

На правах рукописи



Дыльков Андрей Геннадьевич

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
РЕШЕНИЯМИ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**05.13.18 — математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ**

**Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Челябинск — 2012

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный университет».

Научный руководитель

кандидат физико-математических наук,
доцент Манакова Наталья Александровна.

Официальные оппоненты:

Карачик Валерий Валентинович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский
государственный университет» (НИУ),
профессор кафедры математического анализа;
Сукачева Тамара Геннадьевна,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВПО «Новгородский государственный
университет им. Ярослава Мудрого»,
профессор кафедры алгебры и геометрии.

Ведущая организация

ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный
университет».

Защита состоится 12 декабря 2012 года в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ), по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Автореферат разослан «__» _____ 2012 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, доцент



А.В. Келлер

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Высокий темп развития современных технологий приводит к необходимости исследования физических процессов, возникающих в технике и производстве, что предполагает построение адекватных математических моделей и их дальнейшее изучение¹. Моделируемые процессы, как правило, управляемы, а потому естественным образом возникает вопрос о нахождении наилучшего в том или ином смысле — оптимального управления.

Данное диссертационное исследование находится на стыке трех областей математического знания — теории уравнений соболевского типа, теории дифференциальных уравнений на геометрических графах и теории оптимального управления. В настоящее время задачи оптимального управления для неклассических моделей математической физики появляются в приложениях все чаще, однако, в силу отсутствия общего метода решения таких задач, результатов в этой области в современной математической литературе немного, причем большинство из них получены для конечномерного случая.

Линейные уравнения соболевского типа активно исследуются как в России, так и за рубежом. Систематическое изучение таких уравнений начал С.Л. Соболев в 40-х годах прошлого столетия. Уравнения, неразрешенные относительно производных, рассматривали в своих работах С.Г. Крейн, В.Н. Врагов, Г.В. Демиденко, С.Г. Пятков, А.И. Кожанов, И.В. Мельникова, Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев, М.О. Корпусов, А.Г. Свешников, A. Favini, A. Yagi, J.H.A. Lightbourne, R.E. Showalter и др. Исследованиям начальных задач для вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений посвящены работы Ю.Е. Бояринцева, В.Ф. Чистякова, М.В. Булатова и др. Данная диссертационная работа выполнена в рамках направления, возглавляемого Г.А. Свиридюком².

Основоположителем теории дифференциальных уравнений на гра-

¹Оптимальные технологические решения для каталитических процессов и реакторов / С.А. Мустафина, Ю.А. Валиева, Р.С. Давлетшин, А.В. Балаев, С.И. Спивак // Кинетика и катализ. — 2005. — Т. 46, № 5. — С. 749–756.

²*Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Utrecht; Boston; Köln: VSP, 2003. — 216 pp.*

фах в России является Ю.В. Покорный³. Дифференциальные уравнения на геометрических графах изучали в своих работах также А.И. Шафаревич, J.K. Hale, S. Kosugi, E. Yanagida и др. Уравнения соболевского типа на графе впервые стал рассматривать Г.А. Свиридюк, исследование таких задач было продолжено его учениками.

В области теории оптимального управления широко известны работы А.В. Фурсикова, Г.А. Куриной, А.А. Щегловой, J.-L. Lions, P.C. Müller, L. Pandolfi, S.L. Campbell, W.J. Terrell и др. Задачи оптимального управления для уравнений соболевского типа впервые начали рассматривать Г.А. Свиридюк и А.А. Ефремов. В дальнейшем такого рода задачи изучались в работах А.В. Келлер, В.Е. Федорова, Н.А. Манакowej, М.В. Плехановой, А.А. Замышляевой, и др.

В связи с вышесказанным, считаем актуальным рассматривать следующие задачи. Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ — множество ребер; причем каждое его ребро E_j имеет длину $l_j \in \mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbb{R}_+$. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} x_j(t, 0) = x_k(t, 0) = x_m(t, l_m) = x_n(t, l_n), \\ E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), \quad E_m, E_n \in E^\omega(V_i), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(t, 0) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k x_{ks}(t, l_k) = 0, \quad (2)$$

где $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ — множество ребер с началом (концом) в вершине V_i , для: — линейных уравнений Хоффа⁴

$$\lambda_j x_{jt} + x_{jtss} = \alpha_j x_j + u_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}_+, \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

— линейных уравнений Дзекцера⁵

$$\lambda x_{jt} - x_{jtss} = \beta x_{jss} - \alpha x_{jsss} + \gamma x_j + u_j, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

³Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 272 с.

⁴*Hoff N.J.* Creep Buckling // *Aeronautic Quarterly*. — 1956. — Vol. 7, № 1. — P. 1–20.

⁵*Дзекцер Е.С.* Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // Докл. АН СССР. — 1972. — Т. 202, № 5. — С. 1031–1033.

Уравнения (3), заданные на графе, моделируют динамику выпучивания двутавровых балок в конструкции. Здесь функции $x_j = x_j(t, s)$ показывают отклонение балок от вертикали; параметры $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ характеризуют нагрузку и свойства материала балок соответственно.

Уравнения (4), заданные на графе, моделируют эволюцию свободной поверхности жидкости, фильтрующейся в пластах ограниченной мощности. Здесь функции $x_j(t, s)$ — напор на подошве j -го пласта.

Разрешимость начально-краевых задач для уравнений Хоффа и Дзекцера и другие связанные с этими уравнениями вопросы исследовались в работах Г.А. Свиридюка и его учеников В.О. Казака, Н.А. Мамаковой, С.А. Загребинной, П.О. Пивоваровой, А.А. Баязитовой и др.

Нас будут интересовать решения задач (1) — (3) и (1), (2), (4), удовлетворяющие *начально-конечным условиям*⁶

$$P_{in}(x(0) - x_0) = 0, \quad P_{fin}(x(\tau) - x_\tau) = 0, \quad (5)$$

где P_{in}, P_{fin} — относительно спектральные проекторы, которые будут определены далее, а пара вектор-функций (x, u) должна минимизировать некоторый специальным образом построенный функционал, который мы будем называть *функционалом качества*, т. е.

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad},$$

где $\mathfrak{U}_{ad}$ — замкнутое и выпуклое подмножество допустимых управлений в пространстве управлений $\mathfrak{U}$.

Физический смысл задачи оптимального управления для линейной модели Хоффа заключается в том, чтобы конструкция из двутавровых балок с минимальными затратами на управление приняла требуемую форму. Для линейной модели Дзекцера физический смысл задачи оптимального управления — эффективное регулирование потоков грунтовых вод в системе пластов.

Цель работы — исследование математических моделей оптимального управления решениями начально-конечной задачи для процессов, описываемых линейными уравнениями Хоффа и Дзекцера, заданными

⁶ Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно p -секториальными операторами // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 12. — С. 1646–1652.

на графе, с последующей разработкой алгоритма численного метода решения изучаемых задач.

Для достижения данной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Исследовать математическую модель оптимального изменения формы двутавровых балок в конструкции как задачу оптимального управления решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений Хоффа на графе.

2. Исследовать математическую модель оптимального регулирования потоков грунтовых вод в системе пластов как задачу оптимального управления решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений Дзекцера на графе.

3. Показать существование единственного сильного решения, а также существование единственного оптимального управления решениями начально-конечной задачи для линейного неоднородного уравнения соболевского типа.

4. Разработать и реализовать в виде комплекса программ алгоритм численного метода решения поставленных задач и провести вычислительный эксперимент.

Научная новизна. При исследовании математических моделей оптимального управления решениями начально-конечной задачи для процессов, описываемых линейными уравнениями Хоффа и Дзекцера, заданными на графе, показано существование единственного сильного решения, а также существование единственного оптимального управления решениями начально-конечной задачи для линейного неоднородного уравнения соболевского типа в случаях относительно p -ограниченного и относительно p -секториального операторов. Получены необходимые условия оптимальности управления. Разработан и реализован с помощью комплекса программ для ЭВМ алгоритм численного метода решения поставленных задач.

Методы исследования. В работе используются методы математического моделирования, методы теории оптимального управления, теории уравнений соболевского типа (метод фазового пространства⁷), тео-

⁷Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 2. — С. 250–258.

рии вырожденных (полу)групп операторов, а также метод Галеркина, лежащий в основе вычислительных экспериментов.

Теоретическая значимость. Результаты, представленные в диссертации, полученные при изучении математических моделей оптимального управления, основанных на уравнениях Хоффа и Дзекцера, развивают теории уравнений соболевского типа, дифференциальных уравнений на графах и оптимального управления. Данные результаты могут быть использованы для дальнейшего качественного и численного исследования других неклассических моделей математической физики.

Практическая значимость заключается в применении результатов исследований при изучении напряженных деформированных состояний упругих балок и решении задач гидромеханики. Разработанный комплекс программ позволяет проводить вычислительные эксперименты по определению оптимального управления в рассматриваемых моделях.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, были представлены на всероссийском научном семинаре «Неклассические уравнения математической физики» (Якутск, 2010), всероссийской научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Самара, 2011), воронежской весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 2011), международной конференции «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко (Новосибирск, 2011), международной конференции, посвященной памяти В.К. Иванова, «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» (Екатеринбург, 2011), международной научно-практической конференции «Измерения: состояние, перспективы развития» (Челябинск, 2012).

Результаты докладывались на семинарах по уравнениям соболевского типа профессора Г.А. Свиридюка в Южно-Уральском государственном университете (г. Челябинск), семинаре кафедры прикладной математики и вычислительной техники Магнитогорского государственного университета под руководством профессора С.И. Кадченко (г. Магнитогорск) и семинаре кафедры математического моделирования Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета под

руководством профессора С.А. Мустафиной (г. Стерлитамак).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 9 научных работах, в их числе 3 статьи в ведущих российских рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК, и свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ. Список работ приводится в конце автореферата. В совместных с научным руководителем работах, последнему принадлежит постановка задачи. В диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 114 страниц. Список литературы содержит 105 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, определяется цель работы, описаны методы исследования, теоретическая и практическая значимость проведенного исследования, дается обзор литературы по исследуемой проблематике.

Первая глава носит пропедевтический характер, состоит из пяти параграфов и не содержит результатов, полученных автором. В п. 1.1 приведены необходимые сведения из теории вырожденных разрешающих групп операторов, сформулированы следующие условия:

(A1) оператор M (L, p) -ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$,

(A2) L -спектр оператора M представим в виде

$$\sigma^L(M) = \sigma_{in}^L(M) \cup \sigma_{fin}^L(M), \quad \sigma_{in}^L(M) \cap \sigma_{fin}^L(M) = \emptyset,$$

необходимые для получения основных результатов работы. В п. 1.2 приведены необходимые сведения из теории вырожденных разрешающих полугрупп операторов, сформулированы следующие условия:

(B1) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$,

(B2) существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1)$,

(B3) оператор M (L, p) -секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\sigma^L(M) = \sigma_{in}^L(M) \cup \sigma_{fin}^L(M)$, причем $\sigma_{fin}^L(M)$ содержится в ограниченной области Ω с кусочно гладкой границей γ и $\gamma \cap \sigma^L(M) = \emptyset$, необходимые в дальнейшем при получении результатов работы.

В п. 1.3 приведена абстрактная начально-конечная задача для линейного неоднородного уравнения соболевского типа. В п. 1.4 содержатся необходимые сведения об относительной резольвенте гильбертового сопряженного оператора. В п. 1.5 рассмотрена задача Штурма – Лиувилля на графе.

Вторая глава состоит из шести параграфов и посвящена изучению математической модели оптимального изменения формы двутавровых балок в конструкции как задачи оптимального управления решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений Хоффа на графе.

П. 2.1 содержит описание изучаемой математической модели (1) – (3), (5) на графе $\mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$. Введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$ со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j ds,$$

банахово пространство $\mathfrak{X} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots) : x_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ и выполнено (1)}\}$. Обозначим через $\mathfrak{Y}$ сопряженное к $\mathfrak{X}$ относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространство. Зададим операторы

$$\langle Lx, y \rangle = \sum_j d_j \int_0^{l_j} (\lambda_j x_j y_j - x_{js} y_{js}) ds, \quad \langle Mx, y \rangle = \sum_j \alpha_j d_j \int_0^{l_j} x_j y_j ds.$$

По построению $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$.

Показано, что для введенных функциональных пространств и операторов L, M выполняются условия (A1), (A2), поэтому изучаемую модель (1) – (3), (5) можно рассматривать в рамках абстрактной начально-конечной задачи, т. е. линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + f, \tag{6}$$

где оператор M ($L, 0$)-ограничен, с начально-конечными условиями (5), которые в данной ситуации примут вид

$$\sum_{\mu_k \in \sigma_{in}^L(M)} \langle (x(0) - x_0), \varphi_k \rangle \varphi_k = 0, \quad \sum_{\mu_k \in \sigma_{fin}^L(M)} \langle (x(\tau) - x_\tau), \varphi_k \rangle \varphi_k = 0. \tag{7}$$

Здесь φ_k – собственные функции оператора L , образующие ортонормированный базис пространства $\mathfrak{X}$.

В п. 2.2 доказаны существование и единственность сильного решения абстрактной начально-конечной задачи в случае (L, p) -ограниченного

оператора M , а также существование и единственность сильного решения начально-конечной задачи для линейной модели Хоффа на графе.

Определение 1. Вектор-функцию $x \in H^1(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0, \tau; \mathfrak{X}) : \dot{x} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{X})\}$ назовем *сильным решением уравнения* (6), если она почти всюду на $(0, \tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (6) назовем *сильным решением начально-конечной задачи*, если оно удовлетворяет (5).

Теорема 1 (2.2.1)⁸. Пусть выполнены условия (A1), (A2). Тогда для любых $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и $f \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение задачи (5), (6).

Теорема 2 (2.2.2). При любых $\lambda_j \in \mathbb{R}_+, \alpha_j \in \mathbb{R}, \alpha_j \neq 0$ при любом j и все α_j одного знака, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}, u \in H^1(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение $x \in H^1(\mathfrak{X})$ задачи (1) – (3), (7).

В п. 2.3 рассмотрена абстрактная задача оптимального управления

$$L\dot{x} = Mx + y + Bu, \quad (8)$$

$$J(x, u) \rightarrow \min, \quad u \in H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U}) \quad (9)$$

с начально-конечными условиями (5), где функции x, y и u лежат в гильбертовых пространствах $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$ соответственно, оператор $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U})$ — замкнутое и выпуклое подмножество в гильбертовом пространстве управлений

$$H^{p+1}(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2(0, \tau; \mathfrak{U}) : u^{(p+1)} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{U}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\},$$

а функционал качества $J(x, u)$ определяется соотношением

$$J(x, u) = \mu \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \|z^{(q)} - z_0^{(q)}\|_{\mathfrak{Z}}^2 dt + \nu \sum_{q=0}^k \int_0^\tau \langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \rangle_{\mathfrak{U}} dt, \quad (10)$$

где $\mu, \nu \geq 0, \mu + \nu = 1, 0 \leq k \leq p + 1, N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), q = 0, 1, \dots, k$ — самосопряженные и положительно определенные операторы, z_0 — плановое наблюдение из некоторого гильбертова пространства наблюдений $\mathfrak{Z}$, оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Z})$ задает наблюдение $z(t) = Cx(t)$.

Определение 2. Пару $(\hat{x}, \hat{u}) \in H^1(\mathfrak{X}) \times H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U})$ назовем *решением задачи оптимального управления* (5), (8), (9), если

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \min_{(x, u) \in H^1(\mathfrak{X}) \times H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U})} J(x, u),$$

⁸В скобках указана нумерация в диссертации.

где пары $(x, u) \in H^1(\mathfrak{X}) \times H^{p+1}_{\partial}(\mathfrak{U})$ удовлетворяют соотношениям (5), (8); вектор-функцию $\hat{u}$ назовем *оптимальным управлением решениями задачи* (5), (8).

Теорема 3 (2.3.1). Пусть выполнены условия (A1), (A2). Тогда для любых $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0, x_{\tau} \in \mathfrak{X}$ существует единственное решение задачи оптимального управления (5), (8), (9).

Теорема 4 (2.3.2). При любых $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ одного знака, $x_0, x_{\tau} \in \mathfrak{X}$, $u \in H^1_{\partial}(\mathfrak{U})$ существует единственное решение задачи оптимального управления (1) – (3), (7), (9).

В п. 2.4 строится сопряженная к (5), (8) задача

$$-L^*\dot{\xi} = M^*\xi + \mu C^*\Lambda(Cx(t, u) - z_0), \quad P_{in}^*\xi(\tau) = 0, \quad P_{fin}^*\xi(0) = 0. \quad (11)$$

Теорема 5 (2.4.2). Пусть выполнены условия (A1), (A2) и $p = 0$. Тогда при любых $y \in H^1(\mathfrak{Y})$ и $z_0 \in H^1(\mathfrak{Z})$ оптимальное управление $\hat{u} \in H^1_{\partial}(\mathfrak{U})$ решениями задачи (5), (8) удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} &\langle \Lambda_{\mathfrak{U}}^{-1} B^* \xi(t, \hat{u}), u(t) - \hat{u}(t) \rangle_{H^1(\mathfrak{Z})} + \\ &+ \nu \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \langle N_q \hat{u}^{(q)}(t), u^{(q)}(t) - \hat{u}^{(q)}(t) \rangle_{\mathfrak{U}} dt \geq 0, \quad \forall u \in H^1_{\partial}(\mathfrak{U}), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\xi(t, \hat{u}) \in H^1(\mathfrak{Y}^*)$ – решение задачи (11).

В п. 2.5 содержится описание алгоритма численного метода и комплекса программ, написанного в вычислительной среде Maple и предназначенного для нахождения приближенного численного решения исследуемой задачи оптимального управления для линейной модели Хоффа на графе.

В п. 2.6 содержатся результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующие работу комплекса программ. Рассмотрены примеры нахождения решений исследуемой задачи оптимального управления для линейной модели Хоффа на отрезке и двухреберном графе.

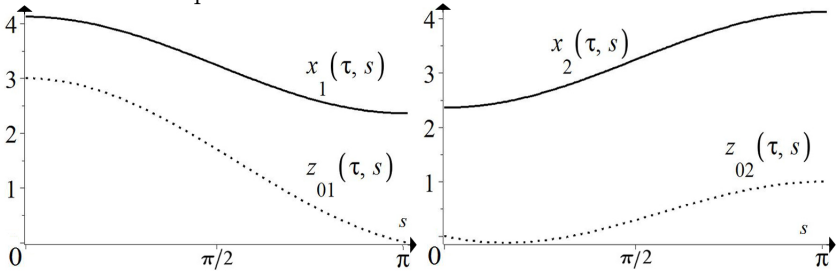
Пример 1 (2.6.2). Требуется найти решение задачи (1) – (3), (7), (9) на графе $\mathbf{G}$, состоящем из двух последовательно соединенных ребер и трех вершин, при заданных коэффициентах $\alpha_1 = -0,5$, $\alpha_2 = -0,6$, $\lambda_{1,2} = 1$, $\tau = 1$, $d_1 = 0,1$, $d_2 = 0,2$, $l_{1,2} = \pi$, функционал в (9) определяется соотношением (10), где $\mu = \nu = \frac{1}{2}$, $C = \mathbb{I}$, $N_q = \mathbb{I}$, плановые наблюдения $z_{01} = 1 + \cos(s) + \cos(s/2)$, $z_{02} = 1 - \cos(s) - \sin(s/2)$.

Для примера 1 получены следующие результаты:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0,28t - 0,01 + 0,32e^{-0,75t+0,21} + 4,73e^{-0,54t} + (0,93 - 0,09t + \\
&+ 0,04t^2 - 0,08e^{-0,75t+0,21} + 0,08e^{-0,54t}) \cos(s) + (-0,02 + 0,02t - \\
&- 0,02t^2 - 2,05e^{-0,75t+0,21} - 2,05e^{-0,54t} + 0,01e^{-0,75t+0,75}) \cos(s/2), \\
x_2 &= 0,28t - 0,01 + 0,32e^{-0,75t+0,21} + 4,73e^{-0,54t} - (0,93 - 0,09t + \\
&+ 0,04t^2 - 0,08e^{-0,75t+0,21} + 0,08e^{-0,54t}) \cos(s) - (-0,02 + 0,02t - \\
&- 0,02t^2 - 2,05e^{-0,75t+0,21} - 2,05e^{-0,54t} + 0,01e^{-0,75t+0,75}) \sin(s/2), \\
u_1 &= 0,28 + 0,15t + (0,52 - 0,06t + 0,02t^2) \cos(s) + (0,01 - 0,03t - \\
&- 0,01t^2) \cos(s/2), \\
u_2 &= 0,28 + 0,15t - (0,52 - 0,06t + 0,02t^2) \cos(s) - (0,01 - 0,03t - \\
&- 0,01t^2) \sin(s/2),
\end{aligned}$$

где $x = \text{col}(x_1, x_2)$, $u = \text{col}(u_1, u_2)$, минимальное значение функционала $J_{\min} = 6,15$ на множестве допустимых управлений, заданном условием $\sum_{i=1}^N (u_i^2(t) + \dot{u}_i^2(t)) \leq 5$.

Построим найденные решения $x_{1,2}(t, s)$ и функции $z_{01,02}(t, s)$ в конечный момент времени.



Решения $x_{1,2}(\tau, s)$ при $N = 3$ и функции $z_{01,02}(\tau, s)$ соответственно. Из рисунка видно, что функции $x_{1,2}(t, s)$ в конечный момент времени стремятся «принять требуемую форму».

Третья глава состоит из шести параграфов и посвящена изучению математической модели оптимального регулирования потоков грунтовых вод в системе пластов как задачи оптимального управления решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений Дзекцера на графе.

П. 3.1 содержит описание изучаемой математической модели (1), (2), (4), (5) на графе $\mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$. Введем в рассмотрение гильбертово простран-

ство $\mathfrak{Y} = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_j, \dots) : y_j \in L_2(0, l_j)\}$ и банахово пространство $\mathfrak{X} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots) : x_j \in W_2^2(0, l_j) \text{ и выполняются (1), (2)}\}$.

Построим оператор $B : x \rightarrow (-x_{1ss}, -x_{2ss}, \dots, -x_{jss}, \dots)$, $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, и оператор $L = \lambda + B$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Введем в рассмотрение еще одно пространство

$$\text{dom } M = \{x \in \mathfrak{X} : x_j \in W_2^4(0, l_j) \text{ и}$$

$$x_{jss}(0, t) = x_{kss}(0, t) = x_{mss}(l_m, t) = x_{nss}(l_n, t),$$

$$E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i);$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{jsss}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k x_{ksss}(l_k, t) = 0\}.$$

Формулой $C : x \rightarrow (x_{1ssss}, x_{2ssss}, \dots, x_{jssss}, \dots)$ зададим оператор $C : \text{dom } M \rightarrow \mathfrak{Y}$, $C \in \mathcal{L}(\text{dom } M; \mathfrak{Y})$ и построим оператор $M = -\beta B - \alpha C + \gamma$. По построению $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $\beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$.

Показано, что для построенных функциональных пространств и операторов L, M выполняются условия (B1) — (B3), поэтому изучаемую модель (1), (2), (4), (5) можно рассматривать в рамках абстрактной начально-конечной задачи (5), (6) где оператор M ($L, 0$)-секториален, а условия (5) принимают вид (7).

В п. 3.2 доказаны существование и единственность сильного решения абстрактной начально-конечной задачи в случае (L, p)-секториального оператора M , а также существование и единственность сильного решения начально-конечной задачи для линейной модели Дзекцера на графе.

Определение 3. Вектор-функцию $x \in H^1(\mathfrak{X})$ назовем *сильным решением уравнения* (6), если она почти всюду на $(0, \tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (6) назовем *сильным решением начально-конечной задачи*, если

$$\lim_{t \rightarrow 0+} P_{fin}(x(t) - x_0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \tau-} P_{in}(x(t) - x_\tau) = 0.$$

Теорема 6 (3.2.1). Пусть выполнены условия (B1) — (B3). Тогда для любых $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и $f \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение задачи (5), (6).

Теорема 7 (3.2.2). При любых $\alpha, \tau \in \mathbb{R}_+$ и $\beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ таких, что либо $-\lambda \notin \sigma(A)$, либо $-\lambda \in \sigma(A)$ и $-\lambda$ не является корнем уравнения

$\alpha a^2 + \beta a - \gamma = 0$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$, $u \in H^1(\mathfrak{U})$ существует единственное сильное решение $x \in H^1(\mathfrak{X})$ задачи (1), (2), (4), (7).

В п. 3.3 рассмотрена задача оптимального управления (5), (8), (9), где оператор M (L, p) -секториален, а функционал качества определяется соотношением (10). Под решением задачи оптимального управления мы понимаем то же, что и в п. 2.3.

Теорема 8 (3.3.1). Пусть выполнены условия (B1) – (B3). Тогда для любых $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ существует единственное решение задачи оптимального управления (5), (8), (9).

Теорема 9 (3.3.2). При любых $\alpha, \tau \in \mathbb{R}_+$ и $\beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ таких, что либо $-\lambda \notin \sigma(A)$, либо $-\lambda \in \sigma(A)$ и $-\lambda$ не является корнем уравнения $\alpha a^2 + \beta a - \gamma = 0$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$, $u \in H^1_\partial(\mathfrak{U})$, существует единственное решение задачи оптимального управления (1), (2), (4), (7), (9).

В п. 3.4 в терминах сопряженной задачи найдены необходимые условия оптимальности управления.

Теорема 10 (3.4.2). Пусть выполнены условия (B1) – (B3) и $p = 0$. Тогда при любых $y \in H^1(\mathfrak{Y})$ и $z_0 \in H^1(\mathfrak{Z})$ оптимальное управление $\hat{u} \in H^1_\partial(\mathfrak{U})$ решениями задачи (5), (8) удовлетворяет неравенству (12), где $\xi(t, \hat{u}) \in H^1(\mathfrak{Y}^*)$ – решение задачи (11).

В п. 3.5 содержится описание алгоритма численного метода и программы, написанной в вычислительной среде Maple и предназначенной для нахождения приближенного численного решения рассматриваемой задачи оптимального управления для линейной модели Дзекцера на графе.

В п. 3.6 содержатся вычислительные эксперименты, иллюстрирующие работу программы. Рассмотрен пример нахождения приближенного решения исследуемой задачи оптимального управления для линейной модели Дзекцера на двухреберном графе.

В заключении представлены выводы по результатам исследований и их соответствие паспорту специальности.

В приложении представлено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.

Результаты, выносимые на защиту.

1. Построена математическая модель оптимального изменения формы двутавровых балок в конструкции. Показана однозначная разреши-

мость задачи оптимального управления решениями начально-конечной задачи для модели ХOFFфа на графе.

2. Построена математическая модель оптимального регулирования потоками грунтовых вод в системе пластов. Показана однозначная разрешимость задачи оптимального управления решениями начально-конечной задачи для модели Дзекцера на графе.

3. Доказано существование единственного сильного решения, а также существование единственного оптимального управления решениями начально-конечной задачи для линейного уравнения соболевского типа.

4. Найдены необходимые условия оптимальности управления исследуемых задач.

5. Разработан и реализован с помощью комплекса программ для ЭВМ алгоритм численного метода решения исследуемых задач.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих российских рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК:

1. Дыльков, А.Г. Численное решение задачи оптимального управления для одной линейной модели ХOFFфа на графе / А.Г. Дыльков // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Мат. моделирование и программирование». — 2012. — № 27 (286), вып. 13. — С. 128–132.

2. Манакова, Н.А. Об одной задаче оптимального управления с функционалом качества общего вида / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2011. — № 4 (25). — С. 18–24.

3. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Мат. моделирование и программирование». — 2011. — № 17 (234), вып. 8. — С. 113–114.

Другие научные публикации:

4. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейной модели ХOFFфа: свидетельство 2012618002 / Дыльков А.Г.

(RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (Национальный исследовательский университет). — 2012618002; заявл. 09.07.2012; зарегистр. 05.09.2012, Реестр программ для ЭВМ.

5. *Дыльков, А.Г.* Задача оптимального управления для одной эволюционной модели / А.Г. Дыльков // Современные методы теории краевых задач: материалы ВВМШ «Понтрягинские чтения—XXII». — Воронеж, 2011. — С. 59–60.

6. *Дыльков, А.Г.* Оптимальное управление решениями одного линейного уравнения соболевского типа / А.Г. Дыльков // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. междунар. конф., посвящ. памяти В.К. Иванова, Екатеринбург, 31 окт. – 5 нояб. 2011 г. — Екатеринбург, 2011. — С. 225–226.

7. *Манакова, Н.А.* Оптимальное управление для одной неклассической задачи для линейной модели Хоффа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Всероссийский научный семинар «Неклассические уравнения математической физики», посвящ. 65-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова (10 – 13 ноября 2010 г.): тез. докл. — Ч. 1. — Якутск, 2010. — С. 80–82.

8. *Манакова, Н.А.* Оптимальное управление для одной эволюционной модели / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // СамДиф—2011: конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения», Самара, 26 – 30 июня 2011 г.: тез. докл. — Самара, 2011. — С. 73–74.

9. *Дыльков, А.Г.* Численное решение задачи оптимального управления для одной линейной модели Хоффа на графе / А.Г. Дыльков // Измерения: состояние, перспективы развития: тез. докл. междунар. науч.-практ. конф., г. Челябинск, 25 – 27 сентября 2012 г. В 2 т. — Т. 1. — Челябинск, 2012. — С. 86–88.

Подписано в печать 31.10.2012 г.

Формат 60 × 84 1/16. Усл. печ. л. 1,00.

Тираж 100 экз. Заказ № 494.

Издательство Магнитогорского государственного университета

455038, Магнитогорск, пр. Ленина, 114

Типография МаГУ