

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Гаврилова Ольга Витальевна

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ АВТОКАТАЛИТИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ
С ДИФФУЗИЕЙ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕРВНОГО ИМПУЛЬСА
В МЕМБРАННОЙ ОБОЛОЧКЕ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (информатика, информационно-вычислительное обеспечение)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Н.А. Манакова

Челябинск – 2021

Содержание

Введение	4
Глава 1. Методы и алгоритмы анализа однозначной разрешимости математических моделей автокаталической реакции с диффузией	
1.1. Вспомогательные сведения функционального анализа, необходимые для исследования рассматриваемых моделей	26
1.2. Математическая модель автокаталической реакции с диффузией в случае $\varepsilon_1 = 0$	30
1.3. Исследование неединственности решения задачи Шоултера – Сидорова в случае $\varepsilon_1 = 0$	33
1.4. Исследование единственности решения задачи Шоултера – Сидорова в случае $\varepsilon_2 = 0$	37
1.5. Исследование вопроса однозначной разрешимости математических моделей автокаталической реакции с диффузией в трубчатом реакторе	40
1.6. Алгоритм численного метода нахождения решения задачи Шоултера – Сидорова и описание комплекса программ	45
1.7. Вычислительные эксперименты	50
Глава 2. Методы и алгоритмы анализа однозначной разрешимости математических моделей распространения нервного импульса в мембранной оболочке	
2.1. Исследование единственности решения задачи Шоултера – Сидорова в случае $\varepsilon_1 = 0$	63
2.2. Исследование единственности решения задачи Шоултера – Сидорова в случае $\varepsilon_2 = 0$	66
2.3. Исследование неединственности решения задачи Шоултера – Сидорова в случае $\varepsilon_2 = 0$	69
2.4. Исследование вопроса однозначной разрешимости математических моделей распространения нервного импульса в мембранной оболочке системы нервов	74
2.5. Алгоритм численного метода нахождения решения задачи Шоултера – Сидорова	79
2.6. Описание комплекса программ	81
2.7. Вычислительные эксперименты	85
Глава 3. Методы и алгоритмы исследования многокомпонентной математической модели оптимального регулирования процесса распространения нервного импульса в мембранной оболочке	
3.1. Исследование математической модели процесса возбуждения нервного импульса в мембранной оболочке нерва	95
3.2. Задача оптимального управления для модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке нерва	99

3.3. Метод декомпозиции и штрафа для задачи оптимального управления распространением нервного импульса в мембранной оболочке нерва	104
3.4. Многокомпонентная математическая модель оптимального регулирования процессом распространения нервного импульса в мембранной оболочке системы нервов	109
3.5. Алгоритм численного метода нахождения управления решениями вырожденной многокомпонентной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке и описание комплекса программ	113
3.6. Вычислительные эксперименты	121
Заключение	131
Список литературы	134
Приложения	144

Введение

Актуальность исследования

Конец XX века ознаменовался бурным ростом исследований по биологическим, химическим наукам на основе методов математического моделирования [20, 21, 25, 87]. Наряду с теоретическим осмыслением накопленного экспериментального материала происходит внедрение в практику исследований математических моделей, позволяющих системно описывать химические и биологические процессы [1, 3, 11, 23, 29, 32, 36, 53]. К настоящему времени накоплен богатый опыт работы с математическими моделями, описывающими процессы химической кинетики и популяционной динамики, такими как перенос кислорода в кровеносной системе, распространение нервного импульса в мембранной оболочке. При этом следует отметить, что системный анализ подобных математических моделей позволяет изучить их во всех возможных аспектах, особенно при отсутствии других возможностей исследования, ведь проведение натуральных экспериментов может привести к серьезным сбоям в работе исследуемого объекта, которым чаще всего является биологический организм или сложные химические структуры. Особый интерес представляют процессы, происходящие в активных средах. В этих средах ярко выражен дисбаланс между диффузией и количеством вещества, который чаще всего имеет нелинейный прирост.

Постановка задач

1. Математическая модель автокаталитической реакции с диффузией в кювете

Одним из толчков, вызвавших бурный рост исследований по математическому моделированию в химической кинетике и биофизике, явилось открытие Б.Н. Белоусовым периодических химических реакций [3]. А.М. Жаботинский с последователями подробно исследовал свойства этих реакций и условия их протекания, им также была предложена первая математическая модель периодической химической реакции [82], более известная как брюсселятор [71]. Рассмотрим эту математическую модель более подробно. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ (здесь и далее по тексту диссертационной работы под $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ будем понимать ограниченную область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , являющуюся математической интерпретацией биологически активной среды) рассмотрим вырожден-

ную систему уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_1 v_t = \alpha_1 \Delta v + \beta_1 - (\beta_2 + 1)v + v^2 w, \\ \varepsilon_2 w_t = \alpha_2 \Delta w + \beta_2 v - v^2 w, \end{cases} \quad (0.0.1)$$

$$\varepsilon_1 = 0 \text{ или (и) } \varepsilon_2 = 0 \quad (*)$$

с краевым условием

$$v(s, t) = 0, w(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (0.0.2)$$

и начальным условием Шоултера – Сидорова

$$\begin{aligned} w(s, 0) &= w_0(s) \text{ для случая } \varepsilon_1 = 0 \\ &\text{или} \\ v(s, 0) &= v_0(s) \text{ для случая } \varepsilon_2 = 0. \end{aligned} \quad (0.0.3)$$

Здесь функции $v = v(s, t)$ и $w = w(s, t)$ описывают концентрации реагентов, члены $\alpha_1 \Delta v$, $\alpha_2 \Delta w$ характеризуют диффузию реагентов, согласно закону Фика, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ – коэффициенты диффузии, параметры $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ задают концентрации исходных реагентов, которые предполагаются постоянными. Нашей задачей является численно-аналитический анализ состояний вырожденных математических моделей автокаталитической реакции с диффузией (0.0.1) – (0.0.3) при $\varepsilon_1 = 0$ или (и) $\varepsilon_2 = 0$ для любых значений параметров задачи и выявление условий неединственности решений.

2. Математическая модель автокаталитической реакции с диффузией в трубчатом реакторе

Состояние современной химической кинетики таково, что позволяет исследовать активные среды похожего типа не только опосредованно друг от друга, но и совместно [8]. Для исследования такого рода взаимодействий принято использовать трубчатые реакторы, математической интерпретацией которых являются различные виды графов. На графе \mathbf{G} (здесь и далее по тексту диссертационной работы под графом \mathbf{G} будем понимать $\mathbf{G}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$, $\mathcal{V} = \{V_g\}_{g=1}^M$, $\mathcal{E} = \{E_j\}_{j=1}^K$, причем длина и площадь поперечного сечения ребра E_j равны $l_j \in \mathbb{R}_+$ и $d_j \in \mathbb{R}_+$, соответственно) рассмотрим вырожденную систему уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_1 v_{jt} = \alpha_1 v_{jss} + \beta_1 - (\beta_2 + 1)v_j + v_j^2 w_j, \\ \varepsilon_2 w_{jt} = \alpha_2 w_{jss} + \beta_2 v_j - v_j^2 w_j \end{cases} \quad (0.0.4)$$

при условии (*) и с условиями непрерывности и баланса потока

$$\begin{aligned} v_j(0, t) &= v_k(0, t) = v_m(l_m, t) = v_n(l_n, t), \\ w_j(0, t) &= w_k(0, t) = w_m(l_m, t) = w_n(l_n, t), \\ E_j, E_k &\in E^\alpha(V_g); \quad E_m, E_n \in E^\omega(V_g), \end{aligned} \quad (0.0.5)$$

$$\begin{aligned} \sum_{E_j \in E^\alpha(V_g)} d_j v_{js}(0, t) - \sum_{E_j \in E^\omega(V_g)} d_j v_{js}(l_j, t) &= 0, \\ \sum_{E_j \in E^\alpha(V_g)} d_j w_{js}(0, t) - \sum_{E_j \in E^\omega(V_g)} d_j w_{js}(l_j, t) &= 0 \end{aligned} \quad (0.0.6)$$

и начальным условием Шоултера – Сидорова

$$\begin{aligned} w_j(s, 0) &= w_{j0}(s) \text{ для случая } \varepsilon_1 = 0 \\ &\text{или} \\ v_j(s, 0) &= v_{j0}(s) \text{ для случая } \varepsilon_2 = 0. \end{aligned} \quad (0.0.7)$$

Нашей задачей является численно-аналитический анализ состояний вырожденных математических моделей автокаталитической реакции с диффузией (0.0.4) – (0.0.7) при $\varepsilon_1 = 0$ или (и) $\varepsilon_2 = 0$ для любых значений параметров задач при взаимодействии в трубчатом реакторе (граф \mathbf{G}) и выявление условий неединственности решений.

3. Математическая модель распространения нервного импульса в мембранной оболочке нерва

Нервные импульсы распространяются по нейронам, аксонам, дендритам, по клеткам поперечнополосатой мускулатуры, гладкой мускулатуры кишечника, сердечно-сосудистой системе. Одной из классических моделей в биофизике, которая часто используется при описании распространения волн возбуждения, лежащих в основе передачи нервных импульсов в биологической системе, является математическая модель, построенная Р. Фитц Хью [67] и Дж. Нагумо [73]. Рассмотрим эту математическую модель более подробно. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим вырожденную систему уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_1 v_t = \alpha_1 \Delta v - \beta_{11} v + \beta_{12} w, \\ \varepsilon_2 w_t = \alpha_2 \Delta w - \beta_{21} v + \beta_{22} w - w^3 \end{cases} \quad (0.0.8)$$

при условии (*), с условием Дирихле (0.0.2) и начальным условием Шоултера – Сидорова (0.0.3). Здесь $w = w(s, t)$ – функция, описывающая динамику мембранного потенциала, $v = v(s, t)$ – медленная восстанавливающая функция, связанная с ионными токами, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22} \in \mathbb{R}$ –

фиксированные параметры, характеризующие: β_{11}, β_{12} – порог возбуждения и его скорость, α_1 – электропроводность среды, α_2 – реполяризацию среды. Характерной особенностью системы уравнений (0.0.8) является кубическая нелинейность в одном уравнении и линейная зависимость в другом. Эта модель является, с одной стороны, развитием известной модели Колмогорова – Петровского – Пискунова [21], а с другой стороны – упрощением модели Ходжинса – Хаксли [68]. Нашей задачей является численно-аналитический анализ состояний вырожденных математических моделей распространения нервного импульса в мембранной оболочке клетки (0.0.2), (0.0.3), (0.0.8) при $\varepsilon_1 = 0$ или (и) $\varepsilon_2 = 0$ для любых значений параметров задачи и выявление условий неединственности решений.

4. Математическая модель распространения нервного импульса в мембранной оболочке системы нервов

Для современной биофизики актуальной является проблема взаимодействия различных систем внутри одного исследуемого объекта. Процесс распространения нервного импульса в мембранной оболочке системы нервов как раз и предполагает такого рода взаимодействия. Нами будет рассмотрена математическая модель распространения нервного импульса в мембранной оболочке системы нервов, математической интерпретацией которой является граф. На графе \mathbf{G} рассмотрим вырожденную систему уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_1 v_{jt} = \alpha_1 v_{jss} - \beta_{11} v_j + \beta_{12} w_j, \\ \varepsilon_2 w_{jt} = \alpha_2 w_{jss} - \beta_{21} v_j + \beta_{22} w_j - w_j^3 \end{cases} \quad (0.0.9)$$

с условиями (*), (0.0.5), (0.0.6) и начальным условием Шоуолтера – Сидорова (0.0.7). Нашей задачей является численно-аналитический анализ состояний вырожденных математических моделей распространения нервного импульса в мембранной оболочке системы нервов (0.0.5), (0.0.6), (0.0.7), (0.0.9), при $\varepsilon_1 = 0$ или (и) $\varepsilon_2 = 0$ для любых значений параметров задачи и выявление условий неединственности решений.

5. Математическая модель оптимального регулирования процесса распространения нервного импульса в мембранной оболочке нерва

На основе методов математического моделирования могут быть описаны процессы распространения волн возбуждения в активных средах, лежащие в основе передачи нервных импульсов в биологической системе. Распростра-

няющийся по клеткам нервный импульс приводит в действие биохимический фибриллярный аппарат. Нарушение распространения нервных импульсов может приводить к полной или частичной потере двигательных функций, эпилепсии, инфарктам, инсультам и сердечным аритмиям. Поэтому так важно научиться оказывать нужное воздействие на систему медикаментозно или физиологически для приведения системы организма к такому состоянию, которое способствует правильной его работе. Иными словами, актуальной является задача оптимального регулирования процессов распространения нервного импульса в мембранной оболочке клеток. Для системного изучения данного вопроса рассмотрим следующую задачу. Для математической модели

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1t} - \alpha_1 \Delta v_1 + \beta_{11} v_1 + \beta_{12} v_2 + \dots + \beta_{1m} v_m + \varkappa_1 v_1^3 = u_1, \\ v_{2t} - \alpha_2 \Delta v_2 + \beta_{21} v_1 + \beta_{22} v_2 + \dots + \beta_{2m} v_m + \varkappa_2 v_2^3 = u_2, \\ \dots \\ v_{kt} - \alpha_k \Delta v_k + \beta_{k1} v_1 + \beta_{k2} v_2 + \dots + \beta_{km} v_m + \varkappa_k v_k^3 = u_k, \\ -\alpha_{k+1} \Delta v_{(k+1)} + \beta_{(k+1)1} v_1 + \beta_{(k+1)2} v_2 + \dots + \beta_{(k+1)m} v_m = u_{(k+1)}, \\ \dots \\ -\alpha_m \Delta v_m + \beta_{m1} v_1 + \beta_{m2} v_2 + \dots + \beta_{mm} v_m = u_m, \end{array} \right. \quad (0.0.10)$$

$$v_i(s, t) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (0.0.11)$$

$$v_i(s, 0) = v_{i0}(s), \quad i = \overline{1, k}, \quad s \in \Omega, \quad (0.0.12)$$

рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}. \quad (0.0.13)$$

Здесь $J(x, u)$ – некоторый специальным образом построенный целевой функционал; управление $u \in \mathfrak{U}_{ad}$, где \mathfrak{U}_{ad} – некоторое непустое, замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений \mathfrak{U} . Нашей задачей является численно-аналитический анализ состояний вырожденной математической модели оптимального регулирования процесса распространения нервного импульса в мембранной оболочке клеток в многокомпонентном случае (0.0.10) – (0.0.13).

6. Математическая модель оптимального регулирования процесса распространения нервного импульса в мембранной оболочке системы нервов

Рассмотрим задачу распространения нервного импульса в системе нервов, математической интерпретацией которой является геометрический граф. Для

математической модели

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1jt} - \alpha_1 v_{1jss} + \beta_{11} v_{1j} + \beta_{12} v_{2j} + \dots + \beta_{1m} v_{mj} + \varkappa_1 v_{1j}^3 = u_{1j}, \\ v_{2jt} - \alpha_2 v_{2jss} + \beta_{21} v_{1j} + \beta_{22} v_{2j} + \dots + \beta_{2m} v_{mj} + \varkappa_2 v_{2j}^3 = u_{2j}, \\ \dots \\ v_{kjt} - \alpha_k v_{kjss} + \beta_{k1} v_{1j} + \beta_{k2} v_{2j} + \dots + \beta_{km} v_{mj} + \varkappa_k v_{kj}^3 = u_{kj}, \\ -\alpha_{k+1} v_{(k+1)jss} + \beta_{(k+1)1} v_{1j} + \beta_{(k+1)2} v_{2j} + \dots + \beta_{(k+1)m} v_{mj} = u_{(k+1)j}, \\ \dots \\ -\alpha_m v_{mjss} + \beta_{m1} v_{1j} + \beta_{m2} v_{2j} + \dots + \beta_{mm} v_{mj} = u_{mj}, \end{array} \right. \quad (0.0.14)$$

$$\sum_{j: E_j \in E^\alpha(V_g)} d_j v_{ijs}(0, t) - \sum_{r: E_r \in E^\omega(V_g)} d_r v_{irs}(l_r, t) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (0.0.15)$$

$$v_{ir}(0, t) = v_{ij}(0, t) = v_{ih}(l_h, t) = v_{in}(l_n, t), \quad i = \overline{1, m}, \quad (0.0.16)$$

$$E_r, E_j \in E^\alpha(V_g); \quad E_h, E_n \in E^\omega(V_g),$$

$$v_{ij}(s, 0) = v_{ij0}(s), \quad i = \overline{1, k}, j = \overline{1, K}, \quad s \in \Omega, \quad (0.0.17)$$

рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}. \quad (0.0.18)$$

Решение задачи (0.0.14) – (0.0.18) позволяет найти такое управляющее внешнее воздействие, чтобы с наименьшими затратами на управление были достигнуты требуемые значения ионных токов и мембранного потенциала в системе нервов. Нашей задачей является численно-аналитический анализ состояний вырожденной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке системы нервов в многокомпонентном случае.

Все вышеописанные задачи можно свести к абстрактному полулинейному уравнению соболевского типа

$$L \dot{x} = Mx + N(x) + u \quad (0.0.19)$$

в банаховых пространствах \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} , которые строятся для каждой модели особым образом, где операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $N \in C^k(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. В рамках настоящей работы проведено системное исследование вопроса однозначной разрешимости исследуемых вырожденных моделей с начальным условием Шоултера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0. \quad (0.0.20)$$

При исследовании разрешимости классической задачи Коши и задачи Шоултера – Сидорова для уравнений (0.0.19) было установлено, что, если оператор L непрерывно обратим, тогда задачи Коши и Шоултера – Сидорова

для уравнения (0.0.19) эквивалентны. При анализе фазовых пространств вырожденных уравнений вида (0.0.19) было обнаружено, что они могут содержать особенности типа сборок и складок Уитни [5]. В работах [14,47] показана возможная неединственность решения задачи Шоуолтера – Сидорова для полулинейного уравнения (0.0.19). Для исследуемых математических моделей, как, впрочем, и для любых моделей, описывающих процессы, протекающие в активных средах, характерно возможное «расслоение» (т.е. неединственность) решений при одинаковых начальных условиях, что подтверждают и данные экспериментов [64, 65]. Для системного анализа феномена неединственности построены численно-аналитические методы и алгоритмы исследования математических моделей автокаталитической реакции с диффузией и распространения нервного импульса в мембранной оболочке. Построенные алгоритмы позволяют выявить условия единственности, неединственности и несуществования решений задач с начальным условием Шоуолтера – Сидорова с последующей возможностью оптимального регулирования и в многокомпонентном случае. В связи с этим, считаем, что исследования, представленные в настоящей диссертации, являются актуальными и могут способствовать развитию современной кинетической химии и биофизики.

Степень разработанности темы исследования

В последние годы наблюдается рост числа исследований, посвященных моделированию пространственно-распределенных систем биологической и химической природы. Одной из трудностей моделирования процессов кинетической химии и биофизики является содержательная постановка задачи, т.е. использование математического аппарата для описания понятий биологии, экологии, медицины, химии. При моделировании в этих областях знаний применяются практически все методы прикладной математики. Наиболее широкое распространение получило исследование полулинейных уравнений типа реакции-диффузии. Системы уравнений реакции-диффузии нашли, прежде всего, свое применение при описании процессов переноса в организме, например, при моделировании переноса кислорода в кровеносной системе или распространения нервного импульса в мембранной оболочке [77]. В работе П.А. Доменико и Ф.В. Шварца [61] исследуется модель переноса загрязняющего вещества в потоке, Е.Е. Холмс и его ученики [69] изучали модель популяционной экологии, которая также носит название модели Фишера. Ха-

раактерной особенностью почти всех уравнений реакции-диффузии является наличие малого параметра при старшей производной по времени, стремящегося к нулю, что логически приводит к двум подходам изучения таких задач. Первым подходом является исследование уравнений типа реакции-диффузии с помощью теории сингулярных возмущений. Отправной точкой для исследования дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной стали работы А.Н. Тихонова. Существует несколько методов исследования задач такого типа: асимптотический метод Вишика – Люстерника, метод усреднения Боголюбова – Крылова. В.А. Треногиным с учениками [87] была поставлена и исследована проблема ветвления решений (и, следовательно, их неединственность) для нелинейных уравнений реакции-диффузии. Одним из условий существования «разветвления» решений уравнения типа реакции-диффузии является возникновение диффузионной неустойчивости по Тьюрингу [87]. В работе [1] рассмотрены случаи возникновения этой особенности в различных моделях химической кинетики и биофизики. Одним из условий возникновения неустойчивости по Тьюрингу является наличие в системе компоненты с малым коэффициентом диффузии (активатора) и медленно действующей компоненты (ингибитора). Вторым подходом является исследование вырожденных уравнений типа реакции-диффузии, когда параметр при производной по времени медленно действующей компоненты (ингибитора) считается равным нулю. Работа Г.А. Свиридюка и Т.А. Бокаревой [5] в 1994 г. послужила отправной точкой для исследования вырожденных уравнений типа реакции-диффузии. В ней была учтена характерная особенность уравнений типа реакции-диффузии с неустойчивостью Тьюринга, когда скорость изменения одних из компонент существенно превосходит скорость других. Это позволяет свести уравнения типа реакции-диффузии (в том числе и рассматриваемые в данной диссертационной работе) к полуперенным уравнениям, неразрешенным относительно старшей производной (соболевского типа) (0.0.19).

В 1885 г. А. Пуанкаре [79] при изучении равновесия массы вращающейся жидкости впервые упоминает уравнения, неразрешенные относительно старшей производной. При исследовании проблем гидравлики такие уравнения появились в работах С.В. Озеена, Ф.К.Ж. Одквиста, У. Буссинеска, С.Г. Россби и многих других. Первым, кто начал систематическое изучение начальнo-

краевых задач для уравнений вида (0.0.19), где L и M (возможно, матричные) дифференциальные операторы в частных производных по пространственным переменным, был С.Л. Соболев в 40-х годах прошлого столетия. В 1954 году в работе [49] им было получено уравнение, моделирующее колебания гравитирующей жидкости, и изучена задача Коши для него. Эта работа легла в основу нового направления, которое первоначально развивалось учениками С.Л. Соболева. В настоящее время в России и за рубежом сформировались целые научные школы и коллективы, которые занимаются проблематикой уравнений соболевского типа. Существует два основных подхода к изучению уравнений соболевского типа. Среди исследователей первого из подходов следует упомянуть В.Н. Врагова [12], А.И. Кожанова [70], И.Е. Егорова, С.Г. Пяткова и С.В. Попова [80], С.В. Успенского, Г.В. Демиденко [15] и др., которые при разрешимости начально-краевых задач для уравнений или систем уравнений в частных производных используют, прежде всего, коэрцитивные оценки и опираются на теорему о неподвижной точке. В рамках второго подхода исследуются, как правило, абстрактные линейные и полулинейные уравнения соболевского типа, а после полученные результаты применяются для исследования конкретных дифференциальных уравнений или систем уравнений в частных производных с различными начально-краевыми условиями. Представителями такого подхода являются Р.Е. Шоуолтер [84] (США), А. Фавини (Италия), А. Яги (Япония) [63], Х. Гаевский, К. Греггер, К. Захариас (Германия) [13], И.В. Мельникова и А.И. Филенков (г. Екатеринбург) [72], Н.А. Сидоров, Б.В. Логинов, А.В. Синицин и М.А. Фалалеев (г. Иркутск) [48], А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер (г. Москва) [58], Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков (г. Иркутск) [7] и другие, и, конечно же, представители научной школы под руководством Г.А. Свиридюка (г. Челябинск) [85], в рамках которой и проведено настоящее диссертационное исследование. Сложилось несколько направлений изучения уравнений соболевского типа наиболее близких к нашему. Т.Г. Сукачева занимается качественным исследованием линеаризованных и нелинейных математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей различных порядков и описанием их фазовых пространств. В.Е. Федоров распространил теорию вырожденных (полу)групп операторов на случай локально выпуклых пространств [52]. А.В. Келлер [19] проведены численные исследования конечно-

мерного аналога уравнений соболевского типа (систем леонтьевского типа) с различными видами начальных условий и доказана сходимость приближенного решения к точному. А.А. Замышляевой [18] построены численные и аналитические методы исследования детерминированных и стохастических математических моделей высокого порядка с различными видами начальных условий. С.А. Загребинной [17] предложено рассматривать многоточечные начально-конечные условия для детерминированных и стохастических линейных уравнений соболевского типа первого порядка и разработаны аналитические и численные методы исследования такого рода задач. Н.А. Манакова [30] занимается численными и аналитическими исследованиями задач оптимального управления для (0.0.19), ею создана теоретическая база для численного исследования полулинейных уравнений соболевского типа, найдены условия однозначной разрешимости для различных классов уравнений (0.0.19) и установлена сходимость приближенного решения к точному.

Начальное условие (0.0.20) для уравнений (0.0.19) в явном виде, наверное, впервые поставил Р.Е. Шоултер [84] в 1975 г. В его исследовании ему пришлось построить полугильбертовы пространства с нехаусдорфовой метрикой. Независимо от Шоултера и другим способом пришел к начальному условию (0.0.20) Н.А. Сидоров [48] в 1984 г., вследствие чего такое начальное условие стало называться условием Шоултера – Сидорова. В 1989 г. Г.А. Свиридюком было высказано предположение о неединственности решений задачи (0.0.20) для полулинейных уравнений соболевского типа, что привело к необходимости исследования таких уравнений методом фазового пространства. Суть метода заключается в сведении линейных и полулинейных уравнений соболевского типа к уравнению $\dot{x} = Sx + F(x)$, определенном на некотором подпространстве, которое понимается как фазовое пространство. Применение метода фазового пространства позволило построить теорию вырожденных (полу)групп операторов. В настоящее время в рамках научной школы Г.А. Свиридюка защищено множество кандидатских и докторских диссертаций, посвященных исследованию фазовых пространств линейных и полулинейных уравнений соболевского типа, опирающихся на работу Г.А. Свиридюка [85], в которой изложены основы теории (L, p) -ограниченных, (L, p) -секториальных, (L, p) -радиальных операторов. Исследования Г.А. Свиридюка продолжила Т.Г. Сукачева [41, 50]; ею были изучены фазовые простран-

ства различных моделей гидродинамики ненулевого порядка. В кандидатской диссертации М.М. Якуповым [57] была показана простота фазового пространства гибрида уравнения Осколкова и уравнения теплопроводности в приближении Обербека – Буссинеска. При исследовании вопроса однозначной разрешимости задачи (0.0.19), (0.0.20) Г.А. Свиридюком [42, 43] было показано, что задача Шоултера – Сидорова имеет единственное решение, если фазовое пространство является простым банаховым C^∞ -многообразием. Позже Г.А. Свиридюком и В.О. Казаком [45] была доказана простота фазового пространства для уравнения Хоффа при некоторых коэффициентах. Условия, при которых фазовое пространство уравнения Осколкова, является простым C^∞ -многообразием, найдены Г.А. Свиридюком и Н.А. Манаковой [46]. Исследование случая, когда фазовое пространство уравнения (0.0.19) лежит на гладком банаховом многообразии, имеющем особенности, такие, как сборки Уитни, а значит, задача Шоултера – Сидорова (0.0.20) для уравнения (0.0.19) может иметь несколько решений, началось с работы [5] для математических моделей реакции-диффузии. Т.А. Бокаревой и Г.А. Свиридюком были найдены условия существования особенностей типа сборок или складок Уитни фазового пространства уравнений типа реакции-диффузии в общем случае. В работе [5] было показано, что фазовое пространство системы уравнений распределенного брюсселятора (0.0.1) в случае $\varepsilon_1 = 0$ содержит 1-сборку Уитни, однако при этом не были найдены условия существования одного или нескольких решений и не был рассмотрен случай простоты фазового пространства в случае $\varepsilon_2 = 0$. В кандидатской работе А.Ф. Гильмутдиновой [14] было показано, что фазовое пространство уравнений вида (0.0.19) может содержать особенности типа сборок Уитни, и найдены условия существования нескольких решений для модели Корпусова – Плетнера – Свешникова и системы уравнений Плотникова. В работе [47] Г.А. Свиридюком и И.К. Тринеевой были исследованы условия возникновения сборок Уитни в фазовом пространстве модели Хоффа. Настоящая диссертационная работа продолжает исследования, начатые в работе [5], для математических моделей реакции-диффузии, обобщая и рассматривая все возможные начальные условия и коэффициенты системы уравнений в различных видах областей, включая графы, и переносит их на конкретные виды моделей, такие как автокаталитическая реакция с диффузией и распространение нервного импульса

в мембранной оболочке.

Вопрос управления процессами, описываемыми уравнениями типа реакции-диффузии, рассматривался еще в 70-х годах прошлого века М.Б. Бэком и его соратниками [59, 60]. На возможность управления с помощью воздействия слабых электромагнитных полей указывают и экспериментальные данные [31, 78]. В настоящее время исследования по управлению процессами, описываемыми уравнениями типа реакции-диффузии, посвящены изучению хаос-контроля, усиления периодического сигнала под воздействием белого шума, звуковых эффектов и фильтрации [62, 81, 83, 88, 90]. В рамках настоящей работы исследована задача оптимального управления процессом распространения нервного импульса в мембранной оболочке. При исследовании задач оптимального управления можно выделить два основных подхода. Один из них заложили в 1955–1970 годах в своих работах Л.С. Понтрягин [35], продолжил исследования в этом направлении Н.Н. Красовский [22], а также их ученики и последователи. Ими были рассмотрены вопросы разрешимости задач оптимального управления процессами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, с помощью принципа максимума Понтрягина и построения управляющего воздействия, которое приводит объект в заданное состояние. В основе другого подхода лежат исследования задач оптимального управления системами, которые описываются с помощью краевой задачи для уравнения с частными производными (эти системы получили название распределенных). В монографии Ж.-Л. Лионса [26] впервые систематически изучены задачи оптимального управления для уравнений с частными производными, вопросы существования и аппроксимации оптимальных решений для линейных задач с квадратичным функционалом. В [27] Ж.-Л. Лионс рассматривает управление различными сингулярными нелинейными распределенными системами. Ж.-Л. Лионсом отмечено, что структура множества оптимальных пар в данной ситуации неизвестна. Предлагаются различные методы (метод декомпозиции, штрафа, растущего лагранжиана), на основе которых могут быть разработаны численные алгоритмы по нахождению приближенных решений. В монографии А.В. Фурсикова [54] строится общая теория оптимального управления распределенными системами. Исследуемый в монографии класс задач в наиболее общей форме можно записать в виде $J(x, u) \rightarrow \inf, F(x, u) = 0, u \in \mathfrak{U}_d$, где J – некоторый функционал, F – неко-

торый оператор, действующий в соответствующих пространствах. Большое количество абстрактных теоретических результатов монографии применены к различным классам невырожденных задач оптимального управления.

Впервые исследованием задач оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа стали заниматься Г.А. Свиридюк и А.А. Ефремов [44]. Оптимальное управление решениями задачи Коши для линейных уравнений соболевского типа рассматривалось в их работе [85]. В дальнейшем начатые исследования в этой области продолжили ученики Г.А. Свиридюка. К настоящему времени в рамках исследования задач оптимального управления для уравнений соболевского типа защищено несколько докторских и кандидатских диссертаций. Работы Г.А. Свиридюка и А.А. Ефремова по управляемости для линейных уравнений соболевского типа инициировали дальнейшее изучение этих задач В.Е. Федоровым и О.А. Рузаковой [37]. Как уже говорилось выше, докторская диссертация Н.А. Манаковой [30] посвящена численным и аналитическим исследованиями задач оптимального управления решениями (0.0.19), (0.0.20). Кандидатская диссертация О.Н. Цыпленковой [56] посвящена исследованию оптимального управления решениями линейных уравнений соболевского типа второго порядка и базируется на результатах А.А. Замышляевой по исследованию разрешимости таких уравнений. А.Г. Дыльков [16] занимался исследованием оптимального управления решениями начально-конечной задачи для процессов, описываемых линейными уравнениями Хоффа и Дзекцера, заданными на графе. В диссертационной работе Е.А. Богатыревой [4] изучена задача стартового управления и финального наблюдения для квазилинейного уравнения соболевского типа. В докторской диссертационной работе М.В. Плехановой были изучены вопросы разрешимости задач оптимального управления для систем, описываемых линейными и полулинейными эволюционными уравнениями дробного порядка, как разрешенными относительно дробной производной, так и вырожденными [34].

Ход развития современной биофизики подразумевает не только исследование так называемых базовых двухкомпонентных математических моделей, но и моделирование более сложных многокомпонентных биологических систем. В докторской диссертации А.И. Лобанова [28] была поставлена проблема исследования многокомпонентных биологических систем, описываемых с

помощью уравнений типа реакции-диффузии, в частности процессов переноса кислорода в кровеносной системе и распространения нервного импульса в мембранной оболочке. В.И. Некоркиным и его учениками [74–76] были исследованы невырожденные трех- и четырехкомпонентные модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке в случае одного активатора и нескольких (двух или трех) ингибиторов. В настоящей диссертационной работе будет исследована задача оптимального управления для вырожденной многокомпонентной модели в случае существования нескольких активаторов и ингибиторов.

Цель работы: разработка аналитических и численных методов исследования вырожденных математических моделей автокаталитической реакции с диффузией и распространения нервного импульса в мембранной оболочке с реализацией алгоритмов в виде программных комплексов для проведения вычислительных экспериментов по оцениванию состояний исследуемых систем.

Задачи:

1. Разработать аналитический метод и провести исследование вырожденных математических моделей автокаталитической реакции с диффузией и распространения нервного импульса в мембранной оболочке.

2. Разработать численный метод нахождения решений вырожденных математических моделей автокаталитической реакции с диффузией и распространения нервного импульса в мембранной оболочке.

3. Разработать программное обеспечение и провести вычислительные эксперименты, иллюстрирующие феномен неединственности решений вырожденных математических моделей автокаталитической реакции с диффузией и распространения нервного импульса в мембранной оболочке, для оценки состояний исследуемых систем.

4. Разработать аналитический метод и провести исследование вырожденной многокомпонентной математической модели оптимального регулирования процесса распространения нервного импульса в мембранной оболочке как задачи оптимального управления.

5. Разработать алгоритм численного метода нахождения управления решениями вырожденной многокомпонентной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке.

6. Разработать программное обеспечение, позволяющее провести вычислительные эксперименты для вырожденной многокомпонентной математической модели оптимального регулирования процесса распространения нервного импульса в мембранной оболочке, для оценки состояний исследуемых систем.

Научная новизна

В области математического моделирования.

Исследованы вырожденные математические модели автокаталитической реакции с диффузией и распространения нервного импульса в мембранной оболочке, фазовые пространства которых имеют особенности – складку и сборку Уитни, соответственно; установлена связь между наличием особенностей фазового пространства и неединственностью или несуществованием решений. Впервые найдены условия на начальные данные и параметры моделей, при которых задача имеет одно или несколько решений.

В области численных методов.

Разработан и применен численный метод нахождения решений вырожденных математических моделей автокаталитической реакции с диффузией и распространения нервного импульса в мембранной оболочке для оценки состояний исследуемых систем.

В области комплексов программ.

Разработаны программные комплексы и проведены вычислительные эксперименты для исследуемых моделей с использованием методов параллельных вычислений в процедуре поиска нескольких решений.

В области системного анализа, управления и обработки информации.

Разработан аналитический метод и проведено исследование вырожденной многокомпонентной математической модели оптимального регулирования процесса распространения нервного импульса в мембранной оболочке как задачи оптимального управления; разработан алгоритм численного метода нахождения управления решений вырожденной многокомпонентной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке; разработано программное обеспечение и проведены вычислительные эксперименты для вырожденной многокомпонентной математической модели оптимального регулирования процесса распространения нервного импульса в мембранной оболочке.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертационного исследования носят теоретический и практический характер. В рамках теоретической значимости впервые решена задача поиска условий неединственности решений вырожденных моделей типа реакции-диффузии, задача поиска оптимального управляющего воздействия на систему с применением современного математического аппарата. Полученные результаты развивают теории полулинейных уравнений соболевского типа и оптимального управления. В рамках практической значимости разработаны и реализованы численные методы нахождения решений вырожденных математических моделей автокаталитической реакции с диффузией и распространения нервного импульса в мембранной оболочке, позволяющие применять распараллеливание вычислений, что создает основу для моделирования в кинетической химии и биофизике. Представленные результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют об адекватности проведенного математического моделирования и эффективности построенного численного метода решения поставленных задач для дальнейшего развития исследований моделей типа реакции-диффузии.

Методология и методы диссертационного исследования. Основным методом, использованным в данной работе, является метод фазового пространства, разработанный Г.А. Свиридюком. Кроме того, широко используются, во-первых, метод компактности; во-вторых, теорема о неявной функции, теорема Вишика – Минти – Браудера, теоремы вложения Соболева, теорема о разрешимости задачи Коши для невырожденного дифференциального уравнения [24]. В данном исследовании существенно используются результаты теории s -монотонных и p -коэрцитивных операторов, разработанной Г.А. Свиридюком [41] и используемой в работах его учеников. Для численного исследования рассмотренных задач используется метод Галеркина – Петрова и Ритца [9, 14, 30, 56]. При помощи метода Галеркина – Петрова строятся приближенные решения, коэффициенты которых удовлетворяют системе алгебро-дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями. Существование решений начальной задачи для системы алгебро-дифференциальных уравнений доказывается с помощью метода фазового пространства и теоремы существования решения для сингулярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений [39]. Для того чтобы

использовать один из наиболее часто применяемых подходов: уравнение состояния понимается как средство для явного задания зависимости функции состояния системы от управления, применим метод декомпозиции. Метод декомпозиции позволяет переходить к рассмотрению эквивалентной задаче, в которой исходное уравнение состояния редуцируется к системе линейных относительно x уравнений [26]. Далее применяются известные методы минимизации функционалов на заданном множестве допустимых управлений.

Положения, выносимые на защиту

В рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п. 2 паспорта специальности 05.13.18) получены:

1. Аналитический метод исследования вырожденной математической модели автокаталитической реакции с диффузией в кювете или трубчатом реакторе.
2. Аналитический метод исследования вырожденной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке нерва или системы нервов.

В рамках разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (п. 3 паспорта специальности 05.13.18) получены:

3. Алгоритм численного метода нахождения множества приближенных решений вырожденных математических моделей распространения нервного импульса в мембранной оболочке и автокаталитической реакции с диффузией.

В рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов (п. 4 паспорта специальности 05.13.18) получены:

4. Комплекс программ для ЭВМ, реализующий алгоритм нахождения приближенных решений вырожденной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке.
5. Комплекс программ для ЭВМ, реализующий алгоритм нахождения приближенных решений вырожденной математической модели автокаталитической реакции с диффузией.

В рамках разработки методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки инфор-

мации (п. 4 паспорта специальности 05.13.01) получены:

6. Аналитический метод исследования задачи оптимального управления для многокомпонентной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке нерва или системы нервов.

7. Алгоритм численного метода нахождения управления решениями вырожденной многокомпонентной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке для оценки состояний исследуемых систем.

8. Комплекс программ для ЭВМ, реализующий алгоритм нахождения приближенных решений задачи оптимального управления для вырожденной многокомпонентной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность научных результатов и выводов обеспечены корректным использованием методов математического моделирования, системного анализа, полученные результаты подтверждаются строгими математическими доказательствами, согласованием результатов вычислительных экспериментов с теоретическими положениями. Все результаты представлены и апробированы на научных конференциях и семинарах. Результаты и выводы не противоречат ранее полученным результатам других авторов. Все результаты, выносимые на защиту, опубликованы.

Результаты диссертации были представлены на «Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа-2019»» [100], «XIII Всероссийском совещании по проблемам управления ВСПУ-2019» [101], «XIV Всероссийской школе конференции молодых ученых-2017» [102], «Обозрении прикладной и промышленной математики-2017» [103], «Математические методы в технике и технологиях-2016» [103], «XII Всероссийской школе конференции молодых ученых-2015» [104], «Южно-Уральской молодежной школе по математическому моделированию-2015» [105]. Результаты докладывались на семинарах «Уравнения соболевского типа» профессора Г.А. Свиридюка в Южно-Уральском государственном университете (г. Челябинск).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 16 печатных работах, из них шесть статей [91–96] – в рецензируемых журналах из перечня ВАК, в том числе, две статьи – в рецензируемом издании из наукометриче-

ских баз Scopus и Web of Science; одна зарегистрированная компьютерная программа [97] и один программный комплекс [98]; девять статей [99–105] – в других изданиях РИНЦ, в том числе, две статьи [99, 100] в трудах конференций Scopus.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают личный вклад автора в опубликованные работы. Все результаты, представленные в диссертации и опубликованные в работах с соавторами получены лично автором.

Краткое содержание диссертации Диссертационная работа, помимо введения, заключения и списка литературы, содержит три главы. Список литературы содержит 106 наименований.

Первая глава состоит из семи параграфов и посвящена вопросам существования, единственности или неединственности решения задачи Шоултера – Сидорова для вырожденной математической модели автокаталитической реакции с диффузией. Первый параграф содержит формулировки теорем и определений, которые используются для получения основных результатов диссертации и на защиту не выносятся. Во втором параграфе рассмотрена математическая модель автокаталитической реакции с диффузией в случае $\varepsilon_1 = 0$, доказана L -секториальность оператора M и бесконечная дифференцируемость оператора N . В третьем параграфе доказывается теорема о том, что задача Шоултера – Сидорова для (0.0.1) с условием Дирихле в случае $\varepsilon_1 = 0$ имеет ровно одно, два различных и ни одного решения. В четвертом параграфе рассмотрена математическая модель автокаталитической реакции с диффузией в случае $\varepsilon_2 = 0$, доказана L -секториальность оператора M и теорема о том, что задача Шоултера – Сидорова для (0.0.1) с условием Дирихле в случае $\varepsilon_2 = 0$ имеет ровно одно решение, построено фазовое пространство для случая $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. В пятом параграфе рассмотрена модель автокаталитической реакции с диффузией в трубчатом реакторе в случае $\varepsilon_1 = 0$ или $\varepsilon_2 = 0$, найдены условия существования одного, двух или несуществования решений на графе \mathbf{G} . В шестом параграфе содержится описание алгоритма численного метода нахождения решения задачи Шоултера – Сидорова и описание комплекса программ на ЭВМ, разработанного в вычислительной среде Maple 2017. Седьмой параграф содержит результаты вычислительных экспериментов на области Ω (рассмотрен случай отрезка, прямоугольника)

и на связном ориентированном графе \mathbf{G} для оценки состояний исследуемых систем.

Вторая глава состоит из семи параграфов и посвящена вопросам существования, единственности и неединственности решения задачи Шоултера – Сидорова для вырожденной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке. В первом параграфе рассмотрена математическая модель распространения нервного импульса в мембранной оболочке в случае $\varepsilon_1 = 0$, доказана теорема о том, что задача Шоултера – Сидорова для (0.0.8) с условием Дирихле в случае $\varepsilon_1 = 0$ имеет единственное решение. Во втором параграфе рассмотрена математическая модель распространения нервного импульса в мембранной оболочке в случае $\varepsilon_2 = 0$ и найдены условия существования единственного решения. В третьем параграфе найдены условия при которых задача Шоултера – Сидорова для (0.0.8) с условием Дирихле в случае $\varepsilon_2 = 0$ имеет одно или три различных решения. В четвертом параграфе рассмотрена модель распространения нервного импульса в мембранной оболочке системы нервов в случае $\varepsilon_1 = 0$ или $\varepsilon_2 = 0$, найдены условия существования одного или трех решений. В пятом параграфе содержится описание алгоритма численного метода нахождения решения задачи Шоултера – Сидорова. В шестом параграфе описан комплекс программ на ЭВМ, разработанный в вычислительной среде Maple 2017. Седьмой параграф содержит результаты вычислительных экспериментов на области Ω и на связном ориентированном графа \mathbf{G} .

Третья глава состоит из шести параграфов и содержит результаты аналитического и численного исследований многокомпонентной математической модели оптимального регулирования распространением нервного импульса в мембранной оболочке. В первом параграфе проводится построение математической модели процесса возбуждения нервного импульса в мембранной оболочке. Второй параграф содержит аналитическое исследование задачи оптимального управления для модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке. Доказываются теоремы об однозначной разрешимости в слабом обобщенном смысле задачи Шоултера – Сидорова для этой модели, существования решения задачи оптимального управления. В третьем параграфе строится алгоритм нахождения управления решениями задачи Шоултера – Сидорова для вырожденной многокомпонентной математической

модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке, доказываются теоремы о существовании решения задачи оптимального управления и эквивалентной задачи оптимального управления с линейным уравнением и тремя искомыми функциями (x, y, u) . Четвертый параграф содержит аналитическое исследование задачи оптимального управления для модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке системы нервов. Пятый параграф посвящен описанию алгоритма программы для численного исследования математической модели и содержит описание комплекса программ на ЭВМ, разработанного в вычислительной среде Maple 2017. Шестой параграф содержит результаты вычислительных экспериментов на области Ω и на связном ориентированном графе G .

Благодарности

Автор считает приятным долгом выразить благодарность своему научному руководителю, Наталье Александровне Манаковой, за участие и неоценимую помощь в подготовке работы; профессору Георгию Анатольевичу Свиридюку за ценные советы и предоставленную возможность прикоснуться к науке; профессору Алене Александровне Замышляевой и профессору Софье Александровне Загребинной за помощь в подготовке работы; коллективу кафедры уравнений математической физики за конструктивную, доброжелательную критику; своей семье за веру, терпение и время.

Глава 1. Методы и алгоритмы анализа однозначной разрешимости математических моделей автокаталической реакции с диффузией

Процесс протекания химической реакции Белоусова – Жаботинского напоминает работу химического маятника. Если взять $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3$, KBrO_3 , $\text{CH}_2(\text{COOH})_2$ и H_2SO_4 тщательно перемешать вместе с небольшим количеством окислительно-восстановительного индикатора и поддерживать температуру постоянной и равной 21°C , то в процессе реакции цвет будет периодически меняться, переходя из красного, соответствующего избытку Ce^{3+} , в синий, свидетельствующий об избытке Ce^{4+} , то есть в процессе химической реакции Белоусова – Жаботинского возникают пространственно-временные колебания. При исследовании механизма этих химических реакций, были получены математические модели, одной из которых является модель автокаталической реакции с диффузией:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 v_t = \alpha_1 \Delta v + \beta_1 - (\beta_2 + 1)v + v^2 w, \\ \varepsilon_2 w_t = \alpha_2 \Delta w + \beta_2 v - v^2 w. \end{cases} \quad (1.0.1)$$

Здесь $v = v(s, t)$ и $w = w(s, t)$ – функции, характеризующие концентрации реагентов, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ – параметры системы.

Система уравнений (1.0.1), получившая от исследователей название «распределенного» брюсселятора, исследовалась в различных аспектах, причем во многих работах наряду со случаем $\varepsilon_1 > 0$ или $\varepsilon_2 > 0$ обсуждается и случай $\varepsilon_1 = 0$ или $\varepsilon_2 = 0$ [6, 86]. Необходимость изучения этих случаев связана с тем, что скорость изменения одной из компонент значительно превосходит другую, что характерно для всех моделей реакции-диффузии. В диссертационной работе проведено исследование однозначной разрешимости (1.0.1) с краевым условием Дирихле в случае когда $\varepsilon_1 = 0$ или (и) $\varepsilon_2 = 0$.

1.1. Вспомогательные сведения функционального анализа, необходимые для исследования рассматриваемых моделей

В данном параграфе 1.1 приводятся определения и утверждения, которые используются в доказательствах основных результатов диссертации и на защиту не выносятся. Сведения взяты из различных открытых источников и относятся к теориям уравнений математической физики, соболевского типа и классическому функциональному анализу. Данные сведения будут в дальнейшем использованы для вывода, обобщения и доказательства полученных автором лемм и теорем. Сведения о секториальных операторах и их приложениях взяты из классической работы [55], об относительно секториальных операторах и фазовых многообразиях – из уже ставшей классической монографии [85] и работы, открывшей направление исследований фазовых пространств для нелинейных уравнений соболевского типа [14], о теории монотонных операторов – из монографии [13].

Определение 1.1.1. [55] *Оператор $\Lambda \in Cl(\mathfrak{X})$, где \mathfrak{X} – банахово пространство, называется секториальным оператором, если $\forall \theta \in \rho(\Lambda), \exists r \in \mathbb{R}, \exists \kappa \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \exists K \in \mathbb{R}_+$, что выполнено*

$$S_{r,\kappa}(\Lambda) = \{\theta \in \mathbb{C} : |\arg(\theta - r)| < \kappa, \theta \neq r\} \subset \rho(\Lambda),$$

$$\|(\theta\mathbb{I} - \Lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leq \frac{K}{|\theta - r|}.$$

Зафиксируем число $\alpha > 0$ и в предположении, что спектр оператора Λ удовлетворяет условию $\operatorname{Re} \sigma(\Lambda) < 0$, определим оператор

$$\Lambda^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-\Lambda t} dt, \quad (1.1.1)$$

обозначим через Λ^α оператор, обратный к $\Lambda^{-\alpha}$, $\operatorname{dom} \Lambda^\alpha = \operatorname{im} \Lambda^{-\alpha}$, $\Lambda^0 = \mathbb{I}$. Далее, для каждого $\alpha \geq 0$ положим $\mathfrak{X}^\alpha = \operatorname{dom} \Lambda^\alpha$ и наделим пространство \mathfrak{X}^α нормой графика $\|x\|_\alpha = \|\Lambda^\alpha x\|$, $x \in \mathfrak{X}^\alpha$.

Зададим число $\gamma \in \mathbb{R}_+$ так, чтобы $\operatorname{Re} \sigma(\gamma\mathbb{I} - \mathcal{E}) < 0$ для секториального оператора $\mathcal{E} \in Cl(\mathfrak{X})$. Построим интерполяционное пространство \mathfrak{X}^α , $\alpha \geq 0$, где в качестве оператора Λ возьмем оператор $\Lambda = \gamma\mathbb{I} - \mathcal{E}$. Отметим, что в построенном пространстве все нормы $\|\cdot\|_\alpha$ при фиксированной константе α

и различных γ эквивалентны [55]. Зададим оператор $\mathcal{F} \in C^k(\mathfrak{X}^\alpha; \mathfrak{X})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\alpha \geq 0$. Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\dot{x} = \mathcal{E}x + \mathcal{F}(x). \quad (1.1.2)$$

Теорема 1.1.1. [55] Пусть $\mathcal{E} \in Cl(\mathfrak{X})$ является секториальным оператором и при некотором значении $\alpha \in [0, 1)$ оператор \mathcal{F} гладкий оператор класса $C^k(\mathfrak{X}^\alpha; \mathfrak{X})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Тогда для любого начального значения $x_0 \in \mathfrak{X}^\alpha$ найдется такое $\tau = \tau(x_0) \in \mathbb{R}_+$, что существует и притом единственное решение задачи (1.1.2) с начальным условием Коши.

Теорема 1.1.2. [55] Пусть $\Lambda \in Cl(L_p(\Omega))$ секториальный оператор и его область определения $\text{dom } \Lambda \subset W_p^l(\Omega)$, $p \in [1, +\infty)$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда если $\alpha \in [0, 1)$ и $q \in [p, +\infty)$ удовлетворяют условиям $0 \leq k - \frac{n}{q} < l\alpha - \frac{n}{p}$, то имеет место непрерывное вложение $\mathfrak{X}^\alpha \hookrightarrow W_q^k(\Omega)$.

Рассмотрим операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, $M \in Cl(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $N \in C^k(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ в банаховых пространствах \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} .

Определение 1.1.2. [85] Оператор M будем называть L -секториальным, если $\exists r \in \mathbb{R}$, $\exists \kappa \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\forall \theta \in S_{r, \kappa}^L(M)$, и $\exists K \in \mathbb{R}_+$ что выполняется

$$S_{r, \kappa}^L(M) = \{\theta \in \mathbb{C} : |\arg(\theta - r)| < \kappa, \theta \neq r\} \subset \rho^L(M);$$

$$\max\{\|R_\theta^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}, \|L_\theta^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y})}\} \leq \frac{K}{|\theta - r|}.$$

Здесь через $R_\theta^L(M) = (\theta L - M)^{-1}L$ обозначена правая L -резольвента, $L_\theta^L(M) = L(\theta L - M)^{-1}$ обозначена левая L -резольвента оператора M относительно оператора L .

Положим $\mathfrak{X}^0 = \ker X^\bullet$, $\mathfrak{Y}^0 = \ker Y^\bullet$, $\mathfrak{X}^1 = \text{im } X^\bullet$, $\mathfrak{Y}^1 = \text{im } Y^\bullet$, где X^\bullet, Y^\bullet – аналитические разрешающие полугруппы уравнения $L\dot{x} = Mx$, отождествленные со своим графиком $\{X^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\{Y^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $X^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\theta^L(M) e^{\theta t} d\theta$, $Y^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma L_\theta^L(M) e^{\theta t} d\theta$, контур $\Gamma = \{\theta \in \mathbb{C} : |\arg(\theta - q)| = \kappa \text{ при некотором } q > r\}$. При этом $\mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1 \subset \mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1 \subset \mathfrak{Y}$. Нам также понадобится условие

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1 &= \mathfrak{X}, \\ \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1 &= \mathfrak{Y}. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Обозначим через L_0 сужение оператора L на \mathfrak{X}^0 и через L_1 сужение оператора L на \mathfrak{X}^1 . Аналогичным образом построим и M_0, M_1 как сужение оператора M на $\mathfrak{X}^0 \cap \text{dom } M$ и $\mathfrak{X}^1 \cap \text{dom } M$.

Теорема 1.1.3. [85] *В случае если оператор M L -секториален и выполнено (1.1.3), то существуют операторы $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^0; \mathfrak{Y}^0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1; \mathfrak{Y}^1)$, $M_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^0; \mathfrak{Y}^0)$, $M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}^0; \mathfrak{Y}^0)$, $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1)$.*

Нам также понадобится условие

$$\text{оператор } L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1). \quad (1.1.4)$$

Если же выполнены одновременно оба условия (1.1.3), (1.1.4), то $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^0)$, $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}^1)$.

Теорема 1.1.4. [85] *Если оператор M L -секториален и выполнены условия (1.1.3), (1.1.4), то $\mathfrak{X}^0 = \ker L$, оператор S секториален, а оператор $H = \mathbb{O}$.*

Для построения пространства X^α будем брать $\mathcal{E} = S$. Построим пространства $\mathfrak{X}_1^0 = \mathfrak{X}^0 \cap \text{dom } M$ и $\mathfrak{X}_\alpha = \mathfrak{X}_1^0 \oplus \mathfrak{X}^\alpha$. Зафиксируем такое значение константы $\alpha \in [0, 1)$, что оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{X}_\alpha; \mathfrak{Y})$. Пусть в дальнейшем выполнены условия (1.1.3), (1.1.4), тогда уравнение (0.0.19) эквивалентно системе уравнений

$$H \dot{x}^0 = x^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N(x), \quad (1.1.5)$$

$$\dot{x}^1 = Sx^1 + L_1^{-1}QN(x), \quad (1.1.6)$$

так как в силу теоремы 1.1.3 действия операторов расщепляются, а также в условиях теоремы 1.1.3 существуют проекторы $Q : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Y}^1$ вдоль \mathfrak{Y}^0 , $P : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^1$ вдоль \mathfrak{X}^0 и $x^1 = Px$, $x^0 = x - x^1$.

Определение 1.1.3. *Вектор-функцию x класса гладкости $C^1((0, \tau); \mathfrak{X}) \cap C((0, \tau); \mathfrak{X}_\alpha)$, которая удовлетворяет (0.0.19), будем называть решением уравнения. Каждое решение $x = x(t)$ (0.0.19), которое в дополнении удовлетворяет условию $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|L(x(t) - x_0)\|_{\mathfrak{X}_\alpha} = 0$, будем называть решением задачи (0.0.19), (0.0.20).*

Из (1.1.5) и теоремы 1.1.4 следует, что решения уравнения (0.0.19) поточечно принадлежат множеству

$$\mathfrak{P} = \{x \in \mathfrak{X}_\alpha : (\mathbb{I} - Q)(Mx + N(x)) = 0\}. \quad (1.1.7)$$

Замечание 1.1.1. По теореме 1.1.4 оператор $H = \mathbb{O}$, поэтому все решения уравнения (0.0.19) будут являться квазистационарными полутраекториями, а все квазистационарные полутраектории по определению являются решениями и лежат во множестве \mathfrak{F} при любом $t \in (0; \tau)$. (Определение квазистационарной полутраектории для уравнений вида (0.0.19) можно найти в работе [42]).

В предположении, что множество

$$\mathfrak{F} \neq \emptyset \quad (1.1.8)$$

дадим следующее определение.

Определение 1.1.4. Если для точки x найдется окрестность $\mathcal{O} \subset \mathfrak{F}$, а для точки $x^1 = Px \in \mathfrak{X}^\alpha$, $\alpha \in [0; 1)$, найдется окрестность $\mathcal{O}^1 \subset \mathfrak{X}^\alpha$ и существует оператор $D \in C^\infty(\mathcal{O}^1; \mathcal{O})$ такой, что D^{-1} есть сужение проектора P на \mathcal{O} , то множество \mathfrak{F} будем называть банаховым C^∞ -многообразием в точке x . Банахово многообразие будем называть простым, если в каждой своей точке оно является многообразием и оператор D^{-1} является биекцией.

Определение 1.1.5. Фазовым пространством уравнения (0.0.19) будем называть множество $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{X}_\alpha$ для которого выполнено

(i) каждое решение $x = x(t)$ уравнения (0.0.19) лежит во множестве \mathfrak{F} при $t \in (0; \tau)$;

(ii) для любого $x_0 \in \mathfrak{F}$ найдется и притом единственно решение уравнения (0.0.19) с условием

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} [x(t) - x_0] = 0. \quad (1.1.9)$$

Теорема 1.1.5. [14] Для любого $x_0 \in \mathfrak{X}_\alpha$ существует и притом единственно решение $x = x(t)$ задачи (0.0.19), (0.0.20) в случае выполнения условий теоремы 1.1.4 и если фазовое пространство (0.0.19) \mathfrak{F} является простым банаховым C^∞ -многообразием.

Определение 1.1.6. Если справедливо $\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} \frac{\langle C(y), y \rangle}{\|y\|} = +\infty$, то оператор $C : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ будем называть коэрцитивным.

Определение 1.1.7. Если для всех $x, y \in \mathfrak{X}$ функция $\sigma \rightarrow \langle C(x + \sigma y), y \rangle$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, то оператор $C : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ будем называть радикально непрерывным.

Определение 1.1.8. Если для всех $x, y \in \mathfrak{X}$ выполняется $\langle C(x) - C(y), x - y \rangle > 0$ в случае $x \neq y$, то оператор $C : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ будем называть *строго монотонным*.

Определение 1.1.9. Если для всех $x, y \in \mathfrak{X}$ выполняется $\langle C'_y x, x \rangle > 0$ $x, y \neq 0$, то оператор C класса $C^r(\mathfrak{X}; \mathfrak{X}^*)$, $r \geq 1$, будем называть *s-монотонным*.

Определение 1.1.10. Если существуют константы $C^B, C_B > 0$, $p \geq 2$, такие, что для любых x из банахова пространства \mathfrak{X} выполняется $\langle B(x), x \rangle \geq C_B \|x\|^p$ и $\|B(x)\|_* \leq C^B \|x\|^{p-1}$, то оператор $B : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ называется *p-коэрцитивным*.

Теорема 1.1.6. [13] *В случае если оператор $C : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ является радиально непрерывным и строго монотонным, а также коэрцитивным оператором, то существует и притом единственно решение $x \in \mathfrak{X}$ уравнения $C(x) = y$ для всех $y \in \mathfrak{X}^*$.*

Замечание 1.1.2. *Теорему 1.1.6 принято называть теоремой Вишика – Минти – Браудера.*

1.2. Математическая модель автокаталической реакции с диффузией в случае $\varepsilon_1 = 0$

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим вырожденную систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \Delta v + \beta_1 - (\beta_2 + 1)v + v^2 w, \\ w_t = \alpha_2 \Delta w + \beta_2 v - v^2 w \end{cases} \quad (1.2.1)$$

с краевым условием

$$v(s, t) = 0, w(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (1.2.2)$$

и начальным условием

$$w(0) = w_0. \quad (1.2.3)$$

Для простоты изложения разобьем редукцию задачи (1.2.1), (1.2.2) к уравнению (0.0.19) в три этапа.

Этап 1. Возьмем банахово пространство $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, гильбертово пространство $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, скалярное произведение которого определим как $[x, \zeta] = \langle v, \xi \rangle + \langle w, \eta \rangle$, где $x = (v, w)$, $\zeta = (\xi, \eta)$,

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ есть скалярное произведение заданное на пространстве $L_2(\Omega)$. Обозначим через \mathfrak{Y} пространство сопряженное к \mathfrak{H} относительно двойственности $[\cdot, \cdot]$. Для пространств $\mathfrak{H}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ справедливо

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{Y}, \quad (1.2.4)$$

где все вложения плотны и непрерывны [51].

Этап 2. Определим линейные операторы $L, M : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ формулами

$$[Lx, \zeta] = \langle w, \xi \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{X}, \quad (1.2.5)$$

$$[Mx, \zeta] = -\alpha_1 \langle v_{s_i}, \xi_{s_i} \rangle - \alpha_2 \langle w_{s_i}, \eta_{s_i} \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{X}, \quad \text{где } \text{dom } M = \mathfrak{H}. \quad (1.2.6)$$

В силу задания операторы L, M обладают свойствами $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$.

Замечание 1.2.1. Заметим, что здесь и далее выполняется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам.

Лемма 1.2.1. Для всех фиксированных значений параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M будет L -секториальным, при этом условия (1.1.3) и (1.1.4) будут выполнены.

Доказательство. Следуя логике рассуждения пункта 1.1, построим относительные L -резольвенты оператора M

$$\begin{aligned} [R_\theta^L(M)x, \zeta] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle w, \varphi_k \rangle \langle \eta, \varphi_k \rangle}{\theta - \nu_k}, \\ [L_\theta^L(M)x, \zeta] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle v, \varphi_k \rangle \langle \eta, \varphi_k \rangle}{-\nu_k}, \end{aligned}$$

где φ_k есть ортонормированные собственные функции (относительно $L_2(\Omega)$), соответствующие собственным значениям ν_k , спектральной задачи:

$$\begin{aligned} -\Delta \varphi &= \nu \varphi, \quad s \in \Omega, \\ \varphi(s) &= 0, \quad s \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Поскольку

$$\|R_\theta^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} = \sup_{\|x\|_{\mathfrak{X}} \neq 0} \frac{[R_\theta^L(M)x, x]}{\|x\|_{\mathfrak{X}}^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\theta - \nu_k} < +\infty,$$

$$\|L_\theta^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} = \sup_{\|x\|_{\mathfrak{X}} \neq 0} \frac{[L_\theta^L(M)x, x]}{\|x\|_{\mathfrak{X}}^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_k} < +\infty,$$

то L -секториальность оператора M следует непосредственно из определения 1.1.2.

Учитывая, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2$, положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^0 &= \ker L = \mathfrak{X}_1 \times \{0\}, \\ \mathfrak{X}^1 &= \{0\} \times \mathfrak{X}_2, \\ \mathfrak{Y}^1 &= \operatorname{im} L = \{0\} \times \mathfrak{Y}_2, \\ \mathfrak{Y}^0 &= M[\mathfrak{X}^0 \cap \operatorname{dom} M] = \mathfrak{Y}_1 \times \{0\}, \end{aligned}$$

тогда выполняется условие (1.1.3). Зададим L_1 как сужение оператора L на \mathfrak{X}^1 , тогда $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1)$ и выполнено (1.1.4). \square

Этап 3. Зададим нелинейный оператор формулой

$$[N(x), \zeta] = \langle \beta_1 - (\beta_2 + 1)v + v^2w, \xi \rangle + \langle \beta_2v - v^2w, \eta \rangle \quad (1.2.8)$$

и положим $\operatorname{dom} N = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 = L_4(\Omega) \times L_4(\Omega)$, $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}_1^* \times \mathfrak{B}_2^* = L_{\frac{4}{3}}(\Omega) \times L_{\frac{4}{3}}(\Omega)$ пространство сопряженное к \mathfrak{B} относительно двойственности $[\cdot, \cdot]$. Для пространств $\mathfrak{H}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*$ при $n \leq 4$ справедливо

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{B}^* \hookrightarrow \mathfrak{Y}, \quad (1.2.9)$$

где все вложения плотны и непрерывны [51].

Лемма 1.2.2. *Для всех фиксированных значений параметров $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, оператор $N : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{Y}$ принадлежит классу C^∞ .*

Доказательство. Для доказательства утверждения леммы покажем, что оператор N действует из пространства \mathfrak{B} в пространство \mathfrak{Y} для этого рассмотрим

$$|[N(x), \zeta]| \leq (a_1 + a_2\|x\|_{\mathfrak{B}} + a_3\|x\|_{\mathfrak{B}}^3) \cdot \|\zeta\|_{\mathfrak{B}}.$$

Через N'_x будем обозначать производную Фреше N в точке x . Принадлежность оператора N заданному классу получается из следующих оценок:

$$\begin{aligned} |[N'_x \zeta_1, \zeta_2]| &\leq (b_1 + b_2\|x\|_{\mathfrak{B}}^2) \cdot \|\zeta_1\|_{\mathfrak{B}} \cdot \|\zeta_2\|_{\mathfrak{B}}, \\ |[N''_x \zeta_1 \zeta_2, \zeta_3]| &\leq c\|x\|_{\mathfrak{B}} \cdot \|\zeta_1\|_{\mathfrak{B}} \cdot \|\zeta_2\|_{\mathfrak{B}} \cdot \|\zeta_3\|_{\mathfrak{B}}, \\ |[N'''_x \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3, \zeta_4]| &\leq d \cdot \|\zeta_1\|_{\mathfrak{B}} \cdot \|\zeta_2\|_{\mathfrak{B}} \cdot \|\zeta_3\|_{\mathfrak{B}} \cdot \|\zeta_4\|_{\mathfrak{B}}, \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

которые справедливы в силу применения неравенства Гельдера, а также неравенств справедливых в силу непрерывности вложений (1.2.9). Здесь постоянные $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c, d \in \mathbb{R}_+$ зависят только от значений параметров $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ оператора N и области Ω . Остальные производные оператора N являются тождественными операторами.

Включение $N \in C^\infty(\mathfrak{B}; \mathfrak{Y})$ доказано. Утверждение теоремы имеет место в силу непрерывного вложения $\mathfrak{B}^* \hookrightarrow \mathfrak{Y}$ пространств. \square

Построим пространство $\mathfrak{X}_\alpha = \mathfrak{X}_1^0 \oplus \mathfrak{X}_\alpha^1$, где $\mathfrak{X}_\alpha^1 = \{0\} \times \mathfrak{X}^\alpha$, $\mathfrak{X}_1^0 = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \times \{0\}$, $\mathfrak{X}^\alpha = L_4(\Omega)$. Тогда для пространств $\mathfrak{H}, \mathfrak{X}_\alpha, \mathfrak{B}, \mathfrak{X}$ при $n \leq 4$ справедливо $\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{X}_\alpha \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{X}$, где все вложения плотны и непрерывны [51]. В силу свойств оператора N и полученных вложений справедливо $N \in C^\infty(\mathfrak{X}_\alpha; \mathfrak{Y})$. Итак, мы редуцировали задачу (1.2.1), (1.2.2) к полулинейному уравнению соболевского типа (0.0.19). Далее, используя метод фазового пространства, исследуем вопрос однозначной разрешимости (1.2.1) – (1.2.3).

1.3. Исследование неединственности решения задачи Шоултера – Сидорова в случае $\varepsilon_1 = 0$

Нас будет интересовать разрешимость задачи (1.2.1) – (1.2.3) для всех $x_0 = (v_0, w_0) \in \mathfrak{X}_\alpha$.

Определение 1.3.1. *Если существуют функции g_0, g_1, \dots, g_k , принадлежащие классу $C^\infty(\mathfrak{B}'; \mathbb{R})$, такие, что уравнение $G(s, v) = 0$ эквивалентно уравнению*

$$0 = g_0(v) + g_1(v)s + \dots + g_k(v)s^k + s^{k+1} \quad \forall v \in \mathfrak{B}',$$

где \mathfrak{B} есть банахово пространство, а функция G класса $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathfrak{B}; \mathbb{R})$, то будем говорить, что уравнение $G(s, v) = 0$ определяет k -сборку Уитни над открытым множеством $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$.

Как было показано в пункте 1.1, в нашем случае все решения уравнения (0.0.19) лежат поточечно во множестве \mathfrak{P} (1.1.7), которое примет вид

$$\mathfrak{P}_{\varepsilon_1} = \{x \in \mathfrak{X}_\alpha : \langle \alpha_1 v_{s_i}, \xi_{s_i} \rangle = \langle \beta_1 - (\beta_2 + 1)v + v^2 w, \xi \rangle\}. \quad (1.3.1)$$

Возьмем произвольную точку $x = (v, w) \in \mathfrak{X}_\alpha$, в силу теоремы 1.1.3 представим x в виде $x = (v^\perp + r\varphi_k, w^\perp)$, где $x^\perp = (v^\perp, w^\perp) \in \mathfrak{X}_\alpha^\perp$, $v^\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp$,

$w^\perp \in (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$, $\mathfrak{H}_1^\perp = \{v \in \mathfrak{H}_1 : \langle v^\perp, \varphi_k \rangle = 0\}$, $(\mathfrak{X}^\alpha)^\perp = \{w^\perp \in \mathfrak{X}^\alpha : \langle w^\perp, \varphi_k \rangle = 0\}$.
В данном случае множество (1.3.1) $\mathfrak{P}_{\varepsilon_1}$ определяется системой из двух уравнений

$$\mathfrak{P}_{\varepsilon_1} = \left\{ x \in \mathfrak{X}_\alpha : \left\{ \begin{array}{l} \langle \alpha_1 v_{s_i}^\perp, \xi_{s_i}^\perp \rangle = \langle \beta_1 - (\beta_2 + 1)v^\perp, \xi^\perp \rangle + \\ \quad + (v^\perp + r\varphi_k)^2 w^\perp, \xi^\perp \rangle, \\ -\langle \beta_1, \varphi_k \rangle = \langle (v^\perp + r\varphi_k)^2 w^\perp, \varphi_k \rangle \end{array} \right. \right\}. \quad (1.3.2)$$

Для того, чтобы получить первое уравнение системы (1.3.2) вместо ξ в (1.3.1) необходимо подставить $\xi = \xi^\perp$, а затем для получения второго уравнения (1.3.2) вместо ξ в (1.3.1) необходимо подставить $\xi = \varphi_k$.

Замечание 1.3.1. *Здесь и далее будем рассматривать только такие собственные функции φ_k спектральной задачи (1.2.7), которые соответствуют однократным собственным значениям ν_k , т.е. таким, для которых выполняется условие*

$$\dim \ker(\nu \mathbb{I} + \Delta) = 1. \quad (1.3.3)$$

Перейдем ко второму уравнению системы, определяющей множество (1.3.2). Преобразуя получившиеся уравнение, получим:

$$r^2 \int_{\Omega} w^\perp \varphi_k^3 ds + 2r \int_{\Omega} (v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k^2 ds + \int_{\Omega} (v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k ds + \int_{\Omega} \beta_1 \varphi_k ds = 0. \quad (1.3.4)$$

Заметим, что уравнение (1.3.4) является квадратным уравнением типа $ar^2 + br + c = 0$ относительно r , где

$$a = \int_{\Omega} w^\perp \varphi_k^3 ds, \quad b = 2 \int_{\Omega} (v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k^2 ds, \quad c = \int_{\Omega} (v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k ds + \int_{\Omega} \beta_1 \varphi_k ds.$$

Введем функционал $\mathfrak{Res}(v^\perp) : \mathfrak{H}_1^\perp \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$\begin{aligned} \mathfrak{Res}(v^\perp) = & 4 \left(\int_{\Omega} (v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k^2 ds \right)^2 - 4 \cdot \int_{\Omega} w^\perp \varphi_k^3 ds \cdot \\ & \cdot \left(\int_{\Omega} (v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k ds + \int_{\Omega} \beta_1 \varphi_k ds \right) \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

и рассмотрим множество

$$(\mathfrak{H}_1^\perp)_+ = \{v^\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp : \mathfrak{Res}(v^\perp) > 0\}.$$

Для любого v^\perp принадлежащего множеству $(\mathfrak{H}_1^\perp)_+$ уравнение (1.3.4) будет иметь равно два различных решения вида

$$\begin{aligned} r_- &= \frac{-2 \int_{\Omega} (v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k^2 ds - \sqrt{\Re s(v^\perp)}}{2 \cdot \int_{\Omega} w^\perp \varphi_k^3 ds}, \\ r_+ &= \frac{-2 \int_{\Omega} (v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k^2 ds + \sqrt{\Re s(v^\perp)}}{2 \cdot \int_{\Omega} w^\perp \varphi_k^3 ds}. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Построим множества

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{\varepsilon_{1-}} &= \left\{ x \in \mathfrak{X}_\alpha : \begin{cases} \langle \alpha_1 v_{s_i}^\perp, \xi_{s_i}^\perp \rangle = \langle \beta_1 - (\beta_2 + 1)v^\perp + (v^\perp + r\varphi_1)^2 w^\perp, \xi^\perp \rangle, \\ v = r_-(v^\perp)\varphi_k + v^\perp \end{cases} \right\}, \\ \mathfrak{P}_{\varepsilon_{1+}} &= \left\{ x \in \mathfrak{X}_\alpha : \begin{cases} \langle \alpha_1 v_{s_i}^\perp, \xi_{s_i}^\perp \rangle = \langle \beta_1 - (\beta_2 + 1)v^\perp + (v^\perp + r\varphi_1)^2 w^\perp, \xi^\perp \rangle, \\ v = r_+(v^\perp)\varphi_k + v^\perp \end{cases} \right\}. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Лемма 1.3.1. *Фазовым пространством уравнения (1.2.1) является множество $\mathfrak{P}_{\varepsilon_{1-}} \cup \mathfrak{P}_{\varepsilon_{1+}}$ при всех фиксированных значениях параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$.*

Доказательство. Множество $\mathfrak{P}_{\varepsilon_{1-}} \cup \mathfrak{P}_{\varepsilon_{1+}}$ лежит в $\mathfrak{P}_{\varepsilon_1}$, а значит, не является пустым. Кроме того, для каждого x_0 из $(\mathfrak{H}_1^\perp)_+ \times (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$ можно найти два вектора $x_{0+} = (v_{0+}, w_0) = (a_+(v_0^\perp) + v_0^\perp, w_0)$ и $x_{0-} = (v_{0-}, w_0) = (a_-(v_0^\perp) + v_0^\perp, w_0)$, один из них будет принадлежать множеству $\mathfrak{P}_{\varepsilon_{1+}}$, а другой – множеству $\mathfrak{P}_{\varepsilon_{1-}}$. С другой стороны, для каждого $x_{0+}(x_{0-}) \in \mathfrak{P}_{\varepsilon_{1+}}(\mathfrak{P}_{\varepsilon_{1-}})$ существует только один вектор $x_0 \in (\mathfrak{H}_1^\perp)_+ \times (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$. А значит, по определению 1.1.3 утверждение справедливо. \square

В том случае, когда начальные значения лежат во множестве $\mathfrak{P}_{\varepsilon_1} \setminus (\mathfrak{P}_{\varepsilon_{1+}} \cup \mathfrak{P}_{\varepsilon_{1-}})$, их принято называть точками складки Уитни фазового пространства задачи (1.2.1), (1.2.2).

Теорема 1.3.1. *Если $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, то фазовое пространство $\mathfrak{P}_{\varepsilon_{1-}} \cup \mathfrak{P}_{\varepsilon_{1+}}$ содержит 1-сборку Уитни.*

Наличие в фазовом пространстве особенностей, предполагает, что уравнение может иметь несколько решений или не иметь их совсем. В настоящей диссертационной работе будут найдены условия, при которых задача (1.2.1) – (1.2.3) может иметь два, одно или не иметь решения. Все рассуждения изложены в нижеприведенных утверждениях.

Лемма 1.3.2. При $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, и любого $x_0 \in (\mathfrak{H}_1^\perp)_+ \times (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$ существует два различных решения (1.2.1) – (1.2.3).

Доказательство. Выберем произвольно точку $x_0 \in \mathfrak{P}_{\varepsilon_1-} \cup \mathfrak{P}_{\varepsilon_1+}$. Тогда ее проекция $v_0^\perp \in (\mathfrak{H}_1^\perp)_+$. В этом случае точка v_0^\perp такая, что $x_{0+} = (v_{0+}, w_0) = (a_+(v_0^\perp) + v_0^\perp, w_0) \in \mathfrak{P}_{\varepsilon_1+}$ и $x_{0-} = (v_{0-}, w_0) = (a_-(v_0^\perp) + v_0^\perp, w_0) \in \mathfrak{P}_{\varepsilon_1-}$. А значит, существуют два различных решения (1.2.1) – (1.2.3). \square

Построим множества

$$(\mathfrak{H}_1^\perp)_- = \{v^\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp : \Re s(v^\perp) < 0\},$$

$$(\mathfrak{H}_1^\perp)_0 = \{v^\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp : \Re s(v^\perp) = 0\}.$$

Лемма 1.3.3. Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, и любого $x_0 \in (\mathfrak{H}_1^\perp)_0 \times (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$ существует одно решение задачи (1.2.1) – (1.2.3).

Доказательство. Если $v_0^\perp \in (\mathfrak{H}_1^\perp)_0$, то точка $x_0 = (v_0^\perp + r\varphi_k, w_0^\perp) \in \mathfrak{P}_{\varepsilon_1-} \cap \mathfrak{P}_{\varepsilon_1+}$, а значит, можно утверждать, что существует единственное решение (1.2.1) – (1.2.3). \square

Лемма 1.3.4. Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, и любого $x_0 \in (\mathfrak{H}_1^\perp)_- \times (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$ задача (1.2.1) – (1.2.3) неразрешима.

Доказательство. Для любого $v_0^\perp \in (\mathfrak{H}_1^\perp)_-$ задача (1.2.1) – (1.2.3) не будет иметь ни одного решения, так как не существует ни одного $r \in \mathbb{R}$, что точка $x_0 = (v_0^\perp + r\varphi_k, w_0^\perp)$ лежала бы в $\mathfrak{P}_{\varepsilon_1}$, а значит удовлетворяет (1.2.1). \square

Теорема 1.3.2. Для всех фиксированных параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, и

(i) любого $x_0 \in (\mathfrak{H}_1^\perp)_+ \times (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$ существует два решения задачи (1.2.1) – (1.2.3);

(ii) любого $x_0 \in (\mathfrak{H}_1^\perp)_0 \times (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$ существует одно решение задачи (1.2.1) – (1.2.3);

(iii) любого $x_0 \in (\mathfrak{H}_1^\perp)_- \times (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$ задача (1.2.1) – (1.2.3) неразрешима.

Доказательство. Теорема справедлива в силу лемм 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4. \square

1.4. Исследование единственности решения задачи Шоуолтера – Сидорова в случае $\varepsilon_2 = 0$

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим вырожденную систему уравнений

$$\begin{cases} v_t = \alpha_1 \Delta v + \beta_1 - (\beta_2 + 1)v + v^2 w, \\ 0 = \alpha_2 \Delta w + \beta_2 v - v^2 w \end{cases} \quad (1.4.1)$$

с граничными условиями (1.2.2) и начальным условием

$$v(0) = v_0. \quad (1.4.2)$$

В связи с тем, что правая часть уравнений в системе (1.4.1) и краевые условия (1.2.2) остались неизменны по сравнению с системой уравнений (1.2.1) **этап 1** редукции задачи (1.4.1), (1.2.2) к полулинейному уравнению соболевского типа (0.0.19) совпадает с **этапом 1** пункта 1.2. Это же справедливо и для построения оператора M из **этапа 2**. В то же время оператор L будет отличным оператора, построенного в пункте 1.2, так как изменилась левая часть уравнений в системе (1.4.1). Поэтому зададим линейный оператор $L : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ следующим образом

$$[Lx, \zeta] = \langle v, \xi \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{X}. \quad (1.4.3)$$

По построению оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Докажем следующую лемму, аналогичную лемме 1.2.1 пункта 1.2, но для оператора L вида (1.4.3).

Лемма 1.4.1. *Для всех фиксированных значений параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M будет L -секториальным, при этом условия (1.1.3) и (1.1.4) будут выполнены.*

Доказательство. Построим относительные L -резольвенты оператора M

$$\begin{aligned} [R_\theta^L(M)x, \zeta] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle v, \varphi_k \rangle \langle \eta, \varphi_k \rangle}{-\nu_k}, \\ [L_\theta^L(M)x, \zeta] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle w, \varphi_k \rangle \langle \eta, \varphi_k \rangle}{\theta - \nu_k}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\|R_\theta^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} = \sup_{\|x\|_{\mathfrak{X}} \neq 0} \frac{|[R_\theta^L(M)x, x]|}{\|x\|_{\mathfrak{X}}^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_k} < +\infty,$$

$$\|L_\theta^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} = \sup_{\|x\|_{\mathfrak{X}} \neq 0} \frac{[L_\theta^L(M)x, x]}{\|x\|_{\mathfrak{X}}^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\theta - \nu_k} < +\infty,$$

то L -секториальность оператора M следует непосредственно из определения 1.1.2.

Учитывая, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2$, положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^0 &= \ker L = \{0\} \times \mathfrak{X}_2, \\ \mathfrak{X}^1 &= \mathfrak{X}_1 \times \{0\}, \\ \mathfrak{Y}^1 &= \operatorname{im} L = \mathfrak{Y}_1 \times \{0\}, \\ \mathfrak{Y}^0 &= M[\mathfrak{X}^0 \cap \operatorname{dom} M] = \{0\} \times \mathfrak{Y}_2, \end{aligned}$$

зададим L_1 как сужение оператора L на \mathfrak{X}^1 , тогда по построению L_1^{-1} будет удовлетворять условию $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1)$. Таким образом, показано выполнение условий (1.1.3), (1.1.4). \square

Этап 3 редукции задачи (1.4.1), (1.2.2) к полулинейному уравнению соболевского типа (0.0.19) почти совпадает с **этапом 3** пункта 1.2. Отличие заключается лишь в построении интерполяционного пространства \mathfrak{X}_α . Возьмем $\mathfrak{X}_\alpha = \mathfrak{X}_1^0 \oplus \mathfrak{X}_\alpha^1$, где $\mathfrak{X}_1^0 = \{0\} \times \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{X}_\alpha^1 = \mathfrak{X}^\alpha \times \{0\}$, $\mathfrak{X}^\alpha = L_4(\Omega)$. Для пространств $\mathfrak{H}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*$ справедливо

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{B}^* \hookrightarrow \mathfrak{Y}, \quad (1.4.4)$$

где все вложения плотны и непрерывны [51]. А значит, для всех фиксированных значений параметров $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ и $n \leq 4$ оператор N является гладким и принадлежит классу $C^\infty(\mathfrak{X}_\alpha; \mathfrak{Y})$.

Так же как и в пункте 1.3, множество \mathfrak{P} (1.1.7) примет вид

$$\mathfrak{P}_{\varepsilon_2} = \{x = (v, w) \in \mathfrak{X}_\alpha : \langle \alpha_2 w_{s_i}, \eta_{s_i} \rangle + \langle v^2 w, \eta \rangle = \langle \beta_2 v, \eta \rangle\}.$$

Теорема 1.4.1. *Для всех фиксированных значений параметров $\alpha_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}_+$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, и любого $x_0 \in \mathfrak{X}_\alpha$ существует и единственно решение (1.4.1), (0.0.2), (1.4.2).*

Доказательство. Построим вспомогательный оператор

$$\langle A(w), \eta \rangle = \langle \alpha_2 w_{s_i}, \eta_{s_i} \rangle + \langle v^2 w, \eta \rangle, \quad (1.4.5)$$

$w, \eta \in \mathfrak{H}_2$. Поскольку

$$|\langle A(w), \eta \rangle| \leq (a + b \|w\|_{\mathfrak{H}_2}) \cdot \|\eta\|_{\mathfrak{H}_2},$$

где константы $a, b \in \mathbb{R}_+$ зависят от α_2 и констант вложений (1.4.4), и не зависит от w, η , то тем самым доказано действие оператора $A : \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathfrak{H}_2^*$.

Отметим, что оператор $A : \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathfrak{H}_2^*$ коэрцитивен, т.е.

$$\begin{aligned} & \lim_{\|w\|_{\mathfrak{H}_2} \rightarrow +\infty} \langle A(w), w \rangle \|w\|_{\mathfrak{H}_2}^{-1} = \\ & = \lim_{\|w\|_{\mathfrak{H}_2} \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} (\alpha_2 w_{s_i}^2 + v^2 w^2) ds \right) \cdot \left(\int_{\Omega} (w_{s_i}^2 + w^2) ds \right)^{-\frac{1}{2}} = +\infty. \end{aligned}$$

Кроме того, оператор A строго монотонен, т.е.

$$\langle A(w_1) - A(w_2), w_1 - w_2 \rangle = \int_{\Omega} (\alpha_2 (w_{1s_i} - w_{2s_i})^2 + v^2 (w_1 - w_2)^2) ds > 0,$$

как только $w_1 \neq w_2$. Наконец, покажем гладкость оператора A , т.е. его производная Фреше $A'_w \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_2^*)$ в любой точке $w \in \mathfrak{H}_2$. Действительно,

$$|\langle A'_w \xi, \eta \rangle| = \left| \int_{\Omega} (\alpha_2 \xi_{s_i} \eta_{s_i} + v^2 \eta \xi) ds \right| \leq c \|\eta\|_{\mathfrak{H}_2} \|\xi\|_{\mathfrak{H}_2},$$

справедливо в силу применения неравенства Гельдера, а также неравенств справедливых в силу непрерывности вложения (1.4.4). Здесь постоянная c зависит только от фиксированных значений параметра α_2 и констант вложения. Из этого следует, что оператор A непрерывно дифференцируем, а отсюда, очевидным образом, следует его радиальная непрерывность. Далее, применив теорему 1.1.6, получим биективность оператора $A'_w : \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathfrak{H}_2^*$. А отсюда из ранее установленной непрерывности оператора A'_w , в силу теоремы Банаха, получим, что $(A'_w)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_2^*, \mathfrak{H}_2)$. Остальные производные Фреше оператора A равны нулевому оператору.

Оператор A является биективным, тогда существует обратный оператор $A^{-1} \in C^\infty(\mathfrak{H}_2^*; \mathfrak{H}_2)$. Построим оператор $D(v) = (v, A^{-1}(v))$, $\text{dom } D = \mathfrak{X}_\alpha^1$, $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$. А значит, утверждение теоремы справедливо в силу теоремы 1.1.6. \square

Теорема 1.4.2. *В том случае, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ фазовым пространством (1.0.1), (1.2.2) будет являться множество вида*

$$\mathfrak{P}_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \left\{ x \in \mathfrak{X}_\alpha : \left\{ \begin{array}{l} \langle \alpha_1 v_{s_i}, \xi_{s_i} \rangle = \langle \beta_1 - (\beta_2 + 1)v + v^2 w, \xi \rangle, \\ \langle \alpha_2 w_{s_i}, \eta_{s_i} \rangle + \langle v^2 w, \eta \rangle = \langle \beta_2 v, \eta \rangle \end{array} \right. \right\}. \quad (1.4.6)$$

1.5. Исследование вопроса однозначной разрешимости математических моделей автокаталической реакции с диффузией в трубчатом реакторе

На графе \mathbf{G} рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 v_{jss} + \beta_1 - (\beta_2 + 1)v_j + v_j^2 w_j, \\ w_{jt} = \alpha_2 w_{jss} + \beta_2 v_j - v_j^2 w_j \end{cases} \quad (1.5.1)$$

с начальным условием

$$w_j(0) = w_{j0}, \quad (1.5.2)$$

где каждая функция $v_j = v_j(s, t)$ и $w_j = w_j(s, t)$, $s \in (0, l_j)$ и $t \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяет условию непрерывности

$$\begin{aligned} v_j(0, t) &= v_k(0, t) = v_m(l_m, t) = v_n(l_n, t), \\ w_j(0, t) &= w_k(0, t) = w_m(l_m, t) = w_n(l_n, t), \\ E_j, E_k &\in E^\alpha(V_g), \quad E_m, E_n \in E^\omega(V_g), \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

и условию баланса потоков

$$\begin{aligned} \sum_{E_j \in E^\alpha(V_g)} d_j v_{js}(0, t) - \sum_{E_j \in E^\omega(V_g)} d_j v_{js}(l_j, t) &= 0, \\ \sum_{E_j \in E^\alpha(V_g)} d_j w_{js}(0, t) - \sum_{E_j \in E^\omega(V_g)} d_j w_{js}(l_j, t) &= 0, \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

где через $E^{\alpha(\omega)}(V_g)$ обозначено множество ребер с началом или концом в вершине V_g .

Для простоты изложения разобьем редукцию задачи (1.5.1) – (1.5.4) к уравнению (0.0.19) в три этапа.

Этап 1. Возьмем банахово пространство $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_i = \{r = (r_1, r_2, \dots, r_j, \dots) : r_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ и выполнено (1.5.3)}\}$, гильбертово пространство $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_i = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$, $i = 1, 2$. Зададим в \mathfrak{X} скалярное произведение $[x, \zeta] = \langle v, \xi \rangle + \langle w, \eta \rangle$, при этом $x = (v, w)$, $\zeta = (\xi, \eta)$, $\langle v, \xi \rangle = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} v_j \xi_j ds$. Пусть \mathfrak{Y} – сопряженное к \mathfrak{X} пространство относительно двойственности $[\cdot, \cdot]$.

Этап 2. Определим линейные операторы $L, M : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ формулами

$$[Lx, \zeta] = \langle w, \xi \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{X}, \quad (1.5.5)$$

$$[Mx, \zeta] = -\alpha_1 \langle v_s, \xi_s \rangle - \alpha_2 \langle w_s, \eta_s \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{X}, \quad \text{где } \text{dom } M = \mathfrak{H}. \quad (1.5.6)$$

По построению оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, $M \in Cl(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$.

Рассмотрим дифференциальный оператор $\mathcal{B}: \mathfrak{X}_1 \rightarrow \mathfrak{Y}_1$ заданный на графе \mathbf{G}

$$\langle \mathcal{B}\varphi, \psi \rangle = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} \varphi_{js} \psi_{js} ds. \quad (1.5.7)$$

Причем спектр $\sigma(\mathcal{B})$ оператора \mathcal{B} дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$ [2]. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ – собственные функции оператора \mathcal{B} , соответствующие собственному значению $\{\nu_k\}$.

Лемма 1.5.1. *Для всех фиксированных значений параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M будет L -секториален, при этом условия (1.1.3) и (1.1.4) будут выполнены.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения полностью идентично доказательству леммы 1.2.1 с учетом особенностей пространств, построенных на графе \mathbf{G} . \square

Этап 3. Зададим нелинейный оператор формулой

$$[N(x), \zeta] = \langle \beta_1 - (\beta_2 + 1)v + v^2w, \xi \rangle + \langle \beta_1v - v^2w, \eta \rangle \quad (1.5.8)$$

и положим $\text{dom } N = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_i = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_4(0, l_j)\}$, $i = 1, 2$. Обозначим через \mathfrak{B}^* пространство сопряженное к \mathfrak{B} относительно двойственности $[\cdot, \cdot]$.

Лемма 1.5.2. *Для всех фиксированных значений параметров $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ оператор N является гладким класса $C^\infty(\mathfrak{B}; \mathfrak{Y})$.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения полностью идентично доказательству леммы 1.2.2 с учетом особенностей пространств, построенных на графе \mathbf{G} . \square

Пространство \mathfrak{X}^α построим аналогичным способом как строили в пункте 1.2, опираясь на особенности пространств, построенных на графе \mathbf{G} .

Рассуждая аналогично пункту 1.3 с поправкой на особенности пространств, построенных на графе \mathbf{G} , получим, что все решения уравнения (0.0.19) лежат поточечно во множестве

$$\mathfrak{P}_{\varepsilon_1} = \{x \in \mathfrak{X}_\alpha : \langle \alpha_1 v_s, \xi_s \rangle = \langle \beta_1 - (\beta_2 + 1)v + v^2w, \xi \rangle\}. \quad (1.5.9)$$

Возьмем произвольную точку $x = (v, w) \in \mathfrak{X}_\alpha$, в силу теоремы 1.1.3 представим в виде $x = (v^\perp + r\varphi_k, w^\perp)$, где векторы $x^\perp = (v^\perp, w^\perp) \in \mathfrak{X}_\alpha^\perp$, $v^\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp$, $w^\perp \in (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$, $\mathfrak{H}_1^\perp = \{v \in \mathfrak{H}_1 : \langle v^\perp, \varphi_k \rangle = 0\}$, $(\mathfrak{X}^\alpha)^\perp = \{w^\perp \in \mathfrak{X}^\alpha : \langle w^\perp, \varphi_k \rangle = 0\}$. В данном случае множество $\mathfrak{P}_{\varepsilon_1}$ (1.5.9) определяется системой из двух уравнений

$$\mathfrak{P}_{\varepsilon_1} = \left\{ x = (v, w) \in \mathfrak{X}_\alpha : \left\{ \begin{array}{l} \langle \alpha_1 v_s^\perp, \xi_s^\perp \rangle = \langle \beta_1 - (\beta_2 + 1)v^\perp, \xi^\perp \rangle + \\ \quad + (v^\perp + r\varphi_1)^2 w^\perp, \xi^\perp \rangle, \\ -\langle \beta_1, \varphi_k \rangle = \langle (v^\perp + r\varphi_1)^2 w^\perp, \varphi_k \rangle \end{array} \right. \right\}. \quad (1.5.10)$$

Система уравнений, определяющая множество (1.5.10), строится аналогичным образом как (1.3.2) с учетом особенностей пространств, построенных на графе \mathbf{G} .

Перейдем ко второму уравнению системы, определяющей множество (1.5.10). Преобразуя получившиеся уравнение, получим:

$$\begin{aligned} r^2 \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} w_j^\perp \varphi_{kj}^3 ds + 2r \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_j^\perp)^2 w_j^\perp \varphi_{kj}^2 ds + \\ + \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_j^\perp)^2 w_j^\perp \varphi_{kj} ds + \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} \beta_1 \varphi_{kj} ds = 0. \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

Заметим, что уравнение (1.5.11) является квадратным уравнением типа $ar^2 + br + c = 0$ относительно r , где

$$\begin{aligned} a &= \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} w_j^\perp \varphi_{kj}^3 ds, \quad b = 2 \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_j^\perp)^2 w_j^\perp \varphi_{kj}^2 ds, \\ c &= \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_j^\perp)^2 w_j^\perp \varphi_{kj} ds + \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} \beta_1 \varphi_{kj} ds. \end{aligned}$$

Введем функционал $\mathfrak{Res}(v^\perp) : \mathfrak{H}_1^\perp \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$\begin{aligned} \mathfrak{Res}(v^\perp) &= 4 \left(\sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_j^\perp)^2 w_j^\perp \varphi_{kj}^2 ds \right)^2 - 4 \cdot \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} w_j^\perp \varphi_{kj}^3 ds \cdot \\ &\cdot \left(\sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_j^\perp)^2 w_j^\perp \varphi_{kj} ds + \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} \beta_1 \varphi_{kj} ds \right) \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

и рассмотрим множество

$$(\mathfrak{H}_1^\perp)_+ = \{v^\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp : \Re\mathfrak{s}(v^\perp) > 0\}.$$

Для любого v^\perp принадлежащего множеству $(\mathfrak{H}_1^\perp)_+$ уравнение (1.5.11) будет иметь равно два различных решения вида

$$\begin{aligned} r_- &= \frac{-2 \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_j^\perp)^2 w_j^\perp \varphi_{kj}^2 ds - \sqrt{\Re\mathfrak{s}(v^\perp)}}{2 \cdot \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} w_j^\perp \varphi_{kj}^3 ds}, \\ r_+ &= \frac{-2 \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_j^\perp)^2 w_j^\perp \varphi_{kj}^2 ds + \sqrt{\Re\mathfrak{s}(v^\perp)}}{2 \cdot \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} w_j^\perp \varphi_{kj}^3 ds}. \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

Построим множества

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{\varepsilon_{1-}} &= \left\{ x \in \mathfrak{X}_\alpha : \left\{ \begin{array}{l} \langle \alpha_1 v_s^\perp, \xi_s^\perp \rangle = \langle \beta_1 - (\beta_2 + 1)v^\perp + \\ + (v^\perp + r\varphi_1)^2 w^\perp, \xi^\perp \rangle, \\ v = r_-(v^\perp)\varphi_k + v^\perp, \end{array} \right. \right\} \\ \mathfrak{P}_{\varepsilon_{1+}} &= \left\{ x \in \mathfrak{X}_\alpha : \left\{ \begin{array}{l} \langle \alpha_1 v_s^\perp, \xi_s^\perp \rangle = \langle \beta_1 - (\beta_2 + 1)v^\perp + \\ + (v^\perp + r\varphi_1)^2 w^\perp, \xi^\perp \rangle, \\ v = r_+(v^\perp)\varphi_k + v^\perp. \end{array} \right. \right\} \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

$$(\mathfrak{H}_1^\perp)_- = \{v^\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp : \Re\mathfrak{s}(v^\perp) < 0\}, \quad (\mathfrak{H}_1^\perp)_0 = \{v^\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp : \Re\mathfrak{s}(v^\perp) = 0\}.$$

Теорема 1.5.1. Для всех фиксированных параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, и

- (i) любого $x_0 \in (\mathfrak{H}_1^\perp)_+ \times (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$ существует два решения задачи (1.5.1) – (1.5.4);
- (ii) любого $x_0 \in (\mathfrak{H}_1^\perp)_0 \times (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$ существует одно решение задачи (1.5.1) – (1.5.4);
- (iii) любого $x_0 \in (\mathfrak{H}_1^\perp)_- \times (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$ задача (1.5.1) – (1.5.4) неразрешима.

Доказательство. Теорема справедлива в силу лемм 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4 с учетом особенностей пространств, построенных на графе \mathbf{G} . \square

На графе \mathbf{G} рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} v_{jt} = \alpha_1 v_{jss} + \beta_1 - (\beta_2 + 1)v_j + v_j^2 w_j, \\ 0 = \alpha_2 w_{jss} + \beta_2 v_j - v_j^2 w_j \end{cases} \quad (1.5.15)$$

с условиями непрерывности и баланса потока (1.5.3), (1.5.4) и начальным условием

$$v_j(0) = v_{j0}. \quad (1.5.16)$$

В связи с тем, что правая часть уравнений в системе (1.5.15), условия непрерывности и баланса потока (1.5.3), (1.5.4) остались неизменны по сравнению с (1.5.1) (1.5.3), (1.5.4), **этап 1** редукции задачи (1.5.15), (1.5.3), (1.5.4) к (0.0.19) совпадает с **этапом 1** пункта 1.2. Это же справедливо и для построения оператора M из **этапа 2**. В то же время оператор L будет отличным от оператора, построенного в пункте 1.2, так как изменилась левая часть уравнений в системе (1.5.15). Поэтому построим линейный оператор $L : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ следующим образом

$$[Lx, \zeta] = \langle v, \xi \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{X}. \quad (1.5.17)$$

По построению оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Докажем следующую лемму, аналогичную лемме 1.2.1 пункта 1.2, но для оператора L вида (1.4.3).

Лемма 1.5.3. *Для всех фиксированных значений параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M будет L -секториальным, при этом условия (1.1.3) и (1.1.4) будут выполнены.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения полностью идентично доказательству леммы 1.4.1 с учетом особенностей пространств, построенных на графе \mathbf{G} . □

Этап 3 редукции задачи (1.5.15), (1.5.3), (1.5.4) к полулинейному уравнению соболевского типа (0.0.19) почти совпадает с **этапом 3** пункта 1.2. Отличие заключается лишь в построении интерполяционного пространства \mathfrak{X}_α . Интерполяционное пространство \mathfrak{X}_α построим похожим образом как строили в пункте 1.4, опираясь на особенности пространств, построенных на графе \mathbf{G} . Рассуждая аналогично пункту 1.4 с поправкой на особенности пространств, построенных на графе \mathbf{G} , получим, что все решения уравнения (0.0.19) лежат поточечно во множестве $\mathfrak{P}_{\varepsilon_2}$ (1.1.7), которое примет вид

$$\mathfrak{P}_{\varepsilon_2} = \{x = (v, w) \in \mathfrak{X}_\alpha : \langle \alpha_2 w_s, \eta_s \rangle + \langle v^2 w, \eta \rangle = \langle \beta_2 v, \eta \rangle\}.$$

Теорема 1.5.2. *Для всех фиксированных значений параметров $\alpha_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}_+$, $\beta_2 \in \mathbb{R}$, и любого $x_0 \in \mathfrak{X}_\alpha$ существует и единственно решение (1.5.3), (1.5.4), (1.5.15), (1.5.16).*

Доказательство. Доказательство данного утверждения полностью идентично доказательству леммы 1.4.2 с учетом особенностей пространств, построенных на графе \mathbf{G} . \square

1.6. Алгоритм численного метода нахождения решения задачи Шоултера – Сидорова и описание комплекса программ

Опишем алгоритм численного решения задачи (1.2.1) – (1.2.3) для области Ω или (1.5.1) – (1.5.4) на графе \mathbf{G} в случае $\varepsilon_1 = 0$ и (1.2.2), (1.4.1), (1.4.2) для области Ω или (1.5.3), (1.5.4), (1.5.15), (1.5.16) на графе \mathbf{G} в случае $\varepsilon_2 = 0$, построенный на основе модифицированного методе Галеркина – Петрова и методе фазового пространства. Алгоритм позволяет находить приближенные решения на заданной области Ω или геометрическом графе \mathbf{G} для заданных начальных значений $w_0(s)$ для случая $\varepsilon_1 = 0$ или $v_0(s)$ для случая $\varepsilon_2 = 0$ и значений коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ для модели автокаталитической реакции с диффузией, а также получить графики приближенных решений.

Этап 0. Находим собственные функции $\{\varphi_k(s)\}$ однородной задачи Дирихле оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω или же $\{\varphi_k(s)\}$ – собственные векторы оператора \mathcal{B} на графе \mathbf{G} в зависимости от того, рассматриваем мы модель в кювете или же в трубчатом реакторе, соответственно.

Этап 1. Следуя методу Галеркина – Петрова, мы будем искать приближенное решение $\tilde{x} = (\tilde{v}, \tilde{w})$ в виде сумм

$$\tilde{v}(s, t) = \sum_{k=1}^m v_k(t) \varphi_k(s), \quad \tilde{w}(s, t) = \sum_{k=1}^m w_k(t) \varphi_k(s). \quad (1.6.1)$$

Этап 2. Приняв за $r = v_1(0)$, $q = w_1(0)$, $v^\perp = \sum_{k=2}^m v_k(t) \varphi_k$, $w^\perp = \sum_{k=2}^m w_k(t) \varphi_k$, и подставив полученные значения в формулу (1.3.5), проверим единственность или множественность решения задачи Шоултера – Сидорова при заданных начальных условиях $w_0(s)$ для случая $\varepsilon_1 = 0$ или $v_0(s)$ для случая $\varepsilon_2 = 0$ и полученных $v_k(0)$ или $w_k(0)$. В случае, когда $\Re s > 0$, изучаемая задача имеет два решения $(v_1(s, t), w_1(s, t))$, $(v_2(s, t), w_2(s, t))$, следовательно, система алгебро-дифференциальных уравнений будет иметь два решения и два набора $v_k(t)$ и $w_k(t)$ для каждого из решений, соответственно. В этом случае все последующие этапы необходимо проделать дважды для каждого из наборов $v_k(t)$ и $w_k(t)$.

В случае $\varepsilon_1 = 0$ переходим последовательно к этапам 3.1, 4.1, 5.1, 6.1, в случае $\varepsilon_2 = 0$ переходим последовательно к этапам 3.2, 4.2, 5.2, 6.2, соответственно.

Этап 3.1. Для нахождения неизвестных $v_i(t), w_i(t)$, подставим галеркинские суммы (1.6.1) в систему уравнений (1.2.1), а затем умножим полученную систему уравнений скалярно в $L_2(\Omega)$ (или $L_2(\mathbf{G})$) на соответствующие собственные функции $\varphi_i(s)$, $i = \overline{1, m}$, получив таким образом систему алгебро-дифференциальных уравнений вида:

$$-\alpha_1 \sum_{k=1}^m v_k(t) \nu_k \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle + \beta_1 - (\beta_2 + 1) \sum_{k=1}^m v_k(t) \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle + \left\langle \left[\left(\sum_{k=1}^m v_k(t) \varphi_k \right)^2 \sum_{k=1}^m w_k(t) \varphi_k \right], \varphi_i \right\rangle = 0, \quad (1.6.2)$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} w_k(t) \langle \varphi_k, \varphi \rangle + \alpha_2 \sum_{k=1}^m w_k(t) \nu_k \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle - \beta_2 \sum_{k=1}^m v_k(t) \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle + \left\langle \left[\left(\sum_{k=1}^m v_k(t) \varphi_k \right)^2 \sum_{k=1}^m w_k(t) \varphi_k \right], \varphi_i \right\rangle = 0, \quad (1.6.3)$$

$i = \overline{1, m}.$

Этап 3.2. Для нахождения неизвестных $v_i(t), w_i(t)$, подставим галеркинские суммы (1.6.1) в систему уравнений (1.4.1), а затем умножим полученную систему уравнений скалярно в $L_2(\Omega)$ или $L_2(\mathbf{G})$ на собственные функции $\varphi_i(s)$, $i = \overline{1, m}$, получив таким образом систему алгебро-дифференциальных уравнений вида:

$$\sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} v_k(t) \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle + \alpha_1 \sum_{k=1}^m v_k(t) \nu_k \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle - \beta_1 + (\beta_2 + 1) \cdot \sum_{k=1}^m v_k(t) \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle - \left\langle \left[\left(\sum_{k=1}^m v_k(t) \varphi_k \right)^2 \sum_{k=1}^m w_k(t) \varphi_k \right], \varphi_i \right\rangle = 0, \quad (1.6.4)$$

$$-\alpha_2 \sum_{k=1}^m w_k(t) \nu_k \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle + \beta_2 \sum_{k=1}^m v_k(t) \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle - \left\langle \left[\left(\sum_{k=1}^m v_k(t) \varphi_k \right)^2 \sum_{k=1}^m w_k(t) \varphi_k \right], \varphi_i \right\rangle = 0. \quad (1.6.5)$$

Этап 4.1. Найдем $w_k(0)$, скалярно умножив в $L_2(\Omega)$ (или $L_2(\mathbf{G})$) (в зависимости от рассматриваемой задачи) начальную функцию (1.5.2) на соб-

ственные функции $\varphi_i(s)$, $i = \overline{1, m}$, т.е.

$$\langle w(0) - w_0, \varphi_i \rangle = 0. \quad (1.6.6)$$

Этап 4.2. Найдем $v_k(0)$, скалярно умножив в $L_2(\Omega)$ (или $L_2(\mathbf{G})$) (в зависимости от рассматриваемой задачи) начальную функцию условие (1.5.16) на собственные функции $\varphi_i(s)$, $i = \overline{1, m}$, т.е.

$$\langle v(0) - v_0, \varphi_i \rangle = 0. \quad (1.6.7)$$

Этап 5.1. Решив систему алгебраических уравнений (1.6.2) относительно $w_k(0)$, получим значения $v_k(0)$.

Этап 5.2. Решив систему алгебраических уравнений (1.6.5) относительно $v_k(0)$, получим значения $w_k(0)$.

Этап 6.1. Методом Рунге – Кутты находим решение системы алгебро-дифференциальных уравнений (1.6.2), (1.6.3) с начальными условиями (1.6.6).

Этап 6.2. Методом Рунге – Кутты находим решение системы алгебро-дифференциальных уравнений (1.6.4), (1.6.5) с начальными условиями (1.6.7).

Построенный алгоритм численного метода был реализован в системе компьютерной математики Maple 2017 для Windows 7, 8.1, 10 в виде комплекса программ. Данная система компьютерной математики отличается от аналогов наличием встроенного аппарата аналитических вычислений интегралов **student**, пакета команд для решения дифференциальных уравнений, в том числе и систем, **DEtools**. Комплекс программ предназначен для нахождения приближенного решения задачи Шоултера – Сидорова для модели распределенного брасселятора в случае единственности или множественности решений. В программе реализован модифицированный метод Галеркина – Петрова и метод фазового пространства. Комплекс программ состоит из следующих программ: «Численное исследование математической модели автокаталитической реакции с диффузией в тонкой продолговатой пробирке», «Численное исследование математической модели автокаталитической реакции с диффузией в неглубокой кювете», «Численное исследование математической модели автокаталитической реакции с диффузией в трубчатом реакторе».

Комплекс программ может быть использован при исследовании автокаталитической реакции с диффузией в трубчатом реакторе, в плоской неглубокой кювете и пробирках различных форм. Описанный программный комплекс представляет интерес для специалистов в области кинетической хи-

мии. На вход программного комплекса подаются коэффициенты системы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, функция начальных значений $w_0(s)$ для случая $\varepsilon_1 = 0$ или $v_0(s)$ для случая $\varepsilon_2 = 0$ для начального условия Шоуолтера – Сидорова, параметры области Ω (или графа \mathbf{G}). На выходе каждая программа комплекса выдает приближенные решения $(v(s, t), w(s, t))$ и строит их графики. Схема алгоритма работы любой программы комплекса приведена на рис. 1.5.1.

Комплекс программ предназначен только для работы на персональном компьютере с процессором не ниже чем 4 ядра, с частотой не ниже 3400 МГц, оперативной памятью 16 Гб под управлением 64-х битных операционных систем Windows 7, 8.1, 10 с установленной системой компьютерной математики Maple 2017.

Опишем логическую структуру работы каждой из программ комплекса более подробно. Во время работы программы выполняются следующие шаги.

Шаг 1. Вводятся коэффициенты системы уравнений $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, функция начального значения $w_0(s)$ для случая $\varepsilon_1 = 0$ или $v_0(s)$ для случая $\varepsilon_2 = 0$ для начального условия Шоуолтера – Сидорова, параметры области Ω или графа \mathbf{G} , а также количество галеркинских приближений m .

Шаг 2. Из отдельного файла **eigenfunction.mw** с помощью встроенной процедуры **read** считывается найденная нормированная система функций $\varphi_i(s)$ для рассматриваемой области Ω или графа \mathbf{G} .

Шаг 3. Процедура **unapply** позволяет представить искомые приближенные решения в виде сумм

$$\begin{aligned} v &:= \text{unapply}(v_1(t)\varphi_1(s) + v_2(t)\varphi_2(s) + \dots + v_m(t)\varphi_m(s)), \\ w &:= \text{unapply}(w_1(t)\varphi_1(s) + w_2(t)\varphi_2(s) + \dots + w_m(t)\varphi_m(s)). \end{aligned}$$

Шаг 4. Положим

$$\begin{aligned} r &:= v_k(0), \\ v^\perp &:= v_1(0)\varphi_2(s) + \dots + v_{k-1}(0)\varphi_{k-1}(s) + \\ &+ v_{k+1}(0)\varphi_{k+1}(s) + \dots + v_m(s)\varphi_m(s), \\ w^\perp &:= w_0, \end{aligned}$$

и подставим полученные значения в формулу

$$\begin{aligned} \Re s(v^\perp) &:= 4 \left(\text{int}((v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k^2, s) \right)^2 - 4 \cdot \text{int}(w^\perp \varphi_k^3, s) \cdot \\ &\cdot \text{int}((v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k, s) + \text{int}(\gamma \varphi_k, s). \end{aligned}$$

С помощью встроенной процедуры **if...else...fi** проводится проверка наличия одного или двух решений задачи Шоуолтера – Сидорова при заданных начальных условиях.

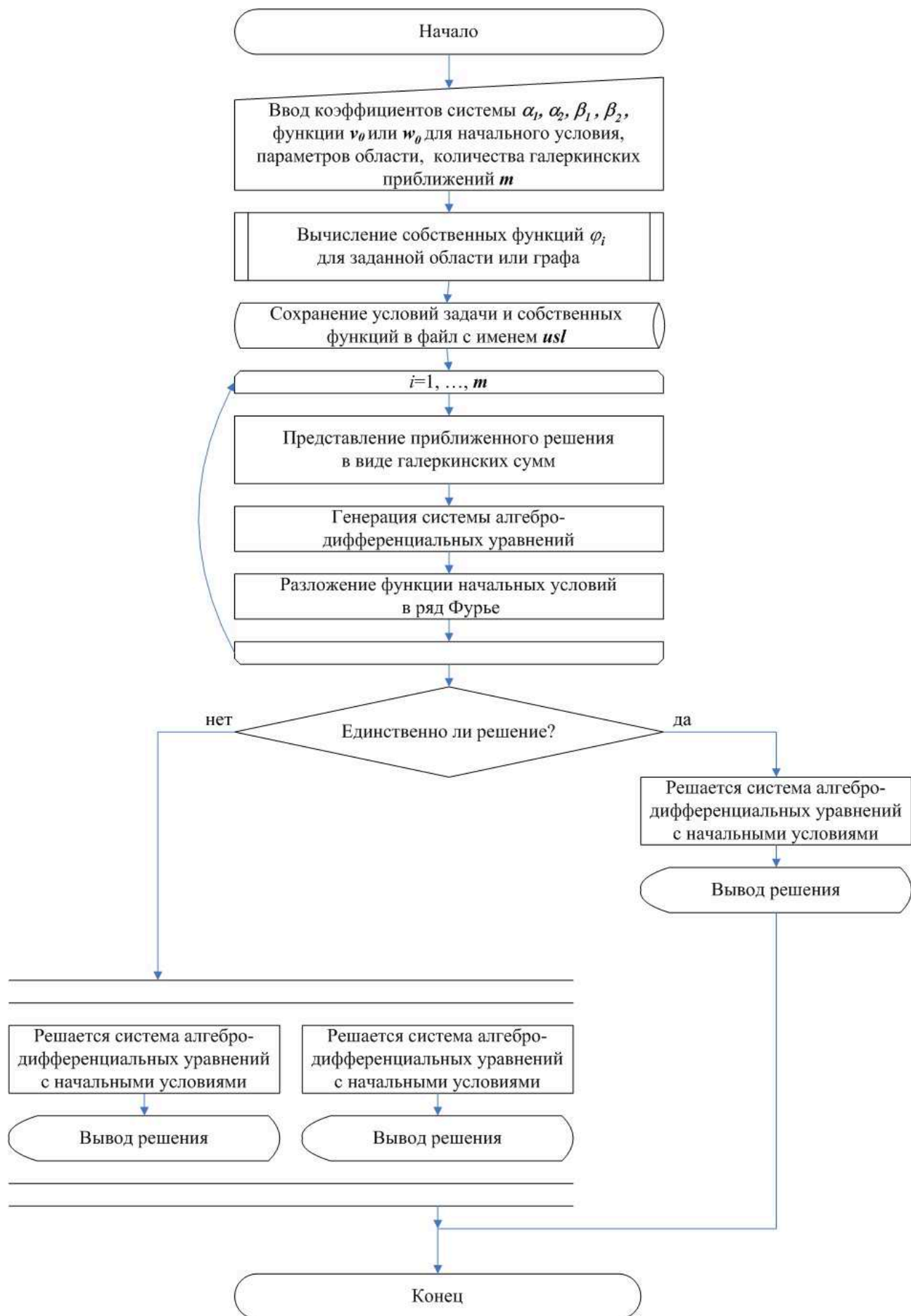


Рис. 1.5.1. Схема алгоритма работы каждой программы комплекса

Шаг 5. Составленные на шаге 3 выражения подставляются в алгебраическое уравнение системы, в цикле `for i to 1 do m end do` полученное уравнение умножается на собственные функции φ_i и интегрируется в рассматриваемой области Ω или на графе \mathbf{G} с помощью процедуры `int`. С помощью встроенных процедур `subs` и `solve`, с настройкой `RealDomain`, решаем получившуюся систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $v_i, w_i, i = \overline{1, m}$. В том случае, когда система уравнений имеет два решения, то, следовательно, получим два набора (v_{01}, w_0) и (v_{02}, w_0) для каждого из решений, соответственно. Все последующие шаги необходимо проделать дважды для каждого из наборов $v_k(t)$ и $w_k(t)$. Чтобы реализовать возможность нахождения двух различных решений, с помощью встроенной процедуры `save`, начальные условия сохраняются в файле `usl.mw`, первый набор (v_{01}, w_0) сохраняется в файле `resh1.mw`, второй набор (v_{02}, w_0) сохраняется в файле `resh2.mw`.

Шаг 6. С помощью встроенной процедуры `read` считываются начальные условия и один из наборов (v_{01}, w_0) или (v_{02}, w_0) , хранящихся в файлах `resh1.mw` или `resh2.mw`. В цикле `for i to 1 do m end do` правая и левая части дифференциального уравнения, полученного на третьем шаге, умножаются на собственные функции $\varphi_i(s)$ и интегрируются (`int`) в рассматриваемой области Ω или на графе \mathbf{G} . В результате выполнения шагов 5 и 6 получаем систему алгебро-дифференциальных уравнений для определения коэффициентов приближения.

Шаг 7. Решается система, полученная на шаге 6, с начальными условиями, сохраненными в файле `resh1.mw` или `resh2.mw` с помощью встроенной процедуры `dsolve`.

Шаг 8. Составляется решение и выводится на рабочую область программы в виде графика встроенными процедурами `plot` или `plot3d`.

1.7. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим модельные примеры численного исследования вопроса однозначной разрешимости математической модели автокаталитической реакции с диффузией на основе реализации алгоритма и комплекса программ, описанных в пункте 1.6.

Пример 1.7.1. *Требуется найти вид фазового пространства системы урав-*

нений

$$\begin{cases} \varepsilon_1 v_t = \frac{v_{ss}}{10} + 1 - \frac{v}{10} + v^2 w, \\ \varepsilon_2 w_t = 2w_{ss} - \frac{9v}{10} - v^2 w \end{cases} \quad (1.7.1)$$

с краевым условием

$$v(s, t) = w(s, t) = 0, \quad s \in \partial\Omega, t \in (0, T), \quad (1.7.2)$$

при $\Omega = (0, \pi)$, $T = 1$, $m = 2$, если: а) $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$; б) $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 = 0$; в) $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$.

Представим приближенные решения (1.7.1), (1.7.2) в виде $\tilde{v}(s, t) = r\varphi_1(s) + v^\perp$, $\tilde{w}(s, t) = q\varphi_1(s) + w^\perp$, где $r = v_1(t)$, $v^\perp = \sum_{i=2}^m v_i(t)\varphi_i(t)$, $q = w_1(t)$, $w^\perp = \sum_{i=2}^m w_i(t)\varphi_i(t)$.

а) Согласно теореме 1.3.1, в случае, когда $\varepsilon_1 = 0$, фазовое пространство (1.7.1), (1.7.2) при определенных условиях может содержать 1-сборку Уитни. Для данной системы фазовое пространство может быть описано на основе:

$$\begin{cases} -\frac{-0.2r\pi^{1.5} + (1.5r^2q + rv^\perp + (v^\perp)^2q)\pi^{0.5} + 2\pi\sqrt{2}}{\pi^{1.5}} = 0, \\ \frac{-3(v^\perp)^2w^\perp + (\pi - 4r)v^\perp - 2r^2w^\perp}{2\pi} = 0. \end{cases} \quad (1.7.3)$$

В зависимости от начальных условий задача (1.7.1), (1.7.2) с условием Шоултера – Сидорова может иметь одно, два или не иметь решений вообще. Фазовое пространство в случае, когда $\varepsilon_1 = 0$, изображено на рис. 1.7.1 а).

б) В случае, когда $\varepsilon_2 = 0$, фазовое пространство (1.7.1), (1.7.2) является простым C^∞ -многообразием, а значит, согласно теореме 1.4.1, задача (1.7.1), (1.7.2) с условием Шоултера – Сидорова будет иметь только одно решение. Для данной системы фазовое пространство может быть описано на основе:

$$\begin{aligned} \frac{15r^2q + (9\pi + 20w^\perp)r + 20q(0.5 + \pi)}{10\pi} &= 0, \\ \frac{15(v^\perp)^2w^\perp + (9\pi + 20q)v^\perp + (10 + 80\pi)w^\perp}{10\pi} &= 0. \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

Оно изображено на рис. 1.7.1 б).

в) Согласно теореме 1.4.2 фазовое пространство (1.7.1), (1.7.2) в случае, когда ε_1 и ε_2 , оба ненулевые является пересечением фазовых пространств (1.7.3) и (1.7.4), оно изображено на рис. 1.7.1 в).

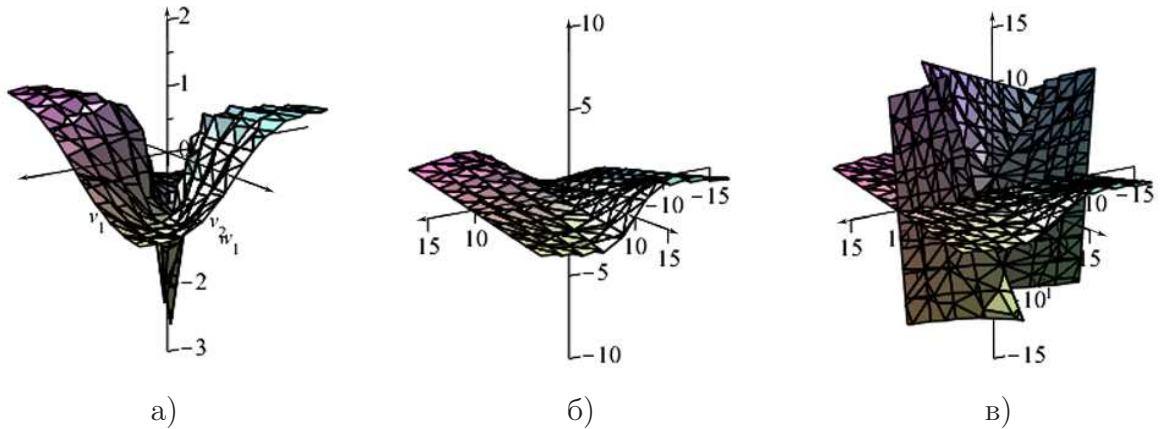


Рис. 1.7.1. Фазовое пространство (1.7.1), (1.7.2) при:

а) $\varepsilon_1 = 0$, б) $\varepsilon_2 = 0$, в) $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$

Пример 1.7.2. Рассмотрим систему уравнений (1.7.1) с краевым условием (1.7.2). Требуется найти решение задачи (1.7.1), (1.7.2) с начальным условием

$$w(s, 0) = w_0(s) \text{ для случая } \varepsilon_1 = 0, \quad (1.7.5)$$

или

$$v(s, 0) = v_0(s) \text{ для случая } \varepsilon_2 = 0$$

при $\Omega = (0, \pi)$, $T = 1$ и если: а) $\varepsilon_1 = 0$, $w_0(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin(3s) + \sin(2s) + \sin(s))$ [65]; б) $\varepsilon_1 = 0$, $w_0(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(3s) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(s) + 0.653880492266947 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2s)$ [64]; в) $\varepsilon_2 = 0$, $v_0(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin(3s) + \sin(s) + \sin(2s))$.

Данные начальных условий пунктов а) и б) взяты из работ [64, 65]. Так как собственные функции задачи (1.2.7) в области Ω имеют вид $\varphi_k(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(ks)$, то согласно алгоритму приближенные решения задачи (1.7.1),

(1.7.2), (1.7.5) можно представить как $\tilde{v}(s, t) = v^m(s, t) = \sum_{i=1}^m v_i(t) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(is)$,

$\tilde{w}(s, t) = w^m(s, t) = \sum_{i=1}^m w_i(t) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(is)$. Число слагаемых m в приближении

будем изменять от 2 до 6, для проверки того, что найденные приближенные решения достаточно близки к точному. Как видно из результатов примера 1.7.1, (1.7.1), (1.7.2) в случаях а) и б) может иметь два или одно решение.

Осуществим проверку неединственности решения данной задачи. Примем за $r = v_1(0)$, $v^\perp = \sum_{i=2}^m v_i(0) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(is)$, $w^\perp = \tilde{w}(s, 0)$.

а) Подставим полученные значения $r = 9,56734$, $v^\perp = 5,24165$, $w^\perp = 0,674329$ в формулу (1.3.5) и получим значение $\Re s = 10,195082164$. Согласно теореме 1.3.2 это означает, что задача (1.7.1), (1.7.2), (1.7.5) при заданном начальном значении функции $w_0(s)$ будет иметь два решения. Следуя алгоритму,

получим систему алгебро-дифференциальных уравнений. Разрешив алгебраическое уравнение системы относительно v_i, w_i в начальный момент времени, получим два набора начальных условий (v_{01}, w_0) и (v_{02}, w_0) . Решая систему алгебро-дифференциальных уравнений при различном количестве приближений m , методом Рунге – Кутта, получим два численных решения. Численное решение, соответствующее набору начальных условий (v_{01}, w_0) , представлено в таблице 1.7.2 и на рисунке 1.7.2 а) при $m = 3$. Отличное от него численное решение, соответствующее набору начальных условий (v_{02}, w_0) , представлено в таблице 1.7.3 и на рисунке 1.7.2 б) также при $m = 3$.

Найдем вычислительную точность численного решения задачи (1.7.1), (1.7.2), (1.7.5)

– с набором начальных данных (v_{01}, w_0) :

$$\delta_{1_1}^{m_1, m_2} = \int_0^T \max_{s \in \Omega} |v_1^{m_1} - v_1^{m_2}| dt, \delta_{2_1}^{m_1, m_2} = \int_0^T \max_{s \in \Omega} |w_1^{m_1} - w_1^{m_2}| dt,$$

– с набором начальных данных (v_{02}, w_0) :

$$\delta_{1_2}^{m_1, m_2} = \int_0^T \max_{s \in \Omega} |v_2^{m_1} - v_2^{m_2}| dt, \delta_{2_2}^{m_1, m_2} = \int_0^T \max_{s \in \Omega} |w_2^{m_1} - w_2^{m_2}| dt,$$

где $m_1 = \overline{2, 5}$, $m_2 = \overline{3, 6}$. Приведем полученные значения $\delta_{1_1}^{m_1, m_2}$, $\delta_{2_1}^{m_1, m_2}$, $\delta_{1_2}^{m_1, m_2}$, $\delta_{2_2}^{m_1, m_2}$ в таблице 1.7.1.

Таблица 1.7.1. Вычислительная погрешность для каждого из полученных численных решений задачи (2.7.1), (2.7.2), (2.7.5) в случае $\varepsilon_1 = 0$

m_1, m_2	2,3	3,4	4,5	5,6
$\delta_{1_1}^{m_1, m_2}$	$0.34 \cdot 10^{-7}$	$0.13 \cdot 10^{-7}$	$0.52 \cdot 10^{-8}$	$0.05 \cdot 10^{-10}$
$\delta_{1_2}^{m_1, m_2}$	$0.33 \cdot 10^{-7}$	$0.12 \cdot 10^{-7}$	$0.53 \cdot 10^{-8}$	$0.03 \cdot 10^{-10}$
$\delta_{2_1}^{m_1, m_2}$	$0.14 \cdot 10^{-7}$	$0.10 \cdot 10^{-7}$	$0.54 \cdot 10^{-8}$	$0.01 \cdot 10^{-10}$
$\delta_{2_2}^{m_1, m_2}$	$0.13 \cdot 10^{-7}$	$0.11 \cdot 10^{-7}$	$0.55 \cdot 10^{-8}$	$0.01 \cdot 10^{-11}$

Как видно из таблицы 1.7.1 все значения $\delta_{1_1}^{m_1, m_2}$, $\delta_{2_1}^{m_1, m_2}$, $\delta_{1_2}^{m_1, m_2}$, $\delta_{2_2}^{m_1, m_2}$ уменьшаются с ростом числа слагаемых.

б) Вследствие того, что в этом пункте изменилось начальное значение для компоненты $w(s, t)$, необходимо пересчитать значения r, v^\perp, w^\perp . Так как при различных начальных функциях задача (1.7.1), (1.7.2), (1.7.5) может иметь разное число решений. Действительно, пересчитав значения r, v^\perp, w^\perp для пункта б) и подставив их в формулы (1.3.5), получим значение $\Re s = 0$.

Согласно теореме 1.3.2, это означает, что задача (1.7.1), (1.7.2), (1.7.5) будет иметь только одно решение. Согласно алгоритму, получим систему алгебро-дифференциальных уравнений. Разрешив алгебраическое уравнение системы относительно v_i , w_i в начальный момент времени, получим один набор начальных условий (v_0, w_0) . Решая систему алгебро-дифференциальных уравнений при различном количестве приближений m , получим одно численное решение, которое представлено на рисунке 1.7.3 а) при $m = 3$.

Для полученного численного решения найдем вычислительную точность по формулам $\delta_1^{m_1, m_2} = \int_0^T \max_{s \in \Omega} |v^{m_1} - v^{m_2}| dt$, $\delta_2^{m_1, m_2} = \int_0^T \max_{s \in \Omega} |w^{m_1} - w^{m_2}| dt$, $m_1 = \overline{2, 5}$, $m_2 = \overline{3, 6}$. Приведем полученные значения $\delta_1^{m_1, m_2}$, $\delta_2^{m_1, m_2}$:

$$\begin{aligned} \delta_1^{2,3} &= 0.23 \cdot 10^{-7}, & \delta_1^{3,4} &= 0.11 \cdot 10^{-9}, & \delta_1^{4,5} &= 0.44 \cdot 10^{-11}, & \delta_1^{5,6} &= 0.02 \cdot 10^{-13}, \\ \delta_2^{2,3} &= 0.24 \cdot 10^{-7}, & \delta_2^{3,4} &= 0.12 \cdot 10^{-9}, & \delta_2^{4,5} &= 0.32 \cdot 10^{-11}, & \delta_2^{5,6} &= 0.01 \cdot 10^{-13}. \end{aligned}$$

Все значения $\delta_1^{m_1, m_2}$, $\delta_2^{m_1, m_2}$ уменьшаются с ростом числа слагаемых.

в) В отличие от пунктов а) и б) данного примера, при $\varepsilon_2 = 0$ нет необходимости проверять возможную неединственность решения. Согласно теореме 1.4.1 задача (1.7.1), (1.7.2), (1.7.5) всегда будет иметь лишь одно решение. Поэтому можно сразу получить систему алгебро-дифференциальных уравнений. Разрешив алгебраическое уравнение системы относительно v_i , w_i в начальный момент времени, получим набор начальных условий (v_0, w_0) . Решая систему алгебро-дифференциальных уравнений при различном количестве приближений m , получим одно численное решение, которое представлено на рисунке 1.7.3 б).

Для полученного численного решения найдем вычислительную точность по формулам $\delta_1^{m_1, m_2} = \int_0^T \max_{s \in \Omega} |v^{m_1} - v^{m_2}| dt$, $\delta_2^{m_1, m_2} = \int_0^T \max_{s \in \Omega} |w^{m_1} - w^{m_2}| dt$, $m_1 = \overline{2, 5}$, $m_2 = \overline{3, 6}$. Приведем полученные значения $\delta_1^{m_1, m_2}$, $\delta_2^{m_1, m_2}$:

$$\begin{aligned} \delta_1^{2,3} &= 0.34 \cdot 10^{-7}, & \delta_1^{3,4} &= 0.12 \cdot 10^{-8}, & \delta_1^{4,5} &= 0.53 \cdot 10^{-9}, & \delta_1^{5,6} &= 0.03 \cdot 10^{-10}, \\ \delta_2^{2,3} &= 0.35 \cdot 10^{-7}, & \delta_2^{3,4} &= 0.13 \cdot 10^{-8}, & \delta_2^{4,5} &= 0.51 \cdot 10^{-9}, & \delta_2^{5,6} &= 0.02 \cdot 10^{-11}. \end{aligned}$$

Все значения $\delta_1^{m_1, m_2}$, $\delta_2^{m_1, m_2}$ уменьшаются с ростом числа слагаемых.

Таблица 1.7.2. Численное решение задачи (1.7.1), (1.7.2), (1.7.5) с набором начальных условий (v_{01}, w_0) в случае $\varepsilon_1 = 0$ при $m = 3$

t	$v_1(t)$	$v_2(t)$	$v_3(t)$	$w_1(t)$	$w_2(t)$	$w_3(t)$
0	1.15499258800000	0.100703223900000	0.100703223900000	1	1	1
0.1	1.13091300865879	0.0915761436729783	0.0915761436729783	0.983191862685879	0.956086209100965	0.956086209100965
0.2	1.11113418166735	0.0839647612201597	0.0839647612201597	0.966984566167967	0.914302021522349	0.914302021522349
0.3	1.09438527020303	0.0774442616854444	0.0774442616854444	0.951300344626148	0.874501038918152	0.874501038918152
0.4	1.07989135215229	0.0717528848871815	0.0717528848871815	0.936081996959203	0.836558957810157	0.836558957810157
0.5	1.06714224086009	0.0667164178561089	0.0667164178561089	0.921285427505521	0.800366818774983	0.800366818774983
0.6	1.05578302407537	0.0622122900372529	0.0622122900372529	0.906875448647318	0.765827087261352	0.765827087261352
0.7	1.04555676049548	0.0581507021497262	0.0581507021497262	0.892823246360039	0.732851208922288	0.732851208922288
0.8	1.03627072057588	0.0544634583290465	0.0544634583290465	0.879104724994309	0.701357923401432	0.701357923401432
0.9	1.02777710230256	0.0510975696354833	0.0510975696354833	0.865699384915246	0.671272114225479	0.671272114225479
1.0	1.01995956071703	0.0480107581683495	0.0480107581683495	0.852589546679944	0.642523913726937	0.642523913726937

Таблица 1.7.3. Численное решение задачи (1.7.1), (1.7.2), (1.7.5) с набором начальных условий (v_{02}, w_0) в случае $\varepsilon_1 = 0$ при $m = 3$

t	$v_1(t)$	$v_2(t)$	$v_3(t)$	$w_1(t)$	$w_2(t)$	$w_3(t)$
0	1.99705564800000	1.99705564800000	0.356770709700000	1	1	1
0.1	2.16789625353790	0.404189262838616	0.404189262838616	0.964497971502713	0.942141235536325	0.942141235536325
0.2	2.35150176765813	0.454764693829648	0.454764693829648	0.925834815376265	0.884158601940754	0.884158601940754
0.3	2.55552835757522	0.510809012983050	0.510809012983050	0.883712274044899	0.825845508345730	0.825845508345730
0.4	2.78901377990391	0.575025019932366	0.575025019932366	0.837672221015812	0.766883020454749	0.766883020454749
0.5	3.06450658954734	0.651162704371789	0.651162704371789	0.787050303280497	0.706809478874076	0.706809478874076
0.6	3.40138236086032	0.745038555718152	0.745038555718152	0.730878398176508	0.644952144471025	0.644952144471025
0.7	3.83260355511482	0.866623885155125	0.866623885155125	0.667693256494470	0.580289465720425	0.580289465720425
0.8	4.42114960901563	1.03516335983599	1.03516335983599	0.595133093916222	0.511154850487878	0.511154850487878
0.9	5.30914578500028	1.29465056450397	1.29465056450397	0.508956266761393	0.434501462545126	0.434501462545126
1.0	6.92290904055758	1.77942680563456	1.77942680563456	0.399972401540274	0.343548175999957	0.343548175999957

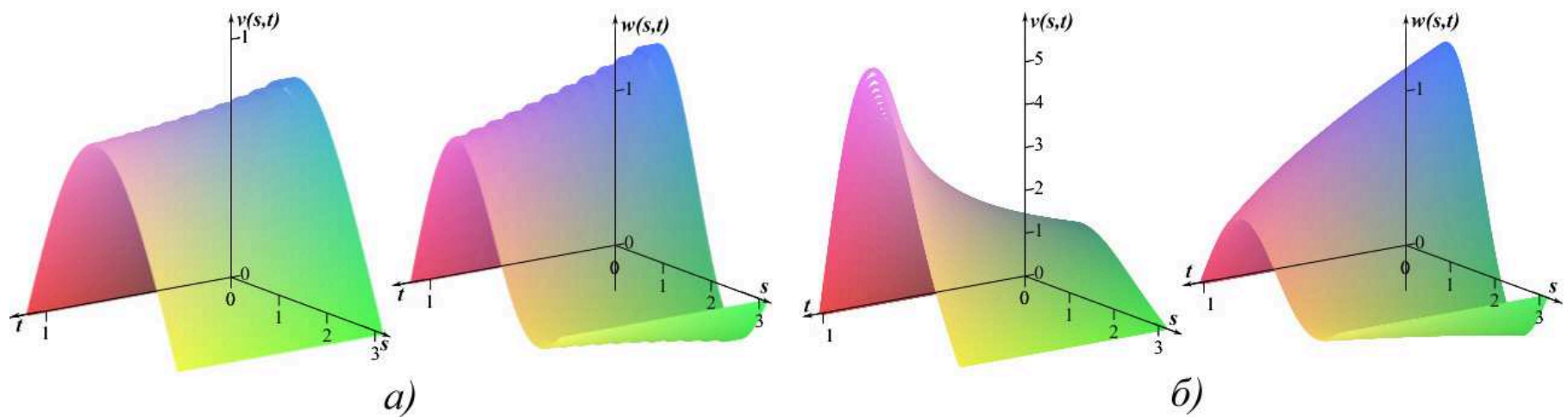


Рис. 1.7.2. Численное решение задачи (1.7.1), (1.7.2), (1.7.5) в случае $\varepsilon_1 = 0$ при $m = 3$ с набором начальных условий:
 а) (v_{01}, w_0) ; б) (v_{02}, w_0)

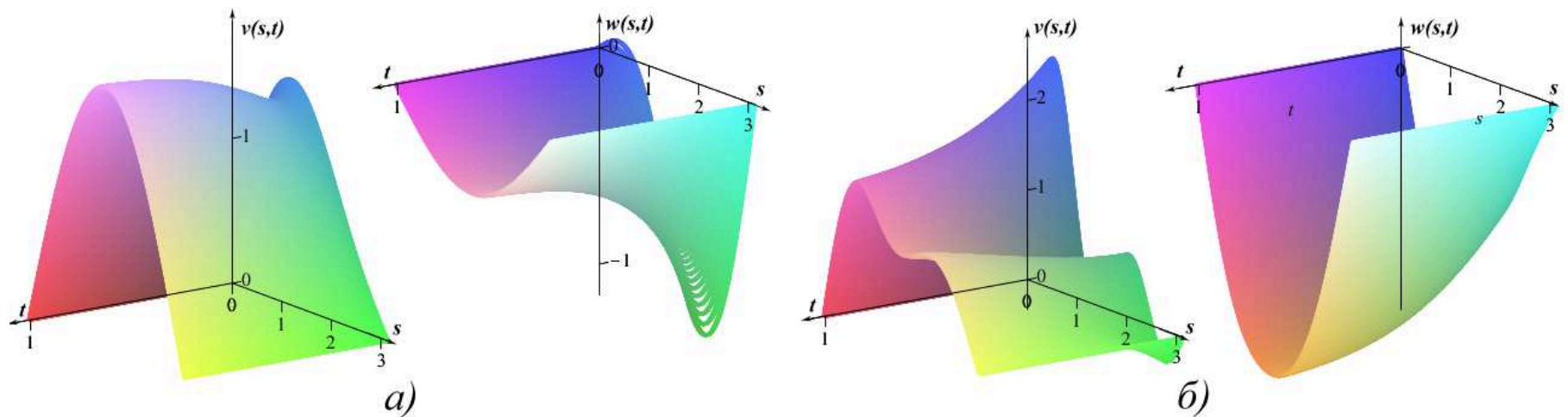


Рис. 1.7.3. Численное решение задачи (1.7.1), (1.7.2), (1.7.5) при $m = 3$ с набором начальных условий (v_0, w_0) в случае:
 а) $\varepsilon_1 = 0$; б) $\varepsilon_2 = 0$

Пример 1.7.3. Требуется найти решение задачи

$$w(s_1, s_2, 0) = w_0(s_1, s_2) \text{ для случая } \varepsilon_1 = 0, \quad (1.7.6)$$

или

$$v(s_1, s_2, 0) = v_0(s_1, s_2) \text{ для случая } \varepsilon_2 = 0$$

для системы уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_1 v_t = v_{s_1 s_1} + v_{s_2 s_2} + 1 - 2v + v^2 w, \\ \varepsilon_2 w_t = w_{s_1 s_1} + w_{s_2 s_2} - v^2 w, \end{cases} \quad (1.7.7)$$

с краевым условием

$$v(s_1, s_2, t) = w(s_1, s_2, t) = 0, \quad (s_1, s_2) \in \partial\Omega, t \in (0, T), \quad (1.7.8)$$

при $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$, $T = 1$ и если: а) $\varepsilon_1 = 0$, $w_0(s_1, s_2) = -\frac{2}{\pi}(\sin(s_1) \sin(s_2) + \sin(2s_1) \sin(s_2) + \sin(s_1) \sin(2s_2) + \sin(2s_1) \sin(s_2))$; б) $\varepsilon_2 = 0$, $v_0(s_1, s_2) = \frac{2}{\pi}(\sin(s_1) \sin(s_2) - \sin(2s_1) \sin(s_2) + \sin(s_1) \sin(2s_2) + \sin(2s_1) \sin(s_2))$.

Так как собственные функции задачи (1.2.7) в области Ω имеют вид $\varphi_{k_1, k_2}(s) = \frac{2}{\pi} \sin(k_1 s_1) \sin(k_2 s_2)$, $k_1 = \overline{1, 2}$, $k_2 = \overline{1, 2}$, то согласно алгоритму приближенные решения задачи (1.7.6) – (1.7.8) можно представить как $\tilde{v}(s_1, s_2, t) = v_{1,1}(t)\varphi_{1,1}(s_1, s_2) + v_{2,1}(t)\varphi_{2,1}(s_1, s_2) + v_{1,2}(t)\varphi_{1,2}(s_1, s_2) + v_{2,2}(t) \cdot \varphi_{2,2}(s_1, s_2)$, $\tilde{w}(s_1, s_2, t) = w_{1,1}(t)\varphi_{1,1}(s_1, s_2) + w_{2,1}(t)\varphi_{2,1}(s_1, s_2) + w_{1,2}(t) \cdot \varphi_{1,2}(s_1, s_2) + w_{2,2}(t)\varphi_{2,2}(s_1, s_2)$.

а) В случае $\varepsilon_1 = 0$ задача (1.7.6) – (1.7.8) может иметь два или одно решение. Осуществим проверку неединственности решения данной задачи. Примем за $r = v_{1,1}(0)$, $v^\perp = \frac{2}{\pi} \sin(2s_1) \sin(s_2) + \frac{2}{\pi} \sin(s_1) \sin(2s_2) + \frac{2}{\pi} \sin(2s_1) \sin(s_2)$, $w^\perp = \tilde{w}(s_1, s_2, 0)$. Подставим полученные значения r, v^\perp, w^\perp в формулу (1.3.5) и получим значение $\Re s = 18, 206193275$. Согласно теореме 1.3.2, это означает, что задача (1.7.6) – (1.7.8) при заданном начальном значении функции w_0 будет иметь два решения. Следуя алгоритму, получим систему алгебро-дифференциальных уравнений. Разрешив алгебраическое уравнение системы относительно $v_{k_1, k_2}, w_{k_1, k_2}$ в начальный момент времени, получим два набора начальных условий (v_{01}, w_0) и (v_{02}, w_0) . Решая систему алгебро-дифференциальных уравнений, получим два численных решения. Численное решение, соответствующее набору начальных условий (v_{01}, w_0) , представлено на рисунке 1.7.5 а) (слева построена компонента $v(s, 1)$, а справа – $w(s, 1)$). Отличное от него численное решение, соответствующее набору начальных условий (v_{02}, w_0) , представлено на рисунке 1.7.5 б) (слева построена компонента

$v(s, 1)$, а справа – $w(s, 1)$).

б) В отличие от пункта а) данного примера, при $\varepsilon_2 = 0$ нет необходимости проверять возможную неединственность решений. Согласно теореме 1.4.1 задача (1.7.6) – (1.7.8) всегда будет иметь лишь одно решение. Поэтому можно сразу получить систему алгебро-дифференциальных уравнений. Разрешив алгебраическое уравнение системы относительно v_{k_1, k_2} , w_{k_1, k_2} в начальный момент времени, получим набор начальных условий (v_0, w_0) . Решая систему алгебро-дифференциальных уравнений, получим одно численное решение, которое представлено на рисунке 1.7.4 (слева построена компонента $v(s, 1)$, а справа – $w(s, 1)$).

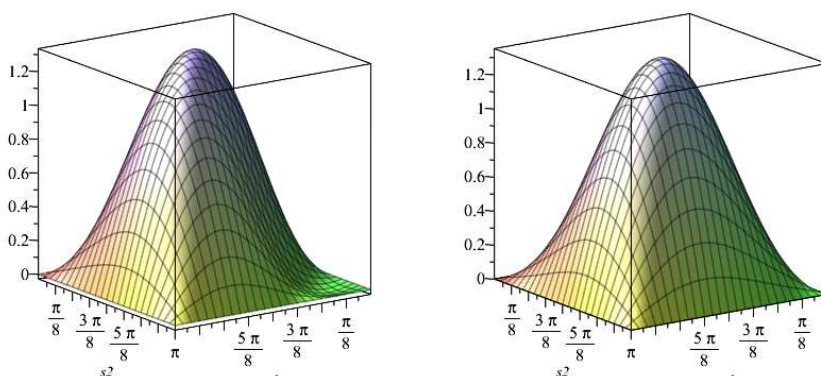


Рис. 1.7.4. Численное решение задачи (1.7.6) – (1.7.8) при $m = 3$ в случае $\varepsilon_2 = 0$ с набором начальных условий (v_0, w_0)

Пример 1.7.4. Требуется найти решение задачи

$$w_j(s, 0) = w_{0j}(s), j = \overline{1, 3}, \text{ для случая } \varepsilon_1 = 0, \quad (1.7.9)$$

или

$$v_j(s, 0) = v_{0j}(s), j = \overline{1, 3}, \text{ для случая } \varepsilon_2 = 0$$

для системы уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_1 v_{jt} = 4v_{jss} + 2 - v_j + v_j^2 w_j, \\ \varepsilon_2 w_{jt} = w_{jss} - v_j^2 w_j, \end{cases} j = \overline{1, 3}, \quad (1.7.10)$$

на графе \mathbf{G} (рис. 1.7.6) с условиями:

$$\begin{aligned} v_{1s}(l_1, t) - v_{2s}(0, t) - v_{3s}(0, t) = 0, v_{2s}(l_2, t) = v_{1s}(0, t) = v_{3s}(l_3, t) = 0, \\ v_1(l_1, t) = v_2(0, t), v_1(l_1, t) = v_3(0, t), w_{1s}(l_1, t) - w_{2s}(0, t) - w_{3s}(0, t) = 0, \\ w_{2s}(l_2, t) = w_{1s}(0, t) = w_{3s}(l_3, t) = 0, \\ w_1(l_1, t) = w_2(0, t), w_1(l_1, t) = w_3(0, t), t \in (0, T), \end{aligned} \quad (1.7.11)$$

при $l_1 = \pi, l_2 = \pi, l_3 = \pi, T = 1$, и если: а) $\varepsilon_1 = 0, w_{01} = \sqrt{\frac{6}{\pi}}(-\cos \frac{s}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3s}{2}), w_{02} = (\sqrt{\frac{6}{\pi}} + \frac{1}{2}) \sin \frac{s}{2} - (\sqrt{\frac{6}{3\pi}} + 1) \sin \frac{3s}{2}, w_{03} = -\frac{1}{2} \sin \frac{s}{2} + \sin \frac{3s}{2}$;
 б) $\varepsilon_2 = 0, v_{01} = \sqrt{\frac{6}{\pi}}(-\cos \frac{s}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3s}{2}), v_{02} = (\sqrt{\frac{6}{\pi}} + \frac{1}{2}) \sin \frac{s}{2} - (\sqrt{\frac{6}{3\pi}} + 1) \sin \frac{3s}{2}, v_{03} = -\frac{1}{2} \sin \frac{s}{2} + \sin \frac{3s}{2}$.

Согласно алгоритму приближенные решения задачи (1.7.9) – (1.7.11) для j -го ребра ($j = \overline{1, 3}$) графа имеют вид $\tilde{v}_j(s, t) = \varphi_{0j}(s)v_1(t) + \varphi_{1j}(s)v_2(t), \tilde{w}_j(s, t) = \varphi_{0j}(s)w_1(t) + \varphi_{1j}(s)w_2(t)$, где $\varphi_0 = (\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}) = (\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{\pi}} \cos \frac{s}{2}, (-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{\pi}} - 1) \sin \frac{s}{2}, \sin \frac{s}{2}), \varphi_1 = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13}) = (\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{\pi}} \cos \frac{3s}{2}, (-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{\pi}} - 1) \sin \frac{3s}{2}, \sin \frac{3s}{2})$ [2].

а) В случае $\varepsilon_1 = 0$ задача (1.7.9) – (1.7.11) может иметь два решения. Осуществим проверку неединственности решения данной задачи. Примем за $r = v_1(0), v^\perp = \varphi_{2j}(s)v_2(t), w^\perp = \tilde{w}_j(0), j = \overline{1, 3}$. Подставим полученные значения r, v^\perp, w^\perp в формулу (1.3.5) и получим значение $\Re\text{es} = 53.8058602055218$. Согласно теореме 1.3.2, это означает, что задача (1.7.9) – (1.7.11) при заданных начальных значениях функций $w_{0j}, j = \overline{1, 3}$, будет иметь два решения. Следуя алгоритму, получим систему алгебро-дифференциальных уравнений. Разрешив алгебраическое уравнение системы относительно v_i, w_i в начальный момент времени, получим два набора начальных условий (v_{01}, w_0) и (v_{02}, w_0) . Решая систему алгебро-дифференциальных уравнений, получим два численных решения. Численное решение, соответствующее набору начальных условий (v_{01}, w_0) , представлено на рисунке 1.7.4. Отличное от него численное решение, соответствующее набору начальных условий (v_{02}, w_0) , представлено в таблице 1.7.5.

б) В отличие от пункта а) данного примера, при $\varepsilon_2 = 0$ нет необходимости проверять возможную неединственность решения. Согласно теореме 1.4.1, задача (1.7.9) – (1.7.11) всегда будет иметь лишь одно решение. Разрешив алгебраическое уравнение системы относительно v_i, w_i в начальный момент времени, получим набор начальных условий (v_0, w_0) . Решая систему алгебро-дифференциальных уравнений, получим одно численное решение, которое представлено в таблице 1.7.6.

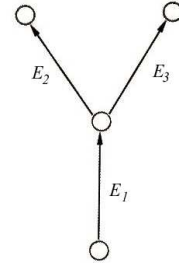


Рис. 1.7.6. Граф \mathbf{G}

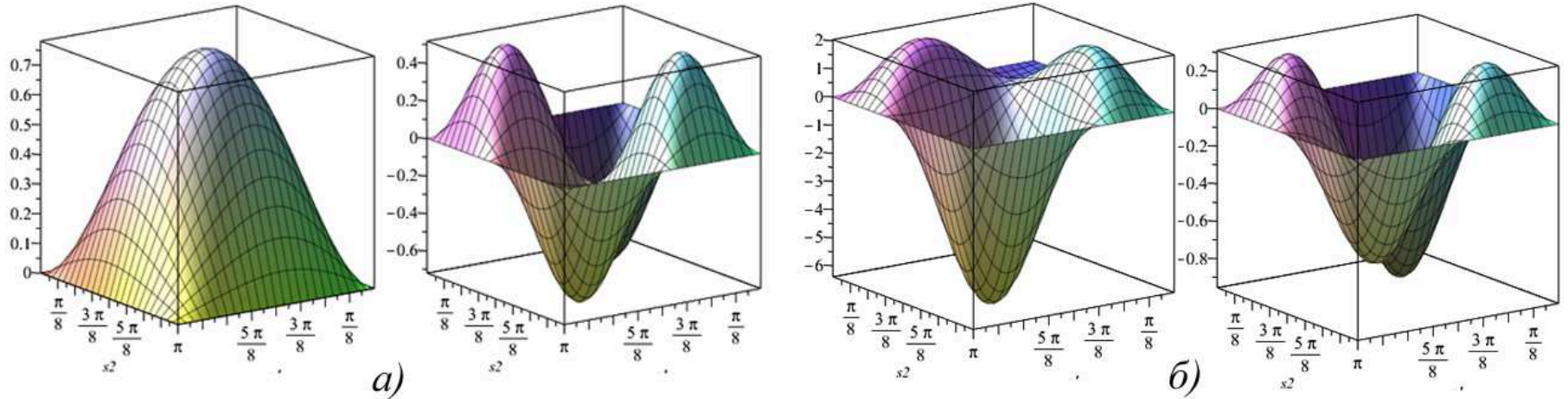


Рис. 1.7.5. Численное решение задачи (1.7.6) – (1.7.8) при $m = 3$ в случае $\varepsilon_1 = 0$ с набором начальных условий:
 а) (v_{01}, w_0) ; б) (v_{02}, w_0)

Таблица 1.7.4. Численное решение задачи (1.7.9) – (1.7.11) при $m = 3$ в случае $\varepsilon_1 = 0$ с набором начальных условий (v_{01}, w_0)

t	$v_1(t)$	$v_2(t)$	$v_3(t)$	$w_1(t)$	$w_2(t)$	$w_3(t)$
0	-1.44911470797121	0.229988916691769	0.229988916691769	-0.500000000000000	1	1
0.1	-1.528284084444936	0.245808299999361	0.245808299999361	-0.463646227947383	0.963252607865278	0.963252607865278
0.2	-1.62022902771312	0.264469871185117	0.264469871185117	-0.425758171618343	0.925477817710571	0.925477817710571
0.3	-1.72889997952667	0.286913881383380	0.286913881383380	-0.386064716116387	0.886385642181173	0.886385642181173
0.4	-1.86021212697983	0.314574096810633	0.314574096810633	-0.344204338622521	0.845581799675135	0.845581799675135
0.5	-2.02351857055313	0.349765743908065	0.349765743908065	-0.299676440943165	0.802507409644215	0.802507409644215
0.6	-2.23471218464261	0.396521754048956	0.396521754048956	-0.251752034387416	0.756325483195639	0.756325483195639
0.7	-2.52362421111754	0.462644593773035	0.462644593773035	-0.199293296033291	0.705684318824716	0.705684318824716
0.8	-2.95520235891492	0.565793040467829	0.565793040467829	-0.140332521661404	0.648144032467713	0.648144032467713
0.9	-3.71100910376227	0.758090904933902	0.758090904933902	-0.0708413482398127	0.578413234947255	0.578413234947255
1.0	-5.67204356305222	1.31793498635167	1.31793498635167	0.0209019469004039	0.479602748528915	0.479602748528915

Таблица 1.7.5. Численное решение задачи (1.7.9) – (1.7.11) при $m = 3$ в случае $\varepsilon_1 = 0$ с набором начальных условий (v_{02}, w_0)

t	$v_1(t)$	$v_2(t)$	$v_3(t)$	$w_1(t)$	$w_2(t)$	$w_3(t)$
0	-0.000110896853218813	-0.0233062926919557	-0.0233062926919557	-0.5000000000000000	1	1
0.1	-0.000108708455552789	-0.0233199546554915	-0.0233199546554915	-0.487633267337674	0.798461915960859	0.798461915960859
0.2	-0.000106457320946975	-0.0233308845381994	-0.0233308845381994	-0.475572309347222	0.637541374611089	0.637541374611089
0.3	-0.000104169422065884	-0.0233396247479933	-0.0233396247479933	-0.463809586140866	0.509052482242950	0.509052482242950
0.4	-0.000101865178178498	-0.0233466113579325	-0.0233466113579325	-0.452337739429970	0.406459033331608	0.406459033331608
0.5	-0.0000995605014997648	-0.0233521944660397	-0.0233521944660397	-0.441149589031932	0.324542083609387	0.324542083609387
0.6	-0.0000972676803382576	-0.0233566548329045	-0.0233566548329045	-0.430238129273219	0.259134515480222	0.259134515480222
0.7	-0.0000949961109944857	-0.0233602174142309	-0.0233602174142309	-0.419596525321790	0.206909064510247	0.206909064510247
0.8	-0.0000927528959541895	-0.0233630623255617	-0.0233630623255617	-0.409218109479042	0.165209050044967	0.165209050044967
0.9	-0.0000905433276927578	-0.0233653337007715	-0.0233653337007715	-0.399096377455673	0.131913192727554	0.131913192727554
1.0	-0.0000883712765408037	-0.0233671468270453	-0.0233671468270453	-0.389224984655019	0.105327727554903	0.105327727554903

Таблица 1.7.6. Численное решение задачи (1.7.9) – (1.7.11) при $m = 3$ в случае $\varepsilon_2 = 0$ с набором начальных условий (v_0, w_0)

t	$v_1(t)$	$v_2(t)$	$v_3(t)$	$w_1(t)$	$w_2(t)$	$w_3(t)$
0	5.25546182937300	5.25546182937300	5.25546182937300	-0.129954964971302	-0.00325108545148638	-0.00325108545148638
0.1	4.75003529559596	4.63978335624265	4.63978335624265	-0.146504597477948	-0.00267145051541017	-0.00267145051541017
0.2	4.29466876121199	4.09489078808647	4.09489078808647	-0.164463871116167	-0.00232357636893381	-0.00232357636893381
0.3	3.88455307389509	3.61273811877200	3.61273811877200	-0.183864222458400	-0.00228616072025219	-0.00228616072025219
0.4	3.51534885528871	3.18623966414138	3.18623966414138	-0.204726845670391	-0.00263365389960724	-0.00263365389960724
0.5	3.18314016276437	2.80915591354906	2.80915591354906	-0.227058759982082	-0.00342854439730565	-0.00342854439730565
0.6	2.88439240951118	2.47598911646743	2.47598911646743	-0.250845837705836	-0.00471307823037466	-0.00471307823037466
0.7	2.61591396075354	2.18188748740151	2.18188748740151	-0.276041929254068	-0.00650159781219987	-0.00650159781219987
0.8	2.37482085647997	1.92255759183392	1.92255759183392	-0.302554016651711	-0.00877486892153004	-0.00877486892153004
0.9	2.15850419227414	1.69418509419714	1.69418509419714	-0.330224687854963	-0.0114776583618430	-0.0114776583618430
1.0	1.96459983716277	1.49336448338527	1.49336448338527	-0.358814908761080	-0.0145204103481354	-0.0145204103481354

Глава 2. Методы и алгоритмы анализа однозначной разрешимости математических моделей распространения нервного импульса в мембранной оболочке

Для изучения феноменов, наблюдаемых в клетках поперечнополосатой мускулатуры, гладкой мускулатуры кишечника, сердечно-сосудистой системе необходимо понимание динамических принципов работы нейронов, аксонов, дендритов, которые окружены мембранной оболочкой. Мембранная оболочка обладает проводимостью, зависящей от своего текущего состояния, и свойствами, которые в свою очередь проявляются в динамике ионных токов Na_+ и K_+ и изменении потенциала мембранной оболочки, и генерирует нервный импульс, как ответ на внешнее воздействие.

Различными исследователями [6, 23, 86] в области современной биофизики было показано, что система уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_1 v_t = \alpha_1 v_{ss} + \beta_{12} w - \beta_{11} v, \\ \varepsilon_2 w_t = \alpha_2 w_{ss} + \beta_{22} w - \beta_{21} v - w^3 \end{cases} \quad (2.0.1)$$

позволяет исследовать не только процесс распространения нервного импульса, но и свертывание крови, сокращение сердечной мышцы, работу головного мозга. Как и в случае с остальными уравнениями реакции-диффузии, большинством исследователей система уравнений (2.0.1) рассматривалась лишь в предположении, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \neq 0$. Одной из особенностей уравнений реакции-диффузии является то, что скорость изменения одной из компонент системы (2.0.1) может значительно превосходить другую, в тоже время случаи когда $\varepsilon_1 = 0$ или $\varepsilon_2 = 0$, остаются малоизученными. В настоящей работе исследованы случаи $\varepsilon_1 = 0$ или(и) $\varepsilon_2 = 0$. В случае $\varepsilon_1 = 0$ показана простота фазового пространства и однозначная разрешимость данной системы уравнений с начально-краевыми условиями. А в случае, когда $\varepsilon_2 = 0$, фазовое пространство системы уравнений (2.0.1) содержит особенности типа сборки Уитни и, как следствие, может существовать несколько различных решений данной системы с начально-краевыми условиями. Также проведено аналитическое исследование однозначной разрешимости (2.0.1) с однородным краевым условием Дирихле в случае, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$.

2.1. Исследование единственности решения задачи Шоултера – Сидорова в случае $\varepsilon_1 = 0$

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \Delta v + \beta_{12} w - \beta_{11} v, \\ w_t = \alpha_2 \Delta w + \beta_{22} w - \beta_{21} v - w^3 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

с граничным условием

$$v(s, t) = 0, w(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (2.1.2)$$

и начальным условием

$$w(0) = w_0. \quad (2.1.3)$$

Для простоты изложения разобьем редукцию задачи (2.1.1), (2.1.2) к (0.0.19) в три этапа.

Этап 1. Возьмем банахово пространство $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, гильбертово пространство $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, скалярное произведение которого задается как $[x, \zeta] = \langle v, \xi \rangle + \langle w, \eta \rangle$, где $x = (v, w)$, $\zeta = (\xi, \eta)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ есть скалярное произведение, заданное на пространстве $L_2(\Omega)$. Обозначим через \mathfrak{Y} пространство сопряженное к \mathfrak{H} относительно двойственности $[\cdot, \cdot]$. Для пространств $\mathfrak{H}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ справедливо

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{Y}, \quad (2.1.4)$$

где все вложения плотны и непрерывны [51].

Этап 2. Определим линейные операторы $L, M : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ формулами

$$[Lx, \zeta] = \langle w, \eta \rangle, x, \zeta \in \mathfrak{X}, \quad (2.1.5)$$

$$[Mx, \zeta] = -\alpha_1 \langle v_{s_i}, \xi_{s_i} \rangle - \alpha_2 \langle w_{s_i}, \eta_{s_i} \rangle, x, \zeta \in \mathfrak{X}, \text{ где } \text{dom } M = \mathfrak{H}. \quad (2.1.6)$$

В силу задания операторы L, M обладают свойствами $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. Отметим, что для всех фиксированных значений параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M L -секториален, при этом условия (1.1.3) и (1.1.4) будут выполнены. Доказательство L -секториальности оператора M приведено в пункте 1.5.

Замечание 2.1.1. Заметим, что здесь и далее выполняется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам.

Этап 3. Зададим нелинейный оператор формулой

$$[N(x), \zeta] = \langle \beta_{12}w - \beta_{11}v, \xi \rangle + \langle \beta_{22}w - \beta_{21}v - w^3, \eta \rangle \quad (2.1.7)$$

и положим $\text{dom } N = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 = L_4(\Omega) \times L_4(\Omega)$, $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}_1^* \times \mathfrak{B}_2^* = L_{\frac{4}{3}}(\Omega) \times L_{\frac{4}{3}}(\Omega)$ пространство сопряженное к \mathfrak{B} относительно двойственности $[\cdot, \cdot]$. Для пространств $\mathfrak{H}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*$ при $n \leq 4$ справедливо

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{B}^* \hookrightarrow \mathfrak{Y}, \quad (2.1.8)$$

где все вложения плотны и непрерывны [51].

Лемма 2.1.1. *Для всех фиксированных значений параметров $\beta_{12}, \beta_{22}, \beta_{11}, \beta_{21} \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, оператор $N : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{Y}$ принадлежит классу C^∞ .*

Доказательство. Для доказательства утверждения леммы покажем, что оператор N действует из пространства \mathfrak{B} в пространство \mathfrak{B}^* , для этого рассмотрим

$$|[N(x), \zeta]| \leq (a_1 \|x\|_{\mathfrak{B}} + a_2 \|x\|_{\mathfrak{B}}^3) \cdot \|\zeta\|_{\mathfrak{B}}.$$

Через N'_x будем обозначать производную Фреше N в точке x . Принадлежность оператора N заданному классу получается из следующих оценок:

$$\begin{aligned} |[N'_x \zeta_1, \zeta_2]| &\leq (b_1 + b_2 \|x\|_{\mathfrak{B}}^2) \cdot \|\zeta_1\|_{\mathfrak{B}} \cdot \|\zeta_2\|_{\mathfrak{B}}, \\ |[N''_x \zeta_1 \zeta_2, \zeta_3]| &\leq c \|x\|_{\mathfrak{B}} \cdot \|\zeta_1\|_{\mathfrak{B}} \cdot \|\zeta_2\|_{\mathfrak{B}} \cdot \|\zeta_3\|_{\mathfrak{B}}, \\ |[N'''_x \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3, \zeta_4]| &\leq d \cdot \|\zeta_1\|_{\mathfrak{B}} \cdot \|\zeta_2\|_{\mathfrak{B}} \cdot \|\zeta_3\|_{\mathfrak{B}} \cdot \|\zeta_4\|_{\mathfrak{B}}, \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

которые справедливы в силу применения неравенства Гельдера, а также неравенств, справедливых в силу непрерывности вложения (2.1.8). Здесь постоянные $a_1, a_2, b_1, b_2, c, d \in \mathbb{R}_+$ зависят только от значений параметров $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 2}$, $j = \overline{1, 2}$ и области Ω . Остальные производные оператора N являются тождественными операторами.

Включение $N \in C^\infty(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ доказано. Утверждение теоремы имеет место в силу непрерывного вложения пространств $\mathfrak{B}^* \hookrightarrow \mathfrak{Y}$. \square

Для построения пространства \mathfrak{X}_α положим $\mathfrak{X}_\alpha = \mathfrak{X}_1^0 \oplus \mathfrak{X}_\alpha^1$, где $\mathfrak{X}_1^0 = W_2^1(\Omega) \times \{0\}$, $\mathfrak{X}_\alpha^1 = \{0\} \times \mathfrak{X}^\alpha$, $\mathfrak{X}^\alpha = L_4(\Omega)$. Для пространств $\mathfrak{H}, \mathfrak{X}_\alpha, \mathfrak{B}, \mathfrak{X}$ при $n \leq 4$ справедливо

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{X}_\alpha \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{X}, \quad (2.1.10)$$

где все вложения плотны и непрерывны [51].

Итак, мы редуцировали (2.1.1), (2.1.2) к (0.0.19). Далее, исследуем вопрос однозначной разрешимости (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3).

Как было показано в пункте 1.1, в нашем случае все решения уравнения (0.0.19) лежат поточечно во множестве \mathfrak{P} (1.1.7), которое примет вид

$$\mathfrak{P}_{\varepsilon_1} = \{x \in \mathfrak{X}_\alpha : \langle \alpha_1 v_{s_i}, \xi_{s_i} \rangle + \langle \beta_{11} v, \xi \rangle = \langle \beta_{12} w, \xi \rangle\}. \quad (2.1.11)$$

Теорема 2.1.1. *Для всех фиксированных значений параметров $\alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_{21}, \beta_{22} \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbb{R}_+$, $n \leq 4$, и любого $x_0 \in \mathfrak{X}_\alpha$ существует и единственно решение (2.1.1) – (2.1.3).*

Доказательство. Построим вспомогательный оператор

$$\langle Av, \xi \rangle = \langle \alpha_1 v_{s_i}, \xi_{s_i} \rangle + \langle \beta_{11} v, \xi \rangle, \quad (2.1.12)$$

$v, \xi \in \mathfrak{H}_1$. Поскольку

$$|\langle Av, \xi \rangle| \leq a \|v\|_{\mathfrak{H}_1} \|\xi\|_{\mathfrak{H}_1},$$

где константа $a \in \mathbb{R}_+$ зависит от β_{11}, α_1 , констант вложений (2.1.4), и не зависит от v, ξ , то тем самым доказано действие оператора $A : \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_1^*$.

Полученный оператор $A : \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_1^*$ коэрцитивен, т.е.

$$\begin{aligned} & \lim_{\|v\|_{\mathfrak{H}_1} \rightarrow +\infty} \langle Av, v \rangle \|v\|_{\mathfrak{H}_1}^{-1} = \\ & = \lim_{\|v\|_{\mathfrak{H}_1} \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} (\alpha_1 v_{s_i}^2 + \beta_{11} v^2) ds \right) \cdot \left(\int_{\Omega} (v_{s_i}^2 + v^2) ds \right)^{-\frac{1}{2}} = +\infty. \end{aligned}$$

Кроме того, оператор A строго монотонен, т.е.

$$\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle = \int_{\Omega} (\alpha_1 (v_{1s_i} - v_{2s_i})^2 + \beta_{11} (v_1 - v_2)^2) ds > 0$$

как только $v_1 \neq v_2$. Наконец, покажем гладкость оператора A . Действительно,

$$|\langle A'_v \xi_2, \xi_1 \rangle| = \left| \int_{\Omega} (\alpha_1 \xi_{1s_i} \xi_{2s_i} + \beta_{11} \xi_1 \xi_2) ds \right| \leq b \|\xi_1\|_{\mathfrak{H}_1} \|\xi_2\|_{\mathfrak{H}_1},$$

где константа b зависит только от α_1, β_{11} и констант вложения (2.1.4). Стало быть оператор A непрерывно дифференцируем, а отсюда очевидным образом, следует его радиальная непрерывность.

Применив теорему 1.1.6, получим биективность оператора $A'_v : \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_1^*$. Из непрерывности оператора A'_v , и по теореме Банаха получим, что $(A'_v)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1^*, \mathfrak{H}_1)$. Остальные производные Фреше оператора A равны нулю.

Оператор A оказался биекцией, тогда существует обратный оператор $A^{-1} \in C^\infty(\mathfrak{H}_1^*, \mathfrak{H}_1)$. Построим оператор $D(w) = (A^{-1}(w), w)$, $\text{dom } D = \mathfrak{X}_\alpha^1$. А значит, в силу теоремы 1.1.5 утверждение теоремы справедливо. \square

2.2. Исследование единственности решения задачи Шоуолтера – Сидорова в случае $\varepsilon_2 = 0$

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} v_t = \alpha_1 \Delta v + \beta_{12} w - \beta_{11} v, \\ 0 = \alpha_2 \Delta w + \beta_{22} w - \beta_{21} v - w^3, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

с граничными условиями (2.1.2) и начальным условием

$$v(0) = v_0. \quad (2.2.2)$$

Для простоты изложения разобьем редукцию задачи (2.2.1), (2.1.2) к (0.0.19) в три этапа.

В связи с тем, что правая часть уравнений в системе (2.2.1), краевые условия (2.1.2) остались неизменны по сравнению с (2.1.1), (2.1.2), **этап 1** редукции задачи (2.2.1), (2.1.2) к (0.0.19) совпадает с **этапом 1** пункта 2.1. Это же справедливо и для построения оператора M из **этапа 2**. В то же время оператор L будет отличным от оператора, построенного в пункте 2.1, так как изменилась левая часть уравнений в системе (2.2.1). Поэтому построим линейный оператор $L : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ следующим образом

$$[Lx, \zeta] = \langle v, \xi \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{X}. \quad (2.2.3)$$

Отметим, что для всех фиксированных значений параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M L -секториален, при этом условия (1.1.3) и (1.1.4) будут выполнены. Доказательство L -секториальности оператора M приведено в пункте 1.2.

Этап 3 редукции задачи (2.2.1), (2.1.2) к (0.0.19) почти совпадает с **этапом 3** пункта 2.1. Отличие заключается лишь в построении интерполяционного пространства \mathfrak{X}_α . Возьмем $\mathfrak{X}_\alpha = \mathfrak{X}_1^0 \oplus \mathfrak{X}_\alpha^1$, где $\mathfrak{X}_1^0 = \{0\} \times W_2^1(\Omega)$,

$\mathfrak{X}_\alpha^1 = \mathfrak{X}^\alpha \times \{0\}$. Для пространств $\mathfrak{H}, \mathfrak{X}_\alpha, \mathfrak{B}, \mathfrak{X}$ при $n \leq 4$ справедливо

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{X}_\alpha \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{X}, \quad (2.2.4)$$

где все вложения плотны и непрерывны [51]. А значит, для всех фиксированных значений параметров $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 2}$, $j = \overline{1, 2}$, $n \leq 4$, оператор N является гладким класса $C^\infty(\mathfrak{X}_\alpha; \mathfrak{Y})$.

В нашем случае все решения уравнения (0.0.19) лежат поточечно во множестве \mathfrak{P} (1.1.7), которое примет вид

$$\mathfrak{P}_{\varepsilon_2} = \left\{ x \in \mathfrak{X}_\alpha : -\langle v, \eta \rangle = \left\langle -\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}}w + \frac{1}{\beta_{21}}w^3, \eta \right\rangle + \left\langle \frac{\alpha_2}{\beta_{21}}w_{s_i}, \eta_{s_i} \right\rangle \right\}. \quad (2.2.5)$$

Лемма 2.2.1. Пусть $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbb{R}$, $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbb{R}_+$, $\beta_{22} \in (-\infty, \alpha_2\nu_1)$, $n \leq 4$, где ν_1 есть первое собственное значение спектральной задачи (1.2.7), тогда для любого вектора $v \in \mathfrak{X}^\alpha$ существует единственный вектор $w \in \mathfrak{H}_2$ такой, что $x = \text{col}(v, w) \in \mathfrak{P}_{\varepsilon_2}$.

Доказательство. Построим вспомогательный оператор

$$\begin{aligned} \langle A(w), \eta \rangle &= \left\langle -\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}}w + \frac{1}{\beta_{21}}w^3, \eta \right\rangle + \left\langle \frac{\alpha_2}{\beta_{21}}w_{s_i}, \eta_{s_i} \right\rangle, \\ w, \eta &\in \mathfrak{H}_2, \text{ dom } A = \mathfrak{H}_2. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Поскольку

$$|\langle A(w_1), w_2 \rangle| \leq C_1(\|w_1\|_{\mathfrak{H}_2} + \|w_1\|_{\mathfrak{H}_2}^3)\|w_2\|_{\mathfrak{H}_2},$$

где константа $C_1 \in \mathbb{R}_+$ зависит от $\beta_{22}, \beta_{21}, \alpha_2$ и констант вложений (2.1.4) и не зависит от w , то тем самым доказано действие оператора $A : \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathfrak{H}_2^*$.

Отметим, что

$$\begin{aligned} \lim_{\|w\|_{\mathfrak{H}_2} \rightarrow +\infty} \langle A(w), w \rangle \|w\|_{\mathfrak{H}_2}^{-1} &= \lim_{\|w\|_{\mathfrak{H}_2} \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} \left(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}}w^2 + \frac{\alpha_2}{\beta_{21}}(w_{s_i})^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\beta_{21}}w^4 \right) ds \right) \cdot \left(\int_{\Omega} (w_{s_i}^2 + w^2) ds \right)^{-\frac{1}{2}} = +\infty \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \langle A(w_1) - A(w_2), w_1 - w_2 \rangle &= \int_{\Omega} \left(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}}(w_1 - w_2)^2 + \frac{\alpha_2}{\beta_{21}}(w_{1s_i} - w_{2s_i})^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta_{21}} \cdot (w_1 - w_2)^2(w_1^2 + w_1w_2 + w_2^2) \right) ds > 0, \forall w_1, w_2 \in \mathfrak{H}_2, \end{aligned}$$

как только $w_1 \neq w_2$, а значит, оператор $A : \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathfrak{H}_2^*$ коэрцитивен и строго монотонен. Кроме того,

$$\begin{aligned} |\langle A'_w w_1, w_2 \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \left(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w_2 w_1 + \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} w_{2s_i} w_{1s_i} + \frac{1}{\beta_{21}} 3w^2 w_2 w_1 \right) ds \right| \leq \\ &\leq (C_1 + C_2 \|w\|_{\mathfrak{H}_2}^2) \|w_2\|_{\mathfrak{H}_2} \|w_1\|_{\mathfrak{H}_2}, \end{aligned}$$

где константы C_1, C_2 зависят только от $\alpha_2, \beta_{22}, \beta_{21}$ и констант вложения (2.1.4), т.е. оператор A является гладким, а значит, он и радиально непрерывен. В силу теоремы 1.1.6, утверждение леммы справедливо. \square

Замечание 2.2.1. В работе [33] показано, что первому собственному значению ν_1 спектральной задачи (1.2.7) для любой области Ω всегда соответствует однократная собственная функция φ_1 , поэтому условие (1.3.3), поставленное в главе 1, всегда выполнено.

Лемма 2.2.2. Пусть $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbb{R}_+$, $\beta_{22} \in (-\infty, \alpha_2 \nu_1)$, $n \leq 4$, тогда оператор $A^{-1} \in C^\infty(\mathfrak{H}_2^*, \mathfrak{H}_2)$.

Доказательство. При доказательстве предыдущей леммы было доказано, что при любом $w \in \mathfrak{H}_2$ производная Фреше оператора A в точке w $A'_w \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_2^*)$. Далее, применив теорему 1.1.6, получим биективность оператора $A'_w : \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathfrak{H}_2^*$. А отсюда из ранее установленной непрерывности оператора A'_w , в силу теоремы Банаха получим, что $(A'_w)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_2^*, \mathfrak{H}_2)$, т.е. оператор $A^{-1} \in C^1(\mathfrak{H}_2^*, \mathfrak{H}_2)$. Покажем, что $A \in C^\infty(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_2^*)$. Действительно,

$$|\langle A''_w(w_1, w_2), w_3 \rangle| = \left| \int_{\Omega} \left(\frac{6}{\beta_{21}} w w_1 w_2 w_3 \right) ds \right| \leq C_3 \|w\|_{\mathfrak{H}_2}^2 \|w_1\|_{\mathfrak{H}_2} \|w_2\|_{\mathfrak{H}_2} \|w_3\|_{\mathfrak{H}_2},$$

$$|\langle A'''_w(w_1, w_2, w_3), w_4 \rangle| = \left| \int_{\Omega} \frac{6}{\beta_{21}} w_1 w_2 w_3 w_4 ds \right| \leq C_4 \|w_1\|_{\mathfrak{H}_2} \|w_2\|_{\mathfrak{H}_2} \|w_3\|_{\mathfrak{H}_2} \|w_4\|_{\mathfrak{H}_2},$$

где константы C_3, C_4 зависят только от β_{21} и констант вложения (2.2.4). Остальные производные Фреше оператора A равны нулю. А значит, что оператор A^{-1} принадлежит классу $C^\infty(\mathfrak{H}_2^*, \mathfrak{H}_2)$. \square

Лемма 2.2.3. Для любых $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbb{R}$, $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbb{R}_+$, $\beta_{22} \in (-\infty, \alpha_2 \nu_1)$, $n \leq 4$, фазовым пространством уравнения (2.2.1) служит множество $\mathfrak{P}_{\varepsilon_2}$, и оно является простым банаховым C^∞ -многообразием.

Доказательство. Построим оператор $D(v) = (v, A^{-1}(v))$, $\text{dom } D = \mathfrak{X}_\alpha^1$. А значит, в силу лемм 2.2.1, 2.2.2 оператор $D \in C^\infty(\mathfrak{X}_\alpha^1; \mathfrak{P}_{\varepsilon_2})$ и биективен, причем D^{-1} есть сужение на $\mathfrak{P}_{\varepsilon_2}$ проектора P . Отсюда, по определению 1.1.3 множество $\mathfrak{P}_{\varepsilon_2}$ является простым банаховым C^∞ -многообразием. \square

Теорема 2.2.1. *Для любых $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbb{R}$, $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbb{R}_+$, $\beta_{22} \in (-\infty, \alpha_2\nu_1)$, и любого $x_0 \in \mathfrak{X}_\alpha$ существует единственное решение задачи (2.1.2), (2.2.1), (2.2.2).*

Доказательство. В силу леммы 2.2.3 и теоремы 1.1.5 данное утверждение справедливо. \square

2.3. Исследование неединственности решения задачи Шоултера – Сидорова в случае $\varepsilon_2 = 0$

Рассмотрим случай $\beta_{22} = \alpha_2\nu_1$, положим

$$\mathfrak{X}^{\alpha^\perp} = \{v^\perp \in \mathfrak{X}^\alpha : \langle v^\perp, \varphi_1 \rangle = 0\}, \quad \mathfrak{H}_2^\perp = \{w^\perp \in \mathfrak{H}_2 : \langle w^\perp, \varphi_1 \rangle = 0\}.$$

Если $v \in \mathfrak{X}^{\alpha^\perp}$ и $w \in \mathfrak{H}_2$ представить в виде $v = v^\perp + r\varphi_1$ и $w = w^\perp + q\varphi_1$, где $r, q \in \mathbb{R}$, то множество $\mathfrak{P}_{\varepsilon_2}$ приобретает следующий вид:

$$\mathfrak{P}_{\varepsilon_2} = \left\{ x \in \mathfrak{X}_\alpha : \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} -v^\perp \eta^\perp ds = \int_{\Omega} \left(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w^\perp \eta^\perp + \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} w_{s_i}^\perp \eta_{s_i}^\perp + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_{21}} (w^\perp + q\varphi_1)^3 \eta^\perp \right) ds, \\ -\beta_{21}r = \int_{\Omega} (w^\perp + q\varphi_1)^3 \varphi_1 ds \end{array} \right. \right\}. \quad (2.3.1)$$

Если в систему уравнений, определяющую множество (2.2.5), подставить вместо $\beta_{22} = \alpha_2\nu_1$, то для того, чтобы получить первое уравнение системы (2.3.1) вместо η в (2.2.5) необходимо подставить $\eta = \eta^\perp$, а затем для получения второго уравнения (2.3.1) вместо η в (2.2.5) необходимо подставить $\eta = \varphi_1$.

Лемма 2.3.1. *Пусть $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbb{R}_+$, $\beta_{22} = \alpha_2\nu_1$, тогда для любого вектора $v^\perp \in \mathfrak{X}^{\alpha^\perp}$ существует единственный вектор $w^\perp \in \mathfrak{H}_2^\perp$ такой, что*

$$\int_{\Omega} -v^\perp \eta^\perp ds = \int_{\Omega} \left(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w^\perp \eta^\perp + \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} w_{s_i}^\perp \eta_{s_i}^\perp + \frac{1}{\beta_{21}} (w^\perp + q\varphi_1)^3 \eta^\perp \right) ds.$$

Доказательство. Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы 2.2.1. Зафиксируем $q \in \mathbb{R}$ и введём вспомогательный оператор $A : \mathfrak{H}_2^\perp \rightarrow \mathfrak{H}_2^{*\perp}$

$$\langle A(w^\perp + q\varphi_1), \eta \rangle = \int_{\Omega} \left(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w^\perp \eta^\perp + \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} w_{s_i}^\perp \eta_{s_i}^\perp + \frac{1}{\beta_{21}} (w^\perp + q\varphi_1)^3 \eta^\perp \right) ds, \quad (2.3.2)$$

где $\mathfrak{H}_2^{*\perp} = \{h \in \mathfrak{H}_2^* : (h, \varphi_1) = 0\}$. Тогда

$$|\langle A(w^\perp + q\varphi_1), \eta^\perp \rangle| \leq C_1 (\|w^\perp\|_{\mathfrak{H}_2^\perp} + \|w^\perp\|_{\mathfrak{H}_2^\perp}^2 + \|w^\perp\|_{\mathfrak{H}_2^\perp}^3) \|\eta^\perp\|_{\mathfrak{H}_2},$$

где константа $C_1 \in \mathbb{R}_+$ зависит от $\alpha_2, \beta_{21}, \beta_{22}$ и констант вложений (2.1.4), но не зависит от w^\perp, η^\perp .

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \lim_{\|w^\perp\|_{\mathfrak{H}_2^\perp} \rightarrow +\infty} \langle A(w^\perp + q\varphi_1), w^\perp \rangle \|w^\perp\|_{\mathfrak{H}_2^\perp}^{-1} = \\ & = \lim_{\|w^\perp\|_{\mathfrak{H}_2^\perp} \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} \left(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w^\perp + \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} w_{s_i}^\perp + \frac{1}{\beta_{21}} (w^\perp + q\varphi_1)^3 \right) ds \right) \cdot \\ & \quad \cdot \left(\int_{\Omega} ((w_s^\perp)^2 + (w^\perp)^2) ds \right)^{-\frac{1}{2}} = +\infty \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \langle A(w_1^\perp + q\varphi_1) - A(w_2^\perp + q\varphi_1), w_1^\perp - w_2^\perp \rangle &= \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_{21}} (w_{1s_i}^\perp - w_{2s_i}^\perp)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} (w_1^\perp - w_2^\perp)^2 + \frac{1}{\beta_{21}} ((w_1^\perp + q\varphi_1)^3 - (w_2^\perp + q\varphi_1)^3) (w_1^\perp - w_2^\perp) \right) ds = \\ & = \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_{21}} (w_{1s_i}^\perp - w_{2s_i}^\perp)^2 - \frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} (w_1^\perp - w_2^\perp)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\beta_{21}} (w_1^\perp - w_2^\perp)^2 ((w_1^\perp + q\varphi_1)^2 + (w_1^\perp + q\varphi_1)(w_2^\perp + q\varphi_1) + (w_2^\perp + q\varphi_1)^2) \right) ds > 0, \end{aligned}$$

как только $w_1^\perp \neq w_2^\perp$. А значит, оператор $A : \mathfrak{H}_2^\perp \rightarrow \mathfrak{H}_2^{*\perp}$ коэрцитивен и строго монотонен. Кроме того,

$$\begin{aligned} & \langle A'_{w^\perp} w_1^\perp, w_2^\perp \rangle = \\ & \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_{21}} w_{1s_i}^\perp w_{2s_i}^\perp - \frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w_1^\perp + 3 \frac{1}{\beta_{21}} (w^\perp + q\varphi_1)^2 w_1^\perp w_2^\perp \right) ds, \end{aligned}$$

где $w_1^\perp, w_2^\perp \in \mathfrak{H}_2^\perp$, т.е. оператор A является гладким, а значит, он и радиально непрерывен. В силу теоремы 1.1.6 справедливо утверждение леммы. \square

Перейдем ко второму уравнению системы, определяющей множество (2.3.1). Преобразуя получившееся уравнение, получим:

$$q^3 \|\varphi_1\|_{L_4(\Omega)}^4 + 3q^2 \int_{\Omega} w^\perp \varphi_1^3 ds + 3q \int_{\Omega} (w^\perp)^2 \varphi_1^2 ds + \int_{\Omega} \varphi_1 (w^\perp)^3 ds + \beta_{21} r = 0. \quad (2.3.3)$$

Уравнение (2.3.3) является кубическим уравнением общего вида $aq^3 + bq^2 + cq + d = 0$ относительно q . Согласно формулам Кардано, любое кубическое уравнение общего вида при помощи замены $q = y - \frac{b}{3a}$ может быть приведено к канонической форме $y^3 + py + e = 0$ с коэффициентами

$$\begin{aligned} a &= \|\varphi_1\|_{L_4(\Omega)}^4, \quad b = 3 \int_{\Omega} w^\perp \varphi_1^3 ds, \quad c = 3 \int_{\Omega} (w^\perp)^2 \varphi_1^2 ds, \\ d &= \int_{\Omega} \varphi_1 (w^\perp)^3 ds - \beta_{21} r, \quad p = \frac{3ac - b^2}{9a^2}, \quad e = \frac{1}{2} \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right), \\ \Re s(q, w^\perp) &= p^3 + e^2, \\ R(q, w^\perp) &= q^2 \|\varphi_1\|_{L_4(\Omega)}^4 + 2q \int_{\Omega} \varphi_1^3 w^\perp ds + \int_{\Omega} \varphi_1^2 (w^\perp)^2 ds. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Для удобства дальнейшего рассмотрения введем следующие множества:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_2^0 &= \{w \in \mathfrak{H}_2 : R(q, w^\perp) = 0\}, \\ \mathfrak{H}_2^+ &= \{w \in \mathfrak{H}_2 : \Re s(q, w^\perp) > 0\}, \\ \mathfrak{H}_2^- &= \{w \in \mathfrak{H}_2 : \Re s(q, w^\perp) < 0\}. \end{aligned}$$

Лемма 2.3.2. При любых $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbb{R}$, $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}$, $\beta_{22} = \alpha_2 \nu_1$, $n \leq 4$, и

- (i) любого $w^\perp \in \mathfrak{H}_2^\perp \cap \mathfrak{H}_2^+$ существует одно решение уравнения (2.3.3);
- (ii) любого $w^\perp \in \mathfrak{H}_2^\perp \cap \mathfrak{H}_2^- \cap \mathfrak{H}_2^0$ существует два решения уравнения (2.3.3);
- (iii) любого $w^\perp \in \mathfrak{H}_2^\perp \cap \mathfrak{H}_2^-$ существует три решения уравнения (2.3.3).

Доказательство. Справедливость леммы вытекает из формул Кардано для уравнения (2.3.3). \square

Лемма 2.3.3. При любых $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbb{R}$, $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}$, $\beta_{22} = \alpha_2 \nu_1$, $n \leq 4$, и любого $v^\perp \in \mathfrak{X}^{\alpha^\perp}$ существует решение $(w^\perp, q) \in \mathfrak{H}_2^\perp \times \mathbb{R}$ системы уравнений, определяющей множество (2.3.1).

Доказательство. Введем в рассмотрение вспомогательный оператор

$$\langle B(w^\perp + q\varphi_1), \eta^\perp + \theta\varphi_1 \rangle = \langle A(w^\perp + q\varphi_1), \eta^\perp \rangle + \theta \int_{\Omega} (w^\perp + q\varphi_1)^3 \varphi_1 ds,$$

где оператор A имеет вид (2.3.2) и обладает теми же свойствами, что и при доказательстве леммы 2.3.1. Поскольку $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_2^\perp \oplus \text{span}\{\varphi_1\}$ и $\mathfrak{H}_2^{*\perp} = \mathfrak{H}_2^{*\perp} \oplus \text{span}\{\varphi_1\}$, то из определения оператора B следует его действие $B : \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathfrak{H}_2^*$.

Покажем, что оператор B коэрцитивен. Действительно,

$$\begin{aligned} & \lim_{\|w^\perp + s\varphi_1\|_{\mathfrak{H}_2} \rightarrow +\infty} \langle B(w^\perp + q\varphi_1), w^\perp + q\varphi_1 \rangle \|w^\perp + q\varphi_1\|_{\mathfrak{H}_2}^{-1} = \\ & = \lim_{\|w^\perp + q\varphi_1\|_{\mathfrak{H}_2} \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} \left(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w^\perp + \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} w_{s_i}^\perp + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\beta_{21}} (w^\perp + q\varphi_1)^3 \right) ds \right) \cdot \left(\int_{\Omega} ((w_{s_i}^\perp + q\varphi_{1s_i})^2 + (w^\perp + q\varphi_1)^2) ds \right)^{-\frac{1}{2}} = +\infty. \end{aligned}$$

В отличие от оператора A (2.3.2), введенного при доказательстве леммы 2.3.1, оператор B является монотонным, но не является строго монотонным. Покажем это:

$$\begin{aligned} & \langle B(w_1^\perp + q_1\varphi_1) - B(w_2^\perp + q_2\varphi_1), w_1^\perp - w_2^\perp + (q_1 - q_2)\varphi_1 \rangle = \\ & \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_{21}} (w_{1s_i}^\perp - w_{2s_i}^\perp)^2 - \frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} (w_1^\perp - w_2^\perp)^2 \right) ds + \\ & + \int_{\Omega} (w_1^\perp - w_2^\perp + (q_1 - q_2)\varphi_1) ((w_1^\perp + q_1\varphi_1)^2 - (w_2^\perp + q_2\varphi_1)^2) ds \geq 0. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Очевидно, что выражение

$$(B(w_1^\perp + q_1\varphi_1) - B(w_2^\perp + q_2\varphi_1), w_1^\perp - w_2^\perp + (q_1 - q_2)\varphi_1) > 0$$

как только $w_1^\perp \neq w_2^\perp$. Покажем, когда выражение (2.3.5) может быть равно нулю. Пусть $w_1^\perp = w_2^\perp = w^\perp$, а q_1 и q_2 – различные корни уравнения (2.3.3). Тогда

$$\begin{aligned} & \langle B(w^\perp + q_1\varphi_1) - B(w^\perp + q_2\varphi_1), (q_1 - q_2)\varphi_1 \rangle = \\ & (q_1 - q_2) \int_{\Omega} ((w^\perp + q_1\varphi_1)^3 - (w^\perp + q_2\varphi_1)^3) \varphi_1 ds = 0. \end{aligned}$$

Наконец, гладкость оператора B , а значит, и его радиальная непрерывность доказывается так же, как и гладкость оператора (2.3.2), введенного при доказательстве леммы 2.3.1. Отметим лишь, что его производная Фреше в точке $w = w^\perp + s\varphi_1$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & (B'_w(\xi^\perp + \sigma\varphi_1), \eta^\perp + \tau\varphi_1) = \\ & = \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_{21}} \xi_{s_i}^\perp \eta_{s_i}^\perp - \frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} \varphi_1^\perp \eta^\perp \right) ds + 3 \int_{\Omega} w^2 (\xi^\perp + \sigma\varphi_1) (\eta^\perp + \tau\varphi_1) ds. \end{aligned}$$

В силу теоремы 1.1.6 справедливо утверждение леммы. \square

Итак, мы показали сюръективность оператора $B : \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathfrak{H}_2^*$. В силу лемм 2.3.1, 2.3.2 обратный оператор $B^{-1} : \mathfrak{H}_2^* \rightarrow \mathfrak{H}_2$ может принимать от одного до трех значений. Введем в рассмотрение множества $\mathfrak{H}^- = B[\mathfrak{H}_2^-]$, $\mathfrak{H}^0 = B[\mathfrak{H}_2^0]$, $\mathfrak{H}^+ = B[\mathfrak{H}_2^+]$. В силу леммы 2.3.2 оператор $B^{-1}(v)$ имеет одно, два, три значения, если $v \in \mathfrak{H}^-$, $v \in \mathfrak{H}^0$, $v \in \mathfrak{H}^+$, соответственно.

Построим оператор $C(v) = \text{col}(v, B^{-1}(v))$, $v \in \mathfrak{H}_1$. Оператор $C : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{Y}$, причем по построению его образ $\text{im } C \supset \mathfrak{P}_{\varepsilon_2}$. Рассмотрим этот оператор более внимательно. Заметим, что если $v \in \mathfrak{H}^-$, то множество значений $C(v)$ состоит из единственного элемента, а если $v \in \mathfrak{H}^+$, то из трех.

Лемма 2.3.4. *При любых $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbb{R}$, $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}$, $\beta_{22} = \alpha_2 \nu_1$, $n \leq 4$, и $v \in \mathfrak{H}^{-(+)}$ существуют такие окрестности $\mathcal{O}_v, \mathcal{O}_{C(v)}$, что оператор $C \in C^\infty(\mathcal{O}_v; \mathcal{O}_{C(v)})$.*

Доказательство. Если $v \in \mathfrak{H}^-$, то точка $C(v)$ определена однозначно, а если $v \in \mathfrak{H}^+$, то под $C(v)$ будем понимать фиксированное значение. Для доказательства применим теорему о неявной функции. В свою очередь для ее применения достаточно доказать невырожденность производной Фреше оператора B в точке w . Действительно,

$$\begin{aligned} & (B'_w(\xi^\perp + \sigma\varphi_1), \eta^\perp + \tau\varphi_1) = \\ & = \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_{21}} \xi_{s_i}^\perp \eta_{s_i}^\perp - \frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} \varphi_1^\perp \eta^\perp \right) ds + 3 \int_{\Omega} w^2 (\xi^\perp + \sigma\varphi_1) (\eta^\perp + \tau\varphi_1) ds > 0, \end{aligned}$$

если $\xi^\perp \neq 0$. Если же $\xi^\perp = 0$, то $(B'_w(\sigma\varphi_1), \sigma\varphi_1) = 3\sigma^2 R(q, w^\perp) \neq 0$ по построению множества $\mathfrak{H}^{-(+)}$. Бесконечная дифференцируемость оператора B доказывается аналогично бесконечной дифференцируемости оператора A в доказательстве леммы 2.2.2. \square

Теорема 2.3.1. *При любых $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbb{R}_+$, $\beta_{22} = \alpha_2 \nu_1$, $n \leq 4$, множество $\mathfrak{P}_{\varepsilon_2}$ является фазовым пространством задачи (2.2.1), (2.1.2).*

Доказательство. Обозначим через D сужение оператора C на \mathfrak{X}^α . В силу лемм 2.3.1 – 2.3.4 образ $\text{im } D = \mathfrak{P}_{\varepsilon_2}$, причем $D[(\mathfrak{X}^\alpha \cap \mathfrak{H}^-) \cup (\mathfrak{X}^\alpha \cap \mathfrak{H}^+)] = \mathfrak{P}_{\varepsilon_2}$. Кроме того, в силу леммы 2.3.4 для любых точек $v \in \mathfrak{X}^\alpha \cap \mathfrak{H}^{-(+)}$ и $D(v) \in \mathfrak{P}_{\varepsilon_2}$ существуют окрестности $\mathcal{O}_v \subset \mathfrak{X}^\alpha \cap \mathfrak{H}^{-(+)}$ и $\mathcal{O}_{D(v)}$ такие, что $D \in C^\infty(\mathcal{O}_v; \mathcal{O}_{D(v)})$ есть сужение проектора P на \mathcal{O}_v . \square

Теорема 2.3.2. При любых $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbb{R}$, $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbb{R}_+$, $\beta_{22} = \alpha_2 \nu_1$, $n \leq 4$,
и

(i) любого $v_0 \in \mathfrak{X}^\alpha \cap \mathfrak{H}^-$ существует одно решение задачи (2.2.1), (2.1.2), (2.2.2);

(ii) любого $v_0 \in \mathfrak{X}^\alpha \cap \mathfrak{H}^+$ существует три решения задачи (2.2.1), (2.1.2), (2.2.2).

Доказательство. Справедливость утверждения следует в силу теоремы 2.3.1. \square

Теорема 2.3.3. В том случае, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, фазовым пространством (2.0.1), (2.1.2) будет являться множество вида

$$\mathfrak{P}_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \left\{ x \in \mathfrak{X}_\alpha : \begin{cases} \langle \alpha_1 v_{s_i}, \xi_{s_i} \rangle + \langle \beta_{11} v, \xi \rangle = \langle \beta_{12} w, \xi \rangle, \\ -\langle v, \eta \rangle = \left\langle -\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w + \frac{1}{\beta_{21}} w^3, \eta \right\rangle + \left\langle \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} w_{s_i}, \eta_{s_i} \right\rangle \end{cases} \right\}. \quad (2.3.6)$$

2.4. Исследование вопроса однозначной разрешимости математических моделей распространения нервного импульса в мембранной оболочке системы нервов

На графе \mathbf{G} рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 v_{jss} + \beta_{12} w_j - \beta_{11} v_j, \\ w_t = \alpha_2 w_{jss} + \beta_{22} w_j - \beta_{21} v_j - w_j^3, \end{cases} \quad (2.4.1)$$

где каждая функция $v_j = v_j(s, t)$ и $w_j = w_j(s, t)$, $x \in (0, l_j)$ и $t \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяет условию непрерывности

$$\begin{aligned} v_j(0, t) &= v_k(0, t) = v_m(l_m, t) = v_n(l_n, t), \\ w_j(0, t) &= w_k(0, t) = w_m(l_m, t) = w_n(l_n, t), \\ E_j, E_k &\in E^\alpha(V_g), \quad E_m, E_n \in E^\omega(V_g) \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

и условию баланса потоков

$$\begin{aligned} \sum_{E_j \in E^\alpha(V_g)} d_j v_{js}(0, t) - \sum_{E_j \in E^\omega(V_g)} d_j v_{js}(l_j, t) &= 0, \\ \sum_{E_j \in E^\alpha(V_g)} d_j w_{js}(0, t) - \sum_{E_j \in E^\omega(V_g)} d_j w_{js}(l_j, t) &= 0, \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

где через $E^{\alpha(\omega)}(V_g)$ обозначено множество ребер с началом или концом в вершине V_g и начальным условием

$$w_j(0) = w_{j0}. \quad (2.4.4)$$

Для простоты изложения разобьем редукцию задачи (2.4.1) – (2.4.3) к уравнению (0.0.19) в три этапа.

Этап 1. Возьмем банахово пространство $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_i = \{r = (r_1, r_2, \dots, r_j, \dots) : r_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ и выполнено (2.4.2)}\}$, гильбертово пространство $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_i = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$, $i = 1, 2$. Зададим в \mathfrak{X} скалярное произведение $[x, \zeta] = \langle v, \xi \rangle + \langle w, \eta \rangle$, при этом $x = (v, w)$, $\zeta = (\xi, \eta)$, $\langle v, \xi \rangle = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} v_j \xi_j ds$. Пусть \mathfrak{Y} – сопряженное к \mathfrak{X} пространство относительно двойственности $[\cdot, \cdot]$.

Этап 2. Определим линейные операторы $L, M : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ формулами

$$[Lx, \zeta] = \langle w, \eta \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{X}, \quad (2.4.5)$$

$$[Mx, \zeta] = -\alpha_1 \langle v_s, \xi_s \rangle - \alpha_2 \langle w_s, \eta_s \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{X}, \quad \text{где } \text{dom } M = \mathfrak{H}. \quad (2.4.6)$$

В силу задания операторы L, M обладают свойствами $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. Отметим, что для всех фиксированных значений параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M L -секториален, при этом условия (1.1.3) и (1.1.4) будут выполнены. Доказательство L -секториальности оператора M с учетом особенности пространств, построенных на графе \mathbf{G} , приведено в пункте 1.5.

Этап 3. Зададим нелинейный оператор формулой

$$[N(x), \zeta] = \langle \beta_{12}w - \beta_{11}v, \xi \rangle + \langle \beta_{22}w - \beta_{21}v - w^3, \eta \rangle \quad (2.4.7)$$

и положим $\text{dom } N = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_i = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_4(0, l_j)\}$, $i = 1, 2$. Обозначим через \mathfrak{B}^* пространство сопряженное к \mathfrak{B} относительно двойственности $[\cdot, \cdot]$.

Лемма 2.4.1. *Для всех фиксированных значений параметров $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 2}$, $j = \overline{1, 2}$, оператор $N : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{Y}$ принадлежит классу C^∞ .*

Доказательство. Доказательство данного утверждения полностью идентично доказательству леммы 2.1.1 с учетом особенностей пространств, построенных на графе \mathbf{G} . \square

Пространство \mathfrak{X}^α построим аналогичным образом как строили в пункте 2.1, опираясь на особенности пространств, построенных на графе \mathbf{G} .

Рассуждая аналогично пункту 2.1 с поправкой на особенности пространств, построенных на графе \mathbf{G} , получим, что все решения (2.4.1) – (2.4.3) лежат

ПОТОЧЕЧНО ВО МНОЖЕСТВЕ

$$\mathfrak{P}_{\varepsilon_1} = \{x \in \mathfrak{X}_\alpha : \langle \alpha_1 v_s, \xi_s \rangle + \langle \beta_{11} v, \xi \rangle = \langle \beta_{12} w, \xi \rangle\}. \quad (2.4.8)$$

Теорема 2.4.1. *Для всех фиксированных значений параметров $\alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_{21}, \beta_{22} \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbb{R}_+$, и любого $x_0 \in \mathfrak{X}_\alpha$ существует и единственно решение (2.4.1) – (2.4.3).*

Доказательство. Доказательство данного утверждения полностью идентично доказательству леммы 2.1.2 с учетом особенностей пространств, построенных на графе \mathbf{G} . \square

На графе \mathbf{G} рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} v_{jt} = \alpha_1 v_{jss} + \beta_{12} w_j - \beta_{11} v_j, \\ 0 = \alpha_2 w_{jss} + \beta_{22} w_j - \beta_{21} v_j - w_j^3, \end{cases} \quad (2.4.9)$$

с условиями непрерывности и баланса потока (2.4.2), (2.4.3) и начальным условием

$$v_j(0) = v_{j0}. \quad (2.4.10)$$

Для простоты изложения разобьем редукцию задачи (2.4.9), (2.4.2), (2.4.3) в три этапа.

В связи с тем, что правая часть уравнений в системе (2.4.9), условия непрерывности и баланса потока (2.4.2), (2.4.3) остались неизменны по сравнению с (2.4.9), (2.4.2), (2.4.3) **этап 1** редукции задачи (2.4.9), (2.4.2), (2.4.3) к (0.0.19) совпадает с **этапом 1** пункта 2.1. Это же справедливо и для оператора M из **этапа 2**. В то же время оператор L будет отличным от оператора L для задачи (2.4.1) – (2.4.3), так как изменилась левая часть уравнений в системе (2.2.1). Поэтому построим линейный оператор $L : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ следующим образом

$$[Lx, \zeta] = \langle v, \xi \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{X}. \quad (2.4.11)$$

Отметим, что для всех фиксированных значений параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M L -секториален, при этом условия (1.1.3) и (1.1.4) будут выполнены. Доказательство L -секториальности оператора M , с учетом особенностей пространств, построенных на графе \mathbf{G} , приведено в пункте 1.2.

Этап 3 редукции задачи (2.4.9), (2.4.2), (2.4.3) к (0.0.19) почти совпадает с **этапом 3** для задачи (2.4.1) – (2.4.3). Отличие заключается лишь в построении интерполяционного пространства \mathfrak{X}_α . Пространство \mathfrak{X}^α построим

аналогичным способом как строили в пункте 2.2, опираясь на особенности пространств, построенных на графе \mathbf{G} .

Рассуждая аналогично пункту 2.3 с поправкой на особенности пространств, построенных на графе \mathbf{G} , получим, что все решения уравнения (2.4.9), (2.4.2), (2.4.3) лежат поточечно во множестве

$$\mathfrak{P}_{\varepsilon_2} = \left\{ x \in \mathfrak{X}_\alpha : -\langle v, \eta \rangle = \left\langle -\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}}w + \frac{1}{\beta_{21}}w^3, \eta \right\rangle + \left\langle \frac{\alpha_2}{\beta_{21}}w_s, \eta_s \right\rangle \right\}. \quad (2.4.12)$$

Теорема 2.4.2. Для любых $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbb{R}$, $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbb{R}_+$, $\beta_{22} \in (-\infty, \alpha_2\nu_1)$, и любого $v_0 \in \mathfrak{X}^\alpha$ существует единственное решение задачи (2.4.9), (2.4.2), (2.4.3), (2.4.10).

Доказательство. Доказательство данного утверждения аналогично доказательству теоремы 2.2.1, с учетом особенностей пространств, построенных на графе \mathbf{G} . \square

Рассмотрим случай $\beta_{22} = \alpha_2\nu_1$, положим

$$\mathfrak{X}^{\alpha\perp} = \{v^\perp \in \mathfrak{X}^\alpha : \langle v^\perp, \varphi_1 \rangle = 0\}, \quad \mathfrak{H}_2^\perp = \{w^\perp \in \mathfrak{H}_2 : \langle w^\perp, \varphi_1 \rangle = 0\}.$$

Если $v \in \mathfrak{X}^{\alpha\perp}$, $w \in \mathfrak{H}_2$ представить в виде $v = v^\perp + r\varphi_1$ и $w = w^\perp + q\varphi_1$, где $r, q \in \mathbb{R}$, а $\varphi_1 = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1k})$ – первая собственная функция оператора \mathcal{B} (1.5.7), отвечающая собственному значению ν_1 графа \mathbf{G} , то множество $\mathfrak{P}_{\varepsilon_2}$ приобретает следующий вид:

$$\mathfrak{P}_{\varepsilon_2} = \left\{ x \in \mathfrak{X}_\alpha : \left\{ \begin{array}{l} \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} -v_j^\perp \eta_j^\perp ds = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} \left(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}}w_j^\perp \eta_j^\perp + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_2}{\beta_{21}}w_{js}^\perp \eta_{js}^\perp + \frac{1}{\beta_{21}}(w_j^\perp + q\varphi_{1j})^3 \eta_j^\perp \right) ds, \\ \left. -\beta_{21}r = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (w_j^\perp + q\varphi_{1j})^3 \varphi_{1j} ds \right\} \right\}. \quad (2.4.13)$$

Если в систему уравнений, определяющую множество (2.4.12), подставить вместо $\beta_{22} = \alpha_2\nu_1$, то для того, чтобы получить первое уравнение системы (2.4.13) вместо ξ в (2.4.12) необходимо подставить $\eta = \eta^\perp$, а затем для получения второго уравнения (2.4.13) вместо η в (2.4.12) необходимо подставить $\eta = \varphi_1$.

Перейдем ко второму уравнению системы, определяющей множество (2.4.13). Преобразуя получившиеся уравнение, получим:

$$\begin{aligned}
& q^3 \|\varphi_1\|_{L_4(\mathbf{G})}^4 + 3q^2 \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} w_j^\perp \varphi_{1j}^3 ds + \\
& + 3q \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (w_j^\perp)^2 \varphi_{1j}^2 ds + \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} \varphi_{1j} (w_j^\perp)^3 ds + \beta_{21} r = 0.
\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

Уравнение (2.4.14) является кубическим уравнением общего вида $aq^3 + bq^2 + cq + d = 0$ относительно q . Согласно формулам Кардано, любое кубическое уравнение общего вида при помощи замены $q = y - \frac{b}{3a}$ может быть приведено к канонической форме $y^3 + py + e = 0$ с коэффициентами

$$\begin{aligned}
a &= \|\varphi_1\|_{L_4(\mathbf{G})}^4, \quad b = 3 \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} w_j^\perp \varphi_{1j}^3 ds, \\
c &= 3 \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (w_j^\perp)^2 \varphi_{1j}^2 ds, \quad d = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} \varphi_{1j} (w_j^\perp)^3 ds - \beta_{21} r, \\
p &= \frac{3ac - b^2}{9a^2}, \quad e = \frac{1}{2} \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right), \quad \Re\mathfrak{es}(q, w^\perp) = p^3 + e^2,
\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

$$\begin{aligned}
R(q, w^\perp) &= q^2 \|\varphi_1\|_{L_4(\mathbf{G})}^4 + 2q \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} \varphi_{1j}^3 w_j^\perp ds + \\
&+ \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} \varphi_{1j}^2 (w_j^\perp)^2 ds.
\end{aligned}$$

Для удобства дальнейшего рассмотрения введем следующие множества:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H}_2^0 &= \{w \in \mathfrak{H}_2 : R(q, w^\perp) = 0\}, \\
\mathfrak{H}_2^+ &= \{w \in \mathfrak{H}_2 : \Re\mathfrak{es}(q, w^\perp) > 0\}, \\
\mathfrak{H}_2^- &= \{w \in \mathfrak{H}_2 : \Re\mathfrak{es}(q, w^\perp) < 0\}.
\end{aligned}$$

Лемма 2.4.2. При любых $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbb{R}$, $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}$, $\beta_{22} = \alpha_2 \nu_1$, и

- (i) любого $w^\perp \in \mathfrak{H}_2^\perp \cap \mathfrak{H}_2^+$ существует одно решение уравнения (2.4.14);
- (ii) любого $w^\perp \in \mathfrak{H}_2^\perp \cap \mathfrak{H}_2^- \cap \mathfrak{H}_2^0$ существует два решения уравнения (2.4.14);
- (iii) любого $w^\perp \in \mathfrak{H}_2^\perp \cap \mathfrak{H}_2^-$ существует три решения уравнения (2.4.14).

Доказательство. Справедливость леммы вытекает из формул Кардано для уравнения (2.4.14). \square

Теорема 2.4.3. При любых $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbb{R}$, $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}$, $\beta_{22} = \alpha_2 \nu_1$,
 (i) любого $v_0 \in \mathfrak{X}^\alpha \cap \mathfrak{H}^-$ существует одно решение задачи (2.4.9), (2.4.2), (2.4.3), (2.4.10);
 (ii) любого $v_0 \in \mathfrak{X}^\alpha \cap \mathfrak{H}^+$ существует три решения задачи (2.4.9), (2.4.2), (2.4.3), (2.4.10).

Доказательство. Доказательство данного утверждения аналогично доказательству теоремы 2.3.2, с учетом особенностей пространств, построенных на графе \mathbf{G} . \square

2.5. Алгоритм численного метода нахождения решения задачи Шоултера – Сидорова

Опишем алгоритм численного решения задачи (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) на области Ω или (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3), (2.4.4) на графе \mathbf{G} в случае $\varepsilon_1 = 0$ и (2.2.1), (2.1.2), (2.2.2) на области Ω или (2.4.9), (2.4.2), (2.4.3), (2.4.10) на графе \mathbf{G} в случае $\varepsilon_2 = 0$, построенный на основе модифицированного метода Галеркина – Петрова и метода фазового пространства. Алгоритм позволяет находить приближенные решения на заданной области Ω или геометрическом графе \mathbf{G} для заданных начальных значений $w_0(s)$ для случая $\varepsilon_1 = 0$ или $v_0(s)$ для случая $\varepsilon_2 = 0$ и значений коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}, \beta_{22}, \beta_{11}, \beta_{21}$ для модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке, а также получить графики приближенных решений.

Этап 0. Находим собственные функции $\{\varphi_k(s)\}$ однородной задачи Дирихле оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω или же $\{\varphi_k(s)\}$ – собственные векторы оператора \mathcal{B} (1.5.7).

Этап 1. Следуя методу Галеркина – Петрова, мы будем искать приближенное решение $\tilde{x} = (\tilde{v}, \tilde{w})$ рассматриваемой задачи в виде сумм

$$\tilde{v}(s, t) = \sum_{k=1}^m v_k(t) \varphi_k(s), \quad \tilde{w}(s, t) = \sum_{k=1}^m w_k(t) \varphi_k(s). \quad (2.5.1)$$

Этап 2. Приняв за $r = v_1(0)$, $q = w_1(0)$, $v^\perp = \sum_{k=2}^m v_k(t) \varphi_k$, $w^\perp = \sum_{k=2}^m w_k(t) \varphi_k$, и подставив полученные значения в формулы (2.3.4), проверим единствен-

ность или множественность решения задачи Шоуолтера – Сидорова при заданных начальных функциях $w_0(s)$ для случая $\varepsilon_1 = 0$ или $v_0(s)$ для случая $\varepsilon_2 = 0$. В случае, когда $\Re \mathbf{es} < 0$, искомая задача имеет три решения $(v_1(s, t), w_1(s, t))$, $(v_2(s, t), w_2(s, t))$, $(v_3(s, t), w_3(s, t))$, следовательно, система алгебро-дифференциальных уравнений будет иметь три решения и три набора $v_k(t)$ и $w_k(t)$ для каждого из решений, соответственно. В этом случае все последующие этапы необходимо проделать трижды для каждого из наборов $v_k(t)$ и $w_k(t)$.

В случае $\varepsilon_1 = 0$ переходим последовательно к этапам 3.1, 4.1, 5.1, в случае $\varepsilon_2 = 0$ переходим последовательно к этапам 3.2, 4.2, 5.2, соответственно.

Этап 3.1. Для нахождения неизвестных $v_i(t), w_i(t)$, подставим галеркинские суммы (2.5.1) в систему уравнений (2.1.1) (или (2.4.1)), а затем умножим правую и левую части полученной системы уравнений скалярно в $L_2(\Omega)$ (или $L_2(\mathbf{G})$) на собственные функции $\varphi_i(s)$, $i = \overline{1, m}$, получив таким образом систему алгебро-дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} -\alpha_1 \sum_{k=1}^m v_k(t) \nu_k \langle \nu_k, \varphi_i \rangle + \beta_{12} \sum_{k=1}^m w_k(t) \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle - \\ -\beta_{11} \sum_{k=1}^m v_k(t) \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} w_k(t) \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle + \alpha_2 \sum_{k=1}^m w_k(t) \nu_k \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle - \\ -\beta_{22} \sum_{k=1}^m w_k(t) \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle + \beta_{21} \sum_{k=1}^m v_k(t) \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle + \left\langle \left(\sum_{k=1}^m w_k(t) \varphi_k \right)^3, \varphi_i \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Этап 3.2. Для нахождения неизвестных $v_i(t), w_i(t)$, подставим галеркинские суммы (2.5.1) в систему уравнений (2.2.1) (или (2.4.9)), а затем умножим полученную систему уравнений скалярно в $L_2(\Omega)$ (или $L_2(\mathbf{G})$) на собственные функции $\varphi_i(s)$, $i = \overline{1, m}$, получив таким образом систему алгебро-дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} v_k(t) \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle + \alpha_1 \sum_{k=1}^m w_k(t) \nu_k \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle - \\ -\beta_{12} \sum_{k=1}^m w_k(t) \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle + \beta_{11} \sum_{k=1}^m v_k(t) \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha_2 \sum_{k=1}^m w_k(t) \nu_k \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle - \beta_{22} \sum_{k=1}^m w_k(t) \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle + \\
& + \beta_{21} \sum_{k=1}^m v_k(t) \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle + \left\langle \left(\sum_{k=1}^m v_k(t) \varphi_k \right)^3, \varphi_i \right\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Этап 4.1. Найдем $w_k(0)$, скалярно умножив в $L_2(\Omega)$ (или $L_2(\mathbf{G})$) начальное условие (2.1.3) (или (2.4.4)) на собственные функции $\varphi_i(s)$, $i = \overline{1, m}$, т.е.

$$\langle w(0) - w_0, \varphi_i \rangle = 0. \tag{2.5.6}$$

Этап 4.2. Найдем $v_k(0)$, скалярно умножив в $L_2(\Omega)$ (или $L_2(\mathbf{G})$) начальное условие (2.2.2) (или (2.4.10)) на собственные функции $\varphi_i(s)$, $i = \overline{1, m}$, т.е.

$$\langle v(0) - v_0, \varphi_i \rangle = 0. \tag{2.5.7}$$

Этап 5.1. Решив систему алгебраических уравнений (2.5.2) относительно $w_k(0)$, получим значения $v_k(0)$.

Этап 5.2. Решив систему алгебраических уравнений (2.5.5) относительно $v_k(0)$, получим значения $w_k(0)$.

Этап 6.1. Методом Рунге – Кутты находим решение системы алгебро-дифференциальных уравнений (2.5.2), (2.5.3) с начальными условиями (2.5.6).

Этап 6.2. Методом Рунге – Кутты находим решение системы алгебро-дифференциальных уравнений (2.5.4), (2.5.5) с начальными условиями (2.5.7).

2.6. Описание комплекса программ

Построенный в п. 2.5 алгоритм численного метода был реализован в системе компьютерной математики Maple 2017 для Windows 7, 8.1, 10 в виде комплекса программ. Данная система компьютерной математики отличается от аналогов наличием встроенного аппарата аналитических вычислений интегралов **student**, пакета команд для решения дифференциальных уравнений, в том числе и систем, **DEtools**. Комплекс программ «Численное исследование математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке» предназначена для нахождения приближенного решения задачи Шоуолтера – Сидорова для модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке в случае единственности или множественности решений. В программе реализован модифицированный метод Галеркина – Петрова и метод фазового пространства. Комплекс программ состоит из следующих

программ: «Численное исследование математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке аксона нерва», «Численное исследование математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке системы нервов».

Комплекс программ «Численное исследование математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке» может быть использован при исследовании распространения нервного импульса по нейронам, аксонам, дендритам, по клеткам поперечнополосатой мускулатуры, гладкой мускулатуры кишечника, сердечно-сосудистой системе. Описанный комплекс программ представляет интерес для специалистов в области биомеханики.

На вход программного комплекса подаются коэффициенты системы α_1 , α_2 , β_{12} , β_{22} , β_{11} , β_{21} , функции начальных значений $w_0(s)$ для случая $\varepsilon_1 = 0$ или $v_0(s)$ для случая $\varepsilon_2 = 0$ для начального условия Шоултера – Сидорова, параметры области Ω или графа \mathbf{G} . На выходе каждая программа комплекса выдает приближенные решения $(v(s, t), w(s, t))$ и строит их графики. Схема алгоритма работы любой программы комплекса приведена на рис. 2.6.1.

Комплекс программ предназначен только для работы на персональном компьютере с процессором не ниже чем 4 ядра, с частотой не ниже 3400 МГц, оперативной памятью 16 Гб под управлением 64-х битных операционных систем Windows 7, 8.1, 10 с установленной системой компьютерной математики Maple 2017.

Опишем логическую структуру работы каждой из программ комплекса более подробно. Во время работы программы выполняются следующие шаги.

Шаг 1. Вводятся коэффициенты уравнений системы α_1 , α_2 , β_{12} , β_{22} , β_{11} , β_{21} , функция начального значения $w_0(s)$ для случая $\varepsilon_1 = 0$ или $v_0(s)$ для случая $\varepsilon_2 = 0$ для начального условия Шоултера – Сидорова, параметры области Ω или \mathbf{G} , а также количество галеркинских приближений m .

Шаг 2. Из отдельного файла **eigenfunction.mw** с помощью встроенной процедуры **read** считывается найденная нормированная система функций $\varphi_m(s)$ для рассматриваемой области Ω или графа \mathbf{G} .

Шаг 3. Процедура **unapply** позволяет представить искомые приближенные решения в виде сумм

$$\begin{aligned} v &:= \text{unapply}(v_1(t)\varphi_1(s) + v_2(t)\varphi_2(s) + \dots + v_m(t)\varphi_m(s)), \\ w &:= \text{unapply}(w_1(t)\varphi_1(s) + w_2(t)\varphi_2(s) + \dots + w_m(t)\varphi_m(s)). \end{aligned}$$

Шаг 4. Положим

$$\begin{aligned} r &:= v_1(0), \\ v^\perp &:= v_2(0)\varphi_2(s) + \dots + v_m(0)\varphi_m(s), \\ w^\perp &:= w_0, \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

и подставим полученные значения в формулы (2.3.3) для области Ω или (2.4.14) графа \mathbf{G} . С помощью встроенной процедуры **if... else ... fi** проводится проверка наличия одного или трех решений задачи Шоуолтера – Сидорова при заданных начальных условиях.

Шаг 5. Составленные на шаге 3 выражения подставляются в алгебраическое уравнение системы и в цикле **for i to 1 do m end do** полученное уравнение умножается на собственные функции φ_i и интегрируется в рассматриваемой области Ω или на графе \mathbf{G} с помощью процедуры **int**. С помощью встроенных процедур **subs** и **solve**, с настройкой **RealDomain**, решаем получившуюся систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $v_i(0)$ или $w_i(0)$, $i = \overline{1, m}$.

В том случае, когда система уравнений имеет три решения, получим три набора v_i, w_i для каждого из решений, соответственно. Все последующие шаги необходимо проделать трижды для каждого из наборов $v_i(t)$ и $w_i(t)$ для программного комплекса «Численное исследование математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке». Чтобы реализовать возможность нахождения трех различных решений с помощью встроенной процедуры **save** начальные условия сохраняются в файле **usl.mw**, первый набор (v_0, w_{01}) сохраняется в файле **resh1.mw**, второй набор (v_0, w_{02}) сохраняется в файле **resh2.mw**, третий набор (v_0, w_{03}) сохраняется в файле **resh3.mw**.

Шаг 6. С помощью встроенной процедуры **read** считываются начальные условия и один из наборов (v_0, w_{01}) или (v_0, w_{02}) или (v_0, w_{03}) , хранящихся в файлах **resh1.mw** или **resh2.mw** или **resh3.mw**. В цикле **for i to 1 do m end do** левая и правая части дифференциального уравнения, полученного на третьем шаге, умножаются на собственную функцию $\varphi_i(s)$ и интегрируются (**int**) в рассматриваемой области Ω или на графе \mathbf{G} . В результате выполнения шагов 5 и 6 получаем систему алгебро-дифференциальных уравнений для определения коэффициентов приближения v_i, w_i .

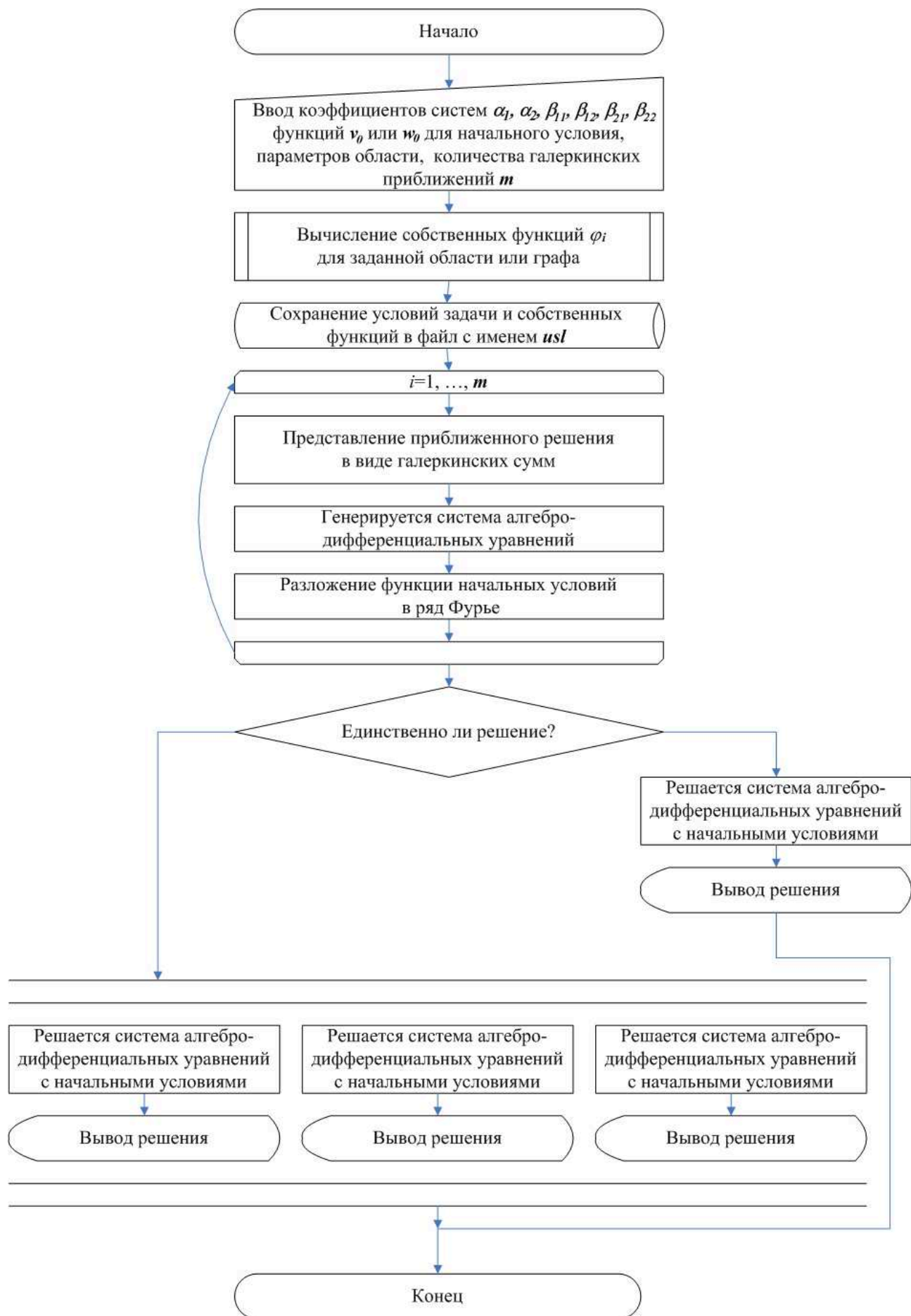


Рис. 2.6.1. Схема алгоритма работы любой программы комплекса

Шаг 7. Решается система, полученная на шаге 6, с начальными условиями, сохраненными в файле **resh1.mw** или **resh2.mw** или **resh3.mw** с помощью встроенной процедуры **dsolve**.

Шаг 8. Составляется решение и выводится на экран в виде графика встроенными процедурами **plot** или **plot3d**.

2.7. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим модельные примеры численного исследования вопроса однозначной разрешимости математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке на основе реализации алгоритма и комплекса программ, описанных в п. 2.6.

Пример 2.7.1. *Требуется найти вид фазового пространства системы уравнений*

$$\begin{cases} \varepsilon_1 v_t = v_{ss} - v + w, \\ \varepsilon_2 w_t = w_{ss} - w - v - w^3 \end{cases} \quad (2.7.1)$$

с краевым условием

$$v(s, t) = w(s, t) = 0, \quad s \in \partial\Omega, t \in (0, T), \quad (2.7.2)$$

при $\Omega = (0, \pi)$, $T = 1$, если: а) $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$, б) $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 = 0$, в) $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$.

Представим приближенные решения (2.7.1), (2.7.2) в виде $\tilde{v}(s, t) = r\varphi_1(s) + v^\perp$, $\tilde{w}(s, t) = q\varphi_1(s) + w^\perp$, где $r = v_1(t)$, $v^\perp = \sum_{i=2}^m v_i(t)\varphi_i(t)$, $q = w_1(t)$, $w^\perp = \sum_{i=2}^m w_i(t)\varphi_i(t)$.

а) В случае, когда $\varepsilon_1 = 0$, фазовое пространство (2.7.1), (2.7.2) является простым C^∞ -многообразием, а значит согласно теореме 2.1.1 (2.7.1), (2.7.2) будет иметь только одно решение. Для данной системы фазовое пространство может быть описано на основе:

$$\begin{cases} -2r + q = 0, \\ -5v^\perp + w^\perp = 0. \end{cases} \quad (2.7.3)$$

Оно изображено на рис. 2.7.1 а).

б) Согласно теореме 2.3.1, в случае, когда $\varepsilon_2 = 0$, фазовое пространство (2.7.1), (2.7.2) при определенных условиях может содержать 2-сборку Уитни. Для данной системы фазовое пространство может быть описано на основе:

$$\begin{cases} -\frac{-3q^3 - 6q(w^\perp)^2 + 2\pi r + 4\pi q}{2\pi} = 0, \\ -\frac{-6q^2 w^\perp - 3(w^\perp)^3 + 2\pi v^\perp + 10\pi w^\perp}{2\pi} = 0. \end{cases} \quad (2.7.4)$$

В зависимости от начальных условий (2.7.1), (2.7.2) с соответствующими условиями Шоултера – Сидорова может иметь одно или три решения. Фазовое пространство в случае когда $\varepsilon_2 = 0$ изображено на рис. 2.7.1 б).

в) Согласно теореме 2.4.2 фазовое пространство (2.7.1), (2.7.2) в случае, когда ε_1 и ε_2 оба нулевые, является пересечением фазовых пространств (2.7.4) и (2.7.3), оно изображено на рис. 2.7.1 в).

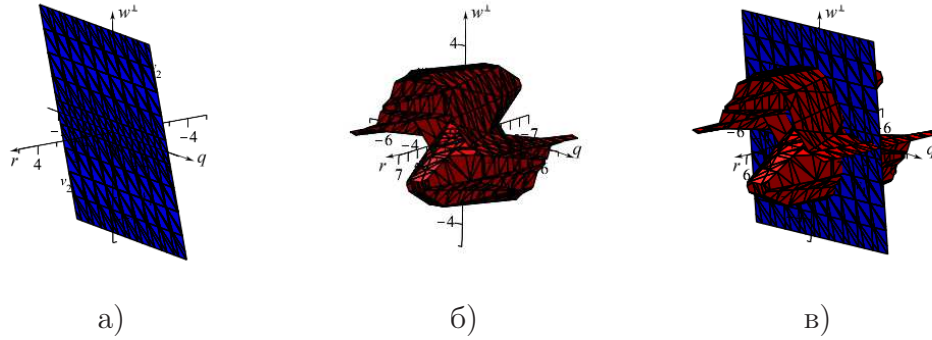


Рис. 2.7.1. Фазовое пространство (2.7.1), (2.7.2) при:

а) $\varepsilon_1 = 0$, б) $\varepsilon_2 = 0$, в) $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$

Пример 2.7.2. Рассмотрим систему уравнений (2.7.1) с краевым условием (2.7.2). Требуется найти решение задачи (2.7.1), (2.7.2) с начальным условием

$$\begin{aligned} w(s, 0) &= w_0(s) \text{ для случая } \varepsilon_1 = 0, \\ &\text{или} \\ v(s, 0) &= v_0(s) \text{ для случая } \varepsilon_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

при $\Omega = (0, \pi)$, $T = 1$ и если: а) $\varepsilon_1 = 0$, $w_0(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin(3s) + \sin(2s) + \sin(s))$;
б) $\varepsilon_2 = 0$, $v_0(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin(3s) + \sin(s) + \sin(2s))$.

Так как собственные функции задачи (1.2.7) в области Ω имеют вид $\varphi_k(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(ks)$, то согласно алгоритму приближенные решения задачи (2.7.1), (2.7.2), (2.7.5) можно представить как $\tilde{v}(s, t) = \sum_{i=1}^m v_i(t) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(is)$, $\tilde{w}(s, t) = \sum_{i=1}^m w_i(t) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(is)$. Число слагаемых m в приближении будем изменять от 2 до 6, для проверки того, что найденные нами приближенные решения достаточно близки к точному. Как видно из результатов примера 2.7.1, (2.7.1), (2.7.2) в случаях б) и в) может иметь три или одно решение. Осуществим проверку неединственности решения данной задачи. Примем за $q = w_1(0)$, $w^\perp = \sum_{i=2}^m w_i(0) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(is)$, $v^\perp = \tilde{v}(s, 0)$.

а) При $\varepsilon_1 = 0$ нет необходимости проверять возможную неединственность решения. Согласно теореме 2.1.1 задача (2.7.1), (2.7.2), (2.7.5) всегда будет иметь лишь одно решение, поэтому можно сразу получить систему алгебро-дифференциальных уравнений вида (2.5.2), (2.5.3). Разрешив алгебраическое уравнение системы относительно v_i, w_i в начальный момент времени, получим набор начальных условий (v_0, w_0) . Решая систему алгебро-дифференциальных уравнений при различном количестве приближений m методом Рунге – Кутта, получим одно численное решение, которое представлено в таблице 2.7.2 и на рисунке 2.7.3 а).

Для полученного численного решения найдем вычислительную точность по формулам $\delta_1^{m_1, m_2} = \int_0^T \max_{s \in \Omega} |v^{m_1} - v^{m_2}| dt$, $\delta_2^{m_1, m_2} = \int_0^T \max_{s \in \Omega} |w^{m_1} - w^{m_2}| dt$, $m_1 = \overline{2, 5}$, $m_2 = \overline{3, 6}$. Приведем полученные значения $\delta_1^{m_1, m_2}, \delta_2^{m_1, m_2}$:

$$\begin{aligned} \delta_1^{2,3} &= 0.54 \cdot 10^{-7}, & \delta_1^{3,4} &= 0.12 \cdot 10^{-7}, & \delta_1^{4,5} &= 0.63 \cdot 10^{-8}, & \delta_1^{5,6} &= 0.13 \cdot 10^{-10}, \\ \delta_2^{2,3} &= 0.55 \cdot 10^{-7}, & \delta_2^{3,4} &= 0.13 \cdot 10^{-7}, & \delta_2^{4,5} &= 0.61 \cdot 10^{-8}, & \delta_2^{5,6} &= 0.12 \cdot 10^{-10}. \end{aligned}$$

Все значения $\delta_1^{m_1, m_2}, \delta_2^{m_1, m_2}$ уменьшаются с ростом числа слагаемых.

б) Подставим полученные значения $q = 0, 56734, q^\perp = -1, 2417, v^\perp = -0, 6844$ в формулу (2.3.4) и получим значение $\Re s = -1.154992588$. Согласно теореме 2.3.1, это означает, что задача (2.7.1), (2.7.2), (2.7.5) при заданном начальном значении функции будет иметь три решения. Следуя алгоритму, получим систему алгебро-дифференциальных уравнений. Разрешив алгебраическое уравнение системы относительно v_i, w_i в начальный момент времени, получим три набора начальных условий $(v_0, w_{01}), (v_0, w_{02}), (v_0, w_{03})$. Решая получившуюся систему при различном количестве приближений m , методом Рунге – Кутта получим три численных решения. Численное решение, соответствующее набору начальных условий (v_0, w_{01}) , представлено в таблице 2.7.3 и на рисунке 2.7.3 б) при $m = 3$, численное решение, соответствующее набору начальных условий (v_0, w_{02}) , представлено в таблице 2.7.4 и на рисунке 2.7.4 а) также при $m = 3$, численное решение, соответствующее набору начальных условий (v_0, w_{03}) , представлено в таблице 2.7.5 и на рисунке 2.7.4 б) также при $m = 3$.

Найдем вычислительную точность численного решения задачи (2.7.1), (2.7.2), (2.7.5) – с набором начальных данных (v_0, w_{01}) :

$$\delta_{1_1}^{m_1, m_2} = \int_0^T \max_{s \in \Omega} |v_1^{m_1} - v_1^{m_2}| dt, \quad \delta_{2_1}^{m_1, m_2} = \int_0^T \max_{s \in \Omega} |w_1^{m_1} - w_1^{m_2}| dt,$$

– с набором начальных данных (v_0, w_{02}) :

$$\delta_{1_2}^{m_1, m_2} = \int_0^T \max_{s \in \Omega} |v_2^{m_1} - v_2^{m_2}| dt, \quad \delta_{2_2}^{m_1, m_2} = \int_0^T \max_{s \in \Omega} |w_2^{m_1} - w_2^{m_2}| dt,$$

– с набором начальных данных (v_0, w_{03}) :

$$\delta_{1_3}^{m_1, m_2} = \int_0^T \max_{s \in \Omega} |v_3^{m_1} - v_3^{m_2}| dt, \quad \delta_{2_3}^{m_1, m_2} = \int_0^T \max_{s \in \Omega} |w_3^{m_1} - w_3^{m_2}| dt,$$

где $m_1 = \overline{2, 5}$, $m_2 = \overline{3, 6}$. Приведем полученные значения $\delta_{1_1}^{m_1, m_2}$, $\delta_{2_1}^{m_1, m_2}$, $\delta_{1_2}^{m_1, m_2}$, $\delta_{2_2}^{m_1, m_2}$, $\delta_{1_3}^{m_1, m_2}$, $\delta_{2_3}^{m_1, m_2}$ в таблице 2.7.1.

Таблица 2.7.1. Вычислительная погрешность для каждого из полученных численных решений задачи (2.7.1), (2.7.2), (2.7.5) в случае $\varepsilon_2 = 0$

m_1, m_2	2,3	3,4	4,5	5,6
$\delta_{1_1}^{m_1, m_2}$	$0.54 \cdot 10^{-7}$	$0.13 \cdot 10^{-7}$	$0.62 \cdot 10^{-8}$	$0.15 \cdot 10^{-10}$
$\delta_{1_2}^{m_1, m_2}$	$0.53 \cdot 10^{-7}$	$0.12 \cdot 10^{-7}$	$0.63 \cdot 10^{-8}$	$0.13 \cdot 10^{-10}$
$\delta_{1_3}^{m_1, m_2}$	$0.55 \cdot 10^{-7}$	$0.13 \cdot 10^{-7}$	$0.61 \cdot 10^{-8}$	$0.12 \cdot 10^{-10}$
$\delta_{2_1}^{m_1, m_2}$	$0.34 \cdot 10^{-7}$	$0.10 \cdot 10^{-7}$	$0.64 \cdot 10^{-8}$	$0.10 \cdot 10^{-10}$
$\delta_{2_2}^{m_1, m_2}$	$0.33 \cdot 10^{-7}$	$0.11 \cdot 10^{-7}$	$0.65 \cdot 10^{-8}$	$0.11 \cdot 10^{-10}$
$\delta_{2_3}^{m_1, m_2}$	$0.35 \cdot 10^{-7}$	$0.10 \cdot 10^{-7}$	$0.61 \cdot 10^{-8}$	$0.09 \cdot 10^{-10}$

Как видно из таблицы 2.7.1, все значения $\delta_{1_i}^{m_1, m_2}$, $\delta_{2_i}^{m_1, m_2}$ уменьшаются с ростом числа слагаемых.

Пример 2.7.3. Требуется найти решение задачи

$$w_j(s, 0) = w_{0j}(s), j = \overline{1, 4}, \text{ для случая } \varepsilon_1 = 0, \quad (2.7.6)$$

или

$$v_j(s, 0) = v_{0j}(s), j = \overline{1, 4}, \text{ для случая } \varepsilon_2 = 0$$

для системы уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_1 v_{jt} = 4v_{jss} + 2 - v_j + v_j^2 w_j, & j = \overline{1, 4} \\ \varepsilon_2 w_{jt} = w_{jss} - v_j^2 w_j, \end{cases} \quad (2.7.7)$$

на графе \mathbf{G} (рис. 2.7.2) с условиями:

$$\begin{aligned} v_{1s}(l_1, t) + v_{2s}(l_2, t) - v_{3s}(l_3, t) - v_{4s}(0, t) &= 0, \\ v_{1s}(0, t) = v_{2s}(0, t) = v_{3s}(0, t) = 0, v_{4s}(l_4, t) &= 0, \\ v_1(l_1, t) = v_2(l_2, t) = v_3(l_3, t) = v_4(0, t), & \\ w_{1s}(l_1, t) + w_{2s}(l_2, t) - w_{3s}(l_3, t) - w_{4s}(0, t) &= 0, \\ w_{1s}(0, t) = w_{2s}(0, t) = w_{3s}(0, t) = 0, w_{4s}(l_4, t) &= 0, \\ w_1(l_1, t) = w_2(l_2, t) = w_3(l_3, t) = w_4(0, t), t \in (0, T), & \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

при $l_1 = \pi, l_2 = \pi, l_3 = \pi, l_4 = \pi, T = 1$, и если: а) $\varepsilon_1 = 0, w_{10} = w_{20} = w_{30} = \frac{\sqrt{2} \cos s}{2\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{2} \cos 2s}{2\sqrt{\pi}}, w_{40} = -\frac{\sqrt{2} \cos s}{2\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{2} \cos 2s}{2\sqrt{\pi}}$; б) $\varepsilon_2 = 0, v_{10} = v_{20} = v_{30} = \frac{\sqrt{2} \cos s}{2\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{2} \cos 2s}{2\sqrt{\pi}}, v_{40} = -\frac{\sqrt{2} \cos s}{2\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{2} \cos 2s}{2\sqrt{\pi}}$.

Согласно алгоритму приближенные решения задачи (2.7.6) – (2.7.8) для j -го ребра ($j = \overline{1, 3}$) графа имеют вид $\tilde{v}_j(s, t) = \varphi_{0j}(s)v_1(t) + \varphi_{1j}(s)v_2(t)$, $\tilde{w}_j(s, t) = \varphi_{0j}(s)w_1(t) + \varphi_{1j}(s)w_2(t)$, где $\varphi_0 = (\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}, \varphi_{04}) = (\frac{\sqrt{2} \cos s}{2\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2} \cos s}{2\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2} \cos s}{2\sqrt{\pi}}, -\frac{\sqrt{2} \cos s}{2\sqrt{\pi}})$, $\varphi_1 = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13}) = (\frac{\sqrt{2} \cos 2s}{2\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2} \cos 2s}{2\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2} \cos 2s}{2\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2} \cos 2s}{2\sqrt{\pi}})$.

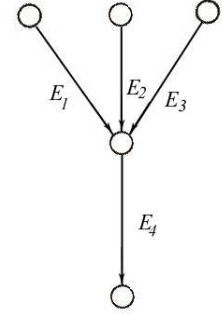


Рис. 2.7.2. Граф G_2

а) При $\varepsilon_1 = 0$ нет необходимости проверять возможную неединственность решения. Согласно теореме 2.1.2 задача (2.7.6) – (2.7.8) всегда будет иметь лишь одно решение. Поэтому можно сразу получить систему алгебро-дифференциальных уравнений. Разрешив алгебраическое уравнение системы относительно v_i, w_i в начальный момент времени, получим набор начальных условий (v_0, w_0) . Решая систему, получим одно численное решение, которое представлено в таблице 2.7.6.

б) В случае $\varepsilon_2 = 0$ задача (2.7.6) – (2.7.8) может иметь три или одно решение. Осуществим проверку неединственности решения данной задачи. Примем за $r = v_1(0), v^\perp = \varphi_{2j}(s)v_2(t), w^\perp = \tilde{w}_j(0), j = \overline{1, 3}$. Подставим полученные значения $r = 1, 050794, v^\perp = -0, 025186, w^\perp = -1, 6744291$ в формулу (2.3.4) и получим значение $\Re s = -1.97834612093402$. Согласно теореме 2.3.2, это означает, что задача (2.7.6) – (2.7.8) при заданном начальном значении функции v_{0j} будет иметь три решения. Получим систему алгебро-дифференциальных уравнений. Разрешив алгебраическое уравнение системы относительно v_i, w_i в начальный момент времени, получим три набора начальных условий $(v_0, w_{01}), (v_0, w_{02}), (v_0, w_{03})$. Решая систему получим три численных решения. Численное решение, соответствующее набору начальных условий (v_0, w_{01}) , представлено в таблице 2.7.7, численное решение, соответствующее набору начальных условий (v_0, w_{02}) , представлено в таблице 2.7.8, численное решение, соответствующее набору начальных условий (v_0, w_{03}) , представлено в таблице 2.7.9.

Таблица 2.7.2. Численное решение задачи (2.7.1), (2.7.2), (2.7.5) с набором начальных условий (v_0, w_0) в случае $\varepsilon_1 = 0$ при $m = 3$

t	$v_1(t)$	$v_2(t)$	$v_3(t)$	$w_1(t)$	$w_2(t)$	$w_3(t)$
0	0.5000000000000000	0.2000000000000000	0.1000000000000000	1	1	1
0.1	0.466790393216497	0.171790855306342	0.0764750364204525	0.933580786432994	0.858954276531711	0.764750364204525
0.2	0.443411991268428	0.152008494264875	0.0606551057910847	0.886823982536855	0.760042471324376	0.606551057910847
0.3	0.423677925278480	0.135957796702650	0.0488033399773255	0.847355850556960	0.679788983513248	0.488033399773255
0.4	0.405907947627331	0.122219833429728	0.0395491420781988	0.811815895254662	0.611099167148641	0.395491420781988
0.5	0.389487974055873	0.110193707362875	0.0321869112373487	0.778975948111745	0.550968536814373	0.321869112373487
0.6	0.374124123492998	0.0995461422190616	0.0262714226522648	0.748248246985996	0.497730711095308	0.262714226522648
0.7	0.359643689003734	0.0900559522217821	0.0214895653401134	0.719287378007468	0.450279761108910	0.214895653401134
0.8	0.345930665521528	0.0815599536907862	0.0176082900031940	0.691861331043057	0.407799768453931	0.176082900031940
0.9	0.332900326554914	0.0739300664632206	0.0144486247783624	0.665800653109828	0.369650332316103	0.144486247783624
1.0	0.320487275921111	0.0670618416300397	0.0118705365201301	0.640974551842222	0.335309208150198	0.118705365201301

Таблица 2.7.3. Численное решение задачи (2.7.1), (2.7.2), (2.7.5) с набором начальных условий (v_0, w_0) в случае $\varepsilon_2 = 0$ при $m = 3$

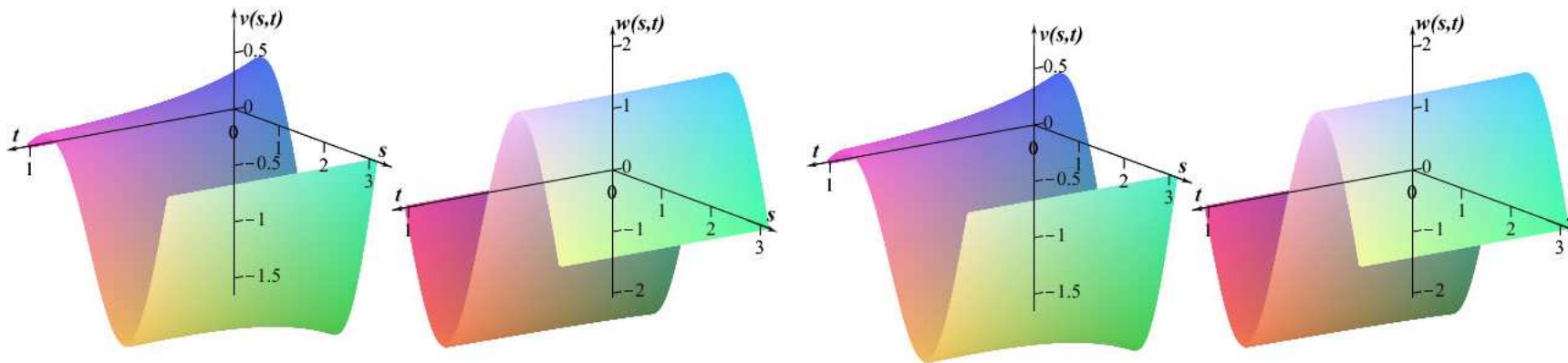
t	$v_1(t)$	$v_2(t)$	$v_3(t)$	$w_1(t)$	$w_2(t)$	$w_3(t)$
0	-1	1.31952889200000	1.31952889200000	0.143899034500000	-2.69572888500000	-2.69572888500000
0.1	-1.01458015856600	-1.01458015856600	1.20970350003012	0.147652933756907	-2.68044714115746	-2.68044714115746
0.2	-1.02952146829906	-1.02952146829906	1.12719084681326	0.151133013451538	-2.66872863790216	-2.66872863790216
0.3	-1.04479968428086	-1.04479968428086	1.06518102613071	0.154400496943425	-2.65975053326203	-2.65975053326203
0.4	-1.06039622035363	-1.06039622035363	1.01856650910516	0.157507291605557	-2.65286815963225	-2.65286815963225
0.5	-1.07629722466797	-1.07629722466797	0.983514547195766	0.160496303492360	-2.64758116734024	-2.64758116734024
0.6	-1.09249272275459	-1.09249272275459	0.957147941767407	0.163402357054933	-2.64350406044382	-2.64350406044382
0.7	-1.10897586651258	-1.10897586651258	0.937306164627882	0.166253353754942	-2.64034150526407	-2.64034150526407
0.8	-1.12574230129668	-1.12574230129668	0.922366455058392	0.169071451091683	-2.63786821117951	-2.63786821117951
0.9	-1.14278964681071	-1.14278964681071	0.911109737181140	0.171874147004177	-2.63591287033730	-2.63591287033730
1.0	-1.16011707943851	-1.16011707943851	0.902620056230009	0.174675220694747	-2.63434552863291	-2.63434552863291

Таблица 2.7.4. Численное решение задачи (2.7.1), (2.7.2), (2.7.5) с набором начальных условий (v_0, w_0) в случае $\varepsilon_2 = 0$ при $m = 3$

t	$v_1(t)$	$v_2(t)$	$v_3(t)$	$w_1(t)$	$w_2(t)$	$w_3(t)$
0	-1	1.31952889200000	1.31952889200000	0.99999999200000	0.739728026000000	0.739728026000000
0.1	-1.10797250627072	0.920835092208029	0.920835092208029	1.15161924902977	0.586851751540709	0.586851751540709
0.2	-1.22906502744480	0.637150908932418	0.637150908932418	1.26517882103567	0.465797365193946	0.465797365193946
0.3	-1.36018411327669	0.436345975913753	0.436345975913753	1.35386530176311	0.368251884286160	0.368251884286160
0.4	-1.49929249837780	0.295115477078674	0.295115477078674	1.42609329644586	0.289961355416619	0.289961355416619
0.5	-1.64504217467811	0.196499578108704	0.196499578108704	1.48744183079993	0.227839195744300	0.227839195744300
0.6	-1.79654255606486	0.128179981737862	0.128179981737862	1.54159857439459	0.179209994628798	0.179209994628798
0.7	-1.95320265805522	0.0812486251333360	0.0812486251333360	1.59094966312463	0.141703639743323	0.141703639743323
0.8	-2.11462312248316	0.0492938231398226	0.0492938231398226	1.63700091871198	0.113352681786226	0.113352681786226
0.9	-2.28052406227025	0.0277095420332662	0.0277095420332662	1.68067590331808	0.0928219513754985	0.0928219513754985
1.0	-2.45069655806667	0.0131432100811867	0.0131432100811867	1.72248316654575	0.0802909286955799	0.0802909286955799

Таблица 2.7.5. Численное решение задачи (2.7.1), (2.7.2), (2.7.5) с набором начальных условий (v_0, w_0) в случае $\varepsilon_2 = 0$ при $m = 3$

t	$v_1(t)$	$v_2(t)$	$v_3(t)$	$w_1(t)$	$w_2(t)$	$w_3(t)$
0	-1	1.31952889200000	1.31952889200000	0.210495492200000	2.22548030200000	2.22548030200000
0.1	-1.02007884753465	0.779294480494474	0.779294480494474	0.193093484764400	2.34808805120477	2.34808805120477
0.2	-1.03888748001330	0.370600573881465	0.370600573881465	0.183995967683981	2.42812955133991	2.42812955133991
0.3	-1.05701358714360	0.0621306202928624	0.0621306202928624	0.179031974136853	2.48328000738058	2.48328000738058
0.4	-1.07477300773740	-0.170379403500975	-0.170379403500975	0.176467452249572	2.52237474710376	2.52237474710376
0.5	-1.09235751404550	-0.345480951789468	-0.345480951789468	0.175427693103872	2.55055449852868	2.55055449852868
0.6	-1.10989263253608	-0.477267768643024	-0.477267768643024	0.175416547226864	2.57107473124484	2.57107473124484
0.7	-1.12746484845188	-0.576409051659460	-0.576409051659460	0.176129555314666	2.58610805257298	2.58610805257298
0.8	-1.14513603074164	-0.650963724848223	-0.650963724848223	0.177369235476326	2.59715519078182	2.59715519078182
0.9	-1.16295176284678	-0.707010604040724	-0.707010604040724	0.179002234006804	2.60527751643802	2.60527751643802
1.0	-1.18094646885192	-0.749130174376168	-0.749130174376168	0.180935818032505	2.61123810292920	2.61123810292920



а)

б)

Рис. 2.7.2. Численное решение задачи (2.7.1), (2.7.2), (2.7.5) при $m = 3$ с набором начальных условий:

а) (v_0, w_0) в случае $\varepsilon_1 = 0$; б) (v_0, w_{01}) в случае $\varepsilon_2 = 0$.

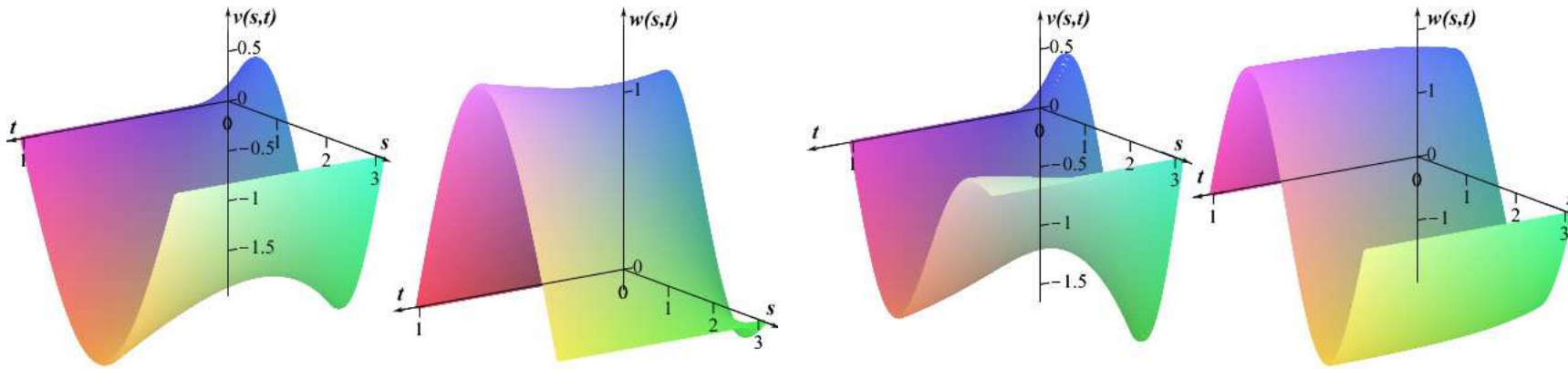


Рис. 2.7.3. Численное решение задачи (2.7.1), (2.7.2), (2.7.5) при $m = 3$ с набором начальных условий в случае $\varepsilon_2 = 0$:

а) (v_0, w_{02}) ; б) (v_0, w_{03}) .

Таблица 2.7.6. Численное решение задачи (2.7.6) – (2.7.8) с набором начальных условий (v_0, w_0)
в случае $\varepsilon_1 = 0$ при $m = 3$

t	$v_1(t)$	$v_2(t)$	$v_3(t)$	$w_1(t)$	$w_2(t)$	$w_3(t)$
0	1.77474532031291	0.43917841514	0.43917841514	-1	0.653880492266947	0.653880492266947
0.1	1.7810117601816	0.1875848455	0.1875848455	-0.8497282674	0.267438109900694	0.267438109900694
0.2	1.8746555756	0.088226880901363	0.088226880901363	-0.73326842302264	0.108095092433820	0.108095092433820
0.3	1.9723851185075	0.040513896080757	0.040513896080757	-0.6477250190703	0.0429404801734486	0.0429404801734486
0.4	2.056421686451	0.0177963869178	0.0177963869178	-0.58679344533285	0.0167647964486123	0.0167647964486123
0.5	2.1227846423455	0.0074826952384571	0.0074826952384571	-0.544380920828	0.00644605134217329	0.00644605134217329
0.6	2.1723712391495	0.00303210431088	0.00303210431088	-0.5153903790525	0.00244795444643585	0.00244795444643585
0.7	2.2079556842497	0.001193844261403	0.001193844261403	-0.495850997972	0.000920882689730350	0.000920882689730350
0.8	2.2327435076691	0.00046019796794933	0.00046019796794933	-0.482818995834	0.000344036385158505	0.000344036385158505
0.9	2.2496450998485	0.0001747474112258	0.0001747474112258	-0.474192434007	0.000127906039479525	0.000127906039479525
1.0	2.26099820557	0.00006566568195515	0.00006566568195515	-0.468512018155	0.0000473907713880415	0.0000473907713880415

Таблица 2.7.7. Численное решение задачи (2.7.6) – (2.7.8) с набором начальных условий (v_0, w_0)
в случае $\varepsilon_2 = 0$ при $m = 3$

t	$v_1(t)$	$v_2(t)$	$v_3(t)$	$w_1(t)$	$w_2(t)$	$w_3(t)$
0	-1	0.100000000000000	0.100000000000000	-4.83738135100000	-0.0179004926600000	-0.0179004926600000
0.1	-1.25484626966596	0.0595659465840646	0.0595659465840646	-4.78931065092346	-0.0108777615461367	-0.0108777615461367
0.2	-1.45953894517799	0.0354691777213961	0.0354691777213961	-4.74954942845145	-0.00658619386296819	-0.00658619386296819
0.3	-1.62386255342010	0.0211145411243030	0.0211145411243030	-4.71683857774719	-0.00397528329438848	-0.00397528329438848
0.4	-1.75571998131047	0.0125663541970381	0.0125663541970381	-4.69005160360172	-0.00239299953457033	-0.00239299953457033
0.5	-1.86148598330169	0.00747741006553489	0.00747741006553489	-4.66820135411789	-0.00143727758086582	-0.00143727758086582
0.6	-1.94629672029920	0.00444858667075737	0.00444858667075737	-4.65043676866075	-0.000861634814216346	-0.000861634814216346
0.7	-2.01428620822706	0.00264627928518530	0.00264627928518530	-4.63603379665764	-0.000515740334223272	-0.000515740334223272
0.8	-2.06877898010891	0.00157397841576167	0.00157397841576167	-4.62438316184137	-0.000308304508170384	-0.000308304508170384
0.9	-2.11244650161942	0.000936104512340797	0.000936104512340797	-4.61497682406267	-0.000184108548944875	-0.000184108548944875
1.0	-2.14743418284294	0.000556695657610098	0.000556695657610098	-4.60739432427902	-0.000109848891688738	-0.000109848891688738

Таблица 2.7.8. Численное решение задачи (2.7.6) – (2.7.8) с набором начальных условий (v_0, w_0)
в случае $\varepsilon_2 = 0$ при $m = 3$

t	$v_1(t)$	$v_2(t)$	$v_3(t)$	$w_1(t)$	$w_2(t)$	$w_3(t)$
0	-1	0.100000000000000	0.100000000000000	-0.355746741800000	-0.853493789200000	-0.853493789200000
0.1	-0.983680888917727	0.0870077214159685	0.0870077214159685	-0.347755171515001	-0.810705569102179	-0.810705569102179
0.2	-0.967607103379436	0.0750700359793773	0.0750700359793773	-0.340024901749219	-0.767165937143944	-0.767165937143944
0.3	-0.951776317149441	0.0641435098763054	0.0641435098763054	-0.332544899796366	-0.722735431403923	-0.722735431403923
0.4	-0.936186145789414	0.0541882901612977	0.0541882901612977	-0.325305206710491	-0.677247720629474	-0.677247720629474
0.5	-0.920834159667331	0.0451683056342662	0.0451683056342662	-0.318297023772209	-0.630501891438293	-0.630501891438293
0.6	-0.905717895615123	0.0370513635392342	0.0370513635392342	-0.311512884961934	-0.582254888481108	-0.582254888481108
0.7	-0.890834873517414	0.0298094497185872	0.0298094497185872	-0.304946837462276	-0.532210833002383	-0.532210833002383
0.8	-0.876182613453159	0.0234191577911533	0.0234191577911533	-0.298595076541718	-0.480012947502852	-0.480012947502852
0.9	-0.861758659470887	0.0178619582803026	0.0178619582803026	-0.292456646583136	-0.425242746330882	-0.425242746330882
1.0	-0.847560615834471	0.0131245163188365	0.0131245163188365	-0.286534973322002	-0.367453108040878	-0.367453108040878

Таблица 2.7.9. Численное решение задачи (2.7.6) – (2.7.8) с набором начальных условий (v_0, w_0)
в случае $\varepsilon_2 = 0$ при $m = 3$

t	$v_1(t)$	$v_2(t)$	$v_3(t)$	$w_1(t)$	$w_2(t)$	$w_3(t)$
0	-1.	0.100000000000000	0.100000000000000	5.17223101600000	-0.0156578017700000	-0.0156578017700000
0.1	-0.354791068770522	0.0596916678582983	0.0596916678582983	5.07135545387174	-0.00972195096073935	-0.00972195096073935
0.2	0.165035309289305	0.0356096564836318	0.0356096564836318	4.98551365627074	-0.00600117494727301	-0.00600117494727301
0.3	0.583490529502554	0.0212319612490016	0.0212319612490016	4.91301922624442	-0.00368452692099127	-0.00368452692099127
0.4	0.920082563687212	0.0126534411359078	0.0126534411359078	4.85223358978117	-0.00225119902628944	-0.00225119902628944
0.5	1.19063832997657	0.00753789829375224	0.00753789829375224	4.80160125259617	-0.00136951495962571	-0.00136951495962571
0.6	1.40797984253369	0.00448890666805968	0.00448890666805968	4.75967786861875	-0.000829992306646105	-0.000829992306646105
0.7	1.58248002284189	0.00267239587532068	0.00267239587532068	4.72514979255141	-0.000501370039583572	-0.000501370039583572
0.8	1.72251893165063	0.00159057486085672	0.00159057486085672	4.69684475173118	-0.000302016268717102	-0.000302016268717102
0.9	1.83485819073741	0.000946483393103030	0.000946483393103030	4.67373432994477	-0.000181498862823300	-0.000181498862823300
1.0	1.92494700400965	0.000563114367644910	0.000563114367644910	4.65492979688015	-0.000108857749730763	-0.000108857749730763

Глава 3. Методы и алгоритмы исследования многокомпонентной математической модели оптимального регулирования процесса распространения нервного импульса в мембранной оболочке

В данной главе будет изучена вырожденная многокомпонентная модель распространения нервного импульса в мембранной оболочке. Изначально в работах [67, 73] была получена невырожденная двухкомпонентная модель, зависящая от искомым функций v_1 и v_2 , которые моделируют поведение ионов химических элементов в мембранной оболочке. С развитием современной биофизики все более востребованными становятся исследования более сложных биологических систем, что приводит к необходимости изучения многокомпонентных моделей. В работе [5] было предложено рассматривать вырожденную модель в связи с тем, что скорость изменения одних компонент, называемых активаторами, существенно превосходит скорость других – ингибиторов. В случае многокомпонентности изучались модели, имеющие лишь один активатор [74–76]. В настоящей диссертационной работе исследуются многокомпонентные модели, в которых может быть любое число активаторов и ингибиторов.

3.1. Исследование математической модели процесса возбуждения нервного импульса в мембранной оболочке

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1t} - \alpha_1 \Delta v_1 + \beta_{11}v_1 + \beta_{12}v_2 + \dots + \beta_{1m}v_m + \varkappa_1 v_1^3 = u_1, \\ v_{2t} - \alpha_2 \Delta v_2 + \beta_{21}v_1 + \beta_{22}v_2 + \dots + \beta_{2m}v_m + \varkappa_2 v_2^3 = u_2, \\ \dots \\ v_{kt} - \alpha_k \Delta v_k + \beta_{k1}v_1 + \beta_{k2}v_2 + \dots + \beta_{km}v_m + \varkappa_k v_k^3 = u_k, \\ -\alpha_{k+1} \Delta v_{(k+1)} + \beta_{(k+1)1}v_1 + \beta_{(k+1)2}v_2 + \dots + \beta_{(k+1)m}v_m = u_{(k+1)}, \\ \dots \\ -\alpha_m \Delta v_m + \beta_{m1}v_1 + \beta_{m2}v_2 + \dots + \beta_{mm}v_m = u_m \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

с краевым условием

$$v_i(s, t) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad (3.1.2)$$

и начальным условием

$$v_i(s, 0) = v_{0i}(s), \quad i = \overline{1, k}, \quad s \in \Omega. \quad (3.1.3)$$

Для простоты изложения разобьем редукцию задачи (3.1.1), (3.1.2) к полулинейному уравнению соболевского типа

$$L\dot{x} + Mx + N(x) = 0 \quad (3.1.4)$$

в три этапа.

Этап 1. Возьмем банахово пространство $\mathfrak{H} = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, тогда $\mathfrak{A} = \mathfrak{H}^m$, гильбертово пространство $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}^m$, где $\mathfrak{h} = L_2(\Omega)$, скалярное произведение которого определим как $[v, \zeta] = \sum_{i=1}^m \langle v_i, \zeta_i \rangle$, где $x = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ есть скалярное произведение заданное на пространстве $L_2(\Omega)$. Обозначим через \mathfrak{A}^* пространство сопряженное к \mathfrak{A} относительно скалярного произведения в \mathfrak{H} .

В дальнейшем будем считать, что матрица $B = \{\beta_{ij}\}_{i,j=1}^m$ обладает свойством

$$\exists C_B, C^B > 0 : C_B [x, x] \leq [Bx, x] \leq C^B [x, x]. \quad (3.1.5)$$

Этап 2. Определим линейные операторы $L, M : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}^*$ формулами

$$\begin{aligned} [Lx, \zeta] &= \langle v_1, \eta_1 \rangle + \dots + \langle v_k, \eta_k \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{A}, \\ [Mx, \zeta] &= \alpha_1 \langle v_{1s_1}, \zeta_{1s_1} \rangle + \alpha_2 \langle v_{2s_2}, \zeta_{2s_2} \rangle + \dots + \alpha_m \langle v_{ms_i}, \zeta_{ms_i} \rangle + \\ &+ \langle \beta_{11}v_1 + \beta_{12}v_2 + \dots + \beta_{1m}v_m, \zeta_1 \rangle + \langle \beta_{21}v_1 + \beta_{22}v_2 + \dots + \\ &+ \dots + \beta_{2m}v_m, \zeta_2 \rangle + \langle \beta_{m1}v_1 + \beta_{m2}v_2 + \dots + \beta_{mm}v_m, \zeta_m \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Замечание 3.1.1. Заметим, что здесь и далее выполняется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам.

Лемма 3.1.1. (i) Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}; \mathfrak{A}^*)$ – самосопряженный, неотрицательно определенный оператор.

(ii) Пусть $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, m}$, и выполняется условие (3.1.5), тогда оператор $M \in C^\infty(\mathfrak{A}; \mathfrak{A}^*)$ s -монотонен и 2-коэрцитивен.

Доказательство. Справедливость утверждения (i) следует из построения оператора L . Производная Фреше оператора M в точке x из пространства \mathfrak{A} определяется следующим образом

$$\begin{aligned} [M'_x \xi, \zeta] &= \alpha_1 \langle \xi_{1s_1}, \zeta_{1s_1} \rangle + \alpha_2 \langle \xi_{2s_2}, \zeta_{2s_2} \rangle + \dots + \alpha_m \langle \xi_{ms_i}, \zeta_{ms_i} \rangle + \\ &+ \langle \beta_{11}\xi_1 + \beta_{12}\xi_2 + \dots + \beta_{1m}\xi_m, \zeta_1 \rangle + \langle \beta_{21}\xi_1 + \beta_{22}\xi_2 + \dots + \\ &+ \dots + \beta_{2m}\xi_m, \zeta_2 \rangle + \langle \beta_{m1}\xi_1 + \beta_{m2}\xi_2 + \dots + \beta_{mm}\xi_m, \zeta_m \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{A}, \end{aligned}$$

причем справедливо, что

$$|[M'_x \xi, \zeta]| \leq C \|\xi\|_{\mathfrak{A}} \|\zeta\|_{\mathfrak{A}},$$

где через M'_x обозначена производная Фреше оператора M в точке x . Производная Фреше $M_x^{(2)} \equiv \mathbb{O}$. Отсюда вытекает C^∞ -гладкость оператора M . Поскольку

$$\begin{aligned} [M'_x \xi, \xi] &= \alpha_1 \langle \xi_{1s_1}, \xi_{1s_1} \rangle + \alpha_2 \langle \xi_{2s_2}, \xi_{2s_2} \rangle + \dots + \alpha_m \langle \xi_{ms_i}, \xi_{ms_i} \rangle + \\ &+ \langle \beta_{11} \xi_1 + \beta_{12} \xi_2 + \dots + \beta_{1m} \xi_m, \xi_1 \rangle + \langle \beta_{21} \xi_1 + \beta_{22} \xi_2 + \dots + \\ &+ \dots + \beta_{2m} \xi_m, \xi_2 \rangle + \langle \beta_{m1} \xi_1 + \beta_{m2} \xi_2 + \dots + \beta_{mm} \xi_m, \xi_m \rangle > 0, \quad x, \xi \in \mathfrak{A}, \end{aligned}$$

то, согласно определению 1.1.8, оператор M s -монотонен. Из того, что

$$C_M \|x\|_{\mathfrak{A}}^2 \leq [M(x), x] \leq C^M \|x\|_{\mathfrak{A}}^2,$$

согласно определению 1.1.9, вытекает 2-коэрцитивность оператора M . \square

Этап 3. Зададим нелинейный оператор N формулой

$$[N(x), \zeta] = \varkappa_1 \langle v_1^3, \zeta_1 \rangle + \varkappa_2 \langle v_2^3, \zeta_2 \rangle + \dots + \varkappa_k \langle v_k^3, \zeta_k \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{A},$$

и положим $\text{dom } N = \mathfrak{B} = \mathfrak{b}^m$, $\mathfrak{b} = L_4(\Omega)$, $\mathfrak{B}^* = (\mathfrak{b}^*)^m$, $\mathfrak{b}^* = L_{\frac{4}{3}}(\Omega)$, пространство \mathfrak{B}^* сопряженное к \mathfrak{B} относительно скалярного произведения в \mathcal{H} . Для пространств $\mathfrak{H}, \mathfrak{A}, \mathcal{H}, \mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*$ при $n \leq 4$ справедливо

$$\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}^* \hookrightarrow \mathfrak{A}^*, \quad (3.1.6)$$

где все вложения плотны и непрерывны [51], а вложение $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathcal{H}$ еще и компактно.

Лемма 3.1.2. Пусть $\varkappa_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, \dots, k$, тогда оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ s -монотонен и 4-коэрцитивен.

Доказательство. Производная Фреше оператора N в точке $x \in \mathfrak{B}$ определяется следующим образом

$$[N'_x \xi, \zeta] = 3\varkappa_1 \langle v_1^2 \xi_1, \zeta_1 \rangle + 3\varkappa_2 \langle v_2^2 \xi_2, \zeta_2 \rangle + \dots + 3\varkappa_k \langle v_k^2 \xi_k, \zeta_k \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{B}.$$

Тогда

$$|[N'_x \xi, \zeta]| \leq 3\beta \|\xi\|_{\mathfrak{B}} \|x\|_{\mathfrak{B}}^2 \|\zeta\|_{\mathfrak{B}},$$

$$|[N''_x(\xi_1, \xi_2), \zeta]| \leq 6\beta \|\xi_1\|_{\mathfrak{B}} \|\xi_2\|_{\mathfrak{B}} \|x\|_{\mathfrak{B}} \|\zeta\|_{\mathfrak{B}},$$

$$|[N_x'''(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \zeta]| \leq 6\beta \|\xi_1\|_{\mathfrak{B}} \|\xi_2\|_{\mathfrak{B}} \|\xi_3\|_{\mathfrak{B}} \|\zeta\|_{\mathfrak{B}},$$

где через N'_x обозначена производная Фреше оператора N в точке x . Производные Фреше $N_x^{(4)} \equiv \mathbb{O}$. Отсюда вытекает C^∞ -гладкость оператора N . Поскольку

$$[N'_x \xi, \xi] = 3\kappa_1 \langle v_1^2 \xi_1, \xi_1 \rangle + 3\kappa_2 \langle v_2^2 \xi_2, \xi_2 \rangle + \dots + 3\kappa_k \langle v_k^2 \xi_k, \xi_k \rangle > 0, \quad x, \xi \in \mathfrak{B},$$

то оператор N s -монотонен. Из того, что

$$[N(x), x] = \kappa_1 \|v_1\|_{\mathfrak{b}}^4 + \kappa_2 \|v_2\|_{\mathfrak{b}}^4 + \dots + \kappa_k \|v_k\|_{\mathfrak{b}}^4,$$

вытекает 4-коэрцитивность оператора N . \square

По построению оператора L множества $\ker L$, $\text{coim } L$, $\text{coker } L$, $\text{im } L$, задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \ker L &= \underbrace{\{0\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}}_k \times \underbrace{\mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \times \dots \times \mathfrak{H}}_{m-k}, \\ \text{coim } L &= \underbrace{\mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \times \dots \times \mathfrak{H}}_k \times \underbrace{\{0\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}}_{m-k}, \\ \text{coker } L &= \underbrace{\{0\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}}_k \times \underbrace{\mathfrak{H}^* \times \mathfrak{H}^* \times \dots \times \mathfrak{H}^*}_{m-k}, \\ \text{im } L &= \underbrace{\mathfrak{H}^* \times \mathfrak{H}^* \times \dots \times \mathfrak{H}^*}_k \times \underbrace{\{0\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}}_{m-k}. \end{aligned}$$

Значит, условие

$$\mathcal{H} \supset \ker L \equiv \text{coker } L \subset \mathcal{H}^*, \quad \mathfrak{A} = \ker L \oplus \text{coim } L, \quad \mathfrak{A}^* = \text{coker } L \oplus \text{im } L \quad (3.1.7)$$

выполнено. В силу условия (3.1.7) существует проектор Q вдоль $\text{coker } L$ на $\text{im } L$. Сделаем допущение:

$$u_{k+1}, \dots, u_m \text{ не зависят от } t \in (0, T). \quad (3.1.8)$$

Построим множество

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \{x \in \mathfrak{A} : \langle \alpha_{k+1} v_{(k+1)s_i}, \xi_{(k+1)s_i} \rangle + \langle \beta_{(k+1)1} v_1 + \beta_{(k+1)2} v_2 + \dots + \\ &+ \beta_{(k+1)m} v_m, \xi_{k+1} \rangle + \dots + \langle \alpha_m v_{ms_i}, \xi_{ms_i} \rangle + \langle \beta_{m1} v_1 + \beta_{m2} v_2 + \dots + \beta_{mm} v_m, \xi_m \rangle = \\ &= \langle u_{(k+1)}, \xi_{k+1} \rangle + \dots + \langle u_m, \xi_m \rangle \}. \end{aligned}$$

Обозначим через P проектор вдоль $\ker L$ на $\text{coim } L$. Пусть точка $x_0 \in \mathfrak{M}$. Положим $x_0^1 = Px_0 \in \text{coim } L$.

Теорема 3.1.1. Пусть выполнено условие (3.1.8), тогда множество \mathfrak{M} есть простое банахово C^∞ -многообразие, диффеоморфно проектирующееся вдоль $\ker L$ на $\text{coim } L$ всюду, за исключением, быть может, точки нуль.

Доказательство. В силу представления пространства $\mathfrak{A} = \ker L \oplus \text{coim } L$ и существования проектора P любой вектор $x \in \mathfrak{A}$ представим единственным способом в виде $x = x^0 + x^1$, где $x^0 \in \ker L$, а $x^1 \in \text{coim } L$. Зафиксируем $x^1 \in \text{coim } L$. В силу теоремы 1.1.6 и лемм 3.1.1, 3.1.2 существует единственное решение $x^0 \in \ker L$ уравнения

$$(\mathbb{I} - Q)(Mx^0 + Mx^1 + N(x^0 + x^1)) = (\mathbb{I} - Q)u. \quad (3.1.9)$$

Итак, существует отображение $\delta : \text{coim } L \rightarrow \ker L$ такое, что

$$x^0 = \delta(x^1) \quad \forall x^1 \in \text{coim } L.$$

Что, в свою очередь, означает, что для любого вектора $x^1 \in \text{coim } L$ существует единственный вектор $x^0 \in \ker L$ такой, что $x^0 + x^1 \in \mathfrak{M}$.

В силу единственности решения уравнения (3.1.9) и теоремы о неявной функции отображение $\delta \in C^r$, $r \geq 1$. Тогда искомым диффеоморфизм $\Gamma : \text{coim } L \rightarrow \mathfrak{M}$ имеет вид $\Gamma(x^1) = x^1 + \delta(x^1)$, а оператор Γ^{-1} есть сужение проектора P на \mathfrak{M} . \square

3.2. Задача оптимального управления для модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке нерва

Построим пространства

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \{x = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m) : v_i \in L_\infty(0, T; \mathfrak{H}) \cap L_4(0, T; \mathfrak{b}), \\ &\quad \frac{dv_i}{dt} \in L_2(0, T; \mathfrak{h}), i = 1, \dots, k; v_i \in L_2(0, T; \mathfrak{H}), i = k + 1, \dots, m\}; \\ \mathfrak{U} &= \{u = (u_1, u_2, \dots, u_m) : u_i \in L_{\frac{4}{3}}(0, T; \mathfrak{b}^*), i = 1, \dots, k; \\ &\quad u_i \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*), i = k + 1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Определение 3.2.1. Слабым обобщенным решением задачи (3.1.1), (3.1.2) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию

$$\int_0^T \varphi(t) \left[\frac{d}{dt} Lx + Mx + N(x), w \right] dt = \int_0^T \varphi(t) [u, w] dt, \quad \forall w \in \mathfrak{A}, \forall \varphi \in L_2(0, T). \quad (3.2.1)$$

Решение задачи (3.1.1), (3.1.2) назовем *решением задачи Шоултера – Сидорова*, если оно удовлетворяет (3.1.3).

В силу сепарабельности пространства \mathfrak{A} найдется система функций $\{\varphi_h\}$ ортонормальная (в смысле \mathcal{H}) и тотальная в пространстве \mathfrak{A} , в силу вложений (3.1.6) образует базис в пространстве \mathcal{H} . Построим галеркинские приближения решения задачи (3.1.1) – (3.1.3) в виде

$$v_i^h(s, t) = \sum_{p=1}^h v_{i_p}(t) \varphi_p(s), \quad i = \overline{1, m}, \quad h > \dim \ker L,$$

где коэффициенты v_{i_p} , $i = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, h}$, определяются системой уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle v_{1t}^h + \beta_{11}v_1^h + \beta_{12}v_2^h + \dots + \beta_{1m}v_m^h + \varkappa_1(v_1^h)^3, \varphi_p \rangle + \langle \alpha_1 v_{1s_i}^h, \varphi_{ps_i} \rangle = \langle u_1, \varphi_p \rangle, \\ \langle v_{2t}^h + \beta_{21}v_1^h + \beta_{22}v_2^h + \dots + \beta_{2m}v_m^h + \varkappa_2(v_2^h)^3, \varphi_p \rangle + \langle \alpha_2 v_{2s_i}^h, \varphi_{ps_i} \rangle = \langle u_2, \varphi_p \rangle, \\ \dots \\ \langle v_{kt}^h + \beta_{k1}v_1^h + \beta_{k2}v_2^h + \dots + \beta_{km}v_m^h + \varkappa_k(v_k^h)^3, \varphi_p \rangle + \langle \alpha_k v_{ks_i}^h, \varphi_{ps_i} \rangle = \langle u_k, \varphi_p \rangle, \quad p = \overline{1, h}, \\ \langle \beta_{(k+1)1}v_1^h + \beta_{(k+1)2}v_2^h + \dots + \beta_{(k+1)m}v_m^h, \varphi_p \rangle + \langle \alpha_{k+1}v_{(k+1)s_i}^h, \varphi_{ps_i} \rangle = \langle u_{(k+1)}, \varphi_p \rangle, \\ \dots \\ \langle \beta_{m1}v_1^h + \beta_{m2}v_2^h + \dots + \beta_{mm}v_m^h, \varphi_p \rangle + \langle \alpha_m v_{ms_i}^h, \varphi_{ps_i} \rangle = \langle u_m, \varphi_p \rangle, \end{array} \right. \quad (3.2.2)$$

и условиями Шоултера – Сидорова

$$\langle v_1(0) - v_{01}, \varphi_p \rangle = 0, \dots, \langle v_k(0) - v_{0k}, \varphi_p \rangle = 0, \quad p = \overline{1, h}. \quad (3.2.3)$$

Уравнения (3.2.2) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $T^h \in \mathbb{R}_+$, $T^h = T^h(x_0)$, $\mathfrak{H}^h = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h\}$.

Лемма 3.2.1. Пусть $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, m}$, $\varkappa_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, k}$, $n \leq 4$, и выполнено условие (3.1.5), тогда при любых $v_{0i} \in \mathfrak{b}$, $i = \overline{1, k}$, существует единственное локальное решение $x^h \in C^1(0, T^h; \mathfrak{H}^h)$ задачи (3.2.2), (3.2.3).

Доказательство. Лемма является следствием теоремы существования и единственности решения задачи Шоултера – Сидорова для системы алгебро-дифференцированных уравнений, впервые рассмотренной и доказанной в работе [40]. \square

Теорема 3.2.1. Пусть $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, m}$, $\varkappa_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, k}$, $n \leq 4$, и выполнено условие (3.1.5). Тогда при любых $v_{0i} \in \mathfrak{b}$, $i = \overline{1, k}$, $u \in \mathfrak{A}$ существует единственное слабое обобщенное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (3.1.1) – (3.1.3).

Доказательство. Единственность. Пусть $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = x_2(t)$ – два решения задачи (3.1.1) – (3.1.3). Тогда для их разности $w = x_1 - x_2$ получим

$$[Lw, w] + 2 \int_0^t [Mx_1 - Mx_2 + N(x_1) - N(x_2), w] d\tau = 0. \quad (3.2.4)$$

Первое слагаемое в (3.2.4) неотрицательно в силу неотрицательной определенности оператора L , а второе неотрицательно в силу s -монотонности операторов M, N . Значит, равенство (3.2.4) удовлетворяется лишь в случае $w \equiv 0$.

Существование. Умножим p -ое уравнение (3.2.2) на $v_{i_p}(t)$ соответственно, результаты сложим по $p = \overline{1, h}$ и проинтегрируем на $(0, t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \|v_i^h(t)\|_{\mathfrak{b}}^2 + \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \|v_i^h(\tau)\|_{\mathfrak{S}}^2 + C_B \sum_{i=1}^m \|v_i^h(\tau)\|_{\mathfrak{b}}^2 + \right. \\ & \left. + \varkappa_i \sum_{i=1}^k \|v_i^h(\tau)\|_{\mathfrak{b}}^4 \right) d\tau \leq \int_0^t \sum_{i=1}^m \langle u_i(\tau), v_i^h(\tau) \rangle d\tau + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \|v_i^h(0)\|_{\mathfrak{b}}^2 \leq \\ & \leq C_1^2 \int_0^t \|u_1(\tau)\|_{\mathfrak{b}^*}^{\frac{4}{3}} d\tau + \dots + C_k^2 \int_0^t \|u_k(\tau)\|_{\mathfrak{b}^*}^{\frac{4}{3}} d\tau + \\ & + \frac{1}{C_1^2} \int_0^t \|v_1^h(\tau)\|_{\mathfrak{b}}^4 d\tau + \dots + \frac{1}{C_k^2} \int_0^t \|v_k^h(\tau)\|_{\mathfrak{b}}^4 d\tau + \\ & + C_{k+1}^2 \int_0^t \|u_{k+1}(\tau)\|_{\mathfrak{S}^*}^2 d\tau + \dots + C_m^2 \int_0^t \|u_m(\tau)\|_{\mathfrak{S}^*}^2 d\tau + \\ & + \frac{1}{C_{k+1}^2} \int_0^t \|v_{k+1}^h(\tau)\|_{\mathfrak{S}}^2 d\tau + \dots + \frac{1}{C_m^2} \int_0^t \|v_m^h(\tau)\|_{\mathfrak{S}}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Подберем константы $C_i, i = \overline{1, m}$, так, чтобы $\varkappa_i - \frac{1}{C_i^2} > 0, i = \overline{1, k}, \alpha_i - \frac{1}{C_i^2} > 0, i = \overline{k+1, m}$, тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \|v_i^h(t)\|_{\mathfrak{b}}^2 + C_1 \int_0^t \left(\sum_{i=k+1}^m \|v_i^h(\tau)\|_{\mathfrak{S}}^2 + \sum_{i=1}^k \|v_i^h(\tau)\|_{\mathfrak{b}}^4 \right) d\tau \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^k C_1^2 \int_0^t \|u_i(\tau)\|_{\mathfrak{b}^*}^{\frac{4}{3}} d\tau + \sum_{i=k+1}^m C_i^2 \int_0^t \|u_i(\tau)\|_{\mathfrak{S}^*}^2 d\tau + \sum_{i=1}^k \|v_i^h(0)\|_{\mathfrak{b}}^2, \quad (3.2.5) \\ & C_i > 0, i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Из оценки (3.2.5) следует, что все T^h , гарантированные леммой 3.2.1, можно взять равными друг другу: $T^h = T$. Пространства $L_4(0, T; \mathfrak{b}), L_2(0, T; \mathfrak{S})$ и

$L_{\frac{4}{3}}(0, T; \mathfrak{b}^*)$ являются рефлексивными бохнеровскими пространствами, а значит, существуют слабые пределы

$$\begin{aligned} v_i^h &\rightharpoonup v_i \text{ * -слабо в } L_\infty(0, T; \mathcal{H}), i = \overline{1, k}; \\ v_i^h &\rightharpoonup v_i \text{ слабо в } L_4(0, T; \mathfrak{b}), i = \overline{1, k}; \\ (v_i^h)^3 &\rightharpoonup \mu_i \text{ слабо в } L_{\frac{4}{3}}(0, T; \mathfrak{b}^*), i = \overline{1, k}; \\ \frac{\partial v_i^h}{\partial t} &\rightharpoonup \frac{\partial v_i}{\partial t} \text{ * -слабо в } L_\infty(0, T; \mathcal{H}), i = \overline{1, k}; \\ v_i^h &\rightharpoonup v_i \text{ слабо в } L_2(0, T; \mathfrak{H}), i = \overline{k+1, m}. \end{aligned}$$

Продолжим $x^h = (v_1^h(t), v_2^h(t), \dots, v_m^h(t))$ на \mathbb{R}_+ нулем вне $[0, T]$; соответствующее продолжение обозначим через $\tilde{x}^h(t)$. Тогда из (3.1.1) следует, что

$$\begin{aligned} &\langle L\tilde{x}_t^h(t), \varphi_j \rangle + \langle M\tilde{x}^h(t) + N(\tilde{x}^h(t)), \varphi_j \rangle = \\ &= \langle \tilde{u}(t), \varphi_j \rangle + \langle Lx_0^h, \varphi_j \rangle \delta(t-0) + \langle Lx^h(T), \varphi_j \rangle \delta(t-T). \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Перейдем к пределу в (3.2.6) при фиксированном j и получим

$$\langle L\tilde{x}_t(t), \varphi_j \rangle + \langle M\tilde{x}, \varphi_j \rangle + \langle \tilde{\mu}, \varphi_j \rangle = \langle \tilde{u}(t), \varphi_j \rangle + \langle Lx_0, \varphi_j \rangle \delta(t-0) - \langle \xi, \varphi_j \rangle \delta(t-T),$$

следовательно,

$$L\tilde{x}_t(t) + M\tilde{x} + \tilde{\mu} = \tilde{u}(t) + Lx_0\delta(t-0) - \xi\delta(t-T). \quad (3.2.7)$$

Сужая (3.2.7) на $(0, T)$, получим, что

$$L\dot{x} + Mx + \mu = u, \quad (3.2.8)$$

следовательно, $\dot{v}_i \in L_\infty(0, T; \mathfrak{H}) \cap L_{\frac{4}{3}}(0, T; \mathfrak{b}^*)$, $i = \overline{1, k}$. В силу компактного вложения $\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H}$ последовательность $v_i^h \rightarrow v_i$, $i = \overline{1, k}$, в пространстве $L_2(0, T; \mathcal{H})$, тогда в силу единственности предела получим, что

$$\mu = N(x).$$

□

Выберем $\mathfrak{U}_{ad} \subset \mathfrak{U}$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(x, u) \rightarrow \inf \quad (3.2.9)$$

решениями задачи (3.1.1) – (3.1.3), где целевой функционал зададим в виде:

$$J(x, u) = \vartheta \sum_{i=1}^k \int_0^T \|v_i - v_i^{dop}\|_{\mathfrak{b}}^4 dt + \vartheta \sum_{i=k+1}^m \int_0^T \|v_i - v_i^{dop}\|_{\mathfrak{F}}^2 dt + \quad (3.2.10)$$

$$+ (1 - \vartheta) \sum_{i=1}^k \int_0^T \|u_i\|_{\mathfrak{b}^*}^{\frac{4}{3}} dt + (1 - \vartheta) \sum_{i=k+1}^m \int_0^T \|u_i\|_{\mathfrak{F}^*}^2 dt, \quad \vartheta \in (0, 1),$$

где $x^{dop} = (v_1^{dop}, v_2^{dop}, \dots, v_m^{dop})$ – желаемое состояние системы, например, состояние, в котором находилась система до прохождения порога возбуждения.

Определение 3.2.2. Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ назовем решением задачи оптимального управления (3.1.1) – (3.1.3), (3.2.9) если

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{(x, u)} J(x, u),$$

где пары $(x, u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ удовлетворяют (3.1.1) – (3.1.3) в смысле определения 3.2.1; вектор-функцию \tilde{u} назовем оптимальным управлением.

Замечание 3.2.1. Допустимым элементом задачи (3.1.1) – (3.1.3), (3.2.9) назовем пару $(x, u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$, удовлетворяющую задаче (3.1.1) – (3.1.3), для которой

$$J(x, u) < +\infty.$$

Если множество $\mathfrak{U}_{ad} \neq \emptyset$, то для любого $u \in \mathfrak{U}_{ad} \subset \mathfrak{U}$ в силу теоремы 3.2.1 существует единственное решение $x = x(u)$ задачи (3.1.1) – (3.1.3). Значит, множество допустимых элементов задачи не пусто.

Теорема 3.2.2. Пусть $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, \dots, m$, $\varkappa_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, \dots, k$, $n \leq 4$, и выполнено условие (3.1.5), тогда при любых $v_{0i} \in \mathfrak{b}$, $i = \overline{1, k}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует оптимальное управление в задаче (3.1.1) – (3.1.3), (3.2.9).

Доказательство. Поскольку множество допустимых пар (x, u) не пусто, то найдется последовательность $\{x^g, u^g\} \subset \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ такая, что

$$\lim_{g \rightarrow \infty} J(x^g, u^g) = \inf_{(x, u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}} J(x, u),$$

где $x^g = (v_1^g(t), v_2^g(t), \dots, v_m^g(t))$ последовательность слабо обобщенных решений задачи

$$L\dot{x}^g + Mx^g + N(x^g) = u^g, \quad (3.2.11)$$

$$L(x^g(0) - x_0^g) = 0. \quad (3.2.12)$$

Тогда из (3.2.10) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|v_i^g\|_{L_4(0,T;\mathfrak{b})} &\leq \text{const}, i = \overline{1, k}, \|v_i^g\|_{L_2(0,T;\mathfrak{H})} \leq \text{const}, i = \overline{k+1, m}, \\ \|u_i^g\|_{L_{\frac{4}{3}}(0,T;\mathfrak{b}^*)} &\leq \text{const}, i = \overline{1, k}, \|u_i^g\|_{L_2(0,T;\mathfrak{H}^*)} \leq \text{const}, i = \overline{k+1, m}, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

при всех $g \in \mathbb{N}$. Из (3.2.13) извлечем слабо сходящиеся подпоследовательности:

$$\begin{aligned} v_i^g &\rightharpoonup \tilde{v}_i \text{ слабо в пространстве } L_4(0, T; \mathfrak{b}), i = \overline{1, k}, \\ v_i^g &\rightharpoonup \tilde{v}_i \text{ слабо в пространстве } L_2(0, T; \mathfrak{H}), i = \overline{k+1, m} \\ u_i^g &\rightharpoonup \tilde{u}_i \text{ слабо в пространстве } L_{\frac{4}{3}}(0, T; \mathfrak{b}^*), i = \overline{1, k}, \\ u_i^g &\rightharpoonup \tilde{u}_i \text{ слабо в пространстве } L_2(0, T; \mathfrak{H}^*), i = \overline{k+1, m}. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

В силу теоремы Мазура о секвенциальной слабой замкнутости множества \mathfrak{U}_{ad} точка $\tilde{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$. Тогда, в силу рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 3.2.1 получим

$$Mx^g \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*), N(x^g) \in L_{\frac{4}{3}}(0, T; \mathfrak{b}^*),$$

и можно извлечь такую подпоследовательность (обозначим ее также для удобства) $\{x^g, u^g\}$, что переходя к пределу, получим

$$L \dot{\tilde{x}} + M\tilde{x} + \mu = \tilde{u}.$$

Рассуждая аналогично теореме 3.2.1 получим, что $\mu = N(\tilde{x})$. Следовательно, $\liminf J(x^g, u^g) \geq J(\tilde{x}, \tilde{u})$. Значит, (\tilde{x}, \tilde{u}) есть оптимальное управление задачи (3.1.1) – (3.1.3). \square

3.3. Методы декомпозиции и штрафа для задачи оптимального управления распространением нервного импульса в мембранной оболочке нерва

Линеаризуем (3.1.1) – (3.1.3) при помощи введения дополнительной искомой вектор-функции y . Для этого определим $x = x(u, y) = x(t, u, y)$ как решение линейной задачи, относительно вектор-функции x :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1t} - \alpha_1 \Delta v_1 + \beta_{11} v_1 + \beta_{12} v_2 + \dots + \beta_{1m} v_m + \varkappa_1 y_1^3 = u_1, \\ v_{2t} - \alpha_2 \Delta v_2 + \beta_{21} v_1 + \beta_{22} v_2 + \dots + \beta_{2m} v_m + \varkappa_2 y_2^3 = u_2, \\ \dots \\ v_{kt} - \alpha_k \Delta v_k + \beta_{k1} v_1 + \beta_{k2} v_2 + \dots + \beta_{km} v_m + \varkappa_k y_k^3 = u_k, \\ -\alpha_{k+1} \Delta v_{(k+1)} + \beta_{(k+1)1} v_1 + \beta_{(k+1)2} v_2 + \dots + \beta_{(k+1)m} v_m = u_{(k+1)}, \\ \dots \\ -\alpha_m \Delta v_m + \beta_{m1} v_1 + \beta_{m2} v_2 + \dots + \beta_{mm} v_m = u_m, \\ v_i(s, t) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \\ v_i(s, 0) = v_{0i}(s), \quad i = \overline{1, k}, \quad s \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.3.1)$$

Построим пространство $\mathfrak{Y} = \mathfrak{b}^k$.

Теорема 3.3.1. Пусть $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, \dots, m$, $\varkappa_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, k}$, $n \leq 4$, и выполнено условие (3.1.5), тогда при любых $v_{0i} \in \mathfrak{b}$, $i = \overline{1, k}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $y \in L_4(0, T, \mathfrak{Y})$, $u \in \mathfrak{U}$ задача (3.3.1) имеет единственное слабое обобщенное решение $x \in \mathfrak{X}$.

Доказательство. Перепишем задачу (3.3.1) в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1t} - \alpha_1 \Delta v_1 + \beta_{11} v_1 + \beta_{12} v_2 + \dots + \beta_{1m} v_m = w_1, \\ v_{2t} - \alpha_2 \Delta v_2 + \beta_{21} v_1 + \beta_{22} v_2 + \dots + \beta_{2m} v_m = w_2, \\ \dots \\ v_{kt} - \alpha_k \Delta v_k + \beta_{k1} v_1 + \beta_{k2} v_2 + \dots + \beta_{km} v_m = w_k, \\ -\alpha_{k+1} \Delta v_{(k+1)} + \beta_{(k+1)1} v_1 + \beta_{(k+1)2} v_2 + \dots + \beta_{(k+1)m} v_m = u_{(k+1)}, \\ \dots \\ -\alpha_m \Delta v_m + \beta_{m1} v_1 + \beta_{m2} v_2 + \dots + \beta_{mm} v_m = u_m, \\ v_i(s, t) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \\ v_i(s, 0) = v_{0i}(s), \quad i = \overline{1, k}, \quad s \in \Omega, \end{array} \right.$$

где $w_i = u_i - y_i^3$, $i = \overline{1, k}$, $w_i \in L_{\frac{4}{3}}(0, T; \mathfrak{b}^*)$, $i = \overline{1, k}$. Тогда в силу теоремы 3.2.1 существует слабо обобщенное решение задачи (3.3.1) в смысле определения 3.2.2. \square

Задача оптимального управления (3.1.1) – (3.1.3), (3.2.9) с целевым функционалом (3.2.10) эквивалентна задаче

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1t} - \alpha_1 \Delta v_1 + \beta_{11} v_1 + \beta_{12} v_2 + \dots + \beta_{1m} v_m + \varkappa_1 y_1^3 = u_1, \\ v_{2t} - \alpha_2 \Delta v_2 + \beta_{21} v_1 + \beta_{22} v_2 + \dots + \beta_{2m} v_m + \varkappa_2 y_2^3 = u_2, \\ \dots \\ v_{kt} - \alpha_k \Delta v_k + \beta_{k1} v_1 + \beta_{k2} v_2 + \dots + \beta_{km} v_m + \varkappa_k y_k^3 = u_k, \\ -\alpha_{k+1} \Delta v_{(k+1)} + \beta_{(k+1)1} v_1 + \beta_{(k+1)2} v_2 + \dots + \beta_{(k+1)m} v_m = u_{(k+1)}, \\ \dots \\ -\alpha_m \Delta v_m + \beta_{m1} v_1 + \beta_{m2} v_2 + \dots + \beta_{mm} v_m = u_m, \end{array} \right. \quad (3.3.2)$$

$$v_i(u_i, y_i) = y_i, u \in \mathfrak{U}_{ad}, y_i \in L_4(0, T, \mathfrak{b}), i = \overline{1, k},$$

$$v_i(s, t) = 0, i = \overline{1, m}, (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R},$$

$$v_i(s, 0) = v_{0i}(s), i = \overline{1, k}, s \in \Omega,$$

$$\begin{aligned} J_\theta^\varepsilon(x, u, y) = & \theta \cdot \vartheta \sum_{i=1}^k \int_0^T \|v_i(t) - v_i^{dop}(t)\|_{\mathfrak{b}}^4 dt + \\ & + (1-\theta) \cdot \vartheta \sum_{i=1}^k \int_0^T \|y_i(t) - v_i^{dop}(t)\|_{\mathfrak{b}}^4 dt + \vartheta \sum_{i=k+1}^m \int_0^T \|v_i(t) - v_i^{dop}(t)\|_{\mathfrak{F}}^2 dt + \\ & + (1-\vartheta) \sum_{i=1}^k \int_0^T \|u_i(t)\|_{\mathfrak{b}^*}^{\frac{4}{3}} dt + (1-\vartheta) \sum_{i=k+1}^m \int_0^T \|u_i(t)\|_{\mathfrak{F}^*}^2 dt + \\ & + r_\varepsilon \sum_{i=1}^k \int_0^T \|v_i - y_i\|_{\mathfrak{b}}^2 dt \rightarrow \inf, \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

где $\theta \in (0, 1)$, $r_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$ для $\varepsilon \rightarrow +0$ – параметр штрафа. В силу равенства $v_i(u_i, y_i) = y_i$, $i = \overline{1, k}$ функционал (3.2.10) эквивалентен функционалу (3.3.3).

Определение 3.3.1. Тройку $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \times \mathfrak{U}_{ad}$ назовем решением задачи оптимального управления (3.3.2), (3.3.3), если

$$J_\theta^\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}) = \inf_{(x, y, u)} J_\theta^\varepsilon(x, y, u),$$

где тройка $(x, y, u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \times \mathfrak{U}_{ad}$ удовлетворяет (3.3.2) в смысле определения 3.2.1; вектор-функцию \tilde{u} назовем оптимальным управлением.

Теорема 3.3.2. Пусть $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, m}$, $\varkappa_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, k}$, $n \leq 4$, и выполнено условие (3.1.5), тогда при любых $v_{0i} \in \mathfrak{b}$, $i = \overline{1, k}$, $T \in \mathbb{R}_+$, существует решение задачи (3.3.2), (3.3.3).

Доказательство. В силу теоремы 3.3.1 найдется пара $\{y_\varepsilon, u_\varepsilon\}$, удовлетворяющая

$$J_\theta^\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) = \inf_{(y, u)} J_\theta^\varepsilon(y, u).$$

Пусть пара (\tilde{x}, \tilde{u}) удовлетворяет задаче (3.3.2), тогда $\tilde{x} = \tilde{y}$ и в силу конструкций функционалов $J_\theta^\varepsilon, J_\theta, J$ выполняется

$$J_\theta^\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq J_\theta^\varepsilon(\tilde{y}, \tilde{u}) = J_\theta^\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{u}) \leq J(\tilde{x}, \tilde{u}).$$

Обозначим за $x_\varepsilon = x(y_\varepsilon, u_\varepsilon)$ решение уравнения

$$L \dot{x}_\varepsilon + Mx_\varepsilon + N(y_\varepsilon) = u_\varepsilon. \quad (3.3.4)$$

Из (3.3.3) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|u_{i_\varepsilon}\|_{L_{\frac{4}{3}}(0, T; \mathfrak{H}^*)} &\leq \text{const}, \quad i = \overline{1, k}, \quad \|u_{i_\varepsilon}\|_{L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)} \leq \text{const}, \quad i = \overline{k+1, m}, \\ \|y_{i_\varepsilon}\|_{L_4(0, T; \mathfrak{b})} &\leq \text{const}, \quad i = \overline{1, k}, \\ \|\sqrt{r_\varepsilon}(v_{i_\varepsilon} - y_{i_\varepsilon})\|_{L_2(0, T; \mathfrak{h})} &\leq \text{const}, \quad i = \overline{1, k}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

В силу (3.3.5) извлечем слабо сходящиеся последовательности (переходя, если надо, к подпоследовательностям)

$$\begin{aligned} u_{i_\varepsilon} &\rightharpoonup \tilde{u}_i \text{ слабо в пространстве } L_{\frac{4}{3}}(0, T; \mathfrak{b}^*), \quad i = \overline{1, k}, \\ u_{i_\varepsilon} &\rightharpoonup \tilde{u}_i \text{ слабо в пространстве } L_2(0, T; \mathfrak{H}^*), \quad i = \overline{k+1, m}, \\ y_{i_\varepsilon} &\rightharpoonup \tilde{y}_i \text{ слабо в пространстве } L_4(0, T; \mathfrak{b}), \quad i = \overline{1, k}, \\ v_{i_\varepsilon} - y_{i_\varepsilon} &\rightarrow 0 \text{ в пространстве } L_2(0, T; \mathfrak{h}), \quad i = \overline{1, k}. \end{aligned}$$

Аналогично теореме 3.2.1, в силу оценки (3.2.5) получим, что

$$\begin{aligned} |x_\varepsilon(t)|^2 + C_1 \int_0^t \|x_\varepsilon(\tau)\|_{\mathfrak{A}}^2 d\tau &\leq C_2; \quad C_i = \text{const} > 0, \quad i = 1, 2; \\ \int_0^t \|N(y_\varepsilon(\tau))\|_{\mathfrak{B}^*}^{\frac{4}{3}} d\tau &\leq C_3; \quad C_3 = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Тогда в силу рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 3.2.2, получим

$$Mx_\varepsilon \in L_2(0, T; \mathfrak{A}^*), \quad N(y_\varepsilon) \in L_{\frac{4}{3}}(0, T; \mathfrak{B}^*).$$

Из (3.3.4) получим, что $L \dot{x}_\varepsilon \in L_2(0, T; \mathfrak{A}^*) \cap L_{\frac{4}{3}}(0, T; \mathfrak{B}^*)$. Тогда, аналогично теореме 3.2.1, можно извлечь такие подпоследовательности, которые снова обозначим $\{x_\varepsilon\}, \{y_\varepsilon\}, \{u_\varepsilon\}$, что

$$x_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{x} \text{ * -слабо в } L_\infty(0, T; \text{coim}L),$$

$$\begin{aligned}
v_{i_\varepsilon} &\rightharpoonup \tilde{v}_i \text{ слабо в } L_4((0, T; \mathfrak{h}), i = \overline{1, k}), \\
L \dot{x}_\varepsilon &\rightharpoonup L \dot{\tilde{x}} \text{ -слабо в } L_2(0, T; \text{im } L), \\
Mx_\varepsilon &\rightharpoonup M\tilde{x} \text{ -слабо в } L_2(0, T; \mathfrak{A}^*). \\
N(y_\varepsilon) &\rightharpoonup \mu \text{ -слабо в } L_{\frac{4}{3}}(0, T; \mathfrak{B}^*).
\end{aligned}$$

Перейдем к пределу в уравнении состояния (3.3.4) и получим

$$L \dot{\tilde{x}} + M\tilde{x} + \mu = \tilde{u}.$$

В силу теоремы Мазура точка $\tilde{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$.

Из (3.3.5) следует, что

$$v_{i_\varepsilon} - y_{i_\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ в пространстве } L_2(0, T; \mathfrak{h}), i = \overline{1, k}$$

и в силу компактного вложения $\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H}$ получим, что

$$v_{i_\varepsilon} \rightarrow \tilde{v}_i \text{ в пространстве } L_2(0, T; \mathfrak{h}), i = \overline{1, k}.$$

Тогда

$$y_{i_\varepsilon} \rightarrow \tilde{v}_i \text{ в пространстве } L_2(0, T; \mathfrak{h}), i = \overline{1, k},$$

а, значит, и почти всюду. Аналогично рассуждениям теоремы 3.2.1, получим, что

$$\mu = N(\tilde{y}) = N(\tilde{x}).$$

Значит, переходя к пределу в уравнении состояния (3.3.4), получим

$$L \dot{\tilde{x}} + M\tilde{x} + N(\tilde{y}) = \tilde{u}.$$

Следовательно, $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{y}, \tilde{u}) = \tilde{y}$.

По построению

$$J_\theta^\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq J(y_\varepsilon, u_\varepsilon).$$

Переходя к пределу, получим, что

$$\liminf J_\theta^\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq \liminf J(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq J(\tilde{y}, \tilde{u})$$

в силу конструкций функционалов J_θ^ε и J и того, что $\tilde{x} = \tilde{y}$.

С другой стороны,

$$J_\theta^\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq J_\theta^\varepsilon(y, u) = J(\tilde{x}, \tilde{u}).$$

Переходя к пределу получим $\liminf J_\theta^\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq \inf J(x, u)$, тогда

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) \leq \inf J(x, u),$$

значит, пара (\tilde{x}, \tilde{u}) – решение задачи (3.3.2), (3.3.3) и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_\theta^\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) = J_\theta^\varepsilon(\tilde{y}, \tilde{u}),$$

из чего вытекает, что

$$y_\varepsilon \rightarrow \tilde{y}, \quad u_\varepsilon \rightarrow \tilde{u}.$$

□

3.4. Многокомпонентная математическая модель оптимального регулирования процессом распространения нервного импульса в мембранной оболочке системы нервов

На графе \mathbf{G} рассмотрим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1jt} - \alpha_1 v_{1jss} + \beta_{11} v_{1j} + \beta_{12} v_{2j} + \dots + \beta_{1m} v_{mj} + \varkappa_1 v_{1j}^3 = u_{1j}, \\ v_{2jt} - \alpha_2 v_{2jss} + \beta_{21} v_{1j} + \beta_{22} v_{2j} + \dots + \beta_{2m} v_{mj} + \varkappa_2 v_{2j}^3 = u_{2j}, \\ \dots \\ v_{kjt} - \alpha_k v_{kjss} + \beta_{k1} v_{1j} + \beta_{k2} v_{2j} + \dots + \beta_{km} v_{mj} + \varkappa_k v_{kj}^3 = u_{kj}, \\ -\alpha_{k+1} v_{(k+1)jss} + \beta_{(k+1)1} v_{1j} + \beta_{(k+1)2} v_{2j} + \dots + \beta_{(k+1)m} v_{mj} = u_{(k+1)j}, \\ \dots \\ -\alpha_m v_{mjss} + \beta_{m1} v_{1j} + \beta_{m2} v_{2j} + \dots + \beta_{mm} v_{mj} + \beta v_{mj}^3 = u_{mj} \\ \text{для всех } s \in (0, l_j), \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, K}, \end{array} \right. \quad (3.4.1)$$

с условиями непрерывности и баланса потока

$$\begin{aligned} v_{ij}(0, t) = v_{ik}(0, t) = v_{im}(l_m, t) = v_{in}(l_n, t), \\ E_j, E_k \in E^\alpha(V_g), \quad E_m, E_n \in E^\omega(V_g), \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_g)} d_j v_{ijs}(0, t) - \sum_{E_j \in E^\omega(V_g)} d_j v_{ijs}(l_j, t) = 0, \quad (3.4.3)$$

и начальным условием

$$v_{ij}(s, 0) = v_{0ij}(s), \quad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, K}, \quad s \in \Omega, \quad (3.4.4)$$

где матрица коэффициентов B обладает свойством (3.1.5).

Для простоты изложения разобьем редукцию задачи (3.4.1) – (3.4.3) к уравнению (3.1.4) в три этапа.

Этап 1. Возьмем банахово пространство $\mathfrak{A} = \mathfrak{H}^m$, $\mathfrak{H} = \{r = (r_1, r_2, \dots, r_j, \dots) : r_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ и выполнено (3.4.2)}\}$, гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathfrak{h}^m$, $\mathfrak{h} = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$. Зададим в \mathfrak{A} скалярное произведение $[x, \zeta] = \sum_{i=1}^m \langle v_i, \zeta_i \rangle$, при этом $x = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_i)$, $\langle v_i, \zeta_i \rangle = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} v_{ij} \zeta_{ij} ds$. Обозначим через \mathfrak{A}^* пространство сопряженное к \mathfrak{A} относительно скалярного произведения в \mathcal{H} .

Этап 2. Определим линейные операторы $L, M : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}^*$ формулами

$$[Lx, \zeta] = \langle v_1, \eta_1 \rangle + \dots + \langle v_k, \eta_k \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{A}$$

$$\begin{aligned} [Mx, \zeta] &= \alpha_1 \langle v_{1s}, \zeta_{1s} \rangle + \alpha_2 \langle v_{2s}, \zeta_{2s} \rangle + \dots + \alpha_m \langle v_{ms}, \zeta_{ms} \rangle + \\ &+ \langle \beta_{11}v_1 + \beta_{12}v_2 + \dots + \beta_{1m}v_m, \zeta_1 \rangle + \langle \beta_{21}v_1 + \beta_{22}v_2 + \dots + \\ &+ \dots + \beta_{2m}v_m, \zeta_2 \rangle + \langle \beta_{m1}v_1 + \beta_{m2}v_2 + \dots + \beta_{mm}v_m, \zeta_m \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Лемма 3.4.1. (i) Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}; \mathfrak{A}^*)$ – самосопряженный, неотрицательно определенный оператор.

(ii) Пусть $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, m}$, и выполнено условие (3.1.5), тогда оператор $M \in C^\infty(\mathfrak{A}; \mathfrak{A}^*)$ s -монотонен и 2-коэрцитивен.

Доказательство. Доказательство данного утверждения полностью идентично доказательству леммы 3.1.1 с учетом особенностей пространств, построенных на графе \mathbf{G} . \square

Этап 3. Зададим нелинейный оператор формулой

$$[N(x), \zeta] = \varkappa_1 \langle v_1^3, \zeta_1 \rangle + \varkappa_2 \langle v_2^3, \zeta_2 \rangle + \dots + \varkappa_k \langle v_k^3, \zeta_k \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{A},$$

где $v_i^3 = (v_{i1}^3, v_{i2}^3, \dots, v_{iK}^3)$, $i = \overline{1, k}$, и положим $\text{dom } N = \mathfrak{B} = \mathfrak{b}^m$, $\mathfrak{b} = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_4(0, l_j)\}$, $\mathfrak{B}^* = (\mathfrak{b}^*)^m$, $\mathfrak{b}^* = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_{\frac{4}{3}}(0, l_j)\}$, пространство \mathfrak{B}^* сопряженное к \mathfrak{B} относительно скалярного произведения в \mathcal{H} . Для пространств $\mathfrak{H}, \mathfrak{A}, \mathcal{H}, \mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*$ справедливо

$$\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}^* \hookrightarrow \mathfrak{A}^*, \quad (3.4.5)$$

где все вложения плотны и непрерывны, а вложение $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathcal{H}$ еще и компактно.

Лемма 3.4.2. Пусть $\varkappa_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, k}$, тогда оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ s -монотонен и 4-коэрцитивен.

Доказательство. Доказательство данного утверждения полностью идентично доказательству леммы 3.1.2 с учетом особенностей пространств, построенных на графе \mathbf{G} . \square

Построим пространства \mathfrak{X} , \mathfrak{U} аналогичным образом как в п. 3.2. Построим галеркинские приближения решения $v_i(s, t) = (v_{i1}(s, t), \dots, v_{ij}(s, t), \dots, v_{iK}(s, t))$ задачи (3.4.1) – (3.4.3) в виде

$$\tilde{v}_{ij}(s, t) = v_{ij}^h(s, t) = \sum_{p=1}^h v_{ip}(t) \varphi_{pj}(s), \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, K},$$

где $v_{ij}(s, t)$ – компонента $v_i(s, t)$ на j -м ребре графа, $\{\varphi_p\} = (\varphi_{p1}, \varphi_{p2}, \dots, \varphi_{pj}, \dots, \varphi_{pK})$ – семейство собственных функции оператора \mathcal{B} (1.5.7), коэффициенты v_{ip} , $i = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, h}$, определяются системой уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_{1jt}^h + \beta_{11} v_{1j}^h + \beta_{12} v_{2j}^h + \dots + \beta_{1m} v_{mj}^h + \varkappa_1 (v_{1j}^h)^3) \varphi_{pj} ds + \\ \quad + \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} \alpha_1 v_{1js}^h \varphi_{pjs} ds = \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} u_1 \varphi_{pj} ds, \\ \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_{2jt}^h + \beta_{21} v_{1j}^h + \beta_{22} v_{2j}^h + \dots + \beta_{2m} v_{mj}^h + \varkappa_2 (v_{2j}^h)^3) \varphi_{pj} ds + \\ \quad + \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} \alpha_2 v_{2js}^h \varphi_{pjs} ds = \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} u_2 \varphi_{pj} ds, \\ \dots \\ \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_{kt}^h + \beta_{k1} v_{1j}^h + \beta_{k2} v_{2j}^h + \dots + \beta_{km} v_{mj}^h + \varkappa_k (v_k^h)^3) \varphi_{pj} ds + \\ \quad + \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} \alpha_k v_{kjs}^h \varphi_{pjs} ds = \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} u_k \varphi_{pj} ds, \\ \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (\beta_{(k+1)1} v_{1j}^h + \beta_{(k+1)2} v_{2j}^h + \dots + \beta_{(k+1)m} v_{mj}^h) \varphi_{pj} ds + \\ \quad + \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} \alpha_{k+1} v_{(k+1)js}^h \varphi_{pjs} ds = \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} u_{(k+1)} \varphi_{pj} ds, \\ \dots \\ \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (\beta_{m1} v_{1j}^h + \beta_{m2} v_{2j}^h + \dots + \beta_{mm} v_{mj}^h) \varphi_{pj} ds + \\ \quad + \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} \alpha_m v_{mjs}^h \varphi_{pjs} ds = \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} u_m \varphi_{pj} ds, \\ j = \overline{1, K}, \end{array} \right.$$

и условиями Шоултера – Сидорова

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_{1j}(0) - v_{01j}) \varphi_{pj} &= 0, \dots, \\ \sum_{p=1}^h \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_{kj}(0) - v_{0kj}) \varphi_{pj} &= 0, \quad j = \overline{1, K}. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Теорема 3.4.1. Пусть $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, m}$, $\varkappa_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, k}$, и выполнены условия (3.1.5). Тогда при любых $v_{0i} \in \mathfrak{b}$, $i = \overline{1, k}$, $u \in \mathfrak{U}$ существует единственное слабое обобщенное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (3.4.1) – (3.4.4).

Доказательство. Доказательство данного утверждения полностью идентично доказательству теоремы 3.2.1 с учетом особенностей пространств, построенных на графе \mathbf{G} . \square

Выберем $\mathfrak{U}_{ad} \subset \mathfrak{U}$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(x, u) \rightarrow \inf \quad (3.4.7)$$

решениями задачи (3.4.1) – (3.4.4), где целевой функционал зададим в виде:

$$\begin{aligned} J(x, u) = \vartheta \sum_{i=1}^k \int_0^T \|v_i - v_i^{dop}\|_{\mathfrak{b}}^4 dt + \vartheta \sum_{i=k+1}^m \int_0^T \|v_i - v_i^{dop}\|_{\mathfrak{S}}^2 dt + \\ + (1 - \vartheta) \sum_{i=1}^k \int_0^T \|u_i\|_{\mathfrak{b}^*}^{\frac{4}{3}} dt + (1 - \vartheta) \sum_{i=k+1}^m \int_0^T \|u_i\|_{\mathfrak{S}^*}^2 dt, \quad \vartheta \in (0, 1), \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

где $x^{dop} = (v_1^{dop}, v_2^{dop}, \dots, v_m^{dop})$ – желаемое состояние системы, например, состояние, в котором находилась система до прохождения порога возбуждения.

Теорема 3.4.2. Пусть $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, \dots, m$, $\varkappa_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, k}$, и выполнены условия (3.1.5), тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{A}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует оптимальное управление в задаче (3.4.1) – (3.4.4), (3.4.7).

Доказательство. Доказательство данного утверждения полностью идентично доказательству теоремы 3.2.2 с учетом особенностей пространств, построенных на графе \mathbf{G} . \square

3.5. Алгоритм численного метода нахождения управления решениями вырожденной многокомпонентной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке и описание комплекса программ

Опишем алгоритм численного решения задачи (3.1.1) – (3.1.3), (3.2.9) на области Ω или задачи (3.4.1) – (3.4.4), (3.4.7) на графе \mathbf{G} , где целевой функционал зададим в виде (3.2.10), построенный на основе модифицированных методов Галеркина – Петрова, Ритца, декомпозиции и штрафа.

Этап 0. Находим собственные функции $\{\varphi_k(s)\}$ однородной задачи Дирихле оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω или же $\{\varphi_k(s)\}$ – собственные функции оператора \mathcal{B} (1.5.7).

Этап 1. Линеаризуем систему уравнений (3.1.1) или (3.4.1) введением функций $y_i = y_i(s, t)$, $i = \overline{1, k}$:

$$\begin{aligned}
 v_{1t} - \alpha_1 \Delta v_1 + \beta_{11} v_1 + \beta_{12} v_2 + \dots + \beta_{1m} v_m + \varkappa_1 y_1^3 &= u_1, \\
 v_{2t} - \alpha_2 \Delta v_2 + \beta_{21} v_1 + \beta_{22} v_2 + \dots + \beta_{2m} v_m + \varkappa_2 y_2^3 &= u_2, \\
 \dots & \\
 v_{kt} - \alpha_k \Delta v_k + \beta_{k1} v_1 + \beta_{k2} v_2 + \dots + \beta_{km} v_m + \varkappa_k y_k^3 &= u_k, \\
 -\alpha_{k+1} \Delta v_{(k+1)} + \beta_{(k+1)1} v_1 + \beta_{(k+1)2} v_2 + \dots + \beta_{(k+1)m} v_m &= u_{(k+1)}, \\
 \dots & \\
 -\alpha_m \Delta v_m + \beta_{m1} v_1 + \beta_{m2} v_2 + \dots + \beta_{mm} v_m &= u_m,
 \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

$$y_1 = v_1, \dots, y_k = v_k, \tag{3.5.2}$$

и получим задачу (3.1.2), (3.1.3), (3.2.9), (3.5.1), (3.5.2), эквивалентную исходной.

Этап 2. Следуя методу Галеркина – Петрова, представим приближенное решение $\tilde{x} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_m)$, $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_k)$ задачи (3.1.2), (3.1.3), (3.2.9), (3.5.1), (3.5.2) и $u_i(s, t)$, $i = \overline{1, m}$, стоящие в правой части уравнений системы (3.5.1), (3.5.2) в виде сумм

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}_i^h(s, t) &= \sum_{p=1}^h v_{i_p}(t) \varphi_p(s), i = \overline{1, m}, \tilde{y}_i^h(s, t) = \sum_{p=1}^h y_{i_p}(t) \varphi_p(s), i = \overline{1, k}, \\
 \tilde{u}_i^h(s, t) &= \sum_{p=1}^h u_{i_p}(t) \varphi_p(s), i = \overline{1, m}.
 \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Этап 3. Опираясь на метод Ритца, представим неизвестные функции $y_{i_p}(t)$, $i = \overline{1, k}$, $u_{i_p}(t)$, $p = \overline{1, h}$, $i = \overline{1, m}$ через разложение $y_{i_p}(t, H) = \sum_{g=1}^H b_{i_p, g} t^g$,

$$u_{i_p}(t, H) = \sum_{g=0}^H c_{i_p, g} t^g, \text{ учитывая, что}$$

$$y_i(0) = v_i(0), \quad i = \overline{1, k}. \quad (3.5.4)$$

Этап 4. Для нахождения неизвестных $v_{i_p}(t)$ подставим галеркинские суммы (3.5.3) в систему уравнений (3.5.1), а затем умножим полученную систему уравнений скалярно в \mathcal{H} на собственные функции $\varphi_p(s)$, получим систему алгебро-дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \tilde{v}_{1t} + \beta_{11}\tilde{v}_1 + \beta_{12}\tilde{v}_2 + \dots + \beta_{1m}\tilde{v}_m + \varkappa_1(\tilde{y}_1)^3, \varphi_p \rangle + \langle \alpha_1 \tilde{v}_{1s_i}, \varphi_{ps_i} \rangle = \langle \tilde{u}_1, \varphi_p \rangle, \\ \langle \tilde{v}_{2t} + \beta_{21}\tilde{v}_1 + \beta_{22}\tilde{v}_2 + \dots + \beta_{2m}\tilde{v}_m + \varkappa_2(\tilde{y}_2)^3, \varphi_p \rangle + \langle \alpha_2 \tilde{v}_{2s_i}, \varphi_{ps_i} \rangle = \langle \tilde{u}_2, \varphi_p \rangle, \\ \dots \\ \langle \tilde{v}_{kt} + \beta_{k1}\tilde{v}_1 + \beta_{k2}\tilde{v}_2 + \dots + \beta_{km}\tilde{v}_m + \varkappa_k(\tilde{y}_k)^3, \varphi_p \rangle + \langle \alpha_k \tilde{v}_{ks_i}, \varphi_{ps_i} \rangle = \langle \tilde{u}_k, \varphi_p \rangle, \\ \langle \beta_{(k+1)1}\tilde{v}_1 + \beta_{(k+1)2}\tilde{v}_2 + \dots + \beta_{(k+1)m}\tilde{v}_m, \varphi_p \rangle + \langle \alpha_{k+1} \tilde{v}_{(k+1)s_i}, \varphi_{ps_i} \rangle = \langle \tilde{u}_{(k+1)}, \varphi_p \rangle, \\ \dots \\ \langle \beta_{m1}\tilde{v}_1 + \beta_{m2}\tilde{v}_2 + \dots + \beta_{mm}\tilde{v}_m, \varphi_p \rangle + \langle \alpha_m \tilde{v}_{ms_i}, \varphi_{ps_i} \rangle = \langle \tilde{u}_m, \varphi_p \rangle, \\ p = \overline{1, h}, \end{array} \right. \quad (3.5.5)$$

с условиями Шоуолтера – Сидорова

$$\langle v_1(0) - v_{01}, \varphi_p \rangle = 0, \dots, \langle v_k(0) - v_{0k}, \varphi_p \rangle = 0. \quad (3.5.6)$$

Этап 5. Следуя методу штрафа, который описан в п. 3.4, зададим функционал в виде

$$\begin{aligned} J_\theta(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{y}) &= \theta \cdot \vartheta \sum_{i=1}^k \int_0^T \|\tilde{v}_i(t) - v_i^{dop}(t)\|_{\mathfrak{b}}^4 dt + \\ &+ (1 - \theta) \cdot \vartheta \sum_{i=1}^k \int_0^T \|\tilde{y}_i(t) - v_i^{dop}(t)\|_{\mathfrak{b}}^4 dt + \vartheta \sum_{i=k+1}^m \int_0^T \|\tilde{v}_i(t) - v_i^{dop}(t)\|_{\mathfrak{f}}^2 dt + \\ &+ (1 - \vartheta) \sum_{i=1}^k \int_0^T \|\tilde{u}_i(t)\|_{\mathfrak{b}^*}^{\frac{4}{3}} dt + (1 - \vartheta) \sum_{i=k+1}^m \int_0^T \|\tilde{u}_i(t)\|_{\mathfrak{f}^*}^2 dt + \\ &+ r_\varepsilon \sum_{i=1}^k \int_0^T \|\tilde{v}_i - \tilde{y}_i\|_{\mathfrak{b}}^2 dt, \quad \theta \in (0, 1), \vartheta \in (0, 1), \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

где параметр штрафа $r_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Разрешим систему уравнений (3.5.5) относительно неизвестных $b_{i_p, g}$, $i = \overline{1, k}$ $g = \overline{1, H}$, $c_{i_p, g}$, $i = \overline{1, m}$ $g = \overline{0, H}$, $p = \overline{1, h}$. Таким образом, задача оптимального управления сводится к нахождению минимума функции нескольких переменных относительно $b_{i_p, g}$, $i = \overline{1, k}$ $g = \overline{1, H}$, $c_{i_p, g}$, $i = \overline{1, m}$ $g = \overline{0, H}$, $p = \overline{1, h}$.

Этап 6. Используя метод ветвей и границ, находим значения $b_{i_{p,g}}, i = \overline{1, k}$
 $g = \overline{1, H}, c_{i_{p,g}}, i = \overline{1, m}, g = \overline{0, H}, p = \overline{1, h}$. Подставляя найденные значения в
(3.5.3), получим приближенное решение задачи (3.1.1) – (3.1.3), (3.2.9).

Этап 7. Подставим полученные функции $u_i(s, t), i = \overline{1, m}$, как уже известные, в систему уравнений (3.1.1) или (3.4.1). Представим приближенное решение $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_m)$ задачи (3.1.1) – (3.1.3) в виде

$$\tilde{w}_i^h(s, t) = \sum_{p=1}^h w_{i_p}(t) \varphi_p(s), i = \overline{1, m}. \quad (3.5.8)$$

Для нахождения неизвестных $w_{i_p}(t)$ подставим галеркинские суммы (3.5.8) в систему уравнений (3.1.1) или (3.4.1), а затем умножим полученную систему уравнений скалярно в \mathcal{H} на собственные функции $\varphi_p(s)$, получим систему алгебро-дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \tilde{w}_{1t} + \beta_{11}\tilde{w}_1 + \beta_{12}\tilde{w}_2 + \dots + \beta_{1m}\tilde{w}_m + \varkappa_1(\tilde{w}_1)^3, \varphi_p \rangle + \langle \alpha_1 \tilde{w}_{1s_i}, \varphi_{ps_i} \rangle = \langle \tilde{u}_1, \varphi_p \rangle, \\ \langle \tilde{w}_{2t} + \beta_{21}\tilde{w}_1 + \beta_{22}\tilde{w}_2 + \dots + \beta_{2m}\tilde{w}_m + \varkappa_2(\tilde{w}_2)^3, \varphi_p \rangle + \langle \alpha_2 \tilde{w}_{2s_i}, \varphi_{ps_i} \rangle = \langle \tilde{u}_2, \varphi_p \rangle, \\ \dots \\ \langle \tilde{w}_{kt} + \beta_{k1}\tilde{w}_1 + \beta_{k2}\tilde{w}_2 + \dots + \beta_{km}\tilde{w}_m + \varkappa_k(\tilde{w}_k)^3, \varphi_p \rangle + \langle \alpha_k \tilde{w}_{ks_i}, \varphi_{ps_i} \rangle = \langle \tilde{u}_k, \varphi_p \rangle, \\ \langle \beta_{(k+1)1}\tilde{w}_1 + \beta_{(k+1)2}\tilde{w}_2 + \dots + \beta_{(k+1)m}\tilde{w}_m, \varphi_p \rangle + \langle \alpha_{k+1} \tilde{w}_{(k+1)s_i}, \varphi_{ps_i} \rangle = \langle \tilde{u}_{(k+1)}, \varphi_p \rangle, \\ \dots \\ \langle \beta_{m1}\tilde{w}_1 + \beta_{m2}\tilde{w}_2 + \dots + \beta_{mm}\tilde{w}_m, \varphi_p \rangle + \langle \alpha_m \tilde{w}_{ms_i}, \varphi_{ps_i} \rangle = \langle \tilde{u}_m, \varphi_p \rangle, \\ p = \overline{1, h}, \end{array} \right. \quad (3.5.9)$$

с условиями Шоултера – Сидорова

$$\langle v_1(0) - v_{01}, \varphi_p \rangle = 0, \dots, \langle v_k(0) - v_{0k}, \varphi_p \rangle = 0. \quad (3.5.10)$$

Методом Рунге – Кутты находим решение системы дифференциальных уравнений (3.5.9) с начальными условиями (3.5.10). Это и есть приближенное решение задачи (3.1.1) – (3.1.3) на области Ω или задачи (3.4.1) – (3.4.4) на графе \mathbf{G} . Сравним результаты, полученные на *этапе 6* и этом этапе, используя формулы

$$\mathfrak{d}_i^h = \int_0^T \|w_i^h - v_i^h\|_{L_4(\Omega)}^4 dt, i = \overline{1, k}, \quad (3.5.11)$$

$$\mathfrak{d}_i^h = \int_0^T \|w_i^h - v_i^h\|_{L_2(\Omega)}^2 dt, i = \overline{k+1, m}.$$

Описанный алгоритм был реализован в системе компьютерной математики Maple 2017 для Windows 7, 8.1, 10 в виде комплекса программ. Данная система компьютерной математики отличается от аналогов наличием встроенного аппарата аналитических вычислений интегралов **student**, пакета команд для решения дифференциальных уравнений, в том числе и систем, **DEtools** и пакета оптимизации **Optimization**. Комплекс программ «Численное исследование оптимального регулирования для модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке» предназначена для нахождения приближенного решения задачи оптимального управления для модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке с условием Шоуолтера – Сидорова. В программе реализован модифицированный метод Галеркина – Петрова, Ритца, декомпозиции и штрафа. Комплекс программ состоит из следующих программ: «Численное исследование оптимального регулирования для модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке аксона нерва», «Численное исследование оптимального регулирования для модели распространения нервного импульса в прямоугольной мембранной оболочке нерва», «Численное исследование оптимального регулирования для модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке нерва кубической формы», «Численное исследование оптимального регулирования для модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке системы нервов».

Комплекс программ «Численное исследование оптимального регулирования для модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке» может быть использован при исследовании процесса оптимального регулирования распространения нервного импульса по нейронам, аксонам, дендритам, по клеткам поперечнополосатой мускулатуры, гладкой мускулатуры кишечника, сердечно-сосудистой системе. Описанный комплекс программ представляет интерес для специалистов в области биомеханики.

На вход программного комплекса подаются коэффициенты системы α_i , $i = \overline{1, m}$, β_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$ χ_i , $i = \overline{1, k}$, функции $v_{0i}(s)$, $i = \overline{1, k}$ для начального условия Шоуолтера – Сидорова, параметры области и функции $v_i^{dop}(s, t)$, $i = \overline{1, m}$ требуемого состояния системы. На выходе каждая программа комплекса выдает коэффициенты управления $b_{i,p,g}$, $i = \overline{1, k}$ $g = \overline{1, H}$, $c_{i,p,g}$, $i = \overline{1, m}$ $g = \overline{0, H}$, $p = \overline{1, h}$, приближенное решение $v_i(s, t)$ и строит его

график. Схема алгоритма работы любой программы комплекса приведена на рис. 3.5.

Комплекс программ предназначен для работы на персональном компьютере с процессором не ниже чем 4 ядра, с частотой не ниже 3400 МГц, оперативной памятью 16 Гб, под управлением 64-х битных операционных систем Windows 7, 8.1, 10, с установленной системой компьютерной математики Maple 2017.

Опишем логическую структуру работы каждой из программ комплекса более подробно. Во время работы программы выполняются следующие шаги.

Шаг 1. Открывается рабочий модуль программы **1Решение системы**. Вводятся коэффициенты системы α_i , $i = \overline{1, m}$, β_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$, \varkappa_i , $i = \overline{1, k}$, функции $v_{0i}(s)$, $i = \overline{1, k}$, для начального условия Шоултера – Сидорова, параметры области и функции $v_i^{dop}(s, t)$, $i = \overline{1, m}$, требуемого состояния системы, а также количество галеркинских приближений h .

Шаг 2. Из отдельного файла **eigenfunction.mw** с помощью встроенной процедуры **read** считывается найденная нормированная система функций $\varphi_p(s)$ для рассматриваемой области или графа. Результаты шагов 1 и 2 сохраняются в файл условий с именем **usl**. Рабочие модули программы названы именами на русском языке, а файлы, получаемые в результате работы модулей, – на английском языке. Кроме того, рабочие модули пронумерованы, чтобы исследователи, которые недостаточно знакомы с системой компьютерной математики Maple 2017, могли использовать данный программный комплекс.

Шаг 3. Процедура **unapply** позволяет представить искомые приближенные решения в виде суммы

$$\begin{aligned} v_1 &:= \text{unapply}(v_{1_1}(t)\varphi_1(s) + v_{1_2}(t)\varphi_2(s) + \dots + v_{1_h}(t)\varphi_h(s)), \\ &\dots \\ v_m &:= \text{unapply}(v_{m_1}(t)\varphi_1(s) + v_{m_2}(t)\varphi_2(s) + \dots + v_{m_h}(t)\varphi_h(s)). \end{aligned}$$

Шаг 4. Вводим дополнительные функции

$$\begin{aligned} y_1 &:= \text{unapply}(y_{1_1}(t)\varphi_1(s) + y_{1_2}(t)\varphi_2(s) + \dots + y_{1_h}(t)\varphi_h(s)), \\ &\dots \\ y_k &:= \text{unapply}(y_{k_1}(t)\varphi_1(s) + y_{k_2}(t)\varphi_2(s) + \dots + y_{k_h}(t)\varphi_h(s)) \end{aligned}$$

и задаем линеаризованную систему модели.

Шаг 5. Создается специальная процедура **proc(t,g) option operator,**

arrow: local h: sum(b[i,[p,g]]*t^g, 'g'=0..H). С ее помощью выражаем неизвестные $y_{i_p}(t)$, $i = \overline{1, k}$, $u_{i_p}(t)$, $p = \overline{1, h}$, $i = \overline{1, m}$.

Шаг 6. Составленные на предыдущих шагах выражения подставляются в линеаризованную систему уравнений модели, и в цикле **for ... to 1 do m end do** каждое уравнение системы умножается на собственную функцию $\varphi_p(s)$, интегрируется в рассматриваемой области с помощью процедуры **int**. Таким образом, генерируется система алгебро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных v_{i_1}, \dots, v_{i_h} .

Шаг 7. Решается система, полученная на шаге 6, с начальными условиями с помощью встроенной процедуры **dsolve**. Результаты вычислений, полученные на шаге 7, сохраняются в файлах **resh#**, где вместо # идет порядковый номер файла. Закрывается рабочий модуль **1Решение системы**.

Шаг 8. Открывается рабочий модуль программы **2Генерация функционала**. Генерируется функционал штрафа относительно неизвестных $y_{i_p}(t)$, $i = \overline{1, k}$, $u_{i_p}(t)$, $p = \overline{1, h}$, $i = \overline{1, m}$, с помощью встроенных процедур **subs**, **int**. С помощью встроенной процедуры **expand** раскрываются скобки во всех элементах подынтегрального выражения функционала. Если количество слагаемых в функционале штрафа превышает 150 тыс. элементов, то с помощью встроенной процедуры **op** функционал разделяется по 150 тыс. элементов и сохраняется с помощью встроенной процедуры **save** в отдельные файлы с именами "**sum#.rm**", где вместо # идет порядковый номер файла. Такой выбор количества элементов связан с ограничением в возможностях аналитических вычислений системы компьютерной математики Maple. Закрывается рабочий модуль **2Генерация функционала**.

Шаг 9. Открывается рабочий модуль программы **3Интегралы**. С помощью встроенной процедуры **read** считываются все файлы "**sum#.rm**" с частями функционала штрафа, и вычисляются интегралы по времени t и по области Ω или графа \mathbf{G} встроенной процедурой **int**. Вычисления на этом шаге могут проводиться исследователями как последовательно, так и параллельно, на одном или на разных устройствах. Единственным условием должно быть наличие системы **Maple** на устройстве. После вычисления всех интегралов от элементов файлов "**sum#.rm**" результаты интегрирования сохраняются в файлы "**res#.rm**" процедурой **save**. Закрывается рабочий модуль **3Интегралы**.



Рис. 3.4.1. Схема алгоритма работы программного комплекса – часть 1

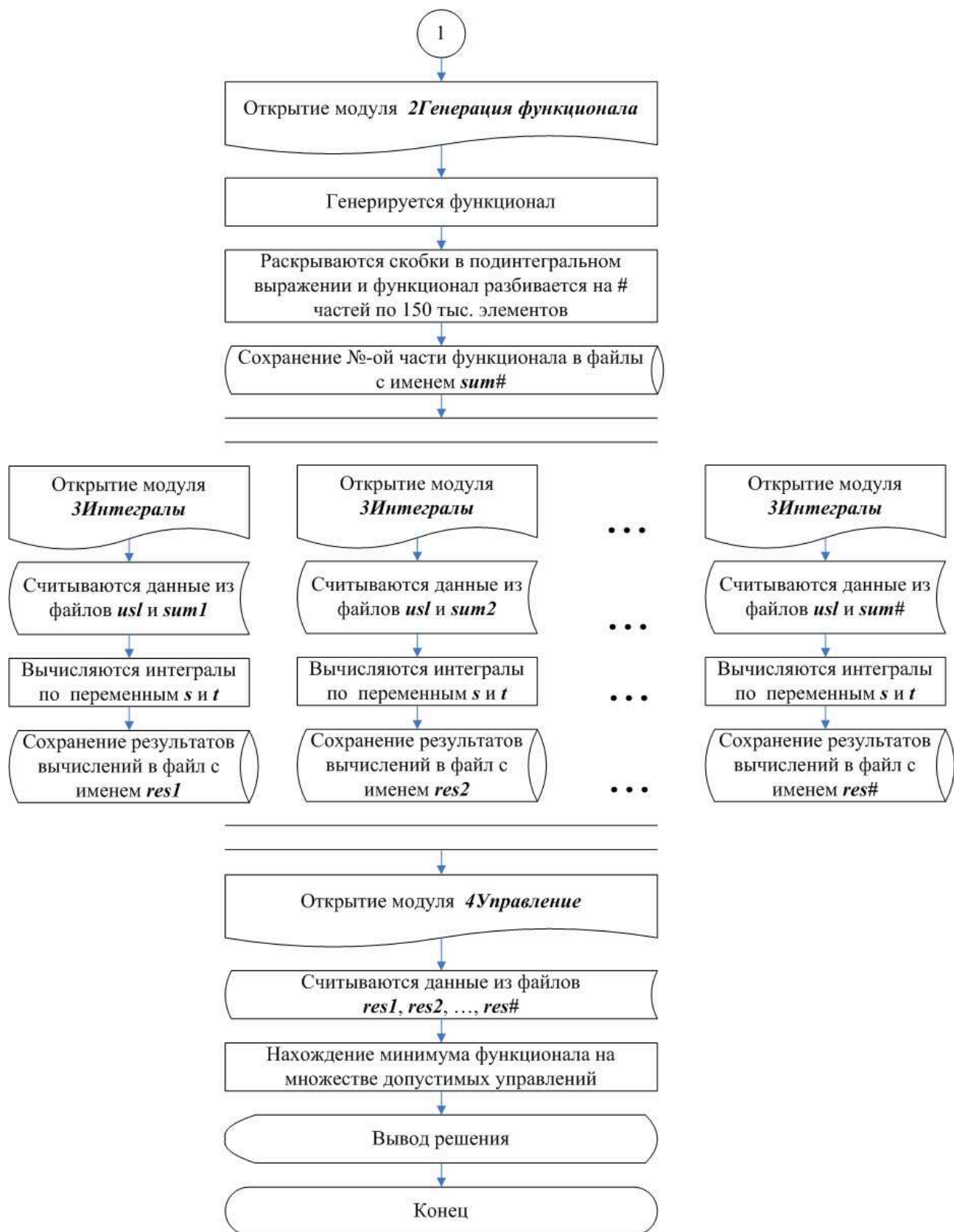


Рис. 3.4.2. Схема алгоритма работы программного комплекса – часть 2

Шаг 10. Открывается рабочий модуль программы **4Управление**. Считываются все файлы "**res#.rm**" с помощью встроенной процедуры **read**. На заданном множестве управлений с помощью пакета **Optimization** и процедуры **NLPSolve** находится минимум функционала и соответствующее состояние системы.

Шаг 11. С помощью встроенной процедуры **plot** или **plot3d** и **display** в пакете **plots** полученное решение выводится в рабочую область программы в виде аналитического представления для каждой отдельной компоненты и ее графика. Закрывается рабочий модуль **4Управление**.

3.6. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим модельные примеры реализации алгоритма и программы в многокомпонентном случае, принимая во внимание, что рассматриваемая модель может иметь более одного активатора.

Пример 3.6.1. Требуется найти решение задачи оптимального управления (3.2.9) решениями четырехкомпонентной системы уравнений:

$$\begin{cases} v_{1t} - v_{1ss} + v_1^3 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = u_1, \\ v_{2t} - v_{2ss} + v_2^3 - v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = u_2, \\ v_{3t} - v_{3ss} + v_3^3 - v_1 - v_2 + v_3 + v_4 = u_3, \\ -v_{4ss} - v_1 - v_2 - v_3 + v_4 = u_4 \end{cases} \quad (3.6.1)$$

с краевым условием Дирихле:

$$v_i(s, t) = 0, \quad i = \overline{1, 4}, \quad s \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (3.6.2)$$

и начальным условием Шоуолтера – Сидорова

$$v_i(s, 0) = v_{i0}(s), \quad i = \overline{1, 3}, \quad s \in \Omega, \quad (3.6.3)$$

если $\Omega = (0, \pi)$, $T = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$, $\vartheta = \frac{99}{100}$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$, $v_{i0}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin(s) + \sin(2s))$, $i = \overline{1, 3}$, $v_i^{dop}(s, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin(s) + \sin(2s))$, $i = \overline{1, 4}$.

Матрица коэффициентов $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^m$ для данной задачи примет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Заметим, что для нее выполняется условие (3.1.5).}$$

Введем функции $y_1 = y_1(s, t)$, $y_2 = y_2(s, t)$, $y_3 = y_3(s, t)$ и получим эквивалентную задачу (3.6.2), (3.6.3) для системы уравнений вида (3.5.1), (3.5.2). Функцию, стоящую в правой части в системе уравнений вида (3.5.1), (3.5.2), где $i = \overline{1, 4}$, и приближенные решения задачи (3.6.2), (3.6.3), (3.5.1), (3.5.2) представим в виде $\tilde{u}_i(s, t) = \sum_{p=1}^h u_{i_p}(t)\varphi_p(s)$, $\tilde{v}_i(s, t) = \sum_{p=1}^h v_{i_p}(t)\varphi_p(s)$, $i = \overline{1, 4}$, $\tilde{y}_i(s, t) = \sum_{p=1}^h y_{i_p}(t)\varphi_p(s)$, $i = \overline{1, 3}$, где $\varphi_p(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(ps)$, число слагаемых h в приближении будем изменять от 2 до 6. Неизвестные $y_{i_p}(t)$, $p = \overline{1, h}$, $i = \overline{1, 3}$, $u_{i_p}(t)$, $p = \overline{1, h}$, $i = \overline{1, 4}$ будем искать в виде $y_{i_p}(t) = a_{i_p,2}t^2 + a_{i_p,1}t + 1$, учитывая условие (3.5.4) и значения начальных функций $v_{i0}(s)$, $p = \overline{1, h}$, $i = \overline{1, 3}$, $u_{i_p}(t) = b_{i_p,2}t^2 + b_{i_p,1}t + b_{i_p,0}$, $p = \overline{1, h}$, $i = \overline{1, 4}$. Функционал штрафа (3.5.7) примет вид:

$$J_\varepsilon^\theta(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4) = \frac{99}{200} \sum_{i=1}^3 \int_0^1 dt \int_0^\pi (\tilde{v}_i - v_i^{dop})^4 ds + \\ + \frac{99}{200} \sum_{i=1}^3 \int_0^1 dt \int_0^\pi (\tilde{y}_i - v_i^{dop})^4 ds + \frac{99}{100} \int_0^1 dt \int_0^\pi |\tilde{v}_{4s} - v_{4s}^{dop}|^2 ds + \\ + \frac{99}{100} \int_0^1 dt \int_0^\pi (\tilde{v}_4 - v_4^{dop})^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^1 dt \int_0^\pi (\sum_{i=1}^3 \tilde{u}_i^{\frac{4}{3}} + \tilde{u}_4^2) ds + 100 \sum_{i=1}^3 \int_0^1 dt \int_0^\pi (\tilde{v}_i - \tilde{y}_i)^2 ds.$$

В результате работы программного комплекса «Численное исследование оптимального регулирования для модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке аксона нерва» были найдены коэффициенты управления, представленные в таблице 3.6.1, при которых значение функционала $J = 90.30325$. Таким образом, получим решение $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u})$ задачи (3.2.9), (3.6.1) – (3.6.3). Полученные приближенные решения v_i , $i = \overline{1, 4}$ и y_i , $i = \overline{1, 3}$, задачи (3.6.1) – (3.6.3) представлены на рис. 3.6.2 в момент времени $t = 1$. График управления представлен на рис. 3.6.1 в момент времени $t = 1$.

Таблица 3.6.1. Коэффициенты управления

$a_{11,1} = 0.879786596126118$	$a_{11,2} = 0.529342259705434$	$a_{12,1} = 1.41371659515021$
$a_{12,2} = 0.128058124576920$	$a_{21,1} = 0.406765236183128$	$a_{21,2} = 1.52450858544503$
$a_{22,1} = 0.650267451057579$	$a_{22,2} = 0.282279139185366$	$a_{31,1} = 0.504446314703546$
$a_{31,2} = 0.340081616939519$	$a_{32,1} = 1.77927272441038$	$a_{32,2} = 0.137345516411733$
$b_{11,0} = 20.2141694736812$	$b_{11,1} = 20.7164777487870$	$b_{11,2} = 16.4714227037494$
$b_{12,0} = 24.2773032325764$	$b_{12,1} = 20.5012404533944$	$b_{12,2} = 16.4261242195366$
$b_{21,0} = 14.5909989038264$	$b_{21,1} = 13.6234432976956$	$b_{21,2} = 13.0509383248554$
$b_{22,0} = 11.5500738657554$	$b_{22,1} = 13.4996066610005$	$b_{22,2} = 12.4486629963073$
$b_{31,0} = 10.1478807993564$	$b_{31,1} = 7.37361970390255$	$b_{31,2} = 7.23175795012383$
$b_{32,0} = 13.0179284509863$	$b_{32,1} = 13.0278649243932$	$b_{32,2} = 11.5917599950719$
$b_{41,0} = 1.76135309131289$	$b_{41,1} = 0.273849769168550$	$b_{41,2} = 0.112367384868682$
$b_{42,0} = 0.751117946895416$	$b_{42,1} = 0.142892327646832$	$b_{42,2} = 0.154819751405341$

Следуя *этапу 7* алгоритма, подставим полученные функции $\tilde{u}_i(s, t)$, $i = \overline{1, 4}$, уже как известные функции, в правую часть системы уравнений (3.6.1). Для данной системы уравнений (3.6.1) найдем приближенное решение задачи (3.6.2), (3.6.3). В результате получим численное решение задачи (3.6.1) – (3.6.3), которое обозначим как $w_i(s, t)$, $i = \overline{1, 4}$. Полученные приближенные решения задачи (3.6.1) – (3.6.3) с заданной правой частью $\tilde{u}_i(s, t)$, $i = \overline{1, 4}$, представлены на рис. 3.6.2 в момент времени $t = 1$. Найдя значения \mathfrak{d}_i^h , $i = \overline{1, 4}$ по формулам (3.5.11), получим $\mathfrak{d}_1^3 = 0.0000103832$, $\mathfrak{d}_2^3 = 0.00020351004$, $\mathfrak{d}_3^3 = 0.00000214564$, $\mathfrak{d}_4^3 = 0.225003759$. Можно заметить, что полученные приближенные решения задачи (3.2.9), (3.6.1) – (3.6.3) и приближенные решения задачи (3.6.1) – (3.6.3) с известной правой частью $\tilde{u}_i(s, t)$, $i = \overline{1, 4}$, «близки» к требуемому v_i^{dop} , $i = \overline{1, 4}$ и между собой.

Для полученного численного решения найдем вычислительную точность решений по формулам $\delta_i^{h_1, h_2} = \int_0^T \|v_i^{h_1} - v_i^{h_2}\|_{L_4(\Omega)}^4 dt$, $i = \overline{1, 3}$, $\delta_4^{h_1, h_2} = \int_0^T \|v_4^{h_1} - v_4^{h_2}\|_{L_2(\Omega)}^2 dt$. Получим следующие значения:

$$\begin{aligned} \delta_1^{2,3} &= 248 \cdot 10^{-7}, & \delta_2^{2,3} &= 240 \cdot 10^{-7}, & \delta_3^{2,3} &= 238 \cdot 10^{-7}, & \delta_4^{2,3} &= 235 \cdot 10^{-7}, \\ \delta_1^{3,4} &= 48 \cdot 10^{-7}, & \delta_2^{3,4} &= 42 \cdot 10^{-7}, & \delta_3^{3,4} &= 36 \cdot 10^{-7}, & \delta_4^{3,4} &= 30 \cdot 10^{-7}, \\ \delta_1^{4,5} &= 32 \cdot 10^{-8}, & \delta_2^{4,5} &= 30 \cdot 10^{-8}, & \delta_3^{4,5} &= 22 \cdot 10^{-8}, & \delta_4^{4,5} &= 20 \cdot 10^{-8}, \\ \delta_1^{5,6} &= 3 \cdot 10^{-10}, & \delta_2^{5,6} &= 2 \cdot 10^{-10}, & \delta_3^{5,6} &= 3 \cdot 10^{-10}, & \delta_4^{5,6} &= 2 \cdot 10^{-10}. \end{aligned}$$

Как видно, все значения $\delta_i^{h_1, h_2}$ уменьшаются с ростом числа слагаемых в приближении полученных решений для каждого из них.

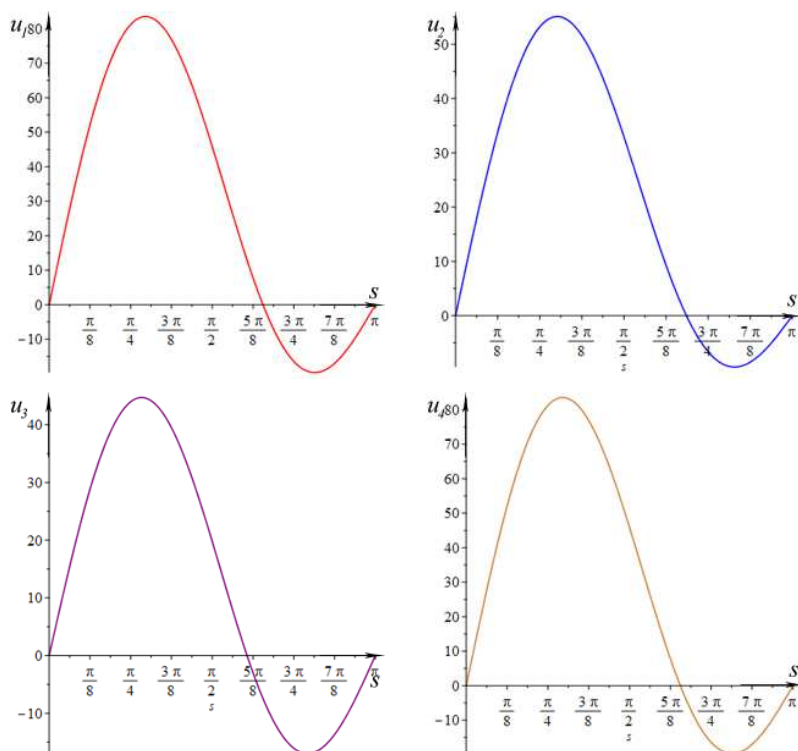


Рис. 3.6.1. Функции управления задачи (3.6.1) – (3.6.3) при $m = 2$

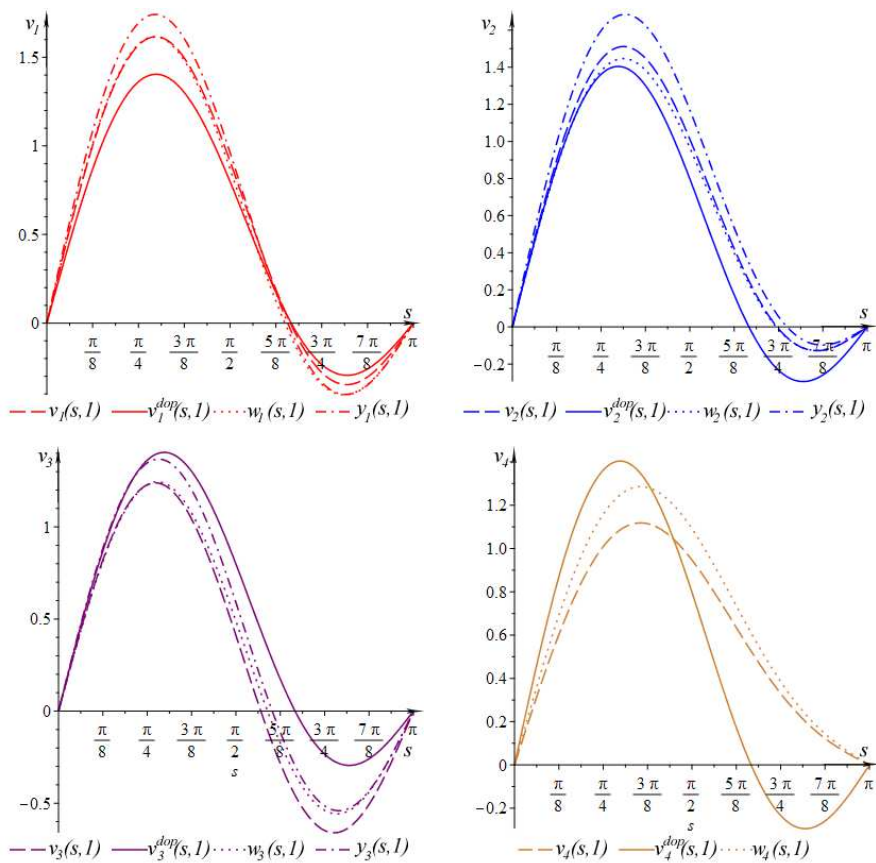


Рис. 3.6.2. Численное решение задачи (3.6.1) – (3.6.3) при $m = 2$

Пример 3.6.2. Требуется найти решение задачи оптимального управления для двухкомпонентной системы уравнений:

$$\begin{cases} v_{1t} - v_{1s_1s_1} - v_{1s_2s_2} - v_{1s_3s_3} + v_1 + v_2 + v_1^3 = u_1, \\ -v_{2s_1s_1} - v_{2s_2s_2} - v_{2s_3s_3} - v_1 + v_2 = u_2, \end{cases} \quad (3.6.4)$$

с краевым условием Дирихле:

$$v_i(s_1, s_2, s_3, t) = 0, i = \overline{1, 2}, (s_1, s_2, s_3) \in \partial\Omega, t \in (0, T), \quad (3.6.5)$$

и начальным условием Шоултера – Сидорова

$$v_1(s_1, s_2, s_3, 0) = v_{10}(s_1, s_2, s_3), (s_1, s_2, s_3) \in \Omega \quad (3.6.6)$$

если $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, \pi)$, $T = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$, $\vartheta = \frac{99}{100}$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$, $v_{10}(s) = \sqrt{\frac{8}{\pi^3}}(\sin(s_1) \sin(s_2) \sin(s_3) + \sin(2s_1) \sin(2s_2) \sin(s_3))$, $v_i^{dop}(s_1, s_2, s_3, t) = \sqrt{\frac{8}{\pi^3}}(\sin(s_1) \sin(s_2) \sin(s_3) + t^2 \sin(2s_1) \sin(2s_2) \sin(s_3))$, $i = \overline{1, 2}$.

Введем функцию $y_1 = y_1(s_1, s_2, s_3, t)$, и получим эквивалентную задачу (3.6.5), (3.6.6) для системы уравнений вида (3.5.1), (3.5.2). Функцию, стоящую в правой части в системе уравнений вида (3.5.1), (3.5.2), где $i = \overline{1, 2}$, и приближенные решения задачи (3.6.5), (3.5.1), (3.5.2) представим в виде

$$\begin{aligned} \tilde{v}_i(s_1, s_2, s_3, t) &= \sum_{p_1=1}^2 \sum_{p_2=1}^2 \sum_{p_3=1}^2 v_{i_{p_1, p_2, p_3}}(t) \varphi_{p_1, p_2, p_3}(s_1, s_2, s_3), i = \overline{1, 2}, \\ \tilde{y}_1(s_1, s_2, s_3, t) &= \sum_{p_1=1}^2 \sum_{p_2=1}^2 \sum_{p_3=1}^2 y_{1_{p_1, p_2, p_3}}(t) \varphi_{p_1, p_2, p_3}(s_1, s_2, s_3), \\ \tilde{u}_i(s_1, s_2, s_3, t) &= \sum_{p_1=1}^2 \sum_{p_2=1}^2 \sum_{p_3=1}^2 u_{i_{p_1, p_2, p_3}}(t) \varphi_{p_1, p_2, p_3}(s_1, s_2, s_3), i = \overline{1, 2}, \end{aligned}$$

где $\varphi_{p_1, p_2, p_3}(s_1, s_2, s_3) = \sqrt{\frac{8}{\pi^3}} \sin(p_1 s_1) \sin(p_2 s_2) \sin(p_3 s_3)$, $p_1 = \overline{1, 2}$, $p_2 = \overline{1, 2}$, $p_3 = \overline{1, 2}$. Неизвестные $y_{1_{p_1, p_2, p_3}}(t)$, $u_{i_{p_1, p_2, p_3}}(t)$, $i = \overline{1, 2}$, $p_1 = \overline{1, 2}$, $p_2 = \overline{1, 2}$, $p_3 = \overline{1, 2}$, будем искать в виде $y_{1_{p_1, p_2, p_3}}(t) = a_{1_{p_1, p_2, p_3, 2}} t^2 + a_{1_{p_1, p_2, p_3, 1}} t + 1$, $u_{i_{p_1, p_2, p_3}}(t) = t^2 b_{i_{p_1, p_2, p_3, 2}} + t b_{i_{p_1, p_2, p_3, 1}} + b_{i_{p_1, p_2, p_3, 0}}$, $i = \overline{1, 2}$, $p_1 = \overline{1, 2}$, $p_2 = \overline{1, 2}$, $p_3 = \overline{1, 2}$, учитывая условие (3.5.4). Функционал штрафа (3.5.7) примет вид:

$$\begin{aligned} J_\varepsilon^\vartheta(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{y}_1, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2) &= \frac{99}{200} \int_0^1 dt \int_0^\pi ds_1 \int_0^\pi ds_2 \int_0^\pi ds_3 (\tilde{v}_1 - v_1^{dop})^4 ds_3 + \\ &+ \frac{99}{200} \int_0^1 dt \int_0^\pi ds_1 \int_0^\pi ds_2 \int_0^\pi ds_3 (\tilde{y}_1 - v_1^{dop})^4 ds_3 + \frac{99}{100} \int_0^1 dt \int_0^\pi ds_1 \int_0^\pi ds_2 \int_0^\pi ds_3 (\tilde{v}_2 - v_2^{dop})^2 ds_3 + \\ &+ \frac{99}{100} \int_0^1 dt \int_0^\pi ds_1 \int_0^\pi ds_2 \int_0^\pi ds_3 |\nabla \tilde{v}_2 - \nabla v_2^{dop}|^2 ds_3 + \frac{1}{2} \int_0^1 dt \int_0^\pi ds_1 \int_0^\pi ds_2 \int_0^\pi ds_3 (\tilde{u}_1^{\frac{4}{3}} + \tilde{u}_2^2) ds_3 + \\ &+ 100 \int_0^1 dt \int_0^\pi ds_1 \int_0^\pi ds_2 \int_0^\pi ds_3 (\tilde{v}_1 - \tilde{y}_1)^2 ds_3. \end{aligned}$$

В результате работы программного комплекса «Численное исследование оптимального регулирования для модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке нерва кубической формы» были найдены коэффициенты управления, представленные в таблице 3.6.2, при которых значение функционала $J = 62.2813054571325893$. Таким образом, получим решение $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u})$ задачи (3.2.9), (3.6.4) – (3.6.6). Полученные приближенные решения $v_i, i = \overline{1, 2}$, и y_1 , задачи (3.6.4) – (3.6.6) представлены на рис. 3.6.3 при $s_2 = \frac{\pi}{2}$ и $s_3 = \frac{\pi}{2}$ в момент времени $t = 1$. График управления представлен на рис. 3.6.4 при $s_2 = \frac{\pi}{2}$ и $s_3 = \frac{\pi}{2}$ в момент времени $t = 1$.

Таблица 3.6.2. Коэффициенты управления

$a_{11,1,1,1} = 1.45241210473982$	$a_{11,1,1,2} = 0.261645884469047$	$a_{11,1,2,1} = 1.49988551714717$
$a_{11,1,2,2} = 0.156612289515962$	$a_{11,2,1,1} = 2.17265388650544$	$a_{11,2,1,2} = 0.156612289515962$
$a_{11,2,2,1} = 1.11364466985045$	$a_{11,2,2,2} = 0.156612289515962$	$a_{12,1,1,1} = 1.21286647215023$
$a_{12,1,1,2} = 0.156612289515962$	$a_{12,1,2,1} = 0.650420621871871$	$a_{12,1,2,2} = 0.156612289515962$
$a_{12,2,1,1} = 1.05319852807838$	$a_{12,2,1,2} = 0.156612289515962$	$a_{12,2,2,1} = 0.460407924923226$
$a_{12,2,2,2} = 0.156612289515962$	$b_{11,1,1,0} = 21.1040058175468$	$b_{11,1,1,1} = 20.9134852958178$
$b_{11,1,1,2} = 17.0145086690652$	$b_{11,1,2,0} = 9.44863269054635$	$b_{11,1,2,1} = 11.9905841846303$
$b_{11,1,2,2} = 10.6900802259571$	$b_{11,2,1,0} = 15.2509965482297$	$b_{11,2,1,1} = 16.9851313193594$
$b_{11,2,1,2} = 7.31474778942131$	$b_{11,2,2,0} = 8.17396035214038$	$b_{11,2,2,1} = 7.91503103809830$
$b_{11,2,2,2} = 7.05278986742131$	$b_{12,1,1,0} = 9.75981697918445$	$b_{12,1,1,1} = 12.7169984110483$
$b_{12,1,1,2} = 11.3015991573727$	$b_{12,1,2,0} = 8.51821516507765$	$b_{12,1,2,1} = 8.96845834574596$
$b_{12,1,2,2} = 7.76967620523303$	$b_{12,2,1,0} = 39.6735994768327$	$b_{12,2,1,1} = 23.0010789773433$
$b_{12,2,1,2} = 16.4265076990945$	$b_{12,2,2,0} = 8.27834643964005$	$b_{12,2,2,1} = 7.60973706447017$
$b_{12,2,2,2} = 6.43066479427560$	$b_{21,1,1,0} = 8.04601305348420$	$b_{21,1,1,1} = 2.00204216641670$
$b_{21,1,1,2} = 1.29001590855343$	$b_{21,1,2,0} = 2.56566630318739$	$b_{21,1,2,1} = 1.47727519167543$
$b_{21,1,2,2} = 1.41128496617024$	$b_{21,2,1,0} = 2.17284755674656$	$b_{21,2,1,1} = 0.970415927488562$
$b_{21,2,1,2} = 1.13416253084386$	$b_{21,2,2,0} = 2.61535098850334$	$b_{21,2,2,1} = 2.12295281735422$
$b_{21,2,2,2} = 2.05274456061082$	$b_{22,1,1,0} = 2.70429762474561$	$b_{22,1,1,1} = 1.65157447266437$
$b_{22,1,1,2} = 1.50763754523361$	$b_{22,1,2,0} = 2.32788833730035$	$b_{22,1,2,1} = 1.95355954778468$
$b_{22,1,2,2} = 1.93802806046427$	$b_{22,2,1,0} = 0.522577269107115$	$b_{22,2,1,1} = 1.21271503824448$
$b_{22,2,1,2} = 1.55837444302117$	$b_{22,2,2,0} = 2.18670192043185$	$b_{22,2,2,1} = 1.61460279011558$
$b_{22,2,2,2} = 1.33906187543363$		

Следуя *этапу 7* алгоритма, подставим полученные функции $\tilde{u}_i(s_1, s_2, s_3, t)$, $i = \overline{1, 2}$, уже как в известные функции в правую часть системы уравнений (3.6.1). Для данной системы уравнений (3.6.4) найдем приближенное решение задачи (3.6.4) – (3.6.6). В результате получим численное решение задачи (3.6.4) – (3.6.6), которое обозначим как $w_i(s_1, s_2, s_3, t)$, $i = \overline{1, 4}$. Полученные приближенные решения задачи (3.6.4) – (3.6.6) с заданной правой частью $\tilde{u}_i(s_1, s_2, s_3, t)$, $i = \overline{1, 2}$, представлены на рис. 3.6.3 при $s_2 = \frac{\pi}{2}$ и $s_3 = \frac{\pi}{2}$

в момент времени $t = 1$. Найдя значения \mathfrak{d}_i^h , $i = \overline{1, 2}$ по формулам (3.5.11), получим $\mathfrak{d}_1^3 = 0.00012741428$, $\mathfrak{d}_2^3 = 0.00703518676$. Можно заметить, что полученные приближенные решения задачи (3.2.9), (3.6.4) – (3.6.6) и приближенные решения задачи (3.6.4) – (3.6.6) с известной правой частью $\tilde{u}_i(s_1, s_2, s_3, t)$, $i = \overline{1, 2}$, «близки» к требуемому v_i^{dop} , $i = \overline{1, 2}$, и между собой.

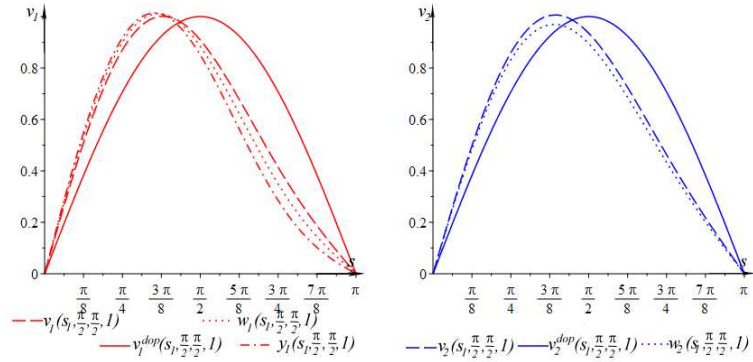


Рис. 3.6.3. Численное решение задачи (3.6.4) – (3.6.6)

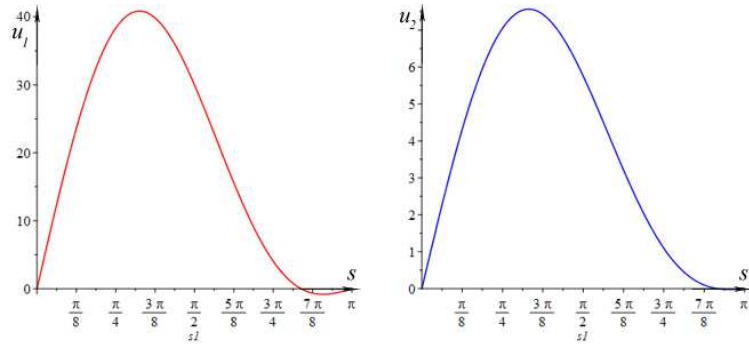


Рис. 3.6.4. Функции управления задачи (3.6.4) – (3.6.6)

Пример 3.6.3. Требуется найти решение задачи оптимального управления для трехкомпонентной системы уравнений:

$$\begin{cases} v_{1jt} - v_{1jss} + v_{1j} + v_{2j} + v_{3j} + v_{1j}^3 = u_{1j}, \\ -v_{2jss} - v_{1j} + v_{2j} + v_{3j} = u_{2j}, \\ -v_{3jss} - v_{1j} - v_{2j} - v_{3j} = u_{3j}, \end{cases} \quad j = \overline{1, 3}, \quad (3.6.7)$$

на графе \mathbf{G}_1 (рис. 3.6.5) с условиями:

$$\begin{aligned} v_{i1s}(l_1, t) - v_{i2s}(0, t) - v_{i3s}(0, t) = 0, \quad v_{i2s}(l_2, t) = v_{i1s}(0, t) = v_{i3s}(l_3, t) = 0, \\ v_{i1}(l_1, t) = v_{i2}(0, t), \quad v_{i1}(l_1, t) = v_{i3}(0, t), \quad i = \overline{1, 3}, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

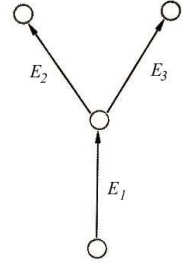
и начальным условием Шоултера – Сидорова

$$v_{1j}(s, 0) = v_{10j}(s), \quad j = \overline{1, 3}, \quad (3.6.9)$$

если $l_1 = \pi$, $l_2 = \pi$, $l_3 = \pi$, $T = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$, $\vartheta = \frac{99}{100}$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$, $v_{101} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{\pi}}(\cos \frac{s}{2} + \cos \frac{3s}{2})$, $v_{102} = (-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{\pi}} - 1)(\sin \frac{s}{2} + \sin \frac{3s}{2})$, $v_{103} = \sin \frac{s}{2} + \sin \frac{3s}{2}$, $v_{i1}^{dop}(s, t) =$

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{\pi}}(t \cos \frac{s}{2} + \cos \frac{3s}{2}), i = \overline{1, 3} \quad v_{i2}^{dop}(s, t) = (-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{\pi}} - 1)(\sin \frac{s}{2} + t \sin \frac{3s}{2}), i = \overline{1, 3},$$

$$v_{i3}^{dop}(s, t) = t \sin \frac{s}{2} + t^2 \sin \frac{3s}{2}, i = \overline{1, 3}.$$

Рис. 3.6.5. Граф \mathbf{G}_1

Введем функцию $y_1 = y_1(s, t)$, и получим эквивалентную задачу (3.6.8), (3.6.9) для системы уравнений вида (3.5.1), (3.5.2) эквивалентную исходной.

Правая часть уравнения и приближенные решения задачи (3.6.8), (3.6.9), (3.5.1), (3.5.2) для j -го реб-

ра ($j = \overline{1, 3}$) графа имеют вид $\tilde{u}_{ij}(s, t) = \varphi_{0j}(s)u_{i1}(t) + \varphi_{1j}(s)u_{i2}(t), i = \overline{1, 3}, \tilde{v}_{ij}(s, t) = \varphi_{0j}(s)v_{i1}(t) + \varphi_{1j}(s)v_{i2}(t), i = \overline{1, 3}, \tilde{y}_{1j}(s, t) = \varphi_{0j}(s)y_{11}(t) + \varphi_{1j}(s)y_{12}(t)$, где $\varphi_0 = (\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}) = (\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{\pi}} \cos \frac{s}{2}, (-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{\pi}} - 1) \sin \frac{s}{2}, \sin \frac{s}{2})$, $\varphi_1 = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13}) = (\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{\pi}} \cos \frac{3s}{2}, (-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{\pi}} - 1) \sin \frac{3s}{2}, \sin \frac{3s}{2})$ [2]. Неизвестные $y_{1p}(t), p = \overline{1, 2}, u_{ip}(t), i = \overline{1, 3}, p = \overline{1, 2}$, будем искать в виде $y_{1p}(t) = a_{1p,2}t^2 + a_{1p,1}t + 1$, учитывая условие (3.5.4) и значения начальных функций $v_{i0}(s), u_{ip}(t) = b_{ip,2}t^2 + b_{ip,1}t + b_{p1,0}, i = \overline{1, 3}$. Функционал штрафа (3.5.7) примет вид:

$$J_\varepsilon^\theta(\tilde{v}_{1j}, \tilde{v}_{2j}, \tilde{v}_{3j}, \tilde{y}_{1j}, \tilde{y}_{2j}, \tilde{u}_{1j}, \tilde{u}_{2j}, \tilde{u}_{3j}) = \frac{99}{200} \sum_{j=1}^3 \int_0^1 dt \int_0^\pi (\tilde{v}_{1j} - v_{1j}^{dop})^4 ds +$$

$$+ \frac{99}{200} \sum_{j=1}^3 \int_0^1 dt \int_0^\pi (\tilde{y}_{1j} - v_{1j}^{dop})^4 ds + \frac{99}{100} \sum_{j=1}^3 \sum_{i=2}^3 \int_0^1 dt \int_0^\pi |\nabla \tilde{v}_{ij} - \nabla v_{ij}^{dop}|^2 ds +$$

$$+ \frac{99}{100} \sum_{j=1}^3 \sum_{i=2}^3 \int_0^1 dt \int_0^\pi (\tilde{v}_{ij} - v_i^{dop})^2 ds + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \int_0^1 dt \int_0^\pi (\tilde{u}_{1j}^{\frac{4}{3}} + \sum_{i=2}^3 \tilde{u}_{ij}^2) ds +$$

$$+ 100 \sum_{j=1}^3 \int_0^1 dt \int_0^\pi (\tilde{v}_{1j} - \tilde{y}_{1j})^2 ds.$$

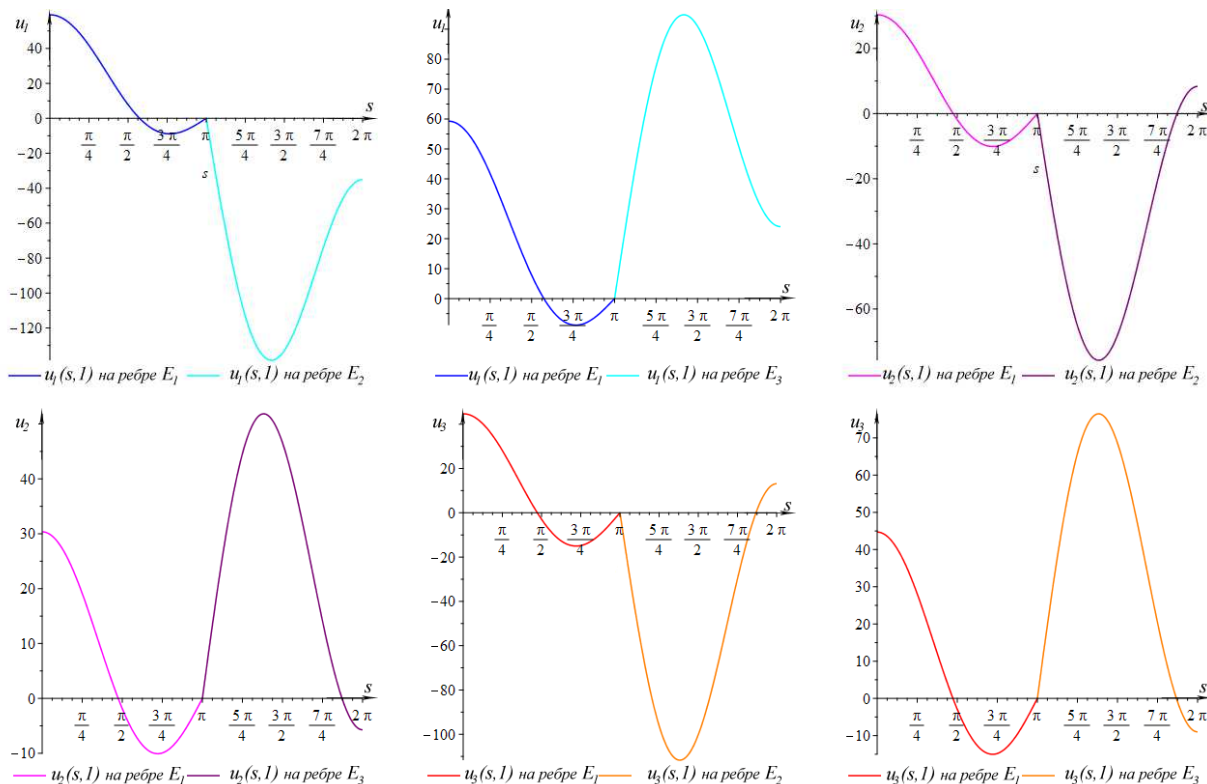
В результате работы программного комплекса «Численное исследование оптимального регулирования для модели распространения импульса в мембранной оболочке системы нервов» были найдены коэффициенты управления, представленные в таблице 3.7.1, при которых значение функционала $J = 246368.067658$. Таким образом, получим решение $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u})$ задачи (3.2.9), (3.6.7) – (3.6.9). Полученные приближенные решения $v_i, i = \overline{1, 3}$, и y_1 , задачи (3.6.7) – (3.6.9) представлены на рис. 3.6.7 в момент времени $t = 1$. График управления представлен на рис. 3.6.6 в момент времени $t = 1$.

Следуя *этапу 7* алгоритма, подставим полученные функции $\tilde{u}_i(s, t), i = \overline{1, 3}$, уже как в известные функции, в правую часть системы уравнений (3.6.7). Для данной системы уравнений (3.6.7) найдем приближенное решение задачи (3.6.7) – (3.6.9), используя 7-й этап алгоритма. В результате получим

Таблица 3.6.3. Коэффициенты управления

$a_{11,1} = 0.895720842799243$	$a_{11,2} = 0.895720842799243$	$a_{12,1} = 0.895720842799243$
$a_{12,2} = 0.895720842799243$	$a_{21,1} = 0.895720842799243$	$a_{21,2} = 0.895720842799243$
$a_{22,1} = 0.895720842799243$	$a_{22,2} = 0.895720842799243$	$b_{11,0} = 42.2133464219138$
$b_{11,1} = 20.7317945528131$	$b_{11,2} = 13.4141295014063$	$b_{12,0} = 28.0479019984025$
$b_{12,1} = 14.6141158889199$	$b_{12,2} = 9.65077564933032$	$b_{21,0} = 11.5184769053509$
$b_{21,1} = 10.1812112875979$	$b_{21,2} = 8.38451736587583$	$b_{22,0} = 17.3228260324412$
$b_{22,1} = 10.7279939236085$	$b_{22,2} = 7.75238399332919$	$b_{31,0} = 17.4719830515085$
$b_{31,1} = 14.1375257264921$	$b_{31,2} = 12.4057731222543$	$b_{32,0} = 23.6080265762477$
$b_{32,1} = 16.4477772015759$	$b_{32,2} = 12.9486756262284$	

численное решение задачи (3.6.7) – (3.6.9), которое обозначим как $w_i(s, t)$, $i = \overline{1, 3}$. Полученные приближенные решения задачи (3.6.7) – (3.6.9) с заданной правой частью $\tilde{u}_i(s, t)$, $i = \overline{1, 3}$, представлены на рис. 3.6.6 в момент времени $t = 1$. Найдя значения \mathfrak{d}_i^h , $i = \overline{1, 3}$ по формулам (3.5.11), получим $\mathfrak{d}_1^3 = 0.103832539$, $\mathfrak{d}_2^3 = 0.000504607664$, $\mathfrak{d}_3^3 = 0.214992648$. Можно заметить, что полученные приближенные решения задачи (3.2.9), (3.6.7) – (3.6.9) и приближенные решения задачи (3.6.7) – (3.6.9) с известной правой частью $\tilde{u}_i(s, t)$, $i = \overline{1, 3}$, «близки» к требуемому v_i^{dop} , $i = \overline{1, 3}$ и между собой.

Рис. 3.6.7. Функции управления задачи (3.6.7) – (3.6.9) при $t = 3$

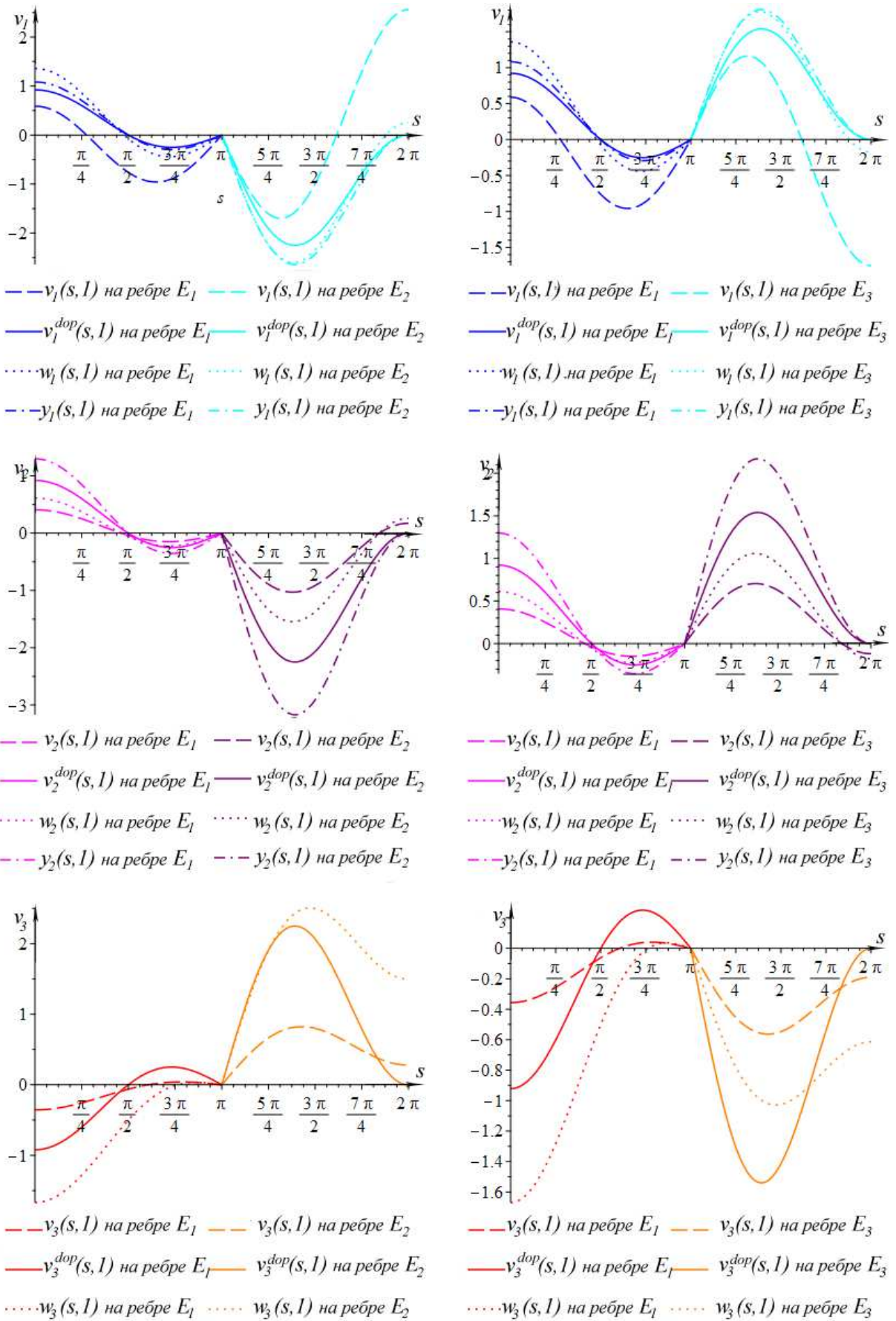


Рис. 3.6.6. Численное решение задачи (3.6.7) – (3.6.9) при $m = 3$

Заключение

Итоги выполненного исследования

В диссертационном исследовании представлены результаты аналитического и численного исследования вырожденных математических моделей автокаталитической реакции с диффузией, распространения нервного импульса в мембранной оболочке. Выявлены условия единственности, неединственности и несуществования решений изучаемых моделей. Построены алгоритмы аналитического и численного методов нахождения управления решениями вырожденной многокомпонентной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке.

Основываясь на представленных теоретических результатах и данных проведенных вычислительных экспериментов, сформулируем основные результаты:

1. Аналитический метод исследования однозначной разрешимости вырожденной математической модели автокаталитической реакции с диффузией в кювете или трубчатом реакторе. Получены условия, при которых существует одно или два решения задачи Шоултера – Сидорова, и условия, при которых решение не существует.

2. Аналитический метод исследования однозначной разрешимости вырожденной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке нерва или системы нервов. Получены условия, при которых существует одно или три решения задачи Шоултера – Сидорова, и условия, при которых решение не существует.

3. На основе полученных теоретических результатов разработан численный метод исследования задачи Шоултера – Сидорова для математических моделей автокаталитической реакции с диффузией в кювете или трубчатом реакторе и распространения нервного импульса в мембранной оболочке нерва или системы нервов для оценки состояний исследуемых систем при условии существования нескольких решений на основе модифицированного метода Галеркина – Петрова и метода фазового пространства.

4. Реализованы в виде комплексов программ разработанные методы и алгоритмы, позволяющие находить решения математической модели автокаталитической реакции с диффузией в кювете или трубчатом реакторе и рас-

пространение нервного импульса в мембранной оболочке нерва или системы нервов с условием Шоултера – Сидорова. Проведены вычислительные эксперименты, иллюстрирующие феномен неединственности решений исследуемых моделей.

5. Исследована вырожденная многокомпонентная математическая модель оптимального регулирования распространением нервного импульса в мембранной оболочке нерва или системы нервов с начальным условием Шоултера – Сидорова. Получены условия однозначной разрешимости в слабом обобщенном смысле задачи Шоултера – Сидорова, доказана теорема о существовании решения задачи оптимального управления для исследуемой модели.

6. На основе полученных теоретических результатов разработан алгоритм численного метода нахождения управления решениями вырожденной многокомпонентной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке.

7. Реализованы в виде комплекса программ разработанные методы и алгоритмы, позволяющие находить управление решениями вырожденной многокомпонентной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке нерва или системы нервов с начальным условием Шоултера – Сидорова при различных значениях параметров.

Таким образом, в работе решены все поставленные задачи и достигнута цель исследования.

Полученные результаты являются новыми и позволяют сделать вывод о том, что диссертационная работа соответствует следующим областям исследования паспорта специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

1) развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п. 2);

2) разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (п. 3);

3) реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента (п. 4);

и паспорта специальности 05.13.01 – Системный анализ, управление и обра-

ботка информации (информатика, информационно-вычислительное обеспечение):

4) разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации (п. 4).

Рекомендации

Результаты численно-аналитического исследования позволяют применять их при решении различных задач анализа течения процессов кинетической химии и биофизики. Разработка новых программных систем для проведения вычислительных экспериментов с адаптацией и интеграцией существующих программ позволит внедрить результаты исследования в технологический и учебный процессы.

Перспективы дальнейшей разработки темы исследования

Представляет интерес более подробное аналитическое и численное исследование вопроса существования, единственности или неединственности решений других математических моделей, описываемых уравнениями типа реакции-диффузии. В частности, модели диффузии гена, реакционно-диффузионной модели орегонатора, модели Гаузе – Витта, модели гликолиза Селькова, модели Грея – Скотта, модели хищник-жертва и других.

Востребованным является дальнейшее изучение возможной непростоты фазовых пространств изучаемых математических моделей в случае увеличения коразмерности и рассмотрение многокомпонентных вырожденных моделей автокаталитической реакции с диффузией в случае неединственности решений.

Интересны приложения полученных результатов к решению практических задач кинетической химии и биофизики, возникающих в открытых реакторах и в живых организмах, а также при разработке биотехнологических систем.

Список литературы

1. Ахромеева, Т.С. Нестационарные структуры и диффузионный хаос / Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1992. – 544 с.
2. Баязитова, А.А. Задача Штурма – Лиувилля на геометрическом графе / А.А. Баязитова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 16 (192), выпуск 5. – С. 4–10.
3. Белоусов, Б.П. Периодически действующая химическая реакция и ее механизмы / Б.П. Белоусов // Автоволновые процессы в системах с диффузией. – Горький, 1981. – С. 176–186.
4. Богатырева, Е.А. Аналитическое и численное исследования квазилинейных математических моделей квазистационарного процесса в проводящей среде и двухфазной фильтрации: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Е.А. Богатырева; Юж.-Урал. гос. ун-т. – Челябинск, 2015. – 110 с.
5. Бокарева, Т.А. Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева / Т.А. Бокарева, Г.А. Свиридюк // Математические заметки. – 1994. – Т. 55, № 3. – С. 3–10.
6. Борисов, В.Г. О параболических краевых задачах с малым параметром при производных по t / В.Г. Борисов // Математический сборник. – 1986. – Т. 131, № 3. – С. 293–308.
7. Бояринцев, Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы: методы решения и исследования / Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
8. Бункин, Ф.В. Термохимическая бистабильность и химические фазовые переходы, стимулированные лазерным излучением / Ф.В. Бункин, Н.А. Кириченко, Б.С. Лукьянчук // Квантовая электроника. – 1984. – Т. 11, № 6. – С. 1183–1198.
9. Бычков, Е.В. Исследование полулинейных математических моделей соболевского типа второго порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Е.В. Бычков; Юж.-Урал. гос. ун-т. – Челябинск, 2013. – 106 с.
10. Васильев, В.А. Автоволновые процессы / В.А. Васильев, Ю.М. Романовский, В.Г. Яхно. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
11. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – М.: Наука, 1976. – 286 с.

12. Врагов, В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В.Н. Врагов.– Новосибирск: НГУ, 1983.– 179 с.
13. Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978. – 335 с.
14. Гильмутдинова, А.Ф. Исследование математических моделей с феноменом неединственности: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.Ф. Гильмутдинова; Юж.-Урал. гос. ун-т. – Челябинск, 2009. – 123 с.
15. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 438 с.
16. Дыльков, А.Г. Исследование оптимального управления решениями начально-конечной задачи для неклассических моделей математической физики: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.Г. Дыльков; Магнитогорский гос. ун-т. – Магнитогорск, 2012. – 114 с.
17. Загребина, С.А. Исследование многоточечных начально-конечных задач для неклассических моделей математической физики: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / С.А. Загребина; Юж.-Урал. гос. ун-т. – Челябинск, 2013. – 230 с.
18. Замышляева, А.А. Исследование линейных математических моделей соболевского типа высокого порядка: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.А. Замышляева; Юж.-Урал. гос. ун-т. – Челябинск, 2013. – 275 с.
19. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.В. Келлер; Юж.-Урал. гос. ун-т. – Челябинск, 2011. – 249 с.
20. Кинг, Р. Химические приложения топологии и теории графов. – М.: Мир, 1987. – 560 с.
21. Колмогоров, А.Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А.Н. Колмогоров А.Н., И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюллетень МГУ. Серия: Математика и механика. – 1937. – Т. 1. – С. 1–26.
22. Красовский, Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

23. Лаугалис, Р.В. Динамика процессов кроветворения / Р.В. Лаугалис, Д.В. Швитра // Математические модели в биологии и медицине. – 1987. – № 2. – С. 98–130.
24. Ленг, С. Введение в теорию дифференциальных многообразий / С. Ленг. – Волгоград: Платон, 1997. – 203 с.
25. Линдемманн, О. Математические модели в химии / О. Линдемманн. – М.: Химия, 1999. – 436 с.
26. Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 416 с.
27. Лионс, Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами / Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1987. – 367 с.
28. Лобанов, А.И. Математические модели биологических систем, описываемые уравнениями «реакция-диффузия» и «реакция-диффузия-конвекция»: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.И. Лобанов; Моск. физ.-техн. ин-т. – М., 2001. – 236 с.
29. Лоскутов, А.Ю. Введение в синергетику / А.Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов. – М.: Наука, 1989. – 269 с.
30. Манакова, Н.А. Аналитическое и численное исследование оптимального управления в полулинейных моделях гидродинамики и упругости: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Н.А. Манакова; Юж.-Урал. гос. ун-т. – Челябинск, 2015. – 253 с.
31. Маркевич, Н.И. Резонансные явления в мембранах, содержащих ионные каналы с двумя конформационными состояниями / Н.И. Маркевич, Е.Е. Сельков // Биофизика. – 1983. – Т. 28, № 2. – С. 260–264.
32. Марри, Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях / Дж. Марри. – М.: Мир, 1983. – 398 с.
33. Надирашвили, Н.С. Кратные собственные значения оператора Лапласа / Н.С. Надирашвили // Математический сборник. – 1987. – Т. 133, № 2. – С. 223–237.
34. Плеханова, М.В. Нелинейные вырожденные эволюционные уравнения дробного порядка. Разрешимость задач оптимального управления: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / М.В. Плеханова; Чел. гос. ун-т. – Челябинск, 2017. – 294 с.

35. Понтрягин, А.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
36. Романовский, Ю.М. Математическая биофизика / Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский. – М.: Наука, 1984. – 304 с.
37. Рузакова, О.А. Исследование управляемости линейных уравнений соболевского типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук / О.А. Рузакова; Чел. гос. ун-т. – Челябинск, 2004. – 110 с.
38. Свиридюк, Г.А. Об одной задаче Showalter / Г.А. Свиридюк // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 23, № 2. – С. 338–339.
39. Свиридюк, Г.А. О галеркинских приближениях сингулярных нелинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Известия вузов. Серия: Математика. – 1989. – № 10. – С. 44–47.
40. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сибирский математический журнал. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 109–119.
41. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Дифференциальные уравнения – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 250–258.
42. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Известия РАН. Математика. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192–207.
43. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, № 5. – С. 252–272.
44. Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p -секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1912–1919.
45. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Математические заметки. – 2002. – Т. 71, № 2. – С. 292–297.
46. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши – Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Мананкова // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 9. – С. 36–41.

47. Свиридюк, Г.А. Сборки Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, И.К. Тринеева // Известия вузов. Математика. – 2005. – № 10. – С. 54–60.
48. Сидоров, Н.А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н.А. Сидоров // Математические заметки. – 1984. – Т. 25, № 4. – С. 569–578.
49. Соболев, С.Л. Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Известия АН СССР. Серия: Математика – 1954. – Т. 18. – С. 3–50.
50. Сукачева, Т.Г. Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей: дис. ... д-ра. физ.-мат. наук / Т.Г. Сукачева; Новгород. гос. ун-т. – Великий Новгород, 2004. – 249 с.
51. Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
52. Федоров, В.Е. Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений соболевского типа в банаховых и локально выпуклых пространствах: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / В.Е. Федоров; Чел. гос. ун-т. – Челябинск, 2005. – 271 с.
53. Филда, Р. Колебания и бегущие волны в химических системах / Р. Филда, М. Бургер. – М.: Мир, 1988. – 720 с.
54. Фурсиков, А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 350 с.
55. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
56. Цыпленкова, О.Н. Исследование оптимального управления в моделях Буссинеска – Лява: дис. ... канд. физ.-мат. наук / О.Н. Цыпленкова; Юж.-Урал. гос. ун-т. – Челябинск, 2013. – 108 с.
57. Якупов, М.М. Фазовые пространства некоторых задач гидродинамики: дис. ... канд. физ.-мат. наук / М.М. Якупов; Чел. гос. ун-т. – Челябинск, 1999. – 86 с.
58. Al'shin, A.B. Blow-Up in Nonlinear Sobolev-Type Equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 2011. – 648 p.

59. Beck, M.B. Real-Time Control of Water Quality and Quantity / M.B. Beck. – Washington: NASA, 1978. – 300 p.
60. Bogobowicz, A. Modelling and Control of Water Quality in a River Section / A. Bogobowicz, J. Sokolowski // System Modelling and Optimization. – 1984. – V. 59. – P. 403–414.
61. Domenico, P.A. Physical and Chemical Hydrogeology / P.A. Domenico, F.W. Schwartz. – N.Y.: Wiley, 1997. – 528 p.
62. Du Qu Wei. Controlling Chaos in Spaceclamped Fitzhugh – Nagumo Neuron by Adaptive Passive Method / Du Qu Wei, Xiao Shu Luo, Bo Zhang, Ying Hua Qin // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2010. – V. 11. – P. 1752–1759.
63. Favini, A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces / A. Favini, A. Yagi. – N.Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, 1999. – 236 p.
64. Field, R.J. Oscillations in Chemical Systems. II. Thorough Analysis of Temporal Oscillation in the Bromate-Cerium-Malonic Acid System / R.J. Field, E. Koros, R. Noyes // Journal of the American Chemical Society. – 1972. – V. 94, № 25. – P. 8649–8664.
65. Field, R.J. Oscillations in Chemical Systems. IV. Limit Cycle Behavior in a Model of a Real Chemical Reaction/ R.J. Field, R. Noyes // Journal of Chemical Physics. – 1974. – V. 60, № 5. – P. 1877–1884.
66. Fisher, R.A. The Wave of Advance of Advantageous Genes /R.A. Fisher // Annals of Human Genetics. – 1937. – № 7. – P. 353–369.
67. Fitzhugh, R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane / R. Fitzhugh // Biophysical Journal. – 1961. – V. 1, № 6. – P. 445–466.
68. Hodgkin, A.L. A Quantitative Description of Membrane Current and Its Application to Conduction and Excitation in Nerve / A.L. Hodgkin, A.F. Huxley // Journal of Physiology. – 1952. – № 117 (4). – P. 500–544.
69. Holmes, E.E. Partial Differential Equations in Ecology: Spatial Interactions and Population Dynamics / E.E. Holmes, M.A. Lewis, J.E. Banks, R.R. Veit // Ecology. – 1994. – V. 75, № 1. – P. 17–29.
70. Kozhanov, A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems / A.I. Kozhanov. – Utrecht: VSP, 1999. – 171 p.
71. Lefever, R. Symmetry-Breaking Instabilities in Dissipative System / R. Lefever // Journal of American Physics. – 1968. – № 48. – C. 1695–1700.

72. Melnikova, I.V. The Cauchy Problem. Three Approaches / I.V. Melnikova, A.L. Filinkov. – London; N.Y.; Washington: Chapman and Hall, 2001. – 264 p.
73. Nagumo, J. An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon / J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa // IRE. – 1962. – № 50 (10). – P. 2061–2071.
74. Nekorkin, V.I. Autowaves and Solitons in a Threecomponent Reaction-Diffusion System / V.I. Nekorkin, V.B. Kazantsev // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2002. – V. 12, № 11. – P. 2421–2434.
75. Nekorkin, V.I. Heteroclinic Contours and Self-Replicated Solitary Waves in a Reaction–Diffusion Lattice with Complex Threshold Excitation / V.I. Nekorkin, D.S. Shapin, A.S. Dmitrichev, V.B. Kazantsev, S. Binczak, J.M. Bilbault // Physica D. – 2008. – V. 237. – P. 2463–2475.
76. Nekorkin, V.I. Polymorphic and Regular Localized Activity Structures in a Two-Dimensional Two-Component Reaction Diffusion Lattice with Complex Threshold Excitation / V.I. Nekorkin, A.S. Dmitrichev, J.M. Bilbault, S. Binczak // Physica D. – 2010. – V. 239. – P. 972–987.
77. Nicholls, J.G. From Neuron to Brain / J.G. Nicholls, S. Sinauer. – 2001. – 580 p.
78. Plusnina, T.Yu. Modeling of the Effect of a Weak Field on a Nonlinear Transmembrane Ion Transfer System / T.Yu. Plusnina, G.Yu. Riznichenko. // Bioelectrochemistry and Bioenergetics. – 1994. – V. 35. – P. 39–47.
79. Poincare, H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animee d'un mouvement de rotation / H. Poincare // Acta Mathematica. – 1885. – № 7. – P. 259–380.
80. Pyatkov, S.G. Operator Theory. Nonclassical Problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Tokyo: VSP, 2002. – 346 p.
81. Qingyun Wang. Bifurcation and Synchronization of Synaptically Coupled Fhn Models with Time Delay / Qingyun Wang, Qishao Lu, Guanrong Chen, Zhaosheng Feng, Lixia Duan // Chaos Solitons Fractals. – 2009. – V. 39. – P. 918.
82. Rovinsky, A.B. Mechanism and Mathematical Model of the Oscillating Bromateferroin-Bromomalonic Acid Reaction / A.B. Rovinsky, A.M. Zhabotinsky // Journal of Physical Chemistry. – 1984. – № 88 (25). – P. 6081–6084.

83. Ryll, Ch. Analytical, Optimal, and Sparse Optimal Control of Traveling Wave Solutions to Reaction-Diffusion Systems / Ch. Ryll, J. Lober, St. Martens // Control of Self-Organizing Nonlinear Systems. – 2016. – P. 189–210.
84. Showalter, R.E. Partial Differential Equations of Sobolev – Galpern Type / R.E. Showalter // Pacific Journal of Mathematics. – 1963. – V. 31, № 3. – P. 787–794.
85. Sviridyuk, G.A. Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokio: VSP, 2003. – 229 p.
86. Thompson J.M.T. Instabilities and Catastrophes in Sciences and Engineering / J.M.T. Thompson. – Chichester; N.Y.; Brisbane; Toronto; Singapore: John Wiley and Sons, 1982. – 226 p.
87. Turing, A.M. The Chemical Basis for Morphogenesis / A.M. Turing // Philosophical Transactions of The Royal Society. – 1952. – V. 237. – P. 37–72.
88. Wang, Sh. Small Amplitude Solutions of the Generalized Imbq Equation / Sh. Wang, G. Chen // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2002. – V. 274. – P. 497–518.
89. Weber, S. Multicomponent Reaction-Diffusion Processes on Complex Networks / S. Weber, M. Porto // Physical Review E. – 2006. – V. 74, № 4. – P. 046108.
90. Xiuqing Wu. Stochastic Resonance in an Optical Bistable System Subjected to Cross-Correlated Additive White Noise and Multiplicative Colored Noise / Xiuqing Wu, Bing Wang, Jianfa Qian // Physics Letters A. – 2008. – V. 372. – P. 5299.
91. Манакова, Н.А. Оптимальное управление для одной математической модели распространения нервного импульса / Н.А. Манакова, **О.В. Гаврилова** // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 120–126. (БАК, Scopus, Web of Science)
92. Manakova, N.A. About Nonuniqueness of Solutions of the Showalter – Sidorov Problem for One Mathematical Model of Nerve Impulse Spread in Membrane / N.A. Manakova, **O.V. Gavrilova** // Вестник ЮУрГУ.

- Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2018. – Т. 11, № 4. – С. 161–168. (БАК, Scopus, Web of Science)
93. Gavrilova, O.V. Numerical Study of a Mathematical Model of an Autocatalytic Reaction with Diffusion in a Tubular Reactor / O.V. Gavrilova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2018. – V. 5, № 3. – P. 24–37. (БАК)
94. Gavrilova, O.V. Numerical Study on the Non-Uniqueness of Solutions to the Showalter – Sidorov Problem for one Degenerate Mathematical Model of an Autocatalytic Reaction with Diffusion / O.V. Gavrilova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2019. – V. 6, № 4. – P. 3–17. (БАК)
95. Gavrilova, O.V. Optimal Control Over Solutions of a Multicomponent Model of Reaction-Diffusion in a Tubular Reactor / O.V. Gavrilova // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2020. – Т. 12, № 1. – С. 14–23. (БАК)
96. Gavrilova, O.V. A Numerical Study of the Optimal Control Problem for Degenerate Multicomponent Mathematical Model of the Propagation of a Nerve Impulse in the System of Nerves / O.V. Gavrilova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2020. – V. 7, № 1. – P. 47–61. (БАК)
97. Численное моделирование распространения нервного импульса в прямоугольной мембране: Свидетельство № 2019660879 / Гаврилова О.В. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2019660879; заявл. 08.08.2019; зарегистр. 14.08.2019, реестр программ для ЭВМ.
98. Программный комплекс численного исследования оптимального регулирования для модели распространения импульса в системе нервов: Свидетельство № 2019660880 / Манакова Н.А., **Гаврилова О.В.** (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2019660883; заявл. 08.08.2019; зарегистр. 14.08.2019, реестр программ для ЭВМ.
99. Manakova, N.A. Numerical Study of the Process of Optimizing the Propagation of a Nerve Impulse in a Membrane for a Three-Component Model / N.A. Manakova, **O.V. Gavrilova** // Institute of Electrical and

- Electronics Engineers. – 2018. – INSPEC Accession Number: 18183574. – 13 p. (Scopus)
100. Manakova, N.A. Numerical Investigation of the Optimal Measurement for a Semilinear Descriptor System with the Showalter–Sidorov Condition: Algorithm and Computational Experiment / N.A. Manakova, **O.V. Gavrilova**, K.V. Perevozchikova // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2020. – № 4. – С. 115–126.
 101. Гаврилова, О.В. Задача оптимального управления для линейной модели реакции-диффузии в трубчатом реакторе / О.В. Гаврилова // Управление большими системами (УБС'2015): материалы XII Всероссийской школы-конференции молодых ученых, 7–11 сентября, 2015, Волгоград. – М.: ИПУ РАН, 2015. – С. 591–600.
 102. Свиридюк, Г.А. Численное исследование одной модели Фитц Хью – Нагумо // Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова, **О.В. Гаврилова** // Математические методы в технике и технологиях. – 2016. – № 10. – С. 3–6.
 103. Манакова, Н.А. Исследование многокомпонентной модели Фитц Хью – Нагумо с условием Шоултера – Сидорова / Н.А. Манакова, **О.В. Гаврилова** // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2017. – Т. 24, № 4. – С. 349–350.
 104. Гаврилова, О.В. Численное исследование оптимального управления для одной математической модели распространения нервного импульса в прямоугольной мембране / О.В. Гаврилова // Управление большими системами (УБС'2017): материалы XIV Всероссийской школы конференции молодых ученых, 4–8 сентября, 2017, Пермь. – М.: ИПУ РАН, 2017. – С. 77–87.
 105. Гаврилова, О.В. Задача оптимального управления для одной модели распространения нервного импульса / **О.В. Гаврилова**, Н.А. Манакова // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019. – М.: ИПУ РАН, 2019. – С. 982–986.
 106. Гаврилова, О.В. Исследование фазового пространства задачи Шоултера – Сидорова для одной математической модели автокаталитической реакции с диффузией / О.В. Гаврилова // Уфимская осенняя математическая школа: сборник тезисов Международной научной конференции. – Уфа: БашГУ, 2019. – С. 57–59.

Приложение 1. Свидетельство о регистрации программного комплекса численного исследования оптимального регулирования для модели распространения импульса в системе нервов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2019660880

Программный комплекс численного исследования оптимального регулирования для модели распространения импульса в системе нервов

Правообладатель: *федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» (ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)») (RU)*

Авторы: *Гаврилова Ольга Витальевна (RU), Манакова Наталья Александровна (RU)*

Заявка № **2019619883**
Дата поступления **08 августа 2019 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **14 августа 2019 г.**



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

 **Г.П. Ивлиев**

2019-32

Приложение 2. Свидетельство о регистрации программы численного моделирования распространения нервного импульса в прямоугольной мембране

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2019660879

Численное моделирование распространения нервного импульса в прямоугольной мембране

Правообладатель: *федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» (ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)») (RU)*

Автор: *Гаврилова Ольга Витальевна (RU)*

Заявка № **2019619880**
Дата поступления **08 августа 2019 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **14 августа 2019 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 *Г.П. Излиев*



2019-31