное решение задачи (5.3.6), (5.3.8) при заданных начальных данных:

$$m = 2, \quad \kappa = -1, \nu = 1, T = 1,$$

$$\begin{aligned}\psi_0(s_1, s_2) = & \frac{2}{\pi}(2 \sin(2s_1) \sin s_2 + 2 \cos(2s_1) \sin(2s_2) + \\ & + \cos(4s_1) \sin(s_2) + \sin(4s_1) \sin(2s_2))\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}w(s_1, s_2, t) = & \frac{2}{\pi}(\sin(2s_2) + 3 \sin(2s_1) \sin(s_2) + t \sin(4s_1) \sin(2s_2) + \\ & + 2(t^2 + 1) \cos(2s_1) \sin(2s_2)).\end{aligned}$$

Умножив скалярно (5.3.6) на функции φ_{kl} , $l = k = 1, 2$, θ_{ij} , $i = 0, \dots, 2$, $k = 1, 2$, получим систему алгебро-дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\begin{aligned}\psi_{11}^1(0) = 2, \psi_{12}^1(0) = 0, \psi_{21}^1(0) = 0, \psi_{22}^1(0) = 1, \\ \psi_{02}^2(0) = 0, \psi_{11}^2(0) = 0, \psi_{12}^2(0) = 2, \psi_{21}^2(0) = 1, \psi_{22}^2(0) = 0.\end{aligned}$$

В результате вычислений приближенное решение задачи (5.3.6), (5.3.8), представленное в табл. 5.3.3, 5.3.4 (с точностью до 10^{-6}), в случае $t = 1$ примет вид:

$$\begin{aligned}\psi(s_1, s_2, 1) = & 38.1765 \sin(2s_1) \sin(s_2) - 0.003719 \sin(2s_1) \sin(2s_2) + \\ & + 0.003335 \sin(4s_1) \sin(s_2) + 6.43852 \sin(4s_1) \sin(2s_2) - 5.98779 \sin(s_2) + \\ & + 0.080015 \sin(2s_2) + 0.066769 \cos(2s_1) \sin(s_2) - 0.548598 \cos(2s_1) \sin(2s_2) - \\ & - 1.00641 \cos(4s_1) \sin(s_2) + 0.001178 \cos(4s_1) \sin(2s_2).\end{aligned}$$

Таблица 5.3.3

t	$\psi_{11}^1(t)$	$\psi_{12}^1(t)$	$\psi_{21}^1(t)$	$\psi_{22}^1(t)$
0.2	3.24692	$-2.13668 \cdot 10^{-7}$	-0.000023	1.55160
0.4	5.97037	-0.000006	-0.000302	2.49279
0.6	17.1791	0.000093	-0.001274	4.33001
0.8	36.0662	0.000586	-0.000119	6.44070
1.0	59.9674	-0.005842	0.005238	10.1136

Рассмотрим математическую модель распределения потенциала электрического поля в круге $\{r < r_0\}$ (3.5.1), (3.5.2), (3.5.4), описываемую системой:

$$\begin{aligned}(\lambda - \Delta)x_t(r, \varphi, t) - \Delta x(r, \varphi, t) + \alpha x(r, \varphi, t) = u(r, \varphi, t), \\ x(r_0, \varphi, t) = 0, \\ x(r, \varphi, 0) = x_0, \quad r \in (0, r_0), \quad \varphi \in (0, 2\pi),\end{aligned}\tag{5.3.9}$$

Таблица 5.3.4

t	$\psi_{01}^2(t)$	$\psi_{02}^2(t)$	$\psi_{11}^2(t)$	$\psi_{12}^2(t)$	$\psi_{21}^2(t)$	$\psi_{22}^2(t)$
0.2	2.91062	0.002007	0.000024	3.27722	1.46458	$1.42873 \cdot 10^{-7}$
0.4	10.4289	0.009832	0.000365	5.28147	1.94361	0.00001
0.6	46.7258	0.027574	0.003063	6.19312	0.984958	0.000280
0.8	-2.51136	0.062222	0.022947	-0.996156	-2.38078	0.001009
1.0	-9.40558	0.125687	0.104881	-.861736	-1.58087	0.001850

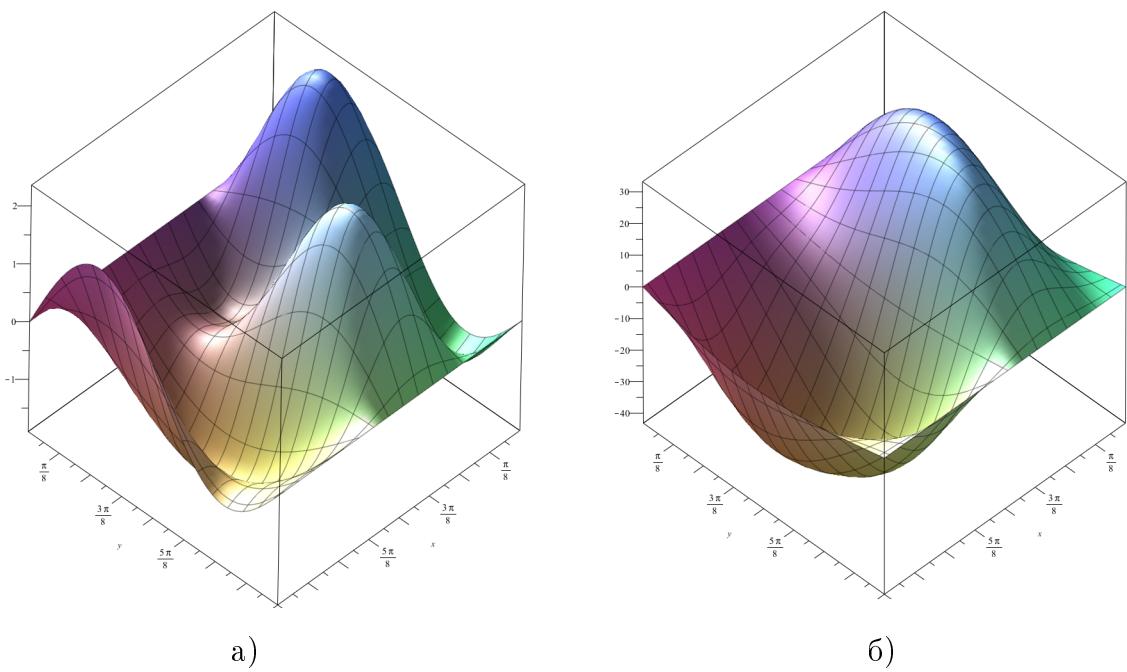


Рис. 5.3.4. График численного решения задачи (5.3.6), (5.3.8): а) в момент времени $t = 0$; б) в момент времени $t = 1$

здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$.

Пример 5.3.5. Требуется найти численное решение задачи (5.3.9) при заданных начальных данных: $m = 5$, $R = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\nu = 1$, $T = 1$, $u(r, t) = 0$, $x_0(r) = 2J_0(\mu_1^{(0)}r) - 5J_0(\mu_2^{(0)}r) + J_0(\mu_3^{(0)}r)$.

Выпишем первые собственные функции, полученные в программе для данного круга как решения задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} R(r) &= \lambda R(r) \\ R(r_0) = 0, \quad R(0) < \infty, \quad r_0 &= 1. \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

Собственные функции и собственные значения:

$$R_k(r) = J_0(\mu_k^{(0)} r), \quad \lambda_k = -(\mu_k^{(0)})^2.$$

Здесь $J_k(x)$ – функция Бесселя первого рода порядка k , $\mu_j^{(0)}$ – нули функции Бесселя нулевого порядка.

Решение $x(r, t)$ задачи (5.3.9) будем искать в виде галеркинской суммы

$$x(r, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) R_k(r). \quad (5.3.11)$$

Скалярно умножив (5.3.9) на функции $R_k(r)$, $k = 1, \dots, 5$, получим систему дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$a_1(0) = 2, a_2(0) = -5, a_3(0) = 1, a_4(0) = 0, a_5(0) = 0.$$

В результате работы программы получено приближенное решение задачи (3.5.1), (3.5.2), (3.5.4), которое представлено на рис. 5.3.5.

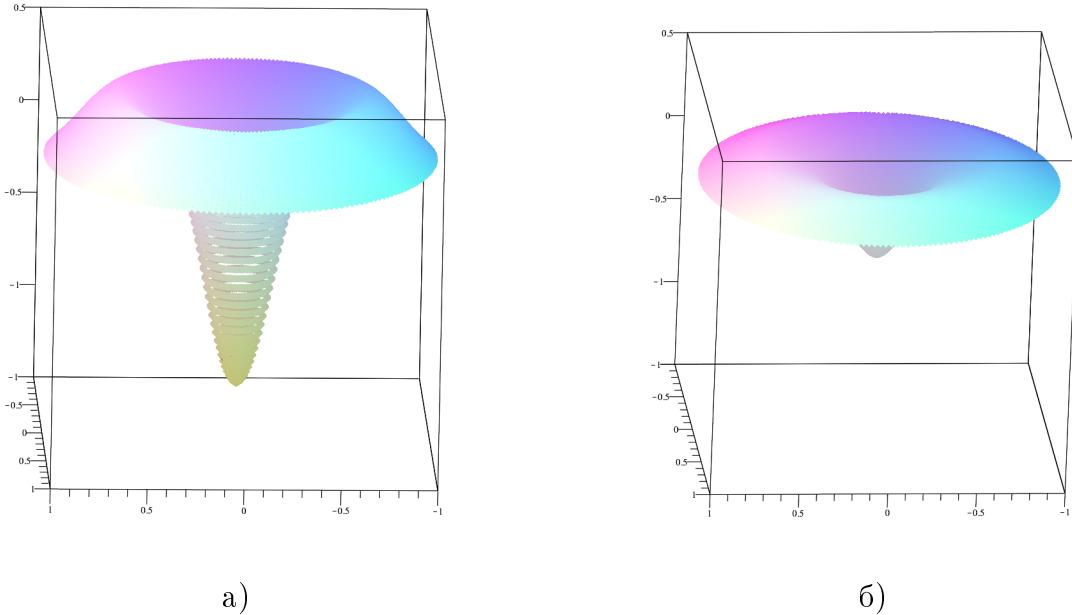


Рис. 5.3.5. График численного решения задачи (5.3.9): а) в момент времени $t = 0$; б) в момент времени $t = 1$

5.4. Численное решение задачи оптимального управления для математических моделей фильтрации

Нас интересует процесс управления давлением фильтрующейся жидкости при помощи внешнего воздействия (т.е. истоками и стоками жидкости соответственно). Рассмотрим вопрос нахождения численного решения задачи оптимального управления для математической модели Осколкова нелинейной фильтрации (3.1.1), (3.1.2). Для этого рассмотрим уравнение Осколкова нелинейной фильтрации при $n = 2$

$$\begin{aligned} & (\lambda - \Delta)x_t(s_1, s_2, t) - \alpha\Delta x(s_1, s_2, t) + \\ & + |x(s_1, s_2, t)|^{p-2}x(s_1, s_2, t) = u(s_1, s_2, t). \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Зададим область $\Omega = \{(s_1, s_2) : 0 \leq s_1 \leq \pi, 0 \leq s_2 \leq \pi\}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$(\lambda - \Delta)(x(s_1, s_2, 0) - x_0(s_1, s_2)) = 0, \quad (s_1, s_2) \in \Omega; \quad (5.4.2)$$

$$x(s_1, s_2, t) = 0, \quad (s_1, s_2, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \quad (5.4.3)$$

для уравнения (5.4.1).

Нашей целью является нахождение приближенного решения задачи оптимального управления

$$J(x, u) \rightarrow \inf \quad (5.4.4)$$

решениями задачи (5.4.1) – (5.4.3), где функционал стоимости зададим в виде

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \\ &= \beta \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi \left[|x(s_1, s_2, t) - z_d(s_1, s_2, t)|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial s_1}(x(s_1, s_2, t) - z_d(s_1, s_2, t)) \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial}{\partial s_2}(x(s_1, s_2, t) - z_d(s_1, s_2, t)) \right|^2 \right] ds_1 ds_2 dt + (1 - \beta) \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi |u(s_1, s_2, t)|^2 ds_1 ds_2 dt. \end{aligned}$$

Алгоритм нахождения приближенного решения задачи (5.4.1) – (5.4.4) при помощи методов декомпозиции, штрафа, Галеркина – Петрова – Фаэдо был описан в п. 4.4. В силу предложенного метода в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$

рассмотрим условие Дирихле (5.4.3) и условие Шоуолтера – Сидорова (5.4.2) для уравнения

$$\begin{aligned} & (\lambda - \Delta)x_t(s_1, s_2, t) - \alpha\Delta x(s_1, s_2, t) = \\ & = -|v(s_1, s_2, t)|^{p-2}v(s_1, s_2, t) + u(s_1, s_2, t). \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Уравнение (5.4.5) является линейным относительно функции $x(s_1, s_2, t)$. Зададим функционал штрафа в виде

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(x, v, u) = & \\ = & \beta\theta \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi \left[|x(s_1, s_2, t) - z_d(s_1, s_2, t)|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial s_1}(x(s_1, s_2, t) - z_d(s_1, s_2, t)) \right|^2 + \right. \\ & + \left| \frac{\partial}{\partial s_2}(x(s_1, s_2, t) - z_d(s_1, s_2, t)) \right|^2 \Big] ds_1 ds_2 dt + \\ & + \beta(1 - \theta) \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi \left[|v(s_1, s_2, t) - z_d(s_1, s_2, t)|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial s_1}(v(s_1, s_2, t) - z_d(s_1, s_2, t)) \right|^2 + \right. \\ & \left. \left| \frac{\partial}{\partial s_2}(v(s_1, s_2, t) - z_d(s_1, s_2, t)) \right|^2 \right] ds_1 ds_2 dt + (1 - \beta) \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi |u(s_1, s_2, t)|^2 ds_1 ds_2 dt + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi |x(s_1, s_2, t) - v(s_1, s_2, t)|^2 ds_1 ds_2 dt. \end{aligned}$$

Приближенное решение $\tilde{x}(s_1, s_2, t)$ задачи (5.4.1) – (5.4.4) будем искать в виде суммы

$$\tilde{x}(s_1, s_2, t) = x^m(s_1, s_2, t) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m a_{kl}(t) \varphi_{kl}(s_1, s_2), \quad (5.4.6)$$

где $m \in \mathbb{N}$ необходимо брать таким, чтобы $m > 1$, а $\{\varphi_{kl}\}$ – множество всех решений краевой задачи на собственные значения

$$(\lambda - \Delta)x(s_1, s_2) = 0, (s_1, s_2) \in \Omega;$$

$$x(0, s_2) = x(\pi, s_2) = x(s_1, 0) = x(s_1, \pi) = 0.$$

Данная спектральная задача разрешима для счетного набора собственных чисел $\lambda_{kl} = -(k^2 + l^2)$, причем функции $\{\varphi_{kl} = \frac{2}{\pi} \sin(ks_1) \sin(ls_2)\}$ образуют ортонормальную с весом $\frac{2}{\pi}$ систему функций. В силу теоремы 3.1.1 существует единственное решение задачи (5.4.1) – (5.4.3) при $\lambda \geq -2$.

Представим правую часть уравнения (5.4.5) в виде

$$\tilde{u}(s_1, s_2, t) = u^m(s, t) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m u_{kl}(t) \varphi_{kl}(s_1, s_2), \quad (5.4.7)$$

$$\tilde{v}(s_1, s_2, t) = v^m(s, t) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m v_{kl}(t) \varphi_{kl}(s_1, s_2). \quad (5.4.8)$$

Опираясь на метод Ритца, будем искать неизвестные $v_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, $u_i(t)$, $i = 2, \dots, m$ в виде

$$v_{ln}(t, N) = \sum_{l=1}^m \sum_{n=0}^N c_n t^n, \quad u_{ln}(t, N) = \sum_{l=1}^m \sum_{n=0}^N b_n t^n, \quad (5.4.9)$$

выбирая коэффициенты b_{ln} и c_{ln} так, чтобы функции $v_i(t, N)$, $u_i(t, N)$ доставляли минимум функционалу $J_\varepsilon(x, v, u)$.

Пример 5.4.1. Требуется найти приближенное решение задачи управления (5.4.1) – (5.4.4) в случае $\lambda = -2$, $\alpha = 1$, $T = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{99}{100}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $m = 2$, $N = 3$,

$$x_0 = \frac{2}{\pi} ((\sin s_1 \sin s_2 + 2 \sin(2s_1) \sin(s_2) + \sin(2s_1) \sin(2s_2) + 2 \sin(s_1) \sin(2s_2)),$$

$$z_d(s_1, s_2, t) = \frac{2}{\pi} (\sin s_1 \sin s_2 + (t+2) \sin(s_1) \sin(2s_2) + \sin(2s_1) \sin(2s_2) + (t^2 + 2) \sin(2s_1) \sin(s_2)).$$

Графики функций $x_0(s_1, s_2)$, $z_d(s_1, s_2, t)$ представлены на рис. 5.4.1. Подставляя полученные разложения (5.4.6) – (5.4.9) в уравнение (5.4.1), получим систему алгебро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_{11} = \frac{1}{4\pi} (4u_{11}\pi^2 - 9v_{11}^3 - 18v_{11}(v_{12}^2 + v_{21}^2) - 12v_{11}v_{22}^2 - 24v_{12}v_{21}v_{22}), \\ 3\frac{dx_{12}}{dt} + 5x_{12} = \frac{1}{4\pi} (4u_{12}\pi^2 - 24v_{11}v_{21}v_{22} - 9v_{12}^3 - 6v_{12}(3v_{11}^2 + 2v_{21}^2 + 3v_{22}^2)), \\ 3\frac{dx_{21}}{dt} + 5x_{21} = \frac{1}{4\pi} (4u_{21}\pi^2 - 24v_{11}v_{12}v_{22} - 9v_{21}^3 - 6v_{21}(3v_{11}^2 + 2v_{12}^2 + 3v_{22}^2)), \\ 6\frac{dx_{22}}{dt} + 8x_{22} = \frac{1}{4\pi} (4u_{22}\pi^2 - 24v_{11}v_{12}v_{21} - 9v_{22}^3 - 6v_{22}(3v_{12}^2 + 3v_{21}^2 + 2v_{11}^2)) \end{cases}$$

с начальными условиями $x_{12}(0) = 2$, $x_{21}(0) = 2$, $x_{22}(0) = 1$.

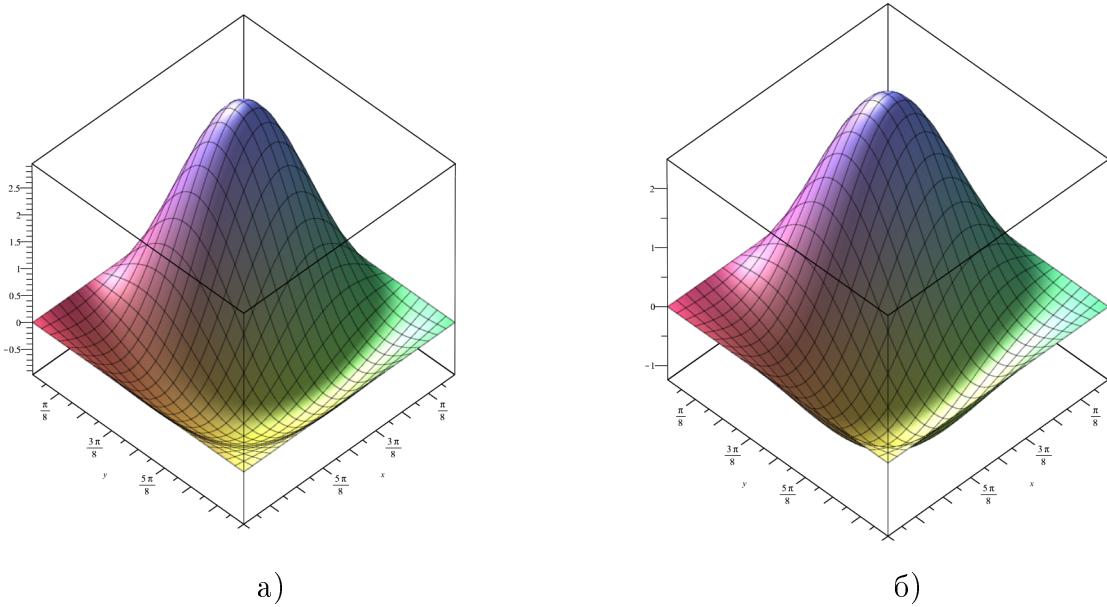


Рис. 5.4.1. Начальные функции задачи (5.4.1) – (5.4.4): а) функция $x_0(s_1, s_2)$; б) функция $z_d(s_1, s_2, 1)$ в момент времени $t = 1$

Таблица 5.4.1

$b_{110} = 5.078360$	$b_{111} = 0$	$b_{112} = 0$	$b_{120} = 12.985270$
$b_{121} = 0$	$b_{122} = 0$	$b_{210} = 11.521122$	$b_{211} = 0.835746$
$b_{212} = 0$	$b_{220} = 5.290295$	$b_{221} = 0$	$b_{222} = 0$
$c_{110} = 0.523264$	$c_{111} = 0.583551$	$c_{112} = -0.436768$	$c_{120} = 1.868340$
$c_{121} = 0.013369$	$c_{122} = 0.081524$	$c_{210} = 1.862006$	$c_{211} = -0.467513$
$c_{212} = 0.478953$	$c_{220} = 0.852953$	$c_{221} = -0.348415$	$c_{222} = 0.045725$

В результате работы программы были найдены коэффициенты управления (см. табл. 5.4.1) и значение функционала $J_\varepsilon = 7.259320$. Решение задачи (5.4.1) – (5.4.4) примет вид:

$$u(s_1, s_2, t) = \frac{2}{\pi} (5.078360 \sin(s_1) \sin(s_2) + 12.985270 \sin(s_1) \sin(2s_2) + \\ + 0.835746t + 11.521122 \sin(2s_1) \sin(s_2) + 5.290295 \sin(2s_1) \sin(2s_2)),$$

$$\begin{aligned}
x(s_1, s_2, t) = & \frac{1}{4\pi^3} \sin(s_1) \sin(s_2) (-21.947862t^3 - 8.809052t^5 + 2.573719t^6 - \\
& - 16.371223t + 20.313440\pi^2 + 23.664127t^2 + 20.964657t^4 - 142.606457) + \\
& + \frac{2}{\pi} \sin(s_1) \sin(2s_2) (2e^{-\frac{5}{3}t} + \frac{1}{62500\pi^2} (-1.623159 \cdot 10^5 \cdot \pi^2 e^{-\frac{5}{3}t} + 68379.489897t^3 + \\
& + 3.714344 \cdot 10^5 t - 2.38332910^5 t^2 - 13294.066407t^4 - 359.167488t^5 - 883.54t^6 + \\
& + 1.62315910^5 \pi^2 - 8.16761710^5 + 8.167617e^{-\frac{5}{3}t})) + \frac{2}{\pi} \sin(2s_1) \sin(s_2) (2e^{-\frac{5}{3}t} + \\
& + \frac{1}{6250\pi^2} (-1.377450 \cdot 10^5 \pi^2 e^{-\frac{5}{3}t} + 1.78690710^6 e^{-\frac{5}{3}t} + 7.192970 \cdot 10^5 t^3 + \\
& + 1.990306 \cdot 10^6 t - 1.5132151 \cdot 10^6 t^2 - 2.54059610^5 t^4 + 57535.385947t^5 - \\
& - 8283.1452466052174715t^6 + 1.37746010^5 \pi^2 + 10446.830123\pi^2 t - \\
& - 1.786907^6 10^6)) + \frac{2}{\pi} \sin(2s_1) \sin(2s_2) (1 + \frac{1}{8192\pi^2} (-5417.262223\pi^2 e^{-\frac{4}{3}t} + \\
& + 38947.561299t e^{-\frac{4}{3}t} - 20286.753607t^2 + 7131.739743t^3 - 1938.291098t + \\
& + 402.464983t^5 + 28.029693t^6 + 5417.262230\pi^2 - 69889.004834 + 69889e^{-\frac{4}{3}t})), \\
v(s_1, s_2, t) = & \frac{2}{\pi} (-0.436768t^2 + 0.583550t + 0.523264) \sin(s_1) \sin(s_2) + \\
& + (0.081524t^2 + 0.0133691t + 1.868340) \sin(s_1) \sin(2s_2) + \\
& + (0.478953t^2 - 0.467513t + 1.862006) \sin(2s_1) \sin(s_2) + \\
& + (0.045725t^2 - 0.348415t + 0.852953) \sin(2s_1) \sin(2s_2).
\end{aligned}$$

Графики приближенного решения задачи (5.4.1) – (5.4.4) изображены на рис. 5.4.2 и 5.4.3.

На рис. 5.4.4 представлены графики функций $x(s_1, \frac{7\pi}{8}, 1)$, $v(s_1, \frac{7\pi}{8}, 1)$, $z_d(s_1, \frac{7\pi}{8}, 1)$ при $t = 1$, $s_2 = \frac{7\pi}{8}$.

Пример 5.4.2. Требуется найти приближенное решение задачи управления (5.4.1) – (5.4.4), рассмотренной в примере 5.4.1 в случае $\beta = \frac{1}{2}$. В результате работы программы были найдены коэффициенты управления (см. табл. 5.4.2) и значение функционала $J_\varepsilon = 9.889465$. График оптимального управления $u(s_1, s_2, 1)$ представлен на рис. 5.4.5.

На рис. 5.4.6 представлены графики функций $x(s_1, \frac{7\pi}{8}, 1)$, $v(s_1, \frac{7\pi}{8}, 1)$, $z_d(s_1, \frac{7\pi}{8}, 1)$ при $t = 1$, $s_2 = \frac{7\pi}{8}$.

Замечание 5.4.1. По результатам вычислительных экспериментов, отраженных в примерах 5.4.1 и 5.4.2, можно сделать вывод, что при изме-

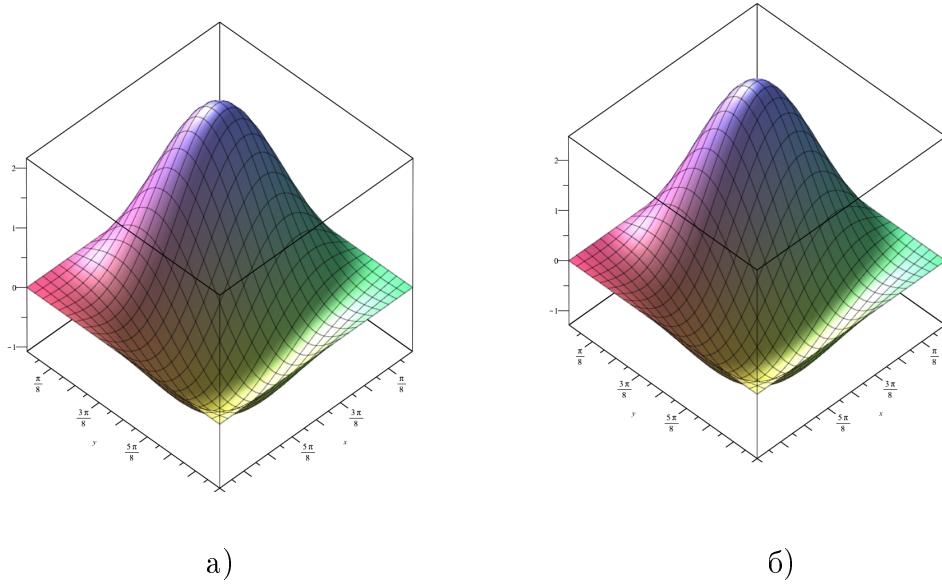


Рис. 5.4.2. График численного решения задачи (5.4.1) – (5.4.4): а) функция $x(s_1, s_2, 1)$ в момент времени $t = 1$; б) функция $v(s_1, s_2, 1)$ в момент времени $t = 1$

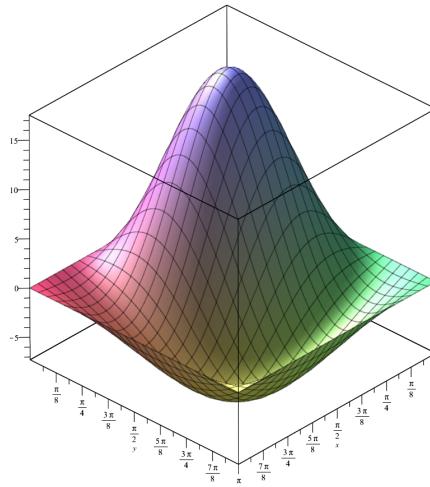


Рис. 5.4.3. График оптимального управления $u(s_1, s_2, 1)$ решениями задачи (5.4.1) – (5.4.4) в момент времени $t = 1$

нении параметра β изменяется характер поиска управления. Чем ближе значение параметра β ($0 < \beta < 1$) приближается к 1, тем ближе искомые функции $x(s_1, s_2, t)$ и $v(s_1, s_2, t)$ приближаются к требуемому состоянию $z_d(s_1, s_2, t)$. Однако управление $u(s_1, s_2, t)$ возрастает. Если уменьшать параметр β , то по абсолютной величине уменьшается внешнее воздействие $u(s_1, s_2, t)$, но тогда искомое решение $x(s_1, s_2, t)$ и $v(s_1, s_2, t)$ хуже удовлетворяют заданным условиям.

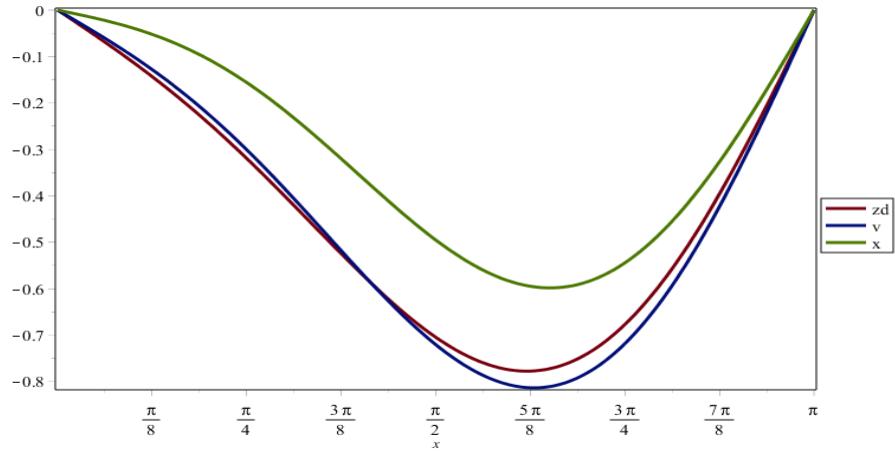


Рис. 5.4.4. График численного решения задачи (5.4.1) – (5.4.4) в момент времени $t = 1$ и при

$$s_2 = \frac{7\pi}{8}$$

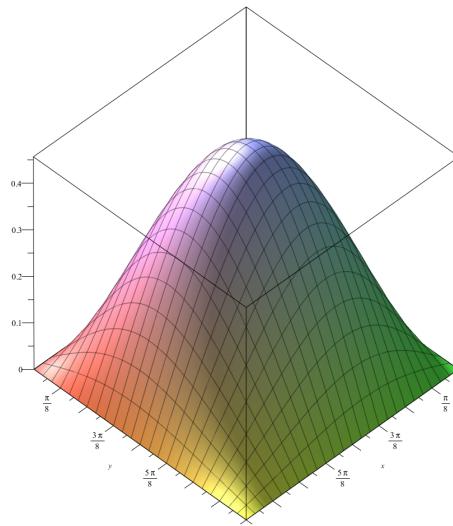


Рис. 5.4.5. График оптимального управления $u(s_1, s_2, 1)$ решением задачи (5.4.1) – (5.4.4) в

момент времени $t = 1$

Таблица 5.4.2

$b_{110} = 1.628028$	$b_{111} = -4.521307$	$b_{112} = 3.602013$	$b_{120} = 0.337179$
$b_{121} = 1.237517$	$b_{122} = -1.540211$	$b_{210} = 0.268694$	$b_{211} = 1.225880$
$b_{212} = -1.446327$	$b_{220} = 0.039733$	$b_{221} = 0.461146$	$b_{222} = -0.529343$
$c_{110} = -0.090351$	$c_{111} = 0.379797$	$c_{112} = -.133310$	$c_{120} = 1.772402$
$c_{121} = -2.209892$	$c_{122} = 1.149617$	$c_{210} = 1.777240$	$c_{211} = -2.364640$
$c_{212} = 1.296475$	$c_{220} = 0.738801$	$c_{221} = -.280850$	$c_{222} = -.157092$

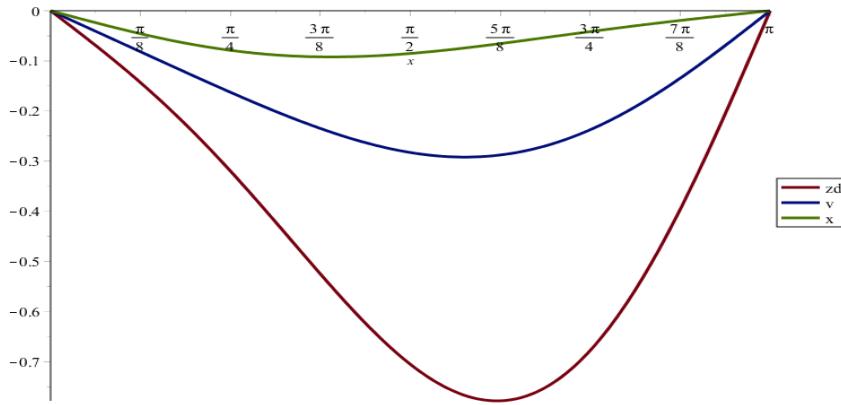


Рис. 5.4.6. График численного решения задачи (5.4.1) – (5.4.4) в момент времени $t = 1$ и при

$$s_2 = \frac{7\pi}{8}$$

5.5. Численное исследование задач оптимального управления на основе метода многошагового покоординатного спуска

Проведем численное исследование модели регулирования распределением потенциала скорости движения свободной поверхности фильтрующейся жидкости. В цилиндре $Q_T = (0, l) \times (0, T)$, $T > 0$ рассмотрим обобщенную фильтрационную модель Буссинеска (3.6.1), (3.6.2) с начальным условием Коши (3.6.4) или условием Шоултера – Сидорова (3.6.3). Нашей целью является нахождение приближенного решения задачи оптимального управления

$$J(x, u) \rightarrow \inf \quad (5.5.1)$$

решениями задачи (3.6.1), (3.6.2), (3.6.4) и задачи (3.6.1) – (3.6.3), где функционал стоимости задан в виде

$$J(x, u) = \beta \int_0^T \int_0^l |x(s, t) - z_d(s, t)|^p ds dt + (1 - \beta) \int_0^T \int_0^l |u|^q ds dt, \quad (5.5.2)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Алгоритм нахождения приближенного решения задачи (3.6.1) – (3.6.3), (5.5.1) и задачи (3.6.1), (3.6.2), (3.6.4), (5.5.1) на основе методов Галеркина – Петрова и многошагового покоординатного спуска с памятью

описан в п. 4.5. В силу предложенного метода приближенное решение $\tilde{x}(s, t)$ задачи будем искать в виде суммы

$$\tilde{x}(s, t) = x^m(s, t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \varphi_i(s). \quad (5.5.3)$$

Представим правую часть уравнения (5.1.4) в виде

$$\tilde{u}(s, t) = \sum_{i=1}^m \langle u(s, t), \varphi_i(s) \rangle \varphi_i(s) = \sum_{i=1}^m u_i(t) \varphi_i(s). \quad (5.5.4)$$

Затем, опираясь на метод Ритца, будем искать неизвестные $u_i(t)$, $i = r, \dots, m$ в виде

$$u_i(t, N) = \sum_{n=0}^N b_n t^n, \quad (5.5.5)$$

выбирая коэффициенты b_n так, чтобы функции $u_i(t, N)$ доставляли минимум функционалу (5.5.2).

Пример 5.5.1. Рассмотрим задачу (3.6.1), (3.6.2), (3.6.4), (5.5.1) в случае $\lambda = 1$, $p = 4$, $l = \pi$, $T = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$, $x_0(s) = \sin(2s) + \sin(5s)$, $z_d(s, t) = \frac{1}{4} \sin s + (t^2 + 1) \sin(2s) + 0.6t^3 \sin(3s) + 2t \sin(4s) + \sin(5s)$, $m = 5$, $N = 5$.

В результате вычислений были найдены коэффициенты управления (см. табл. 5.5.1), при которых значения функционала достигается $J = 4.048627$. При найденных коэффициентах управления было найдено численное решение задачи (3.6.1), (3.6.2), (3.6.4) (см. табл. 5.5.2), графики приближенного решения $\tilde{x}(s, 1)$ и $z(s, 1)$ в момент времени $t = 1$ представлены на рис. 5.5.1.

Таблица 5.5.1

$b_{10} = 0.4175417$	$b_{11} = 0.3932042$	$b_{12} = 0$	$b_{13} = 0$	$b_{14} = 0$	$b_{15} = -0.4032380$
$b_{20} = 0.2672005$	$b_{21} = 0.5073153$	$b_{22} = 0$	$b_{23} = 0$	$b_{24} = 0$	$b_{25} = 0.8945241$
$b_{30} = 0$	$b_{31} = 0$	$b_{32} = 0$	$b_{33} = 0$	$b_{34} = 0$	$b_{35} = 1.461488$
$b_{40} = 0$	$b_{41} = 0.4247353$	$b_{42} = 0$	$b_{43} = 0$	$b_{44} = 0$	$b_{45} = 0$
$b_{50} = 0$	$b_{51} = 0$	$b_{52} = 0$	$b_{53} = 0$	$b_{54} = 0$	$b_{55} = 0$

Пример 5.5.2. Рассмотрим задачу (3.6.1) – (3.6.3), (5.5.1) в случае $\lambda = -1$, $p = 4$, $l = \pi$, $T = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$, $x_0(s) = 2 \sin(s) + \sin(2s) + \sin(5s)$, $z_d(s, t) = \frac{1}{4} \sin s + (t^2 + 1) \sin(2s) + 0.6t^3 \sin(3s) + 2t \sin(4s) + \sin(5s)$, $m = 5$, $N = 5$.

Таблица 5.5.2

t	$a_1(t)$	$a_2(t)$	$a_3(t)$	$a_4(t)$	$a_5(t)$
0	1.79222	0	0	0	1.79222
0.2	0.194020	1.6038	0.274290	0.28795	1.5969
0.4	0.332990	1.56383	0.495314	0.53661	1.6345
0.6	0.442234	1.5516	0.673230	0.759880	1.76934
0.8	0.533125	1.56056	0.871525	1.02168	2.02570
1.0	0.601775	1.5947	1.16946	1.396820	2.48340

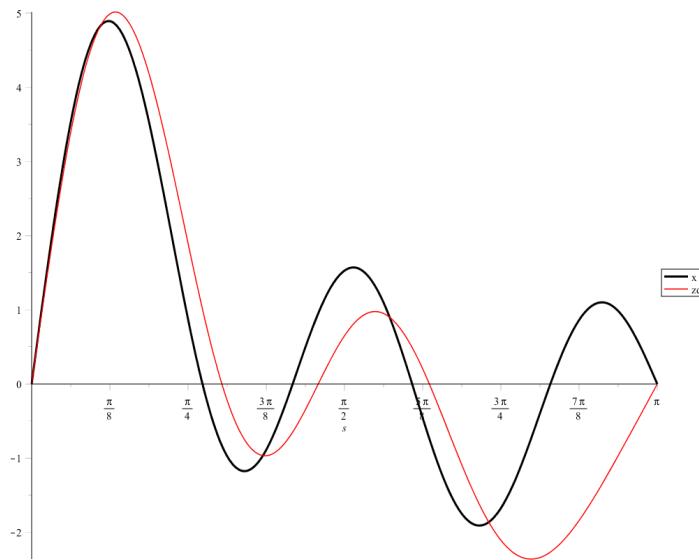


Рис. 5.5.1. График численного решения задачи (3.6.1), (3.6.2), (3.6.4), (5.5.1) в момент времени $t = 1$

В результате вычислений были найдены коэффициенты управления (см. табл. 5.5.3), при которых значения функционала $J = 3.971911$. При найденных коэффициентах управления было найдено численное решение задачи (3.6.1) – (3.6.3) (см. табл. 5.5.4), графики приближенного решения $\tilde{x}(s, 1)$ и $z(s, 1)$ в момент времени $t = 1$ представлены на рис. 5.5.2.

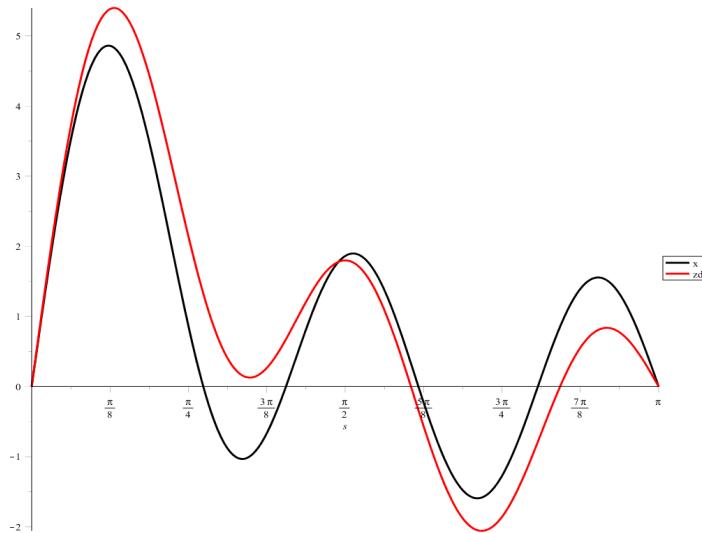
Замечание 5.5.1. В примере 5.5.2 найдено приближенное решение задачи Шоуолтера – Сидорова. Решение задачи Коши не существует, так как начальная функция x_0 не принадлежит фазовому многообразию \mathfrak{M} .

Таблица 5.5.3

$b_{10} = 0$	$b_{11} = 0.3932042$	$b_{12} = 0$	$b_{13} = 0$	$b_{14} = 0.3285297$	$b_{15} = -0.02342224$
$b_{20} = 0$	$b_{21} = 0.6751964$	$b_{22} = 0$	$b_{23} = 0$	$b_{24} = -0.6095218$	$b_{25} = 1.627153$
$b_{30} = 0.09647555$	$b_{31} = 0$	$b_{32} = 0$	$b_{33} = 0$	$b_{34} = 0$	$b_{35} = 1.320860$
$b_{40} = -0.0522531$	$b_{41} = 0.3795494$	$b_{42} = 0$	$b_{43} = 0$	$b_{44} = 0$	$b_{45} = 0$
$b_{50} = 0$	$b_{51} = 0$	$b_{52} = 0$	$b_{53} = 0$	$b_{54} = 0$	$b_{55} = 3.425175$

Таблица 5.5.4

t	$a_1(t)$	$a_2(t)$	$a_3(t)$	$a_4(t)$	$a_5(t)$
0	0.388145	1.79222	0	0	3.22603
0.2	0.337140	0.895050	0.0966660	0.0292608	2.14099
0.4	0.542735	0.804680	0.28903	0.199218	1.90507
0.6	0.763540	0.898925	0.532845	0.432169	1.89978
0.8	0.952825	1.08606	0.839645	0.752255	2.09191
1.0	0.985030	1.34000	1.24176	1.22444	2.59138

**Рис. 5.5.2.** График численного решения задачи (3.6.1) – (3.6.3), (5.5.1) в момент времени $t = 1$

Заключение

В диссертационной работе исследованы задачи оптимального управления и математические модели, основанные на полулинейных уравнениях соболевского типа с s -монотонными и p -коэрцитивными операторами: математическая модель динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости, математическая модель Осколкова нелинейной фильтрации, обобщенная математическая модель Хоффа, обобщенная математическая модель деформации конструкции из двутавровых балок, математическая модель распределения потенциала электрического поля в полупроводнике, обобщенная математическая фильтрационная модель Буссинеска.

Разработаны аналитические и численные методы исследования указанных математических моделей и задач оптимального управления для них. Построен общий метод исследования задачи оптимального управления для рассматриваемого класса математических моделей, приведены необходимые условия существования оптимального управления для них.

Доказаны:

1. Теоремы об однозначной разрешимости задачи Коши и задачи Шоултера – Сидорова для полулинейного уравнения соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором;
2. Теорема о структуре фазового пространства полулинейного уравнения соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором;
3. Теорема об однозначной разрешимости задачи Шоултера – Сидорова для полулинейного уравнения соболевского типа с билинейным оператором;
4. Теоремы о разрешимости задачи оптимального управления решениями полулинейного уравнения соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором и начальными условиями Коши или Шоултера – Сидорова;
5. Теорема о разрешимости задачи оптимального управления решениями полулинейного уравнения соболевского типа с билинейным оператором и начальным условием Шоултера – Сидорова.

На основе полученных абстрактных результатов было проведено аналитическое исследование математических моделей процессов фильтрации, деформации и электрического поля. Разработаны численные методы исследования указанных задач, которые реализованы в виде комплекса программ.

Результаты, выносимые на защиту:

В рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей получены:

1. Достаточные условия существования оптимального управления в математической модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости с начальным условием Шоултера – Сидорова;
2. Достаточные условия существования оптимального управления в математической модели Осколкова нелинейной фильтрации с начальными условиями Шоултера – Сидорова или Коши; необходимые условия существования оптимального управления;
3. Достаточные условия существования оптимального управления в обобщенной математической модели Хоффа с начальными условиями Шоултера – Сидорова или Коши; необходимые условия существования оптимального управления;
4. Достаточные условия существования оптимального управления в обобщенной математической модели деформации конструкции из двутавровых балок с начальными условиями Шоултера – Сидорова или Коши;
5. Достаточные условия существования оптимального управления в математической модели распределения потенциала электрического поля в полупроводнике с начальными условиями Шоултера – Сидорова или Коши; необходимые условия существования оптимального управления;
6. Достаточные условия существования оптимального управления в обобщенной математической фильтрационной модели Буссинеска с начальными условиями Шоултера – Сидорова или Коши; необходимые условия существования оптимального управления;

7. Достаточные условия существования оптимального управления в математических моделях, основанных на полулинейном уравнении соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором, с билинейным оператором.

В рамках разработки, обоснования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий получены:

8. Сходимость численного метода приближенного решения математических моделей как задач Коши или Шоуолтера – Сидорова для полулинейного уравнения соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором;

9. Алгоритм численного метода исследования математических моделей на основе полулинейного уравнения соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором;

10. Алгоритм численного метода исследования задачи оптимального управления для математических моделей с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором на основе метода декомпозиции;

11. Алгоритм численного метода исследования задачи оптимального управления для математических моделей с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором на основе метода многошагового покоординатного спуска с памятью.

В рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов получены:

12. Комплекс программ, реализующий алгоритмы численного метода исследования математических моделей на основе полулинейного уравнения соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором на отрезке, на графике, в прямоугольнике, в круге;

13. Комплекс программ, реализующий алгоритмы численного метода исследования задачи оптимального управления для математических моделей с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором на основе метода декомпозиции;

14. Комплекс программ, реализующий алгоритмы численного метода исследования задачи оптимального управления для математических моделей с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором на основе метода многошагового покоординатного спуска с памятью.

Таким образом, в работе решены все поставленные задачи и достигнута цель исследования, что позволяет говорить о соответствии диссертационной работы следующим областям исследования паспорта специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

- 1) развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п. 2);
- 2) разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (п. 3);
- 3) реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов (п. 4).

Список литературы

1. Александрян, Р.А. Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С.Л. Соболева / Р.А. Александрян // Труды Московского математического общества. – 1960. – Т. 9. – С. 455–505.
2. Альшин, А.Б. Схемы Розенброка с комплексными коэффициентами для жестких и дифференциально-алгебраических систем / А.Б. Альшин, Е.А. Альшина, Н.Н. Калиткин, А.Б. Корягина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 8. – С. 1392–1414.
3. Амфилохиев, В.Б. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений / В.Б. Амфилохиев, Я.И. Войткунский, Н.П. Мазаева // Труды Ленинградского кораблестроительного института. – 1975. – Вып. 96. – С. 3–9.
4. Аргучинцев, А.В. Оптимальное управление начально-краевыми условиями гиперболических систем / А.В. Аргучинцев. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2003. – 155 с.
5. Баев, А.Д. Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции / А.Д. Баев, С.П. Зубова, В.И. Усков // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 134–140.
6. Баев, А.Д. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Ф.В. Голованева, Меан Мон // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 2. – С. 74–80.

7. Баязитова, А.А. Исследование прямых и обратных задач в моделях Хоффа: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.А. Баязитова; Юж.-Урал. гос. ун-т. – Челябинск, 2011. – 124 с.
8. Бояринцев, Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы: методы решения и исследования / Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
9. Булатов, М.В. Об одном численном методе решения дифференциально-алгебраических уравнений / М.В. Булатов, В.Ф. Чистяков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42, № 4. – С. 459–470.
10. Бутковский, А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
11. Бычков, Е.В. Исследование полулинейных математических моделей соболевского типа второго порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Е.В. Бычков; Юж.-Урал. гос. ун-т. – Челябинск, 2013. – 106 с.
12. Вайнберг, М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг. – М.: Наука, 1972. – 415 с.
13. Вишик, М.И. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения / М.И. Вишик // Математический сборник. – 1956. – Т. 39 (81), № 1. – С. 51-148.
14. Ворович, И.И. Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости / И.И. Ворович, В.И. Юдович // Математический сборник. – 1961. – Т. 53, № 4. – С. 393–428.
15. Врагов, В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В.Н. Врагов. – Новосибирск: НГУ, 1983. – 179 с.

16. Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
17. Гальперн, С.А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными / С.А. Гальперн // Труды Московского математического общества.– 1960.– Т. 9.– С. 401–423.
18. Гильмутдинова, А.Ф. Исследование математических моделей с феноменом неединственности: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / А.Ф. Гильмутдинова; Юж.-Урал. гос. ун-т. – Челябинск, 2009. – 123 с.
19. Гликлих, Ю.Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов / Ю.Е. Гликлих // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 27 (286), вып. 13. – С. 24–34.
20. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 438 с.
21. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука. – 1967. – 472 с.
22. Дзекцер, Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод / Е.С. Дзекцер // Доклады Академии наук СССР. – 1972. – Т. 202, № 5. – С. 1031–1033.
23. Егоров, А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
24. Егоров, И.Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов. – Новосибирск: Наука, 2000. – 336 с.

25. Ефремов, А.А. Исследование оптимального управления линейными уравнениями типа Соболева: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.А. Ефремов; Челяб. гос. ун-т. – Челябинск, 1996. – 102 с.
26. Загребина, С.А. Многоточечная начально-конечная задача для линейной модели Хоффа / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 5 (264), вып. 11. – С. 4–12.
27. Загребина, С.А. Исследование многоточечных начально-конечных задач для неклассических уравнений математической физики: дис. ... докт. физ.-мат. наук / С.А. Загребина; Юж.-Урал. гос. ун-т. – Челябинск, 2013. – 220 с.
28. Загребина, С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 5–24.
29. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.
30. Замышляева, А.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнений Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 5 (264), вып. 11. – С. 13–24.
31. Замышляева, А.А. Фазовое пространство модифицированного уравнения Буссинеска / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 18 (277), вып. 12. – С. 13–19.

32. Замышляева, А.А. Исследование линейных математических моделей соболевского типа высокого порядка: дис. ... докт. физ.-мат. наук / А.А. Замышляева; Юж.-Урал. гос. ун-т. – Челябинск, 2013. – 276 с.
33. Зеленяк, Т.И. Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными / Т.И. Зеленяк. – Новосибирск, 1970. – 164 с.
34. Звягин, В.Г. Оптимальное управление в модели движения вязкоупругой среды с объективной производной / В.Г. Звягин, А.В. Кузнецов // Известия вузов. Математика. – 2009. – № 5. – С. 55–61.
35. Зубов, В.И. Лекции по теории управления / В.И. Зубов. – М.: Наука, 1975. – 494 с.
36. Иваненко, В.И. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами / В.И. Иваненко, В.С. Мельник. – Киев: Наукова думка, 1988. – 288 с.
37. Казак, В.О. Исследование фазовых пространств одного класса полулинейных уравнений соболевского типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук / В.О. Казак; Челяб. гос. ун-т. – Челябинск, 2005. – 99 с.
38. Келлер, А.В. Алгоритм решения задачи Шоуолтера – Сидорова для моделей леонтьевского типа / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – № 4 (221), вып. 7. – С. 40–46.
39. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа: дис. ... докт. физ.-мат. наук / А.В. Келлер; Юж.-Урал. гос. ун-т. – Челябинск, 2011. – 249 с.
40. Келлер, А.В. Голоморфные вырожденные группы операторов в квазибанаховых пространствах / А.В. Келлер, Д.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 20–27.

41. Кожанов, А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка / А.И. Кожанов. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1990. – 132 с.
42. Корпусов, М.О. О «разрушении» решения сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью / М.О. Корпусов, А.Г. Свешников // Математические заметки. – 2006. – Т. 79, № 6. – С. 879–899.
43. Корпусов, М.О. О разрушении решения системы уравнений Осколкова / М.О. Корпусов, А.Г. Свешников // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 4. – С. 83–108.
44. Костюченко, А.Г. Задача Коши для уравнений Соболева – Гальперна / А.Г. Костюченко, Г.И. Эскин // Труды Московского математического общества. – 1961. – Т. 10. – С. 273-284.
45. Котсиолис, А.А. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных диссипативных уравнений типа С.Л. Соболева / А.А. Котсиолис, А.П. Осколков, Р.Д. Щадиев // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1992. – Т. 199. – С. 91-113.
46. Красовский, Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 475 с.
47. Крейн, С.Г. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве: [Препринт] / С.Г. Крейн, К.И. Чернышов. – Новосибирск: Ин-т математики, 1979. – 18 с.
48. Кризский, В.Н. Математическое моделирование и оптимизация обратных задач определения геоэлектрических параметров кусочно-однородных сред / В.Н. Кризский, И.А. Герасимов, М.Б. Заваруева // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, № 3. – С. 32–33.
49. Кризский, В.Н. Математическое моделирование процессов диффузии-адвекции Радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах

- с включениями / В.Н. Кризский, А.Р. Нафикова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 38–45.
50. Курина, Г.А. О поведении множеств достижимости линейных матрично сингулярно возмущенных систем / Г.А. Курина // Оптимальное управление и дифференциальные уравнения. (Труды Математического института РАН. Вып. 211). – М.: Наука; Физматлит, 1995. – С. 316–325.
51. Курина, Г.А. Асимптотика решения задач оптимального управления для дискретных слабоуправляемых систем / Г.А. Курина // Прикладная математика и механика. – 2002. – Т. 66, № 2. – С. 214–227.
52. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
53. Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 412 с.
54. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
55. Лионс, Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами / Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1987. – 367 с.
56. Лурье, К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики / К.А. Лурье. – М.: Наука, 1975. – 478 с.
57. Матвеев, А.С. Абстрактная теория оптимального управления / А.С. Матвеев, В.Я. Якубович. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1994. – 361 с.
58. Мельникова, И.В. Корректность вырожденной задачи Коши в банаховом пространстве / И.В. Мельникова, М.А. Алышанский // Доклады Академии наук. – 1994. – Т. 336, № 1. – С. 17–20.

59. Мустафина, С.А. Оптимальные технологические решения для катализитических процессов и реакторов / С.А. Мустафина, Ю.А. Валиева, Р.С. Давлетшин, А.В. Балаев, С.И. Спивак // Кинетика и катализ. – 2005. – Т. 46, № 5. – С. 749–756.
60. Нелинейная теория управления и ее приложения / Под ред. В.А. Матросова и др. – М.: Физматлит, 2000. – 320 с.
61. Ниренберг, Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг. – М.: Мир, 1977. – 232 с.
62. Осколков, А.П. О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1976. – Т. 59. – С. 133–137.
63. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения нелинейных вязкоупругих жидкостей / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1985. – Т. 147. – С. 110–119.
64. Осколков, А.П. Нелокальные задачи для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31–48.
65. Осколков, А.П. Нелокальные задачи для уравнений фильтрации неньютоновых жидкостей в пористых средах / А.П. Осколков, М.М. Ахматов, Р.Д. Щадиев // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1991. – Т. 189. – С. 82–100.
66. Панкратов, И.А. Применение метода Галеркина к решению линейных задач оптимального управления / И.А. Панкратов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, № 3. – С. 340–349.

67. Петровский, И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г. Петровский. – М.: Физматгиз, 1961. – 401 с.
68. Полубаринова-Кочина, П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1987. – 664 с.
69. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. – М.: Физматлит, 2005. – 272 с.
70. Плеханова, М.В. Оптимальное управление вырожденными распределенными системами / М.В. Плеханова, В.Е. Федоров. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013. – 174 с.
71. Понtryгин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понtryгин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1961. – 120 с.
72. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 104 с.
73. Свешников, А.Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: Физматлит, 2007. – 736 с.
74. Свешников, А.Г. Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов. – М.: Научный мир, 2008. – 400 с.
75. Свиридов, Г.А. Многообразие решений одного сингулярного псевдопарabolического уравнения / Г.А. Свиридов // Доклады Академии наук СССР. – 1986. – Т. 289, № 6. – С. 1315–1318.
76. Свиридов, Г.А. О разрешимости сингулярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Г.А. Свиридов // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 9. – С. 1637–1639.

77. Свиридов, Г.А. Разрешимость неоднородной задачи для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридов, И.Н. Семенова // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 9. – С. 1607–1611.
78. Свиридов, Г.А. Многообразия решений одного класса эволюционных и динамических уравнений / Г.А. Свиридов // Доклады Академии наук СССР. – 1989. – Т. 304, № 2. – С. 301–304.
79. Свиридов, Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридов // Известия вузов. Математика. – 1989. – № 2. – С. 55–61.
80. Свиридов, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридов, Т.Г. Сукачева // Сибирский математический журнал. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 109–119.
81. Свиридов, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридов, Т.Г. Сукачева // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 250–258.
82. Свиридов, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридов // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192–207.
83. Свиридов, Г.А. Об одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридов // Известия вузов. Математика. – 1994. – № 1. – С. 62–70.
84. Свиридов, Г.А. Фазовые пространства уравнений типа Соболева с *s*-монотонными и сильно коэрцитивными операторами / Г.А. Свиридов, М.В. Климентьев // Известия вузов. Математика. – 1994. – № 11. – С. 75–82.
85. Свиридов, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно р-секториальными операторами / Г.А. Свири-

- дюк, А.А. Ефремов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1912–1919.
86. Свиридов, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова / Г.А. Свиридов, М.М. Якупов // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 11. – С. 1538–1543.
 87. Свиридов, Г.А. О разрешимости нестационарной задачи несжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридов, Т.Г. Сукачева // Математические заметки. – 1998. – Т. 63, № 3. – С. 442–450.
 88. Свиридов, Г.А. Оптимальное управление одним классом линейных вырожденных уравнений / Г.А. Свиридов, А.А. Ефремов // Доклады Академии наук. – 1999. – Т. 364, № 3. – С. 323–325.
 89. Свиридов, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридов, В.О. Казак // Математические заметки. – 2002. – Т. 71, № 2. – С. 292–297.
 90. Свиридов, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридов, С.В. Брычев // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 8. – С. 46–52.
 91. Свиридов, Г.А. Алгоритм решения задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / Г.А. Свиридов, И.В. Бурлачко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43, № 11. – С. 1677–1683.
 92. Свиридов, Г.А. Сборка Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа / Г.А. Свиридов, И.К. Тринеева // Известия вузов. Математика. – 2005. – № 10. – С. 54–60.
 93. Свиридов, Г.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова / Г.А. Свиридов, М.В. Плеханова // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 7. – С. 997–998.

94. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 1. – С. 126–131.
95. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 51–72.
96. Свиридюк, Г.А. Теорема о расщеплении в квазибанаховых пространствах / Г.А. Свиридюк, Дж.К. Аль-Делфи // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 180–185.
97. Сидоров, Н.А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений / Н.А. Сидоров, О.А. Романова // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19, № 9. – С. 1516–1526.
98. Сидоров, Н.А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н.А. Сидоров // Математические заметки. – 1984. – Т. 25, № 4. – С. 569–578.
99. Сидоров, Н.А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 4. – С. 726–728.
100. Соболев, С.Л. Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1954. – Т. 18, № 1. – С. 3–50.
101. Соболев, С.Л. Применение функционального анализа к математической физике / С.Л. Соболев. – Л.: Наука, 1961. – 255 с.
102. Солонников, В.А. Линейные эллиптические системы. Конспект лекций / В.А. Солонников. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1979. – 168 с.

103. Срочко, В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления / В.А. Срочко. – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.
104. Сукачева, Т.Г. О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева // Известия вузов. Математика. – 1998. – № 3. – С. 47–54.
105. Сукачева, Т.Г. О разрешимости нестационарной задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости / Т.Г. Сукачева // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 8. – С. 1106–1112.
106. Сукачева, Т.Г. Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей: дис. . . . докт. физ.-мат. наук / Т.Г. Сукачева; Новгород. гос. ун-т. – Великий Новгород, 2004. – 249 с.
107. Темам, Р. Уравнение Навье – Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
108. Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
109. Успенский, С.В. О смешанных краевых задачах для одного класса уравнений, не разрешенных относительно старшей производной / С.В. Успенский, Г.В. Демиденко // Дифференциальные уравнения с частными производными: Тр. семинара акад. С.Л. Соболева, Новосибирск, Ин-т математики АН СССР, Сиб. отд-ие. – 1980. – № 2. – С. 92–115.
110. Фалалеев, М.В. Системы дифференциальных уравнений с вырождением в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев, О.В. Коробова // Сибирский математический журнал. – 2008. – Т. 49, № 4. – С. 916–927.
111. Федоров, В.Е. Одномерная управляемость в гильбертовых пространствах линейных уравнений соболевского типа / В.Е. Федоров, О.А. Рузакова // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 8. – С. 1137–1139.

112. Федоров, В.Е. Задача стартового управления для класса полулинейных рас-пределенных систем соболевского типа / В.Е. Федоров, М.В. Плеханова // Труды Институтата математики и механики УрО РАН. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 259–267.
113. Федоров, В.Е. Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений соболевского типа в банаховых и локально выпуклых пространствах: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / В.Е. Федоров; Челяб. гос. ун-т. – Челябинск, 2005. – 271 с.
114. Федоров, В.Е. О нелокальных решениях полулинейных уравнений соболевского типа / В.Е. Федоров, П.Н. Давыдов // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 3. – С. 338–347.
115. Фурсиков, А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 350 с.
116. Цыпленкова, О.Н. Исследование оптимального управления в моделях Буссинеска – Лява: дис. ... канд. физ.-мат. наук / О.Н. Цыпленкова; Юж.-Урал. гос. ун-т. – Челябинск, 2013. – 108 с.
117. Чистяков, В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1996. – 278 с.
118. Чистяков, В.Ф. О системах не типа Коши – Ковалевской индекса (1,k) / В.Ф. Чистяков, С.В. Гайдомак // Вычислительные технологии. – 2005. – Т. 10, № 2. – С. 45–59.
119. Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений соболевского типа на графах: дис. ... канд. физ.-мат. наук / В.В. Шеметова; Магнитогорск. гос. ун-т. – Магнитогорск, 2005. – 109 с.
120. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридов // Вестник ЮУрГУ. Се-

- рия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 16 (192), вып. 5. – С. 116–120.
121. Шестаков, А.Л. Оптимальное измерение динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – № 17 (234), вып. 8. – С. 70–75.
122. Шестаков, А.Л. О новой концепции белого шума / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 287.
123. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.
124. Якупов, М.М. Фазовые пространства некоторых задач гидродинамики: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / М.М. Якупов; Челяб. гос. ун-т. – Челябинск, 1999. – 83 с.
125. Abergel, F. On Some Control Problems in Fluid Mechanics / F. Abergel, R. Temam // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. – 1990. – V. 1, № 6. – P. 303–325.
126. Balachandran, K. Controllability of Sobolev-Type Integrodifferential Systems in Banach Spaces / K. Balachandran, J.P. Dauer // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1998. – V. 217, № 2. – P. 335–348.
127. Brenan, K.E. Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations / K.E. Brenan, S.L. Campbell, L.R. Petzold. – Philadelphia: SIAM. – 1996. – 251 p.
128. Campbell S.L. Observability of Linear Time-Varying Descriptor Systems / S.L. Campbell, W.J. Terrell // SIAM Journal Matrix Analysis and Applications. – 1991. – V. 12, № 3. – P. 484–496.

129. Changchun, L. Some Properties of Solutions of the Pseudo-Parabolic Equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2004. – V. 15. – P. 3–10.
130. Coleman, B.D. Instability, Uniqness, and Non-Existance Theorems for the Equation $u_t = u_{xx} - u_{xxt}$ on a Strip / B.D. Coleman, R.J. Duffin, V.J. Mizel // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1965. – V. 19, № 2. – P. 100–116.
131. Cuvelier, C. Optimal Control of a System Governed by the Navier – Stokes Equations Coupled with the Heat Equation / C. Cuvelier // New Development in Differential Equations. – Amsterdam: North-Holland, 1976. – P. 81–98.
132. Dai, L. Singular Control Systems / L. Dai. – Berlin: Springer-Vergal, 1989. – 334 p.
133. Demidenko, G.V. L_p -Theory of Boundary Value Problems for Sobolev Type Equaitons / G.V. Demidenko // Partial Differential Equations (Banach Center Publications). – 1992. – V. 27, № 1. – P. 101–109.
134. Evans, L.C. Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations / L.C. Evans. – Providence: American Mathematical Society, 1990. – 80 p.
135. Fattorini, H. Necessary and Sufficient Conditions for Optimal Controls in Viscous Flow Problems / H. Fattorini, S. Sritharan // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A: Mathematics. – 1994. – V. 124, № 2. – P. 211–251.
136. Favini, A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces / A. Favini, A. Yagi. – New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, 1999. – 312 p.
137. Favini, A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces / A. Favini, G. Marinatoschi. – Berlin: Springer, 2012. – 164 p.

138. Filinkov, A. Abstract Cauchy Problems: Three Approaches / A. Filinkov, I.V. Melnikova. – Boca Raton; London; New York; Washington: Chapman and Hall / CRC, 2001. – 264 p.
139. Fokin, M.V. Existence of Singular Spectrum and Asymptotic Behavior of Solution in Sobolev's Problem. I / M.V. Fokin // Siberian Advances in Mathematics. – 1994. – V. 4, № 1. – P. 18–51.
140. Gabay, D.A Dual Algorithm for the Solution of Nonlinear Variational Problems via Finite Element Approximation / D. Gabay, B. Mercier // Computers and Mathematics with Applications. – 1976. – V. 2, № 1. – P. 17–40.
141. Hairer, E. The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge – Kutta Methods / E. Hairer, C. Lubich, M. Roche. – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – 146 p.
142. Halidias, N. Optimal Control Problems for a Class of Nonlinear Evolution Equations / N. Halidias, N.S. Papageorgiou // Periodica Mathematica Hungarica. – 2002. – V. 45, № 1-2. – P. 43–63.
143. Hoff, N.J. Creep Buckling / N.J. Hoff // Journal of the Aeronautical Sciences. – 1956. – № 7. – P. 1–20.
144. Hwang, J. Optimal Control Problems for an Extensible Beam Equation / J. Hwang // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2009. – V. 353, № 1. – P. 436–448.
145. Kozhanov, A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems / A.I. Kozhanov. – Zeist: VSP, 1999. – 171 p.
146. Lamnabhi-Lagarrigue, F. Singular Optimal Control Problems: On the Necessary Conditions of Optimality / F. Lamnabhi-Lagarrigue, G. Stefani // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1990. – V. 28, № 4. – P. 823–840.

147. Lasiecka, I. Control Theory for Partial Differential Equations: Continuous and Approximation Theories. Vol. 1: Abstract Parabolic Systems / I. Lasiecka, R. Triggiani. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 672 p.
148. Levine, H.A. Some Nonexistence and Instability Theorems for Solutions of Formally Parabolic Equations of the Form $Pu_t = -Au + F(u)$ / H.A. Levine // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1973. – V. 51, № 5. – P. 371–386.
149. Li, X. Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems / X. Li, J. Yong. – Boston: Birkhäuser, 1995. – 450 p.
150. Lightbourne, J.H. A Partial Functional Differential Equation of Sobolev Type / J.H. Lightbourne, S.M. Rankin // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1983. – V. 93, № 2. – P. 328–337.
151. Muller, P.C. Linear Control Design of Linear Descriptor Systems / P.C. Muller // Proceedings of the 14th World Congress of IFAC. Vol. C. – Beijing: Pergamon, 1999. – P. 31–36.
152. Neittaanmaki, P. Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems. Theory, Algorithms, and Applications / P. Neittaanmaki, D. Tiba. – New York: Marcel Dekker, 1994. – 424 p.
153. Pandolfi, L. Controllability and Stabilization for Linear Systems of Algebraic and Differential Equations / L. Pandolfi // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1980. – V. 30, № 4. – P. 601–620.
154. Pandolfi, L. On the Regulator Problem for Linear Degenerate Control Systems / L. Pandolfi // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1981. – V. 33, № 2. – P. 241–254.
155. Papageorgiou, N.S. On the Optimal Control of Strongly Nonlinear Evolution Equations / N.S. Papageorgiou // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1992. – V. 164, № 1. – P. 83–103.

156. Pyatkov, S.G. Operator Theory. Nonclassical Problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Tokyo: VSP, 2002. – 348 p.
157. Pytlak, R. Numerical Methods for Optimal Control Problems with State constraints / R. Pytlak. – New York: Springer, 1999. – 223 p.
158. Shestakov, A.L. On the Measurement of the «White Noise» / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 27 (286), вып. 13. – С. 99–108.
159. Shklyar, B. Exact Null Controllability of Abstract Differential Equations by Finite-Dimensional Control and Strongly Minimal Families of Exponentials / B. Shklyar // Differential Equations and Applications. – 2011. – V. 3, № 2. – P. 171–188.
160. Showalter, R.E. Pseudoparabolic Partial Differential Equations / R.E. Showalter, T.W. Ting // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1970. – V. 1, № 1. – P. 1–26.
161. Showalter, R.E. Nonlinear Degenerate Evolution Equations and Partial Differential Equations of Mixed Type / R.E. Showalter // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1975. – V. 6, № 1. – P. 25–42.
162. Showalter, R.E. The Sobolev Equation / R.E. Showalter // Applicable Analysis. – 1975. – V. 5, № 1. – P. 15–22; V. 5, № 2. – P. 81–89.
163. Showalter, R.E. Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations / R.E. Showalter. – Providence: American Mathematical Society, 1997. – 278 p.
164. Sidorov, N. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.
165. Sritharan, S.S. An Optimal Control Problem in Exterior Hydrodynamics / S.S. Sritharan // Distributed Parameter Control Systems: New Trends and Applications. – New York: Marcel Dekker, 1991. – P. 385–417.

166. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston: VSP, 2003. – 216 p.
167. Terrell, W.J. Observability and External Description of Linear Time Varying Singular Control Systems: Ph. D. thesis / W.J. Terrell. – Raleigh: North Carolina State University, 1990. – 288 p.
168. Tröltzsch, F. Optimale Steuerung Partieller Differentialgleichungen: Theorie, Verfahren und Anwendungen / F. Tröltzsch. – Wiesbaden: Vieweg und Sohn Verlag, 2005. – 297 s.
169. Манакова, Н.А. Регулярные возмущения одного класса линейных уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 3. – С. 423–425.
170. Манакова, Н.А. Фазовое пространство задачи Коши – Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 9. – С. 36–41.
171. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Н.А. Манакова // Вестник МаГУ. Математика. Вып. 8. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. ун-та, 2005. – С. 113–122.
172. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения нелинейной диффузии / Н.А. Манакова // Оптимизация, управление, интеллект. – 2005. – № 3. – С. 90–98.
173. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. 8, № 2. – С. 144–151.
174. Манакова, Н.А. Исследование задач оптимального управления для неклассических уравнений математической физики: дис. . . . канд. физ.-

- мат. наук / Н.А. Манакова; Челяб. гос. ун-т. – Челябинск, 2005. – 111 с.
175. Манакова, Н.А. О задаче оптимального управления для уравнения Хоффа / Н.А. Манакова // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике. – Новосибирск: Ин-т гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2005. – С. 62.
176. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для одного класса полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова // Математика. Механика. Информатика. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2006. – С. 87–88.
177. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения нелинейной диффузии / Н.А. Манакова // Тихонов и современная математика. – М.: Издат. отдел фак-та ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006. – С. 127.
178. Манакова, Н.А. Необходимые и достаточные условия существования оптимального управления для динамических полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова // Вестник МаГУ. Математика. Вып. 9. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. ун-та, 2006. – С. 70–80.
179. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185–1192.
180. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения электрического поля в полупроводнике / Н.А. Манакова // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2007. – С. 228.
181. Манакова, Н.А. Об одной модели оптимального управления уравнением Осколкова / Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математиче-

- ское моделирование и программирование. – 2008. – № 27 (127), вып. 2. – С. 63–70.
182. Манакова, Н.А. Об одной модели оптимального управления уравнением электрического поля в полупроводнике / Н.А. Манакова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т. 16, № 5. – С. 891–892.
183. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера – Сидорова для одного уравнения соболевского типа / Н.А. Манакова, Е.А. Богонос // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 42–53.
184. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями одной неклассической задачи для линейной модели Хоффа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Всероссийский научный семинар «Неклассические уравнения математической физики», посвященный 65-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова. Ч. 1. – Якутск: Филиал изд-ва СВФУ; ИМИ, 2010. – С. 80–82.
185. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для полулинейного уравнения соболевского типа / Н.А. Манакова // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. – Екатеринбург: Изд-во Уральского федерального ун-та, 2011. – С. 253.
186. Манакова, Н.А. Об одной гипотезе Г.А. Свиридиюка / Н.А. Манакова // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 87–93.
187. Манакова, Н.А. Об одной задаче оптимального управления с функционалом качества общего вида / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – № 4. – С. 18–24.
188. Манакова, Н.А. Об оптимальном управлении деформации конструкции из двутавровых балок / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Международ-

ная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко. – Новосибирск: Академгородок, 2011.

189. Манакова, Н.А. Оптимальное управление для одной эволюционной модели / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // СамДиф-2011: Конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Самара: Универс групп, 2011. – С. 73–74.
190. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – № 17 (234), вып. 8. – С. 113–114.
191. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.
192. Манакова, Н.А. О начально-краевой задаче для уравнения Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Кононова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 270–271.
193. Манакова, Н.А. О нелокальном решении задачи Коши – Дирихле для модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Измерения: состояние, перспективы развития. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – С. 165–166.
194. Манакова, Н.А. Об одной задаче оптимального управления для уравнения Хоффа на графе / Н.А. Манакова // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2012. – Воронеж: Издат.-полигр. центр Воронежского гос. ун-та, 2012. – С. 147–150.
195. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для одной эволюционной модели / Н.А. Манакова,

- А.Г. Дыльков // Математические заметки ЯГУ. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 111–127.
196. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для модели нелинейной диффузии на графе / Н.А. Манакова // Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова. – Одесса: Астропринт, 2013. – С. 76.
197. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для фильтрационной модели Буссинеска на геометрическом графе // XXIII национален научен симпозиум с международно участие «Метрология и метрологично осигуряване 2013»= 23th national scientific symposium with international participation «Metrology and metrology assurance 2013». – София, 2013. – С. 130–134.
198. Манакова, Н.А. О продолжении решения задачи Коши для квазилинейного уравнения соболевского типа / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. – Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2013. – С. 190.
199. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейной модели Хоффа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Математические заметки. – 2013. – Т. 94, № 2. – С. 225–236.
200. Манакова, Н.А. Численное исследование процессов в модели Баренблата – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Вестник МаГУ. Математика. Вып. 15. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. ун-та, 2013. – С. 58–67.
201. Манакова, Н.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоуултера – Сидорова и аддитивными шумами / Г.А. Свиридов, Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 90–103.

202. Манакова, Н.А. Задача Коши для одного класса стохастических уравнений соболевского типа в пространстве «дифференцируемых шумов» / Н.А. Манакова // Вырожденные полугруппы и пропагаторы уравнений соболевского типа. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2014. – С. 52–58.
203. Манакова, Н.А. Исследование математической модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. – М.: Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. – С. 1502–1506.
204. Манакова, Н.А. Модель Баренблатта – Желтова – Кочиной с условием Шоултера – Сидорова и аддитивными «шумами» / Н.А. Манакова // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. – М.: МИАН, 2014. – С. 111–113.
205. Манакова, Н.А. О решении задачи Дирихле – Коши для уравнения Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2014. – Т. 7, [№ 1]. – С. 52–60.
206. Манакова, Н.А. Стохастическая модель Девиса в пространстве «дифференцируемых шумов» / Н.А. Манакова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2014. – Т. 21, № 4. – С. 379–380.
207. Манакова, Н.А. Сходимость метода Галеркина в модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2014. – С. 206–207.
208. Манакова, Н.А. Задача стартового управления и финального наблюдения для модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2015. – Т. 22, № 1. – С. 79–80.

209. Манакова, Н.А. Метод декомпозиции в задаче оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа / Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 133–137.
210. Манакова, Н.А. Математические модели и оптимальное управление процессами фильтрации и деформации / Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 3. – С. 5–24.
211. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 3. – С. 22–29.
212. Manakova, N.A. On Optimal Control Problem for the Equation of Nonlinear Diffusion / N.A. Manakova // Book of Abstract of International Conference on Differential Equations, Dedicated to the 100th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky. – Lviv: Ivan Franko National University of Lviv Press, 2006. – P. 125–126.
213. Manakova, N.A. An Optimal Control over Solutions of the Initial-Finish Problem for one Class of Linear Sobolev Type Equations / N.A. Manakova, A.G. Dyl'kov // Semigroups of Operators – Theory and Applications: Book of Abstracts. – Bedlewo, 2013. – P. 65–66.
214. Manakova, N.A. An Optimal Control to Solutions of the Showalter – Sidorov Problem for the Hoff Model of the Geometrical Graph / N.A. Manakova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – V. 1, № 1. – P. 26–33.
215. Manakova, N.A. The Asymptotics of Eigenvalues of a Differential Operator in the Stochastic Models with «White Noise»/ G.A. Zakirova, N.A. Manakova, G.A. Sviridyuk // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – V. 8, № 175. – P. 8747–8754.

216. Manakova, N.A. An Optimal Control of the Solutions of the Initial-Final Problem for Linear Sobolev Type Equations with Strongly Relatively p-Radial Operator / N.A. Manakova, G.A. Sviridyuk // Semigroups of Operators – Theory and Applications. – Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015. – P. 213–224.
217. Численное моделирование процесса нелинейной диффузии: Свидетельство № 2015616525 / Манакова Н.А., Селиванова А.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2015613291; заявл. 23.04.2015; зарегистр. 11.06.2015, реестр программ для ЭВМ.
218. Численное моделирование неравновесной противоточной капиллярной пропитки в круге: Свидетельство № 2015617080 / Богатырева Е.А, Манакова Н.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2015614008; заявл. 15.05.2015; зарегистр. 30.07.2015, реестр программ для ЭВМ.
219. Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей фильтрации: Свидетельство № 2015619266 / Манакова Н.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2015615719; заявл. 29.06.2015; зарегистр. 27.08.2015, реестр программ для ЭВМ.
220. Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа: Свидетельство № 2015619265 / Манакова Н.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2015615720; заявл. 29.06.2015; зарегистр. 27.08.2015, реестр программ для ЭВМ.

Приложение 1. Свидетельство о регистрации программы приближенного решения задач Коши и Шоуолтера – Сидорова для полулинейных моделей соболевского типа на отрезке



Приложение 2. Свидетельство о регистрации программы приближенного решения задач Коши и Шоуолтера – Сидорова для полулинейных моделей соболевского типа в круге

