На правах рукописи

Ерошкина Татьяна Васильевна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2010

Работа выполнена на кафедре общей математики
ГОУ ВПО «Южно–Уральский государственный университет»

Научный руководитель: кандидат физико–математических наук,
доцент Дильман Валерий Лейзерович

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук,
профессор Кадченко Сергей Иванович

доктор физико–математических наук,
профессор Федоров Владимир Евгеньевич

Ведущая организация: Российский федеральный ядерный центр
"РФЯЦ – ВНИИТФ им. академика
Е.И. Забабахина"

Защита диссертации состоится 3 марта 2010 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Автореферат разослан 22 января 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.–мат. наук, профессор Л.Б. Соколинский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Необходимость построения математических моделей (далее в автореферате ММ) (в форме краевых и других задач для дифференциальных, интегральных и других уравнений и их систем), позволяющих получать достаточно точные приближенные аналитические решения осесимметричных задач теории пластичности неоднородных сред, диктуется потребностью создания эффективных методик проведения экспериментов на прочность материалов, а также потребностями практики. Действительно, некоторые нормативные документы[1], регламентирующие условия производства и эксплуатации сварных соединений, в том числе арматурных сварных конструкций, не учитывают влияния параметров соединений на величину контактного упрочнения менее прочных (далее в автореферате МП) участков, и поэтому требуют уточнения. В то же время, теоретических работ, исследующих напряженное состояние (далее в автореферате НС) или напряженно-деформированное состояние (далее в автореферате НДС) неразъемного соединения, содержащего слой (прослойку) с иными, чем основной металл (далее в автореферате ОМ), механическими характеристиками, и содержащих новые теоретические идеи и подходы, было немного. В работах Л.М. Качанова[2], О.А. Бакши и Л.М. Качанова[3] при достаточно жестких предположениях исследовался случай бесконечной механической неоднородности K соединения. В работе[4] получены для случая плоской деформации зависимости предельной нагрузки от K и относительной толщины слоя $\varkappa$ для произвольных значений K аппроксимацией по двум точкам. Этот подход перенесен в работу[5], в которой исследовалось НС в МП поперечном слое круглого сплошного стержня. Кроме того, в ней использовались гипотезы, не вполне соответствующие реальным распределениям напряжений в слое. Поэтому остается актуальной необходимость построения и исследования адекватных математических моделей НС неоднородных сплошных стержней.

Цель работы — разработка и исследование аналитическими и численными методами математических моделей НС неоднородных сплошных стержней

---

[1]ГОСТ 10922-64. Арматура и закладные изделия сварные, соединения сварные арматуры и закладных изделий железобетонных конструкций. Общие технические условия. М.: Изд-во стандартов, 1990. 30 с.; ГОСТ 6996-66. Сварные соединения. Методы определения механических свойств. М.: Стандартинформ, 2005. 44 с.

[2]Качанов Л.М. О напряженном состоянии пластической прослойки // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. 1962. № 5. С. 63–67.

[3]Бакши О.А., Качанов Л.М. О напряженном состоянии пластической прослойки при осесимметричной деформации // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 134–137.

[4]О влиянии степени механической неоднородности на статическую прочность сварных соединений / О.А. Бакши, В.В. Ерофеев, М.В. Шахматов и др. // Свароч. пр-во. 1983. № 4. С. 1–4.

[5]Шахматов М.В., Ерофеев В.В., Остсемин А.А. О некоторых особенностях метода линий скольжения при решении осесимметричных задач теории пластичности // Проблемы прочности. 1985. № 3. С. 88–94.

(см. рис. 1), подверженных осевой нагрузке (осесимметричное состояние), и на этой основе оценка влияния на их несущую способность их механических и геометрических параметров.

Система уравнений теории идеальной пластичности при осесимметричном деформировании на основе теории течения имеет вид:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\tau_{rz}}{r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0, \tag{2}$$

$$(\sigma_r-\sigma_\varphi)^2+(\sigma_\varphi-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2+6\tau_{rz}^2=6k^2, \tag{3}$$

$$\frac{\dfrac{\partial v_r}{\partial r}-\dfrac{v_r}{r}}{\sigma_r-\sigma_\varphi}=\frac{\dfrac{\partial v_z}{\partial z}-\dfrac{\partial v_r}{\partial r}}{\sigma_z-\sigma_r}=\frac{\dfrac{\partial v_r}{\partial z}+\dfrac{\partial v_z}{\partial r}}{2\tau_{rz}}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0, \quad r\neq 0. \tag{5}$$

Здесь σ_r – радиальное, σ_φ – кольцевое, σ_z – осевое нормальные напряжения, τ_{rz} – радиально-осевое касательное напряжение; v_r, v_φ и v_z – соответствующие (условные) скорости перемещений; (1) и (2) – уравнения равновесия (касательные напряжения $\tau_{\varphi r}$ и $\tau_{\varphi z}$ тождественно равны нулю, так как изгиб и кручение отсутствуют); (3) – условие текучести Мизеса, k – постоянная пластичности, $k=k^{\text{БП}}$ в более прочной (далее в автореферате БП) части стержня и $k=k^{\text{МП}}$ в МП слое; (4) – закон пропорциональности девиаторов скоростей деформаций и напряжений; (5) – условие сохранения объема пластического тела в процессе деформирования (условие несжимаемости). Величины v_r, v_φ и v_z определяются с точностью до постоянного множителя. Система (1) – (5) содержит шесть уравнений относительно шести неизвестных функций (двух независимых безразмерных переменных r и z) и, в этом смысле, замкнута. Искомые функции определены на осевом сечении части стержня, подверженной пластическому деформированию, и содержащей осесимметричный МП слой прямоугольного сечения (рис. 1), а также некоторые участки БП части, примыкающие к слою.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи.

1. Разработать математические модели НС цилиндрического (сплошного) соединения с МП поперечным *однородным* слоем в условиях осесимметричной деформации. Для этого:
2. Разработать аналитические методы приближенного решения задачи сопряжения для напряжений на контактной границе с целью нахождения недостающих краевых условий, для чего:

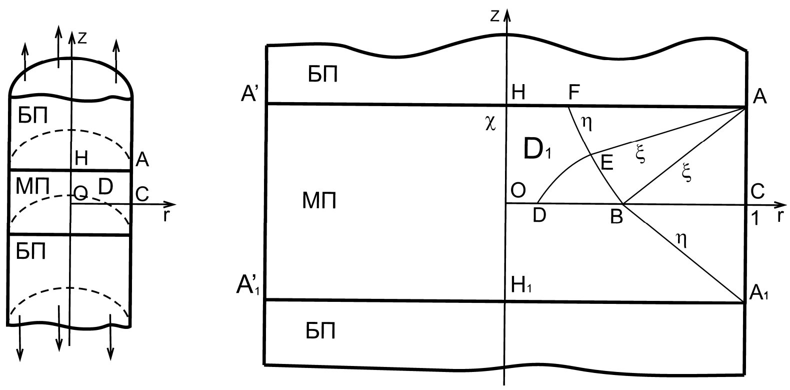

Рис. 1: Сплошной круглый стержень с поперечным МП слоем. Осевое сечение МП слоя

3. Исследуя систему (1) – (3) методами теории нелинейных уравнений гиперболического типа, вычислить для нее инварианты Римана;
4. На этой основе найти напряжения на контактной границе в окрестности свободной поверхности, в частности, определить наибольшую величину касательных и нормальных напряжений на контактной границе в критический момент нагружения как функцию внешних параметров;
5. Разработать аналитические методы приближенного решения недоопределенных краевых задач для системы уравнений пластического равновесия (1) – (3);
6. Разработать аналитические методы приближенного решения недоопределенных краевых задач для полной системы уравнений (1) – (5), моделирующих НДС в пластическом слое;
7. Разработать математические модели НС цилиндрического (сплошного) соединения с МП поперечным *неоднородным* слоем в условиях осесимметричной деформации, для чего решить перечисленные в пунктах 2 – 6 задачи в случае, когда в уравнении (3) параметр пластичности является переменным: $k = k(z)$.

Методика исследования.

В исследованиях, проводимых в диссертационной работе, использовался аппарат математической теории пластичности, применялись методы исследования нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа, а также возможности пакета MATLAB для проведения приближенных вычислений и численных экспериментов.

Научная новизна работы.

1. Новыми являются все полученные в работе аналитические выражения – зависимости компонент тензора напряжений от координат точек в различных случаях; зависимости критических осевых нагрузок от механических и геометрических параметров стержня и его МП поперечного слоя (в том числе неоднородного).

2. Впервые при исследовании НС МП однородного слоя сплошного стержня в процессе его пластического деформирования при осесимметричной деформации:
– введен и исследован ряд новых ММ НС однородного пластичного осесимметричного слоя, основанных на различных предположениях: гипотезы плоских поперечных сечений (далее в автореферате ГППС), гипотезы разделения переменных (далее в автореферате ГПР) для касательных напряжений и ее частных случаях;
– для анализа НС МП слоя использовалась гипотеза параболических сечений;
– удалось приближенно проинтегрировать методом инвариантов Римана систему уравнений, описывающую осесимметричное НС при ГППС;
– решена задача сопряжения на контактной границе для осесимметричного НС.
3. Впервые построены и исследованы ММ неоднородного осесимметричного слоя при небольшой механической неоднородности. При моделировании НС слоя с переменной прочностью по толщине впервые:
– найдены аппроксимации функции прочности слоя, при которых применима ГРП для касательных напряжений, и изучена ММ, при которой касательные напряжения в окрестности оси стержня меняются линейно в радиальном направлении;
– удалось приближенно проинтегрировать методом инвариантов Римана систему уравнений, описывающую осесимметричное НС неоднородного слоя при ГППС. На этой основе
– решена задача сопряжения на контактной границе для неоднородных сред.

Теоретическая ценность.

Обобщение метода разделения переменных на некоторые нелинейные уравнения в частных производных может быть полезно для получения точных и приближенных решений недоопределенных краевых задач для таких уравнений. Метод приближенного построения инвариантов Римана для уравнений осесимметричных задач теории пластичности, использованный в работе, можно применять и для других неоднородных уравнений гиперболического типа.

Практическая ценность.

Полученные результаты позволяют:

1. Определять прочность сварных соединений стержней арматуры при осевых нагрузках.

2. Определять разрушающие растягивающие нагрузки, действующие на стержневые образцы, содержащие прослойки из МП материала, исследуя на этой основе свойства материалов.
3. Внести изменения и дополнения в нормативные документы, регламентирующие условия производства и эксплуатации сварных конструкций.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на Всероссийских симпозиумах по прикладной и промышленной математике: VII (г. Кисловодск, 2006), VIII (г. Адлер, 2007), IX (г. Кисловодск, 2008), X (г. Санкт-Петербург 2009); Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения И.Н. Векуа "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения" (г. Новосибирск, 2007); Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы" (г. Стерлитамак, 2008); Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений" (г. Новосибирск, 2008); IX Международной летней научной школе-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (г. Казань, 2009); Научных конференциях ЮУрГУ: 57-ой (2005), 58-ой (2006), 59-ой (2007), 60-ой (2008), 61-ой (2009); на научном семинаре кафедры уравнений математической физики ЮУрГУ; на научном семинаре кафедры математических методов теории управления БГУ (г. Минск).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 14 работах, из них 4 – в изданиях, включенных в перечень ВАК. В работах [1], [5] – [8], [14] В.Л. Дильману принадлежит постановка задач и общее руководство, Т.В. Ерошкиной принадлежит вывод всех аналитических зависимостей, формулировки и доказательства всех утверждений, а также численные эксперименты. В работе [2] В.Л. Дильману принадлежит постановка задачи, А.А. Остсемин выполнил анализ нормативных документов, Т.В. Ерошкиной принадлежит вывод всех аналитических зависимостей. Все результаты, включенные в диссертацию, получены лично диссертантом.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы, включающего 88 наименований. Материал изложен на 103 страницах машинописного текста, включая 21 рисунок.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, определены цель, задачи и методы исследования, кратко изложено содержание диссертации.

В **первой главе** изучается НС МП поперечного однородного слоя сплошного круглого стержня под осевой растягивающей нагрузкой.

В **п. 1.1** строится и исследуется математическая модель НС МП слоя при ГППС

$$v_z = W(z). \tag{6}$$

При таком предположении система уравнений НДС слоя (1) – (5) заметно упрощается, приобретая вид:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = -\frac{\tau_{rz}}{r}; \tag{7}$$

$$\sigma_z - \sigma_r = \pm\sqrt{3}\sqrt{1-\tau_{rz}^2}; \tag{8}$$

$$\frac{3W'(z)}{\sigma_z - \sigma_r} = -\frac{rW''(z)}{2\tau_{rz}}; \quad v_r = -\frac{rW'(z)}{2}. \tag{9}$$

В качестве "модельного" используется приближенный вариант уравнения (8):

$$\sigma_z - \sigma_r = \sqrt{3}(1-\tau_{rz}^2/2). \tag{10}$$

Наряду с граничными условиями

$$\tau_{rz}(0,z) = 0, \quad \sigma_r(1,z) = 0, \quad \tau_{rz}(1;z) = 0, \quad \tau_{rz}(r;0) = 0, \tag{11}$$

на контактной границе имеют место внутренние граничные условия (условия сопряжения)

$$\sigma_z^{\text{МП}} = K\sigma_z^{\text{БП}}, \quad \tau^{\text{МП}} = K\tau^{\text{БП}}, \tag{12}$$

где $K = k^{\text{БП}}/k^{\text{МП}}$ – степень механической неоднородности соединения. Система (7) – (9) вместе с граничными условиями (11) и (12) является математической моделью НДС осесимметричного пластического слоя при осесимметричной деформации и ГППС (6).

В **п. 1.2** исследуется НС МП слоя в окрестности свободной границы методом характеристик. В **п. 1.2.2** система (7) – (8) записывается в матричной форме и в инвариантах Римана :

$$\frac{d(\sigma_r + \nu_i)}{dr} = -\frac{\tau\lambda_i}{r}, \quad i = 1;\ 2, \tag{13}$$

где λ_i – собственные числа матрицы системы, а ν_i – первообразная по τ_{rz} от λ_i. Приближенное интегрирование системы (13) приводит к зависимости на контактной поверхности между напряжениями σ_r и τ_{rz}:

$$\sigma_r + \nu_i - \tau_i\lambda_i \ln\frac{r_{\text{ср}}}{r} = 0,$$

где из геометрических соображений получено $r_{\text{ср}} = r + q(1-r), \quad q \approx 0,10...0,15$.

В **п. 1.2**, на основе результатов п. 1.2.2, решается задача сопряжения на контактной границе для напряжений τ_{rz} и σ_r, т. е. находятся их значения на отрезке FA в зависимости от параметров K и $\varkappa$. В **п. 1.2.4** на основе результатов предыдущего пункта получены зависимости координат точки F

(см. рис. 1) и значений $\sigma_z = \sigma_{zF}$ и $\tau_{rz} = \tau_F$ в этой точке от параметров K и $\varkappa$.

В **п. 1.3** дается полное описание и исследование математических моделей НС МП слоя при ГРП для касательных напряжений. Следствием применения ГРП $\tau = R(r)Z(z)$ к уравнению

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\partial^2(\tau^2)}{\partial r\partial z} + \frac{\partial^2\tau}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\tau}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\tau}{r}\right) = 0,$$

полученному исключением функций σ_r и σ_z из системы (7), (10), является уравнение

$$2\sqrt{3}\,R'Z' + Z''/Z - R''/R - (R/r)'/R = 0, \tag{14}$$

причем из (11) следуют условия

$$R(0) = 0; \quad Z(0) = 0. \tag{15}$$

В **п. 1.3.1** доказана лемма 2: *уравнение* (14) *не имеет решений, за исключением следующих частных вариантов. 1. Функция Z постоянна. 2. Функция Z линейна (не постоянна). 3. Функция R линейна.*

Первый вариант приводит к известным решениям Хилла и Ивлева [6], не удовлетворяющим граничным условиям (15). В **п. 1.3.2** и **п. 1.3.3** подробно исследуются модели, когда касательные напряжения изменяются линейно поперек МП слоя и, соответственно, в радиальном направлении (варианты 2 и 3, лемма 2). Во втором варианте функция R удовлетворяет уравнению

$$-\sqrt{3}R^2 + R' + R/r = 2A,$$

и условию $R(0) = 0$. Точное решение, представленное в виде суммы ряда, можно с точностью до тысячных при $0 \le z \le 0,5$; $0 < r \le 1$ аппроксимировать функцией

$$\tau = \frac{2z}{\sqrt{3}\,r}\,\ln\left(\frac{2}{2-\sqrt{3}\,Ar^2}\right),$$

причем параметр A находится по формуле

$$A = \frac{2\left(1-\exp(-\sqrt{3}\,r_F\tau_F/(2\varkappa))\right)}{\sqrt{3}\,r_F^2}.$$

Это позволяет интегрированием уравнений (7) получить решение в виде:

$$\left\{\begin{aligned} &\tau = \frac{2z}{\sqrt{3}r}\ln\left(\frac{2}{2-\sqrt{3}Ar^2}\right), \;\; r \neq 0;\\ &\sigma_z = -\frac{2Az^2}{2-\sqrt{3}Ar^2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{4-\sqrt{3}Ar^2}{4-\sqrt{3}Ar_F^2}\right) + \frac{2A\varkappa^2}{2-\sqrt{3}Ar_F^2} + \sigma_{zF};\\ &\sigma_r = -Az^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{4-\sqrt{3}Ar^2}{4-\sqrt{3}Ar_F^2}\right) + \frac{2A\varkappa^2}{2-\sqrt{3}Ar_F^2} + \sigma_{zF} - \sqrt{3}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

[6] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.

Решение (16) относится к случаю, когда нормальные напряжения σ_z, возрастающие при приближении к оси стержня, не достигают критических напряжений БП материала, равных величине $\sqrt{3}K$ (рис. 2, а), и распространяется на область $HFF'H'$.

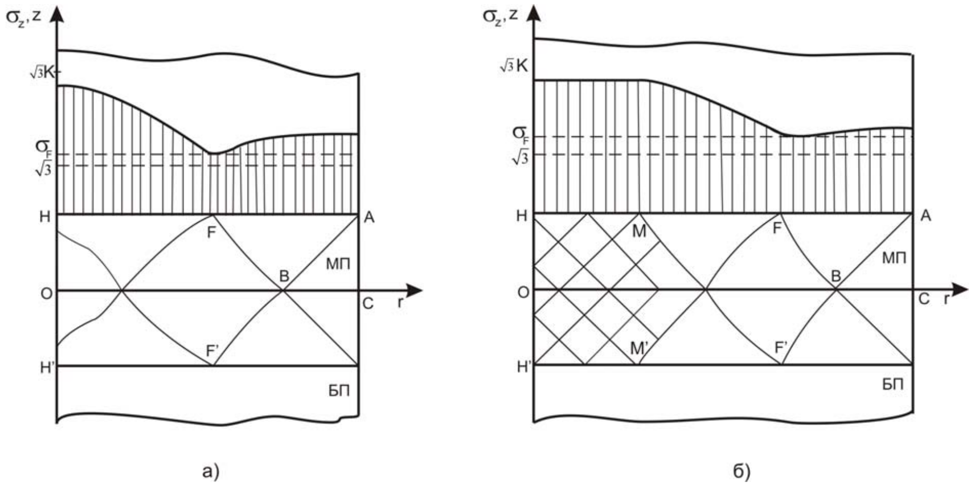

Рис. 2: Осевое сечение МП слоя и эпюра нормальных напряжений σ_z по контактной поверхности HA: а) первый случай – $\sigma_z < \sqrt{3}K$ всюду на контактной поверхности; б) второй случай – существует участок HM, на котором $\sigma_z = \sqrt{3}K$ (в области $HMM'H'$ НС простое равномерное)

В противном случае, когда в некоторой точке M контактной границы оказывается, что $\sigma_z = \sqrt{3}K$, напряженное состояние в МП слое между этой точкой и осью стабилизируется и становится простым равномерным (рис. 2, б). На участке HM напряжения постоянны ($\sigma_z = \sqrt{3}K$), на участке MF их можно описать уравнениями, аналогичными уравнениям (16), с другими константами, для определения которых необходимо найти точку M. Точка M находится из системы трансцендентных уравнений

$$\frac{\sqrt{3}}{2}A(r_F - r_M)^2 = y, \tag{17}$$

$$\sigma_{zF} = f(y, \varkappa) + \sqrt{3}K, \tag{18}$$

$$f(y, \varkappa) = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln\left(1 - \frac{y}{2}\right) - \frac{\varkappa^2}{1 - y} + \varkappa^2. \tag{19}$$

Аппроксимация функции (19) функцией

$$g(y, \varkappa) = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \varkappa^2\right) y \left(1 - 2(\varkappa^2 + 0,13)y\right)^{-1}$$

(с ошибкой в несколько тысячных при $0 \le y \le 0,5$) позволяет найти приближенное решение системы (17)–(19) и вычислить координату точки М:

$$r_M = r_F - \sqrt{\frac{\sqrt{3}K - \sigma_{zF}}{1/\sqrt{3} + \varkappa^2 + (\sqrt{3}K - \sigma_{zF})(2\varkappa^2 + 0,26)}}.$$

В третьем варианте леммы 2 функция Z удовлетворяет уравнению

$$Z'' - Z'Z = 0.$$

Его общее решение легко находится, что в первом случае (рис. 2, а) приводит к решению

$$\left\{\begin{aligned} \tau &= \frac{\sqrt{3}}{6} A r \operatorname{th}\left((1/2)Az\right); \\ \sigma_z &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\operatorname{ch}\left((1/2)Az\right)}{\operatorname{ch}\left((1/2)A\varkappa\right)}\right| - \frac{\sqrt{3}A^2r^2}{24} + \frac{\sqrt{3}A^2r_F^2}{24} + \sigma_{zF}; \\ \sigma_r &= -\frac{\sqrt{3}A^2r^2}{24\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{3}Az\right)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\operatorname{ch}\left((1/2)Az\right)}{\operatorname{ch}\left((1/2)A\varkappa\right)}\right| + \frac{\sqrt{3}A^2r_F^2}{24} + \sigma_{zF} - \sqrt{3}. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Параметр A вычисляется по формуле

$$A = 2\sqrt[4]{3}\sqrt{\frac{\tau_F}{\varkappa r_F}\left(1 + \frac{3\tau_F\varkappa}{4r_F}\right)}.$$

Во втором случае (рис. 2, б) получена формула:

$$\sigma_z(r,\varkappa) = -\frac{\sqrt{3}}{24}A^2\left(r - r_F + \sqrt{\frac{(\sqrt{3}K - \sigma_{zF})8\sqrt{3}}{A^2}}\right)^2 + \sqrt{3}K, \quad r_M \le r \le r_F,$$

причём r_M легко находится.

В **п. 1.4** исследуется математическая модель НДС МП слоя на основе системы уравнений (7) – (9). Показано, что при некоторых упрощающих предположениях, несущественных при небольшой механической неоднородности соединения, этот вариант сводится к варианту из п.1.3.3. Найдены скорости смещений точек слоя в осевом и радиальном направлениях

$$v_z = W(z) = \frac{C}{A}\operatorname{th}\left(\frac{Az}{2}\right), \quad v_r = -\frac{rW'(z)}{2} = -\frac{Cr}{4\operatorname{cth}^2(Az/2)}, \quad C = \frac{AW(\varkappa)}{\operatorname{th}(A\varkappa/2)}.$$

В **п.1.5** на основе результатов п. 1.3 получены зависимости критической нагрузки от параметров K и $\varkappa$ в графической форме и в виде простых аналитических выражений, аппроксимирующих точные решения. Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными показано на рис. 3: линии – теоретическая зависимость: 1 – модель работы[7]; 2 – модель автора, когда касательные напряжения изменяются линейно в радиальном направлении; 3 – модель автора, когда касательные напряжения в слое изменяются

[7] Дильман В.Л. Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек. – Челябинск: изд-во ЮУрГУ, 2007. – 202 с.

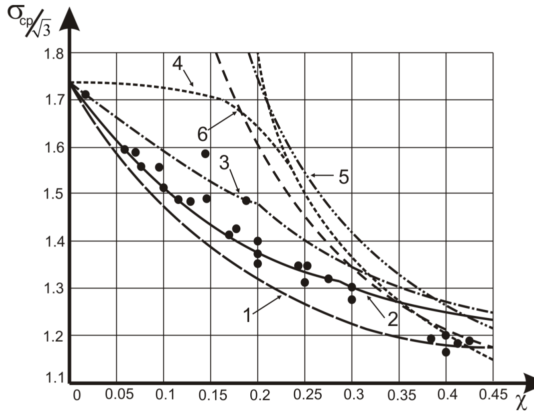

Рис. 3: Зависимость критической нагрузки от относительной толщины МП слоя, $K = 1,74$

линейно в осевом направлении; 4 – зависимость из работы[8]; 5 – из работы[9] ; 6 – по формуле работы[10]. Точки – экспериментальные данные из работы[11].

В **п. 1.6** исследуется математическая модель НДС МП слоя на основе системы уравнений (7) – (9) при гипотезе параболических сечений (далее в автореферате ГПарС) $\upsilon_z = W(z)(1 + \delta r^2)$. Вычислены компоненты тензора напряжений и скорости деформаций. Сравнением аналитических выражений и численными экспериментеми показано, что замена ГППС на ГПарС при малых значениях δ (например, при $\delta < 0,1...0,3$) не оказывает существенного влияния на величину напряжений в критическом состоянии материала и величину скоростей смещений.

В **главе 2** изучается НС МП поперечного неоднородного слоя сплошного круглого стержня под осевой растягивающей нагрузкой. Предполагается, что параметр $k^{\text{МП}}$ зависит от координаты z: $k^{\text{МП}} = T(z)k_0, z \in [-\varkappa; \varkappa]$, причем T – выпуклая вверх или вниз четная дифференцируемая функция, т. е. уравнение (8) заменяется на уравнение

$$\sigma_z - \sigma_r = \pm\sqrt{3}\sqrt{T^2(z) - \tau_{rz}^2}. \tag{21}$$

В **п.2.2** исследуется НС МП слоя в окрестности свободной границы методом характеристик. В **п. 2.2.1** система (7) – (8) записывается в инвариантах Римана

$$\frac{\partial(\sigma_r + \nu_i)}{\partial r}\frac{dr}{dz} + \frac{\partial(\sigma_r + \nu_i)}{\partial z} = \frac{\partial \nu_i}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\tau_{rz}}{r}, \quad i = 1; 2.$$

Оценка правых частей этих уравнений и замена их на более простые выражения позволила в **п. 2.2.2** приближенно проинтегрировать эти выражения.

---

[8] Satoh K., Toyoda M. Joint strength of heavy plastics with lower strength weld metal // Welding Jornal. Sept. 1975. № 9. P. 311–319.

[9] Бакши О.А., Качанов Л.М. О напряженном состоянии пластической прослойки ... С. 134–137.

[10] Даунис М.А., Браженас А.П. Сопротивление деформированию и разрушению механически неоднородных сварных соединений при однократном нагружении// Проблемы прочности. 1979. № 12. С. 53–58.

[11] Satoh K., Toyoda M. Joint strength of heavy plastics ... P. 311–319.

На этой основе в **п. 2.3** вычислены зависимости касательных и нормальных напряжений на контактной поверхности на участке FA.

В **п. 2.4** исследуются математические модели НС МП слоя с переменной по толщине прочностью в окрестности оси стержня при ГРП. Задача сводится к исследованию дифференциального уравнения

$$\sqrt{3}R'\frac{(Z^2/T)'}{Z}+\frac{Z''}{Z}-\frac{R''}{R}-\frac{(R/r)'}{R}=0, \qquad (22)$$

которое обобщает уравнение (14) из гл. 1. В **п. 2.4.1** доказана лемма 3: *уравнение (22) при условиях (15) не имеет решений, за исключением следующих частных вариантов. 1. Функция R линейна. 2. Функция T имеет вид $T=\cos^2(\mu z/2)$, а функция $Z=\sin(\mu z)$. 3. Функция T имеет вид $T=\mathrm{ch}^2(\mu z/2)$, а функция $Z=\mathrm{sh}(\mu z)$. Здесь μ – произвольная положительная постоянная.*

В **п. 2.4.2** исследуется НС МП слоя с переменной по толщине прочностью, когда касательные напряжения изменяются линейно в радиальном направлении (п. 1 леммы 3). Тогда для некоторой постоянной C

$$T=\frac{\sqrt{3}Z^2}{C-Z'},\ \ Z(0)=0. \qquad (23)$$

Решение уравнения (23) для нахождения Z затруднительно даже для самых простых аппроксимаций T неоднородности МП слоя. В работе использован полуобратный метод, при котором для Z выбирается "естественная" аппроксимация с не менее чем тремя параметрами. В работе для Z принята степенная зависимость. Получены явные формулы для вычисления T, а также нормальных напряжений в каждом из случаев, когда σ_z в МП слое либо достигают, либо не достигают значения напряжений в БП части, равного $\sqrt{3}KK_{\text{сл}}$. На этой основе в **п. 2.5** получены аналитические выражения для вычисления критических нагрузок в зависимости от значений трех параметров K, $K_{\text{сл}}$ и $\varkappa$, имеющие очень громозкий вид. Поэтому они представлены в виде поверхностей (при фиксированных значениях $K_{\text{сл}}$) (рис. 4). Сравнение

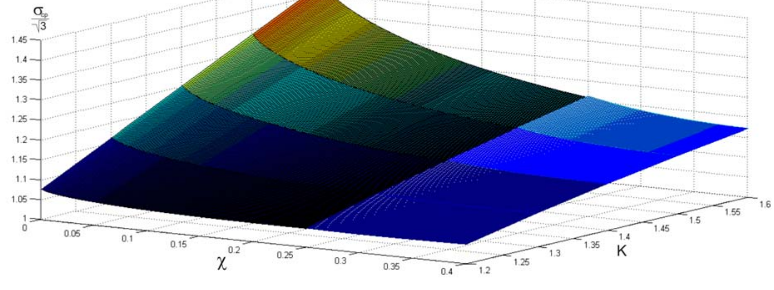

Рис. 4: Зависимость $\sigma_{\text{ср}}/\sqrt{3}$ от $\varkappa$ и K при $K_{\text{сл}}=0,9$

полученных результатов с экспериментальными данными показано на рис. 5.

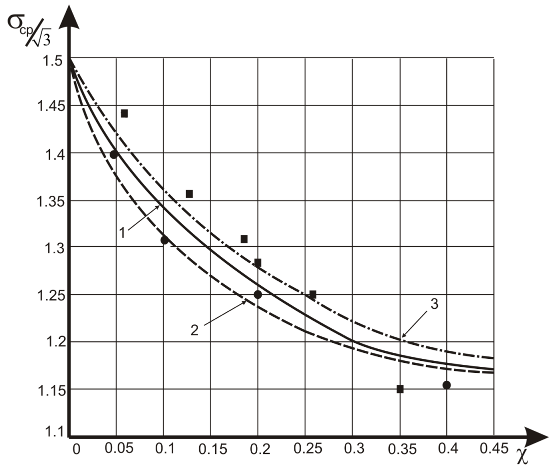

Рис. 5: Зависимость $\sigma_{\text{ср}}/\sqrt{3}$ от $\varkappa$. 1 – при $K = 1,5$, однородный слой (гл. 1); 2 – при $KK_{\text{сл}} = 1,5$, $K_{\text{сл}} = 0,8$; 3 – при $KK_{\text{сл}} = 1,5$, $K_{\text{сл}} = 1,2$

Точки – экспериментальные данные из работы[12]. Квадратики – экспериментальные данные из работы[13]. Видно, что отклонения этих результатов друг от друга находятся в пределах точности приведенных экспериментальных данных. Это может объясняться некоторыми (незначительными) отклонениями прочности МП слоев в использованных в экспериментах образцах от прочности однородных. Поэтому полученные результаты могут быть основой для постановки новых экспериментов.

Основные результаты диссертационной работы

1. Решены аналитическими методами задачи сопряжения для напряжений на контактной границе между различными пластическими средами, в том числе неоднородными.
2. Получены аналитическими методами решения недоопределенных краевых задач, моделирующих НДС в осесимметричном пластическом слое, как однородном, так и неоднородном, при гипотезе плоских поперечных сечений.
3. Найдены силовые критерии потери несущей способности сплошных стержней с поперечным менее прочным слоем, в том числе неоднородным, в форме аналитических зависимостей критических напряжений от механических и геометрических параметров, а также в форме программ в пакете MATLAB.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 05-08-18179).

[12] Satoh K., Toyoda M. Joint strength of heavy plastics ... P. 311–319.

[13] К вопросу о расчетной прочности составных образцов с мягкой прослойкой при статическом растяжении/ А.В. Гурьев, В.П. Багмутов, Ю.Д. Хесин, Л.В. Бойков // Проблемы прочности. 1973. №1. С. 9–13.

Публикации по теме диссертации

Статьи, опубликованные в научных журналах из списка ВАК

1. Дильман В.Л., Ерошкина Т.В. Математические модели напряженного состояния пластического слоя с сечением в форме кольцевого сектора // Вест. ЮУрГУ. Серия "Математика, физика, химия". 2006. Вып. 7. №7(62). С.13–21.
2. Дильман В.Л., Остсемин А.А., Ерошкина Т.В. Прочность механически неоднородных сварных соединений стержней арматуры // Вестник машиностроения. 2008. №9. С. 13–17.
3. Ерошкина Т.В. Напряженное состояние поперечной мягкой прослойки в растягиваемом круглом стержне при гипотезе параболических сечений // Обозрение прикл. и пром. математики. 2007. Т. 14, вып. 1. С. 109–110.
4. Ерошкина Т.В. Особенности моделирования предельной осевой нагрузки неоднородного сплошного стержня // Обозрение прикл. и пром. математики. 2009. Т. 16, вып. 2. С. 325–326.

Другие публикации

5. Дильман В.Л., Ерошкина Т.В. Об одной модели, описывающей напряженное состояние в круглом стержне // Обозрение приклад. и пром. математики. 2004. Т. 11, вып. 2. С. 793–794.
6. Дильман В.Л., Ерошкина Т.В. Об одной математической модели напряженного состояния пластического слоя при плоской деформации // Вест. ЮУрГУ. Серия "Математика, физика, химия". 2005. Вып. 6. №6. С. 19–23.
7. Дильман В.Л., Ерошкина Т.В. Математические модели осесимметричного напряженного состояния при гипотезе разделения переменных для касательных напряжений // Изв. Челяб. науч. центра. 2006. Вып. 2(32). С. 1–4.
8. Дильман В.Л., Ерошкина Т.В. Напряженное состояние продольной мягкой прослойки, с сечением в форме кольцевого сектора, в тонкостенной цилиндрической оболочке // Обозрение прикл. и пром. математики. 2006. Т. 13, вып. 4. С. 637–638.
9. Ерошкина Т.В. Математические модели напряженного состояния пластичной прослойки в сплошном цилиндре // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения: междунар. конф., посвященная 100-летию со дня рождения акад. И. Н. Векуа (Новосибирск, 28 мая – 2 июня 2007 г.): тез. докл. Новосибирск, 2007 г. С. 136–137.

10. Ерошкина Т.В. Анализ математических моделей напряженно-деформированного состояния продольной мягкой прослойки, с сечением в форме кольцевого сектора, в цилиндрической оболоке // Обозрение прикл. и пром. математики. 2007. Т. 14, вып. 4. С. 708–709.
11. Ерошкина Т.В. Напряженное состояние мягкой поперечной прослойки в круглом стержне // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: тр. междунар. конф. (24 – 28 июня 2008 г., Стерлитамак). Уфа: Гилем, 2008. Т. III. С. 201-205.
12. Ерошкина Т.В. Исследование аналитическими методами напряженно-деформированного состояния неоднородного пластического круглого стержня // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Междунар. конф., посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 5 – 12 октября 2008 г.): тез. докл. Новосибирск, 2008 г. С. 486.
13. Ерошкина Т.В. Математические модели напряженного состояния неоднородного сплошного цилиндра при его растяжении // Тр. математ. центра им. Лобачевского. Казань: изд-во КГУ, 2009. Т. 38. С. 121 – 123.
14. Дильман В.Л., Ерошкина Т.В. Исследование математических моделей напряженного состояния неоднородного поперечного слоя в круглом стержне // Вест. ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". 2009. Вып. 4. № 37(170). С. 65–77.

Подписано в печать 13.01.2010
Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0.
Бумага офсетная. Тираж 100 экз.
Издательство Южно-Уральского государственного университета
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76