

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»

УДК 517.9



На правах рукописи

Гончаров Никита Сергеевич

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА
ДИНАМИКИ И ЭВОЛЮЦИИ ФИЛЬТРУЮЩЕЙСЯ
ЖИДКОСТИ В ОБЛАСТИ И НА ЕЕ ГРАНИЦЕ

2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации,
статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Г.А. Свиридов

Челябинск – 2025

Оглавление

Обозначения и сокращения	5
Введение	6
Глава 1. Анализ прикладных и теоретических аспектов исследований систем Вентцеля	21
1.1. Анализ использования задач Вентцеля с учетом управления и обработки информации	21
1.2. Анализ подходов к определению вида задачи Вентцеля .	28
1.3. Анализ методов и алгоритмов решения задач Вентцеля .	31
1.3.1. Решения задач Вентцеля с использованием теории полугрупп операторов	31
1.3.2. Решения однофазной и двухфазной задачи Вентцеля с использованием повторных потенциалов двойного и простого слоя	35
1.3.3. Численные методы решения задач Вентцеля	38
1.4. Стохастические системы уравнений Вентцеля	41
1.4.1. Стохастические вещественные сепарабельные гильбертовы пространства	42
1.4.2. Общая постановка задач для стохастической обобщенной фильтрационной системы уравнений Вентцеля	48
Глава 2. Разработка методов и алгоритмов для решения стохастической динамической системы Вентцеля	50
2.1. Метод анализа условий для детерминированной динамической системы уравнений Вентцеля	50

2.2. Метод анализа условий для стохастической динамической системы уравнений Вентцеля	53
2.2.1 Аналитическое исследование решений стохастической динамической системы уравнений Вентцеля в случае модифицированных операторов Лапласа – Бельтрами	53
2.2.2 Аналитическое исследование решений стохастической динамической системы уравнений Вентцеля в классическом случае	55
2.3. Алгоритм для нахождения траекторий приближенных решений стохастической динамической системы Вентцеля	60
2.4. Программная реализация для нахождения траекторий приближенных решений стохастической динамической системы Вентцеля	62
Глава 3. Разработка методов и алгоритмов для решения стохастической эволюционной системы Вентцеля	69
3.1. Метод анализа условий для детерминированной эволюционной системы уравнений Вентцеля	69
3.2. Метод анализа условий для стохастической эволюционной системы уравнений Вентцеля	73
3.2.1. Аналитическое исследование решений стохастической эволюционной системы уравнений Вентцеля в случае модифицированных операторов Лапласа – Бельтрами	73

3.2.2. Аналитическое исследование решений стохастической эволюционной системы уравнений Вентцеля в классическом случае	74
3.3. Алгоритм для нахождения траекторий приближенных решений стохастической эволюционной системы Вентцеля	79
3.4. Программная реализация для нахождения траекторий приближенных решений стохастической эволюционной системы Вентцеля	81
3.5. Алгоритм обработки информации анализа состояний рассматриваемых стохастических динамической и эволюционной систем Вентцеля	91
Заключение	98
Список литературы	100
Приложения	120
Приложение 1. Свидетельство о регистрации программы для моделирования геохимического режима грунтовых вод при безнапорной фильтрации для системы Вентцеля уравнений фильтрации жидкости в круге	120
Приложение 2. Свидетельство о регистрации программы для обработки информации в численном исследовании стохастической системы Вентцеля уравнений фильтрации жидкости	121

Обозначения и сокращения

1. Множества, как принято, обозначаются заглавными буквами готического алфавита. Элементы множеств обозначаются строчными буквами латинского или греческого алфавита. Исключения составляют множества с уже устоявшимися названиями, например:

\mathbb{N} – множество натуральных чисел,

\mathbb{R} – множество действительных чисел,

\mathbb{R}_+ – множество $\{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$,

\mathbb{C} – множество комплексных чисел,

$L_p(\Omega)$ – пространства Лебега, $1 \leq p < \infty$, и т.д..

2. $L : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ – оператор, действующий из банахова пространства \mathfrak{U} в банахово пространство \mathfrak{F} ,

$L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ – линейный непрерывный оператор L ,

$\text{dom } L$ – область определения оператора L ,

$\ker L$ – ядро оператора L ,

$\text{im } L$ – образ оператора L .

Символами $\rho(L)$ и $\sigma(L)$ будет обозначаться резольвентное и спектральное множество оператора L .

3. Для $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U})$ используется $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$.

4. Строчные буквы латинского или греческого алфавитов используются для обозначения элементов множеств.

5. В рамках диссертационной работы принята тернарная нумерация определений, утверждений и формул.

Введение

Актуальность исследования

Среди большого количества задач фильтрации жидкости (минимизация потерь полезных компонентов, обеспечения экологической безопасности, продление сроков службы фильтрующих элементов и др.) важное место занимает обеспечение автомобильного и городского строительства. Для городского обывателя автомобильная дорога это только лежащий сверху асфальт. Если он начал разрушаться, то срабатывает шаблон – асфальт некачественный или положили его с нарушением технологии. Зачастую проблема лежит намного глубже. Технически асфальт – элемент дорожной «одежды», верхний ее слой, под которым лежит еще несколько не менее важных в конструктивном плане слоев: основание дороги и несущий грунт. На них от асфальтобетонных слоев перераспределяется нагрузка от проезжающего транспорта. И если в нижних слоях проблемы – асфальт долго не пролежит. Основной враг дорог – вода, переувлажняющая грунты дорожных оснований. Проездная часть городских дорог в отличие от загородных трасс, находится ниже других элементов улиц, принимая на себя весь поток поверхностных вод.

При наличии дождеприемника вода отводится туда, при отсутствии, впитывается в прилегающие газоны и проникает через трещины в асфальте, переувлажняя и без того нестабильное основание дороги. Еще одним дестабилизирующим фактором является городское подземное хозяйство: водопроводные, канализационные и водосточные сети труб, коллекторы и т.п., что вносит изменения в водно-тепловой режим подстилающих грунтов, чего не имеется на загородных трассах. Согласно статистике, половина этих труб уже давно и многократно выработала свой ресурс и подлежит замене. Как часть из

них подтекает, переувлажняя без того нестабильное основание дороги, можно только догадываться, поскольку крайне редко проводятся целенаправленные гидрогеологические исследования в силу высокой себестоимости услуги. Осенью и зимой в связи с переувлажнением грунта особенно заметно образование дефектов дорожного покрытия при высокой интенсивности движения: в течение зимы кристаллы льда постепенно растут и образуют в земляном полотне целые ледяные прослойки, которые раздвигают грунт, вызывая поднятие (пучение) дорожной «одежды»; весной при наступлении теплой погоды под дорожной «одеждой», с которой зимой удалялся снег, грунт оттаивает быстрее, чем под покрытыми снегом обочинами и боковыми канавами. Весеннее оттаивание переувлажненного грунта (вскрытие пучин) представляет большую опасность для дорог в связи с сильным снижением прочности грунта верхних слоев земляного полотна.

Для изучения этих процессов необходимо специальное математическое обеспечение. Отметим, что ранее полученные результаты (см., например, [35]) не позволили рассмотреть фильтрацию в области и на ее границе, поэтому потребовалась разработка специальных методов и алгоритмов анализа динамики фильтрующейся жидкости.

С другой стороны, немаловажной проблемой для южных регионов в рамках дорожного строительства являются оползни. Они представляют собой смещение грунта под действием силы тяжести; они наблюдаются как в откосах насыпей, так и выемок. Причиной большинства оползней, независимо от характера их движения, является избыточное увлажнение грунта поверхностными или подземными водами или теми и другими вместе. В частности, неправильная эксплуатация систем водоотведения приводит к движению поверхностных вод и провоцирует возникновение оползней, затрагивая федеральные

трассы и железнодорожные пути. Для изучения этих процессов также необходимо специальное математическое обеспечение. Отметим, что ранее полученные результаты (см., например, [35]) также не позволили рассмотреть диффузию в области и на ее границе, поэтому потребовалась также разработка специальных методов и алгоритмов анализа эволюции поверхности фильтрующейся жидкости.

В качестве решения данной проблемы, позволяющей избавиться от морозного искажения поверхности дорожного полотна путем изучения процессов фильтрации и от возникновения оползней путем изучения процессов диффузии, в диссертационной работе предложено рассмотреть стохастические динамическую и эволюционную системы Вентцеля, состоящие из уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной [6] и из уравнений Дзекцера [10], соответственно.

Ранее в опубликованных работах [109-110], связанных с изучением граничного условия, в котором порядок производных по пространственным переменным не ниже порядка по тем же в уравнениях фильтрации жидкости, авторы называли данное условие краевым условием Вентцеля. В работе [111] было показано, что в этом случае возникает феномен неединственности решений. Поэтому для решения проблемы неединственности пришлось добавить условие согласования и, намереваясь рассматривать процессы, протекающие внутри области и на ее границе, в уравнениях фильтрации и диффузии жидкости в дальнейшем, в [111] ввести термин «системы Вентцеля», поскольку в различных прикладных задачах процессы на границе играют активную роль в динамике и эволюции системы, являясь по сути ее частью. Этот термин будет использован в данной диссертационной работе.

Пусть $\Omega = \{(r, \theta, \varphi) : r \in [0, R], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ – шар в \mathbb{R}^3 с границей $\Gamma = \{(r, \theta, \varphi) : r = R, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$. На компакте

$\Omega \cup \Gamma$ рассмотрим систему двух уравнений, описывающих процесс фильтрации жидкости,

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta,\varphi}) \overset{\circ}{\xi}(t) = \alpha \Delta_{r,\theta,\varphi} \xi(t) + \beta \xi(t), \quad t \in (0, \tau), \quad \xi \in \Omega, \quad (0.0.1)$$

$$(\lambda - \Delta_{\theta,\varphi}) \overset{\circ}{\chi}(t) = \gamma \Delta_{\theta,\varphi} \chi(t) + \partial_R \xi(t) + \delta \chi(t), \quad t \in (0, \tau), \quad \chi \in \Gamma, \quad (0.0.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{r,\theta,\varphi} &= (r - R) \frac{\partial}{\partial r} \left((R - r) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\ \Delta_{\theta,\varphi} &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \partial_R = \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_{r=R}. \end{aligned} \quad (0.0.3)$$

К системе присоединим условие согласования

$$\text{tr } \xi(t) = \chi(t) \quad (0.0.4)$$

и снабдим ее начальными условиями

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \chi(0) = \chi_0. \quad (0.0.5)$$

Стochasticкий процесс $\xi = \xi(t)$ (характеристики данного процесса будут рассмотрены позднее) назовем решением стохастической динамической системы Вентцеля (0.0.1)–(0.0.5), если с учетом условий (0.0.4) и (0.0.5) при подстановке его в (0.0.1) и в (0.0.2) он обращает уравнения в верные тождества. Здесь, под производной одномерного стохастического процесса $\overset{\circ}{\xi}$, $\overset{\circ}{\chi}$ понимается производная Нельсона – Гликлиха (см., например, [64]). Поскольку собственные векторы оператора Лапласа в сферической системе координат содержат специальные функции, здесь символом $\Delta_{r,\theta,\varphi}$ в (0.0.4) обозначен модифицированный оператор Лапласа в Ω , а в (0.0.4) символом $\Delta_{\theta,\varphi}$ обозначен модифицированный оператор Лапласа – Бельтрами на Γ .

Символом ∂_R обозначена внешняя по отношению к Ω нормаль. Параметры $\alpha, \gamma, \lambda, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ характеризуют среду.

На компакте $\Omega \cup \Gamma$ рассмотрим систему двух уравнений, моделирующую эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta,\varphi}) \overset{\circ}{\xi}(t) = \alpha_0 \Delta_{r,\theta,\varphi} \xi(t) - \beta_0 \Delta_{r,\theta,\varphi}^2 \xi(t) - \gamma_0 \xi(t), \quad (0.0.6)$$

$$(\lambda - \Delta_{\theta,\varphi}) \overset{\circ}{\chi}(t) = \alpha_1 \Delta_{\theta,\varphi} \chi(t) - \beta_1 \Delta_{\theta,\varphi}^2 \chi(t) + \partial_R \xi(t) - \gamma_1 \chi(t), \quad (0.0.7)$$

где $t \in (0, \tau)$, $\xi \in \Omega$, $\chi \in \Gamma$.

Стохастический процесс $\xi = \xi(t)$ назовем решением стохастической эволюционной системы Вентцеля (0.0.4)–(0.0.7), если с учетом условий (0.0.4) и (0.0.5) при подстановке его в (0.0.5) и в (0.0.7) он обращает уравнения в верные тождества. Здесь, под производной одномерного стохастического процесса $\overset{\circ}{\xi}, \overset{\circ}{\chi}$ понимается производная Нельсона – Гликлиха. Символом $\Delta_{r,\theta,\varphi}$ обозначен модифицированный оператор Лапласа в Ω , а символом $\Delta_{\theta,\varphi}$ обозначен модифицированный оператор Лапласа – Бельтрами на Γ . Символом ∂_R обозначена внешняя по отношению к Ω нормаль. Параметры $\alpha_0, \alpha_1, \lambda, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$ характеризуют среду.

Диссертационная работа посвящена анализу разрешимости стохастических динамической и эволюционной систем уравнений Вентцеля (0.0.1)–(0.0.5) и (0.0.6)–(0.0.7) соответственно.

Степень разработанности

Границные условия [7], введенные А.Д. Вентцелем в 1956 году, в которых порядок производных по пространственным переменным на границе области не ниже порядка по тем же переменным в рассматриваемом дифференциальном уравнении в области, позволяют описывать поведение решения на границе области, что имеет ключевое значение для понимания физики процессов, происходящих в данной

области. В частности, в [7] оно возникло при построении генератора полугруппы Феллера для многомерных диффузионных процессов в ограниченной области.

На сегодняшний день количество научных работ, посвящённых изучению данного вида условий, стремительно увеличивается, и перечислить все исследования здесь невозможно. В школе О.А. Ладыженской было проведено исследование задач, в которых краевые условия интерпретируются не как предельные значения искомой функции и её производной, а как описание процессов, происходящих на границе области. Это позволило решить однофазные (при покрытии границы области пленкой) и двухфазные (при разделении среды на две части пленкой) задачи Вентцеля с помощью повторных потенциалов двойного и простого слоя. В частности, Д.Е. Апушкинскую и А.И. Назаров получили априорные оценки градиента решения начально-краевой задачи для недивергентных параболических уравнений [2], а также для решений квазилинейных двухфазных параболических и эллиптических уравнений с вырожденными и невырожденными условиями Вентцеля на границе раздела фаз [4]. Среди других важных работ можно отметить исследования по разрешимости задачи Вентцеля для уравнений Лапласа и Гемгольца, выполненные А.И. Назаровым и В.В. Лукьяновым [26], а также результаты о сильной разрешимости квазилинейных задач Вентцеля для параболических уравнений с разрывными старшими коэффициентами, выполненные Д.Е. Апушкинской, А.И. Назаровым, Д.К. Палагачевым и Л.Г. Софтовой [3], [37].

С другой стороны, в работах A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli, E. Obrecht, S. Romanelli, K. J. Engel, G. Fragnelli [49, 52–55, 65, 66, 72] были получены результаты в рамках теории полугрупп операторов. В частности, в [52] впервые показано, что оператор,

включающий в себя оператор Лапласа Δ внутри области Ω и оператор Лапласа — Бельтрами Δ на ее границе $\partial\Omega$ является генератором C_0 -полугруппы, в [49] найдены условия аналитичности разрешающих C_0 -непрерывных полугрупп операторов; в [66] описана физическая интерпретация для уравнения теплопроводности и уравнения колебания струны. Среди прикладных задач, рассматриваемых в контексте граничных условий Вентцеля, также отметим работы А. А. Амосова, Н. Крымова [41] и J. L. Diaz, L. Tello [45], в которых рассмотрена система уравнений, описывающая сложные процессы эволюции климата в течении относительно длительного периода времени, полученного с помощью глобального энергетического баланса для температуры поверхности атмосферы и система уравнений, возникающая при гомогенизации задач сложного теплообмена (радиационного и конвективного), в периодической системе. Заметим, что указанные выше работы, были изучены только в детерминированном случае. Важно отметить, что рассмотренные системы отражают сложные процессы и требуют применения методов системного анализа.

Поскольку системы Вентцеля являются важной частью задач оптимального управления, отметим, что наличие процессов на границе области, влияющих на динамику всей системы усложняет задачи оптимизации и задачи оптимального управления (см., например, работы Luo Y. [82]). Применение теории оптимального управления к эллиптическим уравнениям с условиями Вентцеля охватывает широкий спектр задач. Например, в области теплообмена можно рассмотреть задачу оптимального управления температурой в некотором объекте, где граничные условия могут описывать теплообмен с окружающей средой. Тем не менее, использование условий Вентцеля также связано с определенными сложностями. Во-первых, их математическая фор-

мулировка может быть более сложной, чем у классических условий, что требует дополнительных усилий при анализе и решении задач. Во-вторых, в некоторых случаях может быть сложно определить, какие именно производные необходимо учитывать, и как они должны быть связаны со значениями функции на границе. Это может привести к неопределенности в формулировке задачи и, как следствие, к трудностям в нахождении решений. Заметим, что указанные задачи оптимального управления были изучены также только в детерминированном случае.

В силу того, что в различных прикладных задачах, указанных в рамках степени разработанности выше, процессы на границе в рассматриваемой области играют активную роль в динамике системы в [111] предложен термин «системы Вентцеля» и рассмотрена задача о неединственности решения указанной системы. В частности, для динамических систем уравнений выявлен феномен о неоднозначной разрешимости в случае начальных условий Коши. Таким образом выявлено противоречие между потребностью практики в изучении корректности решения в рамках динамики и эволюции фильтрующейся жидкости с учетом протекающих процессов на границе области и отсутствием соответствующих методов и алгоритмов.

Целью диссертации является разработка методов и алгоритмов анализа динамики и эволюции фильтрующейся жидкости в области и на ее границе для дальнейшего развития теории фильтрации и диффузии жидкости.

Для достижения указанной цели в диссертации решаются следующие **задачи**:

1. Осуществить структурный системный анализ предметной области с применением метода информационно–логического моделирования

ния для системного проектирования в детерминированном и в стохастическом случае и построить контекстную диаграмму.

2. Разработать метод анализа условий однозначной разрешимости стохастической динамической системы Вентцеля с учетом протекающих процессов на границе рассматриваемой области.

3. Разработать алгоритм нахождения траекторий приближенных решений стохастической динамической системы Вентцеля при сгенерированных наборах начальных данных в рассматриваемой области и на ее границе.

4. Разработать метод анализа условий однозначной разрешимости стохастической эволюционной системы Вентцеля с учетом протекающих процессов на границе рассматриваемой области.

5. Разработать алгоритм нахождения траекторий приближенных решений стохастической эволюционной системы Вентцеля при сгенерированных наборах начальных данных в рассматриваемой области и на ее границе.

6. Разработать метод обработки информации, полученной в ходе вычислительных экспериментов, а также осуществить анализ состояний стохастических, динамических и эволюционных систем Вентцеля при различных параметрных значениях.

Научная новизна.

Все результаты диссертационной работы являются новыми.

В области системного анализа: в результате проведенного структурного системного анализа впервые была построена контекстная диаграмма различных аспектов исследования систем уравнений Вентцеля. Она позволяет сделать вывод о том, что в детерминированном случае системы уравнений Вентцеля комплексно не изучены (не исследован вопрос о неединственности полученного решения), и ставит

вопрос о начале системного исследования в стохастическом случае. Впервые разработаны методы анализа условий однозначной разрешимости стохастической динамической и эволюционной систем Вентцеля с учетом протекающих процессов в рассматриваемой области и на ее границе [113–118]. Впервые разработаны алгоритмы для нахождения траекторий приближенных решений стохастической динамической и эволюционной систем Вентцеля при сгенерированных наборах начальных данных в рассматриваемой области и на ее границе [121].

В области обработки информации: впервые разработан алгоритм для обработки информации и анализа состояния стохастической динамической и эволюционной систем Вентцеля при различных значениях их параметров [121].

Теоретическая значимость заключается в том, что разработанные методы анализа однозначной разрешимости стохастических динамических и эволюционных систем Вентцеля могут быть использовать: в рамках изучения процессов фильтрации и диффузии в рассматриваемой области и на ее границе; в рамках дальнейшего развития теории стохастического анализа, теории фильтрации и диффузии жидкости, методов системного анализа.

Практическая значимость заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы в гидродинамических задачах, что расширяет возможности оценки состояния сложных систем и их параметров в областях гидродинамики и геологии, например, при исследовании процессов фильтрации воды в почве. Реализация программных комплексов выполнена на базе разработанных численных методов, а интерфейс программных решений обеспечивает их возможность интеграции в вычислительные среды для решения прикладных задач.

Методология и методы диссертационного исследования.

В работе применялись методы системного анализа, методы теории вырожденных полугрупп операторов для исследования однозначной разрешимости рассматриваемых стохастических систем Вентцеля, методы математической физики и вычислительной математики, методы математического и функционального анализа.

Основные положения, выносимые на защиту.

В рамках формализации и постановки задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации:

1. Контекстная диаграмма различных аспектов исследования разрешимости стохастических систем уравнений Вентцеля.

В рамках разработки специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта:

2. Метод анализа условий однозначной разрешимости стохастической динамической системы Вентцеля с учетом протекающих процессов на границе рассматриваемой области.

3. Алгоритм нахождения траекторий приближенных решений стохастической динамической системы Вентцеля при сгенерированных наборах начальных данных в рассматриваемой области и на ее границе.

4. Метод анализа условий однозначной разрешимости стохастической эволюционной системы Вентцеля с учетом протекающих процессов на границе рассматриваемой области.

5. Алгоритм нахождения траекторий приближенных решений стохастической эволюционной системы Вентцеля при сгенерированных

наборах начальных данных в рассматриваемой области и на ее границе.

В рамках методов и алгоритмов прогнозирования и оценки эффективности, качества, надежности функционирования сложных систем управления и их элементов:

6. Алгоритм для обработки информации, получаемой в результате вычислительных экспериментов, и анализа состояния стохастической динамической и эволюционной системы Вентцеля при различных значениях их параметров.

Степень достоверности и апробация результатов.

Степень надежности полученных результатов подтверждается строгими математическими обоснованиями. Результаты диссертации обсуждались на областных семинарах профессора Г. А. Свиридиюка, (ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)», г. Челябинск), и докладывались на Международной конференции «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2021)» (г. Иркутск, 13–17 сентября 2021 года); Международной конференции «O.A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDE's» (г. Санкт-Петербург, 16–22 июля 2022 года); Международной конференции «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2023)» (г. Иркутск, 18–23 сентября 2023 года); XIV Всероссийском совещании по проблемам управления (г. Москва, 17–20 июня 2024 года); Международной конференции «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2024)» (г. Иркутск, 16–20 сентября 2024 года). Рассматриваемые результаты в указанной диссертационной работе были получены при поддержки Российского фонда фундаментальных исследований и Челябинской области (код проекта 20-41-000001) и Российского научного фонда (код проекта 23-21-10056).

Результаты численных экспериментов в основном совпадают с аналитическими выводами.

Публикации автора.

По теме диссертационной работы опубликовано 14 работ [108-121], в том числе 6 статей, в изданиях, цитируемых Scopus [108, 110, 111, 115-117] (из них единолично, 2 статьи [108, 110]); 5 статей в журналах, из перечня ВАК [109, 112-114, 118] (из них единолично, 1 статья [109]); два свидетельства государственной регистрации программы для ЭВМ [119, 120].

Личный вклад автора.

Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В совместных работах [111-121] научному руководителю Г.А. Свиридику и соавтору С.А. Загребиной принадлежат постановки задач и общая схема их исследования, формулировки и доказательства результатов принадлежат автору диссертации.

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, списка обозначений и двух приложений. Объем диссертационной работы с приложениями составляет 121 страницу. Список литературы содержит 132 наименования.

Краткое содержание диссертационной работы

Введение к диссертационной работе включает в себя актуальность исследования, постановку задачи, цели и задачи исследования, научную новизну результатов, теоретическую и практическую значимость работы, методологию и методы диссертационного исследования, основные положения, выносимые на защиту, степень обоснованности и апробацию полученных результатов.

Первая глава нацелена на проведённый структурный системный

анализ различных аспектов исследования систем уравнений Вентцеля. В частности, в параграфе 1.1. приводится анализ использования задач Вентцеля с учетом управления и обработки информации. В параграфе 1.2 приводится анализ подходов к определению вида задач Вентцеля. В параграфе 1.3. описывается анализ методов и алгоритмов решения систем Вентцеля. В параграфе 1.4. приводятся основные определения, утверждения и теоремы, по мнению автора, которые позволяют понять структуру стохастических вещественных сепарабельных гильбертовых пространств, необходимых для построения пространства дифференцируемых \mathbf{K} -«шумов», основываясь на новой парадигме «белого шума» в смысле производной Нельсона – Гликлиха винеровского процесса.

Вторая глава посвящается разработке методов и алгоритмов для решения задачи стохастической динамической системы Вентцеля. В частности, в параграфе 2.1. приводится метод анализа условий для детерминированной динамической системы уравнений Вентцеля. В параграфе 2.2. приводится метод анализа условий для стохастической динамической системы уравнений Вентцеля. В параграфе 2.3. описывается алгоритм для нахождения траекторий приближенных решений стохастической динамической системы Вентцеля. В параграфе 2.4. описывается программная реализация для нахождения траекторий приближенных решений стохастической динамической системы Вентцеля.

Третья глава посвящается разработке методов и алгоритмов для решения стохастической эволюционной системы Вентцеля. В частности, в параграфе 3.1. приводится метод анализа условий для детерминированной эволюционной системы уравнений Вентцеля. В параграфе 3.2. приводится метод анализа условий для стохастической эволю-

ционной системы уравнений Вентцеля. В параграфе 3.3. описывается алгоритм для нахождения траекторий приближенных решений стохастической эволюционной системы Вентцеля. В параграфе 3.4. описывается программная реализация для нахождения траекторий приближенных решений стохастической эволюционной системы Вентцеля. В параграфе 3.5. приводится алгоритм обработки информации анализа состояний рассматриваемых стохастических динамической и эволюционной систем Вентцеля.

Благодарности.

Автор выражает благодарность своим родителям Гончаровой Ирине Викторовне и Гончарову Сергею Владимировичу, крестной Бородавкиной Анне Валерьевне за понимание и поддержку; искреннюю и глубокую признательность своему научному руководителю Свиридиюку Георгию Анатольевичу за постановку задачи и консультации, ценные советы в реализации обработки информации для рассматриваемых систем уравнений; коллективам кафедр уравнений математической физики, математического и компьютерного моделирования, прикладной математики и программирования ЮУрГУ за плодотворные обсуждения и конструктивную критику в ходе работы над диссертацией.

Глава 1. Анализ прикладных и теоретических аспектов исследований систем Вентцеля

1.1. Анализ использования задач Вентцеля с учетом управления и обработки информации

Граничные условия, в которых порядок производных по пространственным переменным на границе области не ниже порядка по тем же переменным в рассматриваемом дифференциальном уравнении в области, были введены А.Д. Вентцелем в контексте проблем теплопроводности и диффузионных процессов [105]. Такие условия получили название «краевые условия Вентцеля». Они позволяют описывать поведение решения на границе области, что имеет ключевое значение для понимания физики процессов, происходящих в данной области, а также является важным в задачах, связанных с теплопроводностью [42], механикой сплошных сред [113] и электромагнетизмом [81]. В силу того, что в различных прикладных задачах процессы на границе играют активную роль в динамике системы в [111] предложен термин «системы Вентцеля».

Заметим, что большинство систем Вентцеля описывают сложные процессы. В частности, в [45] была рассмотрена следующая система уравнений, состоящая из уравнений параболического типа для глобального океана Ω с глубиной H и динамического нелинейного диффузионного уравнения, описывающая эволюцию климата в течении относительно длительного периода времени, полученного с помощью глобального энергетического баланса для температуры поверхности атмосферы. Здесь, с учетом неизвестных величин (U, u) , характеризующих температуру океана и температуру поверхности, рассматривается следующая система по пространственным перемен-

ным $(x, z) \in \Omega = (-1, 1) \times (-H, 0)$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{K_H}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - x^2) \frac{\partial U}{\partial x} \right) - K_V \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \omega \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (0, T) \times \Omega,$$

$$\omega x \frac{\partial U}{\partial x} + K_V \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (0, T) \times \Gamma_H,$$

$$D \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{DK_{H_0}}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - x^2)^{\frac{p}{2}} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + G(U) +$$

$$+ f(x) + K_V \frac{\partial U}{\partial n} + \omega x \frac{\partial U}{\partial x} = QS(x)\beta(x, U), \quad (0, T) \times \Gamma_0,$$

$$(1 - x^2)^{\frac{p}{2}} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \frac{\partial U}{\partial x}^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (0, T) \times \Gamma_1 \cup \Gamma_{-1},$$

$$U(0, x, z) = U_0(x, z), \quad (x, z) \in \Omega,$$

$$U(0, x, 0) = u_0(x), \quad x \in (-1, 1),$$

где граница области Ω есть объединение множеств $\Gamma_0 = \{z = 0\}$, $\Gamma_H = \{z = -H\}$, $\Gamma_1 = \{x = 1\}$ и $\Gamma_{-1} = \{x = -1\}$.

В [41] рассматривается система уравнений, возникающая при гомогенизации задач сложного теплообмена (радиационного и конвективного), в периодической системе, состоящей из n^2 теплопроводящих стержней, квадратного сечения, разделенных вакуумными слоями и помещенных в квадратную коробку $\Omega_\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon}{2}, 1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ с границей Γ_ε , где

$\gamma_\varepsilon = \{A_\varepsilon, B_\varepsilon, C_\varepsilon, D_\varepsilon\}$ – множество угловых точек квадрата, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $D_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$, D_n и D_s – производные вдоль внешней нормали

и касательной к Γ_ε

$$\begin{aligned} c_p D_t v - \varepsilon \Delta H(v) &= f, \quad (x, t) \in Q_{\varepsilon, T} = \Omega_\varepsilon \times (0, T), \\ \frac{\varepsilon}{2} c_p D_t v + \varepsilon D_n H(v) - \frac{\varepsilon^2}{2} D_s^2 H(v) + H_\Gamma(v) &= g_\gamma + \frac{\varepsilon}{2} f_\Gamma, \\ (x, t) &\in (\Gamma_\varepsilon \setminus \gamma_\varepsilon) \times (0, T), \\ \frac{\varepsilon}{4} c_p D_t v + \varepsilon \widehat{D}_n H(v) + H_\Gamma(v) &= \widehat{g}_\Gamma + \frac{\varepsilon}{4} \widehat{f}_\Gamma, \quad (x, t) \in \gamma_\varepsilon \times (0, T), \\ v|_{t=0} = u^0, \quad x \in \Omega_\varepsilon; \quad v|_{t=0} = v_\Gamma^0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon \setminus \gamma_\varepsilon, \quad v|_{t=0} = \widehat{v}_\Gamma^0, \quad x \in \gamma_\varepsilon. \end{aligned}$$

Особенно важным это является в исследованиях задач, где данные имеют разрывы или скачки [2]. Данные с разрывами представляют собой важное направление в теории краевых задач, поскольку они возникают в различных областях науки и техники, включая физику, инженерию и экономику. В контексте краевых задач с разрывными данными, важно понимать, как такие данные влияют на поведение решений и на методы их анализа. Разрывные данные могут быть результатом физических процессов, которые по своей природе имеют дискретные изменения, или могут возникать из-за ограничений в измерениях. Это может привести к сложностям в математическом моделировании и численном решении задач, поскольку традиционные методы, предполагающие непрерывность данных, могут оказаться неэффективными или даже неприменимыми. Краевые задачи, в которых используются разрывные данные, часто требуют особого внимания к условиям на границах, поскольку разрывы могут вызывать изменения в поведении решений. Например, в задачах, связанных с теплопроводностью, разрыв в температуре может привести к изменению в потоке тепла, что, в свою очередь, влияет на распределение температуры в теле. Это подчеркивает важность учета разрывов.

ных данных при постановке задач и их решении. При наличии разрывов в данных, необходимо применять специальные методы, такие как методы конечных элементов или методы разностных схем, которые могут адекватно учитывать особенности разрывов [5]. Существует множество способов моделирования разрывных данных, включая использование кусочных функций, которые могут описывать поведение системы в различных областях. Эти функции позволяют точно представлять разрывы и их влияние на решения. Однако несмотря на свою полезность, такие функции могут создавать дополнительные сложности при численном решении, поскольку они могут приводить к необходимости разработки более сложных алгоритмов и методов. Например, при использовании методов конечных элементов необходимо учитывать, как разрывы влияют на разбиение сетки и на построение базисных функций, что может значительно усложнить задачу [4]. Кроме того, разрывные данные могут вызывать проблемы с устойчивостью и сходимостью численных методов. Например, при решении краевых задач с разрывными данными может возникнуть ситуация, когда стандартные методы не обеспечивают необходимой точности или даже приводят к численным нестабильностям. Это требует разработки новых подходов, которые могли бы более эффективно справляться с разрывами. Одним из таких подходов является использование адаптивных методов, которые позволяют динамически изменять параметры численного метода в зависимости от поведения решения. Такие методы могут значительно улучшить точность и устойчивость решения, особенно в областях, где разрывы имеют значительное влияние [7]. Важным аспектом работы с разрывными данными является также анализ их влияния на качество решения. Разрывы могут вызывать резкие изменения в поведении решения, что может затруднить

интерпретацию результатов. Например, в задачах, связанных с механикой сплошных сред, разрывы могут приводить к возникновению ударных волн или других сложных явлений, которые требуют особого внимания. Это подтверждает необходимость тщательного анализа разрывных данных и их влияния на решения, чтобы обеспечить корректность и надежность получаемых результатов. При решении краевых задач с разрывными данными также важно учитывать, как эти данные могут влиять на физическую интерпретацию решения. Например, в задачах, связанных с механикой, разрывы могут указывать на наличие дефектов или неоднородностей в материале, что может существенно изменить его свойства. Это требует от исследователей не только математического, но и физического понимания проблемы, чтобы адекватно интерпретировать результаты и принимать обоснованные решения.

В механике сплошных сред, например, условия Вентцеля могут быть использованы для описания взаимодействия материалов с различными границами, такими как поверхности контакта между двумя телами. В таких случаях граничные условия моделируют механические свойства материалов, что требует учета не только геометрии, но и физики взаимодействия. Аналогично, в задачах теплопередачи условия Вентцеля могут быть использованы для описания теплообмена между телами, что является важным аспектом в приложениях.

Кроме того, условия Вентцеля находят применение в задачах, связанных с распространением волн. В таких задачах граничные условия могут определять, как волны отражаются или проникают через границу, что имеет важное значение в акустике и электромагнетизме. В этих случаях условия Вентцеля могут быть использованы для моделирования сложных взаимодействий между волнами и границами,

что позволяет более точно предсказывать поведение систем в различных условиях. Поскольку одной из ключевых особенностей условий Вентцеля является их способность учитывать различные физические процессы на границе области, в дальнейшем подобного рода задачи считаем необходимым называть системой уравнений, пусть и заданных на множествах разной геометрической размерности. Термин же «краевые условия» следует оставить за уравнениями, заданными на границе (краю) области (многообразия) и имеющих меньший порядок производных по пространственным переменным (см. классический трактат [59], а также [83]).

Системы Вентцеля являются важной частью приложений в терминах задач по оптимальному управлению. Отметим, что наличие процессов на границе области, влияющих на динамику всей системы усложняет задачи оптимизации и задачи оптимального управления [82]. Применение теории оптимального управления к эллиптическим уравнениям с условиями Вентцеля охватывает широкий спектр задач. Запишем эллиптические уравнения в виде общей операторной форме как $Lu = f$, где L – линейный дифференциальный оператор, u – искомая функция, а f – заданная функция. Для получения вариационной формулировки используют интегральное представление эллиптического уравнения, например, умножая уравнение на тестовую функцию и интегрируя по области. Например, при рассмотрении области Ω с границей $\partial\Omega$ в [82] записывают

$$\int_{\Omega} Lu \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx,$$

где v – тестовая функция, которая обычно выбирается из соответствующего пространства функций, таких как $H^1(\Omega)$. Это приводит к слабой формулировке задачи, которая позволяет работать с решениями, имеющими меньшую регулярность, чем классические решения [43].

При этом условия Вентцеля записывают в виде:

$$\int_{\partial\Omega} (u - g) \cdot v \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot h \cdot v \, d\sigma = 0,$$

где g и h – заданные функции на границе, а n – нормальный вектор к границе. Обычно рассматривается задача минимизации функционала вида:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Lu - f|^2 \, dx + \Phi(u),$$

где $\Phi(u)$ – дополнительный функционал, который может включать в себя, например, штраф за отклонение от краевых условий. Минимизация этого функционала в соответствующем пространстве функций с учетом краевых условий Вентцеля приводит к необходимым условиям оптимальности. Например, в области теплообмена можно рассмотреть задачу оптимального управления температурой в некотором объекте, где граничные условия могут описывать теплообмен с окружающей средой. Оптимальное управление в этом случае может быть направлено на минимизацию потерь тепла или на достижение заданного температурного режима при минимальных затратах энергии. В таких задачах необходимо учитывать, как изменения температуры на границе влияют на общее распределение температуры в объекте, а также как управляющие действия, такие как изменение интенсивности отопления или охлаждения, влияют на динамику системы. В других приложениях, таких как механика жидкости, можно рассмотреть задачи оптимального управления потоками в трубопроводах, где условия Вентцеля могут описывать взаимодействие жидкости со стенками труб. Оптимальное управление может быть направлено на минимизацию потерь давления или на оптимизацию расхода жидкости при заданных условиях. В таких случаях важно учитывать, что изменения в скорости или направлении потока могут

существенно влиять на давление и другие параметры системы, что требует тщательного анализа и применения методов оптимального управления. Кроме того, в биологических системах можно рассмотреть задачи оптимального управления, связанные с распространением веществ в среде, где условия Вентцеля могут описывать взаимодействие между веществами и клетками или другими биологическими структурами. Оптимальное управление может быть направлено на минимизацию токсичности или на максимизацию эффективности доставки лекарств, что требует учета сложных взаимодействий на границе между различными средами.

Таким образом, качественные и количественные исследования систем Вентцеля актуальны для решения задач управления и обработки информации о состоянии и динамики системы со сложным поведением на границе.

1.2. Анализ подходов к определению вида задачи Вентцеля

Границные условия Вентцеля позволяют моделировать различные процессы на границе. История данного вида граничных условий начинается с известной статьи, написанной А.Д. Вентцелем в 1959 году, где, учитывая общий линейный эллиптический оператор второго порядка

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a^{i,j}(x)D_i D_j u + \sum_{i=1}^n b^i(x)D_i u(x) + c(x)u$$

над ограниченной областью $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ автор нашел наиболее общие допустимые граничные условия, которые ограничивают L бесконечно малым генератором марковского процесса в Ω . Позднее эти условия были переформулированы в [37] в терминах интегро-дифференциаль-

ного оператора второго порядка

$$\begin{aligned}
 Mu = & \sum_{i,j=1}^n \alpha^{i,j}(x) d_i d_j u + \sum_{i=1}^n \beta^i(x) d_i u + \beta_0(x) \partial_n u + \gamma(x) u + \\
 & + a(x) L u + \int_{\partial\Omega} k_1(x, y) \left(u(y) - k_2(x, y) \left(u(x) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{j=1}^n (y_j - x_j) d_j u(x) \right) \right) dy + \int_{\Omega} k_3(x, y) (u(y) - u(x)) dy,
 \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

где $x \in \partial\Omega$, $y \in \Omega$, $d = (d_1, \dots, d_n)$ обозначает тангенциальный градиент к $\partial\Omega$ с компонентами, заданными следующими формулами

$$d_i = D_i - \sum_{j=1}^n n^i n^j D_j,$$

∂n означает производную по направлению внешней нормали n к границе $\partial\Omega$, а интегральные ядра k_i верифицируют подходящие гипотезы.

Рассмотрим более подробно вклад каждого из слагаемых в математическом выражении (1.2.1). В частности, согласно теории марковских процессов (см. например, [37]), первые два члена в выражении (1.2.1)

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha^{i,j}(x) d_i d_j u + \sum_{i=1}^n \beta^i(x) d_i u$$

соответствуют диффузии и дрейфу рассматриваемого процесса в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ вдоль границы области $\partial\Omega$ (см. рис.1.2.1.); третье слагаемое $\beta_0(x) \partial_n u$ в выражении (1.2.1) соответствует отражению процесса от границы области $\partial\Omega$; четвертое слагаемое $\gamma(x) u$ в выражении (1.2.1) соответствует поглощению процесса границей области $\partial\Omega$ (см. рис.1.2.2.); пятое слагаемое $a(x) L u$ в выражении (1.2.1) соответствует вязкости рассматриваемого процесса, в то время как нелокальные интегральные



Рис. 1.2.1. Диффузия и дрейф вдоль границы $\partial\Omega$, отражение от границы области $\partial\Omega$



Рис. 1.2.2. Поглощение процесса границей области $\partial\Omega$ и вязкость рассматриваемого процесса вдоль границы области $\partial\Omega$

члены в выражении (1.2.1)

$$\int_{\partial\Omega} k_1(x, y) \left(u(y) - k_2(x, y) \left(u(x) + \sum_{j=1}^n (y_j - x_j) d_j u(x) \right) \right) dy,$$

и

$$\int_{\Omega} k_3(x, y) (u(y) - u(x)) dy, \quad x \in \partial\Omega, y \in \Omega$$

представляют собой скачки процесса вдоль $\partial\Omega$ и внутренние скачки из $\partial\Omega$ в Ω (см. рис.1.2.3.).

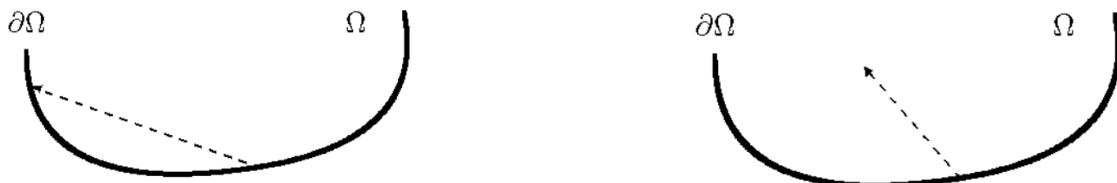


Рис. 1.2.3. Скачки рассматриваемого процесса вдоль границы $\partial\Omega$ и во внутрь области Ω из границы $\partial\Omega$

1.3. Анализ методов и алгоритмов решения задач Вентцеля

1.3.1. Решения задач Вентцеля с использованием теории полугрупп операторов

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ эллиптический оператор

$$Ag(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha g(x), \quad x \in \Omega \quad (1.3.1)$$

с граничными условиями B_1

$$(B_1 g)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m_1} b_{1,\alpha}(x) D^\alpha g(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.3.2)$$

где $b_{1,\alpha}(x) \in \mathbb{R}$, $0 \leq m_1 \leq 2$. Формулами (1.3.1)–(1.3.2) определим линейный оператор $A : \text{dom } A \subset H^2(\Omega) \rightarrow \mathfrak{F}$. В качестве области определения оператора зададим линейное многообразие $\text{dom } A = \{g \in H^2(\Omega) : \text{условия (1.3.2) выполняются}\}$, области значения \mathfrak{F} – пространство $L_2(\Omega)$. Рассмотрим ниже более подробно свойства фредгольмовости оператора A с различными видами граничных условий, включая задачу Вентцеля.

Рассмотрим оператор A с краевыми условиями Дирихле $g(0) = g(\pi) = 0$ и установим фредгольмовость оператора A . Оператор A – самосопряженный в силу компактности вложения $\text{dom } A$ в пространство \mathfrak{F} и симметричности оператора в гильбертовом пространстве \mathfrak{F}

$$\langle Ag, h \rangle_{\mathfrak{F}} = \langle g, Ah \rangle_{\mathfrak{F}}.$$

Таким образом, в силу того, что $\text{im } A = L_2(0, \pi)$ и $\dim \ker(A) = \dim \ker(A^*) = 0$, оператор A имеет замкнутый образ, конечную коразмерность и размерность ядра, и, соответственно, является фредгольмовым. Кроме того, дополнительно отметим, что спектр операто-

ра A , построенного формулами (1.3.1)–(1.3.2), конечнократный, дискретный с предельной точкой сгущения на $-\infty$

$$\sigma(A) = \{-n^2\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

с собственными функциями вида

$$g_n = \sin nx$$

и m -диссипативный в смысле

$$\rho(A) \cap (0, \infty) \neq \emptyset.$$

Рассмотрим оператор A с краевыми условиями Неймана $g'(0) = g'(\pi) = 0$ и установим фредгольмовость для указанного оператора. По аналогии укажем на самосопряженность оператора A . И в силу того, что $\text{im } A = L_2(0, \pi)$, $\ker(A) = \{\text{const}\}$, и, соответственно, $\dim \ker(A) = \dim \ker(A^*) = 1$, оператор A имеет замкнутый образ, конечную коразмерность и размерность ядра, и, соответственно, является фредгольмовым. Кроме того, дополнительно отметим, что спектр оператора A , построенного формулами (1.3.1)–(1.3.2), конечнократный, дискретный с предельной точкой сгущения на $-\infty$

$$\sigma(A) = \{-n^2\}, \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N},$$

с собственными функциями вида

$$g_n = \cos nx$$

и оператор m -диссипативный.

Рассмотрим оператор A с краевыми условиями Робена

$$\begin{aligned} \alpha_0 g'(a) + \alpha_1 g(b) &= 0, \\ \beta_0 g'(b) + \beta_1 g(b) &= 0, \end{aligned}$$

и установим фредгольмовость для указанного оператора. По аналогии укажем на самосопряженность оператора A . И, аналогично, в силу того, что $\text{im } A = L_2(a, b)$ и,

$$\dim \ker(A) = \dim \ker(A^*) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\alpha_0 + \alpha_1 a)\beta_1 = \alpha_1(\beta_0 + \beta_1 b) \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

оператор A имеет замкнутый образ, конечную коразмерность и размерность ядра, и, соответственно, является фредгольмовым. Кроме того, спектр оператора A , построенного формулами (1.3.1) – (1.3.2), конечнократный, дискретный с предельной точкой сгущения на $-\infty$

$$\sigma(A) = \{-n^2\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

и оператор m -диссипативный для неотрицательных коэффициентов α_1, β_1 .

Рассмотрим оператор A с краевыми условиями Вентцеля

$$\begin{aligned} g''(a) + \alpha_0 g'(a) + \alpha_1 g(a) &= 0, \\ g''(b) + \beta_0 g'(b) + \beta_1 g(b) &= 0. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Поскольку значение второй производной на концах отрезка не определено в $H^2(a, b)$, введем в качестве области определения оператора A

$$D(A) = \left\{ g \in C^2[a, b] : g''(x) \Big|_{\{a, b\}} \in L^2((a, b), dx) \right. \\ \left. \text{и условия (1.3.3) выполняются} \right\}.$$

В силу того, что оператор A с краевым условием Вентцеля в пространстве $\mathfrak{F} = L_2(a, b)$ не будет диссипативным, и, соответственно, m -диссипативным, в дальнейшем будем руководствоваться результатами

ми работы [7] для построения пространства \mathfrak{F} , вводя сужение пространства Лебега

$$X_2 = \left(L^2[a, b], dx \Big|_{(a, b)} \oplus \xi ds \Big|_{\{a, b\}} \right)$$

с нормой

$$\|g\|_{\mathfrak{F}}^2 = \int_a^b |g(x)|^2 dx + \xi_0 |g(a)|^2 + \xi_1 |g(b)|^2,$$

для получения самосопряженности и m диссипативности оператора A , где dx – мера Лебега в области (a, b) ; ds – поточечная мера на границе; $\xi_0 = \frac{1}{-\alpha_1}, \xi_1 = \frac{1}{\beta_1}$, где $\alpha_1 < 0 < \beta_1$ – положительные веса. В частности, в материалах статьи [53] авторами было показано, что оператор A замыкаем, существенно самосопряженный и, указав вложения пространств,

$$\begin{aligned} C_{BC}^2 &= \left\{ g \in C^2[a, b] : \text{и условия (1.3.3) выполняются} \right\} \subset D(A) \subset \\ &\subset \left\{ u \in W_{loc}^{2,2}(a, b) \cap X_2 : g''(x) \text{ существует в смысле следа оператора} \right. \\ &\quad \left. \text{в } L^2(\{a, b\}, \xi ds) \right\} \end{aligned}$$

доказано, что замкнутый оператор A генерирует C_0 -сжимающую полугруппу в силу теоремы Люмьера – Филлипса в пространстве X_2 . В рамках нового построения оператора A , нетрудно заметить, в силу того, что $\overline{\text{im } A} = X_2$ и оператор A конечную коразмерность и размерность ядра, и, соответственно, оператор является фредгольмовым.

1.3.2. Решения однофазной и двухфазной задачи Вентцеля с использованием повторных потенциалов двойного и простого слоя

Задача Вентцеля является одной из фундаментальных задач в области гидродинамики и теплопередачи. Она основывается на системе Навье – Стокса, которые описывают движение жидкости или газа. Задача Вентцеля рассматривает одну или две фазы в двумерной или трехмерной области, где происходит перенос массы и тепла.

Однофазная задача Вентцеля рассматривает движение одной фазы, например, движение вязкой воды или воздуха. В этой задаче учитывается вязкость и плотность жидкости или газа, а также внешние силы, такие как гравитация или давление. Система Навье – Стокса, которая описывает движение флюида, включает в себя уравнение неразрывности и уравнение импульса. Уравнение неразрывности говорит о том, что масса флюида сохраняется во время движения, а уравнение импульса описывает изменение скорости флюида под воздействием внешних сил и внутренних трений. Для решения однофазной задачи Вентцеля используются различные методы, такие как метод конечных элементов, метод конечных разностей или метод конечных объемов. Эти методы позволяют аппроксимировать систему Навье – Стокса и решить ее численно. Важным аспектом решения задачи Вентцеля является выбор граничных условий, которые определяют поведение флюида на границах области. Например, на границе могут быть заданы условия непротекания, когда скорость флюида равна нулю; условия свободного вытекания, когда давление на границе равно атмосферному давлению [20]; условия, сочетающие отражения от границы и диффузию вдоль поверхности (такая ситуация возникает, когда граница покрыта тонким слоем материала с повышенной проницаемостью), заданные нелинейным недивергент-

ным уравнением второго порядка, главным членом которого является параболический (эллиптический) оператор в тангенциальных переменных. Однофазная задача Вентцеля основывается на уравнении Дарси, которое описывает закон фильтрации Дарси для однофазной жидкости в пористой среде. Уравнение Дарси выражает зависимость скорости фильтрации от градиента давления и проницаемости пористой среды. В общем виде уравнение Дарси может быть записано следующим образом [15]:

$$q = -k \cdot \nabla P,$$

где q – скорость фильтрации, k – проницаемость пористой среды; ∇P – градиент давления. Для решения однофазной задачи Вентцеля необходимо дополнить уравнение Дарси соответствующими граничными условиями. Граничные условия могут быть различными в зависимости от конкретной задачи, но обычно они включают условия на границах пористой среды, такие как фиксированный поток жидкости или фиксированное давление. Однофазная задача Вентцеля также включает уравнение неразрывности, которое описывает сохранение массы жидкости в пористой среде. Уравнение неразрывности может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0,$$

где ρ – плотность жидкости, t – время, v – скорость жидкости. Кроме того, для полного описания однофазной задачи Вентцеля необходимо учесть уравнение состояния жидкости, которое связывает давление и плотность жидкости. Уравнение состояния может быть различным в зависимости от свойств конкретной жидкости, но обычно оно имеет вид:

$$P = P(\rho)$$

где P – давление, ρ – плотность.

Двухфазная задача Вентцеля рассматривает движение двух различных фаз, например, движение воды и воздуха или движение нефти и газа. В этой задаче учитывается не только вязкость и плотность каждой фазы, но и взаимодействие между ними. Она представляет собой систему уравнений, описывающих движение жидкости и газа в пористой среде. Для начала необходимо определить некоторые основные понятия и переменные, которые будут использоваться в рамках текущей задачи. Пусть рассматривается двухфазная система, состоящая из жидкой фазы (воды, нефти и т.д.) и газовой фазы (воздуха, природного газа и т.д.). Пористая среда представляет собой геологическую формацию, в которой происходит перемещение флюидов. Важными параметрами являются насыщенность фазы (отношение объема фазы к объему порового пространства), проницаемость (способность пористой среды пропускать флюиды) и давление фазы [2].

Математическая система уравнений двухфазной задачи Вентцеля основана на законах сохранения массы и импульса для каждой фазы в пористой среде. Пусть V представляет собой объем поровой среды, S – поверхность поровой среды, t – время, P – давление, u – скорость фазы, ρ – плотность фазы, и μ – вязкость фазы. Уравнение сохранения массы для жидкой фазы может быть записано в виде:

$$\frac{\rho_1 S}{\partial t} + \nabla(\rho_1 u_1 S) = q_1,$$

где ρ_1 – плотность жидкой фазы, u_l – скорость жидкой фазы, и q_l – источник массы жидкой фазы. Уравнение сохранения массы для газовой фазы имеет следующий вид:

$$\frac{\rho_g S}{\partial t} + \nabla(\rho_g u_g S) = q_g,$$

где ρ_g – плотность газовой фазы, u_g – скорость газовой фазы, и q_g – источник массы газовой фазы. Уравнение сохранения импульса для жидкой фазы записывается следующим образом:

$$\frac{\rho_l u_l S}{\partial t} + \nabla(\rho_l u_l S) = -\nabla P_l + \nabla \tau_l + \rho_l g,$$

где P_l – давление жидкой фазы, τ_l – напряжение жидкой фазы, и g – ускорение свободного падения.

Для решения математической системы двухфазной задачи Вентцеля необходимо задать начальные и граничные условия. Начальные условия определяют значения переменных в начальный момент времени, а граничные условия определяют значения переменных на границах поровой среды. Также необходимо учесть различные источники и стоки массы и импульса, которые могут возникать в системе. Однофазная и двухфазная задачи Вентцеля имеют широкое применение в различных областях, таких как нефтегазовая промышленность, энергетика, аэродинамика и геология. Они позволяют анализировать и оптимизировать процессы переноса массы и тепла, что является важным для разработки новых технологий и повышения эффективности существующих систем.

1.3.3. Численные методы решения задач Вентцеля

Одним из самых популярных численных методов для решения задачи Вентцеля является метод конечных разностей. Он основан на аппроксимации производных в уравнениях динамики среды разностными операторами. Для этого сетка разбивается на конечные элементы, и значения функций в узлах сетки аппроксимируются с помощью интерполяционных полиномов. Затем, подставляя эти аппроксимации в уравнения динамики среды и учитывая граничные условия, полу-

чаем систему линейных алгебраических уравнений, которую можно решить численно. Для решения системы линейных алгебраических уравнений, полученной с помощью метода конечных разностей, можно использовать различные методы. Один из таких методов – метод прогонки. Он основан на прямом и обратном ходе Гаусса и позволяет эффективно решать трехдиагональные системы линейных уравнений, которые часто возникают при применении метода конечных разностей. Другими методами решения системы линейных уравнений могут быть методы прямых итераций, методы сопряженных градиентов и другие.

Для учета неоднородностей среды, нелинейностей и других сложных эффектов, в задаче Вентцеля может быть также применен метод конечных элементов. Этот метод позволяет более гибко аппроксимировать функции в узлах сетки и учитывать сложные геометрические формы среды. Он основан на представлении среды в виде конечного числа элементов, каждый из которых имеет свои характеристики, такие как материальные свойства и форма. Затем решение уравнений динамики среды аппроксимируется внутри каждого элемента с помощью интерполяционных полиномов, и получается система уравнений, которую можно решить численно. Для решения системы уравнений, полученной с помощью метода конечных элементов, также можно использовать различные методы. Один из таких методов – метод Ньютона. Он основан на линеаризации уравнений динамики среды в окрестности текущего приближения и последующем решении линейной системы уравнений. В частности, в качестве других методов решения системы уравнений могут быть методы Галеркина и лбметоды Гаусса – Зейделя. Особое значение в рамках аналитического метода имеет поиск классического решения с помощью теории потенциала и

применения повторных потенциалов простого и двойного слоя. В работах [1, 2] сформулированы внутренние и внешние задачи Вентцеля, доказаны теоремы о единственности решений для них, а также получены необходимые условия их разрешимости, аналогичные условиям существования решений задач Дирихле и Неймана.

Эллиптические уравнения, как правило, формулируются в виде вариационных задач, где целевая функция и ограничения зависят от управляемых переменных и состояния системы. Для эффективного решения таких задач используются численные методы, которые позволяют приближенно находить решения, когда аналитические методы оказываются неэффективными или невозможными. Численные методы для решения задач оптимального управления эллиптическими уравнениями можно разделить на несколько категорий, включая методы конечных разностей, конечных элементов, спектральные методы и методы оптимизации (см., например, [82]). Эти методы основаны на разложении решения в ряд функций, к примеру, через полиномы Лежандра или ряд Фурье, что позволяет значительно уменьшить количество вычислений при сохранении высокой точности. Однако спектральные методы могут быть менее эффективными для задач с нерегулярными границами или в случаях, когда требуется учитывать сложные граничные условия. Тем не менее, они находят своё применение в задачах, где важна высокая точность и скорость сходимости.

При решении задач оптимального управления с эллиптическими уравнениями также необходимо учитывать методы оптимизации, которые позволяют находить управляемые функции, минимизирующие целевую функцию. Одним из наиболее распространённых подходов является метод градиентного спуска, который использует информацию о градиенте целевой функции для итеративного обновления

управляющих переменных. Важно отметить, что для эффективного применения метода градиентного спуска необходимо вычислять градиенты целевой функции, что может быть затруднительно в случае сложных зависимостей. В таких случаях могут быть использованы методы численного дифференцирования, которые позволяют оценивать градиенты на основе значений целевой функции в соседних точках. При решении задач оптимального управления эллиптическими уравнениями с граничными условиями Вентцеля также важно учитывать особенности этих условий. Граничные условия Вентцеля представляют собой комбинацию условий типа Дирихле и Неймана, что делает их более сложными для численного решения. В таких случаях может потребоваться использование специальных методов, таких как методы разбиения области или методы, основанные на вариационных принципах, которые позволяют более точно учитывать взаимодействие между внутренними и граничными значениями.

1.4. Стохастические системы уравнений Вентцеля

В п.1.1. –1.3. в рамках схемы системного анализа был проведен анализ различных аспектов исследования систем уравнений Вентцеля. В ходе синтеза на основе аспектных оценок был получен вывод о том, что в условиях определенности детерминированные системы уравнений Вентцеля частично изучены (исследован вопрос о существовании решения). Это создает предпосылки для начала системного исследования в условиях стохастической неопределенности (см. рис. 1.4.1). В результате, применение системного подхода позволило определить основную цель работы — разработку аналитических и численных методов для изучения стохастических динамических и эволюционных систем, описываемых уравнениями Вентцеля, а также реализацию соот-

ветствующих алгоритмов анализа в условиях стохастической неопределенности.

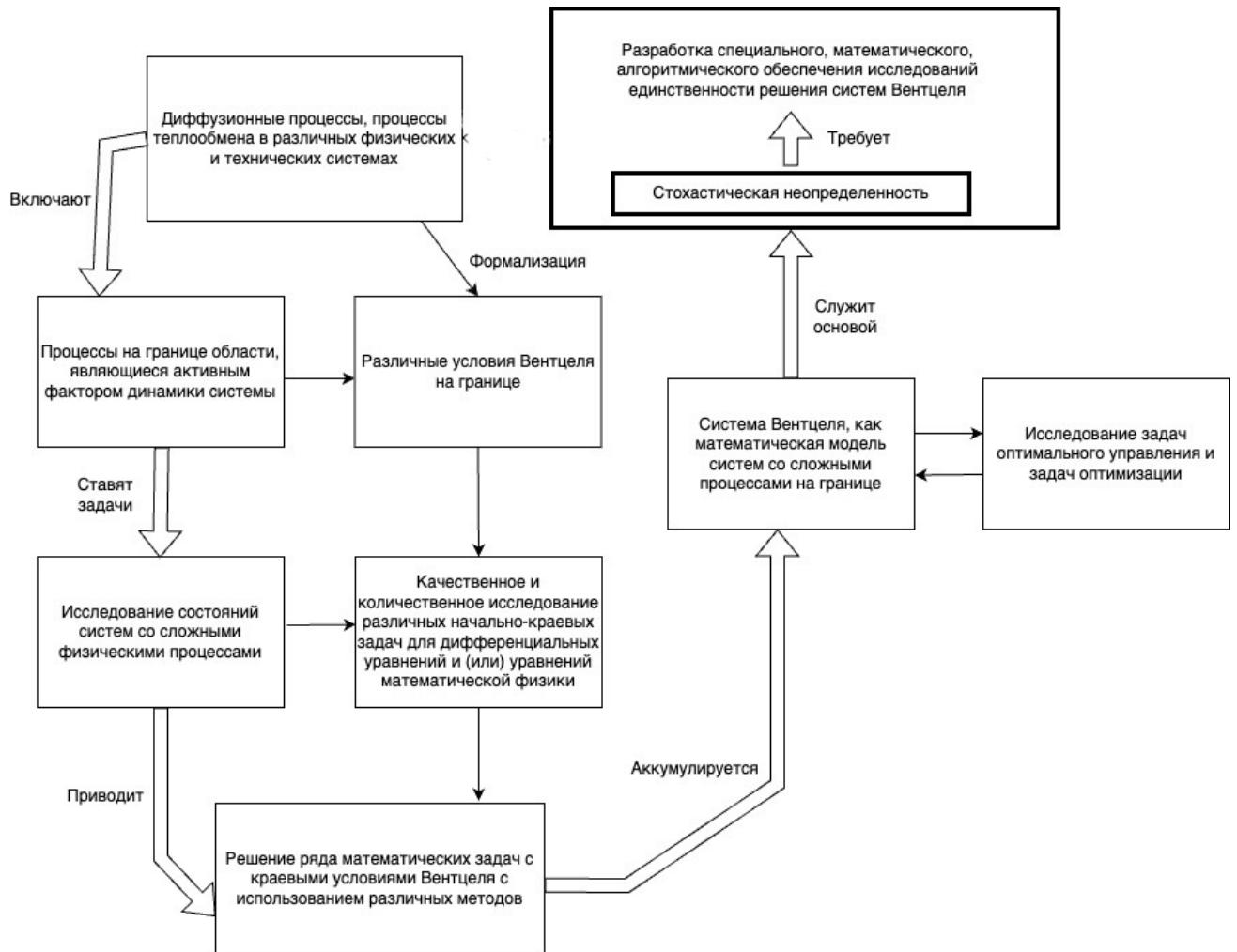


Рис. 1.4.1. Контекстная диаграмма

1.4.1. Стохастические вещественные сепарабельные гильбертовы пространства

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – полное вероятностное пространство с вероятностной мерой \mathbf{P} , ассоциированное с σ -алгеброй \mathcal{A} подмножеством множества Ω , а \mathbb{R} – множество действительных чисел, наделенное борелевой σ -алгеброй. Измеримое отображение $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Множество случайных величин с нулевым ма-

тематическим ожиданием и конечной дисперсией образуют гильбертovo пространство \mathbf{L}_2 со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{M}\xi_1\xi_2$.

Возьмем множество $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ и рассмотрим два отображения $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{L}_2$, которое каждому $t \in \mathcal{J}$ ставит в соответствии случайную величину $\xi \in \mathbf{L}_2$ и $g : \mathbf{L}_2 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, которое каждой паре (ξ, ω) ставит в соответствии точку $\xi(\omega) \in \mathbb{R}$. Отображение $\xi : \mathcal{J} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, имеющее вид $\xi = \xi(t, \omega) = g(f(t), \omega)$, назовем (*одномерным*) *стохастическим процессом*. При каждом фиксированном $t \in \mathcal{J}$ значение стохастического процесса $\xi = \xi(t, \cdot)$ является случайной величиной, т.е. $\xi = \xi(t, \cdot) \in \mathbf{L}_2$, которую назовем *сечением стохастического процесса в точке* $t \in \mathcal{J}$. При каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $\xi = \xi(\cdot, \omega)$ называется (*выборочной*) *траекторией случайного процесса*, соответствующей элементарному исходу $\omega \in \Omega$. Траектории также называются реализациями или выборочными функциями случайного процесса. Обычно, когда это не приводит к неясности, зависимость $\xi(t, \omega)$ от ω не указывается и случайный процесс просто $\xi(t)$.

Считая $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ интервалом, назовем стохастический процесс $\xi = \xi(t), t \in \mathcal{J}$ *непрерывным*, если (почти наверное) п.н. всего его траектории непрерывны (т.е. при (почти всех) п.в. $\omega \in \mathcal{A}$ траектории $\xi(\cdot, \omega)$ являются непрерывными функциями). Множество всех непрерывных стохастических процессов образует банахово пространство, которое мы будем обозначать символом $\mathbf{C}(\mathcal{J}; \mathbf{L}_2)$ с нормой

$$\|\xi\|_{\mathbf{CL}_2} = \sup_{t \in \mathcal{J}} (\mathbf{D}\xi(t, \omega))^{1/2}.$$

Непрерывный случайный процесс, чьи (независимые) случайные величины гауссовы, называется *гауссовым*. В качестве примера непрерывного гауссова случайного процесса рассмотрим (одномерный) винеровский процесс $\beta(t)$, моделирующий броуновское движение на прямой в теории Эйнштейна – Смолуховского. Он обладает следующими

свойствами:

- (i) п.н. все траектории $\beta(t)$ непрерывны, п.н. $\beta(0) = 0$, и при всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ случайная величина $\beta(t)$ гауссова;
- (ii) математическое ожидание $\mathbf{M}(\beta(t)) = 0$ и автокорреляционная функция $\mathbf{M}((\beta(t) - \beta(s))^2) = |t - s|$ при всех $s, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$;
- (iii) траектории $\beta(t)$ недифференцируемы в любой точке $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и на любом сколь угодно малом промежутке имеют неограниченную вариацию.

Пусть \mathcal{A}_0 — σ -подалгебра σ -алгебры \mathcal{A} . Построим подпространство $\mathbf{L}_2^0 \subset \mathbf{L}_2$ случайных величин, измеримых относительно \mathcal{A}_0 . Обозначим через $\Pi : \mathbf{L}_2 \rightarrow \mathbf{L}_2^0$ — ортопроектор. Пусть $\xi \in \mathbf{L}_2$, тогда $\Pi\xi$ называется *условным математическим ожиданием* случайной величины ξ и обозначается символом $\mathbf{M}(\xi|\mathcal{A}_0)$. Зафиксируем $\xi \in \mathbf{C}(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$ и $t \in \mathfrak{I}$, через \mathcal{N}_t^ξ обозначим σ -алгебру, порожденную случайной величиной $\xi(t)$, и обозначим $\mathbf{M}_t^\xi = \mathbf{M}(\cdot|\mathcal{N}_t^\xi)$.

Определение 1.4.1. Пусть $\xi \in \mathbf{C}(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$. Производной Нельсона – Гликлиха $\overset{\circ}{\xi}$ стохастического процесса ξ в точке $t \in \mathfrak{I}$ называется случайная величина

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\xi}(t, \cdot) &= \frac{1}{2} \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \mathbf{M}_t^\xi \left(\frac{\xi(t + \Delta t, \cdot) - \xi(t, \cdot)}{\Delta t} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \mathbf{M}_t^\xi \left(\frac{\xi(t, \cdot) - \xi(t - \Delta t, \cdot)}{\Delta t} \right) \right), \end{aligned}$$

если предел существует в смысле равномерной метрики на \mathbb{R} .

В качестве примера приведем производную Нельсона – Гликлиха, найденную для винеровского процесса $\beta(t)$ (см. напр., [70]), описывающего броуновское движение в модели Энштейна – Смоуховского

$$\overset{\circ}{\beta}(t) = \frac{\beta(t)}{2t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Заметим, что множество непрерывных стохастических процессов, для которых существует производная $\overset{\circ}{\mathbf{D}}\xi(t, \cdot)$, образует банаово пространство $\mathbf{C}^1(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$ с нормой

$$\|\xi\|_{\mathbf{C}^1\mathbf{L}_2} = \sup_{t \in \mathfrak{I}} \left(\mathbf{D}\xi(t, \omega) + \mathbf{D}\overset{\circ}{\xi}(t, \omega) \right)^{1/2}.$$

Определим далее по индукции банаовы пространства $\mathbf{C}^l(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$, $l \in \mathbb{N}$, стохастических процессов, чьи траектории п.н. дифференцируемы по Нельсону – Гликлиху на \mathfrak{I} до порядка $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ включительно. Нормы в них задаются формулами

$$\|\xi\|_{\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2} = \sup_{t \in \mathfrak{I}} \left(\sum_{k=0}^l \mathbf{D}\overset{\circ}{\xi}^{(k)}(t, \omega) \right)^{1/2}.$$

Здесь будем считать производную Нельсона – Гликлиха нулевого порядка исходным случайным процессом, т.е. $\overset{\circ}{\xi}^{(0)} \equiv \xi$. Отметим еще, что пространства $\mathbf{C}^l(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, для краткости будем называть *пространствами **K**-«шумов»*.

Перейдем к построению пространства *случайных **K**-величин*. Возьмем \mathfrak{H} – вещественное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{\varphi_k\}$, монотонную последовательность $\mathbf{K} = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < +\infty$, а также последовательность $\{\xi_k\} = \xi_k(\omega) \subset \mathbf{L}_2$ случайных величин такую, что $\|\xi_k\|_{\mathbf{L}_2} \leq C$, при некоторой константе $C \in \mathbb{R}_+$ и при всех $k \in \mathbb{N}$. Построим \mathfrak{H} -значную *случайную **K**-величину*

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k(\omega) \varphi_k.$$

Пополнение линейной оболочки множества $\{\lambda_k \xi_k \varphi_k\}$ по норме

$$\|\xi\|_{\mathbf{H}_K \mathbf{L}_2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \mathbf{D} \xi_k \right)^{1/2}$$

называется *пространством (\mathfrak{H} -значных) случайных \mathbf{K} -величин* и обозначается символом $\mathbf{H}_K \mathbf{L}_2$. Как нетрудно видеть, пространство $\mathbf{H}_K \mathbf{L}_2$ — гильбертово, причем построенная выше случайная \mathbf{K} -величина $\xi = \xi(\omega) \in \mathbf{H}_K \mathbf{L}_2$. Аналогично, банахово пространство (\mathfrak{H} -значных) \mathbf{K} -«шумов» $\mathbf{C}^l(\mathcal{J}; \mathbf{H}_K \mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, определим как пополнение линейной оболочки множества $\{\lambda_k \xi_k \varphi_k\}$ по норме

$$\|\xi\|_{\mathbf{C}^l \mathbf{H}_K \mathbf{L}_2} = \sup_{t \in \mathcal{J}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \sum_{m=1}^l \mathbf{D} \overset{\circ}{\xi}_k^{(m)} \right)^{1/2},$$

где последовательность «шумов» $\{\xi_k\} \subset \mathbf{C}^l(\mathcal{J}; \mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Таким образом, имеем пространство $\mathbf{C}^l(\mathcal{J}, \mathbf{F}_K \mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ дифференцируемых \mathbf{K} -«шумов», для которых траектории п.н. дифференцируемы по Нельсону – Гликлиху на \mathcal{J} до порядка l включительно. Как нетрудно видеть, вектор

$$\xi(t, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k(t, \omega) \varphi_k$$

лежит в пространстве $\mathbf{C}^l(\mathcal{J}; \mathbf{H}_K \mathbf{L}_2)$, если последовательность векторов $\{\xi_k\} \subset \mathbf{C}^l(\mathcal{J}; \mathbf{L}_2)$ и все их производные Нельсона – Гликлиха до порядка $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ включительно равномерно ограничены по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{C}^l \mathbf{L}_2}$.

Пример 1.4.1. Вектор, лежащий во всех пространствах $\mathbf{C}^l(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_K \mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$,

$$W_K(t, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \beta_k(t, \omega) \varphi_k,$$

где $\{\beta_k\} \subset \mathbf{C}^l(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$ – последовательность броуновских движений, называется (\mathfrak{H} -значным) винеровским \mathbf{K} -процессом.

Пусть теперь $\mathfrak{U} (\mathfrak{F})$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{\varphi_k\}$ ($\{\psi_k\}$). Введем в рассмотрение монотонную последовательность $\mathbf{K} = \{\lambda_k\} \subset \{0\} \cup \mathbb{R}$ такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < +\infty$. Символом $\mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ ($\mathbf{F}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$) обозначим гильбертово пространство, являющееся пополнением линейной оболочки случайных \mathbf{K} -величин

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \varphi_k, \quad \xi_k \in \mathbf{L}_2, \quad \left(\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \zeta_k \psi_k, \quad \zeta_k \in \mathbf{L}_2 \right),$$

по норме

$$\|\xi\|_{\mathbf{U}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \mathbf{D}\xi_k \quad \left(\|\omega\|_{\mathbf{F}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \mathbf{D}\zeta_k \right).$$

Заметим, что в разных пространствах ($\mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{F}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$) последовательность \mathbf{K} может быть разной ($\mathbf{K} = \{\lambda_k\}$ в $\mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{K} = \{\mu_k\}$ в $\mathbf{F}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$), однако все последовательности, отмеченные символом \mathbf{K} , должны быть монотонными и суммируемыми с квадратом. Все результаты, вообще говоря, будут верны при разных последовательностях $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$, однако простоты ради мы ограничимся случаем $\lambda_k = \mu_k$.

Пусть $A : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ – линейный оператор. Формулой

$$A\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k A\varphi_k \tag{1.4.1}$$

зададим линейный оператор $A : \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 \rightarrow \mathbf{F}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$, причем если ряд в правой части (1.4.1) сходится (в метрике $\mathbf{F}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$), то $\xi \in \text{dom } A$, а если расходится, то $\xi \notin \text{dom } A$. Традиционно определяются пространства

линейных непрерывных операторов $\mathcal{L}(\mathbf{U}_\mathbf{K}\mathbf{L}_2; \mathbf{F}_\mathbf{K}\mathbf{L}_2)$ и линейных замкнутых плотно определенных операторов. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.4.1. (i) Оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ точно тогда, когда $A \in \mathcal{L}(\mathbf{U}_\mathbf{K}\mathbf{L}_2; \mathbf{F}_\mathbf{K}\mathbf{L}_2)$.

Как нетрудно видеть,

$$\|A\xi\|_{\mathbf{F}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \mathbf{D}\xi_k \|A\varphi_k\|_{\mathfrak{F}}^2 \leq \text{const} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \mathbf{D}\xi_k = \text{const} \|\xi\|_{\mathbf{U}}.$$

(ii) Оператор $A \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ точно тогда, когда $A \in Cl(\mathbf{U}_\mathbf{K}\mathbf{L}_2; \mathbf{F}_\mathbf{K}\mathbf{L}_2)$.

1.4.2. Общая постановка задач для стохастической обобщенной фильтрационной системы уравнений Вентцеля

Пусть $\Omega = \{(r, \theta, \varphi) : r \in [0, R], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ – шар в \mathbb{R}^3 с границей $\Gamma = \{(r, \theta, \varphi) : r = R, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$. Простоты ради положим $\mathfrak{U} = \{u \in W_2^2(\Omega) \oplus W_2^2(\Gamma) : \partial_R u = 0\}$, $\mathfrak{F} = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma)$. Далее, по алгоритму, изложенному выше, построим пространства случайных \mathbf{K} -величин. Случайные \mathbf{K} -величины $\xi, \chi \in \mathbf{U}_\mathbf{K}\mathbf{L}_2$ имеют вид

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \phi_k, \quad \chi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \chi_k \psi_k, \tag{1.4.2}$$

где $\{\phi_k\}$ – ортонормированный базис сепарабельного гильбертова пространства \mathfrak{U} ; $\{\psi_k : \text{tr } \phi_k = \psi_k\}$ – ортонормированный базис сепарабельного гильбертова пространства \mathfrak{U} , полученный в результате сужения семейства функций $\{\phi_k\}$ на границу области Γ . Пусть многочлены $P_n(\bullet) = \sum_{i=0}^n c_i \bullet^i$, $Q_m(\bullet) = \sum_{j=0}^m d_j \bullet^j$ таковы, что $c_i, d_j \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$, $n \leq m$. Рассмотрим общую стохастическую фильтрационную систему уравнений Вентцеля в шаре и на его

границе, предварительно определив формально дифференциальные операторы $P_n(\bullet), Q_m(\bullet) \in \mathcal{L}(\mathbf{U}_K \mathbf{L}_2; \mathbf{F}_K \mathbf{L}_2)$. Таким образом, имеем

$$P_n(\bullet) \stackrel{\circ}{\xi}(t) = Q_m(\bullet) \xi(t), \quad \xi(t) \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2), \quad (1.4.3)$$

$$P_n(\bullet) \stackrel{\circ}{\chi}(t) = Q_m(\bullet) \chi(t) + \partial_R \xi, \quad \chi(t) \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2), \quad (1.4.4)$$

К данной системе присовокупим условие согласования и снабдим его начальными условиями

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \chi(0) = \chi_0, \quad (1.4.5)$$

где случайные величины ξ_0, χ_0 имеют нормальное распределение $\xi_0 \in \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2, \chi_0 \in \mathbf{F}_K \mathbf{L}_2$. Решение задачи (1.4.3)–(1.4.5) назовем решением стохастической обобщенной фильтрационной системы уравнений Вентцеля.

Глава 2. Разработка методов и алгоритмов для решения стохастической динамической системы Вентцеля

2.1. Метод анализа условий для детерминированной динамической системы уравнений Вентцеля

Разрешимость системы уравнений Вентцеля

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u + \beta u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad (2.1.1)$$

$$(\lambda - \Delta)v_t = \gamma\Delta v + \frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta v, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma, \quad (2.1.2)$$

будем изучать в случае $\Omega = \{(r, \theta, \varphi) : r \in [0, R], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ – шар в \mathbb{R}^3 , с границей $\Gamma = \{(r, \theta, \varphi) : r = R, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$. Рассмотрим систему из двух уравнений, описывающих процессы фильтрации жидкости,

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta,\varphi})u_t = \alpha\Delta_{r,\theta,\varphi}u + \beta u, \quad (2.1.3)$$

$$(\lambda - \Delta_{\theta,\varphi})v_t = \gamma\Delta_{\theta,\varphi}v + \partial_R u + \delta v, \quad (2.1.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{r,\theta,\varphi} &= (r - R)\frac{\partial}{\partial r}\left((R - r)\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\ \Delta_{\theta,\varphi} &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \partial_R = \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{r=R}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

К данной системе присоединим условие согласования, что гарантирует единственность полученного решения (см., напр. [111]),

$$tr u = v, \quad \text{на } \mathbb{R}_+ \times \Gamma, \quad (2.1.6)$$

и снабдим ее начальными условиями

$$u(0, r, \theta, \varphi) = u_0(r, \theta, \varphi), \quad v(0, \theta, \varphi) = v_0(\theta, \varphi). \quad (2.1.7)$$

Поскольку собственные векторы оператора Лапласа в сферической системе координат содержат специальные функции, обозначим символом $\Delta_{r,\theta,\varphi}$ в (2.1.1) модифицированный оператор Лапласа – Бельтрами (2.1.5) в Ω , а в (2.1.2) символом $\Delta_{\theta,\varphi}$ – модифицированный оператор Лапласа – Бельтрами на Γ . Символом ν , $(t, r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma$, обозначена внешняя по отношению к Ω нормаль. Параметры $\alpha, \gamma, \lambda, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ характеризуют среду.

Решение задачи (2.1.3)–(2.1.7) назовем детерминированным решением динамической системы Вентцеля, состоящей из уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1.1. Для любых $u_0 \in A(\Omega)$ и $v_0 \in A(\Gamma)$ таких, что выполнено условие согласования, и для коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda \in \mathbb{R}$, таких, что выполнено следующее условие $\alpha = \gamma, \beta = \delta$, а $\lambda \neq k^2$, где $k \in \mathbb{N}$, существует единственное решение $(u, v) \in C^\infty(\mathbb{R}; A(\Omega) \oplus A(\Gamma))$ динамической системы Вентцеля, состоящей из уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной (2.1.3)–(2.1.7).

Доказательство. Для доказательства теоремы рассмотрим следующий ряд

$$\begin{aligned} u = & \sum_{k=2}^{\infty} \exp \left(t \frac{\beta - \alpha k^2}{\lambda + k^2} \right) \frac{(R-r)^k}{R^k} \left(a_k \sin k\theta (\sin k\varphi + \right. \\ & \left. + \cos k\varphi) + b_k \cos k\theta (\sin k\varphi + \cos k\varphi) \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left(t \frac{\beta - \alpha k^2}{\lambda + k^2} \right) \left(c_k \sin k\theta (\sin k\varphi + \right. \\ & \left. + \cos k\varphi) + d_k \cos k\theta (\sin k\varphi + \cos k\varphi) \right), \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

где

$$a_k = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_0(r, \theta, \varphi) \frac{(R-r)^k}{R^k} \sin k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr,$$

$$b_k = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_0(r, \theta, \varphi) \frac{(R-r)^k}{R^k} \cos k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr,$$

$$c_k = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v_0(\theta, \varphi) \sin k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$d_k = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v_0(\theta, \varphi) \cos k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi) d\theta d\varphi.$$

Нетрудно заметить, что построенный ряд выше является формальным решением уравнения (2.1.3). Причем, если ряды в (2.1.8) равномерно сходятся, то перед нами решение задачи (2.1.3), (2.1.7), где $\partial_R u = 0$. Учитывая это, можно построить решение задачи (2.1.4), (2.1.7)

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left(t \frac{\delta - \gamma k^2}{\lambda + k^2} \right) \left(c_k \sin k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi) + d_k \cos k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi) \right), \quad (2.1.9)$$

где в случае $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ решения задачи (2.1.3) – (2.1.7) будут удовлетворять условию согласования (2.1.6).

Замыкание $\text{span}\{(R^k)^{-1}(R-r)^k \sin k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi), (R^k)^{-1} \times (R-r)^k \cos k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi) : k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, r \in (0, R), \theta \in [0, \pi]\}$,

$\varphi \in [0, 2\pi)\}$ порожденное скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{A(\Omega)} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(r, \theta, \varphi) \psi(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr,$$

обозначим символом $A(\Omega)$. Далее, замыкание $\text{span}\{\sin k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi), \cos k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi) : k \in \mathbb{N}, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\}$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{A(\Gamma)} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(R, \theta, \varphi) \psi(R, \theta, \varphi) d\theta d\varphi,$$

обозначим символом $A(\Gamma)$. Таким образом, теорема доказана полностью.

2.2. Метод анализа условий для стохастической динамической системы уравнений Вентцеля

2.2.1 Аналитическое исследование решений стохастической динамической системы уравнений Вентцеля в случае модифицированных операторов Лапласа – Бельтрами

Простоты ради положим $\mathfrak{U} = \{u \in W_2^2(\Omega) \oplus W_2^2(\Gamma) : \partial_R u = 0\}$, $\mathfrak{F} = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma)$. Далее, по алгоритму, изложенному выше, построим пространства случайных **K**-величин. Случайные **K**-величины ξ , $\chi \in \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2$ имеют вид

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \phi_k, \quad \chi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \chi_k \psi_k, \tag{2.2.1}$$

где $\{\phi_k\}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа – Бельтрами $\Delta_{r,\theta,\varphi} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ортонормированных в

смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L_2(\Omega)$; $\{\psi_k\}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа – Бельтрами $\Delta_{\theta,\varphi} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ортонормированных в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L_2(\Gamma)$. Рассмотрим линейную стохастическую систему Вентцеля уравнение фильтрации влаги в шаре и на его границе. В этом случае (2.1.3)–(2.1.4) преобразуется к виду

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta,\varphi}) \overset{\circ}{\xi}(t) = \alpha \Delta_{r,\theta,\varphi} \xi(t) + \beta \xi(t), \quad (2.2.2)$$

$$(\lambda - \Delta_{\theta,\varphi}) \overset{\circ}{\chi}(t) = \gamma \Delta_{\theta,\varphi} \chi(t) + \partial_R \xi(t) + \delta \chi(t), \quad (2.2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &\in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2), \quad \chi \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2), \\ \Delta_{r,\theta,\varphi} &= (r - R) \frac{\partial}{\partial r} \left((R - r) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\ \Delta_{\theta,\varphi} &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \partial_R = \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=R}. \end{aligned}$$

К данной системе присовокупим условие согласования и снабдим ее начальными условиями

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \chi(0) = \chi_0. \quad (2.2.4)$$

Решение задачи (2.2.2)–(2.2.4) назовем стохастическим решением динамической системы Вентцеля, состоящей из уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2.2. Для любых $\xi_0 \in \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2(\Omega)$ и $\chi_0 \in \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2(\Gamma)$, и коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda \in \mathbb{R}$, таких, что $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, а $\lambda \neq k^2$, где $k \in \mathbb{N}$, существует единственное решение $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2)$ стохастической системы Вентцеля, состоящей из уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной (2.2.2)–(2.2.4).

Доказательство. Существование и единственность решения доказывается по аналогии с детерминированным случаем в силу справедливости леммы 1.4.1.

2.2.2 Аналитическое исследование решений стохастической динамической системы уравнений Вентцеля в классическом случае

Простоты ради положим $\mathfrak{U} = \{u \in W_2^2(\Omega) \oplus W_2^2(\Gamma) : \partial_R u = 0\}$, $\mathfrak{F} = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma)$. Далее, по алгоритму, изложенному выше, построим пространства *случайных* **K**-величин. *Случайные* **K**-величины ξ , $\chi \in \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2$ имеют вид

$$\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j \phi_j, \quad \chi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \chi_j \psi_j, \quad (2.2.5)$$

где $\{\phi_k\}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа – Бельтрами $\Delta_{r,\theta,\varphi} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ортонормированных в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L_2(\Omega)$; $\{\psi_k\}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа – Бельтрами $\Delta_{\theta,\varphi} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ортонормированных в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L_2(\Gamma)$. Рассмотрим линейную стохастическую систему Вентцеля уравнения фильтрации жидкости в полусфере и на ее крае. В этом случае (2.1.3)–(2.1.4) преобразуется к виду

$$(\lambda - \Delta_{\theta,\varphi}) \overset{\circ}{\xi}_t(t) = \alpha \Delta_{\theta,\varphi} \xi(t) + \beta \xi, \quad \xi \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2), \quad (2.2.6)$$

$$(\lambda - \Delta_\varphi) \overset{\circ}{\chi}_t(t) = \gamma \Delta_\varphi \chi(t) + \partial_\theta \chi(t) + \delta \chi(t), \quad \chi \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2), \quad (2.2.7)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta,\varphi} &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ \Delta_\varphi &= \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \partial_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Добавим к этой системе условие согласования и снабдим ее начальными условиями

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \chi(0) = \chi_0. \quad (2.2.8)$$

Решение задачи (2.2.6)–(2.2.8) назовем стохастическим решением динамической системы Вентцеля, состоящей из уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2.3. Для любых $\xi_0 \in \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2(\Omega)$ и $\chi_0 \in \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2(\Gamma)$, и для коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda \in \mathbb{R}$, таких, что выполняется условие $\alpha = \gamma, \beta = \delta$, и $\lambda \neq k^2$, где $k \in \mathbb{N}$, и условие

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^k \left(\int_0^{2\pi} \xi_0 \cos m\varphi d\varphi \cos m\varphi + \int_0^{2\pi} \xi_0 \sin m\varphi d\varphi \sin m\varphi \right) \times \\ & \times \left(P_k^m(0) \right)^2 = \int_0^{2\pi} \chi_0 \cos k\varphi d\varphi \cos k\varphi + \int_0^{2\pi} \chi_0 \sin k\varphi d\varphi \sin k\varphi, \end{aligned}$$

существует единственное решение $(\xi, \chi) \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2)$ стохастическим решением динамической системы Вентцеля, состоящей из уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной (2.2.6)–(2.2.8).

Доказательство. Существование и единственность решения доказывается по аналогии с детерминированным случаем в силу справедливости леммы 1.4.1. Приведем ниже доказательство для детерминированного случая.

Если $\theta_k = k(k+1)$ собственные значения оператора Лапласа – Бель-

трами $\Delta_{\theta,\varphi}$, тогда

$$Y_k^m(\varphi, \theta) = \begin{cases} P_k^m(\cos \theta) \cos m\varphi, & m = 0, \dots, k; \\ P_k^{|m|}(\cos \theta) \sin |m|\varphi, & m = -k, \dots, -1 \end{cases}$$

соответствующие собственные функции, ортонормированные относительно скалярного произведения. Здесь,

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k$$

— многочлен Лежандра степени k , и

$$P_k^{|m|}(t) = (1 - t^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dt^{|m|}} P_k(t)$$

— присоединенный многочлен Лежандра. Скалярное произведение вычисляется по следующей формуле

$$\langle Y_{k_1}^{m_1}, Y_{k_2}^{m_2} \rangle = \int_0^{2\pi} \cos m_1 \varphi \cos m_2 \varphi d\varphi \int_{-1}^1 P_{k_1}^{m_1}(t) P_{k_2}^{m_2}(t) dt.$$

Рассмотрим следующий ряд

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^k \exp \left(t \frac{\beta - \alpha k^2}{\lambda + k^2} \right) \left(a_{m,k} \cos m\varphi + b_{m,k} \sin m\varphi \right) P_k^m(\cos \theta), \quad (2.2.9)$$

где

$$a_{m,k} = \int_0^{2\pi} u_0(\theta, \varphi) \cos m\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_k^m(0) \sin \theta d\theta,$$

$$b_{m,k} = \int_0^{2\pi} u_0(\theta, \varphi) \sin m\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_k^m(0) \sin \theta d\theta.$$

Легко видеть, что построенный выше ряд является формальным решением детерминированного уравнения (2.2.6). Более того, если ряды в (2.2.9) сходятся равномерно, то мы имеем решение детерминированной задачи (2.2.6), где $\partial_\theta u = 0$. Учитывая это, мы можем построить решение задачи (2.2.7), (2.2.8)

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(t \frac{\delta - \gamma k^2}{\lambda + k^2}\right) \left(c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi \right), \quad (2.2.10)$$

где

$$c_k = \int_0^{2\pi} v_0(\varphi) \cos k\varphi d\varphi, \quad d_k = \int_0^{2\pi} v_0(\varphi) \sin k\varphi d\varphi.$$

В случае условия согласования получаем следующее уравнение

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^k \exp\left(t \frac{\beta - \alpha k^2}{\lambda + k^2}\right) \left(a_{m,k} \cos m\varphi + b_{m,k} \sin m\varphi \right) P_k^m(\cos \theta) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(t \frac{\delta - \gamma k^2}{\lambda + k^2}\right) \left(c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, получим равносильную систему уравнений

$$\sum_{m=0}^k \left(a_{m,k} \cos m\varphi + b_{m,k} \sin m\varphi \right) P_k^m(0) = c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi,$$

где $m + n = 2k$. Подставив коэффициенты интеграла, получим экви-

валентную систему

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^k \left(\int_0^{2\pi} u_0(\theta, \varphi) \cos m\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_k^m(0) \sin \theta d\theta \cos m\varphi + \right. \\
 & \left. + \int_0^{2\pi} u_0(\theta, \varphi) \sin m\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_k^m(0) \sin \theta d\theta \sin m\varphi \right) P_k^m(0) = \\
 & = \int_0^{2\pi} v_0(\varphi) \cos k\varphi d\varphi \cos k\varphi + \int_0^{2\pi} v_0(\varphi) \sin k\varphi d\varphi \sin k\varphi.
 \end{aligned}$$

Здесь вспомогательные интегралы вычисляются по формуле

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_k^m(0) \sin \theta d\theta = P_k^m(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = P_k^m(0),$$

и система имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^k \left(\int_0^{2\pi} u_0(\theta, \varphi) \cos m\varphi d\varphi \cos m\varphi + \right. \\
 & \left. + \int_0^{2\pi} u_0(\theta, \varphi) \sin m\varphi d\varphi \sin m\varphi \right) \left(P_k^m(0) \right)^2 = \quad (2.2.11) \\
 & = \int_0^{2\pi} v_0(\varphi) \cos k\varphi d\varphi \cos k\varphi + \int_0^{2\pi} v_0(\varphi) \sin k\varphi d\varphi \sin k\varphi.
 \end{aligned}$$

Таким образом, в случае $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ и полученного условия (2.2.11) решения задачи (2.2.6)–(2.2.7) будут удовлетворять условию согласования.

Линейное замыкание $\text{span}\{P_k^m(\cos \theta) \sin m\varphi, P_k^m(\cos \theta) \cos m\varphi : m, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ по норме, порожденной скалярным

произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\theta, \varphi) \psi(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

обозначим символом $A(\Omega)$. Далее, замыкание $\text{span}\{\sin k\varphi, \cos k\varphi : k \in \mathbb{N}, \varphi \in [0, 2\pi)\}$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$\langle \xi, \psi \rangle = \int_0^{2\pi} \xi(\varphi) \psi(\varphi) d\varphi,$$

обозначим символом $A(\Gamma)$. Таким образом, теорема доказана полностью.

2.3. Алгоритм для нахождения траекторий приближенных решений стохастической динамической системы Вентцеля

Для простоты рассмотрим алгоритм численного метода Галеркина для детерминированной динамической системы Вентцеля. Напомним, что переход к стохастической системе уравнений Вентцеля происходит путем замены функций u и v , определенных на Ω и Γ соответственно, на $\xi = \xi(t)$ и $\chi = \chi(t)$ стохастические процессы на интервале $(0, \tau)$. Построим приближенное решение задачи Коши для данной системы методом Галеркина в следующем виде

$$u_N(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{k=1}^N u_k(t) \phi_k(r, \theta, \varphi) + \sum_{k=1}^N v_k(t) \psi_k(R, \theta, \varphi), \quad (2.3.1)$$

где $\{\phi_k : k \in \mathbb{N}\}$ являются собственными функциями модифицированного оператора Лапласа – Бельтрами $\Delta_{r,\theta,\varphi}$ и соответствуют его собственным значениям, ортонормированным по норме $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Omega)}$, которые нумеруются в невозрастающем порядке с учетом кратности;

$\{\psi_k : k \in \mathbb{N}\}$ являются собственными функциями модифицированного оператора Лапласа – Бельтрами $\Delta_{\theta,\varphi}$ и соответствуют его собственным значениям, ортонормированным по норме $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Gamma)}$, которые нумеруются в невозрастающем порядке с учетом кратности, причем $\phi_k(R, \theta, \varphi) \equiv 0, k = 1, \dots, N$.

Подставим приближенное решение (2.3.1) в уравнения (2.1.1), (2.1.2), и возьмем скалярное произведение на собственные функции $\phi_k(r, \theta, \varphi)$ и $\psi_k(R, \theta, \varphi)$ по следующим формулам $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Omega)}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Gamma)}$. Получим систему (2.3.2). В зависимости от значения параметра λ мы имеем алгебраические или дифференциальные уравнения первого порядка в системе (2.3.2). Поскольку в рамках доказанных теорем предполагается, что $\lambda \notin \sigma(A)$ (случай когда $\lambda \in \sigma(A)$ будет рассмотрен в дальнейших работах), полученная система уравнений является невырожденной, а все уравнения в полученной системе являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка. Для разрешимости этой системы относительно $u_k(t)$ и $v_k(t)$, найдем скалярное произведение начальных условий (2.1.7) на собственные функции $\phi_k(r, \theta, \varphi)$ и $\psi_k(R, \theta, \varphi)$ по норме $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Omega)}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Gamma)}$ соответственно. Решая систему (2.3.2) с соответствующими начальными условиями (2.1.7), находим коэффициенты $u_k(t)$, $v_k(t)$ в приближенном решении

$u_N(t, r, \theta, \varphi)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda - \lambda_1)u'_1 = \alpha\lambda_1 u_1 + \beta u_1, \\ (\lambda - \lambda_2)u'_2 = \alpha\lambda_2 u_2 + \beta u_2, \\ \dots \\ (\lambda - \lambda_N)u'_N = \alpha\lambda_N u_N + \beta u_N, \\ (\lambda - \mu_1)v'_1 = \gamma\mu_1 v_1 + \delta v_1, \\ (\lambda - \mu_2)v'_2 = \gamma\mu_2 v_2 + \delta v_2, \\ \dots \\ (\lambda - \mu_N)v'_N = \gamma\mu_N v_N + \delta v_N, \\ \varphi_k \equiv 0, k = 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (2.3.2)$$

2.4. Программная реализация для нахождения траекторий приближенных решений стохастической динамической системы Вентцеля

Рассмотрим алгоритм программы, реализующей модифицированный метод Галеркина. Она написана на языке Python и предназначена для эксплуатации на персональном компьютере с платформой Intel (UX64), под управлением операционной системы Microsoft Windows. В качестве численного метода для решения задачи Коши применяется метод, изложенный в параграфе 2.3. На рисунке 2.4.1 изображена блок-схема работы данной программы.

Шаг 1. Вводятся коэффициенты стохастической динамической системы Вентцеля α, β , количество галеркинских приближений N , радиус R рассматриваемой области, генерируются случайные величины со стандартным нормальным распределением, входящие в состав разложения начальных функций Коши ξ_0 и χ_0 .

Шаг 2. Производится построение приближения решения задачи в виде суммы Галеркина.

Шаг 3. Производится подстановка полученного приближенного решения на предыдущем шаге в рассматриваемую систему уравнений Вентцеля.

Шаг 4. Отдельной процедурой формируется система дифференциальных уравнений.

Шаг 5. Отдельно решается система дифференциальных уравнений.

Шаг 6. Формируется решение искомой задачи с учетом шага 5, выводится трехмерный график и анимированный трехмерный график с учетом изменения времени.

Для последующей обработки результатов запускается цикл по i , что позволяет в одной программе обработать результаты N экспериментов, где производятся вычисления необходимых характеристик стохастических процессов (математического ожидания от сечения стохастического процесса $\mathbf{M}(\xi(t, r, \theta, \varphi))$, дисперсии от сечения стохастического процесса $\mathbf{D}(\xi(t, r, \theta, \varphi))$ и среднеквадратичного отклонения $\sigma(t)$). Здесь, математическим ожиданием является неслучайная функция $\mathbf{M}(\xi(t, r, \theta, \varphi))$, которая при любом значении t равна математическому ожиданию соответствующего сечения, т. е. представляет собой усредненную траекторию (реализацию), полученную в результате обработки N экспериментов; дисперсией и средним квадратическим отклонением будут являться неслучайные функции $\mathbf{D}(\xi(t, r, \theta, \varphi))$ и $\sigma(t)$, которые при любом значении t равны дисперсии и среднему квадратическому отклонению соответствующего сечения случайного процесса. Таким образом, используя правило трех сигм, можно утверждать что с вероятностью 0,997 имеет место оценка $\|\xi(t, r, \theta, \varphi) - \mathbf{M}(\xi(t, r, \theta, \varphi))\| < 3\sigma(t)$, которая позволяет сделать качественные вы-

воды о системе уравнений Вентцеля, состоящей из уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной, с учетом начального варьирования случайных величин и параметров уравнений, характеризующих среду.

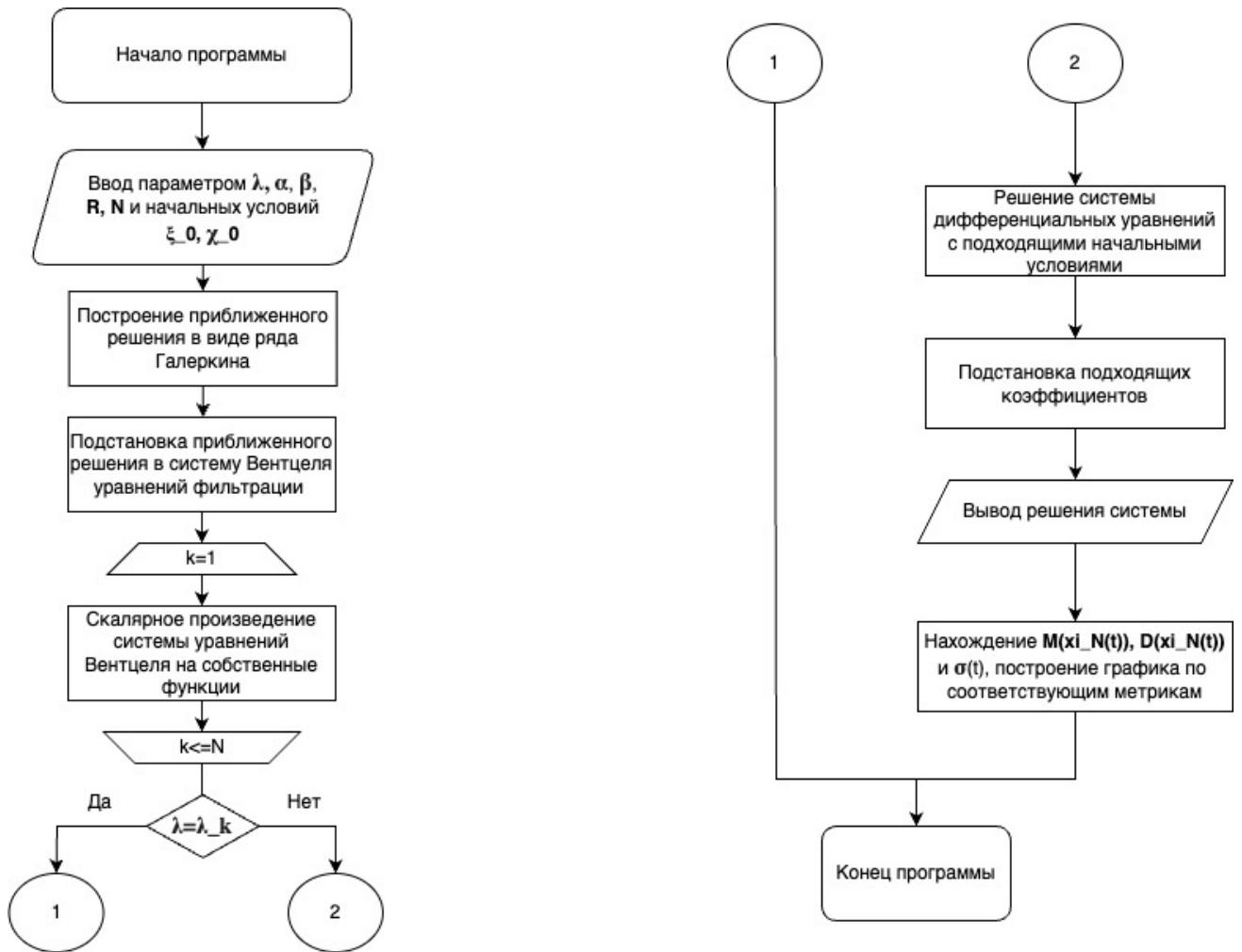


Рис. 2.4.1. Блок-схема численного модифицированного метода Галеркина.

Приведем результаты вычислительного эксперимента.

Пример 2.4.1 Рассмотрим решение задачи Коши для детерминированной динамической системы Вентцеля, состоящей из уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной, в шаре $\Omega = \{(r, \theta, \varphi) : r \in [0, 4], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ с границей $\Gamma = \{(r, \theta, \varphi) : r = 4, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$.

$$(2 - \Delta_{r,\theta,\varphi})u_t = 3\Delta_{r,\theta,\varphi}u + u, \quad (t, r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad (2.4.1)$$

$$(2 - \Delta_{\theta,\varphi})v_t = 3\Delta_{\theta,\varphi}v + \partial_R u + v, \quad (t, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma. \quad (2.4.2)$$

К данной системе присовокупим условие согласования, что гарантирует единственность полученного решения (см., напр. [111]),

$$\operatorname{tr} u = v, \quad \text{на } \mathbb{R}_+ \times \Gamma, \quad (2.4.3)$$

и снабдим ее начальными условиями

$$u(0, r, \theta, \varphi) = \cos(2\theta)(4 - r)^2(\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi)), \quad (2.4.4)$$

$$v(0, \theta, \varphi) = \cos(\theta)(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)). \quad (2.4.5)$$

Пусть $N = 5$, тогда приближенное решение имеет следующий вид

$$u_5(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{k=1}^5 u_k(t)\phi_k(r, \theta, \varphi) + \sum_{k=1}^5 v_k(t)\psi_k(\theta, \varphi). \quad (2.4.6)$$

Подставляя в систему уравнений ортонормированные базисные функции $\phi_k(r, \theta, \varphi)$ и $\psi_k(\theta, \varphi)$; умножая скалярно начальные условия (2.4.4) на собственные функции $\varphi_k(r, \theta, \varphi)$ и $\psi_k(\theta, \varphi)$ по норме $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Omega)}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Gamma)}$, решаем систему (2.3.2) с соответствующими начальными условиями и находим коэффициенты $u_k(t)$ и $v_k(t)$ в приближенном решении. Используя тот факт, что $\lambda \notin \sigma(A)$, система уравнений является невырожденной, и, согласно алгоритму, все уравнения в полученной системе являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка, решим систему (2.3.2) с начальными условиями, а также находим коэффициенты Галеркина. Получаем решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} v(t, r, \phi, \theta) = & 57,190(1 - 0.25r)^2(\sin(2\phi) + \cos(2\phi)) \exp(-1,833t) \times \\ & \times \sin(2\theta) + 57,190(\sin(2\phi) + \cos(2\phi)) \cos(2\theta). \end{aligned}$$

График решения показан на рисунке 2.4.2.

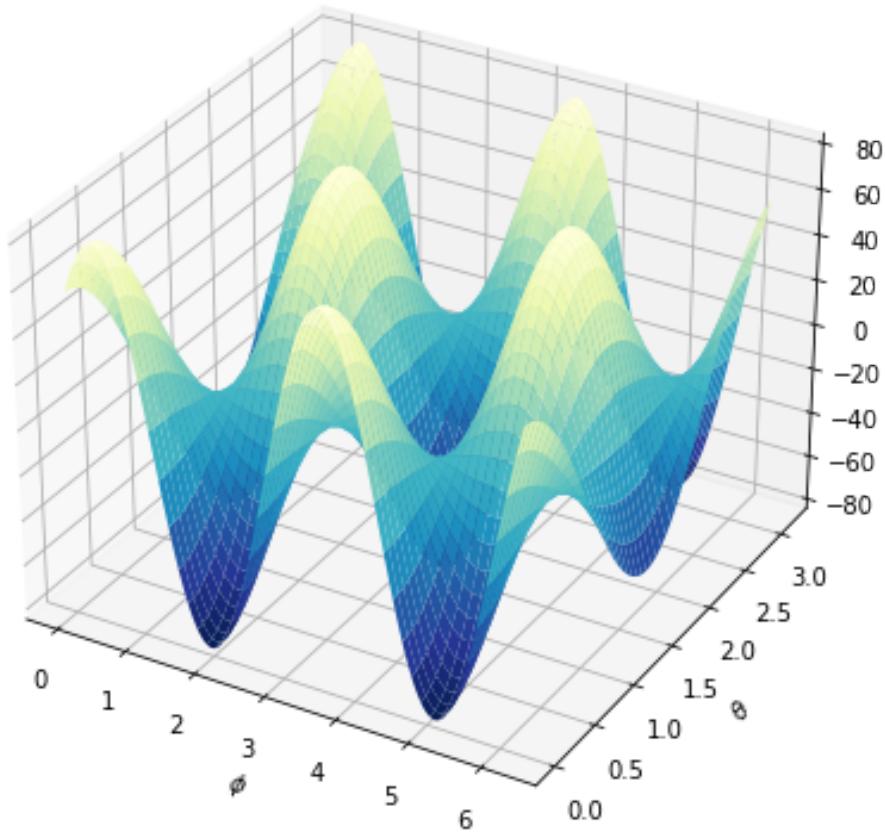


Рис. 2.4.2. Решение динамической системы уравнений Вентцеля для Примера 2.4.1

Пример 2.4.2 Рассмотрим решение задачи Коши для стохастической динамической системы Вентцеля, состоящей из уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной, в шаре $\Omega = \{(r, \theta, \varphi) : r \in [0, 4], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ с границей $\Gamma = \{(r, \theta, \varphi) : r = 4, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$.

$$(2 - \Delta_{r,\theta,\varphi}) \overset{\circ}{\xi}(\omega, t) = 3\Delta_{r,\theta,\varphi}\xi(\omega, t) + \xi(\omega, t), \quad (2.4.7)$$

$$(2 - \Delta_{\theta,\varphi}) \overset{\circ}{\chi}(\omega, t) = 3\Delta_{r,\theta,\varphi}\chi(\omega, t) + \partial_R\xi(\omega, t) + \chi(\omega, t). \quad (2.4.8)$$

К данной системе присовокупим условие согласования, что гарантирует единственность полученного решения, и снабдим ее начальными

условиями

$$\xi(\omega, 0) = \xi_0 \cos(2\theta)(4 - r)^2(\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi)), \quad (2.4.9)$$

$$\chi(\omega, 0) = \chi_0 \cos(\theta)(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)), \quad \xi_0, \chi_0 \sim N(0, 1). \quad (2.4.10)$$

Пусть $N = 4$, тогда приближенное решение имеет следующий вид

$$\xi_4(\omega, t, r, \theta, \varphi) = \sum_{k=1}^4 \xi_k(\omega) \phi_k(r, \theta, \varphi) + \sum_{k=1}^4 \chi_k(\omega) \psi_k(\theta, \varphi). \quad (2.4.11)$$

Подставляя в систему уравнений ортонормированные базисные функции $\phi_k(r, \theta, \varphi)$ и $\psi_k(\theta, \varphi)$; умножая скалярно начальные условия (2.4.9), (2.4.10) на собственные функции $\phi_k(r, \theta, \varphi)$ и $\psi_k(\theta, \varphi)$ по норме $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Omega)}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Gamma)}$, решаем систему (2.3.2) с соответствующими начальными условиями и находим коэффициенты в приближенном решении. Используя тот факт, что $\lambda \notin \sigma(A)$, система уравнений является невырожденной, и, согласно алгоритму, все уравнения в полученной системе являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка, решим систему (2.3.2) с начальными условиями находим коэффициенты Галеркина. Получаем решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \xi_4(\omega, t, r, \theta, \varphi) = & 0,2453(1 - 0,25r)^3(\sin(3\phi) + \cos(3\phi)) \exp(0,091t) \times \\ & \times \sin(3\theta) + 27,153 \cdot (1 - 0,25r)^2(\sin(2\phi) + \cos(2\phi)) \exp(0,167t) \sin(2\theta) \\ & + 27,153 \cdot (\sin(2\phi) + \cos(2\phi)) \cos(2\theta). \end{aligned}$$

График решения в виде траекторий стохастического процесса $\xi(t)$ представлен на рисунке 2.4.3 – 2.4.4.

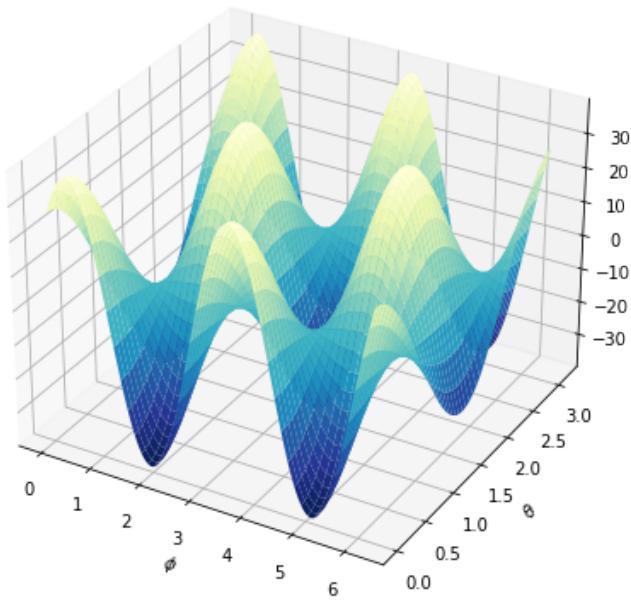


Рис. 2.4.3. Траектория решения стохастической динамической системы уравнений Вентцеля для Примера 2.4.2

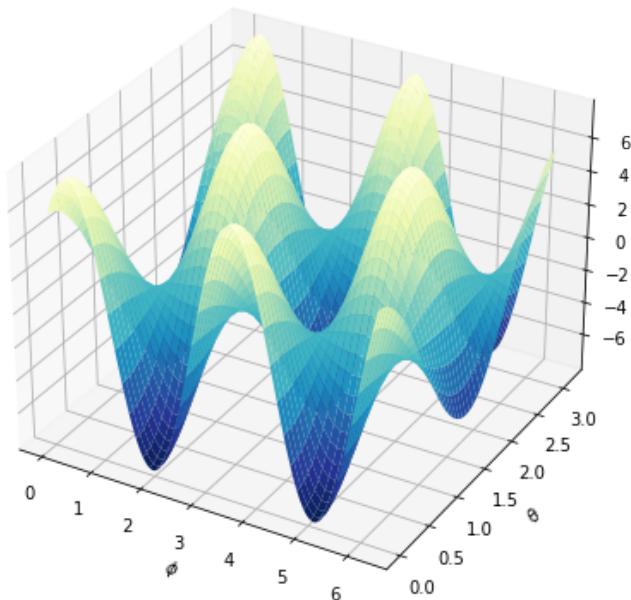


Рис. 2.4.4. Траектория решения стохастической динамической системы уравнений Вентцеля для Примера 2.4.2

Глава 3. Разработка методов и алгоритмов для решения стохастической эволюционной системы Вентцеля

3.1. Метод анализа условий для детерминированной эволюционной системы уравнений Вентцеля

Разрешимость эволюционной системы Вентцеля, состоящей из уравнений Дзекцера,

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha_0\Delta u - \beta_0\Delta^2 u - \gamma_0 u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad (3.1.1)$$

$$(\lambda - \Delta)v_t = \alpha_1\Delta v - \beta_1\Delta^2 v + \frac{\partial u}{\partial \nu} - \gamma_1 v, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma, \quad (3.1.2)$$

будем изучать в случае когда $\Omega = \{(r, \theta, \varphi) : r \in [0, R), \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\}$ – шар в \mathbb{R}^3 , с границей $\Gamma = \{(r, \theta, \varphi) : r = R, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\}$. Рассмотрим систему из двух уравнений, описывающую эволюцию свободной поверхности фильтрующей жидкости,

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta,\varphi})u_t = \alpha_0\Delta_{r,\theta,\varphi}u - \beta_0\Delta_{r,\theta,\varphi}^2u - \gamma_0u, \quad (3.1.3)$$

$$(\lambda - \Delta_{\theta,\varphi})v_t = \alpha_1\Delta_{\theta,\varphi}v - \beta_1\Delta_{\theta,\varphi}^2v + \partial_R u - \gamma_1 v, \quad (3.1.4)$$

где

$$\begin{aligned} u &= u(t, r, \theta, \varphi), \quad (t, r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ v &= v(t, \theta, \varphi), \quad (t, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma, \end{aligned}$$

$$\Delta_{r,\theta,\varphi} = (r - R) \frac{\partial}{\partial r} \left((R - r) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (3.1.5)$$

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \partial_R = \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=R}.$$

К данной системе присовокупим условие согласования, что гарантирует единственность полученного решения (см., напр. [111]),

$$\operatorname{tr} u = v, \text{ на } \mathbb{R}_+ \times \Gamma, \quad (3.1.6)$$

и снабдим ее начальными условиями

$$u(0, r, \theta, \varphi) = u_0(r, \theta, \varphi), \quad v(0, \theta, \varphi) = v_0(\theta, \varphi). \quad (3.1.7)$$

Поскольку собственные векторы оператора Лапласа в сферической системе координат содержат специальные функции, обозначим символом $\Delta_{r,\theta,\varphi}$ в (3.1.1) модифицированный оператор Лапласа – Бельтрами (3.1.5) в Ω , а в (3.1.2) символом $\Delta_{\theta,\varphi}$ – модифицированный оператор Лапласа – Бельтрами на Γ . Символом ν , $(t, r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma$, обозначена внешняя по отношению к Ω нормаль. Параметры $\alpha_0, \alpha_1, \lambda, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$ характеризуют среду.

Решение задачи (3.1.3)–(3.1.7) назовем детерминированным решением эволюционной системы Вентцеля, состоящей из уравнений Дзекцера. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1.4. Для любых $u_0 \in A(\Omega)$ и $v_0 \in A(\Gamma)$ таких, что выполнено условие согласования, и для любых коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \lambda, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$, таких, что выполняется следующее условие $\alpha_0 = \alpha_1, \beta_0 = \beta_1, \gamma_0 = \gamma_1$, а $\lambda \neq k^2$, где $k \in \mathbb{N}$, существует единственное решение $(u, v) \in C^\infty(\mathbb{R}; A(\Omega) \oplus A(\Gamma))$ эволюционной системы Вентцеля, состоящей из уравнений Дзекцера (3.1.3)–(3.1.7).

Доказательство. Для доказательства теоремы рассмотрим следу-

ющий ряд

$$\begin{aligned}
 u = & \sum_{k=2}^{\infty} \exp\left(t \frac{-\beta_0 k^4 - \alpha_0 k^2 - \gamma_0}{\lambda + k^2}\right) \frac{(R-r)^k}{R^k} \left(a_k \sin k\theta (\sin k\varphi + \cos k\varphi) \right. \\
 & \left. + \cos k\varphi) + b_k \cos k\theta (\sin k\varphi + \cos k\varphi) \right) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(t \frac{-\beta_0 k^4 - \alpha_0 k^2 - \gamma_0}{\lambda + k^2}\right) \times \\
 & \times \left(c_k \sin k\theta (\sin k\varphi + \cos k\varphi) + d_k \cos k\theta (\sin k\varphi + \cos k\varphi) \right), \tag{3.1.8}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_k &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_0(r, \theta, \varphi) \frac{(R-r)^k}{R^k} \sin k\theta (\sin k\varphi + \cos k\varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr, \\
 b_k &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_0(r, \theta, \varphi) \frac{(R-r)^k}{R^k} \cos k\theta (\sin k\varphi + \cos k\varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr, \\
 c_k &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v_0(\theta, \varphi) \sin k\theta (\sin k\varphi + \cos k\varphi) d\theta d\varphi, \\
 d_k &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v_0(\theta, \varphi) \cos k\theta (\sin k\varphi + \cos k\varphi) d\theta d\varphi.
 \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что построенный ряд выше является формальным решением уравнения (3.1.3). Причем, если ряды в (3.1.8) равномерно сходятся, то перед нами решение задачи (3.1.3), (3.1.7), где

$\partial_R u = 0$. Учитывая это, можно построить решение задачи (3.1.4), (3.1.7)

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(t \frac{-\beta_0 k^4 - \alpha_0 k^2 - \gamma_0}{\lambda + k^2}\right) \left(c_k \sin k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi) + d_k \cos k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi) \right), \quad (3.1.9)$$

где в случае $\alpha_0 = \alpha_1$, $\beta_0 = \beta_1$, $\gamma_0 = \gamma_1$ решения задачи (3.1.3)–(3.1.7) будут удовлетворять условию согласования (3.1.6).

Замыкание $\text{span}\{R^{-k}(R-r)^k \sin k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi), R^{-k}(R-r)^k \times \cos k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi) : k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, r \in (0, R), \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$, порожденное скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{A(\Omega)} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(r, \theta, \varphi) \psi(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr,$$

обозначим символом $A(\Omega)$. Далее, замыкание $\text{span}\{\sin k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi), \cos k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi) : k \in \mathbb{N}, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{A(\Gamma)} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(R, \theta, \varphi) \psi(R, \theta, \varphi) d\theta d\varphi,$$

обозначим символом $A(\Gamma)$. Таким образом, теорема доказана полностью.

3.2. Метод анализа условий для стохастической эволюционной системы уравнений Вентцеля

3.2.1. Аналитическое исследование решений стохастической эволюционной системы уравнений Вентцеля в случае модифицированных операторов Лапласа – Бельтрами

Простоты ради, положим $\mathfrak{U} = \{u \in W_2^2(\Omega) \oplus W_2^2(\Gamma) : \partial_R u = 0\}$, $\mathfrak{F} = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma)$. Далее, по алгоритму, изложенному выше, построим пространства *случайных* **K**-величин. Случайные **K**-величины ξ , $\chi \in \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2$ имеют вид

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \phi_k, \quad \chi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \chi_k \psi_k, \quad (3.2.1)$$

где $\{\phi_k\}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа – Бельтрами $\Delta_{r,\theta,\varphi} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, ортонормированных в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L_2(\Omega)$; $\{\psi_k\}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа – Бельтрами $\Delta_{\theta,\varphi} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, ортонормированных в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L_2(\Gamma)$. Рассмотрим стохастическую систему Вентцеля с уравнением свободной фильтрации жидкости в шаре и на его границе. В этом случае (3.1.3)–(3.1.4) преобразуется к виду

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta,\varphi}) \overset{\circ}{\xi}(t) = \alpha_0 \Delta_{r,\theta,\varphi} \xi(t) - \beta_0 \Delta_{r,\theta,\varphi}^2 \xi(t) - \gamma_0 \xi(t), \quad (3.2.2)$$

$$(\lambda - \Delta_{\theta,\varphi}) \overset{\circ}{\chi}(t) = \alpha_1 \Delta_{\theta,\varphi} \chi(t) - \beta_1 \Delta_{\theta,\varphi}^2 \chi(t) + \partial_R \xi(t) - \gamma_1 \chi(t), \quad (3.2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{r,\theta,\varphi} &= (r - R) \frac{\partial}{\partial r} \left((R - r) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\ \Delta_{\theta,\varphi} &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \partial_R = \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=R}. \end{aligned}$$

К данной системе присовокупим условие согласования и снабдим ее начальными условиями

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \chi(0) = \chi_0. \quad (3.2.4)$$

Решение задачи (3.2.2)–(3.2.4) назовем стохастическим решением эволюционной системы Вентцеля, состоящей из уравнений Дзекцера.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.2.5. Для любых $\xi_0 \in \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2(\Omega)$ и $\chi_0 \in \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2(\Gamma)$, и для коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \lambda, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$, таких, что выполняется условие $\alpha_0 = \alpha_1, \beta_0 = \beta_1, \gamma_0 = \gamma_1$, и $\lambda \neq k^2$, где $k \in \mathbb{N}$, существует единственное решение $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2)$ эволюционной стохастической системы Вентцеля, состоящей из уравнений Дзекцера (3.2.2)–(3.2.4).

Доказательство. Существование и единственность решения доказывается по аналогии с детерминированным случаем в силу справедливости леммы 1.4.1.

3.2.2. Аналитическое исследование решений системы стохастической эволюционной системы уравнений Вентцеля в классическом случае

Простоты ради, положим $\mathfrak{U} = \{u \in W_2^2(\Omega) \oplus W_2^2(\Gamma) : \partial_R u = 0\}$, $\mathfrak{F} = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma)$. Далее, по алгоритму, изложенному выше, построим пространства случайных \mathbf{K} -величин. Случайные \mathbf{K} -величины $\xi, \chi \in \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2$ имеют вид

$$\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j \phi_j, \quad \chi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \chi_j \psi_j, \quad (3.2.5)$$

где $\{\phi_k\}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа – Бельтрами $\Delta_{r,\theta,\varphi} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, ортонормированных в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L_2(\Omega)$; $\{\psi_k\}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа – Бельтрами $\Delta_{\theta,\varphi} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, ортонормированных в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L_2(\Gamma)$. Рассмотрим стохастическую систему Вентцеля с уравнением свободной фильтрации жидкости в полусфере и на ее краю. В этом случае (3.1.3)–(3.1.4) преобразуется к виду

$$(\lambda - \Delta_{\theta,\varphi}) \overset{\circ}{\xi}(t) = \alpha_0 \Delta_{\theta,\varphi} \xi(t) - \beta_0 \Delta^2 \xi(t) - \gamma_0 \xi(t), \quad (3.2.6)$$

$$(\lambda - \Delta_\varphi) \overset{\circ}{\chi}(t) = \alpha_1 \Delta_\varphi \chi(t) - \beta_1 \Delta^2 \chi(t) + \partial_\theta \chi(t) - \gamma_1 \chi(t), \quad (3.2.7)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta,\varphi} &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\ \Delta_\varphi &= \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \partial_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Добавим к этой системе условие согласования и снабдим ее начальными условиями

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \chi(0) = \chi_0. \quad (3.2.8)$$

Решение задачи (3.2.6)–(3.2.8) назовем стохастическим решением эволюционной системы Вентцеля, состоящей из уравнений Дзекцера.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.2.6. Для любых $\xi_0 \in \mathbf{U}_K L_2(\Omega)$ и $\chi_0 \in \mathbf{U}_K L_2(\Gamma)$, и коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, \lambda \in \mathbb{R}$, таких, что выполняются условия $\alpha_0 = \alpha_1$, $\beta_0 = \beta_1$, $\gamma_0 = \gamma_1$, $\lambda \neq k^2$, где $k \in \mathbb{N}$, и выполнено

условие

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^k \left(\int_0^{2\pi} \xi_0 \cos m\varphi d\varphi \cos m\varphi + \int_0^{2\pi} \xi_0 \sin m\varphi d\varphi \sin m\varphi \right) \times \\ & \times \left(P_k^m(0) \right)^2 = \int_0^{2\pi} \chi_0 \cos k\varphi d\varphi \cos k\varphi + \int_0^{2\pi} \chi_0 \sin k\varphi d\varphi \sin k\varphi, \end{aligned}$$

существует единственное решение $(\xi, \chi) \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2)$ эволюционной стохастической системы Вентцеля, состоящей из уравнений Дзекцера (3.2.6)–(3.2.8).

Доказательство. Существование и единственность решения доказывается по аналогии с детерминированным случаем в силу справедливости леммы 1.4.1. Приведем ниже доказательство для детерминированного случая.

Если $\theta_k = k(k+1)$ собственные значения оператора Лапласа – Бельтрами $\Delta_{\theta, \varphi}$, тогда

$$Y_k^m(\varphi, \theta) = \begin{cases} P_k^m(\cos \theta) \cos m\varphi, & m = 0, \dots, k; \\ P_k^{|m|}(\cos \theta) \sin |m|\varphi, & m = -k, \dots, -1 \end{cases}$$

соответствующие собственные функции, ортонормированные относительно скалярного произведения. Здесь,

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k$$

– многочлен Лежандра степени k , и

$$P_k^{|m|}(t) = (1 - t^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dt^{|m|}} P_k(t)$$

— присоединенный многочлен Лежандра. Скалярное произведение вычисляется по следующей формуле

$$\langle Y_{k_1}^{m_1}, Y_{k_2}^{m_2} \rangle = \int_0^{2\pi} \cos m_1 \varphi \cos m_2 \varphi d\varphi \int_{-1}^1 P_{k_1}^{m_1}(t) P_{k_2}^{m_2}(t) dt.$$

Рассмотрим следующий ряд:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^k \exp \left(t \frac{\beta_0 k^4 - \alpha_0 k^2 - \gamma_0}{\lambda + k^2} \right) \times \\ &\quad \times \left(a_{m,k} \cos m\varphi + b_{m,k} \sin m\varphi \right) P_k^m(\cos \theta), \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

где

$$\begin{aligned} a_{m,k} &= \int_0^{2\pi} u_0(\theta, \varphi) \cos m\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_k^m(0) \sin \theta d\theta, \\ b_{m,k} &= \int_0^{2\pi} u_0(\theta, \varphi) \sin m\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_k^m(0) \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Легко видеть, что построенный выше ряд является формальным решением детерминированного уравнения (3.2.6). Более того, если ряды в (3.2.9) сходятся равномерно, то мы имеем решение детерминированной задачи (3.2.6), (3.2.8) где $\partial_\theta u = 0$. Учитывая это, мы можем построить решение задачи (3.2.7), (3.2.8)

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left(t \frac{\beta_1 k^4 - \alpha_1 k^2 - \gamma_1}{\lambda + k^2} \right) \left(c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi \right), \tag{3.2.10}$$

где

$$c_k = \int_0^{2\pi} v_0(\varphi) \cos k\varphi d\varphi, d_k = \int_0^{2\pi} v_0(\varphi) \sin k\varphi d\varphi.$$

В случае условия согласования, получаем следующее уравнение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^k \exp\left(t \frac{\beta_0 k^4 - \alpha_0 k^2 - \gamma_0}{\lambda + k^2}\right) \left(a_{m,k} \cos m\varphi + b_{m,k} \sin m\varphi\right) \times \\ \times P_k^m(\cos \theta) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(t \frac{\beta_1 k^4 - \alpha_1 k^2 - \gamma_1}{\lambda + k^2}\right) \left(c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi\right).$$

Учитывая, что $\beta_0 = \beta_1$, $\alpha_0 = \alpha_1$, $\gamma_0 = \gamma_1$ получим равносильную систему уравнений

$$\sum_{m=0}^k \left(a_{m,k} \cos m\varphi + b_{m,k} \sin m\varphi \right) P_k^m(0) = c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi,$$

где $m + n = 2k$. Подставив коэффициенты интеграла, получим эквивалентную систему

$$\sum_{m=0}^k \left(\int_0^{2\pi} u_0(\theta, \varphi) \cos m\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_k^m(0) \sin \theta d\theta \cos m\varphi + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} u_0(\theta, \varphi) \sin m\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_k^m(0) \sin \theta d\theta \sin m\varphi \right) P_k^m(0) = \\ = \int_0^{2\pi} v_0(\varphi) \cos k\varphi d\varphi \cos k\varphi + \int_0^{2\pi} v_0(\varphi) \sin k\varphi d\varphi \sin k\varphi.$$

Здесь вспомогательные интегралы вычисляются по формуле

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_k^m(0) \sin \theta d\theta = P_k^m(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = P_k^m(0),$$

и система имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^k \left(\int_0^{2\pi} u_0(\theta, \varphi) \cos m\varphi d\varphi \cos m\varphi + \int_0^{2\pi} u_0(\theta, \varphi) \sin m\varphi d\varphi \sin m\varphi \right) \times \\
& \times \left(P_k^m(0) \right)^2 = \int_0^{2\pi} v_0(\varphi) \cos k\varphi d\varphi \cos k\varphi + \int_0^{2\pi} v_0(\varphi) \sin k\varphi d\varphi \sin k\varphi.
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Таким образом, в случае $\beta_0 = \beta_1$, $\alpha_0 = \alpha_1$, $\gamma_0 = \gamma_1$ и полученного условия (3.2.11) решения задачи (3.2.6)–(3.2.7) будут удовлетворять условию согласования.

Линейное замыкание $\text{span}\{P_k^m(\cos \theta) \sin m\varphi, P_k^m(\cos \theta) \cos m\varphi: m, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\theta, \varphi) \psi(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

обозначим символом $A(\Omega)$. Далее, замыкание $\text{span}\{\sin k\varphi, \cos k\varphi: k \in \mathbb{N}, \varphi \in [0, 2\pi]\}$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$\langle \xi, \psi \rangle = \int_0^{2\pi} \xi(\varphi) \psi(\varphi) d\varphi,$$

обозначим символом $A(\Gamma)$. Таким образом, теорема доказана полностью.

3.3. Алгоритм для нахождения траекторий приближенных решений стохастической эволюционной системы Вентцеля

Для простоты рассмотрим алгоритм численного метода Галеркина для детерминированной эволюционной системы Вентцеля. Напом-

ним, что переход к стохастической системе уравнений Вентцеля происходит путем замены функций u и v , определенных на Ω и Γ соответственно, на $\xi = \xi(t)$ и $\chi = \chi(t)$ стохастические процессы на интервале $(0, \tau)$. Построим приближенное решение задачи Коши для данной системы Вентцеля методом Галеркина в следующем виде

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^N u_k(t) \phi_k(r, \theta, \varphi) + \sum_{k=1}^N v_k(t) \psi_k(R, \theta, \varphi), \quad (3.3.1)$$

где $\{\phi_k : k \in \mathbb{N}\}$ и $\{\psi_k : k \in \mathbb{N}\}$ являются собственными функциями модифицированных операторов Лапласа – Бельтрами $\Delta_{r,\theta,\varphi}$ и $\Delta_{\theta,\varphi}$ по аналогии с параграфом 2.3.

Подставим приближенное решение (3.3.1) в уравнения (3.1.1), (3.1.2) и возьмем скалярное произведение на собственные функции $\phi_k(r, \theta, \varphi)$ и $\psi_k(R, \theta, \varphi)$ по следующим формулам $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Omega)}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Gamma)}$. Получим следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda - \lambda_1)u'_1 = \alpha_0 \lambda_1 u_1 - \beta_0 \lambda_1^2 u_1 - \gamma_0 u_1, \\ (\lambda - \lambda_2)u'_2 = \alpha_0 \lambda_1 u_2 - \beta_0 \lambda_2^2 u_2 - \gamma_0 u_2, \\ \dots \\ (\lambda - \lambda_N)u'_N = \alpha_0 \lambda_1 u_N - \beta_0 \lambda_N^2 u_N - \gamma_0 u_N, \\ (\lambda - \mu_1)v'_1 = \alpha_1 \mu_1 v_1 - \beta_1 \mu_1^2 v_1(t, r, \theta, \varphi) - \gamma_1 v_1, \\ (\lambda - \mu_2)v'_2 = \alpha_1 \mu_2 v_2 - \beta_1 \mu_2^2 v_2 - \gamma_1 v_2, \\ \dots \\ (\lambda - \mu_N)v'_N = \alpha_1 \mu_N v_N - \beta_1 \mu_N^2 v_N - \gamma_1 v_N, \\ \phi_k \equiv 0, k = 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (3.3.2)$$

В зависимости от значения параметра λ , мы имеем алгебраические или дифференциальные уравнения первого порядка в системе

(3.3.2). Поскольку в рамках доказанных теорем предполагается, что $\lambda \notin \sigma(A)$ (случай, когда $\lambda \in \sigma(A)$, р будет рассмотрен в дальнейших работах), полученная система уравнений является невырожденной, а все уравнения в полученной системе являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка. Для разрешимости этой системы относительно $u_k(t)$ и $v_k(t)$, найдем скалярное произведение начальных условий (3.1.7) на собственные функции $\phi_k(r, \theta, \varphi)$ и $\psi_k(R, \theta, \varphi)$ по норме $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Omega)}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Gamma)}$ соответственно. Решая систему (3.3.2) с соответствующими начальными условиями (3.1.7) находим коэффициенты $u_k(t)$, $v_k(t)$ в приближенном решении $\tilde{u}(t, r, \theta, \varphi)$.

3.4. Программная реализация для нахождения траекторий приближенных решений стохастической эволюционной системы Вентцеля

Рассмотрим алгоритм программы, реализующей модифицированный метод Галеркина. Она написана на языке Python и предназначена для эксплуатации на персональном компьютере с платформой Intel (UX64), под управлением операционной системы Microsoft Windows. В качестве численного метода для решения задачи Коши применяется метод, изложенный в параграфе 3.3. На рисунке 3.4.1 изображена блок-схема работы данной программы. Ниже приводится пошаговое описание ее функционирования:

Шаг 1. Вводятся коэффициенты стохастической эволюционной системы Вентцеля α , β , γ , количество галеркинских приближений N , радиус R рассматриваемой области, генерируются случайные величины со стандартным нормальным распределением, входящие в состав разложения начальных функций Коши ξ_0 и χ_0 .

Шаг 2. Производится построение приближения решения задачи в виде суммы Галеркина.

Шаг 3. Производится подстановка полученного приближенного решения на предыдущем шаге в рассматриваемую систему уравнений Вентцеля.

Шаг 4. Отдельной процедурой формируется система дифференциальных уравнений.

Шаг 5. Отдельно решается система дифференциальных уравнений.

Шаг 6. Формируется решение искомой задачи с учетом шага 5, выводится трехмерный график и анимированный трехмерный график с учетом изменения времени.

Для последующей обработки результатов запускается цикл по i по аналогии с параграфом 2.4, что позволяет в одной программе обработать результаты N экспериментов, где производятся вычисления необходимых характеристик стохастических процессов (математического ожидания от сечения стохастического процесса $\mathbf{M}(\xi(t, r, \theta, \varphi))$, дисперсии от сечения стохастического процесса $\mathbf{D}(\xi(t, r, \theta, \varphi))$ и среднеквадратичного отклонения $\sigma(t)$ и сделать качественные выводы о системе уравнений Вентцеля, состоящей из уравнений Дзекцера с учетом начального варьирования случайных величин и параметров уравнений, характеризующих среду.

Пример 3.4.1 Рассмотрим решение задачи Коши для детерминированной эволюционной системы Вентцеля, состоящей из уравнений Дзекцера, в шаре $\Omega = \{(r, \theta, \varphi) : r \in [0, 2), \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ с границей $\Gamma = \{(\theta, \varphi) : r = 2, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\}$.

$$(1 - \Delta_{r,\theta,\varphi})u_t = u, \quad (t, r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad (3.4.1)$$

$$(1 - \Delta_{\theta,\varphi})v_t = v, \quad (t, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma. \quad (3.4.2)$$

К данной системе присоединим условие согласования, что гаранти-

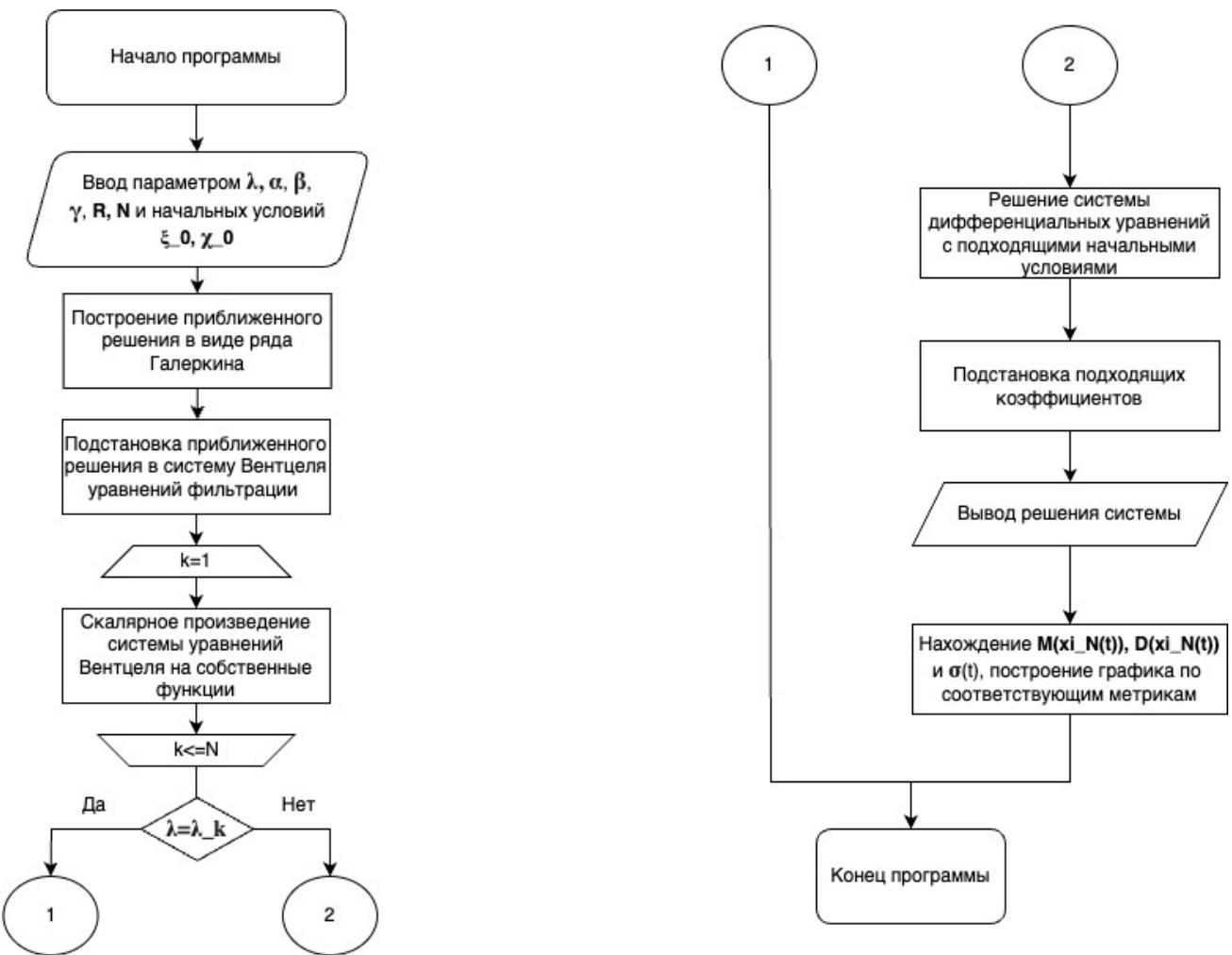


Рис. 3.4.1. Блок-схема численного модифицированного метода Галеркина.

рует единственность полученного решения, и снабдим ее начальными условиями

$$u(0, r, \theta, \varphi) = \cos(4\theta)(2 - r)^2(\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi)), \quad (3.4.3)$$

$$v(0, \theta, \varphi) = \cos(2\theta)(\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi)). \quad (3.4.4)$$

Пусть $N = 5$, тогда приближенное решение имеет следующий вид

$$u_5(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{k=1}^5 u_k(t) \phi_k(r, \theta, \varphi) + \sum_{k=1}^5 v_k(t) \psi_k(\theta, \varphi). \quad (3.4.5)$$

Подставляя в систему уравнений ортонормированные базисы $\phi_k(r, \theta, \varphi)$ и $\psi_k(\theta, \varphi)$; умножая скалярно начальные условия (3.4.3), (3.4.4) на

собственные функции $\phi_k(r, \theta, \varphi)$ и $\psi_k(\theta, \varphi)$ по норме $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Omega)}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Gamma)}$, решаем систему (3.3.2) с соответствующими начальными условиями и находим коэффициенты $u_k(t)$, $v_k(t)$ в приближенном решении. Используя тот факт, что $\lambda \notin \sigma(A)$, система уравнений является невырожденной, и, согласно алгоритму, все уравнения в полученной системе являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка, решим систему (3.3.2) с начальными условиями (3.4.3), (3.4.4), находим коэффициенты Галеркина. Получаем решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} v(t, r, \phi, \theta) = & -0,693 \cdot (1 - 0,5r)^2 (\sin(2\phi) + \cos(2\phi)) \times \\ & \times \exp(-0,2t) \sin(2\theta) - 0,693 \cdot (\sin(2\phi) + \cos(2\phi)) \cos(2\theta). \end{aligned}$$

График решения показан на рисунке 3.4.2.

Пример 3.4.2 Рассмотрим решение задачи Коши для детерминированной системы Вентцеля уравнений Дзекцера в шаре $\Omega = \{(r, \theta, \varphi) : r \in [0, 2], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ с границей $\Gamma = \{(\theta, \varphi) : r = 2, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$.

$$(1 - \Delta_{r,\theta,\varphi}) \overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t), \quad \xi \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2), \quad (3.4.6)$$

$$(1 - \Delta_{\theta,\varphi}) \overset{\circ}{\chi}(t) = \chi(t), \quad \chi \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{U}_K \mathbf{L}_2). \quad (3.4.7)$$

К данной системе присовокупим условие согласования, что гарантирует единственность полученного решения, и снабдим ее начальными условиями

$$\xi(\omega, 0) = \xi_0 \cos(4\theta)(2 - r)^2 (\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi)), \quad (3.4.8)$$

$$\chi(\omega, 0) = \chi_0 \cos(2\theta)(\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi)), \quad \xi_0, \chi_0 \sim N(0, 1). \quad (3.4.9)$$

Пусть $N = 4$, тогда приближенное решение имеет следующий вид

$$\xi_4(\omega, t, r, \theta, \varphi) = \sum_{k=1}^4 \xi_k(\omega) \phi_k(r, \theta, \varphi) + \sum_{k=1}^4 \chi_k(\omega) \psi_k(\theta, \varphi). \quad (3.4.10)$$

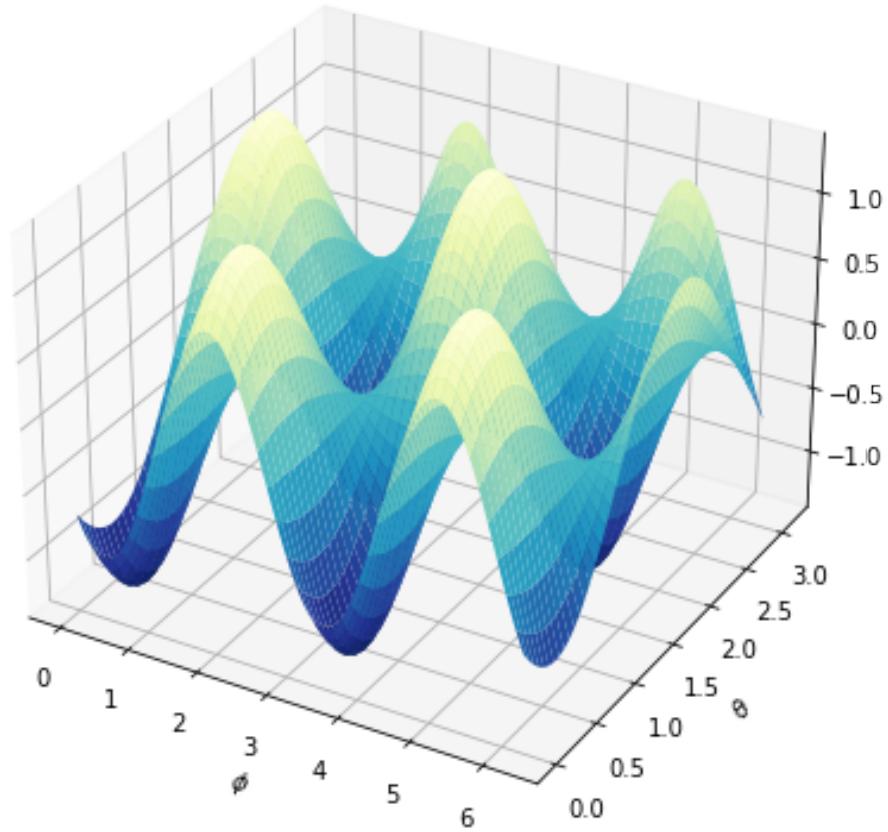


Рис. 3.4.2. Решение эволюционной системы уравнений Вентцеля для Примера 3.4.1

Подставляя в систему уравнений ортонормированные базисы $\phi_k(r, \theta, \varphi)$ и $\psi_k(\theta, \varphi)$; умножая скалярно начальные условия (3.4.8), (3.4.9) на собственные функции $\phi_k(r, \theta, \varphi)$ и $\psi_k(\theta, \varphi)$ по норме $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Omega)}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A(\Gamma)}$, решаем систему (2.3.2) с соответствующими начальными условиями и находим коэффициенты в приближенном решении. Используя тот факт, что $\lambda \notin \sigma(A)$, система уравнений является невырожденной, и, согласно алгоритму, все уравнения в полученной системе являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка, решим систему (2.3.2) с начальными условиями находим коэффици-

енты Галеркина. Получаем решение в следующем виде:

$$\begin{aligned}\xi(t) = & -0,4106(1 - 0,5r)^2(\sin(2\phi) + \cos(2\phi)) \exp(-0,2t) \sin(2\theta) \\ & -0,410(\sin(2\phi) + \cos(2\phi)) \cos(2\theta).\end{aligned}$$

График решения в виде траекторий стохастического процесса $\xi(t)$ представлен на рисунке 3.4.3.

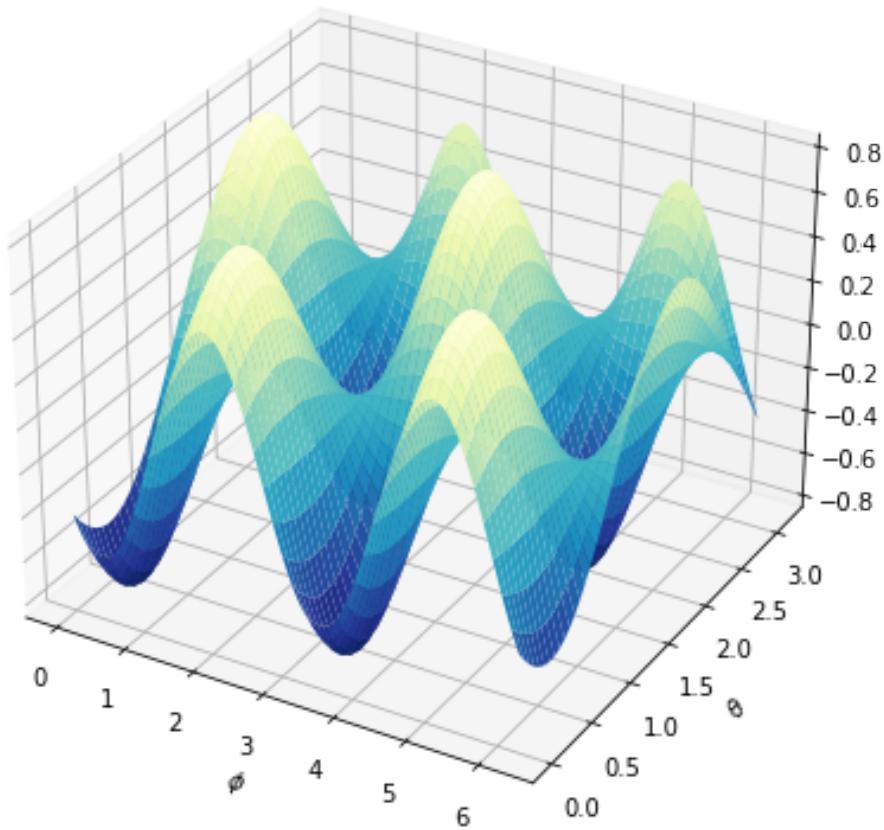


Рис. 3.4.3. Траектория решения стохастической эволюционной системы уравнений Вентцеля для Примера 3.4.2

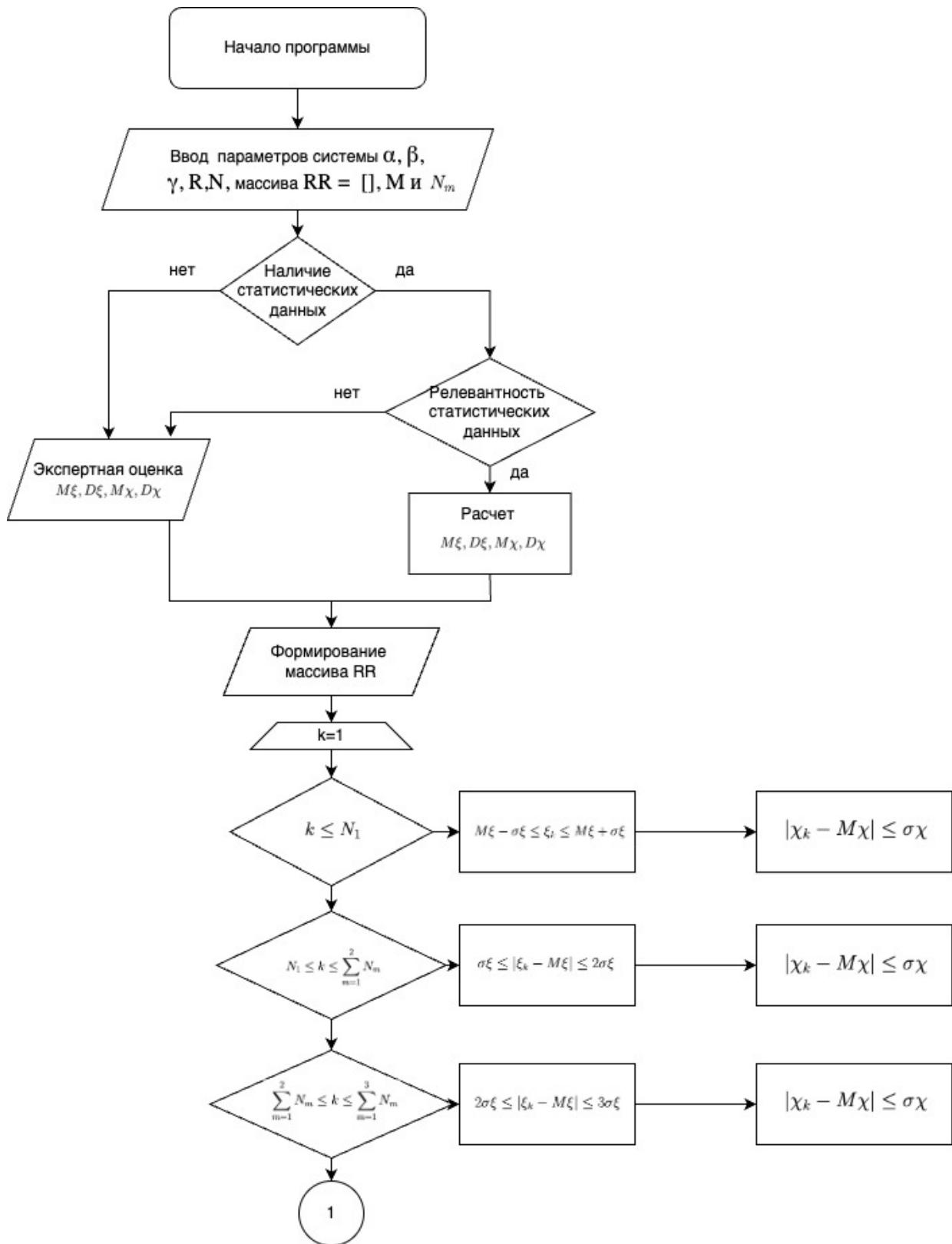


Рис. 3.5.1. Начало блок-схемы обработки информации для системы уравнений Вентцеля

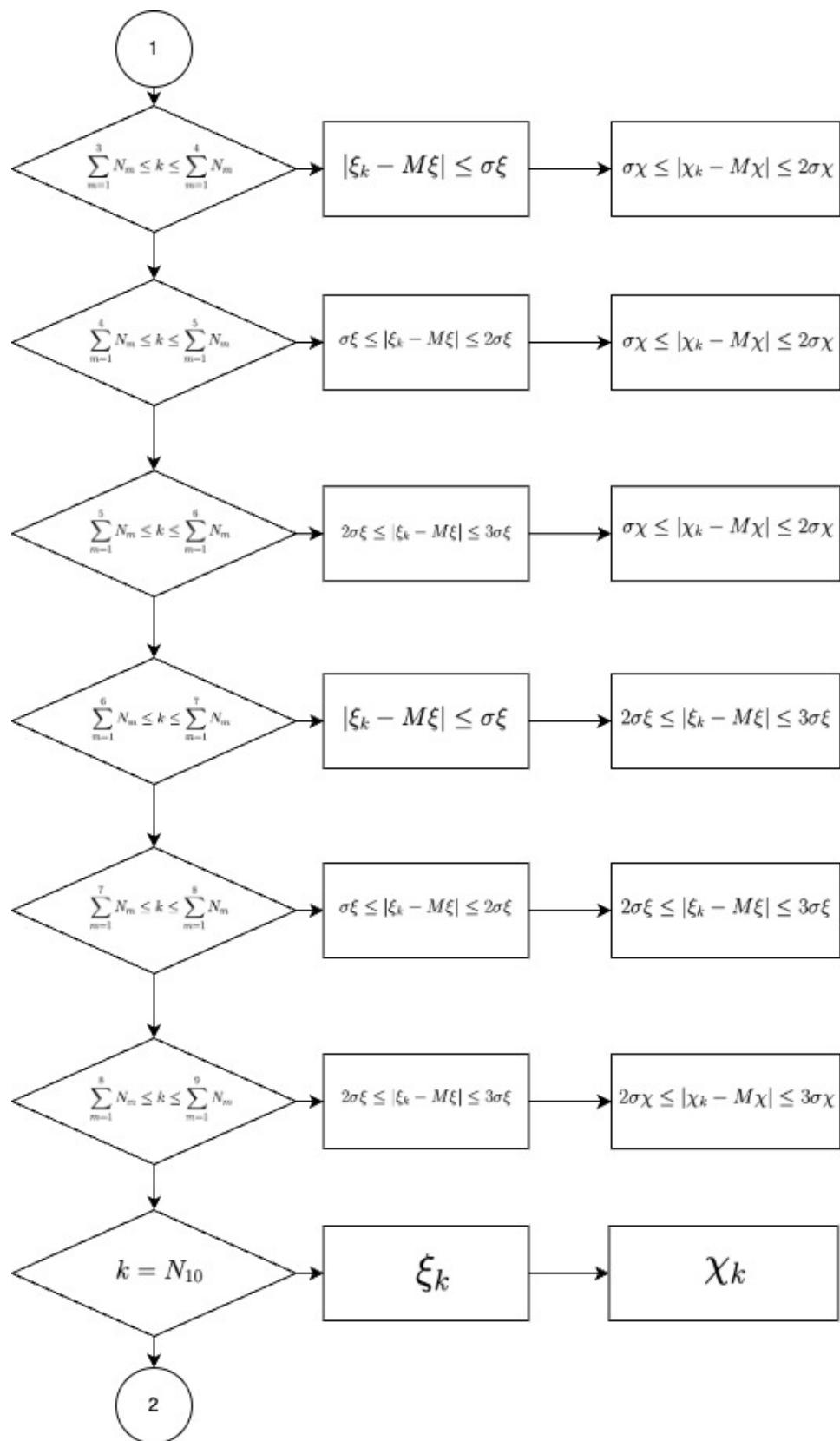


Рис. 3.5.2. Продолжение блок-схемы обработки информации для системы уравнений Вентцеля



Рис. 3.5.3. Окончание блок-схемы обработки информации для системы уравнений Вентцеля

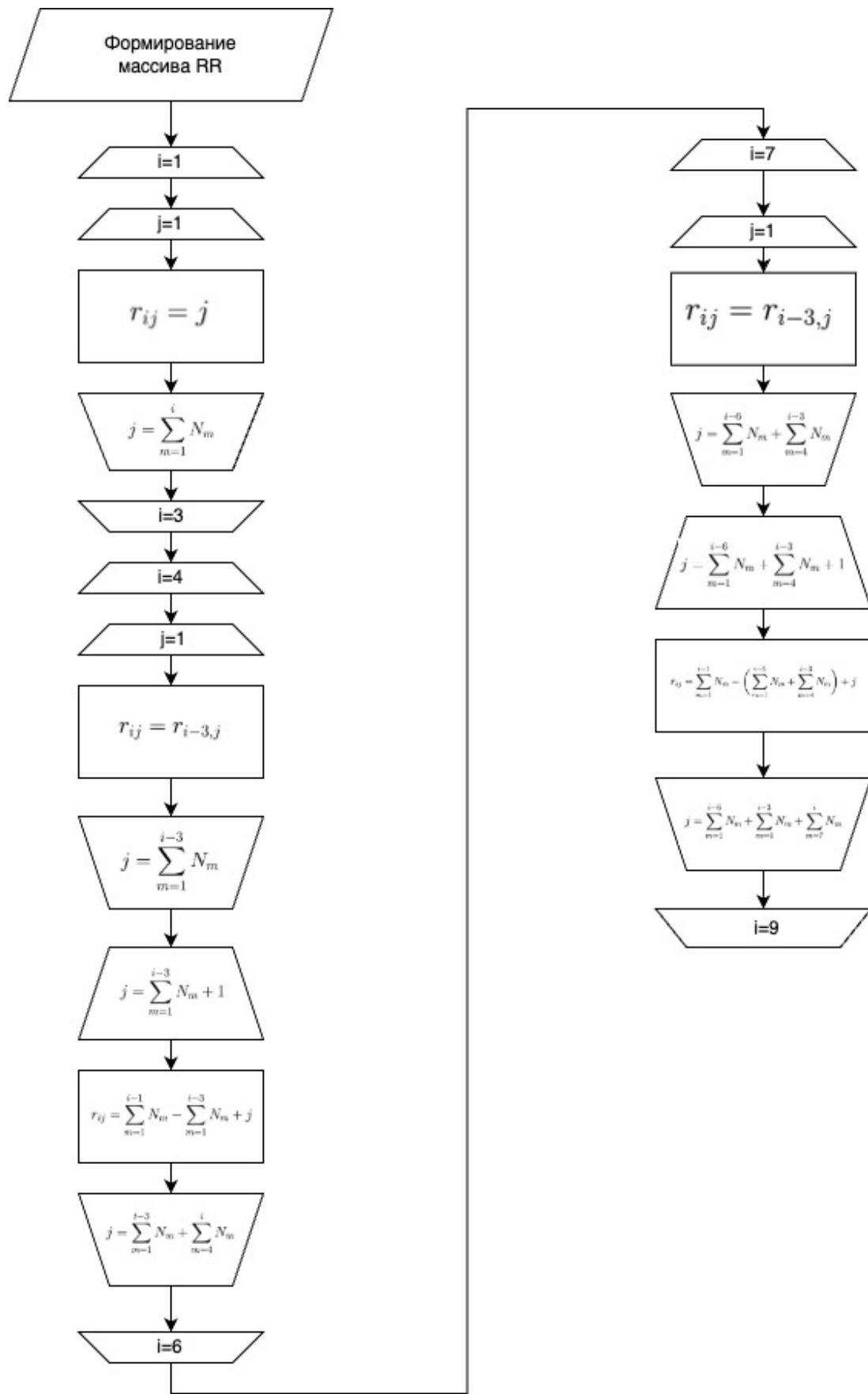


Рис. 3.5.4. Блок-схема для формирования массива RR

3.5. Алгоритм обработки информации анализа состояний рассматриваемых стохастических динамической и эволюционной систем Вентцеля

Представим алгоритм программы (см. рисунки 3.5.1 – 3.5.4), реализующей обработку информации. Программа написана на языке Python, эксплуатируется на персональном компьютере платформы Intel (UX64), работает под управлением Microsoft Windows.

Шаг 1. Вводятся коэффициенты стохастической системы Вентцеля уравнений фильтрации жидкости α, β, γ , количество галеркинских приближений N , параметр рассматриваемой области R , общее количество экспериментов M , количество экспериментов в каждой группе N_m , где

$$\sum_{m=1}^{10} N_m = M,$$

N_{10} – редкие события.

Шаг 2. Производится проверка на наличие статистических данных. Если данные не статистические, вводится экспертная оценка математических ожиданий $\mathbf{M}\xi, \mathbf{M}\chi$ и дисперсий $\mathbf{D}\xi, \mathbf{D}\chi$ по которым определяются случайные величины ξ, χ . Если данные статистические, проводится проверка на релевантность статистических данных.

Шаг 3. Производится проверка на релевантность статистических данных. Если данные не релевантны, вводится экспертная оценка математических ожиданий $\mathbf{M}\xi, \mathbf{M}\chi$ и дисперсий $\mathbf{D}\xi, \mathbf{D}\chi$ по которым определяются случайные величины ξ, χ . Если данные релевантны, производится расчет математических ожиданий $\mathbf{M}\xi, \mathbf{M}\chi$ и дисперсий $\mathbf{D}\xi, \mathbf{D}\chi$ по входным данным.

Шаг 4. Производится формирование массива RR размера $9 \times N$ по следующему правилу:

Шаг 4.1. Для первой группы экспериментов N_1, N_2, N_3 для случайных величин в рассматриваемой области ξ_k и на ее границе χ_k в массив R качестве первых трех строк r_{1j}, r_{2j}, r_{3j} фиксируется нумерация полученных данных с учетом указанных доверительных интервалов $M\xi \pm \sigma\xi$ и $M\chi \pm \sigma\chi$; $M\xi \pm \sigma\xi$ и $M\chi \pm 2\sigma\chi$; $M\xi \pm \sigma\xi$ и $M\chi \pm 3\sigma\chi$ соответственно.

Шаг 4.2. Для второй группы экспериментов N_4, N_5, N_6 для случайных величин в рассматриваемой области ξ_k и на ее границе χ_k в массив R качестве последующих трех строк r_{4j}, r_{5j}, r_{6j} фиксируется нумерация полученных данных с учетом указанных доверительных интервалов $M\xi \pm 2\sigma\xi$ и $M\chi \pm \sigma\chi$; $M\xi \pm 2\sigma\xi$ и $M\chi \pm 2\sigma\chi$; $M\xi \pm 2\sigma\xi$ и $M\chi \pm 3\sigma\chi$ соответственно.

Шаг 4.3. Для третьей группы экспериментов N_7, N_8, N_9 для случайных величин в рассматриваемой области ξ_k и на ее границе χ_k в массив R качестве последующих трех строк r_{7j}, r_{8j}, r_{9j} фиксируется нумерация полученных данных с учетом указанных доверительных интервалов $M\xi \pm 3\sigma\xi$ и $M\chi \pm \sigma\chi$; $M\xi \pm 3\sigma\xi$ и $M\chi \pm 2\sigma\chi$; $M\xi \pm 3\sigma\xi$ и $M\chi \pm 3\sigma\chi$ соответственно.

Шаг 5. Производится построение массива случайных величин ξ_k, χ_k с учетом правила трех сигм по ранее выбранному числу экспериментов M и количеству экспериментов в каждой группе N_m . В случае, когда номер эксперимента k попадает в N_{10} , вводятся экспертные значения ξ_k и χ_k .

Шаг 6. Производится построение приближения решения задачи в виде суммы Галеркина для каждого эксперимента.

Шаг 7. Производится подстановка полученного приближенного решения на предыдущем шаге в рассматриваемую систему уравнений Вентцеля для каждого эксперимента.

Шаг 8. Отдельной процедурой формируется система дифференциальных уравнений для каждого эксперимента.

Шаг 9. Отдельно решается система дифференциальных уравнений.

Шаг 10. Формируется решение искомой задачи с учетом шага 9 и шага 8, выводится трехмерный график и анимированный трехмерный график с учетом изменения времени, результаты записываются в отдельный файл exp_k .

Шаг 11. Производится обработка результатов. По строке i формируется запрос результата exp_k , если k – элемент строки, s – количество ненулевых элементов в RR . Находится среднеквадратическое отклонение для каждой группы.

Шаг 12. Строится общий график.

Замечание 3.5.1. Поскольку особую роль играет формирование массива RR , приведем общий вид RR на примере тестовых данных. В частности, изначально пользователю известна следующая таблица

	$M\chi \pm \sigma\chi$	$M\chi \pm \sigma\chi$	$M\chi \pm 2\sigma\chi$
$M\xi \pm \sigma\xi$	N_1	N_2	N_3
$M\xi \pm 2\sigma\xi$	N_4	N_5	N_6
$M\xi \pm 3\sigma\xi$	N_7	N_8	N_9

со свойством

$$\sum_{m=1}^{10} N_m = M,$$

где M – общее число экспериментов, N_{10} – редкие события (в основном задается экспертная оценка).

Здесь, для первой группы экспериментов N_1, N_2, N_3 заполняются данные по следующим формулам

$$r_{ij} = j, \text{ где } 1 \leq j \leq \sum_{m=1}^i N_m,$$

остальные элементы заполняются нулями.

Здесь, для второй группы экспериментов N_4, N_5, N_6 заполняются данные по следующим формулам, учитывая предыдущие эксперименты,

$$r_{ij} = r_{i-3,j}, \text{ где } 1 \leq j \leq \sum_{m=1}^{i-3} N_m,$$

$$r_{ij} = \sum_{m=1}^{i-1} N_m - \sum_{m=1}^{i-3} N_m + j, \text{ где } \sum_{m=1}^{i-3} N_m + 1 \leq j \leq \sum_{m=1}^{i-3} N_m + \sum_{m=4}^i N_m,$$

остальные элементы заполняются нулями.

Здесь, для третьей группы экспериментов N_7, N_8, N_9 заполняются данные по следующим формулам, учитывая предыдущие эксперименты,

$$r_{ij} = r_{i-3,j}, \text{ где } 1 \leq j \leq \sum_{m=4}^{i-3} N_m + \sum_{m=1}^{i-6} N_m,$$

$$r_{ij} = \sum_{m=1}^{i-1} N_m - \left(\sum_{m=1}^{i-6} N_m + \sum_{m=4}^{i-3} N_m \right) + j,$$

где

$$\sum_{m=1}^{i-6} N_m + \sum_{m=4}^{i-3} N_m + 1 \leq j \leq \sum_{m=1}^{i-6} N_m + \sum_{m=4}^{i-3} N_m + \sum_{m=7}^i N_m$$

остальные элементы заполняются нулями.

Рассмотрим несколько примеров обработки информации для стохастических динамической и эволюционной систем Вентцеля.

В частности, для стохастической динамической системы Вентцеля представление результатов оценки математического ожидания по результатам четырех экспериментов целесообразно осуществлять на двумерных графиках при фиксированных значения в двух случаях: r, t, θ или r, t, φ . В первом случае взяты следующие значения

$r = 4, t = 0, \theta = \pi$. На рисунке 3.5.5 совмещено несколько графиков функций: пунктирные линии отражены четырьмя графиками функций $\xi(\omega, 0, 4, \pi, \varphi), i = 1, 4$, черной сплошной линией показана функция $\mathbf{M}(\xi(\omega, 0, 4, \pi, \varphi))$, получаемая численно, розовыми линиями представлены функции $\mathbf{M}(\xi(\omega, 0, 4, \pi, \varphi)) + 3\sigma(\xi(\omega, 0, 4, \pi, \varphi))$ и $\mathbf{M}(\xi(\omega, 0, 4, \pi, \varphi)) - 3\sigma(\xi(\omega, 0, 4, \pi, \varphi))$ получаемые также численно. Используя правило трех сигм, оценка $\|\xi(t, r, \theta, \varphi) - \mathbf{M}(\xi(t, r, \theta, \varphi))\| < 3\sigma(t)$ также выполняется, что позволяет сделать качественные выводы о динамической системе Вентцеля, состоящей из уравнений Баренблатта – Желтова – Кошиной, с учетом начального варьирования случайных величин и параметров уравнений, характеризующих среду. Во втором случае взяты следующие значения $r = 4, t = 0, \varphi = 2\pi$.

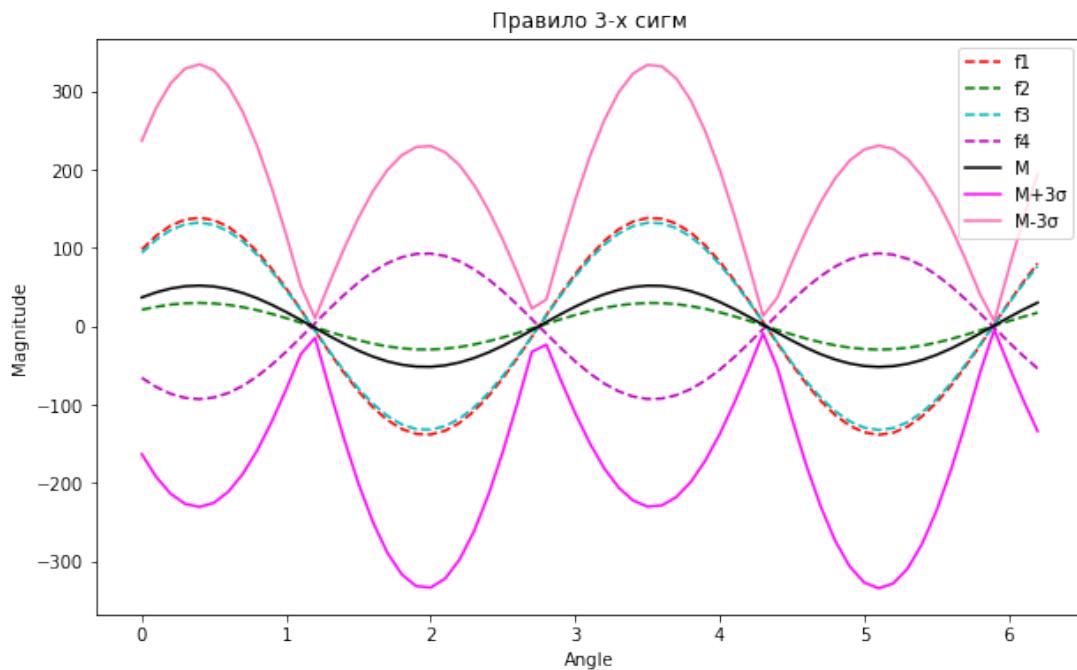


Рис. 3.5.5. Правило трех сигм для стохастической динамической системы уравнений Вентцеля для Примера 2.4.2 при $\theta = \pi$.

На рисунке 3.5.6 совмещено несколько графиков функций и представлены оценки также по правилу трех сигм.

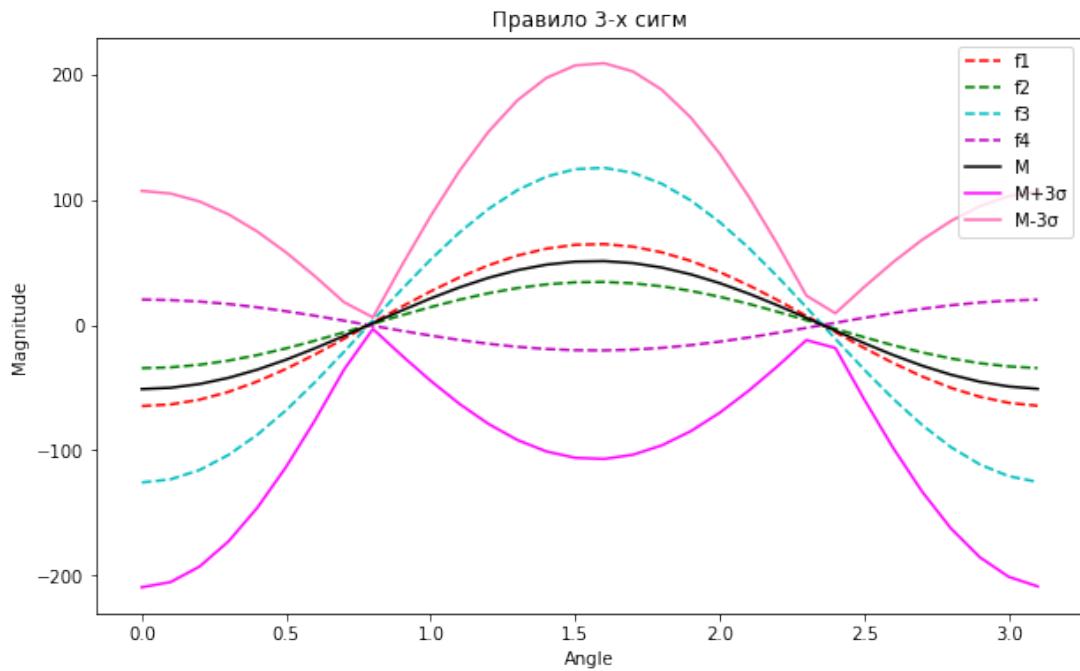


Рис. 3.5.6. Правило трех сигм для стохастической динамической системы уравнений Вентцеля для Примера 2.4.2 при $\varphi = 2\pi$.

Для стохастической эволюционной системы Вентцеля представление результатов оценки математического ожидания по результатам четырех экспериментов также целесообразно осуществлять на двумерных графиках при фиксированных значениях в двух случаях: r , t , θ или r , t , φ . В первом случае взяты следующие значения $r = 4$, $t = 0$, $\theta = \pi$. На рисунке 3.5.7. совмещено несколько графиков функций: пунктирные линии отражены четырьмя графиками функций $\xi(\omega, 0, 4, \pi, \varphi)$, $i = 1, \dots, 4$, черной сплошной линией показана функция $M(\xi(\omega, 0, 4, \pi, \varphi))$, получаемая численно, розовыми линиями представлены функции $M(\xi(\omega, 0, 4, \pi, \varphi)) + 3\sigma(\xi(\omega, 0, 4, \pi, \varphi))$ и $M(\xi(\omega, 0, 4, \pi, \varphi)) - 3\sigma(\xi(\omega, 0, 4, \pi, \varphi))$ получаемые также численно. Во втором случае взяты следующие значения $r = 4$, $t = 0$, $\varphi = 2\pi$. На рисунке 3.5.8 совмещено несколько графиков функций и представлены оценки также по правилу трех сигм.

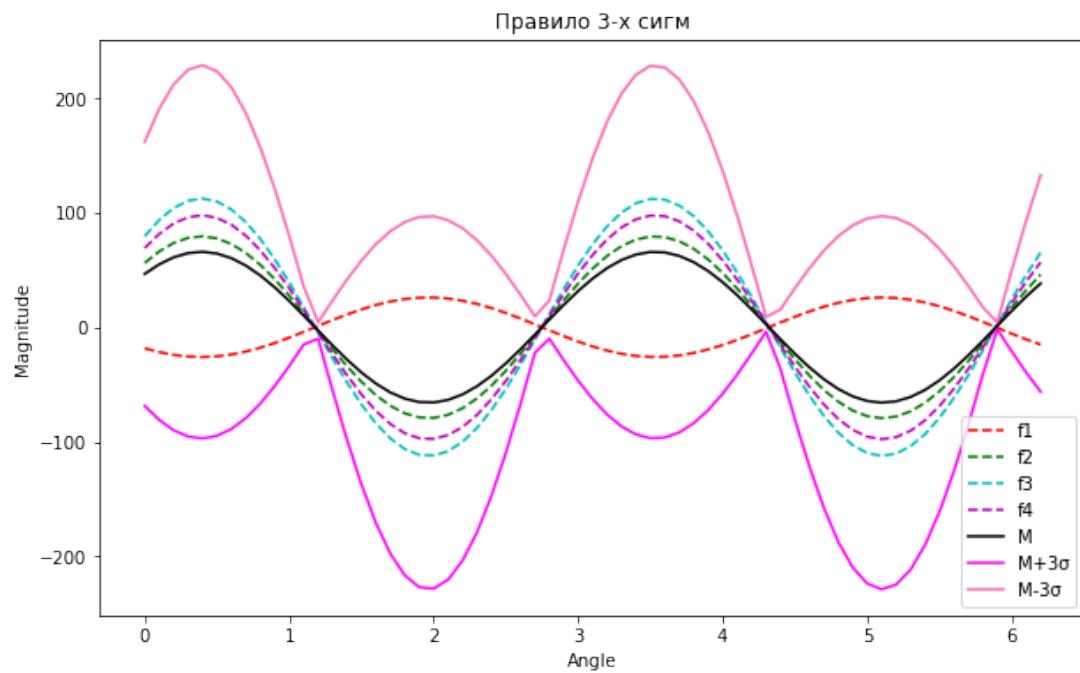


Рис. 3.5.7. Правило трех сигм для стохастической эволюционной системы уравнений Вентцеля для Примера 3.4.2 при $\theta = \pi$.

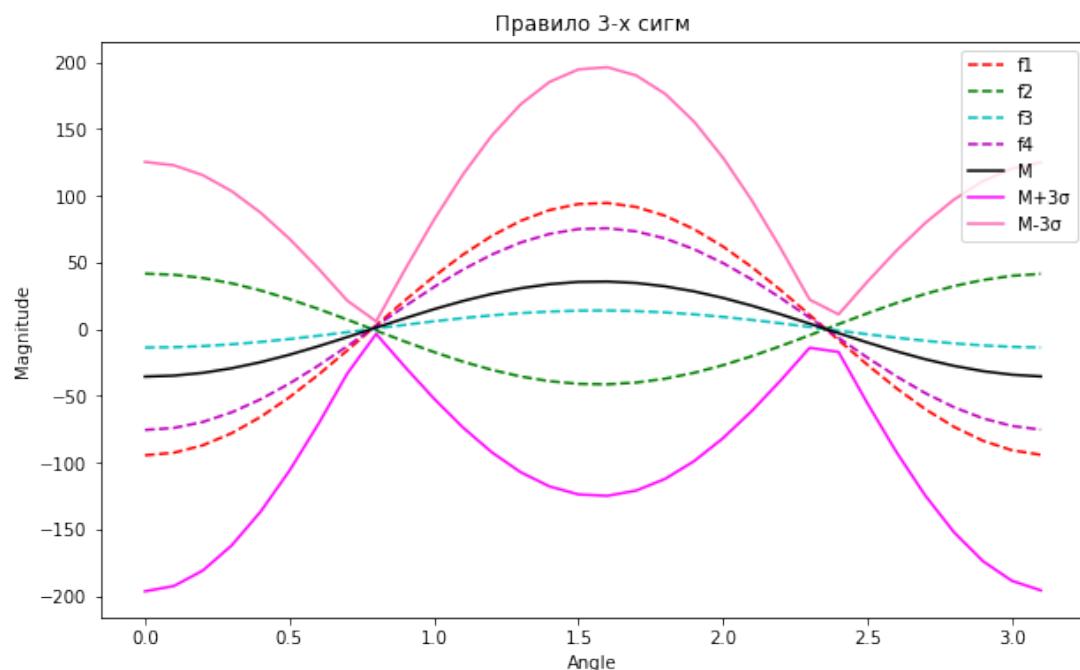


Рис. 3.5.8. Правило трех сигм для стохастической эволюционной системы уравнений Вентцеля для Примера 3.4.2 при $\varphi = 2\pi$.

Заключение

В диссертационной работе решена новая научная задача разработки методов и алгоритмов анализа динамики и эволюции фильтрующейся жидкости в области и на ее границе, имеющая существенное значение для теории фильтрации и диффузии жидкости.

1) В рамках исследования выполнен структурный системный анализ предметной области с применением метода информационно-логического моделирования для системного проектирования в как детерминированном, так и стохастическом вариантах. Была создана контекстная диаграмма, иллюстрирующая различные аспекты исследования систем уравнений Вентцеля. Это свидетельствует о частичном изучении систем уравнений Вентцеля в детерминированной модели и поднимает вопрос о начале системного анализа в стохастической случае.

2) Впервые разработан метод анализа условий для стохастической динамической системы Вентцеля, заключающий в применении теории для уравнений соболевского типа, базированном на методе разрешающих групп операторов, который позволил впервые доказать потраекторную однозначную разрешимость решения для стохастической динамической системы Вентцеля с учетом протекающих процессов на границе рассматриваемой области.

3) Впервые разработан алгоритм для нахождения траекторий приближенных решений стохастической динамической системы Вентцеля при сгенерированных наборах начальных данных в рассматриваемой области и на ее границе.

4) Впервые разработан метод анализа условий для стохастической эволюционной системы Вентцеля, заключающий в применении теории для уравнений соболевского типа, базированном на методе разрешающих полугрупп операторов, который позволил впервые дока-

зать потраекторную однозначную разрешимость решения для стохастической эволюционной системы Вентцеля с учетом протекающих процессов на границе рассматриваемой области.

5) Впервые разработан алгоритм для нахождения траекторий приближенных решений стохастической эволюционной системы Вентцеля при сгенерированных наборах начальных данных в рассматриваемой области и на ее границе.

6) Впервые разработан алгоритм для обработки информации в случае рассматриваемых стохастических динамической и эволюционной систем Вентцеля, который впервые позволил провести анализ состояний изученных систем Вентцеля при различных значениях их параметров на основе вычислительных экспериментов. В частности, можно утверждать что с вероятностью 0,997 имеет место оценка $\|\xi(t, r, \theta, \varphi) - \mathbf{M}(\xi(t, r, \theta, \varphi))\| < 3\sigma(t)$, которая позволяет сделать качественные выводы о рассматриваемых системах уравнений Вентцеля с учетом начального варьирования случайных величин и параметров уравнений, характеризующих среду.

Перспективами развития представленных методов и алгоритмов является дальнейшая разработка абстрактной теории систем Вентцеля и ее приложений к рациональному природопользованию относительно водных ресурсов.

Список литературы

1. Апушкинская, Д.Е. Гельдеровские оценки решений вырожденных граничных задач Вентцеля для параболических и эллиптических уравнений недивергентного вида / Д.Е. Апушкинская, А.И. Назаров // Проблемы математического анализа. – 1997. – № 17. – С. 3–19.
2. Апушкинская, Д.Е. Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболических уравнений / Д.Е. Апушкинская, А.И. Назаров // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, № 6. – С. 1–29.
3. Апушкинская, Д.Е. Нестационарная задача Вентцеля со старшими коэффициентами из класса VMO_x / Д.Е. Апушкинская, А.И. Назаров, Д.К. Палагачев, Л.Г. Софтова // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2023. – Т. 510, № 1. – С. 13–17.
4. Апушкинская, Д.Е. Квазилинейные двухфазные задачи Вентцеля / Д.Е. Апушкинская, А.И. Назаров // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2000. – Т. 31. – С. 11–38.
5. Апушкинская, Д.Е. Квазилинейная параболическая задача Вентцеля с разрывными старшими коэффициентами / Д.Е. Апушкинская, А.И. Назаров, Д.К. Палагачев, Л.Г. Софтова // Функциональный анализ и его приложения. – 2023. – Т. 57, № 2. – С. 93–99.
6. Баренблatt, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблatt, Ю.П. Желтов, И.Н. Кошина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 58–73.

7. Вентцель, А.Д. Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка / А.Д. Вентцель // ДАН СССР. – 1956. – Т. 111. – С. 269–272.
8. Гликлих, Ю.Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов / Ю.Е. Гликлих // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – Т. 13, № 27. – С. 24–34.
9. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 438 с.
10. Дзекцер, Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью / Е.С. Дзекцер // Доклады Академии наук СССР. – 1972. – Т. 202, № 5. – С. 1031–1033.
11. Егоров, И.Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С. В. Попов. – Новосибирск: Наука, 2000.
12. Келлер, А.В. Алгоритм решения задачи Шоултера – Сидорова для моделей леонтьевского типа / А.В. Келлер // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – Т. 7, № 4. – С. 40–46.
13. Кожанов, А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка / А.И. Кожанов. – Новосибирск: НГУ, 1990.
14. Кондюков, А.О. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова ненулевого порядка / А.О. Кондюков, Т.Г. Сукачева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 5. – С. 823–828.

15. Клер, А.М. Методика обработки результатов теплофизических экспериментов, основанная на решении двух видов задач нелинейного математического программирования / А.М. Клер, В.Э. Алексеюк, А.А. Левин, П.В. Хан // Информационные и математические технологии в науке и управлении. – 2022. – Т. 28, № 4. – С. 32–49.
16. Крейн, С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
17. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967.
18. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа (2-е изд.) / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973.
19. Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973.
20. Ляхомский, А.В. Идентификация причинно–следственных связей и травм от электрического тока на железорудных производствах / А.В. Ляхомский, О.Н. Синчук, А.А. Харитонов, О.Е. Мельник // Электротехнические и компьютерные системы. – 2013. – Т. 88, № 12. – С. 44–54.
21. Лионс, Ж.Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.Л. Лионс, Э. Мадженес. – М.: Мир, 1971.
22. Мельникова, И.В. Связь бесконечномерных стохастических задач с задачами для вероятностных характеристик / И.В. Мельникова, У.А. Алексеева, В.А. Бовкун // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2017. – Т. 23, № 3. – С. 191–205.

23. Мельникова, И.В. Полугрупповая классификация и классификация Гельфанд – Шилова для систем дифференциальных уравнений в частных производных / И.В. Мельникова, У.А. Алексеева // Математические заметки. – 2018. – Т. 104, № 6. – С. 895–911.
24. Мельникова, И.В. Стохастические уравнения и уравнения для вероятностных характеристик процессов с затухающими скачками / И.В. Мельникова, В.А. Бовкун // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2023. – Т. 45. – С. 73–88.
25. Мельникова, И.В. Полугрупповая классификация и классификация Гельфанд – Шилова для систем дифференциальных уравнений в частных производных / И.В. Мельникова, У.А. Алексеева // Математические заметки. – 2018. – Т. 104, № 6. – С. 895–911.
26. Назаров, А.И. Решение задачи Вентцеля для уравнений Лапласа и Гемгольца с помощью повторных потенциалов / А.И. Назаров, В.В. Лукьянов // Математические вопросы теории распространения волн (ЗНС ПОМИ. Т.250). СПб. Наука. – 1998. – С. 203–218.
27. Назаров, А.И. Гельдеровские оценки решений вырожденных граничных задач Вентцеля для параболических и эллиптических уравнений недивергентного вида / А.И. Назаров, Д.Е. Апушкинская // Проблемы математической физики и теории функций (Проблемы математического анализа. Вып. 17). СПб. Изд.СПбГУ. – 1997. – С. 3–19.
28. Ремпель, Ш. Теория индекса эллиптических краевых задач: пер. с англ. / Ш. Ремпель, Б. Шульце. – М.: Мир, 1986.
29. Рид, М. Методы современной математической физики / М. Рид, Б. Саймон; под ред. М.К. Поливанова; пер. с англ. А.К. Погреб-

- кова, В.Н. Сушко; с предисл. Н.Н. Боголюбова. – М.: Мир, 1977. – Том 1. Функциональный анализ. – 355 с.
30. Рид, М. Методы современной математической физики / М. Рид, Б. Саймон; под ред. М.К. Поливанова; пер. с англ. А.К. Погребкова, В.Н. Сушко. – М.: Мир, 1978. – Том 2. Гармонический анализ. Самосопряженность.
31. Свешников, А.Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
32. Свиридов, Г.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера – Сидорова и аддитивными «шумами» / Г.А. Свиридов, Н.А. Манакова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 90–103.
33. Свиридов, Г.А. Задача Авалос – Триггиани для линейной системы Осколкова и системы волновых уравнений / Г.А. Свиридов, Т. Г. Сукачева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2022. – Т. 62, № 3. – С. 437–441.
34. Соболев, С.Л. Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер.: Математика . – 1954. – Т. 18. – С. 3–50.
35. Сологаев, В.И. О моделировании напорно-безнапорной фильтрации воды в городском строительстве / В.И. Сологаев // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. – 2017. – Т. 2, № 54. – С. 124–128.
36. Шафранов, Д.Е. Стохастические уравнения соболевского типа с относительно p -радиальными операторами в пространствах дифференциальных форм / Д.Е. Шафранов, О.Г. Китаева, Г.А. Сви-

ридюк // Дифференциальные уравнения. - 2021. - Т. 57, № 4. - С. 526–535.

37. Apushkinskaya D.E. Lp-Theory of Venttsel BVPS with Discontinuos Data / D.E. Apushkinskaya, A.I. Nazarov, D.K. Palagachev, L.G. Softova // AAPP Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. – 2020. – V. 98, № A1.
38. Al'shin, A.B Blow-up in Nonlinear Sobolev-type Equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Berlin; N.Y.; Walter de Gruyter, 2011.
39. Agmon, S. Estimates near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions / S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1959. – V. 12, № 4. – P. 623–727.
40. Arendt, W. The Laplacian with Wentzell – Robin Boundary Conditions on Spaces of Continuous Functions / W. Arendt, G. Metafune, D. Pallara et al. // Semigroup Forum. – 2003. – V. 67, № 2. – P. 247-261.
41. Amosov, A. On a Nonlinear Initial – Boundary Value Problem with Venttsel Type Boundary Conditions Arizing in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems / A. Amosov, N. Krymov // Mathematics. – 2022. – V. 10, № 1890.
42. Bazan, F.S.V. Inverse Time-Dependent Source Problem for the Heat Equation with a Nonlocal Wentzell-Neumann Boundary Condition / F.S.V. Bazan, L. Bedin, M.I. Ismailov, L.S. Borges // Networks and Heterogeneous Media. – 2023. – V. 18, № 4. – P. 1747-1771.
43. Cavalcanti, M.M. Geometrically Constrained Stabilization of Wave Equations with Wentzell Boundary Conditions / M.M. Cavalcanti,

I. Lasiecka, D. Toundykov // Applicable Analysis. – 2012. – V. 91. – № 8. – P. 1427–1452.

44. Chen, P.J. On a Theory of Heat Conduction Involving Two Temperatures / P.J. Chen, M.E. Gurtin // Z. Angew. Math. Phys. – 1968. – V. 19. – P. 614–627.
45. Diaz, J.I. On a Parabolic Problem with Diffusion on Boundary Arising in Climatology / J.I. Diaz, L Tello // International Conference on Differential equations, Ed, World Scientific, New Jersey, 2005. – P. 1056–1058.
46. Dambrine, M. An Extremal Eigenvalue Problem for the Wentzell – Laplace Operator / M. Dambrine, D. Kateb, J. Lamboley // Annales de l’Institut Henri Poincare (C) Analyse Non Lineaire. – 2016. – V. 33. – P. 409–450.
47. Denk, R. The Bi-Laplacian with Wentzell Boundary Conditions on Lipschitz Domains/ R. Denk, M. Kunze, D. Ploss // Integral Equations and Operator Theory. – 2021. – V. 93, № 2. – Article ID 13. – 26 p.
48. Demidenko, G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N.-Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.
49. Engel, K.J. Analyticity of Demigroups Generated by Operators with generalized Wentzell Boundary Conditions / K.J. Engel, G. Fragnelli // Advances in Differential Equations. – 2005. – V. 10, № 11. – P. 1301–1320.
50. Favini, A. Nonsymmetric Elliptic Operators with Wentzell Boundary Conditions in General Domains / A. Favini, G.R. Goldstein,

- J.A. Goldstein, E. Obrecht, S. Romanelli // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2016. – V. 15, № 6. – P. 2475–2487.
51. Favini, A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces / A. Favini, A. Yagi. – N.Y.: Marcel Dekker, 1999.
 52. Favini, A. C_0 -Semigroups Generated by Second Order Differential Operators with General Wentzell Boundary Conditions / A. Favini, G.R. Goldstein, S. Romanelli // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2000. – V. 128, № 7. – P. 1981–1989.
 53. Favini, A. The Heat Equation with Generalized Wentzell Boundary Condition / A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanell // Journal of Evolution Equations. – 2002. – V. 2. – P. 1–19.
 54. Favini, A. Classification of General Wentzell Boundary Conditions for Fourth Order Operators in One Space Dimension / A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2007. – V. 333, № 1. – P. 219–235.
 55. Favini, A. The Laplacian with Generalized Wentzell Boundary Conditions / A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, Enrico Obrecht, S. Romanelli // Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. – 2003. – V. 55. – P. 169–180.
 56. Favini, A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces / A. Favini, A. Yagi. – New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1999.
 57. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations With Relatively p -Radial Operators in Space of «Noises» / A. Favini, G. Sviridyuk, M. Sagadeeva // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2016. – V. 13, № 6. – P. 607–4621.
 58. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p -Sectorial Operators in Space of «Noises» / A. Favini, G.A. Sviridyuk,

N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – V. 2015. – 8 p.

59. Favini, A. Multipoint Initial-Final Value Problem for Dynamical Sobolev-Type Equation in the Space of Noises / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Electronic Journal of Differential Equations. – 2018. – V. 2018, № 128. – P. 1–10.
60. Favini, A. The Multipoint Initial-Final Value Condition for the Hoff Equations in Geometrical Graph in Spaces of K-Noises / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2022. – V. 19, № 2. – Article ID: 53.
61. Favini, A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive «white noise» / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyeva // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2016. – V. 15, № 1. – P. 185–196.
62. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p -Sectorial Operators in Space of «noises» / A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – V. 2015, Article ID 697410.
63. Feller, W. Generalized Second Order Differential Operators and their Lateral Conditions / W. Feller // Illinois Journal of Mathematics. – 1957. – V. 1, № 4. – P. 459–504.
64. Feller, W. Diffusion Processes in One Dimension / W. Feller // Matematika. – 1958. – V. 2, № 2. – P. 119–146.
65. Gal, C.G. Fredholm Alternative, Semilinear Elliptic problems, and Wentzell Boundary Conditions / C.G. Gal, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli, M. Warma, <http://arxiv.org/abs/1311.3134>.

66. Goldstein, G.R. Derivation and Physical Interpretation of General Boundary Conditions / G.R. Goldstein // Advances in Difference Equations. – 2006. – V. 4, № 11. – P. 419–456.
67. Goldstein, J.A. Semigroups of Linear Operators and Applications / J.A. Goldstein. – Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New York, 1985.
68. Goldstein, J.A. Degenerate Parabolic Problems and the Wentzel Boundary Condition / J.A. Goldstein, Yuan Lin Chin // Semigroup theory and applications. – 1989. – V. 116. – P. 189–199.
69. Goldstein, G.R. The Fourth Order Wentzell Heat Equation / G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, D. Guidetti, S. Romanelli // Semigroups of Operators – Theory and Applications. SOTA 2018. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2020. – V. 325. – P. 215–226.
70. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh – London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y., Springer, 2011.
71. Gliklikh, Yu. E. Stochastic Leontieff Type Equations and Mean Derivatives of Stochastic Processes / Yu. E. Gliklikh, E. Yu. Mashkov // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. – 2013. – V. 6, № 2. – P. 25–39.
72. Giuseppe, M. Coclite. The Role of Wentzell Boundary Conditions in Linear and Nonlinear Analysis / M.Coclite Giuseppe, A. Favini, Ciprian G. Gal, G.R. Goldstein // Tubinger Berichte. – 2008. – V. 132. – P. 279–292.
73. Hallaire, M On a Theory of Moisture-Transfer / M. Hallaire // Inst.Rech. Agronom. – 1964. – № 3. – P. 60–72.

74. Kazuaki, T. Diffusion Processes and Partial Differential Equations / T. Kazuaki. – Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
75. Kitaeva, O.G. Exponential Dichotomies in Barenblatt – Zheltov – Kochina Model in Spaces of Differential Forms with "Noise" / O.G. Kitaeva, D.E Shafranov, G.A. Sviridyuk // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. – 2019. – V. 12, № 2. – P. 47–57.
76. Kitaeva, O.G. Exponential Dichotomies of a Non-Classical Equations of Differential Forms on a Two-Dimensional Torus with «Noises» / O.G. Kitaeva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2019. – V. 6, № 3. – P. 26–38.
77. Kitaeva, O.G. Invariant Manifolds of the Hoff Model in "Noise" / O.G. Kitaeva // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. – 2021. – T. 14, № 4. – C. 24–35.
78. Kitaeva, O.G. Invariant Manifolds of the Stochastic Benjamin – Bona – Mahony Equation / O.G. Kitaeva // Global and Stochastic Analysis. – 2022. – V. 9, № 3. – P. 9–17.
79. Kitaeva, O.G. Exponential Dichotomies of Stochastic Sobolev Type Equations / O.G. Kitaeva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2022. – V. 9, № 3. – P. 3–19.
80. Kitaeva, O.G. Stabilization of the Stochastic Barenblatt – Zheltov – Cochina Equation / O.G. Kitaeva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2023. – V. 10, № 1. – P. 21–29.
81. Chan, Li Asymptotic Behaviours of Solutions for Wave Equations with Damped Wentzell Boundary Conditions but no Interior Damping / Li Chan, Jin Liang, Ti-Jun Xiao // Journal of Differential Equations. – 2021. – V. 271, № 15. – P. 76–106.

82. Luo, Y. Optimal Wentzell Boundary Control of Parabolic Equations / Y. Luo // Applied Mathematics & Optimization. – 2017. – V. 75. – P. 151–173.
83. Lions, J.L. Problèmes Aux Limites non Homogènes et Applications / J.L. Lions, E. Magenes. – Paris: Dunod, 1968.
84. Luo, Y. Linear Second Order Elliptic Equations with Venttsel Boundary Conditions / Y. Luo, N.S. Trudinger // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics. – 1991. – V. 118, № 3–4. – P. 193–207.
85. Maz'ya, V.G. Sobolev Spaces / V. G. Maz'ya. – Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1985.
86. Melnikova, I.V. Abstract Stochastic Equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, M.A. Alshansky // Journal of Mathematical Sciences. – 2003. – V. 116, № 5. – P. 3620–3656.
87. Nelson, E. Dynamical Theories of Brownian Motion / E. Nelson. – Princeton University Press, 1967.
88. Pyatkov, S.G. Operator theory. Nonclassical Problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2002.
89. Pyatkov, S.G. On Some Mathematical Models of Filtration Theory / S.G. Pyatkov, S.N. Shergin // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 105–116.
90. Sacks, P. Semi-Linear Elliptic and Elliptic-Parabolic Equations with Wentzell Boundary Conditions and L^1 -Data / P. Sacks, M. Warma // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2014. – V. 34, № 2. – P. 761–787.
91. Shafranov, D.E. Numerical Solution of the Barenblatt – Zheltov – Kochina Equation with Additive "White Noise" in Spaces of

Differential Forms on a Torus / D.E. Shafranov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2019. – V. 6, № 4. – P. 31–43.

92. Shafranov, D.E. Stochastic Equations of Sobolev Type With Relatively p-Radial Operators in Spaces of Differential Forms / D.E. Shafranov, O.G. Kitaeva, G.A. Sviridyuk // Differential Equations. – 2021. – V. 57, № 4. – P. 507–516.
93. Shafranov, D.E. Degenerate Analytic Resolving Groups of Operators for Solutions of the Barenblatt – Zheltov – Kochina Equation in "Noise" Spaces on a Riemannian Manifold / D.E. Shafranov // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. – 2022. – V. 15, № 1. – P. 112–122.
94. Shafranov, D.E. On Numerical Solution in the Space of Differential Forms for One Stochastic Sobolev Type Equation with a Relatively Radial Operator / D.E. Shafranov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2020. – V. 7, № 4. – P. 48–55.
95. Sviridyuk, G.A. The Barenblatt – Zheltov – Kochina Model with Additive White Noise in Quasi-Sobolev Spaces / G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. – V. 3, № 1. – P. 61–67.
96. Sviridyuk, G.A. Multipoint Initial-Final Problem for One Class of Sobolev Type Models of Higher Order with Additive «White Noise» / G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyanova, S.A. Zagrebina // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. – 2018. – V. 11, № 3. – P. 103–117.

97. Sviridyuk, G.A. Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokio: VSP, 2003.
98. Showalter, R.E. The Sobolev Type Equations i. (ii) / R.E. Showalter // Appl. Anal. – 1975. – V. 5, № 1. – P. 15–22.
99. Showalter, R.E. Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations / R.E. Showalter. – London; San Francisco; Melbourne: Pitman, 1977.
100. Showalter, R.E. Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations / R.E. Showalter. – V. 49 of Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1997.
101. Vragov, V.N. On the Theory of Nonclassical Equations of Mathematical Physics / V.N. Vragov, A.I. Kozhanov, S.G. Puatkov, S.N. Glazatov // Conditionally wellposed problems. Moscow, Utrecht: TVP / TSP. – 1993. – P. 299–321.
102. Warma, M. Wentzell–Robin Boundary Conditions on $C[0, 1]$ / M. Warma // Semigroup Forum. – 2006. – V. 66. – P. 162–170.
103. Warma, M. The ROBin and Wentzell–ROBin Laplacians on LIPschitz Domains / M. Warma // Semigroup Forum. – 2006. – V. 73, № 1. – P. 10–30.
104. Warma, M. Parabolic and Elliptic Problems with General Wentzell Boundary Condition on Lipschitz Domains / M. Warma // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2013. – V. 12, № 5. – P. 1881–1905.
105. Wentzell, A.D. On Boundary Conditions for Multidimensional Diffusion Processes / A.D. Wentzell // Theory of Probably and its Applications. – 1959. – V. 4. – P. 164–177.

106. Xia, C. Eigenvalues of the Wentzell – Laplace Operator and of the Fourth Order Steklov Problems / C. Xia, Q. Wang // Journal of Differential Equations. – 2018. – V. 264, № 10. – P. 6486–6506.
107. Zamyshlyeva, A. A. Semilinear Sobolev Type Mathematical Models / A.A. Zamyshlyeva, E.V. Bychkov // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. – 2022. – V. 15, № 1. – P. 43–59.

Список публикаций автора

Основные публикации автора по теме диссертации. Статьи, опубликованные в ведущих российских рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК при Министерстве науки и высшего образования РФ, и в рецензируемых научных журналах и изданиях, индексируемых Scopus

108. Goncharov, N.S. The Barenblatt – Zheltov – Kochina Model on the Segment with Wentzell Boundary Conditions / N.S. Goncharov // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. – 2019. – V. 12, № 2. – P. 136–142. (Scopus, WoS, BAK K1)
109. Goncharov, N.S. Numerical Research of the Barenblatt – Zheltov – Kochina Model on the Interval with Wentzell Boundary Conditions / N.S. Goncharov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2019. – V. 6, № 3. – P. 14–25. (Zbl 1499.65662, BAK K1)
110. Goncharov, N.S. Stochastic Barenblatt – Zheltov – Kochina Model on the Interval with Wentzell Boundary Conditions / N.S. Goncharov // Global and Stochastic Analysis. – 2020. – V. 7, № 1. – P. 11–23. (Scopus, BAK K2)

111. Goncharov, N.S. Non-Uniqueness of Solutions to Boundary Value Problems with Wentzell Condition / N. S. Goncharov, S. A. Zagrebina, G. A. Sviridyuk // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. – 2021. – V. 14, № 4. – P. 102–105. (WoS, Scopus, BAK K1)
112. Sviridyuk, G. A. The Showalter – Sidorov and Cauchy Problems for the Linear Dzektser Equation with Wentzell and Robin Boundary Conditions in a Bounded Domain / G.A. Sviridyuk, N.S. Goncharov, S.A. Zagrebina // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics. – 2022. – V. 14, № 1. – P. 50–63. (RSCI, Zbl 1486.76083, BAK K1)
113. Goncharov, N.S. Analysis of the Stochastic Wentzell System of Fluid Filtration Equations in a Circle and on its Boundary / N.S. Goncharov, G.A. Sviridyuk // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics. – 2023. – V. 15, № 3. – P. 15–22. (RSCI, BAK K1)
114. Goncharov, N.S. Analysis of the System of Wentzell Equations in the Circle and on its Boundary / N.S. Goncharov, G. A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2023. – V. 10, № 1. – P. 12–20. (Zbl 07899481, BAK K1)
115. Goncharov, N.S. An Analysis of the Wentzell Stochastic System of the Equations of Moisture Filtration in a Ball and on its Boundary / N.S. Goncharov, G.A. Sviridyuk // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. – 2023. – V. 16, № 4. – P. 84–92. (WoS, Scopus, BAK K1)
116. Goncharov, N.S. Analysis of the Wentzell Stochastic System Composed of the Equations of Unpressurised Filtration in the

Hemisphere and at Its Boundary / N.S. Goncharov, G.A. Sviridyuk // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. – 2024. – V. 17, № 1. – P. 86–96. (WoS, Scopus, BAK K1)

117. Goncharov, N.S. The Stochastic System of Wentzell Moisture Filtration Equations on a Hemisphere and on its Edge / N.S. Goncharov, G.A. Sviridyuk // Global and Stochastic Analysis. – 2024. – V. 11, № 4. – P. 85–93. (Scopus, BAK K2)
118. Goncharov, N.S. Stochastic Wentzel System of Free Fluid Filtration Equations on a Hemisphere and On Its Edge / N.S. Goncharov, G.A. Sviridyuk // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics. – 2024. – V. 16, № 4. – P. 24–28. (RSCI, BAK K1)

*Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ по теме
диссертации*

119. Гончаров, Н.С. Программный комплекс моделирования геохимического режима грунтовых вод при безнапорной фильтрации № 2024610315 / Н.С. Гончаров, Г.А. Свиридов (RU); правообладатель Н.С. Гончаров, Г.А. Свиридов. – 2023686500; заявл. 04.12.2023; зарегистр. 09.01.2024, реестр программ для ЭВМ.
120. Гончаров, Н.С. Программный комплекс по обработке информации в численном исследовании стохастической системы Вентцеля уравнений фильтрации жидкости № 2024680947 / Н.С. Гончаров, Г.А. Свиридов (RU); правообладатель Н.С. Гончаров, Г.А. Свиридов. – 2024680177; заявл. 30.08.2024; зарегистр. 03.09.2024, реестр программ для ЭВМ.

Другие научные публикации

121. Goncharov, N.S. Information Processing in a Numerical Study for Some Stochastic Systems of the Wentzell Hydrodynamic Equations in a Ball and on its Boundary / N.S. Goncharov, G.A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2024. – V. 11, № 3. – P. 3–15. (BAK)
122. Гончаров, Н.С. О физической интерпретации модели Баренблата – Желтова – Кочиной в области с краевым условием Вентцеля / Н.С. Гончаров // Наука ЮУрГУ: сборник материалов 71-й научной конференции. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Южно-Уральский государственный университет. – 2019. – С. 29–32.
123. Гончаров, Н.С. Numerical Investigation of the Barenblatt – Zheltov – Kochina Model on the Segment with Wentzell Boundary Conditions / Н.С. Гончаров // Уфимская осенняя математическая школа: сборник тезисов Международной научной конференции, Уфа, 16-19 октября 2019 года. – Уфа: Башкирский государственный университет, 2019. – С. 012022.
124. Гончаров, Н.С. The Heat Conduction Model Involving Two Temperatures on the Segment with Wentzell Boundary Conditions / Н.С. Гончаров, Г.А. Свиридюк // The International Scientific and Practical Conference on Mathematical Modeling, Programming and Applied Mathematics: сборник тезисов, Великий Новгород, 27-28 июня 2019 года. – Bristol: Institute of Physics Publishing, 2019. – С. 67-68.
125. Гончаров, Н.С. Разрешимость задачи Коши – Вентцеля для обобщенного линеаризованного комплексного уравнения Гинзбурга – Ландау на отрезке / Н.С. Гончаров, Г.А. Свиридюк // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения: сборник материалов 3-й Международной конференции, Иркутск,

13-17 сентября 2021 года. – Иркутск: Иркутский государственный университет, 2021. – С. 24-25.

126. Гончаров, Н.С.The Non-Uniqueness of the Showalter – Sidorov Problem for the Barenblatt – Zheltov – Kochina Equation with Wentzell Boundary Conditions in a Bounded Domain / Н.С. Гончаров, С.А. Загребина, Г.А. Свиридов // О.А. Ladyzhenskaya centennial conference on PDE's: сборник тезисов Book of abstracts, St. Petersburg, 16-22 июля 2022 года. – St. Petersburg, 2022. – С. 56.
127. Гончаров, Н.С. Разрешимость задачи Коши – Вентцеля – Робена для линейного уравнения Дзекцера в ограниченной области / Н.С. Гончаров, Г.А. Свиридов, С.А. Загребина // Южно-Уральская молодежная школа по математическому моделированию: сборник трудов V всероссийской научно-практической конференции, Челябинск, 15-16 июня 2022 года. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2022. – С. 28-32.
128. Гончаров, Н.С. Начально – краевые задачи для уравнения Дзекцера с граничным условием Вентцеля / Н.С. Гончаров // Современные методы теории краевых задач: сборник материалов Международной конференции, Воронеж, 3-9 мая 2022 года. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2022. – С. 90-92.
129. Гончаров, Н.С. О разрешимости системы Вентцеля уравнений фильтрации жидкости в круге и на его границе / Н.С. Гончаров, Г.А. Свиридов // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения: сборник материалов 5-й Международной конференции, Иркутск, 18-23 сентября 2023 года. – Иркутск: Иркутский государственный университет, 2023. – С. 15-16.

130. Гончаров, Н.С. Разрешимость системы уравнений Вентцеля в круге и на его границе / Н.С. Гончаров, Г.А. Свиридов // Южно-Уральская молодежная школа по математическому моделированию: сборник трудов VI Всероссийской научно-практической конференции, Челябинск, 15-16 июня 2023 года. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2023. – С. 12-17.
131. Гончаров, Н.С. Анализ стохастической системы Вентцеля уравнений свободной фильтрации жидкости в шаре и на его границе / Н.С. Гончаров, С.А. Загребина, Г.А. Свиридов // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения: сборник материалов 6-й Международной конференции, Иркутск, 16-20 сентября 2024 года. – Иркутск: Иркутский государственный университет, 2024. – С. 20-21.
132. Свиридов, Г.А. О разрешимости системы Вентцеля уравнений фильтрации влаги в шаре и на его границе / Г.А. Свиридов, Н.С. Гончаров // XIV Всероссийское совещание по проблемам управления: сборник научных трудов, Москва, 17-20 июня 2024 года. – Москва: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2024. – С. 943-947.

Приложения

Приложение 1. Свидетельство о регистрации программы для моделирования геохимического режима грунтовых вод при безнапорной фильтрации для системы Вентцеля уравнений фильтрации жидкости в круге



Приложение 2. Свидетельство о регистрации программы для обработки информации в численном исследовании стохастической системы Вентцеля уравнений фильтрации жидкости

