

**ФГАОУ ВО «ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»**



На правах рукописи

Дияб Аус Нидал

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КРИТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ
ПЛАСТИЧЕСКИХ СЛОЕВ И ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК**

**05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ**

**Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

**Научный руководитель
доктор физико-математических наук
доцент В.Л. Дильман**

ЧЕЛЯБИНСК – 2018

Оглавление

Введение	2
Обозначения и соглашения	2
Объект изучения	2
Актуальность работы	4
Историография	4
Цель и задачи исследования	6
Научная новизна результатов работы	7
Теоретическая и практическая значимость работы	8
Методы исследований	9
Положения, выносимые на защиту	10
Достоверность полученных результатов	11
Апробация результатов работы	11
Публикации	12
1 Математическое моделирование напряженного состояния менее прочного слоя при его растяжении в составе неразъемного соединения при плоской деформации	13
1.1 Критическое состояние соединения	13
1.2 Тонкие прослойки при полной реализации контактного упрочнения	19
1.2.1 Условия полной реализации контактного упрочнения	19
1.2.2 Критическое состояние тонкой прослойки при условии полной реализации контактного упрочнения. Формулы и алгоритм для вычисления критических усилий	23
1.3 "Нетонкие" менее прочные слои	24
1.3.1 Напряженное состояние "нетонких" менее прочных слоев в критический момент нагружения	24
1.3.2 Исследование напряженного состояния слоя в окрестности свободной поверхности. Вычисление основных внутренних параметров	29
1.3.3 Аппроксимация условия пластичности (1.1.6)	33
1.3.4 Исследование напряженного состояния слоя в его внутренней части на основе гипотезы (1.1.1). Вычисление касательных напряжений	36
1.4 Вычисление критических усилий. Алгоритмы и численные эксперименты	38

1.4.1	Вычисление функции atgd	38
1.4.2	Алгоритмы вычислений критических напряжений	41
1.4.3	Алгоритм вычисления критической нагрузки	44
1.5	Выводы по главе 1	46
2	Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния пластического слоя при его сжатии при плоской деформации	49
2.1	Введение	49
2.2	Напряженно-деформированное состояние сжимаемого пластического слоя без скольжения по контактным поверхностям	51
2.2.1	Математическое моделирование напряженного состояния на основе гипотезы плоских сечений	51
2.2.2	Вычисление скоростей смещений	55
2.2.3	Алгоритм вычисления формы свободной поверхности	57
2.2.4	Алгоритм вычисления нагрузки сжатия пластического слоя при отсутствии скольжения по контактным поверхностям	61
2.3	Напряженно-деформированное состояние сжимаемого пластического слоя при его скольжении по контактным поверхностям	62
2.4	Выводы по главе 2	65
3	Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния тонкостенной цилиндрической оболочки, содержащей слой из менее прочного материала	69
3.1	Наклонный менее прочный слой в тонкостенной цилиндрической оболочке	69
3.1.1	Основные понятия и обозначения	69
3.1.2	Условный коэффициент механической неоднородности	72
3.1.3	Особый случай напряженного состояния слоя	73
3.2	Критическое состояние однородной тонкостенной цилиндрической оболочки при отрицательном коэффициенте двухосности нагружения	75
3.2.1	Введение. Гипотеза "единой кривой" и критерий Свифта потери устойчивости пластического деформирования	75
3.2.2	Нахождение критических деформаций однородной тонкостенной цилиндрической оболочки при отрицательном коэффициенте двухосности нагружения.	77
3.2.3	Нахождение критических напряжений и критического давления однородной тонкостенной цилиндрической оболочки при отрицательном коэффициенте двухосности нагружения	81
3.3	Условия критического состояния наклонного слоя в тонкостенной цилиндрической оболочке	82
3.3.1	Нахождение интенсивности деформаций в наклонном слое листового образца, находящемся в критическом состоянии, при отрицательном коэффициенте двухосности нагружения	82

3.3.2	Нахождение интенсивности напряжений, параметра k^- и коэффициента K в наклонном слое листового образца или ТЦО, находящемся в критическом состоянии, при отрицательном коэффициенте двухосности нагружения	87
3.3.3	Критическое состояние тонкостенной цилиндрической оболочки, содержащей спиральные слои из менее прочного материала, при отрицательном коэффициенте двухосного нагружения ее стенки	89
3.3.4	Алгоритм вычисления критических значений деформаций и напряжений менее прочного слоя и внутреннего (внешнего) давления. Вычислительные эксперименты	92
3.4	Выводы по главе 3	95
Заключение		97
Литература		98

Введение

Обозначения и соглашения

В диссертационной работе используются принятые в механике твердого тела обозначения, а также:

κ – относительная толщина слоя;

m – коэффициент двухосности нагружения стенки оболочки или листового образца,
 $s = \sqrt{m^2 - m + 1}$;

n – показатель упрочнения материала;

индекс "0" внизу – значение величины в начальный момент нагружения;

индекс "+" ("–") сверху указывает на отношение данной величины к более прочной (менее прочной) части соединения (для снижения громоздкости формул индекс "–" в некоторых случаях не ставится);

В работе приняты следующие сокращения.

ТЦО – тонкостенная цилиндрическая оболочка;

ОМ – основной металл;

НС – напряженное состояние; НДС – напряженно-деформированное состояние;

МП – менее прочный; БП – более прочный;

ОПУПД – общая потеря устойчивости (процесса) пластического деформирования;
ЛПД – локализация пластических деформаций;

Объекты изучения

В диссертационной работе рассматриваются математические модели напряженно-деформированного состояния пластических слоев при их растяжении или сжатии при плоской деформации и, на этой основе, математические модели критических состояний тонкостенных цилиндрических оболочек, нагруженных внутренним или внешним давлением и осевой силой. Стенки оболочек могут содержать слои из менее прочного материала, расположенные под любым углом к направлению нагрузок. В качестве модельных рассматриваются также листовые образцы с наклонными МП слоями.

Предполагается, что материал слоя находится на стадии развитых пластических деформаций. Все материалы упрочняемые, изотропные, в пластическом состоянии несжимаемые. Принимается *гипотеза "единой кривой"*, т.е. гипотеза независимости диаграммы

деформирования от вида напряженного состояния при сложном нагружении:

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i). \quad (0.0.1)$$

Используется следующая аппроксимация зависимости (0.0.1):

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n, \quad (0.0.2)$$

$$A = (e/n)^n \sigma_B, \quad (0.0.3)$$

где n и σ_B – постоянные, характеризующие свойства материала: n – показатель упрочнения, σ_B – предел прочности (временное сопротивление).

Оболочка считается *тонкостенной*, если отношение толщины стенки к ее внутреннему радиусу мало: $t \ll r$, что позволяет:

- 1) предполагать НС постоянным по толщине оболочки (в ее однородном фрагменте);
- 2) при исследовании локального участка оболочки, по ширине сравнимого с толщиной ее стенки (например, фрагмента, содержащего менее прочный слой), пренебречь кривизной оболочки;
- 3) в преобразованиях аналитических выражений пренебрегать слагаемыми, имеющими порядок t^2/r^2 по сравнению с единицей.

В инженерных расчетах обычно оболочку принимают тонкостенной, если отношение толщины ее стенки к внутреннему радиусу составляет величину около 0,05 и менее.

При исследовании прочностных свойств ТЦО, в том числе труб большого диаметра, существенное усложняющее влияние оказывают два фактора. Во-первых, *особенности работы оболочек из упрочняемых материалов при двухосном нагружении*. Во-вторых, *наличие в ТЦО слоев и прослоек из материалов иной прочности*.

Своеобразие напряженного состояния неоднородных по прочности соединений заметно влияет на их несущую способность. Менее прочные участки вследствие возникающего в них сложного напряженного состояния под действием соседних более прочных участков "упрочняются" то есть способны выдержать более высокую нагрузку, чем если бы соседних более прочных участков не было бы. Это явление называется *контактным упрочнением*. Нахождению коэффициента контактного упрочнения для различных менее прочных слоев и прослоек при их деформировании в пластической зоне посвящено большое количество работ (см. [4, 5, 56, 22, и др.] и ссылки в этих работах).

Критическими состояниями материала будем называть его состояния, с каких-то позиций характеризующие его прочность, например: достижение материалом предела текучести; момент потери устойчивости процесса пластического деформирования (для упрочняемых материалов); момент разрушения (потери сплошности).

К основным параметрам, следующим из постановки технической задачи, относятся:

- Геометрические параметры:

- 1) R – внутренний радиус ТЦО,
- 2) t – толщина стенки оболочки или листового элемента,
- 3) h – толщина слоя или заготовки, $\kappa = h/t$ – относительная толщина слоя или заготовки, то есть отношение толщины слоя к его ширине.

- Механические параметры:

1) σ_B^-, σ_B^+ – пределы прочности материала слоя и материала основной части соединения соответственно.

2) n, a – параметры, характеризующие упрочнение материала,

Актуальность темы диссертации

На основе уточнения и обобщения подходов Г.И. Ковальчука [55], использовавшего критерий потери пластической стабильности Х. Свифта (H. Swift, [121]) и З. Марциньяка (Z. Marciniak, [115, 116]), в работах В.Л. Дильмана (в том числе с соавторами) [31, 33, 35, 37, 19] (см. также [21, 22, 24]), исследованы критические состояния однородной ТЦО при действии внутреннего давления и растягивающей осевой силы и дано объяснение эффекту Девиса. Однако в этих работах не были рассмотрены условия нагружения, когда осевые и кольцевые напряжения в стенке бесшовной трубы имеют разные знаки, что возможно при сложных условиях прокладки трубопроводов: горных, подводных, на территориях с подвижными грунтами [125] и т.п.

Хотя актуальность изучения прочностных свойств спирально-шовных труб очевидна в силу их активного применения, до работ В.Л. Дильмана (с соавторами) [30, 37, и др.] (см. также [21, 19, 22, 24]) не было исследований теоретического характера НДС спиральных прослоек в ТЦО (описание некоторых технических особенностей спирально-шовных труб и технологических условий их производства было дано в работе [94]). В этих работах также не были рассмотрены условия нагружения, когда осевые и кольцевые напряжения в стенке ТЦО имеют разные знаки. Кроме того, исследование прочностных свойств наклонных слоев требует анализа влияния на прочность неоднородных соединений с произвольным коэффициентом неоднородности K . Следовательно, необходимо снять ограничение $K < 1,5$ работ [30, 37, 22, и др.].

Современные работы по близкой тематике основаны на МКЭ [102, 112, 113, 114, 124, 125] или использовании программных комплексов типа ANSYS, что, в отличие от приближенных аналитических методов, не всегда дает возможность качественно исследовать ситуацию и прогнозировать особенности поведения объекта при изменении внешних условий [123]. Поэтому подходы работы, основанные на аналитических методах исследования изучаемых математических моделей, остаются актуальными.

Степень разработанности тематики

Исследованию вязкой прочности оболочечных конструкций, в том числе содержащих механико-геометрические неоднородности, посвящена обширная литература. Общие подходы и принципы создания силовых и деформационных критериев потери несущей способности конструкций из упрочняемых материалов разрабатывались в работах Х. Свифта (H. Swift, [121]), Б. Сторакерса (B. Storakers, [119]), З. Марциньяка (Z. Marciniak, [115, 116]), Е.А. Девиса (E.A. Davis, [104]), Г.С. Писаренко, А.А. Лебедева [79], В.Л. Колмогорова [80], Томленова [97], С.А. Куркина [60], В.А. Винокурова, Н.А. Николаева [8],

Н.А.Махутова [65], Д.Д. Ивлева и др. [83] и др. На этой основе были получены рядом авторов методики для оценки несущей способности и сопротивляемости разрушению (в т. ч. вязкому) листовых, стержневых и оболочечных конструкций при растягивающих нагрузках, приводящих к сложному напряженному состоянию: Г.И. Ковальчуком [55], Н.Н. Малининым [64], А.Н. Моношковым [68], Н.Л. Свенсоном (N.L. Svensson) [120], Е. Фолиасом [111], Э. Томсеном, Ч. Янгом, Ш. Кобаяши [98], А.Р. Даффи, Г. Хайном, Дж. Кифнером, П.Дж. Эйбером [110, 100, 101] и другими исследователями.

Со времен работы Л. Прандтля (1924 г., [117], русский перевод [82]) о напряженном состоянии бесконечной пластичной прослойки, подверженной сжимающим усилиям, написано большое количество статей, глав в монографиях и учебниках, относящихся, в основном, к сжатию (осадке) пластического слоя двумя жесткими плитами. Можно отметить монографии и учебники Л.М. Качанова [50], В.Л. Колмогорова, А.А. Богатова и др. [80], В.С. Смирнова [89], Г.А. Смирнова-Аляева [90], В.В. Соколовского [91], А.Д. Томленова [97], Э. Томсена, Ч. Янга, Ш. Кобаяши [98], Е.П. Унксова, У. Джонсона, В.Л. Колмогорова [96, 95], Зубчанинова В.Г. [44], Ишлинского А.Ю. [47] и др. Во многих работах по теории обработки металлов давлением допускалась (и исследовалась) возможность скольжения заготовки (пластического слоя) по контактными поверхностям, что приводило к различным краевым задачам в зависимости от условий трения между плитой (матрицей) и заготовкой. В ряде работ Д.Д. Ивлева, его коллег и соавторов Р.И. Непершина, Л.А. Максимовой, Ю.Н. Радаева и др. (см. [83] и литературу в [83]) изучалось НДС прослойки из идеально пластического материала под сжимающей нагрузкой методами, использующими условие пластичности Треска и гипотезу полной пластичности, на основе подходов Ишлинского А.Ю. [47].

Большую роль в становлении направления, посвященного исследованию НДС в пластической зоне МП прослоек, испытывающие растягивающие нагрузки, и их приложений к исследованию несущей способности конструкций, содержащих сварные соединения, сыграли работы Л.М. Качанова (с соавторами) [51, 52, 53], О.А. Бакши (с соавторами) [4, 5, и др.]. Их исследования воздействия механической неоднородности на прочность и работоспособность сварных соединений при различных условиях нагружения оказали определяющее влияние на дальнейшее развитие этой проблематики. Работы указанных авторов получили развитие в трудах Н.А. Махутова [65], С.Е. Александрова [2], а также исследователей научной школы, основанной О.А. Бакши в Челябинском политехническом институте (Южно-Уральском государственном университете). Эти исследования посвящены изучению несущей способности сварных соединений (плоские и осесимметричные задачи), содержащих разнообразные по форме и прочностным свойствам МП слои. Они опубликованы в журналах "Сварочное производство", "Автоматическая сварка" и др. в 60-е – 90-е годы прошлого столетия. В работах М.В. Шахматова, В.В. Ерофеева, А.А. Остсемина [56, 99, и др.] (относящихся, в основном, к восьмидесятым и девяностым годам прошлого столетия) и их соавторов были, на основе экспериментальных и инженерных аналитических методов, проведены систематические исследования НДС и прочности механически неоднородных сварных соединений, с учетом двухосности нагружения и вовлечения основного материала, граничащего со слоем, в пластическое деформирование.

Цель и задачи исследования

Цель диссертационной работы – исследование математических моделей напряженно-деформированных состояний пластических слоев под растягивающей и сжимающей нагрузкой при плоской деформации; исследование математических моделей напряженно-деформированных состояний листовых образцов и ТЦО, содержащих слои из менее прочного материала, подверженных давлению и осевой нагрузке разных знаков, и на этой основе, разработка алгоритмов и программ, позволяющих оценить влияние на критическое состояние ТЦО параметров самих ТЦО и содержащихся в них слоев, а также условий нагружения.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи.

1. Исследовать математические модели напряженного состояния соединений с менее прочным слоем в условиях плоской деформации, для чего:
 - (а) Дать полную классификацию напряженных состояний менее прочных пластических слоев под растягивающей нагрузкой при плоской деформации в терминах полей характеристик. Сформулировать критерий неполной реализации контактного упрочнения.
 - (b) Исследовать напряженное состояние слоя: 1) в окрестности свободной поверхности при любых значениях коэффициента механической неоднородности K ; 2) во внутренней части слоя, и на этой основе найти аналитические выражения для вычисления компонент тензора напряжения в критический момент нагружения.
 - (с) Создать алгоритм для вычисления критического усилия и реализовать его в виде программы на языке MATLAB.
2. Исследовать математические модели напряженно-деформированного состояния пластического слоя под сжимающей нагрузкой в условиях плоской деформации, для чего:
 - (а) Разработать аналитический метод приближенного решения краевых задач для полной системы уравнений НДС, моделирующих напряженно-деформированное состояние в пластической заготовке под сжимающей нагрузкой при отсутствии и наличии проскальзывания.
 - (b) На этой основе разработать алгоритм для численного определения формы свободной поверхности и реализовать его в виде программы на языке MATLAB.
3. Исследовать математические модели напряженно-деформированного состояния ТЦО при отрицательном коэффициенте двухосности нагружения, для чего:
 - (а) Разработать силовые и деформационные критерии потери несущей способности однородных ТЦО из упрочняемых материалов при отрицательном коэффициенте двухосности нагружения.

- (b) Разработать силовые и деформационные критерии возникновения пластической неустойчивости спиральных (в частности, продольных и кольцевых) слоев из менее прочного материала в составе ТЦО
- (с) На этой основе разработать алгоритм численного нахождения критических напряжений и деформаций в этих слоях и критические давление и осевую нагрузку в ТЦО, и реализовать его в виде программы на языке MATLAB.

Научная новизна результатов работы

В области математического моделирования:

1. Впервые исследованы математические модели НДС однородных ТЦО, нагруженных одновременно внешним давлением и осевой сжимающей силой, а также внутренним давлением и осевой растягивающей силой. Впервые получены силовые и деформационные критерии потери несущей способности ТЦО в этих условиях и зависимости критических давлений от механических и геометрических параметров ТЦО.
2. Впервые исследованы математические модели НДС спирального МП слоя в ТЦО, нагруженных одновременно внешним давлением и осевой сжимающей силой, а также внутренним давлением и осевой растягивающей силой. Впервые получены силовые и деформационные критерии потери несущей способности ТЦО со спиральными слоями и зависимости критических давлений в таких ТЦО от механических и геометрических параметров ТЦО и МП слоя.
3. На основе анализа математической модели НДС сжимаемого слоя разработан новый подход к определению сжимающего усилия и исследованию формы свободной поверхности сжимаемого слоя.
4. Впервые дана полная классификация напряженных, в том числе критических, состояний пластического слоя в процессе его пластического деформирования при плоской деформации с точки зрения полноты реализации контактного упрочнения.
5. На основе анализа математической модели напряженного состояния пластического слоя впервые при произвольных значениях коэффициента механической неоднородности исследовано контактное упрочнение пластического слоя под растягиваемой нагрузкой в зависимости от вида напряженного состояния. и на этой основе получен алгоритм численного нахождения критического усилия.
6. Новыми являются полученные в работе аналитические зависимости: критических напряжений и деформаций от величин, характеризующих свойства материала, и условий нагружения; предельных давлений в ТЦО от механических и геометрических параметров ТЦО, в том числе угла наклона менее прочного слоя.

В области численных методов:

1. Разработаны алгоритмы численного нахождения критических напряжений и деформаций, критического давления и осевой нагрузки однородных ТЦО, нагруженных одновременно внешним давлением и осевой сжимающей силой, или внутренним давлением и осевой растягивающей силой, и в зависимости от механических и геометрических характеристик ТЦО.
2. Разработаны алгоритмы численного нахождения критических напряжений и деформаций, критического давления и осевой нагрузки ТЦО, содержащих спиральные слои из менее прочного материала, нагруженных одновременно внешним давлением и осевой сжимающей силой, или внутренним давлением и осевой растягивающей силой, в зависимости от механических и геометрических характеристик ТЦО и слоя.
3. Разработан численный метод определения формы свободной поверхности на основе нового подхода к исследованию формы свободной поверхности сжимаемого слоя .
4. Получен новый алгоритм численного нахождения критического усилия для растягиваемой полосы с менее прочным слоем при произвольных значениях коэффициента механической неоднородности.

В области комплексов программ:

1. В среде MATLAB разработан комплекс программ, позволяющий численно находить: критические напряжения и деформации, критическое давление и осевую силу для однородных и содержащих спиральные менее прочные слои ТЦО, нагруженных одновременно внешним давлением и осевой сжимающей силой, или внутренним давлением и осевой растягивающей силой, в зависимости от механических и геометрических характеристик ТЦО.
2. В среде MATLAB разработана программа определения формы свободной поверхности, работа которой протестирована с помощью МКЭ и в среде ANSYS.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы.

Показано, что возможно полностью аналитическое исследование математических моделей напряженного состояния пластического слоя, с привлечением аппарата математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных гиперболического типа.

Показано, что метод исследования напряженного состояния растягиваемого пластического слоя на основе гипотезы плоских сечений может быть в соответствующей интерпретации перенесен на задачи, связанные со сжатием пластического слоя. Показано, что скольжение заготовки по матрице приводит к картине характеристик, аналогичной неполной реализации контактного упрочнения в неразъемном растягиваемом неоднородном соединении. На этой основе разработан эффективный численный метод определения формы свободной поверхности.

Показана эффективность исследования математических моделей критических состояний ТЦО, основанного на применении критерия Свифта, при отрицательном коэффициенте двухосности нагружения ТЦО. При этом потеря пластической стабильности происходит: 1) при внешнем давлении, осевом растяжении только как ЛПД; 2) при внутреннем давлении, осевом сжатии – и как ЛПД, и как ОПУПД, в зависимости от условий нагружения.

Практическая значимость работы

Разработанные программы позволяют устанавливать допустимую величину внутреннего или внешнего давления в зависимости от геометрических параметров ТЦО, свойств и видов сварных соединений, условий нагружения.

Разработанные алгоритмы позволяют определять научно обоснованную толщину стенки труб магистральных трубопроводов в зависимости от условий эксплуатации на данном участке и требуемого внутреннего давления; определять разрушающие растягивающие нагрузки, действующие на листовые образцы, стенки ТЦО, содержащие прослойки из МП материала.

Полученные результаты позволяют вносить изменения и дополнения в нормативные документы.

Методология и методы диссертационного исследования

В работе при исследовании ММ напряженно-деформированного состояния пластических слоев и ТЦО использованы и развиваются подходы, применяемые в математической теории пластичности и механики разрушения, на современных представлениях о механизме разрушения упрочняемых материалов и конструкций из них. К таким представлениям можно отнести критерии Свифта – Марциньяка общей и локальной потери устойчивости процесса пластического деформирования конструкции, состояние предразрушения упрочняемого материала и его особенности. Последнее позволило использовать классические методы теории идеальной пластичности, в частности, в некоторых случаях плоских задач использовался метод характеристик для решения систем уравнений гиперболического типа.

В работе нашли развитие метод приближенного решения недоопределенных краевых задач теории пластичности при наличии возможности частичного предугадывания внутреннего состояния среды введением ограничений на классы решений; метод замены условия пластичности близким к нему нелинейным условием, позволяющим аналитическими методами исследовать системы дифференциальных уравнений в частных производных; метод характеристик для исследования граничных (в том числе обратных) задач для уравнений гиперболического типа. При решении и исследовании систем нелинейных уравнений гиперболического типа использовался комбинированный метод, основанный на некотором обобщении метода разделения переменных, применяемом для областей вблизи линии (поверхности) раздела течения, и методе характеристик, применяемом для областей в окрестности свободной границы, с использованием аппаратов математического анализа и обыкновенных дифференциальных уравнений, а также численных методов их решения.

При изучении критических состояний однородных и содержащих мягкие прослойки ТЦО использовались методы математического анализа, основанные на критерии Свифта.

Положения, выносимые на защиту

1. В части: развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей:
 - (а) развитие метода нахождения силовых и деформационных критериев потери несущей способности ТЦО и зависимости критических давлений от механических и геометрических параметров ТЦО и менее прочных слоёв на основе анализа математических моделей НДС однородных и содержащих спиральные слои из менее прочного материала ТЦО.
 - (б) развитие метода определения сжимающего усилия и формы свободной поверхности сжимаемого пластического слоя на основе анализа математической модели его НДС.
 - (с) развитие метода нахождения контактного упрочнения менее прочного слоя в составе неоднородного соединения.
2. В части: разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий:
 - (а) разработка численного метода нахождения критических напряжений и деформаций, критического давления и осевой нагрузки ТЦО, однородных и содержащих спиральные слои из менее прочного материала, нагруженных одновременно внешним давлением и осевой сжимающей силой, или внутренним давлением и осевой растягивающей силой, в зависимости от механических и геометрических характеристик ТЦО и слоя.
 - (б) разработка численного метода определения формы свободной поверхности сжимаемого слоя. Сопоставление с решением этой задачи МКЭ и среде ANSYS показало при близких результатах преимущество во времени работы программы
 - (с) разработка численного метода нахождения критического усилия для растягиваемой полосы с менее прочным слоем при произвольных значениях коэффициента механической неоднородности.
3. В части: реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов:
 - (а) программа для ЭВМ, позволяющий численно находить: критические напряжения и деформации, критическое давление и осевую силу для однородных и содержащих спиральные менее прочные слои ТЦО, нагруженных одновременно

внешним давлением и осевой сжимающей силой, или внутренним давлением и осевой растягивающей силой, в зависимости от механических и геометрических характеристик ТЦО.

- (b) программа для ЭВМ, позволяющая находить форму свободной поверхности сжимаемого пластического слоя, работа которой протестирована с помощью МКЭ и в среде ANSYS.

Степень достоверности полученных результатов

Достоверность полученных в работе результатов обеспечивается обоснованностью основных посылок и допущений, выверенной логикой доказательств всех утверждений, приведённых в диссертации, совпадением их в частных случаях с известными ранее результатами, подтверждением полученных результатов вычислительными экспериментами и неоднократно подтверждалась при апробации работы на научных конференциях и семинарах.

Во всех работах, написанных совместно с научным руководителем, руководителю принадлежит постановка задачи.

Апробация результатов работы

Результаты работы докладывались и обсуждались на конференциях:

1. XXII Международная конференция "Математика. Экономика. Образование", Ростов-на-Дону, 27.05.2014-03.06.2014.
2. Всероссийская конференция с международным участием, посвященная памяти В.К. Иванова, Челябинск, 10.11.2014-14.11.2014.
3. XII Международная Казанская летняя школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", Казань, 27.06.2015-4.07.2015.
4. XVI Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике, Челябинск, 21.06.2015-27.06.2015.
5. Международная конференция "Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах", Миасс, 24.08.2015-28.08.2015.
6. Южно-Уральская молодежная школа по математическому моделированию, Челябинск, 29.05.2014-30.05.2014.
7. Седьмая научная конференции аспирантов и докторантов ЮУрГУ, Челябинск, 08.02.2015-10.02.2015; Восьмая научная конференции аспирантов и докторантов ЮУрГУ, Челябинск, 08.02.2016-10.02.2016.
8. 66-я научная конференция ЮУрГУ. Челябинск, 2014.

9. Международная научно-практическая конференция "Новая наука: стратегия и вектор развития", Стерлитамак, 19.11.2015.

Результаты работы обсуждались на научных семинарах кафедр ЮУрГУ: прикладной математики (2014 г.), кафедры математического и функционального анализа (2015 г.), кафедры вычислительной механики сплошных сред (2016 г.), а также кафедры математического анализа ЧелГУ (2016 г.).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 12 работ [126, 132, 135, 136, 137, 127, 128, 129, 130, 131, 133, 134], из них:

- одна [135] – в издании, входящем в системы цитирования SCOPUS и Web of Science;
- три [126, 132, 135] – публикации в ведущих рецензируемых научных изданиях и журналах, рекомендованных ВАК РФ при Минобрнауки РФ;
- две [136, 137] – свидетельства о регистрации программ для ЭВМ.

Глава 1

Математическое моделирование напряженного состояния менее прочного слоя при его растяжении в составе неразъемного соединения при плоской деформации

1.1 Критическое состояние соединения

Теоретическое изучение напряженного состояния пластического слоя после работы [82] проводилось многими авторами. Для определения критического растягивающего усилия требуется найти нормальные напряжения на контактной поверхности между слоем и основным материалом, то есть решить обратную граничную задачу. В некоторой окрестности свободной поверхности слоя это можно сделать непосредственно, используя свойства характеристик, то есть вычисляя вдоль характеристик напряженное состояние с обеих сторон от контактной поверхности [21, 22]. В остальной, внутренней, части слоя этот подход приводит к неоправданно громоздким вычислениям. Кроме того, в окрестности поперечной оси симметрии слоя НДС слоя обладает особенностями, которые нельзя учесть при таком подходе. Более простой метод моделирования НДС основан на "частичном предугадывании внутреннего состояния" материала слоя [54]. Нужные для этого дополнительные условия формулируются как ограничения на классы функций, в которых разыскивается решение. В работах [52, 76] предлагалась в тонких слоях линейная зависимость касательных напряжений по толщине слоя:

$$\tau_{xy} = yX(x). \quad (1.1.1)$$

В работах [76, 22, 21] показано, что это допущение в некоторых случаях может быть эффективным не только для тонких прослоек. Как обобщение гипотезы (1.1.1) часто применялась гипотеза разделения переменных для касательных напряжений [22, 21, 26]

$$\tau_{xy} = Y(y)X(x). \quad (1.1.2)$$

При некоторых дополнительных упрощающих условиях гипотеза поперечных плоских сечений [52, 22, 21, 27, 34, 32]

$$\nu_y = W(y) \quad (1.1.3)$$

также приводила к условиям (1.1.1) или (1.1.2). Здесь ν_y – скорость перемещения точки слоя в поперечном направлении.

В работах [17, 32, 23, и др.] методы работ [22, 21, 27, 34, 32] перенесены на неоднородный слой.

Пусть в процессе нагружения, в данном случае при увеличении растягивающей нагрузки, материал менее прочного слоя перешел в состояние пластического течения. Другими словами, произошла потеря пластической устойчивости процесса деформирования слоя, и дальнейшее деформирование должно происходить без увеличения внешней нагрузки. Однако в относительно тонких слоях в это время начинает проявляться так называемое *контактное упрочнение*, требующее для продолжения деформирования увеличения внешнего усилия до какого-то момента, который назовем *предельным состоянием слоя*. Это состояние можно назвать также *состоянием предразрушения* или *критическим состоянием*, так как продолжение увеличения внешней нагрузки на слой в этом состоянии приводит к деформированию слоя с неконтролируемой скоростью и быстрому разрушению.

Напряженно-деформированное состояние пластического тела при плоской деформации определяется пятью уравнениями [52]. В безразмерных переменных эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad (1.1.4)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad (1.1.5)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4 \quad (1.1.6)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad (1.1.7)$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}} \quad (1.1.8)$$

Здесь σ_x , σ_y и τ_{xy} – напряжения, v_x , v_y – скорости перемещений в соответствующих направлениях. Уравнения (1.1.4) и (1.1.5) – уравнения равновесия, (1.1.6) – условие пластичности, (1.1.7) – условие несжимаемости, (1.1.8) – условие пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций. Все эти уравнения рассматриваются (рис. 1.1) на прямоугольнике (прямоугольном сечении слоя) длиной 2 по оси Ox и толщиной 2κ , $\kappa \in (0; 1)$, с осями симметрии в качестве осей декартовой системы координат. Здесь κ – относительная толщина пластического слоя, т.е. отношение его толщины к длине. Направление оси Oy совпадает с направлением растягивающей нагрузки. На осях координат, в силу симметрии, касательные напряжения равны нулю:

$$\tau_{xy}(x, 0) = \tau_{xy}(0, y) = 0. \quad (1.1.9)$$

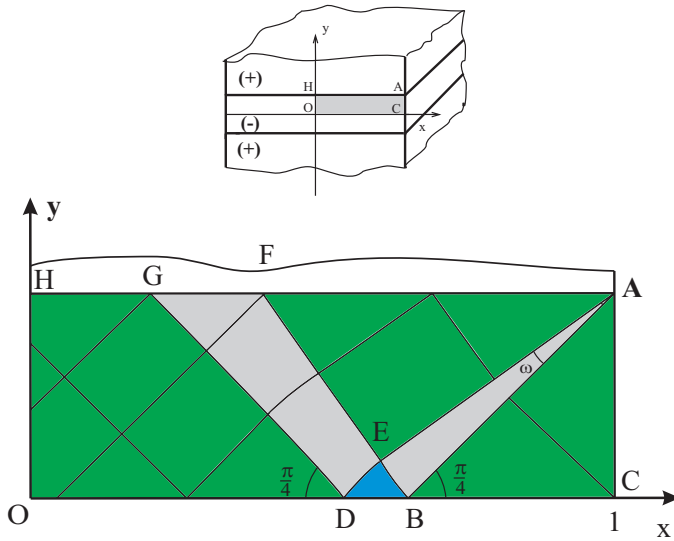


Рис. 1.1: Поперечное сечение менее прочного слоя в неоднородном соединении и поле характеристик (линий скольжения) на ранней стадии его пластического деформирования

На свободной поверхности, заданной уравнением $x = 1$, предполагается отсутствие внешних нагрузок:

$$\sigma_x(1, y) = 0; \quad \tau_{xy}(1, y) = 0. \quad (1.1.10)$$

Из соображений симметрии достаточно рассматривать четверть сечения слоя при $x \geq 0$, $y \geq 0$ (прямоугольник $OHAC$ на рис. 1.1).

Система уравнений (1.1.4) – (1.1.6) замкнута (три уравнения и три неизвестных функции σ_x , σ_y и τ_{xy}) и вместе с граничными условиями (1.1.9) и (1.1.10) определяет напряженное состояние пластического слоя.

В момент перехода слоя из упругого в пластическое состояние его поле напряжений является однородным: во всех точках слоя (в безразмерных величинах)

$$\sigma_x = 0; \quad \sigma_y = 2; \quad \tau_{xy} = 0. \quad (1.1.11)$$

Оба семейства характеристик однородного поля являются семействами прямых. С ростом растягивающей нагрузки однородное поле напряжений (1.1.11) искажается. Появляются участки веерно-центрированного поля в форме круговых секторов с вершинами в угловых точках слоя – точках выхода контактных поверхностей на свободные (рис. 1.1, 1.2), участок EAB). Будем называть участок поля характеристик *простым*, если на нем одно из семейств характеристик прямолинейно. Например, простым является веерно-центрированное поле. Изменение напряженного состояния в слое проявляется в увеличении от нуля угла этих секторов ω^- .

Дальнейшее преобразование поля линий скольжения (характеристик) и вид этого поля зависят от стадии нагружения и двух основных параметров соединения: κ и K – коэффициента механической неоднородности соединения. Вид характеристик в критическом состоянии слоя, в том числе величина угла ω^- центрированного поля, полностью определяются параметрами K и κ . Одна из возможных картин поля характеристик в промежуточный момент нагружения показана на рис. 1.2, где $\kappa = 0,32$. Здесь треугольники ABC и AEF и четырехугольник $DOHG$ являются участками равномерного поля характеристик,

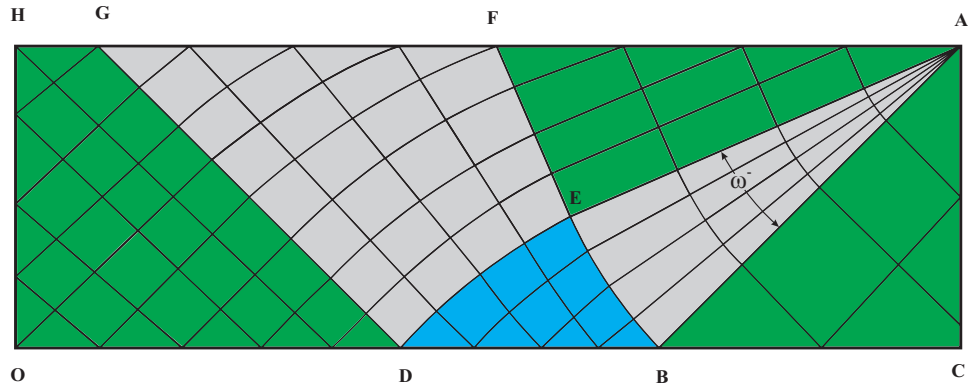


Рис. 1.2: Поле характеристик (линий скольжения) в промежуточный момент нагружения пластического слоя. $\kappa = 0,32$.

сектор ABE и область $DGFE$ – участками простого поля, область BDE покрыта криволинейными характеристиками. В действительности ситуация, показанная на рис. 1.2, может возникнуть не только при полной реализации контактного упрочнения (см. ниже условие (1.1.12)), но при любых $K > 1,69$. При меньших значениях K угол ω^- не может достигнуть величины, показанной на рис. 1.2 – такому развитию напряженного состояния слоя воспрепятствует более прочная часть соединения. Следует отметить, что при

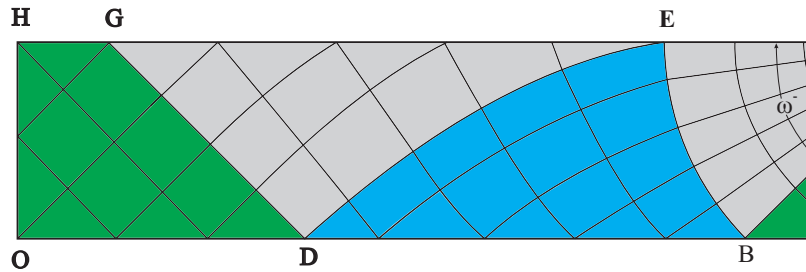


Рис. 1.3: Поле характеристик (линий скольжения) на промежуточной стадии нагружения пластического слоя при полной реализации контактного упрочнения. $\kappa = 0,21$.

$\kappa > 0,5$ контактное упрочнение настолько мало, что им можно пренебречь. При $\kappa > 1$ оно полностью отсутствует. Будем считать $\kappa < 0,5$.

Основной материал в процессе увеличения внешней нагрузки какое-то время деформируется упруго. С ростом нагрузки увеличивается угол ω^- . При этом точка D перемещается к точке O . Возможны три различных ситуации развития процесса деформирования растягиваемого соединения, сопровождаемого ростом контактного упрочнения слоя и, как следствие, три варианта критического состояния пластического слоя.

Первая ситуация. В процессе увеличения внешней нагрузки угол ω^- достигает теоретически возможного максимума:

$$\omega^- = \pi/4 \quad (1.1.12)$$

(рис. 1.1), в то время как точка D не доходит до точки O . В этом случае основной материал

нигде не переходит в состояние пластичности. На отрезке EA касательные напряжения достигают своего абсолютного максимума: $\tilde{\tau}_{xy} = k^-$, или, в безразмерных величинах, $\tau_{xy} = 1$. На рис. 1.3 контактное упрочнение еще не достигло своего предела, так как поле характеристик может продолжаться деформироваться так, что и вне отрезка EA касательные напряжения могут оказаться равными 1 (об этом подробнее см. в следующем пункте).

Таким образом, условие (1.1.12) равносильно тому, что по меньшей мере на некотором отрезке LA контактной поверхности, включающем EA (см. рис. 1.3), касательные напряжения $\tau_{xy} = 1$. Когда отрезок LA достигает наибольшей возможной величины, имеет место так называемая (О.А. Бакши, [5]) *полная реализация контактного упрочнения*. Как было показано в работе [22, с. 81–83], на основе численного решения системы уравнений, определяющей условия сопряжения нормальных и касательных напряжений на контактной поверхности, для выполнения условия (1.1.12) необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

$$K \geq K_{cr} \approx 1,98. \quad (1.1.13)$$

При небольших значениях $\varkappa$ условие (1.1.13) может оказаться достаточным для выполнения условия (1.1.12) (см. ниже утверждение 3.1.1). Такие слои мы будем называть *тонкими слоями* или *тонкими прослойками*.

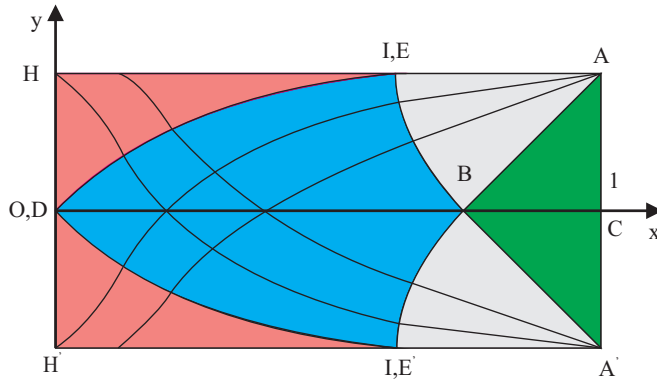


Рис. 1.4: Поле характеристик (линий скольжения) пластического слоя наименьшей относительной толщины $\varkappa = 0,251$ при полной реализации контактного упрочнения. Характеристика AED попадает в центр слоя O .

Вторая ситуация. С ростом угла $EAB = \omega^-$ точка D (рис. 1.1 – 1.3) характеристики AED перемещается к оси симметрии слоя – оси Oy , то есть к точке O . Крайнее положение в такой ситуации – попадание характеристики AED в центр слоя, то есть совпадение точек D и O . Вторая ситуация возникает, когда угол ω^- оказался в этот момент меньше $\pi/4$. Тогда его дальнейшее увеличение противоречит условию (1.1.9). Подробнее об этом будет сказано позже. В таких условиях дальнейшее деформирование поля характеристик прекращается. С этого момента величина контактного упрочнения слоя не увеличивается. Причиной является "слишком большая" относительная толщина слоя. В не очень тонких слоях контактное упрочнение реализуется не полностью даже при условии (1.1.13). По терминологии О.А. Бакши [4, 5], происходит *неполная реализация контактного упрочнения слоя*. Верхняя граница $\varkappa^*$ относительной толщины таких прослоек будет дана ниже, в п. 1.2.1. Пограничный случай между отмеченными двумя ситуациями возникает, если в момент совпадения точек D и O угол ω^- оказался равным $\pi/4$ (рис. 1.4).

Напряженное состояние слоя в критический момент нагружения зависит также от того,

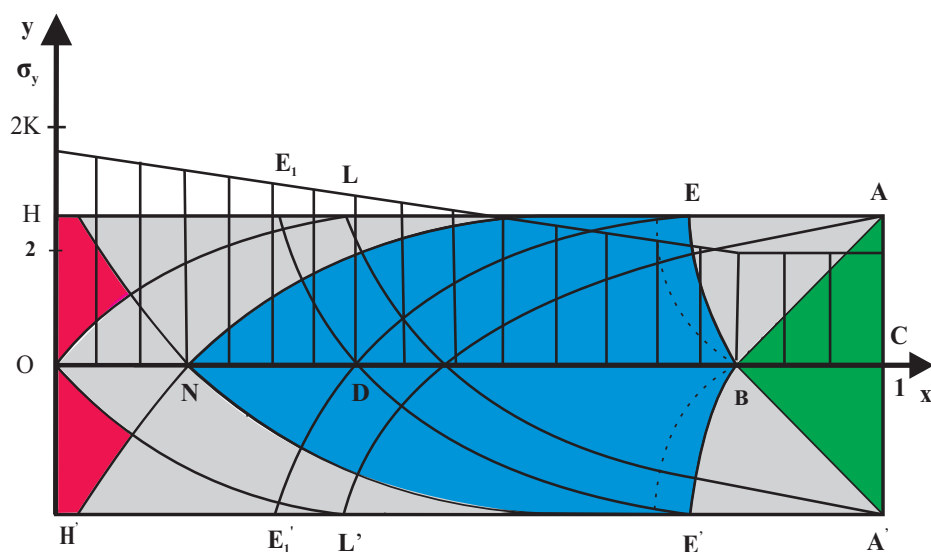


Рис. 1.5: Поле характеристик (линий скольжения) "тонкого" менее прочного слоя при полной реализации контактного упрочнения в критический момент нагружения, ($\varkappa = 0,178$), и эпюра напряжений σ_y по оси симметрии слоя (первый тип напряженного состояния слоя).

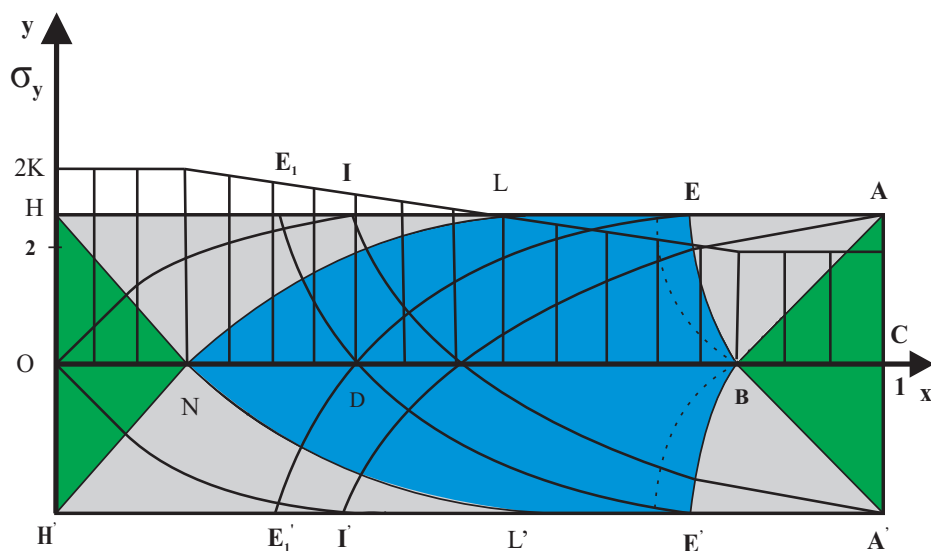


Рис. 1.6: Поле характеристик (линий скольжения) "тонкого" менее прочного слоя при полной реализации контактного упрочнения в критический момент нагружения, ($\varkappa = 0,158$), и эпюра напряжений σ_y по оси симметрии слоя (второй тип напряженного состояния слоя).

достигнут ли в какой-то части слоя нормальные напряжения σ_y напряжений в основном материале, которые в безразмерных величинах равны $2K$. Назовем *первым типом крити-*

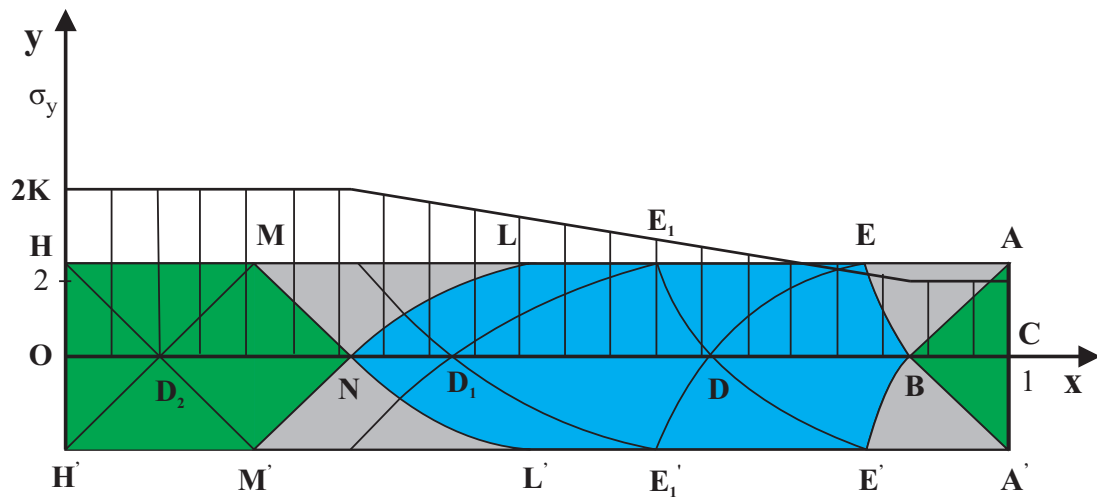


Рис. 1.7: Поле характеристик (линий скольжения) тонкого менее прочного слоя при полной реализации контактного упрочнения ($\kappa = 0,088$), и эпюра напряжений σ_y по оси симметрии слоя (второй тип напряженного состояния слоя).

ческого состояния слоя случай, когда $\sigma_y < 2K$ всюду в слое (рис. 1.5), и вторым типом критического состояния слоя – когда на некотором участке слоя $\sigma_y = 2K$ (см. участок HNH' на рис. 1.6 и участок $HNMNM'H'$ на рис. 1.7).

Заметим, что в общем случае, когда угол между контактной и свободной поверхностями не равен $\pi/2$, величина K_{cr} зависит от этого угла [38].

Третья ситуация. При увеличении внешней нагрузки может возникнуть момент, когда прекращается процесс деформирования слоя, несмотря на то, что точка D не достигла точки O , а угол $\omega^- < \pi/4$. Это происходит, когда основной материал в околограничной зоне переходит в пластическое состояние. Тогда дальнейшее увеличение угла ω^- прекращается [22]. Это значит, что контактное упрочнение достигло предельной величины и, как и во второй ситуации, *реализовано не полностью*. Такая ситуация возникает, когда механическая неоднородность соединения не очень велика: необходимым условием перехода основного материала в пластическое состояние является неравенство, противоположное неравенству (1.1.13).

1.2 Тонкие прослойки при полной реализации контактного упрочнения

1.2.1 Условия полной реализации контактного упрочнения

Изучению напряженного состояния и прочности тонких пластичных прослоек под действием растягивающей или сжимающей нагрузки посвящена обширная литература (библиографию см. в [21, 22]). В одной из первых работ на эту тему [82] рассматривалась

бесконечная пластическая полоса, которую можно считать моделью тонкой прослойки. В [82] замечено, что в такой полосе касательные напряжения не меняются по длине полосы. Это условие

$$\partial\tau_{xy}/\partial x = 0, \quad (1.2.1)$$

как позже было установлено, можно в некоторых случаях применять при моделировании напряженного состояния не очень тонких слоев. Большое количество других используемых ограничений на классы функций, в которых может разыскиваться решение, имеющих как силовой, так и деформационный характер, приведено в [22]. Тем не менее, особенности деформирования и разнообразие критических состояний тонких пластических слоев между более прочными участками неоднородных соединений остаются недостаточно изученными. Кроме того, требуется более подробное теоретическое осмысление условий проявления контактного упрочнения менее прочных прослоек и равнопрочности неоднородных соединений.

Целью п. 1.3 является исследование математических моделей напряженного состояния тонких пластических слоев, в зависимости от их механических и геометрических параметров. Это исследование позволяет получить, в зависимости от параметров, условия возникновения критических состояний в пластических слоях из менее прочного материала в неоднородных соединениях под растягивающей нагрузкой независимо от степени неоднородности соединений. На этой основе в работе предлагается вычислительная схема нахождения критического усилия, приводящего к разрушению таких соединений, которое может быть выражено в форме интеграла по любому сечению слоя $y = y_0$:

$$\sigma_{cr} = \int_0^1 \sigma_y(x, y_0) dx. \quad (1.2.2)$$

Схема базируется на полученных в работе аналитических зависимостях для ряда внутренних параметров задачи.

При плоской деформации напряженное состояние нагруженного твердого тела в каждой точке связано с его полем характеристик (линий скольжения) хорошо известными соотношениями. Если внешняя нагрузка (растяжение или сжатие) действует в направлении оси Oy , имеют место зависимости:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma - \sin 2\gamma; \\ \sigma_y = \sigma + \sin 2\gamma; \\ \tau_{xy} = \cos 2\gamma. \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Здесь γ – угол наклона характеристики к оси Ox .

Рассмотрим тонкую прослойку в первой ситуации, когда выполнено условие (1.1.12). Действие основной части соединения на менее прочный слой приводит к увеличению касательных напряжений на контактной поверхности. На отрезке EA (см. рис. 1.3 – 1.7) в предельном состоянии касательные напряжения достигают своей верхней границы, то есть равны 1,

$$\tau_{xy}^-(x, \varkappa) = 1, \quad (1.2.4)$$

что, в силу последнего уравнения (1.2.3) $\tau_{xy} = \cos 2\gamma$ равносильно условию $\gamma = 0$. Допустим, еще и на отрезке LE , примыкающем к EA (см. рис. 1.5 – 1.7), касательные напряжения максимальны, т.е. характеристики вдоль LE касаются контактной линии HA . Пусть LA – наибольший из отрезков на HA , где $\tau_{xy}^- = 1$. Заметим, что $H \neq L$ так как $\gamma_H = \pi/4$. Действительно, на оси Ox касательные напряжения равны нулю в силу симметрии.

Такое напряженное состояние возникает, в частности, при условии Л. Прандтля (1.2.1) о постоянстве касательных напряжений вдоль слоя:

$$\partial\tau_{xy}/\partial x = 0.$$

Для слоев, симметричных относительно оси Ox , у которых $\tau_{xy}(x, 0) = 0$, это условие, очевидно, равносильно равенству

$$\tau_{xy} = y/a \quad (1.2.5)$$

для некоторой постоянной a . Хорошо известно что линии скольжения (характеристики) при условии Л. Прандтля являются дугами циклоид. Известно, что зона, в которой хотя бы приблизительно имеет место это условие, образует на сечении слоя криволинейный многоугольник $OLEBE'L'$ (см. рис. 1.5). Схема поля характеристик на рис. 1.5 является приближенной. В некоторой окрестности кривых EB и OL – границ прандтлевской области, – напряженное состояние имеет промежуточный вид, не являясь в точности прандтлевским. Например, кривая EB не может быть одновременно дугой и окружности, и циклоиды.

Если участок LE отсутствует, то зона прандтлевских напряжений – четырехугольник $OEBE'$ на рис. 1.4. Слой, показанный на этом рис., является самым толстым (широким), у которого в точке E характеристика горизонтальна, что равносильно, в силу последнего уравнения (1.2.3), условию (1.2.4) $\tau_{xy}^-(x, \varkappa) = 1$. Для того, чтобы найти относительную толщину $\varkappa$ такого слоя, предположим, что в области $DEBE'$ (рис. 1.4) имеет место прандтлевское напряженное состояние, и найдем координаты точек D и E_1 .

В силу сделанного предположения, формул (1.2.3) и (1.2.5) для точек кривой DE выполняются условия:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \cos 2\gamma, \\ \tau_{xy} = y/a. \end{cases}$$

Это дает уравнение любой характеристики для напряженного состояния Л. Прандтля как функции ординаты от угла наклона характеристики:

$$y = a \cos 2\gamma. \quad (1.2.6)$$

В точке E касательная к кривой DE горизонтальна, т.е. $\gamma_E = 0$. Очевидно, $y_E = \varkappa$, поэтому

$$a = \varkappa. \quad (1.2.7)$$

Получим уравнение кривой DE как зависимость x от γ . Из (1.2.6) и (1.2.7) следует, что $y = \varkappa \cos 2\gamma$. Поэтому

$$\frac{dx}{d\gamma} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{d\gamma} = \varkappa \operatorname{tg}^{-1} \gamma (\cos 2\gamma)' = -4\varkappa \cos^2 \gamma,$$

откуда находим уравнение кривой DE :

$$x = -\varkappa(2\gamma + \sin 2\gamma + C).$$

Координаты точки E : $\gamma_E = 0$; $x_E = 1 - \sqrt{2}\varkappa$. Подставляя их в предыдущее уравнение, получим значение постоянной C и окончательно, уравнение кривой DE :

$$x = -\varkappa(2\gamma + \sin 2\gamma) + 1 - \sqrt{2}\varkappa. \quad (1.2.8)$$

В точке D $\gamma_D = \pi/4$. Подставляя это в уравнение (1.2.8), получим:

$$x_D = -\varkappa(\pi/2 + 1) + 1 - \sqrt{2}\varkappa. \quad (1.2.9)$$

Очевидно, $x_B = 1 - \varkappa$. Поэтому

$$|DB| = x_B - x_D = (\pi/2 + \sqrt{2})\varkappa. \quad (1.2.10)$$

Следовательно, относительная толщина самой толстой прослойки, допускающей полную реализацию контактного упрочнения, равна

$$\varkappa = \frac{|AC|}{|OC|} = \frac{|AC|}{|OB| + |BC|} = \frac{\varkappa}{(\pi/2 + \sqrt{2})\varkappa + \varkappa} = \frac{1}{1 + \pi/2 + \sqrt{2}} \approx 0,251.$$

Будем называть менее прочный слой *тонким* (*тонкой прослойкой*), если его относительная толщина

$$\varkappa \leq \varkappa^*, \quad \varkappa^* = \frac{1}{1 + \pi/2 + \sqrt{2}} \approx 0,251. \quad (1.2.11)$$

Суммируя полученные результаты, получаем

Предложение 1.2.1. Для полной реализации контактного упрочнения в менее прочном слое необходимо и достаточно выполнения двух условий: (1.1.13) и (1.2.11).

Сетка линий скольжения слоя для случая, пограничного между первой и второй ситуациями: $\varkappa = \varkappa^*$, – представлена на рис. 1.4. Чтобы найти длину полуарки циклоиды между контактными границами, вычислим $|E_1D|$ (рис. 1.5). На кривой E_1D $\gamma_{E_1} = -\pi/2$, $y_{E_1} = \varkappa$. Подставляя эти значения в (1.2.6), получим: $a = -\varkappa$. Так как, очевидно,

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \gamma,$$

из (1.2.6) получаем:

$$\frac{dx}{d\gamma} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{d\gamma} = \varkappa \operatorname{tg} \gamma \frac{dy}{d\gamma} = \varkappa \operatorname{tg} \gamma \frac{d \cos 2\gamma}{d\gamma} = -4\varkappa \sin^2 \gamma.$$

Отсюда, с точностью до постоянного слагаемого, уравнение кривой E_1D можно записать:

$$x = -4\varkappa \int \sin^2 \gamma d\gamma = -\varkappa(2\gamma - \sin 2\gamma + C).$$

Так как $\gamma_D = -\pi/4$, а x_D вычисляется по формуле (1.2.9), после подстановки этих выражений в предыдущую формулу получим уравнение кривой E_1D как зависимость x от γ и абсциссу точки E_1 :

$$x_{E_1} = -\pi\varkappa + 1 - \sqrt{2}\varkappa.$$

Поэтому

$$|E_1D| = x_{E_1} - x_D = \varkappa(\pi/2 - 1) \approx 0,57\varkappa.$$

1.2.2 Критическое состояние тонкой прослойки при условии полной реализации контактного упрочнения. Формулы и алгоритм для вычисления критических усилий

Среднее критическое напряжение (в направлении ортогонально слою) при растяжении однородной полосы (т.е. не содержащей менее прочного слоя) в безразмерных величинах равняется, очевидно,

$$\sigma_{cr} = 2K.$$

Так как во всех точках менее прочного слоя критическое нормальное напряжение σ_y не может превышать напряжение в соответствующей точке однородной полосы, для всех точек менее прочного слоя имеет место неравенство:

$$\sigma_y(x, y) \leq 2K. \quad (1.2.12)$$

Напряженное состояние слоя при условии Прандтля хорошо известно [50]:

$$\begin{cases} \sigma_x(x, y) = -x/a - 2\sqrt{1 - y^2/a^2} + C; \\ \sigma_y(x, y) = -x/a + C; \\ \tau_{xy}(x, y) = y/a, \end{cases} \quad (1.2.13)$$

где в данном случае, в силу (1.2.7), $a = \varkappa$, а C – постоянная, требующая определения. Для ее нахождения заметим, что с одной стороны, $\sigma_x(B) = -x_B/a - 2 + C$ по первой формуле (1.2.13), с другой стороны, $\sigma_x(B) = 0$. Так как $a = \varkappa$, а $x_B = 1 - \varkappa$, то $C = 1/\varkappa + 1$, откуда

$$\sigma_y(x, y) = -x/\varkappa + 1/\varkappa + 1 \quad (1.2.14)$$

в силу (1.2.13). Рассмотрим два типа напряженного состояния в слое.

Первый тип напряженного состояния слоя. Пусть условие (1.2.12) выполняется всюду в слое. Тогда прандтлевское напряженное состояние имеет место в области, содержащей весь отрезок OB оси Ox (см. рис. 1.5). Из условий (1.2.12) и (1.2.11) следует

Предложение 1.2.2. Для реализации первого типа напряженного состояния необходимо и достаточно выполнения условий:

$$\frac{1}{2K - 1} \leq \varkappa \leq \varkappa^* \approx 0,251. \quad (1.2.15)$$

Множество значений $\varkappa$, при которых выполняется условие (1.2.15), непусто при условии

$$K \geq \frac{\varkappa^* + 1}{2\varkappa^*} \approx 2,5. \quad (1.2.16)$$

Легко найти среднее предельное напряжение в этом случае, вычисляя его по формуле (1.2.2) по оси симметрии слоя – оси Ox :

$$\sigma_{cr} = \int_0^1 \sigma_y(x, 0) dx = \int_0^{1-\varkappa} \left(\frac{1-x}{\varkappa} + 1 \right) dx + 2\varkappa = \frac{(\varkappa + 1)^2}{2\varkappa}. \quad (1.2.17)$$

Второй тип напряженного состояния слоя. Пусть на некотором отрезке $[0; N]$ оси Ox напряжения $\sigma(x, y)$, вычисленные по формуле (1.2.13), превышают $2K$. В силу сказанного выше это означает, что для некоторой точки N оси Ox на отрезке ON формула (1.2.14) неверна, и на этом отрезке напряжения $\sigma_y(x, y) = 2K$ (см. рис. 1.6 и 1.7).

Предложение 1.2.3. Для реализации второго типа напряженного состояния необходимо и достаточно выполнения условий:

$$\begin{cases} \varkappa(2K - 1) \leq 1; \\ K \geq K_{cr} \approx 1,98; \\ \varkappa \leq \varkappa^* \approx 0,251. \end{cases} \quad (1.2.18)$$

Действительно, изменив знаки неравенств утверждения 1.2.2 и добавив условия полной реализации контактного упрочнения (1.1.13) и (1.2.11), получим требуемое.

Данный тип напряженного состояния определяется следующим полем характеристик (см. рис. 1.6 и 1.7). В области $OHMNM'H'$ поле простое однородное, в треугольниках NML и $N'M'L'$ поле переходное между прандтлевским и однородным: одно из двух семейств характеристик состоит из прямых. В области $NLEBE'L'$ поле прандтлевское.

Координата x_N точки N находится из уравнения $\sigma(x, y) = 2K$, которое в силу (1.2.14) дает:

$$x_N = 1 + \varkappa - 2\varkappa K. \quad (1.2.19)$$

В этом случае среднее предельное напряжение, при его вычислении по оси симметрии слоя – оси Ox , находится так:

$$\sigma_{cr} = \int_0^1 \sigma_y(x, 0) dx = \int_0^{x_N} 2K dx + \int_{x_N}^{1-\varkappa} \left(\frac{1-x}{\varkappa} + 1 \right) dx + 2\varkappa.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^{x_N} 2K dx &= 2K + 2\varkappa K - 4\varkappa K^2, \\ \int_{x_N}^{1-\varkappa} \left(\frac{1-x}{\varkappa} + 1 \right) dx &= 2\varkappa K^2 - 2\varkappa, \end{aligned}$$

то

$$\sigma_{cr} = 2K(1 + \varkappa - \varkappa K). \quad (1.2.20)$$

Заметим, что если $\varkappa(2K - 1) = 1$, – случай, относящийся к обоим типам напряженного состояния, – выражения (1.2.17) и (1.2.20) совпадают.

На рис. 1.8 показана зависимость средних критических напряжений σ_{av} от относительной толщины менее прочного слоя $\varkappa$ при различных значениях коэффициента механической неоднородности K .

1.3 "Нетонкие" менее прочные слои

1.3.1 Напряженное состояние "нетонких" менее прочных слоев в критический момент нагружения

Примеры напряженного состояния менее прочного слоя в критический момент нагружения, когда не выполняется условие (1.2.11), то есть когда

$$\varkappa > \varkappa^* = \frac{1}{1 + \pi/2 + \sqrt{2}} \approx 0,251, \quad (1.3.1)$$

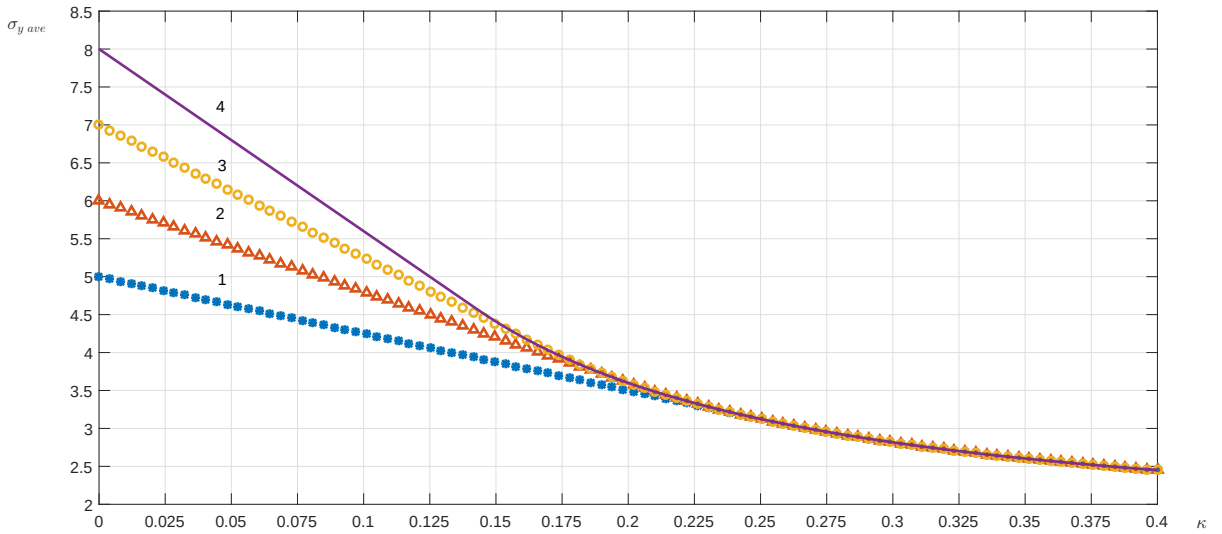


Рис. 1.8: Зависимость средних критических напряжений σ_{av} от относительной толщины менее прочного слоя κ при различных значениях коэффициента механической неоднородности $K = 2, 5; 3; 3, 5; 4$ (снизу вверх).

представлены на рис. 1.9 – 1.12. Как было отмечено, отсутствие полной реализации контактного упрочнения проявляется в том, что

$$\max \omega < \pi/4, \quad (1.3.2)$$

где $\max \omega$ – наибольшая величина угла ω , которая достигается в процессе его увеличения вследствие увеличения внешней нагрузки.

Существуют две причины остановки роста угла ω .

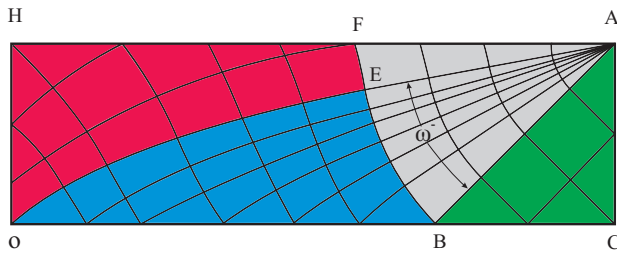


Рис. 1.9: Поле характеристик (линий скольжения) в критический момент нагружения слоя при неполной реализации контактного упрочнения. Толстая прослойка. $\kappa = 0, 3$

Первая причина – значительная толщина прослойки. Случай, когда условие (1.3.2) является следствием значительной толщины прослойки, показаны на рис. 1.9, 1.10. Если толщина прослойки "велика", то характеристика AEO (рис. 1.13) должна ограничивать веерно-центрированный участок ABE , т.е. граница AE этого участка является частью характеристики, содержащей точку O . Докажем это. Пусть это неверно, т.е. некоторая характеристика AE_1N_1 пересекается с центрированным полем по отрезку E_1A . Тогда

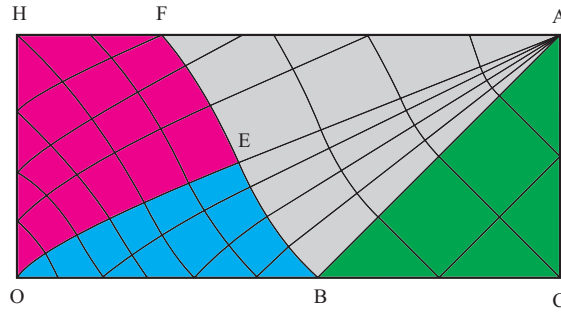


Рис. 1.10: Поле характеристик (линий скольжения) в критический момент нагружения слоя при неполной реализации контактного упрочнения. Толстая прослойка $\varkappa = 0,44$

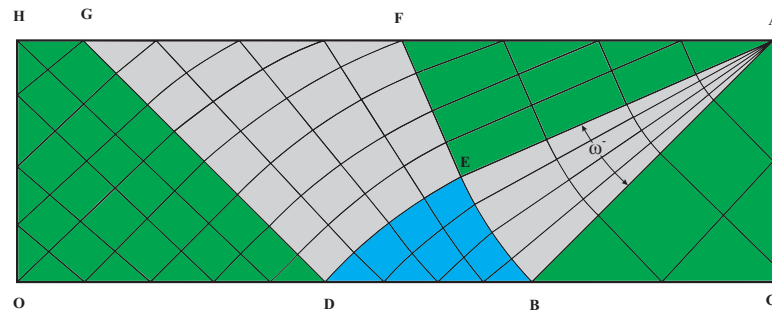


Рис. 1.11: Поле характеристик (линий скольжения) в критический момент нагружения слоя при неполной реализации контактного упрочнения.

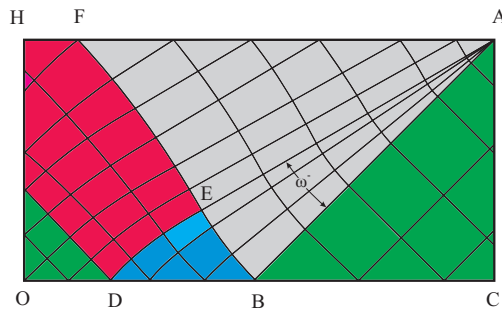


Рис. 1.12: Поле характеристик (линий скольжения) в критический момент нагружения слоя при неполной реализации контактного упрочнения.

существование характеристического четырехугольника $E_2E_1N_1N_2$ невозможно. Действительно, характеристики N_1A и N_2A в точках N_1 и N_2 образуют одинаковый угол $\pi/4$ с осью Ox , а в точках E_1 и E_2 – разные углы. Это противоречит первой теореме Генки об одинаковом угле поворота при движении по противоположным сторонам характеристического четырехугольника.

Обозначим через $\omega^* = \omega^*(\varkappa)$ значение наибольшего угла ω централизованного поля ABE при данной относительной толщине слоя $\varkappa$. Наоборот, пусть $\varkappa^* = \varkappa^*(\omega)$ – наибольшее значение $\varkappa$ при данном угле ω .

Случай, когда граница веерно-центрированного участка поля характеристик с центром в точке A выхода контактной поверхности на свободную, является частью характеристики, содержащей точку O – центр слоя, будем называть *первым типом критического*

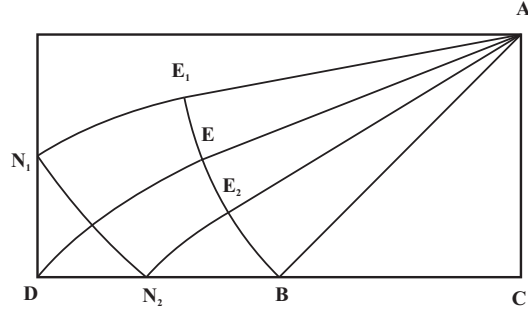


Рис. 1.13: Схема поля характеристик (линий скольжения) "толстой" прослойки.

состояния слоя. В этом случае в критический момент нагружения основной материал деформируется упруго.

Вторая причина неполной реализации контактного упрочнения – невысокий коэффициент механической неоднородности K . На рис. 1.11 и 1.12 представлена ситуация, когда размеры угла ω лимитируются невысоким коэффициентом механической неоднородности K . В процессе деформирования (растяжения) соединения может возникнуть ситуация, когда основной материал в окрестности контактной границы переходит в пластическое состояние. В этот момент увеличение контактного упрочнения заканчивается, и наступает состояние предразрушения. Необходимое условие этого случая – $K < K_{cr}$. В этом случае максимальное значение угла ω обозначим $\omega^{**} = \omega^{**}(K)$.

Случай, когда часть основного материала в критический момент переходит в пластическое состояние, будем называть *вторым типом критического состояния*.

Вычислим $\varkappa^* = \varkappa^*(\omega)$. Найдем координаты точки E на рис. 1.9. Легко видеть, что

$$\gamma_E = \pi/4 - \omega,$$

$$y_E = \varkappa - \sqrt{2}\varkappa \sin(\pi/4 - \omega) = \varkappa(1 - \cos \omega + \sin \omega).$$

Тогда из уравнения (1.2.7) следует, что

$$a = \frac{\varkappa(1 - \cos \omega + \sin \omega)}{\sin 2\omega}. \quad (1.3.3)$$

(коэффициент a введен в (1.2.5)). Зависимость координаты x от γ в любой точке кривой OE (на рис. 1.11 – кривой DE) получена в работе [21, с. 68]:

$$x = -a(2\gamma + \sin 2\gamma - \pi/2 + 2\omega - \cos 2\omega) + 1 - \varkappa(\cos \omega + \sin \omega).$$

В точке O на рис. 1.9 $x = 0$, а $\gamma = \pi/4$. Подставляя эти значения, а также выражение (1.3.3) для вычисления постоянной a в предыдущее уравнение, получим зависимость относительных размеров слоя в случае рис. 1.9 от угла ω :

$$\varkappa^* = \frac{\sin 2\omega}{(1 - \cos \omega + \sin \omega)(1 + 2\omega - \cos 2\omega) + (\cos \omega + \sin \omega) \sin 2\omega}, \quad 0 < \omega < \pi/4. \quad (1.3.4)$$

Когда $\omega = \pi/4$, формула (1.3.4) сводится к формуле (1.2.11). Обращая уравнение (1.3.4), получим наибольшее значение угла ω^* при данной относительной толщине слоя $\varkappa$. Найдем

приближенную формулу для ω^* . Раскладывая в ряды Маклорена тригонометрические функции, входящие в выражение

$$\varkappa^* = \left(\frac{(1 - \cos \omega + \sin \omega)(1 + 2\omega - \cos 2\omega)}{\sin 2\omega} + (\cos \omega + \sin \omega) \right)^{-1},$$

после упрощений получим:

$$\varkappa^* = \frac{1}{1 + 2\omega + 2\omega^2 + 5/6\omega^3 + 5/12\omega^4 + \dots} \approx \frac{1}{(1 + \omega + 1/2\omega^2)^2}.$$

Отсюда

$$1 + \omega + 0,5\omega^2 \approx 1/\sqrt{\varkappa}$$

и, окончательно,

$$\omega^* \approx \sqrt{2/\sqrt{\varkappa} - 1} - 1. \quad (1.3.5)$$

Ниже в п. 1.3.2 будет получена зависимость $\omega^{**} = \omega^{**}(K)$, которую, в силу (1.3.12) и (1.3.10) можно записать в виде:

$$\omega^{**} = \arcsin \left(K \sin \left(\frac{K-1}{2K} \left(1 + \frac{(K-1)^2}{8K} \right) \right) \right). \quad (1.3.6)$$

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 1.3.1. Неполная реализация контактного упрочнения в силу большой толщины прослойки (вторая ситуация критического состояния слоя) происходит тогда и только тогда, когда $\omega^* \leq \omega^{**}$, т.е. когда

$$\varkappa \geq \frac{4}{((\omega + 1)^2 + 1)^2}, \quad \omega = \arcsin \left(K \sin \left(\frac{K-1}{2K} \left(1 + \frac{(K-1)^2}{8K} \right) \right) \right). \quad (1.3.7)$$

Аналогично, неполная реализация контактного упрочнения в силу малой величины коэффициента контактного упрочнения (третья ситуация критического состояния, при котором основной материал в приконтактных зонах вовлекается в пластическое течение) происходит тогда и только тогда, когда $\omega^* \geq \omega^{**}$,

$$\varkappa \leq \frac{4}{((\omega + 1)^2 + 1)^2}, \quad \omega = \arcsin \left(K \sin \left(\frac{K-1}{2K} \left(1 + \frac{(K-1)^2}{8K} \right) \right) \right). \quad (1.3.8)$$

Кривая, заданная уравнением $\omega^* = \omega^{**}$, т.е. уравнением

$$\varkappa = \frac{4}{((\omega + 1)^2 + 1)^2}, \quad \omega = \arcsin \left(K \sin \left(\frac{K-1}{2K} \left(1 + \frac{(K-1)^2}{8K} \right) \right) \right),$$

показана на рис. 1.14. Рис. 1.14 позволяет определить причины неполной реализации контактного упрочнения. Если точка с координатами $(K; \varkappa)$ расположена выше кривой (условие (1.3.7)), то контактное упрочнение реализуется не полностью из-за большой относительной толщины слоя $\varkappa$; если ниже (левее) кривой (условие (1.3.8)) – контактное упрочнение реализуется не полностью из-за малой механической неоднородности K .

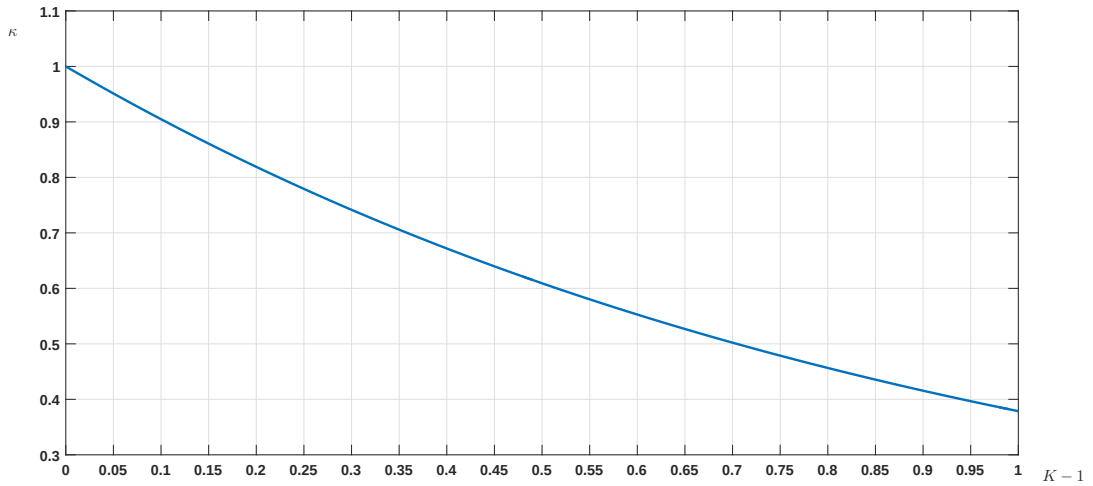


Рис. 1.14: Кривая $\omega^* = \omega^{**}$ в координатах $(K; \kappa)$. Точки выше кривой соответствуют второй ситуации критического состояния слоя, ниже (левее) кривой – третьей ситуации критического состояния слоя.

1.3.2 Исследование напряженного состояния слоя в окрестности свободной поверхности. Вычисление основных внутренних параметров

Вычислим параметры критического напряженного состояния менее прочного слоя и основного материала в окрестности особой точки A выхода контактной поверхности на свободную. К этим параметрам относятся: размеры участка контактной поверхности FA (то есть координата x_F), на котором постоянны в критический момент нагружения напряжения $\tau_{xy} = \tau_{xy}^{**}$ и $\sigma_y = \sigma_y^{**}$. Указанные величины были получены в работах [21, с. 71–73, 79], [22, с. 79–83] и др., как зависимости от параметра K , но только для значений $K \in (1; 1.5)$. Здесь это ограничение снимается; искомые величины находятся для любых $K \in (1; \infty)$.

Уравнение (1.1.6) получено нормировкой размерных уравнений

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4(\sigma_B^\pm)^2$$

величинами σ_B^- в слое и σ_B^+ в основном материале соединения. Поэтому на контактной границе безразмерные напряжения терпят разрыв:

$$\sigma_y^- = K\sigma_y^+; \quad \tau_{xy}^- = K\tau_{xy}^+, \quad (1.3.9)$$

где $K = \sigma_B^+/\sigma_B^-$. Для нахождения напряженного состояния в окрестности $CBFB_1A$ свободной поверхности B_1AC (рис. 1.15) следует решить задачу Коши для уравнений (1.1.4) – (1.1.6) при условиях (1.1.10). Основным шагом здесь является *решение задачи сопряжения для напряжений*, то есть задачи вычисления напряжений на контактной границе по уравнениям (1.3.9) в области $CBFB_1A$. Пусть ω^- – угол поворота η -характеристики при

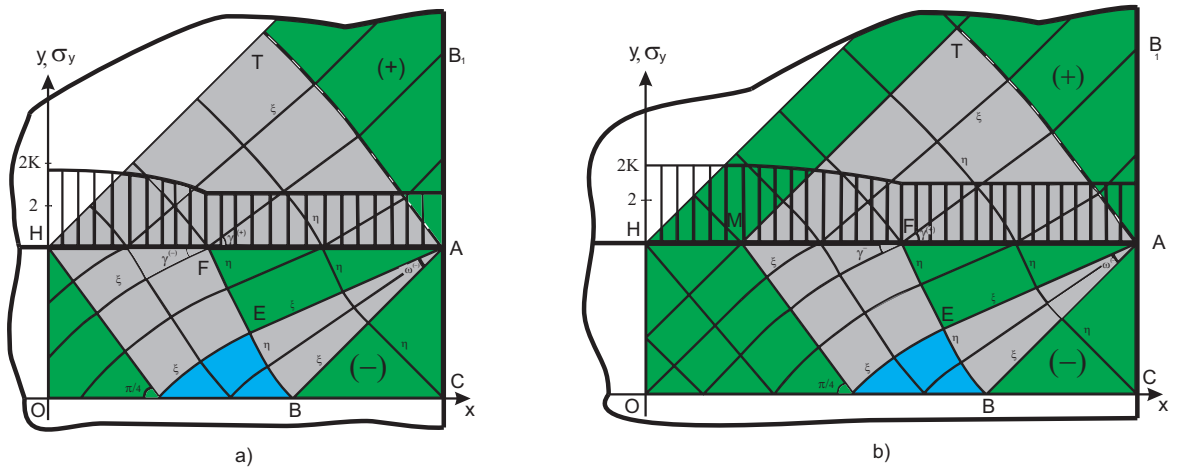


Рис. 1.15: Поле характеристик неоднородного соединения и эпюра напряжений σ_y на контактной поверхности в критический момент нагружения: а) напряжения σ_y не достигают значения $2K$; б) напряжения σ_y достигают значения $2K$ на отрезке HM ($ACOH$ – четверть менее прочного слоя).

движении точки по характеристике от точки B к точке F (см. рис. 1.15). Аналогично, ω^+ – положительный угол поворота ξ -характеристики при переходе от точки B_1 к точке F . Заметим, что ω^- – угол веерно-центрированного поля в МП слое с вершиной в точке A , а угол "складки" по линии AT – участка "наложения" полей характеристик [25]. Очевидно,

$$0 \leq \omega^- \leq \pi/4.$$

Известно [22, с. 80], что система (1.3.9) может быть записана в виде:

$$\begin{cases} 1 + 2\omega^- + \cos 2\omega^- = K(1 - 2\omega^+ + \cos 2\omega^+); \\ \sin 2\omega^- = K \sin 2\omega^+, \end{cases} \quad (1.3.10)$$

для всех точек отрезка FA . Поэтому на отрезке FA углы ω^+ , ω^- и напряжения $\sigma_x^\pm$, $\sigma_y^\pm$ и $\tau_{xy}^\pm$ постоянны. В работах [22, 21, 27] аналитически получено приближенное решение системы (1.3.10):

$$\omega^{**} = \frac{K-1}{2} \left(1 + \frac{(K+1)(K-1)^2}{16} \right); \quad (1.3.11)$$

$$(\omega^+)^{**} = \frac{K-1}{2K} \left(1 + \frac{(K-1)^2}{8K} \right). \quad (1.3.12)$$

Здесь знак $**$ означает критическое (максимальное) значение, соответствующее началу пластического течения более прочной части. Сравнение формулы (1.3.11) этого решения с полученным там же численным решением показало, что при $K < 1,5$ с точностью до 0,005 эти решения совпадают, но при $K > 1,5$ формула (1.3.11) непригодна. С другой стороны, формула (1.3.12) дает совпадение с численным решением с указанной точностью

для всех значений K на промежутке $K \in [1; K_{cr}]$. Для получения более точного аналитического выражения для напряжения σ_y^- можно вместо формулы (1.3.11) воспользоваться формулой, следующей из (1.3.12) и (1.3.10):

$$\omega^{**} = \frac{1}{2} \arcsin \left(K \sin \left(\frac{K-1}{K} \left(1 + \frac{(K-1)^2}{8K} \right) \right) \right).$$

Технически проще будет воспользоваться формулой [22, с. 79]

$$\sigma_y^- = K (1 - 2\omega^+ + \cos 2\omega^+) \quad (1.3.13)$$

и формулой (1.3.12). Подставляя правую часть (1.3.12) в (1.3.9), получим, что в точках отрезка FA , то есть в точках с координатами $(x; \varkappa)$, $x \in (x_F; 1)$,

$$\sigma_y^-(x; \varkappa) = \sigma_y^{**},$$

где

$$\sigma_y^{**} = 2 + (K-1) \left[1 - \frac{(K-1)^2}{4K} \left(1 + \frac{4}{K} + \frac{(K-1)^2}{K} \right) \right]. \quad (1.3.14)$$

Эта формула дает весьма точные значения для всех $K \in [1; K_{cr}]$. В частности, она позволяет получить значение для K_{cr} с высокой точностью. Действительно, при

$$K = K_{cr} = 1,9816$$

$$\sigma_y^- = 2,5707 = 1 + \pi/2 = 1 + 2(\pi/4) + \cos(2(\pi/4)).$$

Обозначим значение напряжения σ_y в критический момент нагружения через σ_y^* . В точках отрезка контактной границы FA величина σ_y^* постоянна и вычисляется по формуле:

$$\sigma_y^* = \begin{cases} \sigma_y^{**}, & K \in [1; K_{cr}]; \\ 1 + \pi/2, & K \in [K_{cr}; \infty). \end{cases} \quad (1.3.15)$$

Здесь σ_y^{**} задано формулой (1.3.14). Зависимость σ_y^* от коэффициента механической неоднородности K показана на рис. 1.16.

Вычислим касательные напряжения τ_{xy}^{**} в точках отрезка FA . Для всех $K \in [1; K_{cr}]$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{**} &= K \sin(2\omega^+) \approx K \left(2\omega^+ - (2\omega^+)^3/6 \right) = \\ &= K \left[\frac{K-1}{K} \left(1 + \frac{(K-1)^2}{8K} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{K-1}{K} \right)^3 \left(1 + \frac{(K-1)^2}{8K} \right) \right] \approx \\ &\approx (K-1) \left[1 + \frac{(K-1)^2}{8K} \left(1 - \frac{4}{3K^2} - \frac{(K-1)^3}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Следовательно, в точках отрезка FA , $\tau_{xy}^-(x, \varkappa) = \tau_{xy}^*$, где

$$\tau_{xy}^* = \begin{cases} \tau_{xy}^{**}, & K \in [1; K_{cr}]; \\ 1, & K \in [K_{cr}; \infty). \end{cases} \quad (1.3.17)$$

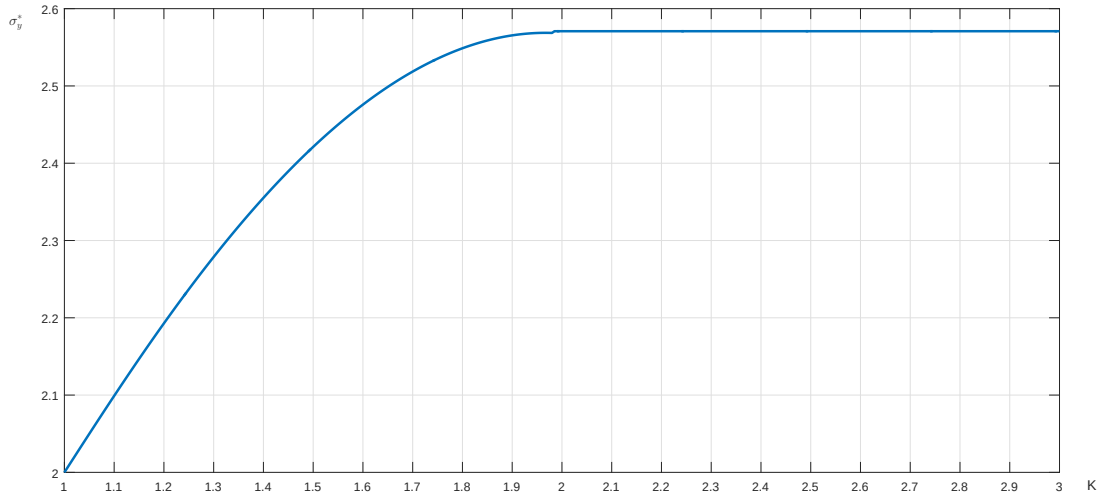


Рис. 1.16: Зависимость нормальных напряжений σ_y^* в окрестности свободной поверхности от коэффициента механической неоднородности K , вычисленная по формулам (1.3.14), (1.3.15).

Здесь τ_{xy}^{**} задано формулой (1.3.12). Из формулы (1.3.13) следует, что отклонение значений τ_{xy}^* от значений, вычисленных по формуле

$$\tau_{xy}^* = K - 1, \quad (1.3.18)$$

составляет менее двух процентов. Зависимость величины (1.3.17) касательных напряжений τ_{xy}^* от коэффициента механической неоднородности K показана на рис. 1.17.

Найдем абсциссу x_F точки F . Когда $K \in [1; K_{cr}]$, то (в [22, с. 83] допущена неточность):

$$x_F = 1 - \frac{2\kappa}{\cos \omega^- + \sin \omega^-},$$

$$\cos \omega^- + \sin \omega^- = \sqrt{1 + \sin(2\omega^-)} = \sqrt{1 + K \sin(2\omega^+)} = \sqrt{1 + \tau_{xy}^*}.$$

Отсюда

$$x_F = \begin{cases} 1 - \frac{2\kappa}{\sqrt{1 + \tau_{xy}^*}}, & K \in [1; K_{cr}]; \\ 1 - \sqrt{2\kappa}, & K \in [K_{cr}; \infty). \end{cases} \quad (1.3.19)$$

Величина τ_{xy}^* может быть вычислена по формулам (1.3.16), (1.3.17). Если использовать более простую формулу (1.3.18), координата точки F может быть найдена по формуле:

$$x_F = \begin{cases} 1 - \frac{2\kappa}{\sqrt{K}}, & K \in [1; 2]; \\ 1 - \sqrt{2\kappa}, & K \in [2; \infty). \end{cases} \quad (1.3.20)$$

Графики зависимости x_F от K при различных значениях относительной толщины слоя κ показаны на рис. 1.18. Как было отмечено, во всех формулах данной главы $\kappa < 0,5$.

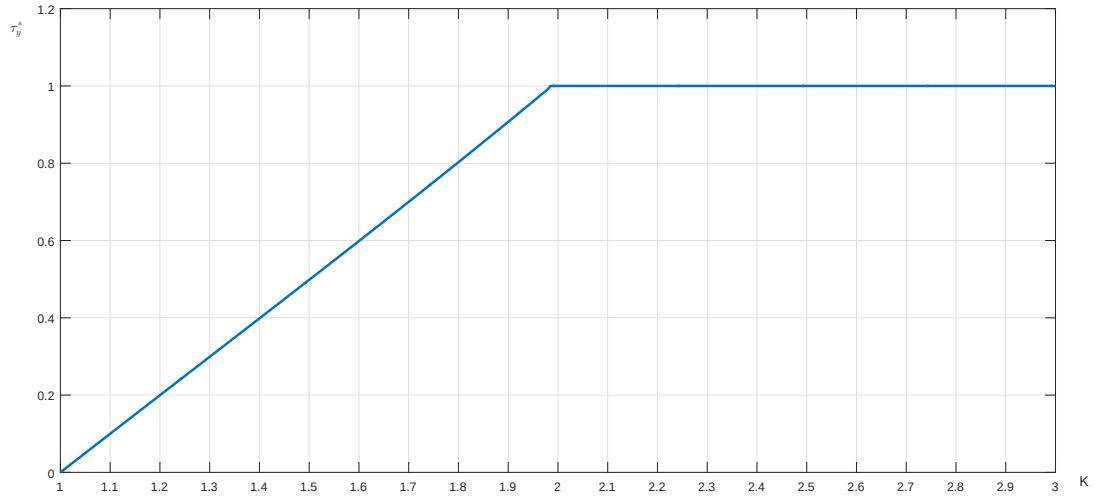


Рис. 1.17: Зависимость касательных напряжений τ_{xy}^* в окрестности свободной поверхности от коэффициента механической неоднородности K , вычисленная по формулам (1.3.16), (1.3.17).

1.3.3 Аппроксимация условия пластичности (1.1.6)

Один из распространенных подходов [89, 90, и др.] к исследованию математических моделей, основанных на системе уравнений (1.1.4) – (1.1.6), использует замену условия пластичности (1.1.6), которое назовем здесь точным, на приближенное условие вида:

$$|\sigma_y - \sigma_x| = f(\tau_{xy}). \quad (1.3.21)$$

Это в некоторых случаях приводит к упрощению теоретического анализа и получению "на выходе" обзримых аналитических выражений. Так как на осях симметрии $\tau_{xy} = 0$, характеристики должны пересекать оси симметрии сечения слоя под углом $\pi/4$. Поэтому было бы некорректным в условиях пластичности типа (1.3.21) использование линейных аппроксимаций вида

$$f(\tau) = 1 - \mu\tau.$$

Действительно, тогда семейства характеристик суть семейства параллельных прямых, что существенно отличается от реальной картины поля характеристик, причем угловой коэффициент этих прямых $-\mu \pm \sqrt{1 + \mu^2}$, очевидно, не равен ± 1 при $\mu \neq 0$. Аппроксимация, использованная в работах [76, 22, 21, 26],

$$|\sigma_y - \sigma_x| = 2\sqrt{1 - \tau_{xy}^2} \approx 2 - \tau_{xy}^2, \quad (1.3.22)$$

удовлетворительна при малых значениях касательных напряжений, что имеет место при малой механической неоднородности: $K < 1,5$. Более точная оценка предложена, но не применялась в [21, с. 77]:

$$f(\tau) = 2(1 - \mu\tau_{xy}^2), \quad \mu^{-1} = 1 + \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad (1.3.23)$$

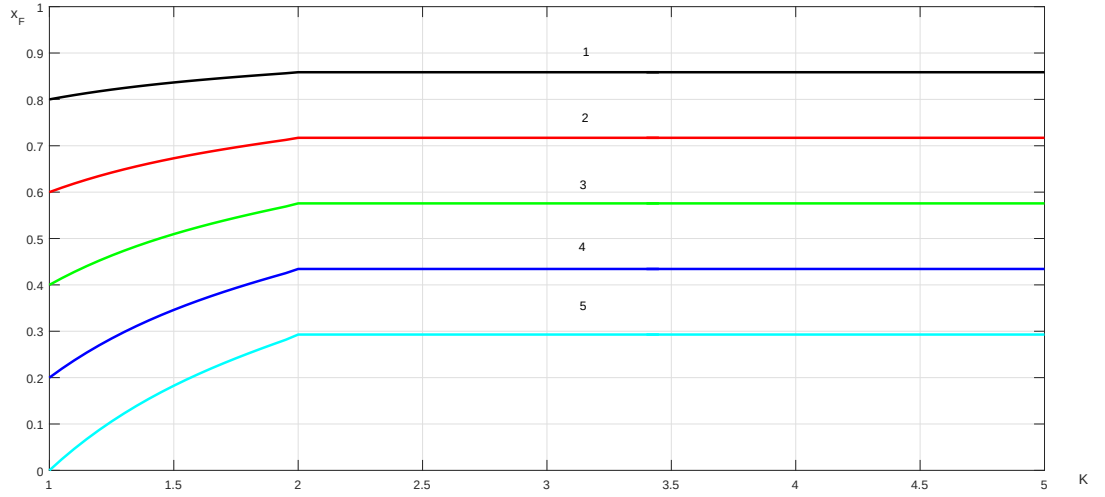


Рис. 1.18: Зависимости x_F от K , вычисленные по формулам (1.3.19) и (1.3.20), при: 1) $\kappa=0,1$; 2) $\kappa=0,2$; 3) $\kappa=0,3$; 4) $\kappa=0,4$; 5) $\kappa=0,5$.

где $\alpha = \max |\tau_{xy}|$, то есть $|\tau_{xy}| \in [0; \alpha]$. В этом случае выполняется неравенство пластичности

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \leq 4, \quad (1.3.24)$$

а ошибка, допускаемая при замене (1.1.6) на (1.3.23), консервативна, то есть идет в запас прочности.

Если же касательные напряжения могут принимать значения, близкие к 1, точное условие (1.1.6) существенно отличается от (1.3.23), которое при $\alpha = 1$ приобретает вид:

$$|\sigma_y - \sigma_x| = 2(1 - \tau_{xy}^2), \quad (1.3.25)$$

и может привести к заметной ошибке при вычислении нормальных напряжений. Рассмотрим аппроксимацию точного условия пластичности для всего диапазона $[0; 1]$ значений $|\tau_{xy}|$, удовлетворяющую неравенству пластичности (1.3.24) и достаточно хорошо приближающую точное условие. Пусть $\alpha \in [0; 1]$ – произвольное число. Положим в (1.3.21)

$$f(\tau_{xy}) = \begin{cases} 2(1 - \mu\tau_{xy}^2), & \mu^{-1} = 1 + \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad \tau_{xy} \in [0; \alpha]; \\ a(1 - \tau_{xy}^2), & a^{-1} = \sqrt{1 - \alpha^2}/2, \quad \tau_{xy} \in [\alpha; 1]. \end{cases} \quad (1.3.26)$$

Эта функция непрерывна на $[0; 1]$, так как в точке $\tau_{xy} = \alpha$ оба ее значения равны $2\sqrt{1 - \alpha^2}$. Будем определять отклонение функций, заданных на отрезке $[0; 1]$, по норме пространства $L^1[0; 1]$. Иначе говоря, чтобы минимизировать отклонение функции $f(\tau_{xy})$ (1.3.26) от функции $f(\tau_{xy}) = 2\sqrt{1 - \tau_{xy}^2}$, представляющей точное условие (1.1.6), подберем параметр α так, чтобы площадь фигуры ("двойного сегмента", рис. 1.19), ограниченная сверху кривой точного условия, а снизу линией (1.3.26), была наименьшей:

$$\frac{S(\alpha)}{2} = \int_0^\alpha \left(\sqrt{1 - \tau^2} - 1 + \frac{\tau^2}{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}} \right) d\tau + \int_\alpha^1 \left(\sqrt{1 - \tau^2} - \frac{1 - \tau^2}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right) d\tau \rightarrow \min. \quad (1.3.27)$$

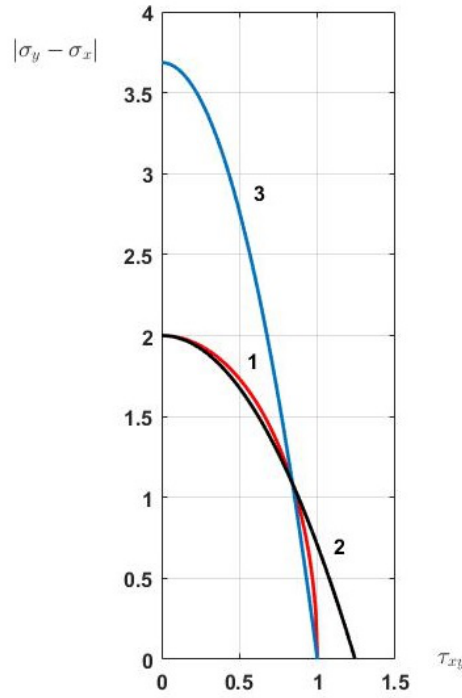


Рис. 1.19: Графики функций, аппроксимирующих условие пластичности: (1.3.25) (1) и (1.3.26) (2 и 3).

Для вычисления производной функции $S(\alpha)/2$ воспользуемся формулой производной интеграла с переменным верхним пределом с зависящей от верхнего предела как от параметра подинтегральной функции:

$$\left(\int_a^\alpha f(\tau, \alpha) d\tau \right)' = f(\alpha, \alpha) + \int_a^\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\tau, \alpha) d\tau.$$

Получим после упрощений:

$$\frac{S'(\alpha)}{2} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)(1+\alpha)^3}}.$$

Значение параметра α , при котором функция $S(\alpha)$ достигает минимального значения, находится из уравнения

$$(1-\alpha)(1+\alpha)^3 - 1 = 0.$$

Его решение, с точностью до четырех знаков после запятой,

$$\alpha^* = 0,8392.$$

Тогда значения параметров μ и a из формулы (1.3.26), соответствующие значению α_{min} , равны:

$$\mu^* = 0,6477, \quad a^* = 3,6778. \quad (1.3.28)$$

Таким образом, если условие пластичности (1.1.6) будет аппроксимироваться условием:

$$|\sigma_y - \sigma_x| = \begin{cases} 2(1 - \mu^* \tau_{xy}^2), & \tau_{xy} \in [0; \alpha^*]; \\ a^*(1 - \tau_{xy}^2), & \tau_{xy} \in [\alpha^*; 1]. \end{cases} \quad (1.3.29)$$

то площадь "двойного сегмента", рис. , будет минимальна и равна $S(\alpha_{min}) = 0,057616$, что составляет 0,03668 от площади четверти эллипса пластичности (относительная погрешность). Заметим, что если условие пластичности аппроксимировать условием (1.3.25), относительная погрешность составит $1 - 8/(3\pi) = 0,15117$.

Если максимальное значение касательных напряжений в слое в критический момент меньше α^* , с точки зрения как точности, так и сложности вычислений лучше использовать аппроксимацию (1.3.21), (1.3.23), то есть условие

$$|\sigma_y - \sigma_x| \approx 2(1 - \mu \tau_{xy}^2), \quad \mu^{-1} = 1 + \sqrt{1 - \alpha^2} = 1 + \sqrt{2K - K^2}. \quad (1.3.30)$$

Последнее равенство следует из формулы (1.3.18): $\alpha = \max |\tau_{xy}| = K - 1$.

1.3.4 Исследование напряженного состояния слоя в его внутренней части на основе гипотезы (1.1.1). Вычисление касательных напряжений

В этом пункте в основном используется методика исследования, предложенная в работах [22, 21]. Заменяем уравнение (1.1.6) на приближенное уравнение вида (1.3.30), если $\tau^* = K - 1 \leq \alpha^*$, то есть $K \leq 1,8392$, или (1.3.29) в противном случае. Используя (1.3.29) и (1.3.30), исключим из системы уравнений (1.1.4) и (1.1.5) нормальные напряжения. После преобразований получим нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных относительно неизвестной функции τ_{xy} :

$$-\beta \frac{\partial^2 (\tau_{xy}^2)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 0, \quad (1.3.31)$$

где

$$\beta = \begin{cases} 2/(1 + \sqrt{2K - K^2}), & \text{если } K \leq 1,8392; \\ 2\mu^* = 1,2954, & \text{если } K > 1,8392; \tau_{xy} \in [0; \alpha^*] = [0; 0,8392]; \\ a^* = 3,6778, & \text{если } K > 1,8392; \tau_{xy} \in [\alpha^*; 1] = [0,8392; 1]. \end{cases} \quad (1.3.32)$$

При $\beta = 1$ уравнение (1.3.31) приобретает известный вид [22, 21].

Подставляя в (1.3.31) правую часть (1.1.1), получим для функции $X(x)$ уравнение:

$$X'' - 4\beta X X' = 0. \quad (1.3.33)$$

Кроме того, из (1.1.9) и (1.1.1) следует, что

$$X(0) = 0. \quad (1.3.34)$$

Точное решение задачи (1.3.33), (1.3.34) в случае растяжения имеет вид:

$$X(x) = 0,5A \beta^{-1} \operatorname{tg}(Ax).$$

Здесь A – произвольный положительный параметр. Из (1.1.2) следует, что всюду в слое, за исключением некоторых окрестностей свободных поверхностей,

$$\tau_{xy} = 0,5Ay\beta^{-1} \operatorname{tg}(Ax). \quad (1.3.35)$$

Параметр A является одним из основных внутренних параметров, необходимых при вычислении касательных и затем нормальных напряжений. Для его вычисления следует приравнять значения τ_{xy} , найденные в точке F по формулам (1.3.16), (1.3.17) с одной стороны, и (1.3.35) с другой. Когда $K \in [1; K_{cr}]$, получим уравнение:

$$A\kappa \operatorname{tg}(Ax_F) = 2\beta\tau_{xy}^*. \quad (1.3.36)$$

Введем обозначение [22] для функции, обратной функции

$$y = x \operatorname{tg} x : \quad (1.3.37)$$

$$x = y \operatorname{tg} y \Leftrightarrow y = \operatorname{atgd}(x), \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y \in (-\pi/2; \pi/2). \quad (1.3.38)$$

Тогда уравнение (1.3.36) можно записать в виде:

$$A = \frac{1}{x_F} \operatorname{atgd} \left(\frac{2\beta x_F \tau_{xy}^*}{\kappa} \right). \quad (1.3.39)$$

Если $K \in [K_{cr}; \infty)$, то

$$A = \frac{1}{1 - \sqrt{2}\kappa} \operatorname{atgd} \left(\frac{2\beta(1 - \sqrt{2}\kappa)}{\kappa} \right). \quad (1.3.40)$$

Если $K < \alpha^* = 1,8392$, как видно из формулы (1.3.32), $\beta = 2/(1 + \sqrt{2K - K^2})$, откуда $\beta \in (1; 1,2954)$.

Рассмотрим случай $K > 1,8392$. Тогда τ_F – это наибольшее значение напряжений τ_{xy} , – больше α^* . Сначала надо найти τ_{xy} на отрезке $[\alpha^*; \tau_F]$. В этом случае по формуле (1.3.32) $\beta = \alpha^* = 3,6778$. Тогда аргумент функции в (1.3.39) принимает значения порядка 10 – 20, и для вычисления atgd можно применять простую формулу (1.4.5) (см. ниже пункт 1.4). Тогда из (1.3.39) получим, обозначив параметр A для случая $\tau_{xy} \in [\alpha^*; \tau_F]$ через A_1 :

$$A_1 = \frac{\pi \alpha^* \tau_{xy}^*}{\kappa + 2\alpha^* \tau_{xy}^* x_F} = \frac{2,6364 \tau_{xy}^*}{\kappa + 1,6784 \tau_{xy}^* x_F}. \quad (1.3.41)$$

По формуле (1.3.35) на отрезке $[\alpha^*; \tau_F]$

$$\tau_{xy} = 0,5A_1y\beta^{-1} \operatorname{tg}(A_1x). \quad (1.3.42)$$

Затем надо вычислить τ_{xy} , когда $\tau_{xy} \in [0; \alpha^*] = [0; 0,8392]$. Найдем значение аргумента x_N , при котором $\tau_{xy}(x, \kappa) = \alpha^*$. Из формулы (1.3.42) получим:

$$\alpha^* = \frac{A_1\kappa}{2\alpha^*} \operatorname{tg}(A_1x_F),$$

откуда

$$x_N = \frac{1}{A_1} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\alpha^* \alpha^*}{A_1\kappa} \right) = \frac{1}{A_1} \operatorname{arctg} \left(\frac{6,1728}{A_1\kappa} \right). \quad (1.3.43)$$

Теперь можно найти касательные напряжения на участке $[0; x_N]$, где, в силу формулы (1.3.32), $\beta = 2\mu^* = 1,2954$ (и не зависит от K). По формуле (1.2.19), заменяя в ней x_F на x_N , τ_{xy}^* на α^* , получим:

$$A = \frac{1}{x_N} \operatorname{atgd} \left(\frac{4\mu x_N \alpha^*}{\varkappa} \right) = \frac{1}{x_N} \operatorname{atgd} \left(\frac{2,5908 x_N \alpha^*}{\varkappa} \right). \quad (1.3.44)$$

Касательные напряжения на участке $[0; x_N]$ вычисляются по формуле (1.3.35), где коэффициент A находится по формуле (1.3.44), а $\beta^{-1} = 0,7720$.

1.4 Вычисление критических усилий. Алгоритмы и численные эксперименты

1.4.1 Вычисление функции atgd

Функцию можно находить численно. В некоторых случаях желательны явные приближенные аналитические выражения для нахождения критической нагрузки. Для вычисления приближенных значений функции atgd можно воспользоваться леммой, сформулированной в [22] (в [22] приведен план доказательства; полное доказательство отсутствует).

Лемма 1. *Функцию atgd можно представить в виде:*

$$\operatorname{atgd}(x) = \sqrt{x\psi(x)}, \quad (1.4.1)$$

где функция ψ аналитическая, причем

$$\psi(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{4}{45}x^2 - \frac{16}{945}x^3 + \frac{256}{127575}x^4 - \frac{1984}{33 \cdot 237575}x^5 + \dots \quad (1.4.2)$$

Доказательство. Покажем, что функция ψ – аналитическая. Пусть $y = \operatorname{atgd} x$. Это равенство можно записать в виде: $x = \varphi(y^2)$, где $\varphi(y^2) = y \operatorname{tg} y$. Тогда $\varphi(t)$ – взаимнооднозначная аналитическая в круге

$$|t| < (\pi/2)^2$$

функция, причем, как видно из разложения в степенной ряд функции tg ,

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi'(0) = 1 \neq 0.$$

По теореме о дифференцировании обратной функции, обратная к функции $x = \varphi(y^2)$ функция ρ такая, что $y^2 = \rho(x)$, дифференцируема и, следовательно, аналитична на множестве значений функции φ , причем

$$\rho(0) = 0, \quad \rho'(0) = 1 \neq 0.$$

Отсюда следует, что функция ψ , где $\psi(x) = \rho(x)/x$, – аналитическая функция, что и требовалось. Метод получения формулы (1.4.2) приведен в [22, с. 89].

Формулы (1.4.1), (1.4.2) получены для вычисления значений функции atgd , близких к нулю. Они малоприменимы для x , близких к ∞ , то есть когда $\pi/2 - y \ll 1$. В этом случае можно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 2. Функцию atgd можно представить в виде:

$$\text{atgd}(x) = \varphi(1/x),$$

где функция φ аналитическая, причем

$$\varphi(t) = (\pi/2) (1 - t + t^2 - (1 - \pi^2/12) t^3 + (1 - \pi^2/3) t^4 - \dots). \quad (1.4.3)$$

Доказательство. Доказательство аналитичности функции φ аналогично доказательству аналитичности функции ψ в предыдущей лемме. Для получения формулы (1.4.3) сделаем замену переменной $x = 1/t$ в уравнении $x = y \text{tg} y$. Продифференцируем по t уравнение $t y \text{tg} y = 1$. После преобразований, с повторным использованием последнего уравнения, получим:

$$(1 + t + t^2 y^2) y' + y = 0, \quad y(0) = \pi/2. \quad (1.4.4)$$

Представим решение этой задачи $y = \varphi(t)$ в виде степенного ряда

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

После подстановки правой части этого выражения в предыдущее уравнение вместо неизвестной функции y получим бесконечную последовательность рекуррентных соотношений:

$$a_0 = \pi/2; \quad a_1 = -a_0; \quad a_1 + 2a_2 = -a_1; \quad a_0^2 a_1 + 2a_2 + 3a_3 = -a_2$$

$$2a_0 a_1^2 + a_0^2 a_2 + 3a_3 + 4a_4 = -a_3; \quad a_1^3 + 6a_0 a_1 a_2 + 3a_0^2 a_3 + 4a_4 + 5a_5 = -a_4;$$

и так далее. Отсюда следует:

$$a_0 = \pi/2; \quad a_1 = -\pi/2; \quad a_2 = \pi/2; \quad a_3 = (-\pi/2) (1 - \pi^2/12);$$

$$a_4 = (\pi/2) (1 - \pi^2/3); \quad a_5 = (-\pi/2) (1 - \pi^2/6 + \pi^4/80);$$

и так далее.

Замечание 1.4.1. Если в уравнении (1.3.38) переменная y близка к $\pi/2$, то функцию $\varphi(t) = \text{atgd}(1/t)$ можно приближенно представить в более простом виде:

$$\varphi(t) \approx \frac{\pi}{2(1+t)},$$

или

$$\text{atgd}(x) \approx \frac{\pi x}{2(1+x)}. \quad (1.4.5)$$

Действительно, в этом случае

$$\text{tg}(\pi/2 - y) \approx \pi/2 - y.$$

Тогда из (1.3.38) следует, что

$$x = y \text{tg} y = \frac{y}{\text{ctg} y} = \frac{y}{\text{tg}(\pi/2 - y)} \approx \frac{y}{\pi/2 - y}, \quad (1.4.6)$$

или

$$y \approx \frac{\pi x}{2(1+x)} = \frac{\pi}{2(1+t)}.$$

Поэтому приближенное представление функции $atgd x$ в виде степенного ряда имеет вид

$$y \approx \frac{\pi}{2(1+1/x)} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \dots \right), \quad |x| > 1. \quad (1.4.7)$$

Замечание 1.4.2. Эту формулу можно получить и из уравнения (1.4.4): если переменная t мала, то, отбрасывая слагаемое $t^2 y^2$ в уравнении (1.4.4), после интегрирования получим формулу (1.4.7).

Замечание 1.4.3. Формулу (1.4.7) можно уточнить, если в формуле (1.4.6) в разложении тангенса взять два слагаемых:

$$tg(\pi/2 - y) \approx \pi/2 - y + (\pi/2 - y)^3/3.$$

Тогда (выкладки опускаем)

$$y \approx \frac{\pi}{2(1+1/x)} \left(1 + \frac{\pi^2}{12(1+x)^3} \right).$$

Вычисления показывают, что приблизительно при значениях $x < 2,75$ следует использовать формулу (1.4.2) (см. рис. 1.20). В противном случае можно использовать формулу леммы 2. Наибольшее отклонение приближенных значений функции $y = atgd(x)$, вычисленных по указанным формулам, от точного, приближенно равно 0,02 (при $x \approx 2,75$, см. рис. 1.20).

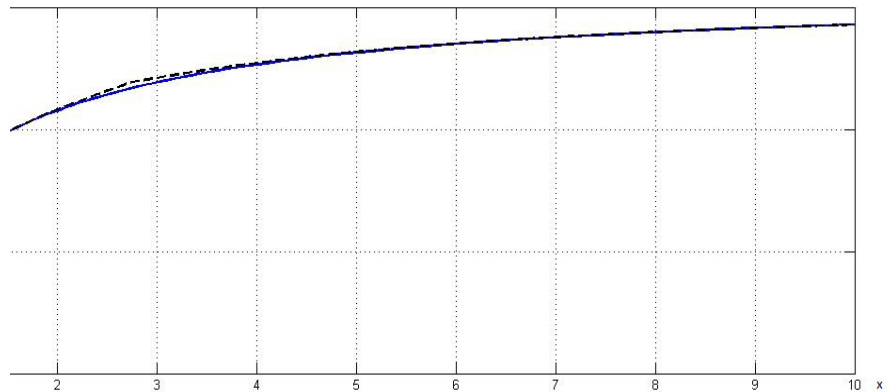


Рис. 1.20: График функции $y = atgd x$, полученной численным решением уравнения (1.3.37) (сплошная) и графики функций, полученных из начальных отрезков рядов до 4-й степени включительно по формулам (1.4.1), (1.4.2) при значениях $x < 2,75$ и по формулам леммы 2 при значениях $x \geq 2,75$.

1.4.2 Алгоритмы вычислений критических напряжений

Напряженное состояние нетонких прослоек может иметь весьма сложный вид на оси симметрии Ox , что затрудняет вычисление средних критических значений σ_{cr} по формуле (1.2.2) при $x = x_0$. В критический момент нагружения нормальные напряжения σ_y в основном материале достигают своего наибольшего значения (в безразмерных величинах, полученных нормировкой размерных напряжений значением σ_B^-), равного $2K$. Следовательно, при наличии МП прослойки напряжения в ней ограничены указанной величиной:

$$\max_{x \in [0;1]} |\sigma_y^-(x, \kappa)| < 2K.$$

В работах [22, 105] отмечено существование двух различных типов распределения нормальных напряжений σ_y по контактной границе. Первый тип критического состояния менее прочного слоя характерен для значительной механической неоднородности соединения либо для широких слоев. В этом случае напряжения σ_y^- нигде на контактной границе не достигают потенциально наибольшего возможного для них значения $2K$ (см. рис. 1.15, а).

Если реализуется второй тип критического состояния МП слоя, то существует отрезок HM контактной границы (см. рис. 1.15, б), на котором $\sigma_y^- = 2K$. Для вычисления нормальных напряжений и критической нагрузки для каждого из этих типов приходится использовать различные вычислительные схемы. Далее в работе опираемся на методику работы [22, с. 90–93].

Рассмотрим *первый тип* критического состояния соединения. Введем обозначение. Пусть

$$\hat{\sigma} = \sigma_y^-(0, \kappa).$$

Так как

$$\max_{x \in [0;1]} |\sigma_y^-(x, \kappa)| = \sigma_y^-(0, \kappa),$$

этот тип характеризуется условием:

$$\hat{\sigma} < 2K. \quad (1.4.8)$$

Подставляя выражение (1.3.35) в уравнения равновесия (1.1.4) и (1.1.5) и используя условие текучести (1.1.6), после интегрирования уравнений выведем формулы для вычисления нормальных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x^-(x, y) &= \frac{A^2 \kappa^2}{4\beta \cos^2(Ax_F)} + \frac{1}{2\beta} \ln \left| \frac{\cos(Ax)}{\cos(Ax_F)} \right| - \frac{A^2 y^2}{4\beta} - 2 + \sigma_y^*, \quad x \in [0, x_F], \quad y \in [0, \kappa], \\ \sigma_y^-(x, y) &= \frac{A^2 \kappa^2}{4\beta \cos^2(Ax_F)} - \frac{A^2 y^2}{4\beta \cos^2(Ax)} + \frac{1}{2\beta} \ln \left| \frac{\cos(Ax)}{\cos(Ax_F)} \right| + \sigma_y^*, \quad x \in [0, x_F], \quad y \in [0, \kappa]. \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Подставляя в (1.4.9) значения $x = 0$, $y = \kappa$ и используя формулу (1.3.36), получим:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \beta(\tau_{xy}^*) + \frac{1}{4\beta} \ln \left(1 + \frac{4\beta^2(\tau_{xy}^*)^2}{A^2 \kappa^2} \right) + \sigma_y^* \approx \\ &\approx \beta(K-1)^2 + \frac{1}{4\beta} \ln \left(1 + \frac{4\beta^2(K-1)^2}{A^2 \kappa^2} \right) + \sigma_y^* \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

Подставляя в (1.4.9) значение $y = \varkappa$, получим зависимость напряженного состояния $\sigma_y^-(x, \varkappa)$ на контактной поверхности от x :

$$\sigma_y^-(x, \varkappa) = \begin{cases} \frac{A^2 \varkappa^2}{4\beta \cos^2(Ax_F)} - \frac{A^2 \varkappa^2}{4\beta \cos^2(Ax)} + \frac{1}{2\beta} \ln \left| \frac{\cos(Ax)}{\cos(Ax_F)} \right| + \sigma_y^*, & x \in [0; x_F], \\ \sigma_y^*, & x \in [x_F; 1]. \end{cases} \quad (1.4.11)$$

Принимая в выражении (1.4.9) $y = \varkappa$, получим формулу для вычисления нормальных напряжений σ_y на контактной границе: Графики зависимости σ_y от x по контактной поверхности от относительной толщины слоя $\varkappa$ представлен на рис. 1.21. В частности, положив

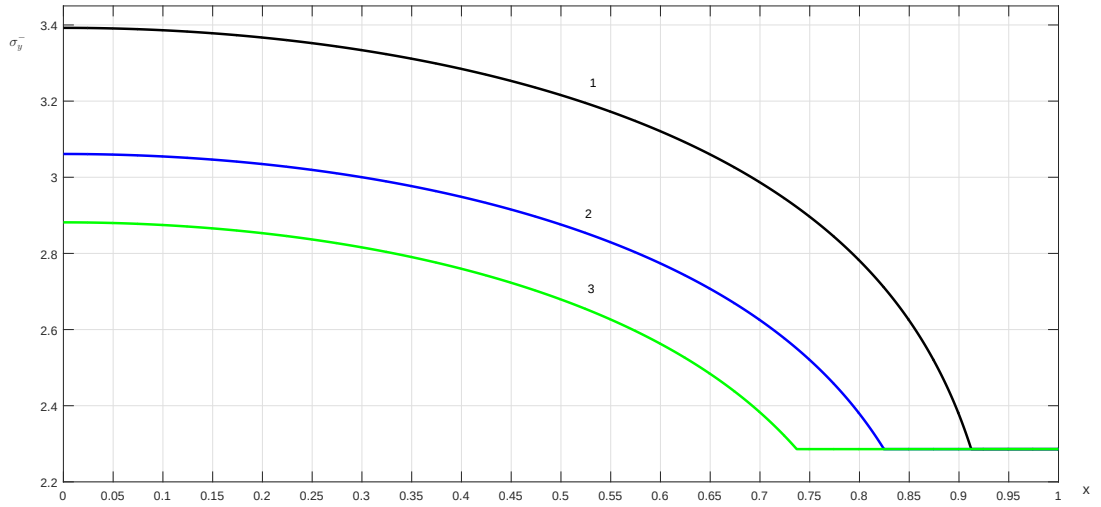


Рис. 1.21: Графики (по формуле (1.4.11); σ_y^* вычисляется по формулам (1.3.14) и (1.3.14), β – по формуле (1.3.32)) зависимостей $\sigma_y^-|_{y=\varkappa}$ от x на отрезке $[0;1]$ при: 1) $\varkappa=0,05$; 2) $\varkappa=0,1$; 3) $\varkappa=0,15$; $K=1,3$.

в формуле (1.4.11) $x = 0$ и воспользовавшись выражением (1.3.36), а также упрощенной формулой (1.3.14), найдем после преобразований:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= (\tau_{xy}^*)^2 + \frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{4(\tau_{xy}^*)^2}{A^2 \varkappa^2} \right) + \sigma_y^* \approx \\ &\approx (K-1)^2 + \frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{4(K-1)^2}{A^2 \varkappa^2} \right) + \sigma_y^*. \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Рассмотрим *второй тип* критического состояния соединения. Тогда существует отрезок контактной границы HM , на котором $\sigma_y^- = 2K$ (рис. 1.15, б). Абсцисса x_M точки M определяется уравнением

$$\sigma_y^-(x_M, \varkappa) = 2K.$$

В работе [22, с. 92] предложена формула, которая по мнению авторов, может аппроксимировать с достаточной для вычисления критической нагрузки точностью величину $\sigma_y^-(x, \varkappa)$, приведенную в формуле (1.4.11):

$$\sigma_y^-(x, \varkappa) = \hat{\sigma} - (\hat{\sigma} - \sigma_y^*) x^{\hat{\sigma}} / x_F^{\hat{\sigma}}, \quad x \in [0; x_F]. \quad (1.4.13)$$

Из рис. 3.5 работы [22, с. 92] видно, что различие между величинами, полученными по формулам (1.4.11) и (1.4.13), всё же заметно и, главное, возрастает с возрастанием параметра K . При $K > 1,5$ аппроксимация (1.4.13) непригодна. В работе проведены вычислительные эксперименты по сопоставлению друг с другом зависимостей (1.4.11) и (1.4.13) при $\varkappa = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$ (сверху вниз). В вычислительных экспериментах 1, 2 и 3 коэффициент механической неоднородности $K=1,3; 1,5$ и $1,8$ соответственно. Их результаты на рис. 1.22 – 1.24) показывают более высокую точность аппроксимации $\sigma_y^-(x, \varkappa)$ функцией

$$\sigma_y^-(x, \varkappa) = \hat{\sigma} - (\hat{\sigma} - \sigma_y^*) x^{\alpha\hat{\sigma}} / x_F^{\alpha\hat{\sigma}}, \quad x \in [0; x_F], \quad (1.4.14)$$

где $\alpha = 0,85$. В случаях, когда относительная толщина слоя $\varkappa \approx 0,05 - 0,2$, т.е. мала, а коэффициент механической неоднородности велик – $K \approx 2$ или больше, аппроксимация (1.4.14) может дать заметную ошибку, как видно из рис. 1.22 – 1.24. Однако эти случаи можно здесь не рассматривать, т.к. они исследованы на основе применения других подходов в п.1.2.

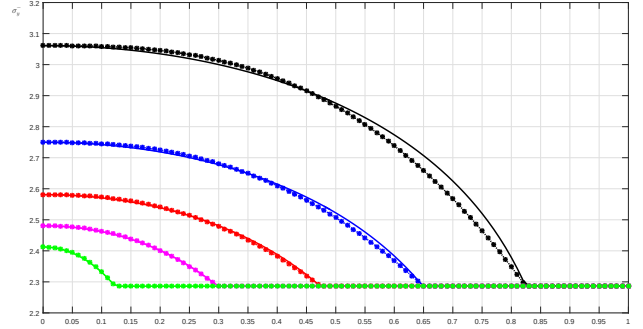


Рис. 1.22: График точной (по формуле (1.4.11), сплошная) и приближенной ((1.4.13), пунктир) зависимостей $\sigma_y^-|_{y=\varkappa}$ от x на отрезке $[0; 1]$. Вычислительный эксперимент 1.

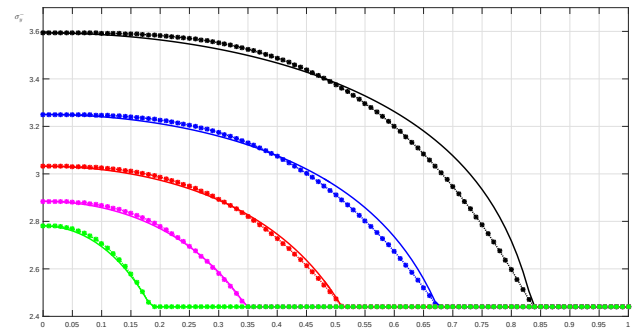


Рис. 1.23: График точной (по формуле (1.4.11), сплошная) и приближенной ((1.4.13), пунктир) зависимостей $\sigma_y^-|_{y=\varkappa}$ от x на отрезке $[0; 1]$. Вычислительный эксперимент 2.

Используя (1.4.14), получим:

$$x_M = x_F \left(\frac{\hat{\sigma} - 2K}{\hat{\sigma} - \sigma_y^*} \right)^{1/\hat{\sigma}}. \quad (1.4.15)$$

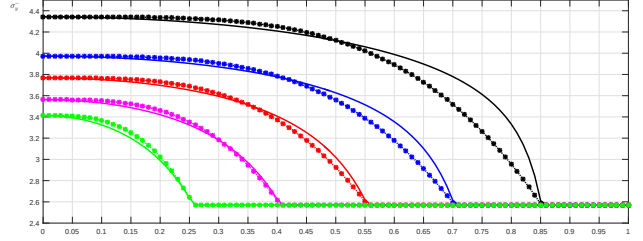


Рис. 1.24: График точной (по формуле (1.4.11), сплошная) и приближенной ((1.4.13), пунктир) зависимостей $\sigma_y^-|_{y=\kappa}$ от x на отрезке $[0; 1]$. Вычислительный эксперимент 3.

Следовательно, на отрезке HM контактной границы нормальные напряжения σ_y^- равны $2K$, на отрезке MF σ_y^- можно найти по формуле (1.4.13), а на отрезке FA $\sigma_y^- = \sigma_y^*$ (см. формулы (1.3.14), (1.3.15)). На рис. 1.26 показана блок-схема описанного здесь алгоритма вычисления напряжений σ_y^- на контактной поверхности.

1.4.3 Алгоритм вычисления критической нагрузки

Рассмотрим первый тип критического состояния слоя, возникающий из-за большой толщины прослойки (см. п. 1.3.1). В этом случае напряженное состояние в окрестности контактной границы имеет сложный вид, существенно затрудняющий его аналитическое описание, особенно на участке $OHFE$ (см. рис. 1.9, 1.10). Поэтому, в отличие от второго типа критического состояния слоя, будем находить среднее критическое напряжение по оси симметрии слоя Ox , а не по контактной поверхности:

$$\sigma_{y\,av} = \int_0^1 \sigma_y^-(x, 0) \, dx. \quad (1.4.16)$$

По формуле (1.2.13)

$$\sigma_y = \frac{1 - \kappa - x}{a} + 2, \quad x \in OB,$$

где коэффициент a вычисляется по формуле (1.3.3), а входящая в (1.3.3) $\omega = \omega^*$, т.е. вычисляется по формуле (1.3.5). Подставляя это выражение в (1.4.16) и полагая на BC $\sigma_y = 2$, получим:

$$\sigma_{y\,av} = 2 + \frac{(1 - \kappa)^2}{2a}, \quad (1.4.17)$$

где a вычисляется по формуле (1.3.3). Заметим, что эти формулы применимы и для второго случая напряженного состояния, если относительная толщина слоя велика, $\kappa \approx 0,5 \dots 1$ и зависят от величины K .

Рассматривая второй тип критического состояния слоя, связанный вовлечением основного металла в пластическое деформирование в окрестности контактной поверхности, критическую нагрузку, при которой соединение достигает состояния предразрушения, будем определять как среднее (интегральное) напряжение $\sigma_{y\,av}$ по контактной поверхности:

$$\sigma_{y\,av} = \int_0^1 \sigma_y^-(x, \kappa) \, dx. \quad (1.4.18)$$

Вычислим критическую нагрузку для первого типа напряженного состояния пластического слоя. Подставив в интеграл (1.4.18) выражение (1.4.13) на участке HF , получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{y\,av} &= \int_0^1 \sigma_y^-(x, \varkappa) dx = \int_0^{x_F} (\hat{\sigma} - (\hat{\sigma} - \sigma_y^*) x^{\hat{\sigma}}/x_F^{\hat{\sigma}}) dx + \sigma_y^*(1 - x_F) = \\ &= \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma} + 1} (\hat{\sigma} - \sigma_y^*) x_F + \sigma_y^*.\end{aligned}\quad (1.4.19)$$

Вычислим критическую нагрузку для второго типа напряженного состояния. Представим интеграл (1.4.18) в виде:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sigma_y^-(x, \varkappa) dx &= \int_0^{x_M} \sigma_y^-(x, \varkappa) dx + \int_{x_M}^{x_F} \sigma_y^-(x, \varkappa) dx + \sigma_y^*(1 - x_F) = \\ &= \int_0^{x_M} 2K dx + \int_{x_M}^{x_F} (\hat{\sigma} - (\hat{\sigma} - \sigma_y^*) x^{\alpha\hat{\sigma}}/x_F^{\alpha\hat{\sigma}}) dx + \sigma_y^*(1 - x_F).\end{aligned}$$

Используя формулу (1.4.15), после преобразований получим:

$$\sigma_{y\,av} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma} + 1} (\hat{\sigma} - \sigma_y^*) x_F + \sigma_y^* - (\hat{\sigma} - 2K) x_M + \frac{(\hat{\sigma} - \sigma_y^*) x_M^{1+\hat{\sigma}}}{x_F^{\hat{\sigma}} (1 + \hat{\sigma})}.\quad (1.4.20)$$

Здесь x_M вычисляется по формуле (1.4.15), σ_y^* вычисляется по формуле (1.3.15), x_F – по формуле (1.3.19), коэффициент A – по формулам ((1.3.39) и (1.3.40)).

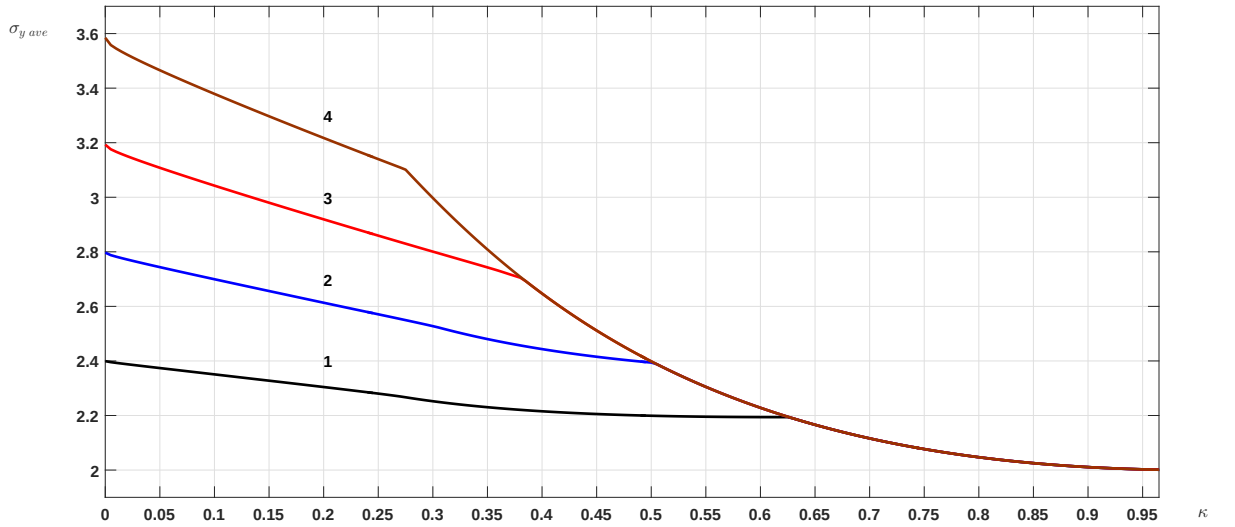


Рис. 1.25: Графики зависимостей критических средних напряжений $\sigma_{y\,av}$ от относительной толщины слоя $\varkappa$ при неполной реализации контактного упрочнения. Вычислительный эксперимент.

На рис. 1.25 показаны результаты вычислительного эксперимента – зависимость критических средних напряжений $\sigma_{y\,av}$ от относительной толщины слоя $\varkappa$ при различных значениях K на основании полученных выше формул (1.4.17), (1.4.19) и (1.4.20). На рисунке 1) $K = 1$; 2) $K = 1,4$; 3) $K = 1,6$; 4) $K = 1,8$. При тех значениях $\varkappa$, когда

среднее критическое напряжение можно вычислить по разным формулам, следует взять ту, которая дает меньшее значение. Правая часть рис. – первый или второй тип критического состояния слоя при значительной толщине слоя (предельное состояние не зависит от коэффициента механической неоднородности K). Левая часть рис. – второй тип критического состояния слоя, связанный с вовлечением основного металла в пластическое деформирование в окрестности контактной поверхности, и существенно зависит от K .

На рис. 1.27 показана блок-схема алгоритма вычисления средних критических напряжений σ_{yav} на контактной поверхности, характеризующих критическое усилие, требуемое для возникновения состояния предразрушения соединения, содержащего вставку с данными параметрами κ и K .

1.5 Выводы по главе 1

1. Критическое состояние пластического слоя под растягиваемой нагрузкой определяется параметрами κ и K . При полной реализации контактного упрочнения для тонких прослоек существуют два типа напряженного состояния слоя, которым соответствуют различные вычислительные схемы нахождения критической нагрузки. Первый тип определяется условиями (1.2.15), второй – условиями (1.2.18). Средние критические напряжения вычисляются по формулам (1.2.17) и (1.2.20) соответственно.

2. Неполная реализация контактного упрочнения происходит по одной из двух причин (предложение 1.3.1): из-за "большой" толщины прослойки – условие (1.3.7), либо из-за недостаточно большого коэффициента механической неоднородности – условие (1.3.8).

3. По схеме работ В.Л. Дильмана [21, 22, и др.] исследовано напряженное состояние пластического слоя в окрестности свободной поверхности для любых значений K (снято ограничение $K < 1,5$ указанных работ).

4. Получены алгоритмы для вычисления критических напряжений и критической нагрузки для всех значений параметров κ и K . На основе этих алгоритмов написаны программы для вычисления критических напряжений σ_y на контактной поверхности и критической нагрузки.

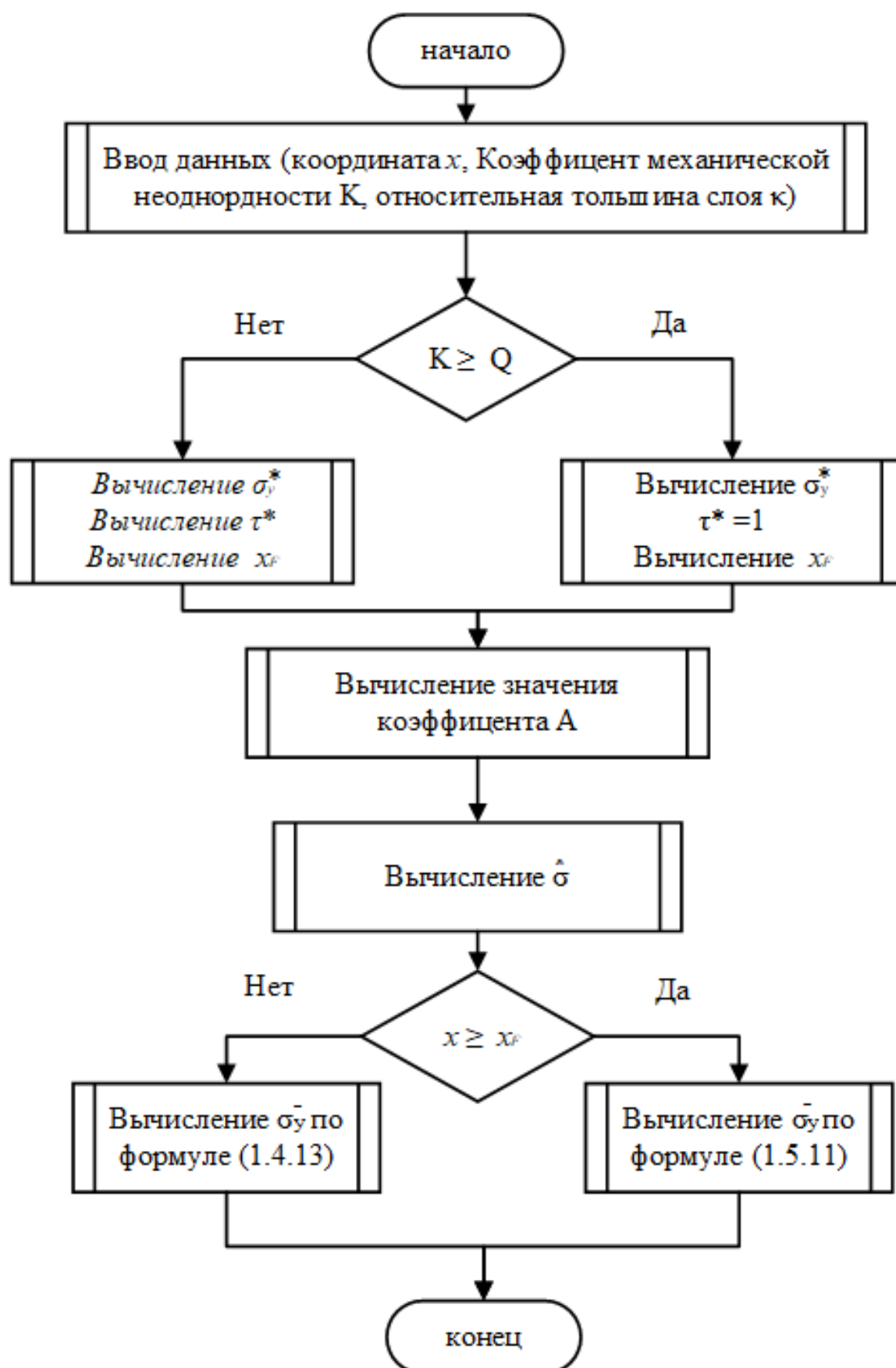


Рис. 1.26: Блок-схема алгоритма вычисления зависимости напряжений σ_y^- от точки на контактной поверхности.

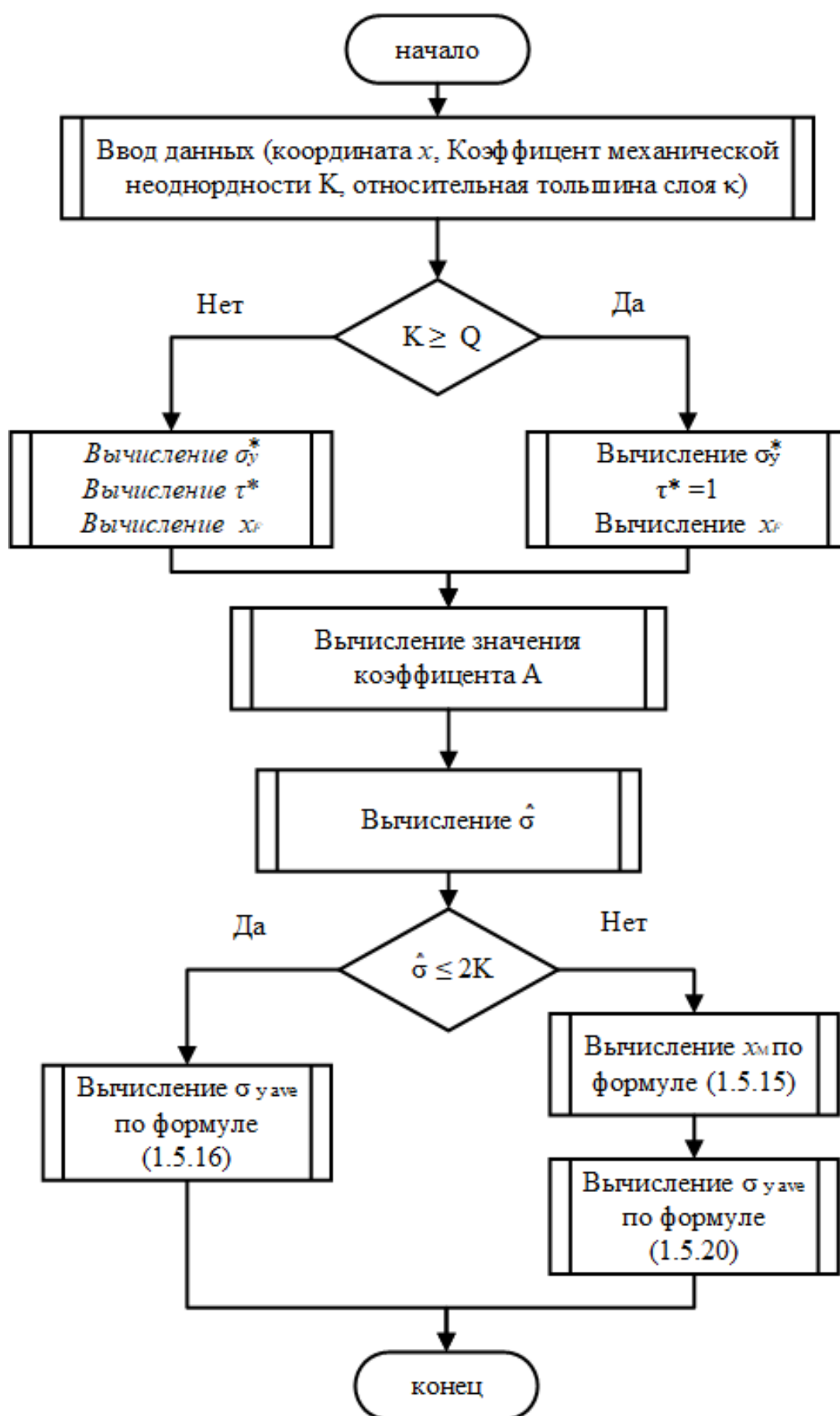


Рис. 1.27: Блок-схема алгоритма вычисления напряжений $\sigma_{y av}$ на контактной поверхности.

Глава 2

Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния пластического слоя при его сжатии при плоской деформации

2.1 Введение

Теоретическое исследование осадки пластически деформируемой заготовки двумя жесткими плоскими параллельными матрицами проводилось многими авторами, начиная с работы Л. Прандтля [82]. В такой ситуации возникает недоопределенная обратная граничная задача для напряжений в пластическом слое. Система уравнений этой задачи квазилинейна. При плоской деформации она имеет гиперболический тип. Чтобы компенсировать недостаточность граничных условий, обычно вводятся дополнительные условия. Их обоснование должно опираться на экспериментальные данные либо априорно понятные свойства деформируемого слоя (например, в тонких прослойках предполагалась линейность касательных напряжений по толщине слоя [52, 76]. В работах [22, 21] приведен список известных из литературы ограничений на классы решений, применяемых при математическом моделировании напряженно-деформированного состояния пластического слоя, подверженного растягивающей или сжимающей осевой нагрузке. Допущения могут носить силовой или деформационный характер. Силовые гипотезы использовались в работах [52, 76, 22, 21, 26]. К гипотезам деформационного характера относятся гипотеза плоских поперечных сечений [52, 22, 21, 27, 34, 32]

$$v_y = W(y). \quad (2.1.1)$$

где ν_y – скорость перемещения точки слоя в поперечном направлении (либо собственно перемещение), и гипотезы продольных сечений, основанные на данных натурных экспериментов о характере деформирования поперечных (по отношению к слою) линий координатной сетки. В работах [22, 21, 91] деформированные координатные линии аппроксимировались фрагментами синусоид или эллипсов [91]. В работах [17, 28, 23] подходы

работ [52, 22, 21, 27, 34, 32] перенесены на неоднородный слой. Упомянутые гипотезы распространяются на часть слоя, исключаящую окрестности свободных поверхностей. Вблизи свободной поверхности напряженное состояние пластического слоя и примыкающих к нему участков основного материала определяется как некоторое разрывное решение задачи Коши для системы уравнений гиперболического типа. Подробности в работах [25, 38].

Целью данной главы является исследование математической модели напряженно-деформированного состояния пластически деформируемой заготовки под сжимающей нагрузкой, с использованием гипотезы плоских поперечных сечений (2.1.1), и на этой основе получение явных аналитических зависимостей для скоростей перемещений и формы свободной поверхности. Будем рассматривать "тонкую" полосу, когда $\varkappa < 0,5$. В этом случае проявляется заметное контактное упрочнение заготовки. И с теоретической, и с прикладной точек зрения следует рассмотреть две различные ситуации.

Первая ситуация. Движение заготовки вдоль матрицы на контактной поверхности (проскальзывание) отсутствует (осадка шероховатыми плитами). Тогда, как и в случае растяжения, в процессе увеличения внешней нагрузки величина контактного упрочнения прекращает рост, когда угол ω^- достигает теоретически возможного максимума:

$$\omega^- = \pi/4. \quad (2.1.2)$$

Вторая ситуация. В процессе увеличения внешней нагрузки возникает момент, когда на контактной поверхности начинается проскальзывание заготовки вдоль сжимающей матрицы. Тогда дальнейшее увеличение касательных напряжений на контактной поверхности прекращается. Это значит, что прекращается увеличение угла ω^- . В этот момент контактное упрочнение достигло предельной величины и, по терминологии О.А. Бакши [4, 5], реализовано не полностью.

Математическая модель сжатия пластического слоя плоскими параллельными плитами определяется следующими параметрами.

1) Толщина слоя h (h_0 – толщина в начальный момент нагружения), которая может рассматриваться как условное время.

2) Длина слоя l , измеряемая по контактной поверхности; относительная толщина слоя $\varkappa = h/l$ (l_0 и $\varkappa_0$ – в начальный момент нагружения).

3) Скорость сжатия (движения контактной поверхности к срединной плоскости слоя) v_h .

4) Параметр A , который характеризует возникающий в процессе деформирования прогиб поперечных (по слою) координатных линий.

5) $m = \max \tau_{xy}(x, h)$ – наибольшее значение касательных напряжений; оно достигается на контактной поверхности всюду на некотором промежутке $[x_F; l]$, причем на этом участке касательные напряжения постоянны [22, глава 3]. При отсутствии скольжения $m = 1$.

6) Ближайшая к поперечной оси симметрии слоя точка F на контактной поверхности, в которой касательные напряжения достигают наибольшего значения m ; в работе [22, с. 83] показано, что абсциссу этой точки можно вычислить по формуле:

$$x_F/l = 1 - 2\varkappa/(\cos \omega + \sin \omega) = 1 - 2\varkappa/\sqrt{1+m}, \quad (2.1.3)$$

где ω – угол поворота характеристики от свободной до контактной поверхности. При отсутствии скольжения формула (2.1.3) совпадает с формулой (1.3.20), т.к. в этом случае $m = 1$.

Параметры a , m и x^* являются внутренними параметрами задачи и вычисляются через внешние параметры.

2.2 Напряженно-деформированное состояние сжимаемого пластического слоя без скольжения по контактными поверхностям

2.2.1 Математическое моделирование напряженного состояния на основе гипотезы плоских сечений

Как известно [52, 91], напряженно-деформированное состояние пластической среды при плоской деформации определяется системой уравнений, в безразмерных переменных имеющих вид: (1.1.4) – (1.1.8). Имеют место граничные условия (1.1.9) и (1.1.10).

Введём обозначение:

$$Y(y) = \frac{W''(y)}{2W'(y)}. \quad (2.2.1)$$

Из условия (1.1.8) и гипотезы плоских поперечных сечений (2.1.1) получим:

$$\tau_{xy} = 0,5(\sigma_x - \sigma_y)Y(y)x.$$

Подставив правую часть этого выражения вместо τ_{xy} в (1.1.6), найдём:

$$\sigma_y - \sigma_x = \pm \frac{2}{\sqrt{1 + Y^2(y)x^2}} = \pm 2 \left(1 - \frac{1}{2}Y^2(y)x^2 + \frac{3}{8}Y^4(y)x^4 - \dots \right) \quad (2.2.2)$$

(знак плюс соответствует растягивающей нагрузке, знак минус – сжатию; здесь рассматривается сжатие). Отсюда

$$\tau_{xy} = \frac{Y(y)x}{\sqrt{1 + Y^2(y)x^2}} = Y(y)x - \frac{Y^3(y)x^3}{2} + \frac{3Y^5(y)x^5}{8} - \dots \quad (2.2.3)$$

Подставив в формулу (2.2.3) τ^* вместо τ_{xy} , x_F вместо x и h вместо y , получим:

$$Y(h) = \frac{1}{x_F} \frac{\tau^*}{\sqrt{1 - (\tau^*)^2}}. \quad (2.2.4)$$

При малых значениях касательных напряжений можно приближенно считать

$$\tau_{xy} \approx xY(y), \quad (2.2.5)$$

что соответствует гипотезе разделения переменных для касательных напряжений, использованной в работах [22, 21, 27, и др.]. Следовательно, формула (2.2.3) уточняет эту гипотезу. Аналогично, при малых значениях касательных напряжений

$$\sigma_x - \sigma_y = 2(1 - 0,5x^2Y^2(y)). \quad (2.2.6)$$

Будем, как и в п. 1.2.2, использовать приближенный вариант условия пластичности. При сжатии он имеет следующий вид. Если

$$\max \tau_{xy} < \alpha^* = 0,8392,$$

то, как и в п. 1.3.3, имеет место формула (1.3.30)

$$\sigma_x - \sigma_y \approx 2(1 - \mu\tau_{xy}^2), \quad \mu^{-1} = 1 + \sqrt{1 - \alpha^2} = 1 + \sqrt{2K - K^2}. \quad (2.2.7)$$

Если

$$\max \tau_{xy} \geq \alpha^* = 0,8392,$$

то (см. формулу (1.3.29))

$$\sigma_x - \sigma_y \approx \begin{cases} 2(1 - \mu^*\tau_{xy}^2), & \tau_{xy} \in [0; \alpha^*]; \\ a^*(1 - \tau_{xy}^2), & \tau_{xy} \in [\alpha^*; 1], \end{cases} \quad (2.2.8)$$

где, в силу (1.3.28), $\mu^* = 0,6477$, $a^* = 3,6778$.

Как и в п. 1.2.2, получим нелинейное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции τ_{xy} :

$$-\beta \frac{\partial^2 (\tau_{xy}^2)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 0. \quad (2.2.9)$$

Здесь коэффициент β определяется формулой (1.3.32):

$$\beta = \begin{cases} 2/(1 + \sqrt{2K - K^2}), & \text{если } K \leq 1,8392; \\ 2\mu^* = 1,2954, & \text{если } K > 1,8392; \tau_{xy} \in [0; \alpha^*] = [0; 0,8392]; \\ a^* = 3,6778, & \text{если } K > 1,8392; \tau_{xy} \in [\alpha^*; 1] = [0,8392; 1]. \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Учитывая нечетность функции $\tau(x, y)$ по x , решение уравнения (2.2.9) можно искать в виде степенного ряда относительно переменной x [20]:

$$\tau_{xy} = xY_1(y) + x^3Y_2(y) + x^5Y_3(y) + \dots \quad (2.2.11)$$

Подставив этот ряд в (2.2.9) и приравняв коэффициенты перед одинаковыми степенями, получим относительно функций $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} -4\beta Y_1' Y_1 + 6Y_2 - Y_1'' &= 0, \\ -8\beta (Y_1 Y_2)' + 20Y_3 - Y_2'' &= 0, \\ -12\beta (Y_1 Y_3 + Y_2^2/2)' + 42Y_4 - Y_3'' &= 0, \\ -16\beta (Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3)' + 72Y_5 - Y_4'' &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

и т.д. Из сравнения разложений (2.2.3) и (2.2.11) следует: $Y_1 = Y$, $Y_2 = -0,5Y_1^3$. Используя эти равенства, запишем (2.2.12) в виде:

$$Y'' + 4\beta Y Y' + 3Y^3 = 0. \quad (2.2.13)$$

Будем касательные напряжения приближенно искать в виде (2.2.3), где Y – решение граничной задачи для уравнения (2.2.3) с условиями (см. (2.2.4)):

$$Y(0) = 0; \quad Y(h) = \frac{1}{x_F} \frac{\tau^*}{\sqrt{1 - (\tau^*)^2}}. \quad (2.2.14)$$

Заметим, что допущение (2.2.5) приводит [76, 22, 21, 26] к уравнению

$$Y'' + 4\beta Y Y' = 0. \quad (2.2.15)$$

Точным решением последнего уравнения при начальных условиях $Y(0) = 0$, $Y'(0) = B^2/2$, где B – некоторая постоянная, является функция:

$$Y(y) = \frac{B}{2\beta} \operatorname{th}(By). \quad (2.2.16)$$

При начальных условиях

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = -B^2/2, \quad (2.2.17)$$

где B – некоторая постоянная, точным решением уравнения (2.2.15) является функция:

$$Y(y) = -\frac{B}{2\beta} \operatorname{tg}(By). \quad (2.2.18)$$

Решение (2.2.16) относится к случаю растяжения, решение (2.2.18) – сжатия. Параметр B , характеризующий скорость прогиба линий сетки, зависит от толщины слоя и меняется в процессе деформирования.

Численные эксперименты (некоторые из них представлены на рис. 2.1 – 2.3), показывают, что решения граничных задач для уравнений (2.2.13) и (2.2.15) с одинаковыми граничными условиями

$$Y(0) = 0, \quad Y(h) = \tau^*/x_F. \quad (2.2.19)$$

мало различаются. Поэтому в работе будет рассматриваться приближенное решение (2.2.18) с граничными условиями (2.2.14).

Из формулы (2.2.18) и второго равенства (2.2.19) следует трансцендентное уравнение для нахождения параметра B :

$$-\frac{B}{2\beta} \operatorname{tg}(By) = \tau^*/x_F. \quad (2.2.20)$$

Из (2.2.3) и (2.2.18) следует формула для вычисления касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = -\frac{x \frac{B}{2\beta} \operatorname{tg}(By)}{\sqrt{1 + \frac{x^2 B^2}{4\beta^2} \operatorname{tg}^2(By)}} = -x \frac{B}{2\beta} \operatorname{tg}(By) + \frac{1}{2} \left(x \frac{B}{2\beta} \operatorname{tg}(By) \right)^3 - \dots \quad (2.2.21)$$

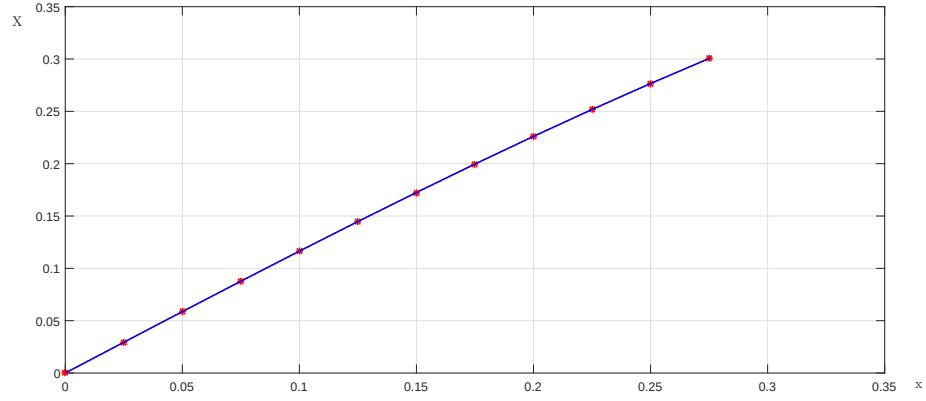


Рис. 2.1: Сравнение численных решений граничных задач для уравнений (2.2.13) и (2.2.15) с граничными условиями (2.2.19), полученных методом стрельбы. Сплошная линия – решение задачи (2.2.15), (2.2.19), точки – решение задачи (2.2.13), (2.2.19). $\varkappa = 0,4$; $K = 1,3$

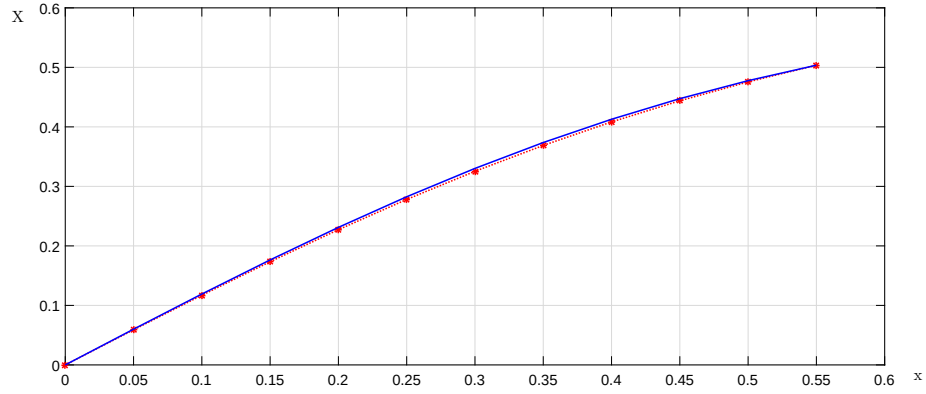


Рис. 2.2: Сравнение численных решений граничных задач для уравнений (2.2.13) и (2.2.15) с граничными условиями (2.2.19), полученных методом стрельбы. Сплошная линия – решение задачи (2.2.15), (2.2.19), точки – решение задачи (2.2.13), (2.2.19) $\varkappa = 0,25$; $K = 1,5$

Взяв в этом выражении только первое слагаемое, подставим его в уравнения равновесия и используя граничные условия, получим, аналогично п. 1.4.1, формулы для вычисления нормальных напряжений:

$$\sigma_x^-(x, y) = \frac{B^2 x^2}{4\beta \cos^2(Bx)} - \frac{B^2 x_F^2}{4\beta} + \frac{1}{2\beta} \ln \left| \frac{\cos(Bh)}{\cos(By)} \right| + 2 + \sigma_y^*, \quad x \in [0, x_F],$$

$$\sigma_y^-(x, y) = \frac{B^2 x^2}{4\beta} - \frac{B^2 x_F^2}{4\beta} + \frac{1}{2\beta} \ln \left| \frac{\cos(Bh)}{\cos(By)} \right| + \sigma_y^*, \quad x \in [0, x_F]. \quad (2.2.22)$$

Координаты точки x_F , по аналогии с формулой (1.3.19), имеют вид:

$$x_F = l(1 - \sqrt{2\varkappa}). \quad (2.2.23)$$

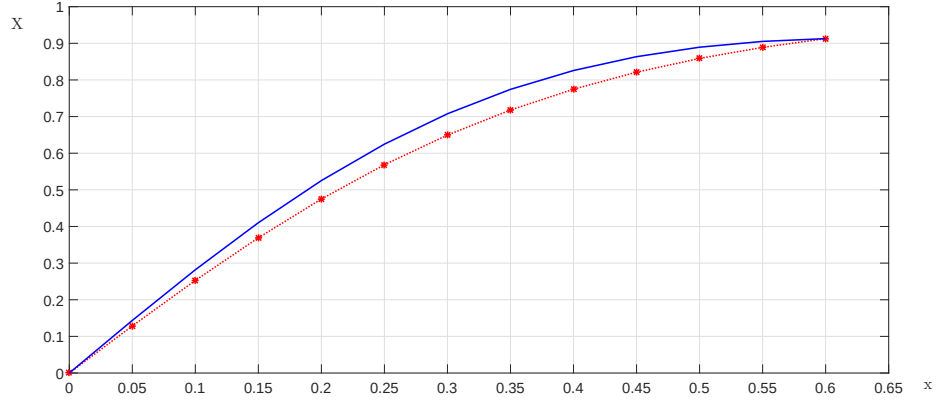


Рис. 2.3: Сравнение численных решений граничных задач для уравнений (2.2.13) и (2.2.15), с граничными условиями (2.2.19), полученных методом стрельбы. Сплошная линия – решение задачи (2.2.15), (2.2.19), точки – решение задачи (2.2.13), (2.2.19) $x = 0, 25$; $K = 1, 8$

2.2.2 Вычисление скоростей смещений

Рассмотрим упрощенный вариант (2.2.5) формулы для вычисления касательных напряжений. Тогда функция Y удовлетворяет уравнению (2.2.15) и имеет вид (2.2.18). В этом случае зависимость (2.2.1) приводит к уравнению для вычисления функции W :

$$\frac{W''(y)}{2W'(y)} = -\frac{B}{2\beta} \operatorname{tg}(By), \quad W(y) < 0, \quad y \in (0; h]. \quad (2.2.24)$$

Интегрируя его и учитывая условие $v_y|_{y=0} = 0$, следующее из соображений симметрии, получаем (C – произвольная постоянная):

$$\begin{aligned} (\ln(-W'(y)))' &= -\frac{B}{\beta} \operatorname{tg}(By); \\ \ln(-W'(y)) &= -\frac{B}{\beta} \int \operatorname{tg}(By) dy = -\frac{1}{\beta} \int \frac{\sin(By)}{\cos(By)} d(By) = \\ &= \frac{1}{\beta} \int \frac{d \cos(By)}{\cos(By)} = \frac{1}{\beta} \ln(\cos(By)) + \ln C; \\ W'(y) &= -C \cos^{1/\beta}(By). \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Введем обозначение:

$$\sin_a x = \int_0^x \cos^a x dx. \quad (2.2.26)$$

Тогда

$$W(y) = -C \int_0^y \cos^{1/\beta}(By) dy = -\frac{C}{B} \sin_{1/\beta}(By), \quad C > 0. \quad (2.2.27)$$

Пусть v_h – модуль скорости смещения контактных поверхностей:

$$v_h = |W(h)|.$$

Тогда, в силу (2.2.27),

$$v_h = \frac{C}{B} \sin_{1/\beta}(Bh).$$

Отсюда

$$C = \frac{Bv_h}{\sin_{1/\beta}(Bh)}. \quad (2.2.28)$$

Подставляя (2.2.28) в (2.2.27), получим:

$$v_y = W(y) = -\frac{v_h \sin_{1/\beta}(By)}{\sin_{1/\beta}(Bh)}. \quad (2.2.29)$$

Вычислим скорость в направлении оси Ox . Из (1.1.7), (2.2.25) и (2.2.28) следует, что

$$v_x = -\int_0^x \frac{\partial v_y}{\partial y} dx = \int_0^x W'(y) dx = W'(y)x = \frac{Bv_h x \cos^{1/\beta}(By)}{\sin_{1/\beta}(Bh)}. \quad (2.2.30)$$

По предположению, между заготовкой (пластическим слоем) и матрицей отсутствует проскальзывание:

$$v_x|_{y=h} = 0. \quad (2.2.31)$$

Отсюда, учитывая (2.2.30), получим уравнение для вычисления параметра B :

$$\cos^{1/\beta}(Bh) = 0.$$

Это позволяет вычислить B :

$$B = \frac{\pi}{2h}. \quad (2.2.32)$$

Пусть параметр γ определяется из условия:

$$y = \gamma h, \quad 0 \leq \gamma \leq 1,$$

После подстановки правой части (2.2.32) в (2.2.30) и (2.2.29) формулы для вычисления скорости в направлениях осей Ox и Oy приобретают вид:

$$v_x = \frac{\pi v_h x \cos^{1/\beta}\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)}{2h \sin_{1/\beta}\left(\frac{\pi}{2}\right)}; \quad (2.2.33)$$

$$v_y = -\frac{v_h \sin_{1/\beta}\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)}{\sin_{1/\beta}\left(\frac{\pi}{2}\right)}. \quad (2.2.34)$$

Рассмотрим упрощенный вариант условия пластичности (1.1.6) в виде

$$|\sigma_x - \sigma_y| = 2(1 - \tau_{xy}^2/2). \quad (2.2.35)$$

В этом случае $\beta = 1$. Тогда формулы (2.2.33) и (2.2.34) заметно упрощаются:

$$v_x = \frac{\pi v_h x \cos \frac{\pi\gamma}{2}}{2h}; \quad (2.2.36)$$

$$v_y = -v_h \sin \frac{\pi\gamma}{2}. \quad (2.2.37)$$

2.2.3 Алгоритм вычисления формы свободной поверхности

Естественно предположить, что *точки свободной поверхности сжимаемого слоя перемещаются только в направлении, параллельном контактным поверхностям*. Их расстояния до продольной оси симметрии слоя в процессе сжатия слоя практически не изменяются, то есть скорости их перемещения в направлении сжатия равны нулю:

$$v_y|_{(x,y) \in \Gamma} = 0. \quad (2.2.38)$$

Здесь Γ – свободная граница ARC сжимаемого слоя (рис. 2.4). Об этом свидетельствуют и проведенные автором численные эксперименты в среде ANSYS WORKBENCH.

Будем называть условие (2.2.38) *гипотезой свободной поверхности*.

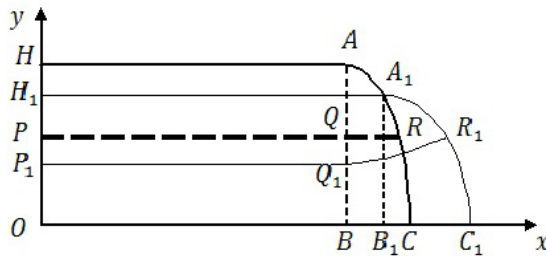


Рис. 2.4: Пластический слой (четверть) в процессе сжатия плоскими параллельными матрицами.

Вычислим форму свободной поверхности. Пусть в начальный момент $h = h_0$ и сжимаемый пластический слой имеет прямоугольную форму со свободной поверхностью, задаваемой уравнением $x = 1$. Форму свободной поверхности будем искать пошагово, считая шаг Δh настолько малым, что при исследовании напряженно-деформированного состояния слоя можно использовать теорию малых деформаций. Тогда вместо формул (2.2.36) и (2.2.37) можно использовать соответственно формулы:

$$u_x = \frac{\pi u_h}{2h} \cos \frac{\pi \gamma}{2}, \quad (2.2.39)$$

$$u_y = u_h \sin \frac{\pi \gamma}{2}, \quad (2.2.40)$$

где u_x и u_y – перемещения точек слоя в направлениях вдоль и поперек слоя соответственно.

Будем рассматривать состояния слоя $i = 0, 1, 2, 3$ и т.д., которым соответствуют параметры:

h_i – высота слоя,

$\Delta h = h_i - h_{i+1} = \text{const}$,

l_i – ширина слоя по контактной поверхности,

$\Delta l_{i+1} = l_{i+1} - l_i$,

a_i – ширина слоя по оси симметрии,

$k_i = a_i - l_i$,

S_i – площадь сечения части слоя, находящейся под нагрузкой (на рис. 2.4 $OHAB$ и $OH_1A_1B_1$ в разные моменты деформирования),

δS_i – площадь сечения части слоя, находящейся не под нагрузкой (на рис. 2.4 BAA_1RC и $B_1A_1R_1C_1$ в разные моменты деформирования).

В процессе сжатия часть слоя $ОНАВ$ (рис. 2.4), находящаяся под нагрузкой, деформируется в соответствии с гипотезой плоских сечений (прямолинейный отрезок PQ переходит в прямолинейный отрезок P_1Q_1). Часть слоя $АВС$, не находящаяся под нагрузкой, деформируется так, что отрезок прямой QR переходит в кривую Q_1R_1 , причем точки свободной поверхности R и R_1 находятся на одной высоте (гипотеза свободной поверхности). Точки свободной поверхности, не меняя своей ординаты, в какой-то момент могут совпасть со сжимающей поверхностью – происходит "наплыв" сжимаемого пластического слоя на сжимающие матрицы. Поэтому, если точка R находится на уровне нового положения контактной поверхности, то она "прилипает" к контактной поверхности, и длина контактной поверхности увеличивается: $H_1A_1 > HA$. Например, точка A_1 на рис. 2.4 является точкой свободной поверхности $АС$ предыдущего состояния и точкой контактной поверхности нового состояния.

Учитывая сказанное, формулу (2.2.39) и приведенные обозначения, можно форму свободной поверхности на i -м шаге представить в виде:

$$x_i = l_i + k_i \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{h_i} \right), \quad (2.2.41)$$

или, в явном виде,

$$y = \frac{2h_i}{\pi} \arccos \left(\frac{x - l_i}{k_i} \right). \quad (2.2.42)$$

Из формулы (2.2.41) следует:

$$\begin{aligned} \Delta l_{i+1} &= x_i|_{\gamma=h_{i+1}/h_1} - l_i = k_i \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{h_{i+1}}{h_i} \right) = \\ &= k_i \cos \left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\Delta h}{h_i} \right) \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{\Delta h}{h_i} \right) k_i. \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

Площадь δS_i может быть вычислена по формуле:

$$\delta S_i = \int_0^{h_i} k_i \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{h_i} \right) dy = \frac{2h_i}{\pi} k_i. \quad (2.2.44)$$

Условие сохранения объема в процессе деформирования (условие несжимаемости) можно представить в виде:

$$S_i + \delta S_i = S_{i+1} + \delta S_{i+1}. \quad (2.2.45)$$

Подставляя в формулу (2.2.45) вместо δS_i и δS_{i+1} их выражения по формуле (2.2.44), получим:

$$\begin{aligned} k_{i+1} &= \frac{h_i}{h_{i+1}} k_i + \frac{\pi}{2h_{i+1}} (l_i h_i - l_{i+1} h_{i+1}) = \\ &= \frac{h_i}{h_{i+1}} k_i + \frac{\pi}{2h_{i+1}} (l_i \Delta h - h_{i+1} \Delta l_{i+1}). \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

Опишем алгоритм нахождения уравнения свободной поверхности.

Полагаем $h_0 = h$, $l_0 = l$. Очевидно, $k_0 = 0$, $\Delta l_0 = 0$.

Вычислим значение параметров следующего состояния $i + 1$ по значениям параметров предыдущего состояния i .

Сначала находим следующее значение толщины слоя по предыдущему:

$$h_{i+1} = h_i - \Delta h.$$

Затем находим приращении ширины слоя при переходе к следующему состоянию: Δl_{i+1} по формуле (2.2.43).

После этого вычисляем следующее значение ширины слоя по значению в предыдущем состоянии:

$$l_{i+1} = l_i + \Delta l_{i+1}.$$

Затем находим k_{i+1} по формуле (2.2.46) и ширину слоя на оси симметрии по формуле:

$$a_{i+1} = k_{i+1} + l_{i+1}.$$

Наконец, по формуле (2.2.42) находим уравнение свободной поверхности в $(i+1)$ -состоянии:

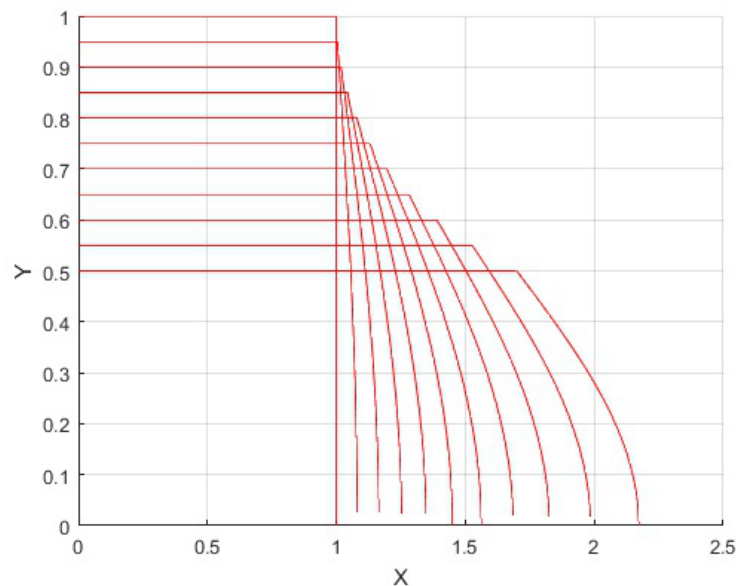


Рис. 2.5: Форма свободной поверхности пластического слоя на разных шагах сжатия плоскими параллельными матрицами. Вычислительный эксперимент.

$$y = \frac{2h_{i+1}}{\pi} \arccos \left(\frac{x - l_{i+1}}{k_{i+1}} \right). \quad (2.2.47)$$

Последовательно вычисляя по приведенным формулам геометрические параметры состояний, получаем значения геометрических параметров l_i и a_i и форму свободной поверхности в каждом состоянии.

На рис. 2.5 представлены результаты вычислительного эксперимента по определению формы свободной поверхности на основе изложенного алгоритма. Показано изменение формы сечения сжимаемого слоя, имеющего в начальный момент квадратное сечение ($h_0 = l_0 = a_0 = 1$), при его сжатии без проскальзывания до толщины $h = 0,5$ с шагом $\Delta h = 0,05$.

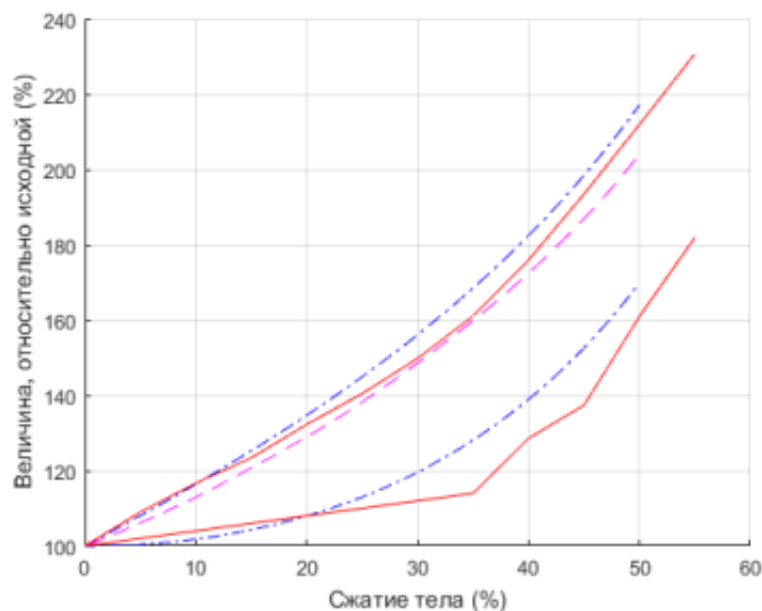


Рис. 2.6: Зависимости ширины слоя от степени сжатия. Вычислительный эксперимент.

На рис. 2.6 представлены результаты вычислительного эксперимента на основе изложенного алгоритма. Показаны графики зависимостей от высоты h размеров слоя по его ширине: на оси симметрии – a , и на контактной поверхности – l , полученных численно по описанному алгоритму с использованием рекуррентных соотношений (2.2.43) и (2.2.46), а также численно методом конечных элементов (С.С. Кондаков) и в среде Ansys. Сплошные – по результатам численного моделирования методом конечных элементов, пунктирная – по результатам моделирования в среде Ansys, штрихпунктирные – по результатам, полученным аналитически. Нижние кривые – зависимость ширины слоя по контактной поверхности, верхние кривые – зависимости ширины слоя по горизонтальной оси симметрии. Из этих результатов видно, что метод, предложенный в диссертации, дает результаты, близкие к полученным другими численными методами, требующими значительно больше машинного времени. Хорошая сходимость результатов косвенно свидетельствует об эффективности применения гипотезы плоских сечений при исследовании НДС сжимаемого слоя.

2.2.4 Алгоритм вычисления нагрузки сжатия пластического слоя при отсутствии скольжения по контактными поверхностям

Как и в случае растяжения пластического слоя (см. п. 1.4.3), при сжатии (осадке) есть смысл рассматривать 2 типа напряженного состояния слоя.

Первый тип напряженного состояния имеет место при большой толщине слоя ($\varkappa \approx 0,5 - 1$). В этом случае для вычисления критической нагрузки можно использовать формулу (1.4.17), где a находится по формуле (1.3.3), а ω (для вычисления a) – по формуле (1.3.5). Тогда среднее критическое напряжение на i -м шаге сжатия можно вычислить по формуле

$$|\sigma_{y_i}| = \left(2 + \frac{(1 - \varkappa_i)^2}{2a_i} \right), \quad (2.2.48)$$

а F_i – сжимающее усилие на i -м шаге, – можно вычислить по формуле

$$|F_i| = l_i \left(2 + \frac{(1 - \varkappa_i)^2}{2a_i} \right), \quad (2.2.49)$$

где

$$\varkappa_i = \frac{h_i}{l_i}, \quad (2.2.50)$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\varkappa_i}} - 1} - 1, \quad (2.2.51)$$

$$a_i = \frac{\varkappa_i(1 - \cos \omega_i + \sin \omega_i)}{\sin(2\omega_i)}. \quad (2.2.52)$$

Алгоритм вычисления высоты h_i и ширины l_i пластического слоя на i -м шаге, участвующих в формуле (2.2.50), приведен в предыдущем пункте 2.2.3.

Второй тип напряженного состояния возникает, если угол ω достигает значения $\pi/4$. Принимая в выражении (2.2.22) $y = h$, получим формулу для вычисления нормальных напряжений σ_y на контактной границе:

$$\sigma_y^-(x, \varkappa) = \begin{cases} \frac{B^2 x^2}{4\beta} - \frac{B^2 x_F^2}{4\beta} + \sigma_y^*, & x \in [0; x_F], \\ \sigma_y^*, & x \in [x_F; 1]. \end{cases} \quad (2.2.53)$$

При этом $x_F = 1 - \sqrt{2\varkappa}$, т.е. во всяком случае должно быть $\varkappa < \sqrt{2}/2$. В действительности, для более точного выполнения гипотезы плоских сечений в средней части слоя, следует считать, что $\varkappa < 0,5$, т.е. формула (2.2.53) имеет место для слоев с относительной толщиной $\varkappa < 0,5$. Например, если в начальный момент нагружения $h = l = 1$, то эту формулу можно применять для $h < 0,65$. Тогда, как следует из рис. 2.5, $l > 1,3$.

Заметим, что в силу формулы (1.3.15)

$$\sigma_y^* = -(1 + \pi/2), \quad (2.2.54)$$

т.к. в данном случае $K = \infty$. По этой же причине второй вариант критического состояния, в отличие от п. 1.4.2, отсутствует. При применении формулы (2.2.53) следует помнить о

непостоянстве (уменьшении) параметра $\varkappa = h/l$ в процессе деформирования слоя, т.е. использовать формулу (2.2.50). Для вычисления усилия сжатия проинтегрируем по x на отрезке $[0; l]$ уравнение (2.2.53). Учитывая формулу (2.2.54) и формулу (1.3.19), которая в данном случае имеет вид (2.2.23), получим усилие давления на слой (заготовку), когда он находится в пластическом состоянии, необходимое для его деформирования:

$$F_i = -\frac{B_i^2 x_F^3}{6\beta_i} - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) l_i = -\frac{B_i^2}{6\beta_i} (l_i - \sqrt{2}h_i)^3 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) l_i. \quad (2.2.55)$$

Здесь F_i – сжимающее усилие в момент, когда $h = h_i$, а алгоритм вычисления высоты h_i и ширины l_i пластического слоя на i -м шаге, необходимых для вычисления параметров B_i и β_i , участвующих в формуле (2.2.55), приведен в предыдущем пункте 2.2.3.

Зависимость этой силы от толщины слоя, вычисленная по формулам (2.2.53) и (2.2.55), показана на рис. 2.7.

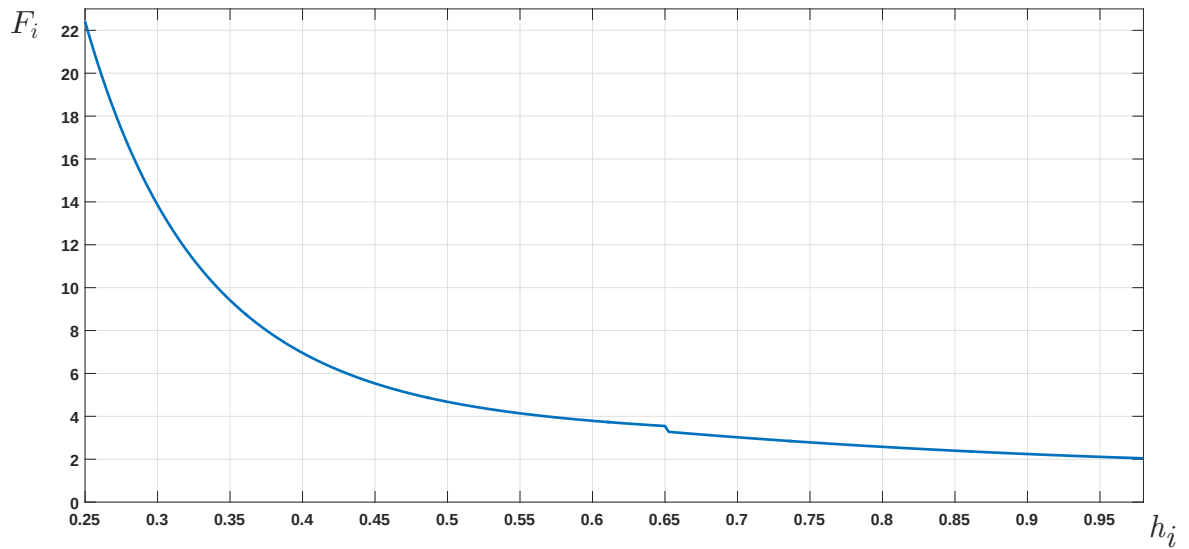


Рис. 2.7: Зависимость силы сжатия от высоты слоя h . В начальный момент $h = l = 1$.

2.3 Напряженно-деформированное состояние сжимаемого пластического слоя при его скольжении по контактным поверхностям

В этом пункте рассматривается процесс сжатия со скольжением по контактным поверхностям пластической заготовки, имеющей в начальный момент нагружения прямоугольное сечение, в условиях плоской деформации.

В процессе увеличения внешней нагрузки может возникнуть момент, когда на контактной поверхности начинается проскальзывание заготовки вдоль сжимающей матрицы. Тогда дальнейшее увеличение касательных напряжений на контактной поверхности прекращается. Это значит, что прекращается увеличение угла ω^- . В этот момент контактное упрочнение достигло предельной величины и реализовано не полностью.

В работах [22, 27, 32, 23, 25] рассмотрен процесс поперечного растяжения слоя. Сжатие со скольжением контактных поверхностей относительно друг друга в рамках математических моделей этих работ ранее не рассматривалось. Целью данного пункта является изучение напряженно-деформированного состояния пластического слоя в процессе его сжатия при наличии скольжения между плоскими контактными поверхностями. В части слоя, расположенной под нагрузкой, то есть в прямоугольнике между контактными поверхностями, выполняется гипотеза плоских параллельных сечений (2.1.1). Полученные, явные и неявные, аналитические зависимости позволяют находить механические и геометрические параметры процесса либо в виде явных приближенных формул, либо на основе итерационных вычислительных схем.

Напряженно-деформированное состояние пластической среды при плоской деформации в безразмерных переменных задается системой уравнений (1.1.2)–(1.1.8).

Математическая модель сжатия пластического слоя плоскими параллельными плитами со скольжением по контактной поверхности определяется параметрами, перечисленными в 2.1.

В начальный момент нагружения поле характеристик является простым однородным, всюду в слое $|\sigma_y| = 2$, $\tau_{xy} = 0$, $\omega = 0$. Затем, на *первом этапе деформирования слоя*, отсутствие скольжения контактных поверхностей приводит к возникновению ненулевых касательных напряжений в слое и, как следствие, возникновению так называемого контактного упрочнения. В поле характеристик появляется участок централизованного поля (то есть сектор) с вершиной в особой точке – точке выхода контактной границы на свободную. Угол этого сектора ω увеличивается, пока не достигнет своего наибольшего значения ω^* , определяемого коэффициентом трения μ , и в дальнейшем в процессе деформирования остается неизменным, в соответствии с ограничением:

$$m \leq \mu \max_{0 \leq x \leq l} \sigma_y(x, h).$$

При этом он не может, очевидно, превысить величины $\pi/4$. В этот момент начинается *второй этап деформирования слоя*.

Для нахождения ω^* заметим, что в предельном (критическом) состоянии

$$m = \mu \max_{0 \leq x \leq l} \sigma_y(x, h), \quad (2.3.1)$$

и воспользуемся известными соотношениями [22, с. 70]: при $x \in [x_F; l]$

$$m = |\tau_{xy}(x, h)| = \sin(2\omega), \quad |\sigma_y(x, h)| = 1 + 2\omega + \cos(2\omega). \quad (2.3.2)$$

Подставляя правые части равенств (2.3.2) в уравнение (2.3.1), при ограничении $\omega \leq \pi/4$ получим трансцендентное уравнение для вычисления ω^* :

$$\omega^* = \min\left(\frac{\pi}{4}; \omega\right),$$

где ω – решение уравнения

$$\sin(2\omega) = \mu(1 + 2\omega + \cos(2\omega)). \quad (2.3.3)$$

Точнее говоря, имеют место 2 случая.

Предложение 2.3.1. *Первый случай (полная реализация контактного упрочнения).* Если

$$\mu \geq \frac{2}{2 + \pi}, \quad (2.3.4)$$

то

$$\omega^* = \frac{\pi}{4}.$$

Второй случай (неполная реализация контактного упрочнения). Если же

$$0 \leq \mu \leq \frac{2}{2 + \pi},$$

то ω^* – решение уравнение (2.3.3).

Действительно, пограничный случай $\omega = \pi/4$ приводит к условию

$$\mu = \frac{2}{2 + \pi}.$$

График зависимости ω от μ приведен на рис. 2.8.

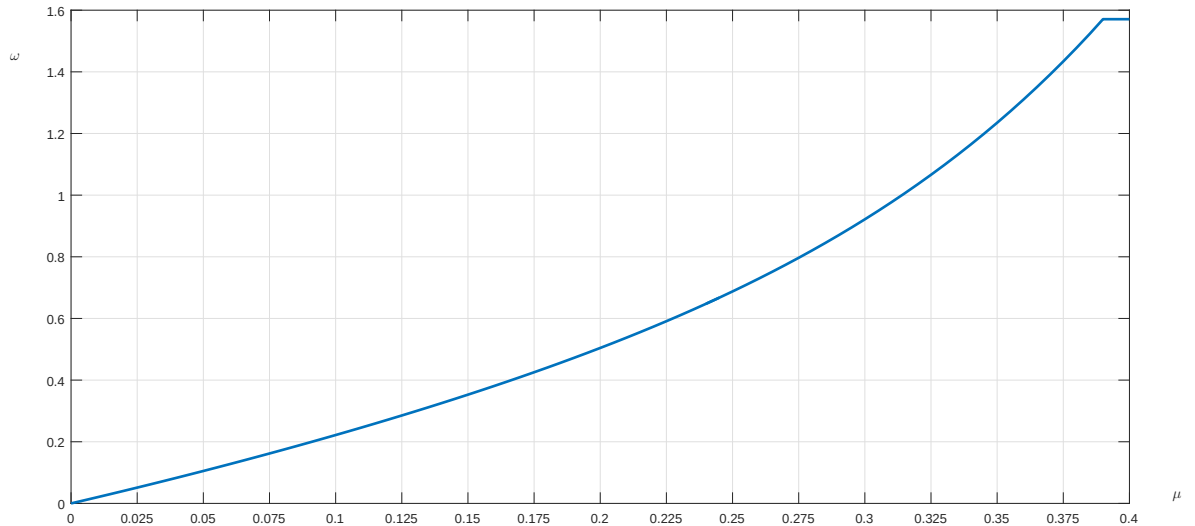


Рис. 2.8: Зависимость угла центрированного поля ω от коэффициента трения μ .

Уравнение (2.2.24) и следующие из него формулы для вычисления скоростей смещений (2.2.29) и (2.2.30) сохраняются. При использовании упрощенного варианта условия пластичности (2.2.35) формулы для вычисления скоростей смещений приобретают вид:

$$v_x = \frac{Bv_h x \cos(By)}{\sin(Bh)}; \quad (2.3.5)$$

$$v_y = \frac{v_h \sin(By)}{\sin(Bh)}. \quad (2.3.6)$$

Для нахождения коэффициента B приравняем выражение для вычисления касательных напряжений в точке F величине τ^* . Из (2.2.3) получим:

$$Y = -\frac{\tau(x_F, h)}{x_F \sqrt{1 - \tau^2(x_F, h)}} = -\frac{\tau^*}{x_F \sqrt{1 - (\tau^*)^2}}.$$

Подставляя сюда вместо Y его выражение из (2.2.18), получим:

$$(B/2) \operatorname{tg}(Bh) = -\frac{\tau^*}{x_F \sqrt{1 - (\tau^*)^2}},$$

откуда

$$B = \frac{1}{h} \operatorname{atgd} \left(\frac{2\tau^*}{x_F \sqrt{1 - (\tau^*)^2}} \right), \quad (2.3.7)$$

где τ^* вычисляется по формуле

$$\tau^* = \sin(2\omega^*). \quad (2.3.8)$$

Заметим, что $\tau^* = 1$ при полной реализации контактного упрочнения, что происходит при отсутствии скольжения по контактным поверхностям или при условии (2.3.4). В этом случае по формуле (2.3.7)

$$B = \frac{1}{h} \operatorname{atgd} \infty = \frac{\pi}{2h},$$

что совпадает с формулой (2.2.32) для вычисления параметра B при отсутствии скольжения.

Подставляя в формулу (2.3.5) h вместо y , и вычисля коэффициент B по формуле (2.3.7), найдем скорость скольжения заготовки по поверхности матрицы в зависимости от коэффициента трения μ :

$$v_x|_{y=h} = Bv_h x \operatorname{ctg}(Bh). \quad (2.3.9)$$

Блок-схема алгоритма описанного вычисления с использованием формулы (2.3.11) показана на рис. 2.9. На основе этого алгоритма проведен вычислительный эксперимент. Его результат показан на рис. 2.10 – скорость скольжения заготовки по матрице в зависимости от коэффициента трения μ . 1) $\mu = 0$, 2) $\mu = 0, 1$, 3) $\mu = 0, 2$, 4) $\mu = 0, 3$, 5) $\mu = 0, 4$.

Напряженное состояние для "нетолстых" слоев определяется, как и в п. 2.2.1, формулами (2.2.19) и (2.2.22), в которых B вычисляется по формуле (2.3.7), а σ_y^* и x_F по формулам:

$$\sigma_y^* = 1 - 2\omega^* + \cos(2\omega^*), \quad (2.3.10)$$

$$x_F = 1 - \frac{2\kappa}{\sqrt{1 + \sin(2\omega^*)}}, \quad (2.3.11)$$

по аналогии с формулами (1.3.13)(1.3.16) соответственно.

2.4 Выводы по главе 2

Гипотеза плоских сечений позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние находящегося под сжимающей нагрузкой пластического слоя в аналитической форме и найти в любой момент нагружения напряжения в любой точке слоя и скорости точек слоя.

1. Это позволило найти нагрузку сжатия в каждый момент нагружения (п. 2.2.4).

2. Установлено, что при постоянной скорости сжатия заготовки скорость в направлении слоя возрастает с уменьшением толщины заготовки обратно пропорционально толщине и пропорционально расстоянию от линии раздела течения (2.2.36); скорость движения точки слоя в направлении нагрузки уменьшается от контактной поверхности до оси симметрии слоя от величины v_h до нуля по синусоидальному закону (2.2.36).
3. На основе аналитического исследования напряженно-деформированного состояния разработан алгоритм для вычисления формы и размеров части слоя, находящегося не под нагрузкой. В частности, форма свободной поверхности может быть аппроксимирована синусоидой (2.2.47).
4. Сравнение полученных результатов с численными экспериментами показало хорошую сходимость, что подтверждает эффективность использования гипотезы плоских сечений при математическом моделировании напряженно-деформированного состояния пластического слоя под сжимающей нагрузкой.

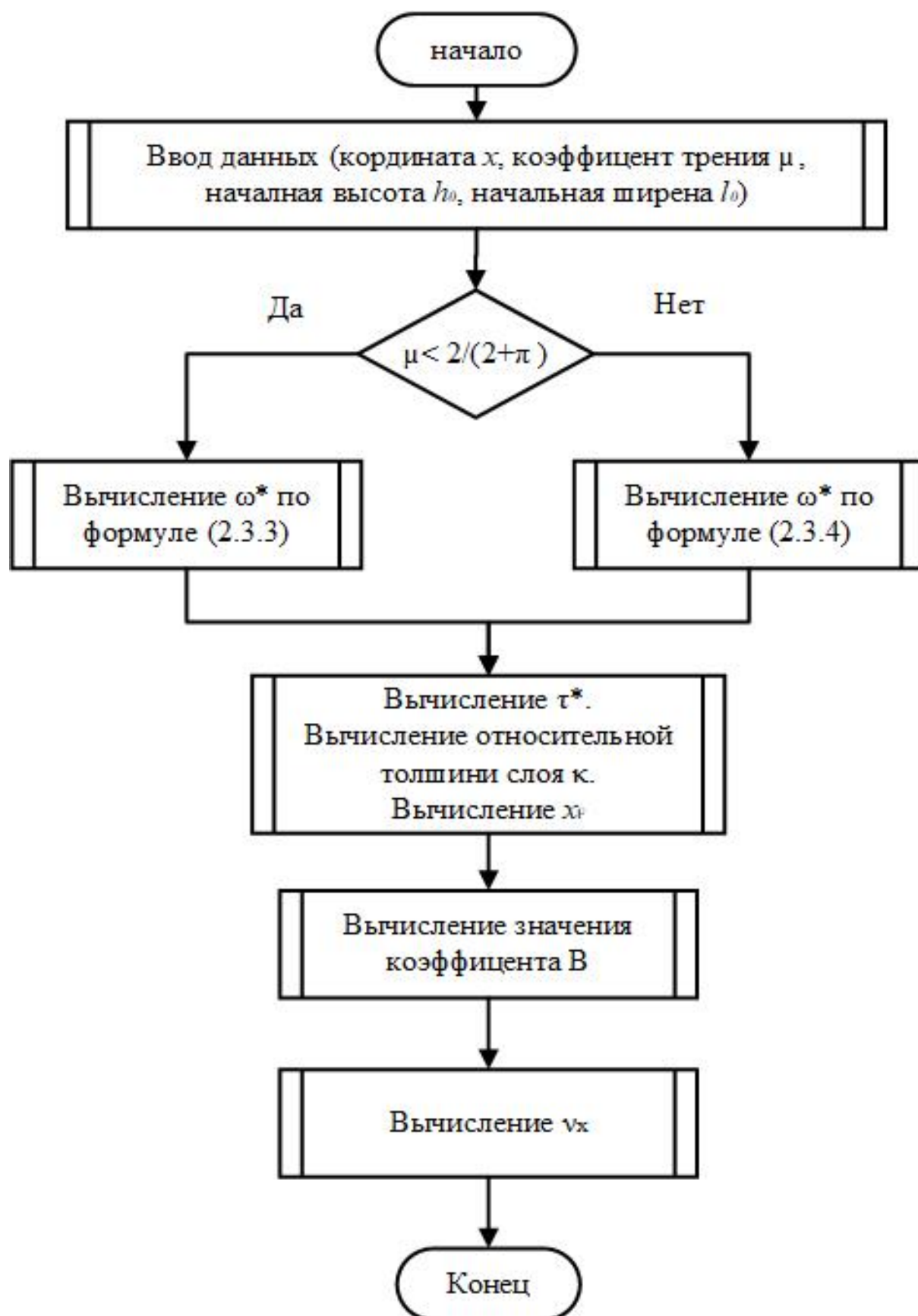


Рис. 2.9: Блок-схема алгоритма вычисления скорости скольжения заготовки по поверхности матрицы в зависимости от коэффициента трения μ .

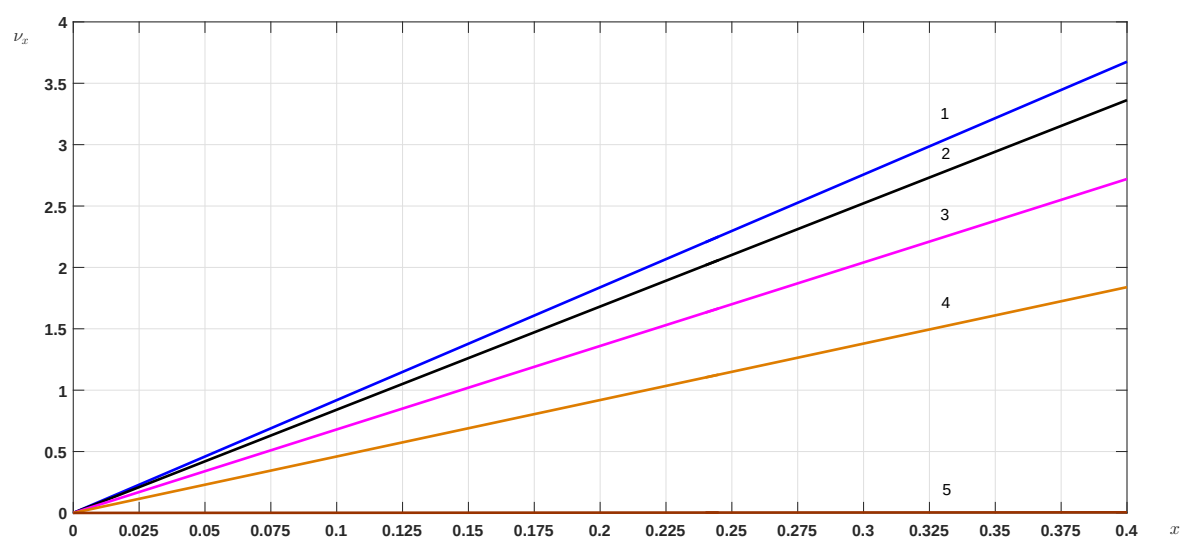


Рис. 2.10: Скорость скольжения точек с координатой x контактной поверхности заготовки по матрице. Вычислительный эксперимент.

Глава 3

Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния тонкостенной цилиндрической оболочки, содержащей слой из менее прочного материала

3.1 Наклонный менее прочный слой в тонкостенной цилиндрической оболочке

3.1.1 Основные понятия и обозначения

Критерием достижения листовыми конструкциями и тонкостенными оболочками состояния предразрушения является потеря устойчивости процесса пластического деформирования материала конструкции. Эффективный метод вычисления критических деформаций и напряжений в момент потери устойчивости при двухосном нагружении предложен в работе [55]. В работах [31, 35, 21, 34, 22] развивается и уточняется подход работы [55]. На этой основе получены явные аналитические зависимости критических деформаций, напряжений и давления в листовых конструкциях и однородных тонкостенных цилиндрических оболочках. Сварные оболочечные и листовые конструкции могут содержать участки неоднородности. Как правило, это слои и прослойки из менее или более прочного, чем основной, материала: сварные швы, зоны сплавления и зоны термического влияния. Изучение критического состояния таких соединений основано на двух теориях: теории потери устойчивости процесса деформирования материала слоя [21, 22, 37, 105] и теории контактного упрочнения материала слоя [21, 22, 52, 37, 17, 38]. Подходы, применяемые в работах [21, 22, 52, 37, 17, 38], позволяют найти зависимость нормальных и касательных напряжений в менее прочном слое от коэффициента механической неоднородности соединения $K = k^+/k^-$ в окрестности контактной границы и, как следствие, вычислить коэффициент g контактного упрочнения слоя. Здесь k^+ , k^- – параметры пластичности

основного материала и материала слоя – напряжения, характеризующие момент потери пластической устойчивости образца из соответствующего материала под растягивающей нагрузкой.

Практический интерес представляют наклонные слои (рис. 3.1), т.е. расположенные под углом к направлениям внешних взаимно ортогональных нагрузок, порождающих напряжения σ_1 и σ_2 . Сварные швы, зоны сплавления и зоны термического влияния заводских швов спирально-шовных труб являются важными примерами таких слоев. В работах [21, гл.4], [22, гл.8], [24, гл.7], [37, 105] показано, что в случае менее прочного наклонного слоя может быть использована вычислительная схема случая, когда слой ортогонален одной из внешних нагрузок. При этом вместо коэффициента K следует в этой схеме использовать более сложный параметр K_{incl} (см. ниже формулу (3.1.11)), зависящий от механических и геометрических параметров соединения и условий нагружения.

В случае малой кривизны тонкостенных цилиндрических оболочек результаты, относящиеся к листовым образцам, можно распространить на тонкостенные оболочки [22, гл.8], [24, гл.7]. Когда напряжения в тонкостенной цилиндрической оболочке (ТЦО) – осевое σ_1 и кольцевое σ_2 , – неотрицательны, критические состояния ТЦО подробно исследованы в работах [55, 60, 19, 30, 31, 33, 35, 37, 105], а также в [21, с. 164–179], [22, с. 26–54, 230–248], [24, гл.7]. В данной главе рассматривается ситуация, когда напряжения σ_1 и σ_2 имеют разные знаки. Возможны 2 случая: 1) оболочка подвержена внутреннему давлению и сжимающей осевой нагрузке; 2) оболочка находится под действием внешнего давления и растягивающей осевой нагрузки.

Такие условия возможны при эксплуатации подводных трубопроводов, а также наземных и подземных трубопроводов, проложенных в условиях сложного рельефа.

Цель главы – найти зависимости критических напряжений и критического давления и от механических и геометрических параметров в однородной ТЦО и ТЦО, содержащей менее прочные спиральные прослойки, при отрицательном коэффициенте двухосности нагружения $m = \sigma_1/\sigma_2$.

Перечислим основные параметры, определяющие свойства изучаемого объекта – листового образца с наклонным слоем из менее прочного материала.

1. Пределы прочности (временные сопротивления) σ_B^+ и σ_B^- основного материала оболочки или листового образца и материала слоя соответственно.

2. Угол наклона слоя ν (угол между направлением слоя и направлением действия нагрузки σ_1 , рис. 3.1).

3. Относительная толщина слоя κ , то есть отношение его высоты (толщины) к ширине (толщине листа или стенки оболочки).

4. Коэффициент двухосности нагружения $m = \sigma_1/\sigma_2$.

Перечисленные параметры даны по условию задачи.

Следующие параметры находятся на основе данных условий.

1. Коэффициент механической неоднородности соединения $K = k^+/k^-$.

2. Условный коэффициент механической неоднородности K_{incl} для слоя, не ортогонального внешней нагрузке, зависящий от K и ν .

3. Коэффициент контактного упрочнения материала слоя g , $g \geq 1$, который зависит от

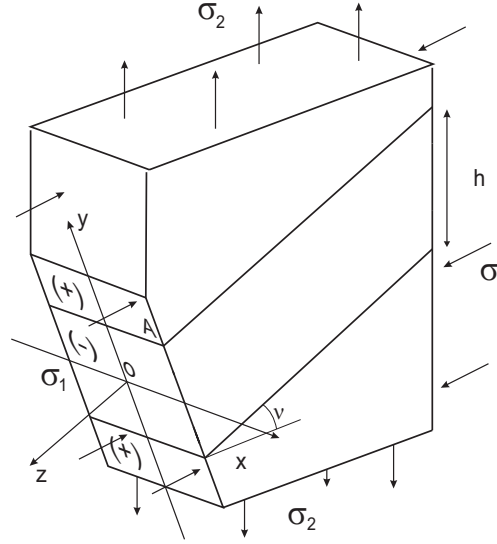


Рис. 3.1: Наклонный слой в листовом образце.

$\varkappa$, K_{incl} и ν .

Введем обозначения и приведем некоторые формулы (подробности в работах [22, гл.8], [24, гл.7]). Напомним, что знак минус в качестве верхнего индекса указывает на отношение данной величины к менее прочному слою; знак плюс – к основному материалу ТЦО или листового образца. Пусть

$$B = \cos^2 \nu + m \sin^2 \nu; \quad C = (1 - m) \sin 2\nu. \quad (3.1.1)$$

Будем для краткости обозначать τ_{yz} через τ . В работе [22, с. 231] отмечено, что в основном материале оболочки и на контактных поверхностях слоя

$$\tau = 0,5 C \sigma_2; \quad \sigma_{yav} = B \sigma_2. \quad (3.1.2)$$

Здесь $\sigma_{yav} = \int_0^1 \sigma_y(x, \varkappa) dx$ – среднее значение напряжений σ_y на контактной поверхности. Там же приведено уравнение несжимаемости в наклонном слое (см. рис. 3.1), которое в предположении теории малых деформаций имеет вид:

$$\frac{\partial u_x^-}{\partial x} + \frac{\partial u_y^-}{\partial y} = 0, \quad (3.1.3)$$

откуда, при условии пропорциональности девиаторов напряжений и деформаций, следует:

$$2\sigma_z^- = \sigma_x^- + \sigma_y^-. \quad (3.1.4)$$

Отсюда и из соображений симметрии следует ([22, с. 232]), что условие пластичности Мизеса для материала слоя имеет вид:

$$(\sigma_x^- - \sigma_y^-)^2 + 4(\tau_{xy}^-)^2 = 4(k^-)^2 - 4(\tau^-)^2, \quad (3.1.5)$$

где $(k^-) = \sigma_i^- / \sqrt{3}$. Там же указана формула, по которой вводится коэффициент контактного упрочнения g :

$$|\sigma_{yav}^-| = 2g \sqrt{(k^-)^2 - (\tau^-)^2}; \quad \tau^- \neq k^-, \quad (3.1.6)$$

а также формулы

$$|\sigma_2^-| = \frac{2gk^-}{\sqrt{B^2 + g^2C^2}}; \quad \tau^- = \frac{Cgk^-}{\sqrt{B^2 + g^2C^2}}. \quad (3.1.7)$$

Заметим, что в [22, с. 232] рассматривались только положительные напряжения, поэтому там отсутствуют модули в левых частях формул (3.1.6) и (3.1.7).

3.1.2 Условный коэффициент механической неоднородности

При зафиксированных условиях нагружения и данном угле наклона слоя напряжения τ и, как следствие, правая часть уравнения (3.1.6) одинаковы для всех точек слоя. Введем аналог коэффициента K – условный коэффициент механической неоднородности K_{incl} . Можно считать ([79, с. 220], [98, с. 144]), что в ТЦО $\sigma_3 = 0$. Будем предполагать выполнение этого условия в рассматриваемых ТЦО и листовых образцах. Интенсивности напряжений и деформаций при таком условии имеют вид:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}; \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}. \quad (3.1.8)$$

Введем обозначение:

$$s = \sqrt{m^2 - m + 1}.$$

Так как из (3.1.2) следует, что

$$\tau^+ = 0, 5C\sigma_2^+ = 0, 5C\frac{\sigma_i^+}{s} = \frac{\sqrt{3}C}{2s}k^+,$$

то правая часть уравнения (3.1.5) имеет вид:

$$4(k^+)^2 - 4(\tau^+)^2 = 4(k^+)^2 \left(1 - \frac{3C^2}{4s^2}\right). \quad (3.1.9)$$

Несложные расчеты показывают, что выражение в скобках в (3.1.9) больше нуля при всех значениях ν и m . Коэффициент K_{incl} механической неоднородности для наклонного слоя, в соответствии с правой частью уравнения (3.1.5), введём по формуле:

$$K_{incl} = \sqrt{\frac{(k^+)^2 - (\tau^+)^2}{(k^-)^2 - (\tau^-)^2}}. \quad (3.1.10)$$

Подставляя сюда правые части уравнений (3.1.7) (для τ) и (3.1.9), получим:

$$K_{incl} = K\sqrt{\left(1 + \frac{g^2C^2}{B^2}\right)\left(1 - \frac{3C^2}{4s^2}\right)}. \quad (3.1.11)$$

В работах [21, гл. 4], [22, гл. 8], [37, 105] накладывалось ограничение: $m > 0$. Например, при отсутствии осевых нагрузок на тонкостенную цилиндрическую оболочку, подверженную внутреннему давлению, коэффициент $m = 0,5$. В любом случае, при условии $m > 0$, $B \neq 0$. Если $m \leq 0$, то вычислительная схема указанных работ может оказаться непригодной. В частности, из (3.1.1) и (3.1.11) видно, что при $m = -\operatorname{ctg}^2 \nu$ коэффициент $K_{incl} = \infty$,

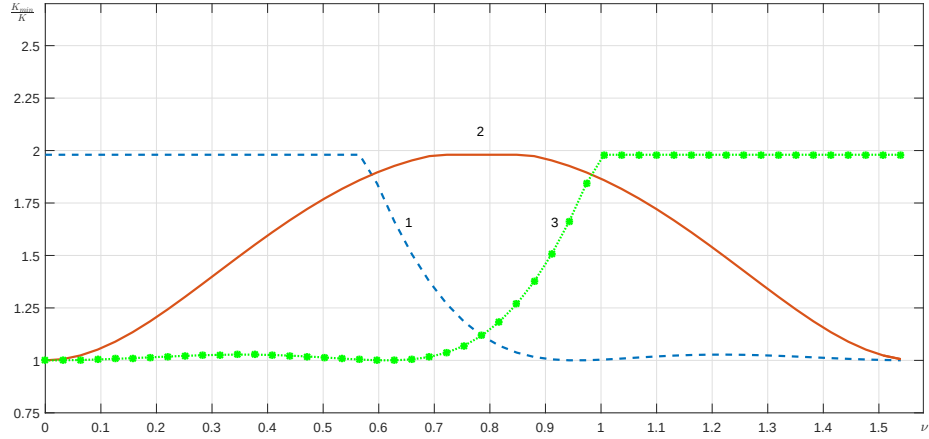


Рис. 3.2: Зависимости величины K_{min}/K от угла наклона слоя $\nu \in [0; \pi/2]$ при значениях показателя двухосности нагружения $m = 0; -1; -\infty$ (линии 1, 2 и 3 соответственно) при отсутствии контактного упрочнения.

тогда как схема вычисления g в упомянутых работах проводится для $K < 1,5$. Кроме того, в работах [22, с. 79–83], [17, 38] показано, что при $K \geq K_{cr}$, $K_{cr} \approx 1,98$, соединение работает иначе – более прочный основной материал в окрестности слоя в процессе нагружения не переходит в состояние пластического течения. При этом в менее прочном слое реализуется полное контактное упрочнение, когда касательные напряжения τ_{xy} вблизи свободной поверхности достигают своего наибольшего теоретически возможного значения. В данном случае это $\tau_{xy}^- = \sqrt{(k^-)^2 - (\tau^-)^2}$.

На рис. 3.2, 3.3 показана зависимость величины

$$K_{min}/K, \quad K_{min} = \min(K_{incl}, K_{cr})$$

от угла наклона слоя при различных значениях показателя двухосности нагружения m .

Рассмотрим рис. 3.2 (контактное упрочнение отсутствует). Тогда, если $m = 0$, при значениях примерно $\nu < 0,57$ условный коэффициент K_{incl} как минимум в 2 раза больше K , затем с увеличением угла наклона убывает и для углов, больших 0,9, $K_{incl} \approx K$. Таким образом, в зависимости от угла наклона слоя Условный коэффициент механической неоднородности может совпадать с K , а может быть значительно больше. Как видно из рис. 3.2 и 3.3, при $m = -1$ наибольшее отличие K_{incl} от K бывает при углах в окрестности $\pi/4$. Всегда при углах $\nu = 0$ и $\nu = \pi/2$ (продольный и кольцевой слой) $K_{incl} = K$.

3.1.3 Особый случай напряженного состояния слоя

Формула (3.1.11) не распространяется на случай, когда

$$|\tau| = k^-, \quad (3.1.12)$$

$$B = 0. \quad (3.1.13)$$

Покажем, что условия (3.1.12) и (3.1.13) равносильны.

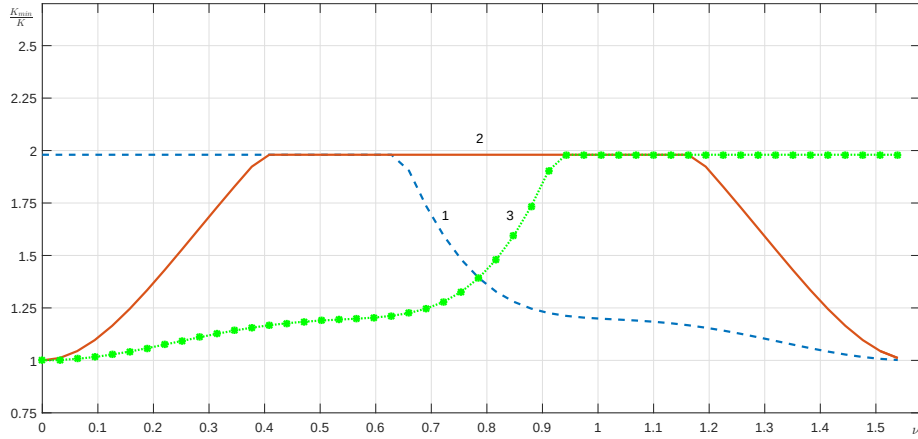


Рис. 3.3: Зависимости величины K_{min}/K от угла наклона слоя $\nu \in [0; \pi/2]$ при значениях показателя двухосности нагружения $m = 0; -1; -\infty$ (линии 1, 2 и 3 соответственно), когда коэффициент контактного упрочнения $g = 1, 3$.

Предложение 3.1.1. $\tau = k^- \Leftrightarrow B = 0 \Leftrightarrow m = -\text{ctg}^2 \nu$.

При условии (3.1.12) $|\tau| = k^-$ материал слоя находится в условиях чистого сдвига.

Доказательство. Пусть $\tau = k^-$. Тогда, в силу (3.1.2), $\sigma_2 \neq 0$, и

$$B = \frac{\sigma_y \text{ av}}{\sigma_2} = \frac{2g\sqrt{(k^-)^2 - \tau^2}}{\sigma_2} = 0.$$

Обратно, если $B = 0$, то из (3.1.2) следует, что $\sqrt{(k^-)^2 - \tau^2} = 0$. Из (3.1.1) и (3.1.2) следует, что условия (3.1.12) и (3.1.13) равносильны каждому из условий:

$$m = -\text{ctg}^2 \nu; \quad C = 2 \text{ctg} \nu; \quad C = 2\sqrt{-m}. \quad (3.1.14)$$

Из соображений симметрии следует $\tau_{xz} = 0$. Из уравнения текучести (3.1.5) и равенства (3.1.4) следует, что при условии (3.1.12)

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0; \quad \tau_{xy} = 0. \quad (3.1.15)$$

Обратное очевидно.

Следствие 3.1.1. Когда напряжения σ_1 и σ_2 , порождаемые внешними нагрузками, находятся в отношении $\sigma_1 \approx -\sigma_2 \text{ctg}^2 \nu$, условный коэффициент механической неоднородности $K_{incl} \approx \infty$ – основной материал ведет себя по отношению к материалу слоя как жесткое тело (не вовлекается в пластическое деформирование).

Выразим σ_1 и σ_2 через параметры.

Если $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$, используя (3.1.2), (3.1.12) и (3.1.14), получим:

$$\sigma_1 = \frac{2k^- m}{C} = -\sqrt{-m}k^- = (-\text{ctg} \nu)k^-; \quad \sigma_2 = \frac{2k^-}{C} = \frac{k^-}{\sqrt{-m}} = (\text{tg} \nu)k^-. \quad (3.1.16)$$

Аналогично, при $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$ и условии (3.1.12) имеют место равенства:

$$\sigma_1 = \frac{2k^- m}{C} = \sqrt{-m}k^- = (\text{ctg} \nu)k^-; \quad \sigma_2 = \frac{-2k^-}{C} = \frac{-k^-}{\sqrt{-m}} = (-\text{tg} \nu)k^-. \quad (3.1.17)$$

3.2 Критическое состояние однородной тонкостенной цилиндрической оболочки при отрицательном коэффициенте двухосности нагружения

3.2.1 Введение. Гипотеза "единой кривой" и критерий Свифта потери устойчивости пластического деформирования

Будем называть цилиндрическую оболочку *тонкостенной* [22, с.10], если отношение толщины стенки t к ее внутреннему радиусу R мало: $t \ll R$. В инженерной практике оболочку считают тонкостенной, если $t/R \leq 0,02 \dots 0,025$.

В таком случае при изучении фрагмента оболочки, сравнимого по ширине с ее толщиной (например, участка, содержащего менее прочный слой), можно пренебречь кривизной оболочки. Это допущение позволяет переносить результаты, относящиеся к наклонным слоям в листовых образцах, на спиральные слои тонкостенных цилиндрических оболочек.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние тонкостенной цилиндрической оболочки, находящейся под действием внутреннего или внешнего давления p и, одновременно, растягивающей или сжимающей осевой силы N .

Экспериментальные данные, полученные во второй половине 20-го века многими авторами (Е.А. Devis [15], D. Broek [103], А.М. Жуков [40, 41], Н.Я. Михайлов, Ю.И. Янг [67], Г.С. Писаренко, А.А. Лебедев [79, с. 328–336]; другие работы см. в монографии В.Л. Дильмана, Т.В. Ерошкиной [22, с. 26]), показали, что при сложном нагружении одновременным растяжением и сдвигом изотропного материала удовлетворительно подтверждается "гипотеза единой кривой" П. Людвига (P. Ludwik) в форме:

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i), \quad (3.2.1)$$

где σ_i и ε_i – интенсивности напряжений и деформаций соответственно. Поэтому для материала слоя, подверженного аналогичным нагрузкам, допустимо применение этой гипотезы. Распространенным в литературе является допущение [60], что

$$\sigma_i = A \varepsilon_i^n, \quad A = e^n n^{-n} \sigma_B. \quad (3.2.2)$$

Здесь

e – постоянная Эйлера,

n – показатель упрочнения; это параметр материала, характеризующий его пластические свойства (для многих сталей $n = 0,10 \dots 0,15$),

σ_B – предел прочности материала.

В работах [21, 22] предложены другие аппроксимации зависимости (3.2.1), которые являются обобщениями и уточнениями функции (3.2.2), в том числе зависимость

$$\sigma_i = A \varepsilon_i^n \exp(a \varepsilon_i), \quad A = e^n n^{-n} (1 - a)^n \sigma_B. \quad (3.2.3)$$

Как известно [55], существует два вида критического состояния тонкостенной цилиндрической оболочки из упрочняемого материала: общая потеря устойчивости процесса пластического деформирования (ОПУПД) и локализация пластической деформации (ЛПД). Какое из этих состояний реализуется, зависит от условий нагружения [21, 22].

Для нахождения критических интенсивностей деформаций и напряжений, соответствующих как ОПУПД, так и ЛПД, в работе применяется критерий Х. Свифта [121] (использованный также З. Марциньяком [116, 115]). Напомним для полноты изложения суть этого критерия [121], подробно проанализированная в работах [55, 31, 33, 35].

Общая потеря устойчивости процесса пластического деформирования (ОПУПД).

Изменение размеров данного участка конструкции при увеличении внешних сил приводит к увеличению интенсивности напряжений на этом участке, которое до какого-то момента компенсируется его деформационным упрочнением, и деформирование происходит стабильно. Когда деформационное упрочнение в силу его недостаточной скорости роста оказывается не в состоянии дезавуировать увеличение деформации, происходит потеря стабильности процесса пластического деформирования – наступает критический момент деформирования (состояние предразрушения). Численно этот момент определяется равенством дифференциалов указанных зависимостей.

Локализация пластической деформации (ЛПД).

Основанная на критерии Свифта методика нахождения критической интенсивности деформаций $(\varepsilon_i)_{loc}$, при которых происходит локализация пластических деформаций (ЛПД), то есть возникает кольцевая шейка или продольная выпучина, подробно изложена в работах [55, 31, 33, 35].

Пусть напряжения σ_j ($j = 1; 2$) на сечении оболочки площади S_j , ортогональном главному j -му направлению, определяются формулой $\sigma_j = N_j/S_j$ где N_j ($j = 1; 2$) – силы, действующие на этом сечении. Как известно, в процессе равномерного пластического деформирования оболочки прирост напряжений из-за уменьшения какого-то "слабого" сечения оболочки компенсируется увеличением, по сравнению с неослабленным сечением, сопротивления материала пластическому деформированию вследствие упрочнения. Однако в результате уменьшения модуля упрочнения в процессе развития пластических деформаций оболочки в целом элементарный прирост напряжения сопротивления в слабом сечении оказывается в какой-то момент меньше прироста напряжений вследствие изменения геометрии конструкций, то есть оболочка теряет локальную устойчивость, и образуется шейка (критерий Свифта применительно к ЛПД). Рассматривая два параллельных сечения, ослабленное и неослабленное, ортогональных одному из главных направлений, видим, что эффективные силы, действующие на эти сечения и зависящие как от внешних нагрузок, так и от изменяющихся геометрических параметров конструкции, одинаковы, а различие в напряжениях, действующих на этих сечениях, объясняется лишь различием площадей на этих сечениях. Следовательно, применяя критерий Свифта к условиям возникновения шейки, нужно считать, что сила N_j постоянна, а площадь сечения S_j находится в зависимости от достигнутой деформации.

3.2.2 Нахождение критических деформаций однородной тонкостенной цилиндрической оболочки при отрицательном коэффициенте двухосности нагружения.

Известно, что главные напряжения в стенке тонкостенной оболочки рассчитываются по формулам [79, с. 220], [98, с. 144]:

$$\sigma_1 = \frac{Rp}{2t} + \frac{N}{2\pi Rt}; \quad \sigma_2 = \frac{Rp}{t}; \quad \sigma_3 = 0. \quad (3.2.4)$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – осевое, кольцевое и радиальное нормальные напряжения соответственно, p – внутреннее или внешнее давление, N – осевая растягивающая или сжимающая сила.

Из (3.2.4) следует:

$$N = \pi (2m - 1) R t \sigma_2 = \pi p (2m - 1) R^2. \quad (3.2.5)$$

Следовательно, *осевая сила N и давление p имеют разные знаки тогда и только тогда, когда $m < 0,5$.*

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – осевая, кольцевая и радиальная логарифмические деформации стенки оболочки соответственно, t_0 и R_0 – значения t и R в начальный момент нагружения. Тогда

$$R = R_0 \exp \varepsilon_2, \quad t = t_0 \exp \varepsilon_3. \quad (3.2.6)$$

В процессе пластического деформирования оболочки выполняется условие несжимаемости:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0. \quad (3.2.7)$$

Считаем, что, в соответствии с теорией малых деформаций, пропорциональны девиаторы напряжений и деформаций:

$$\sigma_j - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = \lambda \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Это равенство может быть записано, с учетом условия несжимаемости и условия $\sigma_3 = 0$, в виде:

$$(2 - m)\varepsilon_1 = (2m - 1)\varepsilon_2. \quad (3.2.8)$$

Отсюда видно, что *при $m < 0,5$ деформации ε_1 и ε_2 имеют разные знаки.*

Условия достижения критического состояния цилиндрической оболочки существенно зависят от того, в каком отношении друг с другом изменяются величины N и p в процессе нагружения оболочки. Натурные эксперименты обычно проводились при условии, когда в процессе увеличения внешних нагрузок отношение осевой силы и внутреннего давления оставалось неизменным: $N/p = \text{const}$ ([104, 79, и др.]). Поэтому в работах В.Л. Дильмана и соавторов [31, 19, 33, 21, 22, и др.] рассматривалось пропорциональное условие нагружения: $N/p = \text{const}$. В работе [55] предполагалось, что $N/p = \text{const}$ и

$$m = \sigma_1/\sigma_2 = \text{const}. \quad (3.2.9)$$

Однако эти предположения противоречат друг другу. Действительно, как следует из (3.2.5) и (3.2.6), в предположении $m = \text{const}$ величина N/p в процессе нагружения изменяется по зависимости:

$$\frac{N}{p} = \frac{N_0}{p_0} \exp(2\varepsilon_2), \quad (3.2.10)$$

где N_0 и p_0 – осевая сила и давление в начальный момент нагружения.

Напомним (формулы (3.1.8)), что интенсивности напряжений и деформаций при условии (3.2.4) $\sigma_3 = 0$ имеют вид:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}; \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}. \quad (3.2.11)$$

Будем использовать обозначение:

$$s = \sqrt{m^2 - m + 1}.$$

Всюду в работе будет предполагаться, что в процессе нагружения остается постоянным параметр m – коэффициент двухосности нагружения стенки ТЦО или листового образца.

Из (3.2.8) и (3.2.11) следует при условии $m < 0, 5$:

$$|\varepsilon_1| = \frac{1 - 2m}{2s} \varepsilon_i; \quad |\varepsilon_2| = \frac{2 - m}{2s} \varepsilon_i, \quad (3.2.12)$$

а также, с учетом (3.2.11), (3.2.4) и (3.2.6),

$$\sigma_i = s |\sigma_2| = \frac{sR|p|}{t} = \frac{sR_0|p|}{t_0} \exp(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1). \quad (3.2.13)$$

В работе предполагается, что всегда $m < 0$ (рассуждения пункта 3 верны для любых $m < 0, 5$). Как было замечено, тогда ε_1 и ε_2 имеют разные знаки.

Рассмотрим два случая в зависимости от знака σ_2 .

Первый случай: $\sigma_2 \geq 0$. Из (3.2.5) следует, что тогда $N \leq 0$ – осевая сила отрицательна, то есть цилиндрическая оболочка находится под воздействием сжимающей осевой нагрузки и внутреннего давления. Давление p на оболочку положительно, т.е. является внутренним, в силу (3.2.4). В этом случае кольцевые деформации положительны.

Найдем условия, при которых происходит ОПУПД. Из (3.2.8) и (3.2.12) следует, что

$$\varepsilon_2 > 0; \quad \varepsilon_1 = \frac{1 - 2m}{m - 2} \varepsilon_2 < 0; \quad \varepsilon_3 = \frac{1 + m}{m - 2} \varepsilon_2 < 0; \quad \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 = \frac{3}{2 - m} \varepsilon_2 = \frac{3}{2s} \varepsilon_i > 0. \quad (3.2.14)$$

Знак ε_3 зависит от m . Если $m \geq -1$, то $\varepsilon_3 \leq 0$; если $m < -1$, то $\varepsilon_3 > 0$. В рассматриваемом случае, в силу (3.2.13) и (3.2.14),

$$\sigma_i = \frac{sR_0|p|}{t_0} \exp(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1) = \frac{sR_0p}{t_0} \exp\left(\frac{3}{2s} \varepsilon_i\right). \quad (3.2.15)$$

Приравнивая производные по ε_i функций (3.2.15) и (3.2.2), для удобства расчетов предварительно вычислив их логарифмы, получим:

$$(\ln A + n \ln \varepsilon_i)' = \left(\ln \frac{sR_0p}{t_0} + \frac{3}{2s} \varepsilon_i \right)',$$

откуда

$$(\varepsilon_i)_{tot} = \frac{2sn}{3}. \quad (3.2.16)$$

Как было замечено, в этом случае критическое состояние наступает в форме ОПУПД.

Вычислим, следуя методике работ [55, 33, 35], критические интенсивности деформаций $(\varepsilon_i)_{loc}$, при которых происходит локализация пластических деформаций (ЛПД), то есть возникает продольная выпучина.

Пусть l – длина некоторого ортогонального поперечного сечения оболочки, а его площадь $S_2 = lt$. Тогда $l = l_0 \exp \varepsilon_1$. В соответствии с критерием Свифта применительно к ЛПД, вспоминая формулы (3.2.6), (3.2.7), (3.2.12), получим:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{N_2}{lt} = \frac{N_2 \exp \varepsilon_2}{l_0 t_0} = \frac{N_2 \exp \left(\frac{2-m}{2s} \varepsilon_i \right)}{l_0 t_0} = C_2 \exp \left(\frac{2-m}{2s} \varepsilon_i \right), \quad N_2 < 0, \quad C_2 < 0. \quad (3.2.17)$$

Здесь $C_2 = \frac{N_2}{l_0 t_0}$. Поэтому интенсивность напряжений, соответствующая моменту возникновения выпучины, в силу (3.2.13) и (3.2.17), равна:

$$\sigma_i = s|\sigma_2| = C_2 \exp \left(\frac{2-m}{2s} \varepsilon_i \right).$$

В более полной форме, на основе второго равенства в (3.2.4), последнюю формулу можно записать в виде:

$$\sigma_i = \frac{sR_0 p}{t_0} \exp(\varepsilon_2) = \frac{sR_0 p}{t_0} \exp \left(\frac{2-m}{2s} \varepsilon_i \right). \quad (3.2.18)$$

Для вычисления критической деформации, при которой возникает локализация деформации в форме выпучины, приравняем дифференциалы выражений (3.2.2) и (3.2.18). Получим:

$$(\varepsilon_i)_{loc} = \frac{2sn}{2-m}, \quad (3.2.19)$$

откуда в силу (3.2.12),

$$(\varepsilon_2)_{loc} = n. \quad (3.2.20)$$

Разумеется, при данных условиях нагружения критическое состояние оболочки возникает либо как ОПУПД, либо в виде ЛПД в зависимости от того, какая интенсивность деформации меньше – $(\varepsilon_i)_{tot}$ или $(\varepsilon_i)_{loc}$. Таким образом, критическая интенсивность деформации вычисляется по формуле:

$$(\varepsilon_i)_{cr} = \min((\varepsilon_i)_{tot}, (\varepsilon_i)_{loc}).$$

Поэтому из формул (3.2.16) и (3.2.19) следует

Предложение 3.2.1. Пусть $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$. Тогда критическое состояние ТЦО возникает в виде ОПУПД при $-1 \leq m < 0,5$ и в виде ЛПД – продольной выпучины, – при $m \leq -1$. Критическая интенсивность деформаций вычисляется по формуле:

$$(\varepsilon_i)_{cr} = \begin{cases} \frac{2sn}{2-m}, & \text{если } m \leq -1; \\ \frac{2sn}{3}, & \text{если } -1 \leq m < 0,5. \end{cases} \quad (3.2.21)$$

Второй случай. Пусть $\sigma_2 \leq 0$. Из (3.2.5) следует, что тогда $N \geq 0$ – осевая сила положительна. Давление p на оболочку отрицательно, т.е. внешнее, в силу (3.2.4). В этом случае кольцевые деформации отрицательны, причем

$$\varepsilon_2 < 0; \quad \varepsilon_1 = \frac{1-2m}{m-2}\varepsilon_2 > 0; \quad \varepsilon_3 = \frac{1+m}{m-2}\varepsilon_2 > 0; \quad \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 = \frac{3}{2-m}\varepsilon_2 = -\frac{3}{2s}\varepsilon_i < 0. \quad (3.2.22)$$

Знак ε_3 зависит от m . Если $m \geq -1$, то $\varepsilon_3 \geq 0$; если $m < -1$, то $\varepsilon_3 < 0$. Из (3.2.13) и (3.2.22) следует, что в рассматриваемом случае

$$\sigma_i = \frac{sR_0|p|}{t_0} \exp(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) = \frac{sR_0p}{t_0} \exp\left(-\frac{3}{2s}\varepsilon_i\right). \quad (3.2.23)$$

Так как теперь аргумент у экспоненты отрицательный, критическое состояние в виде ОПУПД не реализуется. Следовательно, процесс устойчивого пластического деформирования оболочки идет до ЛПД, то есть до возникновения поперечной (кольцевой) шейки. Вычислим, следуя методике работ [55, 33, 35], критические интенсивности напряжений $(\varepsilon_i)_{loc}$, при которых возникает кольцевая шейка.

Применяя формулы (3.2.6), (3.2.7), (3.2.12), получим:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{N_1}{2\pi R t} = \frac{N_1 \exp \varepsilon_1}{2\pi R_0 t_0} = \frac{N_1 \exp\left(\frac{1-2m}{2s}\varepsilon_i\right)}{2\pi R_0 t_0} = C_1 \exp\left(\frac{1-2m}{2s}\varepsilon_i\right), \quad N_1 > 0, \quad C_1 > 0.$$

Здесь $C_1 = \frac{N_1}{2\pi R_0 t_0}$ – постоянная величина. Поэтому интенсивность напряжений, соответствующая возникновению кольцевой шейки, равна:

$$\sigma_i = \frac{s|\sigma_1|}{|m|} = C_1 \frac{s}{|m|} \exp\left(\frac{1-2m}{2s}\varepsilon_i\right). \quad (3.2.24)$$

В более полной форме, на основе второго равенства в (3.2.4), последнюю формулу можно записать в виде:

$$\sigma_i = \frac{sR_0p}{t_0} \exp \varepsilon_1 = \frac{sR_0p}{t_0} \exp\left(\frac{1-2m}{2s}\varepsilon_i\right). \quad (3.2.25)$$

Для вычисления критической деформации, при которой возникает кольцевая шейка, приравняем дифференциалы выражений (3.2.2) и (3.2.25). Получим:

Предложение 3.2.2. Пусть $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$. Тогда критическое состояние достигается всегда в виде ЛПД – кольцевой шейки, причем критическая интенсивность деформаций вычисляется по формуле:

$$(\varepsilon_i)_{loc} = \frac{2sn}{1-2m}. \quad (3.2.26)$$

Из (3.2.26) следует, что

$$(\varepsilon_1)_{loc} = \frac{1-2m}{2s}(\varepsilon_i)_{loc} = n. \quad (3.2.27)$$

В случае чистого растяжения $m = -\infty$. Из формулы (3.2.26) тогда следует, что $(\varepsilon_i)_{loc} = (\varepsilon_1)_{loc} = n$ – хорошо известный результат для растягиваемого стержня [55, 60, и др.].

3.2.3 Нахождение критических напряжений и критического давления однородной тонкостенной цилиндрической оболочки при отрицательном коэффициенте двухосности нагружения

Вычислим критическую интенсивность напряжений в каждом из двух случаев.

Как было установлено в п. 3.2.2, в *первом случае* критическое состояние тонкостенной цилиндрической оболочки может реализоваться, в зависимости от величины m , и как ОПУПД, и как ЛПД (формула (3.2.21)). Для вычисления критической интенсивности напряжений подставим значение критической интенсивности деформаций (3.2.21) в формулу (3.2.2).

Предложение 3.2.3. Пусть $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 \geq 0$. Тогда критическое состояние ТЦО возникает в виде ОПУПД при $-1 \leq m < 0,5$ и в виде ЛПД – продольной выпучины, – при $m \leq -1$. Критическая интенсивность напряжений и параметр k^+ вычисляются по формулам:

$$(\sigma_i)_{cr} = \begin{cases} \left(\frac{2es}{2-m} \right)^n \sigma_B, & \text{если } m \leq -1; \\ \left(\frac{2es}{3} \right)^n \sigma_B, & \text{если } -1 \leq m < 0,5. \end{cases} \quad (3.2.28)$$

$$k^+ = \frac{(\sigma_i)_{cr}}{\sqrt{3}}, \quad (3.2.29)$$

где $(\sigma_i)_{cr}$ записано в (3.2.28).

Подставив вместо σ_i его выражение (3.2.28) в левую часть формулы (3.2.15), а вместо ε_i его выражение (3.2.21), найдем критическое давление в оболочке в момент ОПУПД в зависимости от условий нагружения m , свойств материала n и σ_B и геометрических параметров оболочки t_0 и R_0 :

$$p_{cr} = \begin{cases} \left(\frac{2}{3} \right)^n \frac{t_0}{s^{1-n} R_0} \sigma_B, & \text{если } m \leq -1; \\ \left(\frac{2}{2-m} \right)^n \frac{t_0}{s^{1-n} R_0} \sigma_B, & \text{если } -1 \leq m < 0,5. \end{cases} \quad (3.2.30)$$

Как было установлено в п. 3.2.2, во *втором случае* критическое состояние тонкостенной цилиндрической оболочки реализуется как ЛПД – кольцевая шейка. Подставим выражение (3.2.26) в формулу (3.2.2). Получим:

Предложение 3.2.4. Пусть $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 \leq 0$. Тогда критическое состояние ТЦО возникает в виде кольцевой шейки. Критическая интенсивность напряжений, соответствующая появлению кольцевой шейки, осевое критическое напряжение и параметр k^+ вычисляются по формулам:

$$(\sigma_i)_{loc} = \left(\frac{e}{n} \right)^n \left(\frac{2sn}{1-2m} \right)^n \sigma_B = \left(\frac{es}{0,5-m} \right)^n \sigma_B, \quad (3.2.31)$$

$$(\sigma_1)_{loc} = \frac{|m|(\sigma_i)_{loc}}{s} = \frac{|m|}{s} \left(\frac{es}{0,5-m} \right)^n \sigma_B. \quad (3.2.32)$$

$$k^+ = \frac{(\sigma_i)_{loc}}{\sqrt{3}}, \quad (3.2.33)$$

где $(\sigma_i)_{loc}$ записано в (3.2.31).

Подставив в (3.2.25) вместо σ_i его критическое значение $(\sigma_i)_{loc}$ из формулы (3.2.31), а вместо ε_i выражение его критического значения (3.2.26), получим зависимость критического давления от условий нагружения m , свойств материала n и σ_B и геометрических параметров оболочки t_0 и R_0 :

Следствие 3.2.1.

$$p_{cr} = \frac{t_0}{(0,5 - m)^n s^{1-n} R_0} \sigma_B. \quad (3.2.34)$$

Так как в этом случае происходит ЛПД в форме кольцевой шейки, естественно найти критическую осевую силу, вызывающую возникновение этой шейки. Для этого запишем (3.2.24) в виде:

$$N = \frac{2\pi R_0 t_0 |m| \sigma_i}{s} \exp\left(-\frac{0,5 - m}{s} \varepsilon_i\right).$$

Подставив в (3.2.25) вместо σ_i его критическое значение $(\sigma_i)_{loc}$ из формулы (3.2.31), а вместо ε_i выражение его критического значения (3.2.26), получим:

Следствие 3.2.2.

$$N_{cr} = \frac{2\pi R_0 t_0 |m|}{(0,5 - m)^n s^{1-n}} \sigma_B. \quad (3.2.35)$$

Замечание 3.2.1. При $m = -\infty$ нагружение оболочки является чистым растяжением. Из формул (3.2.26) и (3.2.31) следует, что в этом случае

$$(\varepsilon_i)_{loc} = n; \quad (\sigma_i)_{loc} = e^n \sigma_B,$$

а из (3.2.35), что

$$N_{cr} = 2\pi R_0 t_0 \sigma_B.$$

Это совпадает с известными результатами [55], [21, с. 27], [22, с. 29–30].

3.3 Условия критического состояния наклонного слоя в тонкостенной цилиндрической оболочке

3.3.1 Нахождение интенсивности деформаций в наклонном слое листового образца, находящемся в критическом состоянии, при отрицательном коэффициенте двухосности нагружения

Для вычисления несущей способности листовой конструкции или тонкостенной цилиндрической оболочки надо знать критические значения k^+ и k^- . Величина k^+ характеризует момент потери устойчивости процесса пластического деформирования основного материала листового образца или тонкостенной оболочки и вычислена в п. 3.2.3, формулы

(3.2.29), (3.2.28) в первом случае (внутреннее давление и осевое сжатие) и (3.2.33), (3.2.31) во втором случае (внешнее давление и осевое растяжение).

Параметр k^- характеризует состояние материала слоя в момент потери устойчивости процесса пластического деформирования. Будем, как и прежде, предполагать, что в процессе роста внешней нагрузки параметр $m = \sigma_1/\sigma_2 < 0$ и не изменяется.

Первый случай: $\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0$.

Вычислим критическую интенсивность напряжений в слое двумя способами.

Первый способ. Из формул (3.2.12) и (3.2.13) следует, в предположении теории малых деформаций, что

$$\varepsilon_i = \frac{2s|\varepsilon_2^-|}{2-m} = \frac{2\varepsilon_2^- \sigma_i^-}{(2-m)\sigma_2^-}. \quad (3.3.1)$$

Заметим, что знаменатель правой части этой формулы не обращается в ноль в силу ограничения $m < 0,5$.

В менее прочном слое отношение напряжений σ_i и σ_2 зависит от величины контактного упрочнения g и угла наклона слоя ν . Эта зависимость имеет вид (3.1.7)

$$\sigma_2^- = \frac{2gk^-}{\sqrt{B^2 + g^2C^2}} = \frac{2g\sigma_i^-}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2C^2}}. \quad (3.3.2)$$

Отсюда и из (3.3.1) следует, что

$$\varepsilon_2^- = \frac{\varepsilon_i^- \sigma_2^- (2-m)}{2\sigma_i^-} = \frac{g(2-m)\varepsilon_i^-}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2C^2}}. \quad (3.3.3)$$

Рассмотрим прямоугольный фрагмент листового образца (рис. 3.4, а). Пусть $h = h_0 \exp \varepsilon_2^-$

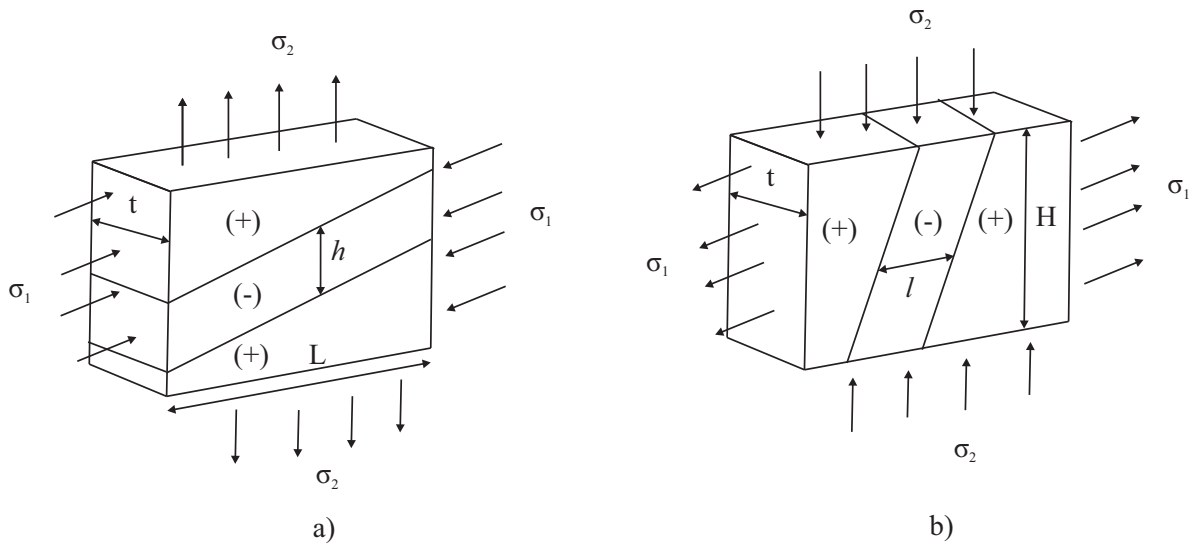


Рис. 3.4: Два варианта расположения наклонного слоя в прямоугольном фрагменте листового образца.

– толщина слоя в направлении действия напряжений σ_2 , h_0 – толщина слоя в начальный момент нагружения), t и L – толщина и ширина фрагмента листа, $V = tLh$ – объем слоя,

который не меняется в процессе пластического деформирования, N_2 – внешняя сила, действующая в направлении σ_2 в критический момент нагружения. Тогда

$$\sigma_2^- = \frac{N_2}{tL} = \frac{N_2 h}{V} = \frac{N_2 h_0}{V} \exp(\varepsilon_2^-).$$

Поэтому из (3.3.2) и (3.3.3) следует, что в критический момент нагружения

$$\sigma_i^- = s\sigma_2^- = s \frac{N_2 h_0}{V} \exp(\varepsilon_2^-) = s \frac{N_2 h_0}{V} \exp\left(\frac{g(2-m)\varepsilon_i^-}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2 C^2}}\right). \quad (3.3.4)$$

Согласно критерию Свифта [55], критическое состояние возникает, когда приращение интенсивности напряжений, вызванное изменением геометрии конструкции или образца, перестает компенсироваться приращением интенсивности напряжений вследствие упрочнения материала. Поэтому, применяя в данном случае критерий Свифта, следует приравнять дифференциалы правых частей выражений (3.2.2) и (3.3.4).

Предложение 3.3.1. В предположении (3.2.2) интенсивность деформаций в критический момент нагружения вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{i\,cr} = \frac{\sqrt{3}n\sqrt{B^2 + g^2 C^2}}{g(2-m)}. \quad (3.3.5)$$

Доказательство. Из (3.2.2) следует:

$$\ln \sigma_i = n - \ln n + \ln \sigma_B^- + n \ln \varepsilon_i,$$

откуда

$$d(\ln \sigma_i) = \frac{nd\varepsilon_i}{\varepsilon_i}, \quad (3.3.6)$$

т.к. n и σ_B^- являются постоянными параметрами материала слоя.

Логарифмируя (3.3.4) получим:

$$\ln \sigma_i = \ln \frac{MN_2 h_0}{V} + \frac{g(2-m)\varepsilon_i}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2 C^2}}.$$

Т.к. в критический момент нагружения (момент потери устойчивости процесса пластического деформирования) слоя внешняя нагрузка стабилизируется, то $N_2 = \text{const}$. Поэтому первое слагаемое в правой части последнего равенства не меняется в процессе деформирования. Дифференцируя это равенство, получим:

$$d(\ln \sigma_i) = \frac{g(2-m)d\varepsilon_i}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2 C^2}}. \quad (3.3.7)$$

Приравнивая правые части выражений (3.3.6) и (3.3.7), получим формулу (3.3.5), что завершает доказательство предложения.

Подставляя в формулу (3.3.3) вместо ε_i его выражение из (3.3.5), получим:

Следствие 3.3.1. При аппроксимации диаграммы деформирования кривой (3.2.2) в критический момент нагружения критические кольцевые деформации вычисляются по формуле:

$$\varepsilon_{2\,cr} = n. \quad (3.3.8)$$

Второй способ. Теперь рассмотрим фрагмент листового образца, изображенный на рис. 3.4, б). Из формул (3.2.12) и (3.2.13) следует, в предположении теории малых деформаций, что

$$\varepsilon_i^- = -\frac{2s\varepsilon_1^-}{1-2m} = \frac{2\varepsilon_1^- \sigma_i^-}{(1-2m)\sigma_1^-}. \quad (3.3.9)$$

В менее прочном слое отношение напряжений σ_i^- и σ_1^- зависит от величины контактного упрочнения g и угла наклона слоя ν . Эта зависимость имеет вид (3.1.7):

$$\sigma_1^- = m\sigma_2^- = \frac{2gmk^-}{\sqrt{B^2 + g^2C^2}} = \frac{2gm\sigma_i^-}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2C^2}}. \quad (3.3.10)$$

Из (3.3.3) и (3.2.8) следует, что

$$\varepsilon_1^- = -\frac{g(1-2m)\varepsilon_i^-}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2C^2}}. \quad (3.3.11)$$

Пусть $h = h_0 \exp \varepsilon_2^-$ – толщина слоя в направлении действия внешней силы N_1 (см. рис. 3.4, б), H – ширина листа в направлении, поперечном к N_1 , t – толщина листа и l – толщина слоя в направлении N_1 , $V = tlH$ – объем слоя, который не меняется в процессе пластического деформирования. Тогда

$$\sigma_1^- = \frac{N_1}{tH} = \frac{N_1 l}{V} = \frac{N_1 l_0}{V} \exp(\varepsilon_1^-). \quad (3.3.12)$$

Поэтому из (3.3.11) и (3.3.12) следует, что в критический момент нагружения

$$\sigma_i^- = \frac{s\sigma_1^-}{m} = s \frac{N_1 l_0}{mV} \exp(\varepsilon_1^-) = s \frac{N_1 l_0}{mV} \exp\left(-\frac{g(1-2m)\varepsilon_i^-}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2C^2}}\right). \quad (3.3.13)$$

Так как аргумент у экспоненты в (3.3.13) отрицательный, критическое состояние вторым способом не определяется.

Замечание 3.3.1. Можно воспользоваться более сложной, чем (3.2.2), аппроксимацией (3.2.3) диаграммы деформирования. Тогда аналог предложения 3.3.1 имеет вид:

Предложение 3.3.2. В предположении (3.2.3) интенсивность деформаций в критический момент нагружения вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{i\text{cr}}^- = \frac{\sqrt{3}n\sqrt{B^2 + g^2C^2}}{g(2-m) - a\sqrt{3}n\sqrt{B^2 + g^2C^2}}. \quad (3.3.14)$$

Доказательство. Из (3.2.3) следует:

$$d(\ln \sigma_i^-) = \left(\frac{n}{\varepsilon_i^-} + a\right) d\varepsilon_i^-,$$

откуда

$$\frac{n}{\varepsilon_i^-} + a = \frac{g(2-m)}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2C^2}}.$$

Разрешая это уравнение относительно ε_i^- , получаем требуемое.

Подставляя в формулу (3.3.3) вместо ε_i^- его выражение из (3.3.14), получим:

Следствие 3.3.2. При аппроксимации диаграммы деформирования кривой (3.2.3) в критический момент нагружения критические кольцевые деформации вычисляются по формуле:

$$\varepsilon_{2cr}^- = \frac{ng(2-m)}{g(2-m) - \sqrt{3}an\sqrt{B^2 + g^2C^2}}. \quad (3.3.15)$$

Второй случай: $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$ (внешнее давление и осевое растяжение). В этом случае, наоборот, следует использовать второй способ определения критического состояния слоя. Теперь, в отличие от (3.3.11),

$$\varepsilon_1^- = \frac{g(1-2m)\varepsilon_i^-}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2C^2}}, \quad (3.3.16)$$

поэтому из (3.3.16) следует, что в критический момент нагружения

$$\sigma_i = \frac{s\sigma_1}{m} = s\frac{N_1l_0}{mV} \exp(\varepsilon_1^-) = s\frac{N_1l_0}{mV} \exp\left(\frac{g(1-2m)\varepsilon_i^-}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2C^2}}\right). \quad (3.3.17)$$

Применяя в данном случае критерий Свифта, следует приравнять дифференциалы правых частей выражений (3.2.2) и (3.3.17).

Предложение 3.3.3. В предположении (3.2.2) интенсивность деформаций в критический момент нагружения вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{i cr}^- = \frac{\sqrt{3}n\sqrt{B^2 + g^2C^2}}{g(1-2m)}. \quad (3.3.18)$$

Доказательство. Из (3.2.2) следует:

$$\ln \sigma_i^- = n - \ln n + \ln \sigma_B^- + n \ln \varepsilon_i^-,$$

откуда

$$d(\ln \sigma_i^-) = \frac{nd\varepsilon_i^-}{\varepsilon_i^-}, \quad (3.3.19)$$

т.к. n и σ_B^- являются постоянными параметрами материала слоя.

Логарифмируя (3.3.17) получим:

$$\ln \sigma_i^- = \ln \frac{N_1l_0}{mV} + \frac{g(1-2m)\varepsilon_i^-}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2C^2}}.$$

Т.к. в критический момент нагружения (момент потери устойчивости процесса пластического деформирования) слоя внешняя нагрузка стабилизируется, то $N_1 = \text{const}$. Поэтому первое слагаемое в правой части последнего равенства не меняется в процессе деформирования. Дифференцируя это равенство, получим:

$$d(\ln \sigma_i^-) = \frac{g(1-2m)d\varepsilon_i^-}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2C^2}}. \quad (3.3.20)$$

Приравнивая правые части выражений (3.3.19) и (3.3.20), получим формулу (3.3.18), что завершает доказательство предложения.

Подставляя в формулу (3.3.16) вместо ε_i его выражение из (3.3.18), получим:

Следствие 3.3.3. При аппроксимации диаграммы деформирования кривой (3.2.2) в критический момент нагружения критические кольцевые деформации вычисляются по формуле:

$$\varepsilon_{1 cr} = n. \quad (3.3.21)$$

3.3.2 Нахождение интенсивности напряжений, параметра k^- и коэффициента K в наклонном слое листового образца или ТЦО, находящемся в критическом состоянии, при отрицательном коэффициенте двухосности нагружения

Рассмотрим *первый случай*: $\sigma_1 < 0$; $\sigma_2 \geq 0$.

Подставляя правую часть формулы (3.3.5) в формулу (3.2.2), получаем

Предложение 3.3.4. При аппроксимации диаграммы деформирования кривой (3.2.2) в критический момент нагружения интенсивность напряжений, коэффициент k^- и значения напряжений внешних сил вычисляются по формулам:

$$\sigma_i^- = \left(\frac{\sqrt{3}e\sqrt{B^2 + g^2C^2}}{g(2-m)} \right)^n \sigma_B^-; \quad k^- = \frac{\sigma_i^-}{\sqrt{3}}; \quad \sigma_1^- = m\sigma_2^-; \quad \sigma_2^- = \frac{2g\sigma_i^-}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2C^2}}. \quad (3.3.22)$$

Отсюда, аналогично предложению 3.3.4, следует

Предложение 3.3.5. При аппроксимации диаграммы деформирования кривой (3.2.3) в критический момент нагружения интенсивность напряжений, коэффициент k^- и значения напряжений внешних сил вычисляются по формулам:

$$\sigma_i^- = \left(\frac{\sqrt{3}e\sqrt{B^2 + g^2C^2}}{(g(2-m) - \sqrt{3}a\sqrt{B^2 + g^2C^2})(1-a)} \right)^n \exp \left(\frac{\sqrt{3}an\sqrt{B^2 + g^2C^2}}{g(2-m) - \sqrt{3}a\sqrt{B^2 + g^2C^2}} \right) \sigma_B^-;$$

$$k = \frac{\sigma_i^-}{\sqrt{3}}; \quad \sigma_1^- = m\sigma_2^-; \quad \sigma_2^- = \frac{2g\sigma_i^-}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2C^2}}. \quad (3.3.23)$$

Все результаты, полученные в этой главе для аппроксимации (3.2.2), аналогично переносятся на случай (3.2.3). При этом многие зависимости приобретают весьма сложный вид и не будут здесь приводиться.

Рассмотрим *второй случай*: $\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 \leq 0$.

Подставляя правую часть формулы (3.3.18) в формулу (3.2.2), получаем

Предложение 3.3.6. При аппроксимации диаграммы деформирования кривой (3.2.2) в критический момент нагружения интенсивность напряжений, коэффициент k^- и значения напряжений внешних сил вычисляются по формулам:

$$\sigma_i^- = \left(\frac{\sqrt{3}e\sqrt{B^2 + g^2C^2}}{g(1-2m)} \right)^n \sigma_B^-; \quad k^- = \frac{\sigma_i^-}{\sqrt{3}}; \quad \sigma_1^- = m\sigma_2^-; \quad \sigma_2^- = -\frac{2g\sigma_i^-}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2C^2}}. \quad (3.3.24)$$

Используя результаты п. 3.2.3, из предложений 3.3.4 и 3.3.6 теперь можно найти формулы для вычисления коэффициента механической неоднородности соединения (листового образца или ТЦО), содержащего менее прочный наклонный (к направлению внешней нагрузки) слой. Так как

$$K = \frac{k^+}{k^-} = \frac{\sigma_i^+}{\sigma_i^-}, \quad (3.3.25)$$

применяя формулы (3.2.28) и (3.3.22) в первом случае, и формулы (3.2.31) и (3.3.24) во втором, подстановкой в (3.3.25) получим аналитические зависимости для вычисления коэффициента K .

Предложение 3.3.7. Если $\sigma_1 < 0$; $\sigma_2 \geq 0$ (первый случай), то

$$K = \begin{cases} \left(\frac{2gs}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2C^2}} \right)^n \frac{\sigma_B^+}{\sigma_B^-}, & \text{если } m \leq -1; \\ \left(\frac{2gs(2-m)}{3\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2C^2}} \right)^n \frac{\sigma_B^+}{\sigma_B^-}, & \text{если } -1 \leq m < 0,5. \end{cases} \quad (3.3.26)$$

Если $\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 \leq 0$ (второй случай), то

$$K = \left(\frac{2gs}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2C^2}} \right)^n \frac{\sigma_B^+}{\sigma_B^-}. \quad (3.3.27)$$

На рисунках 3.5 – 3.8 показаны вычислительные эксперименты на основе предложения 3.3.7.

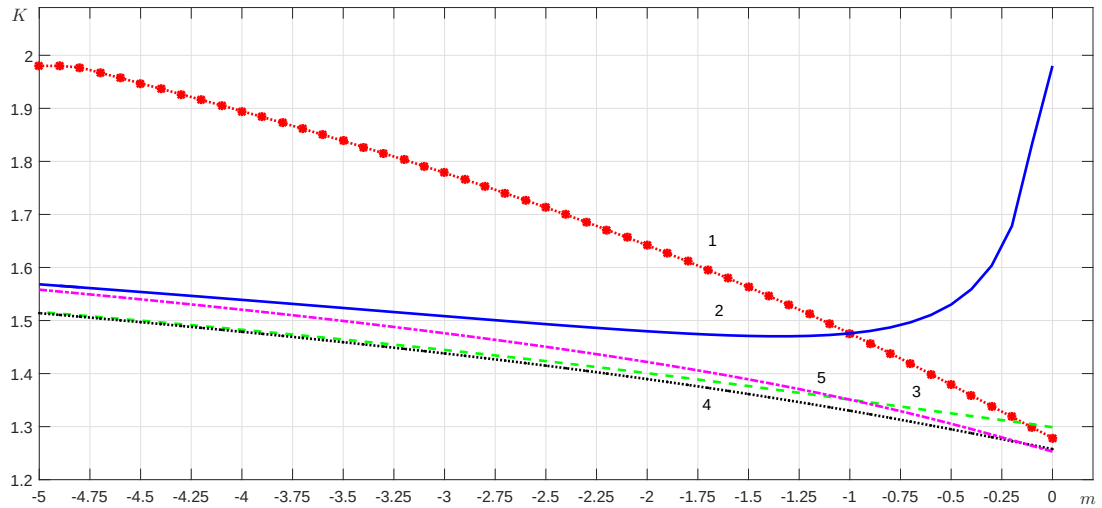


Рис. 3.5: Зависимость коэффициента K от коэффициента двухосности нагружения m . Вычислительный эксперимент 1.

Вычислительный эксперимент 1 (см. рис. 3.5). Зависимость коэффициента K от коэффициента двухосности нагружения m при различных значениях угла наклона ν : 1) $\nu = 0$; 2) $\nu = \pi/2$; 3) $\nu = \pi/3$; 4) $\nu = \pi/4$; 5) $\nu = \pi/6$. Коэффициент контактного упрочнения $g = 1$. Отношение пределов прочности $\sigma_B^+/\sigma_B^- = 4/3$. Показатель упрочнения материала слоя $n = 0, 15$. Первый случай – внутреннее давление и осевое сжатие (формула (3.3.27)).

Вычислительный эксперимент 2 (см. рис. 3.6). Та же зависимость, но во втором случае – внешнее давление и осевое растяжение (формула (3.3.26)).

Вычислительный эксперимент 3 (см. рис. 3.7). Зависимость коэффициента K от угла наклона ν при различных значениях коэффициента двухосности нагружения m : 1) $m = 0$; 2) $m = -0,5$; 3) $m = -1$; 4) $m = -2$; 5) $m = -\infty$. Коэффициент контактного упрочнения $g = 1$. Отношение пределов прочности $\sigma_B^+/\sigma_B^- = 4/3$. Показатель упрочнения материала слоя $n = 0, 15$. Первый случай – внутреннее давление и осевое сжатие.

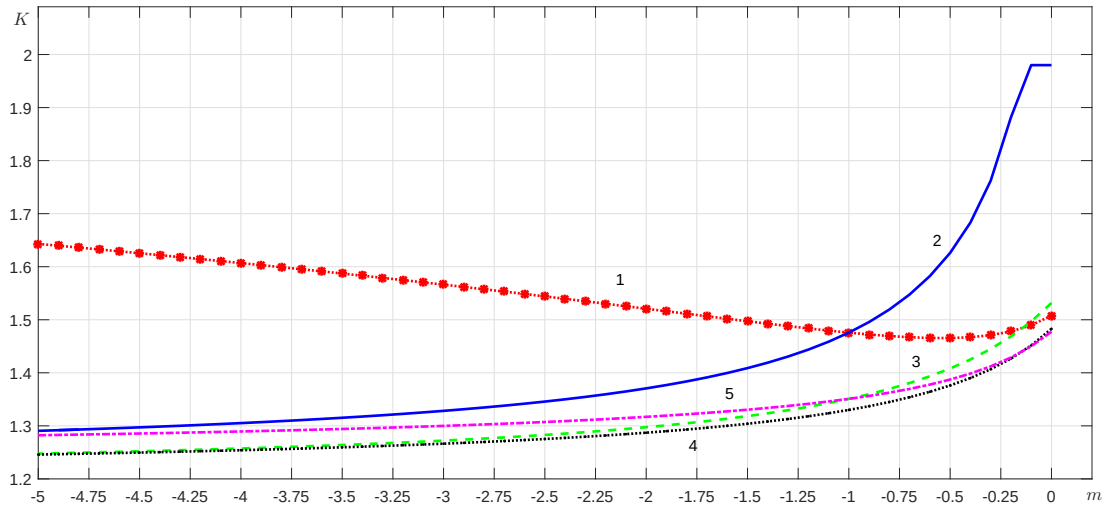


Рис. 3.6: Зависимость коэффициента K от коэффициента двухосности нагружения m . Вычислительный эксперимент 2.

Вычислительный эксперимент 4 (см. рис. 3.8). Та же зависимость, что в эксперименте 3, но во втором случае – внешнее давление и осевое растяжение.

Коэффициент механической неоднородности K может быть как больше, так и меньше отношения пределов прочности σ_B^+/σ_B^- . Например, при $\nu = \pi/4$ (линия 4 на рис. 3.5), если $m < -1$, то $K > \sigma_B^+/\sigma_B^-$, а если $-1 < m < 0$, то $K < \sigma_B^+/\sigma_B^-$. Следовательно, коэффициент механической неоднородности K зависит от условий нагружения.

3.3.3 Критическое состояние тонкостенной цилиндрической оболочки, содержащей спиральные слои из менее прочного материала, при отрицательном коэффициенте двухосного нагружения ее стенки

Так как в момент потери устойчивости процесса пластического деформирования материала слоя основной материал оболочки деформируется устойчиво, кольцевые деформации ε_2 оболочки малы по сравнению с деформациями слоя:

$$R = R_0 \exp \varepsilon_2 \approx R_0.$$

Следовательно, радиус оболочки меняется несущественно (деформации в области слоя также мало влияют на величину R , так как ширина слоя мала по сравнению с радиусом). Деформация слоя в его направлении отсутствует: $\varepsilon_z = 0$, и в силу несжимаемости материала слоя $\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0$.

Рассмотрим две ситуации.

Первая ситуация: слой подвержен растягивающей нагрузке в направлении, перпендикулярном к слою.

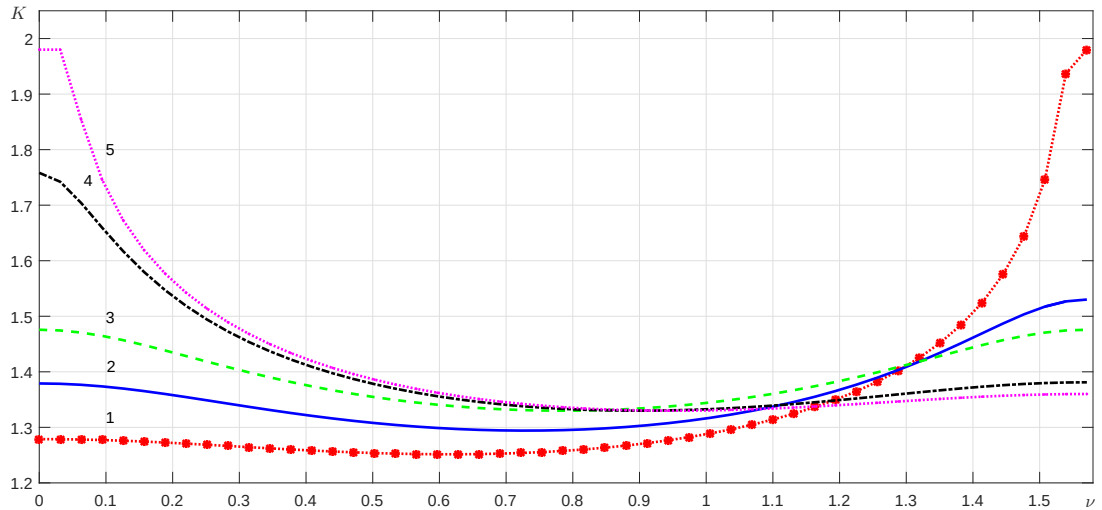


Рис. 3.7: Зависимость коэффициента K от угла наклона ν . Вычислительный эксперимент 3.

Это происходит тогда, когда $B > 0$. В этом случае сечением слоя наименьшей площади, по которому следует рассчитывать критическую нагрузку, является срединное сечение, лежащее в плоскости XOY , то есть $y = 0$ (см. рис. 3.1). На этом сечении

$$t = t_0 \exp \varepsilon_x = t_0 \exp(-\varepsilon_y). \quad (3.3.28)$$

В дальнейшем, во избежание громоздких формул, остановимся на чисто степенной (3.2.2) аппроксимации диаграммы деформирования.

В работе [22, с. 234] отмечено, что, в предположении теории малых деформаций, в слое

$$\frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\varepsilon_y}, \quad (3.3.29)$$

В плоскости $y = 0$ в силу симметрии $\tau_{xy} = 0$, поэтому, как следует из условия текучести (3.1.5),

$$\frac{|\sigma_y - \sigma_x|}{2} = \sqrt{k^2 - \tau^2}. \quad (3.3.30)$$

Из формулы (3.1.7) следует, что

$$\sqrt{k^2 - \tau^2} = \frac{k|B|}{\sqrt{B^2 + g^2 C^2}}.$$

Учитывая это и формулы (3.3.29) и (3.3.30), получим:

$$\varepsilon_i = \frac{4\sigma_i \varepsilon_y}{3(\sigma_y - \sigma_x)} = \frac{2\sqrt{B^2 + g^2 C^2} \varepsilon_y}{\sqrt{3}B}, \quad B \neq 0. \quad (3.3.31)$$

Заметим, что в силу (3.1.2), B и σ_{yav} , и следовательно, B и ε_y , имеют одинаковые знаки.

Воспользуемся результатами п. 3.3.1, то есть перенесем результаты, относящиеся к листовому образцу, на тонкостенную цилиндрическую оболочку.

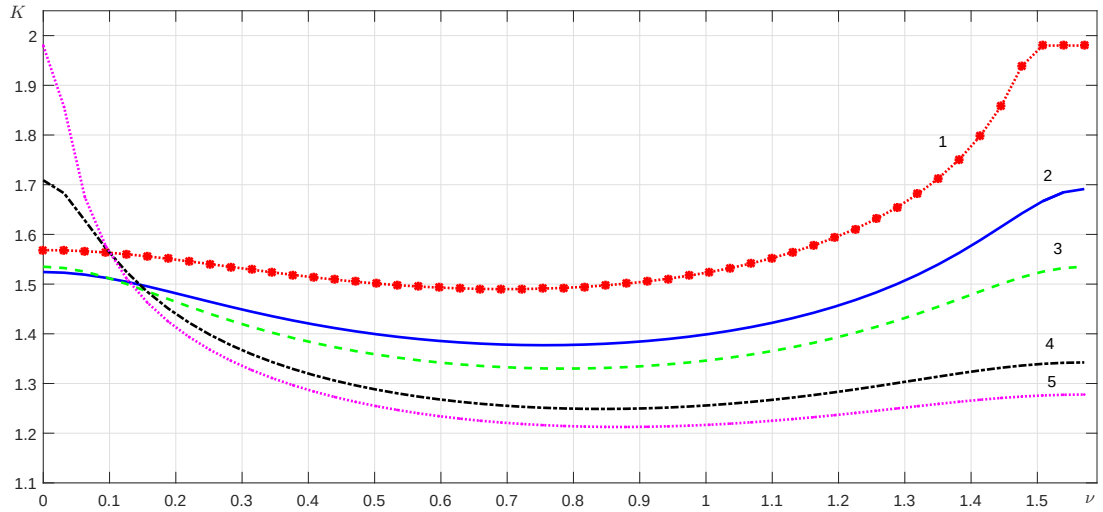


Рис. 3.8: Зависимость коэффициента K от угла наклона ν . Вычислительный эксперимент 4.

Вторая ситуация: слой подвержен сжимающей нагрузке в направлении, поперечном к слою.

Это происходит тогда, когда $B < 0$. В этом случае сечениями слоя наименьшей площади, по которым следует рассчитывать критическую нагрузку, являются контактные поверхности, то есть $y = \pm \kappa$. На этом сечении деформация $\varepsilon_x = 0$, так как, по предположению, основной материал не деформируется.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: тонкостенная цилиндрическая оболочка находится под действием внутреннего давления и осевой сжимающей силы. В этом случае $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$.

Сравнивая формулы (3.3.31) и (3.3.5), получим в первой ситуации:

$$\varepsilon_y = \frac{3nB}{g(2-m)}. \quad (3.3.32)$$

Исходя из второго уравнения (3.2.4) и применяя формулы (3.3.2), (3.3.28), (3.3.22) и (3.3.32), вычислим давление на стенку оболочки в критический момент нагружения. Получим:

$$\begin{aligned} p = \frac{\sigma_2 t}{R} &= \frac{2g\sigma_i t_0}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2 C^2} R_0 \exp \varepsilon_y} = \frac{2gt_0}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2 C^2} R_0 \exp \varepsilon_y} \left(\frac{\sqrt{3}e\sqrt{B^2 + g^2 C^2}}{g(2-m)} \right)^n \sigma_B^- = \\ &= \frac{2gt_0}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2 C^2} R_0} \left(\frac{\sqrt{3}e\sqrt{B^2 + g^2 C^2}}{g(2-m)} \right)^n \exp \left(-\frac{3nB}{g(2-m)} \right) \sigma_B^- \quad B \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

Во второй ситуации получим:

$$p = \frac{2gt_0}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2 C^2} R_0} \left(\frac{\sqrt{3}e\sqrt{B^2 + g^2 C^2}}{g(2-m)} \right)^n \quad B \leq 0. \quad (3.3.34)$$

Второй случай: тонкостенная цилиндрическая оболочка находится под действием внешнего давления и осевой растягивающей силы. В этом случае $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$.

Сравнивая формулы (3.3.31) и (3.3.18), в первой ситуации найдем:

$$\varepsilon_y = \frac{3nB}{g(1-2m)}. \quad (3.3.35)$$

Исходя из второго уравнения (3.2.4) и применяя формулы (3.3.2), (3.3.28), (3.3.24) и (3.3.35), вычислим давление на стенку оболочки в критический момент нагружения. Получим:

$$\begin{aligned} p = \frac{\sigma_2 t}{R} &= \frac{2g\sigma_1 t_0}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2 C^2} R_0 \exp \varepsilon_y} = \frac{2gt_0}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2 C^2} R_0 \exp \varepsilon_y} \left(\frac{\sqrt{3}e\sqrt{B^2 + g^2 C^2}}{g(1-2m)} \right)^n \sigma_B^- = \\ &= \frac{2gt_0}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2 C^2} R_0} \left(\frac{\sqrt{3}e\sqrt{B^2 + g^2 C^2}}{g(1-2m)} \right)^n \exp \left(-\frac{3nB}{g(1-2m)} \right) \sigma_B^-, \quad B \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

Во второй ситуации получим:

$$p = \frac{2gt_0}{\sqrt{3}\sqrt{B^2 + g^2 C^2} R_0} \left(\frac{\sqrt{3}e\sqrt{B^2 + g^2 C^2}}{g(1-2m)} \right)^n \quad B \leq 0. \quad (3.3.37)$$

3.3.4 Алгоритм вычисления критических значений деформаций и напряжений менее прочного слоя и внутреннего (внешнего) давления. Вычислительные эксперименты

Опишем алгоритм для вычисления критических значений напряжений, возникающих под действием осевой нагрузки и внутреннего или внешнего давления. Если относительная толщина $\varkappa$ слоя велика: $\varkappa \geq 1$, то контактное упрочнение слоя отсутствует: $g = 1$. В этом случае формула (3.3.22) является явной. У тонких прослоек $g > 1$. Тогда формула (3.3.22) неявная.

Сначала вычисляются значения параметров B , C , s по значениям m , ν по формулам (3.1.1). Положим $g = 1$. По формулам (3.3.26) и (3.3.27) вычислим первое приближение значения K . Затем по формуле (3.1.11) найдем первое приближение значения K_{incl} . Зная K_{incl} , параметр g следует вычислять по алгоритму главы 1. Затем по формулам (3.3.27) в первом случае и (3.3.26) во втором случае вычисляется второе приближение параметра K и сразу после этого K_{incl} . Цикл повторяется до тех пор, пока параметр g не стабилизируется. После этого вычисляются искомые критические значения деформаций и напряжений менее прочного слоя и внутреннего (внешнего) давления.

На рис. 3.9 – ?? показаны результаты вычислительных экспериментов на основе алгоритма нахождения критического давления – зависимость давления p (в МПа) от угла наклона ν при различных значениях относительной толщины слоя $\varkappa$. Всюду пределы прочности $\sigma_B^+ = 600 \text{ МПа}$, $\sigma_B^- = 400 \text{ МПа}$, показатель упрочнения материала слоя $n = 0,15$. Относительная толщина $\varkappa$ прослойки равна 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 1 (сверху вниз).

Верхняя горизонтальная прямая – критическое состояние ТЦО определяется основным материалом. В этом случае оболочка с менее прочным слоем равна по прочности однородной оболочке из такого же материала (слой не снижает прочности соединения).

Нижняя горизонтальная прямая – критическое состояние ТЦО определяется материалом слоя, то есть упрочнение отсутствует.

Из рисунков видно, при каких углах наклона слоя ТЦО равнопрочна однородной оболочке.

Эксперимент 1. Коэффициент двухосности нагружения $m = -1,5$. Вторым случаем – внешнее давление и осевое растяжение.

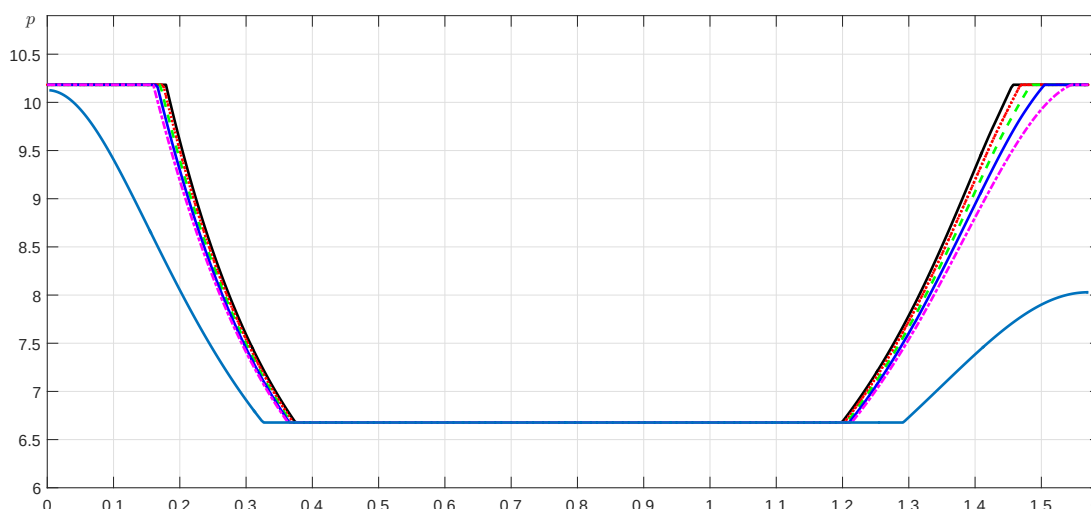


Рис. 3.9: Зависимость давления p от от угла наклона ν . Вычислительный эксперимент 1.

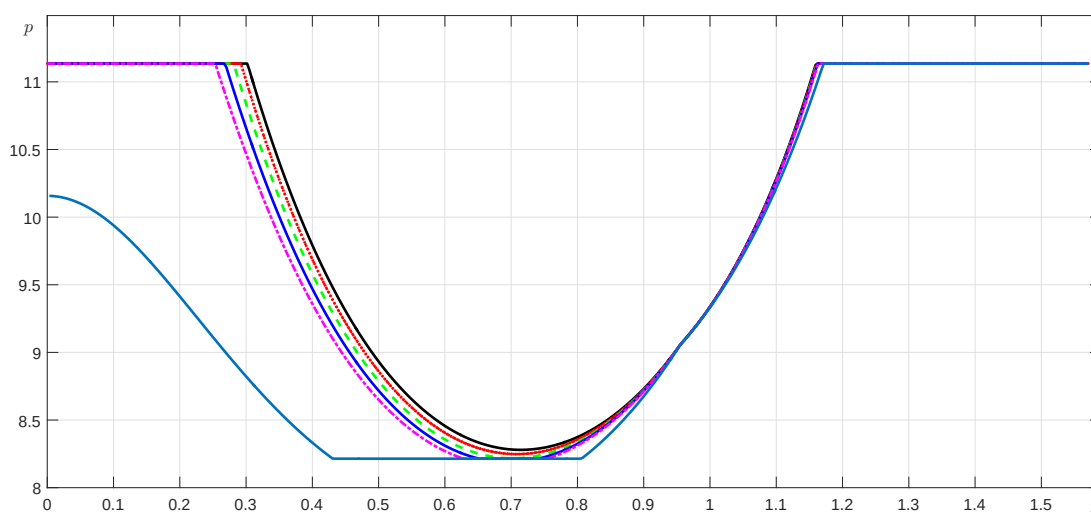


Рис. 3.10: Зависимость давления p от от угла наклона ν . Вычислительный эксперимент 2.

Эксперимент 2. Коэффициент двухосности нагружения $m = -0,5$. Первый случай –

внутреннее давление и осевое сжатие. При $\nu \approx 1$ (особый случай критического состояния слоя) критическое давление не зависит от относительной толщины прослойки, так как на слой не действует ни растягивающая, ни сжимающая сила, и контактное упрочнение не возникает.

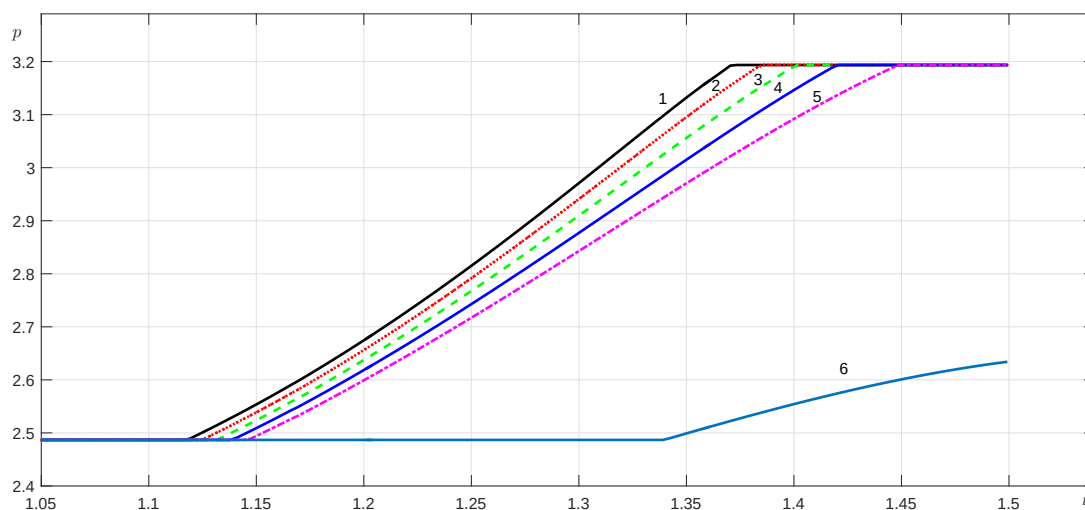


Рис. 3.11: Зависимость давления p от угла наклона ν . Вычислительный эксперимент 3.

Эксперимент 3. Коэффициент двухосности нагружения $m = -5$. Первый случай – внутреннее давление и осевое сжатие. Здесь при $\nu < 1,12$ упрочнение отсутствует, что объясняется большой сжимающей нагрузкой, а при $\nu > 1,36 \dots 1,45$ прослойка не снижает прочности ТЦО.

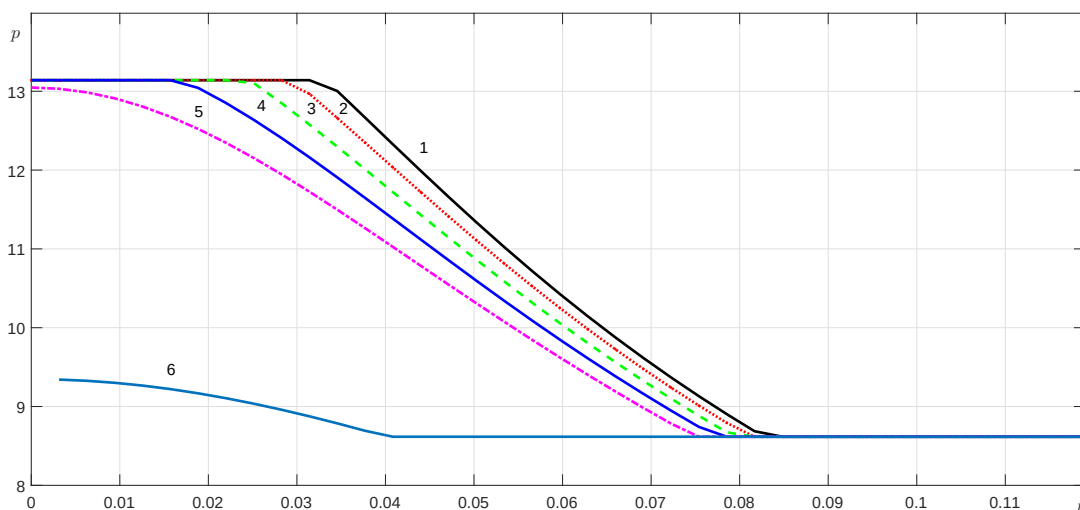


Рис. 3.12: Зависимость давления p от угла наклона ν . Вычислительный эксперимент 4.

Эксперимент 4. Коэффициент двухосности нагружения $m = -5$. Второй случай – внешнее давление и осевое растяжение. Здесь в силу сильного осевого растягивающего нагру-

жения тонкостенной цилиндрической оболочки для углов, не близких к нулю, упрочнение отсутствует.

3.4 Выводы по главе 3

1. Получен алгоритм для вычисления критических значений интенсивностей напряжений и деформаций в МП слое и критических значений внешних нагрузок, в зависимости от данных параметров. Если толщина слоя сравнима с толщиной листа или больше, эти величины получены в виде явных аналитических выражений.
2. Исследован особый случай расположения менее прочного слоя, когда напряженное состояния слоя является чистым сдвигом.
3. Получен алгоритм для нахождения расчетной величины коэффициента механической неоднородности между МП слоем и основным материалом, которая, как показано, зависит не только от свойств материалов слоя и ТЦО, но и от угла наклона слоя и условий нагружения.
4. Критическое давление не зависит от относительной толщины слоя κ в особом случае напряженного состояния слоя, когда $m = -\operatorname{ctg}^2 \nu$ и мало зависит в окрестности этой точки.
5. Программы, написанные на основе алгоритмов, построенных в этой главе, позволяют находить условия, при которых менее прочный слой не снижает прочности ТЦО.
6. Показано, что критическое состояние однородной ТЦО достигается: 1) при осевом сжатии и внутреннем давлении – в форме ОПУПД при $-1 \leq m < 0,5$ и в форме ЛПД (продольная выпучина) при $m \leq -1$; 2) при осевом растяжении и внешнем давлении – только в форме ЛПД (кольцевая шейка).

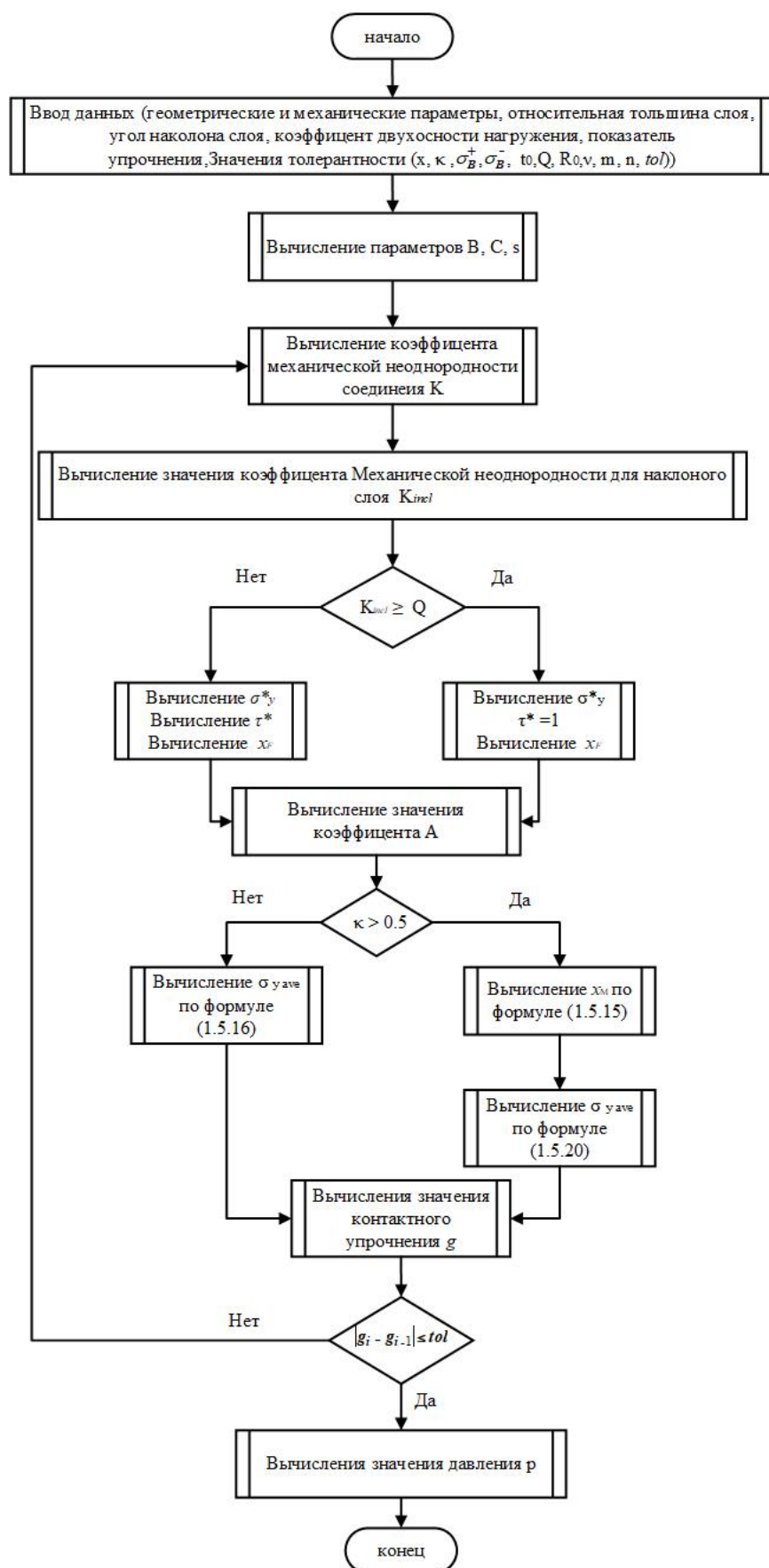


Рис. 3.13: Блок-схема алгоритма вычисления критических напряжений и внутреннего (внешнего) давления в тонкостенной цилиндрической оболочке, содержащей наклонный слой из менее прочного материала, при отрицательном коэффициенте двухосности нагружения стенки оболочки.

Заключение

Итоги выполненных исследований в диссертационной работе

В диссертационной работе проведено исследование математических моделей напряженно-деформированных состояний пластических слоев под растягивающей и сжимающей нагрузкой при плоской деформации; проведено исследование математических моделей напряженных и напряженно-деформированных состояний листовых образцов и ТЦО, содержащих слои из менее прочного материала, подверженных давлению и осевой нагрузке разных знаков, и на этой основе, разработаны алгоритмы и программы, позволяющие оценить влияние на критическое состояние ТЦО, в том числе критическое давление, параметров самих ТЦО и содержащихся в них слоев, а также условий нагружения.

В работе решены все задачи, поставленные для достижения цели диссертации.

Рекомендации

На основе выполненных исследований можно рекомендовать использовать результаты диссертации для решения прикладных задач, таких, как определение толщин труб большого диаметра при заданных условиях эксплуатации трубопроводов; определение допустимых давлений при заданных параметрах труб и условиях их работы; оптимизация параметров труб с точки зрения эффективности работы трубопроводов, экономии металла и т.п.

Перспективы дальнейшей разработки темы диссертационной работы

Перспективы дальнейшей разработки темы диссертационной работы имеют несколько направлений.

В работе не нашли отражения вопросы, связанные с влиянием дефектов, их размеров и расположения, в неоднородной ТЦО, содержащей продольные, кольцевые и спиральные слои, на величины критических напряжений и деформаций, давления и осевой нагрузки.

Большой интерес представляет исследование вопросов, поднятых в диссертации, при других условиях нагружения ТЦО, например, когда постоянным является отношение не напряжений, как в работе, а внешних нагрузок.

Интересно рассмотреть проблематику диссертации при аппроксимации диаграммы деформирования, отличной от принятой в работе зависимости (3.2.2), так как многие материалы, в том числе стали, более точно аппроксимируются другими функциями.

Литература

- [1] Айбиндер, А.Б. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость / А.Б. Айбиндер, А.Г. Камерштейн. – М.: Недра, 1982. – 341 с.
- [2] Александров, С.Е. Обобщение решения Прандтля и его приложение к оценке несущей способности некоторых сварных и паяных конструкций / С.Е. Александров // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2001. – № 6. – С. 39–43.
- [3] Анучкин, М.П. Трубы для магистральных трубопроводов / М.П. Анучкин, В.Н. Горицкий, Б.И. Мирошниченко. – М.: Недра, 1986. – 231 с.
- [4] Бакши, О.А. О напряженном состоянии и деформации твердого металла в сварных соединениях с твердой и мягкой прослойками / О.А. Бакши, А.А. Шатов // Свароч. пр-во. – 1966. – № 5. – С. 17–20.
- [5] Бакши, О.А. Об учете фактора механической неоднородности сварных соединений при испытании на растяжение / О.А. Бакши // Свароч. пр-во. – 1985. – № 7. – С. 32–34.
- [6] Бидерман, В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика / В.Л. Бидерман. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
- [7] Броек, Д. Основы механики разрушения / Д. Броек. – М.: Высшая школа, 1980. – 368 с.
- [8] Винокуров, В.А. Сварные конструкции. Механика разрушений и критерии работоспособности / В.А. Винокуров, С.А. Куркин, Н.А. Николаев. – М.: Машиностроение, 1996. – 576 с.
- [9] Воронцов, А.Л. Об аппроксимации кривых упрочнения / А.Л. Воронцов // Вестн. машиностроения. – 2002. – № 1. – С. 51–54.
- [10] Воронцов, А.Л. Изменение геометрии цилиндрической заготовки при осадке с контактным трением / А.Л. Воронцов // Вестн. машиностроения. – 2009. – № 7. – С. 68–75.
- [11] ГОСТ III-42-80. Магистральные трубопроводы. Правила производства и приёмки работ. – М.: Стройиздат, 1981. – 80 с.

- [12] ГОСТ 6996-66. Сварные соединения. Методы определения механических свойств. – М.: Стандартиформ, 2005. – 44 с.
- [13] Даунис, М.А. Сопротивление деформированию и разрушению механически неоднородных сварных соединений при однократном нагружении / М.А. Даунис, А.П. Браженас // Проблемы прочности. – 1979. – № 12. – С. 53–58.
- [14] Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М.: Наука, 1973. – 228 с.
- [15] Девис, Е.А. Рост напряжений с изменением деформаций и зависимость "напряжения-деформация" в пластической области для меди при сложном напряженном состоянии / Е.А. Девис // Теория пластичности / Под ред. Ю.Н. Работнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 336–363.
- [16] Денис, Р.М. Оценка допустимости коррозионных дефектов / Р.М. Денис // Трубопровод. транспорт нефти. – 1997. – № 4. – С. 28–34.
- [17] Дильман, В.Л. Анализ напряженно-деформированного состояния неоднородной пластической полосы / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, механика, физика». – 2012. – Вып. 7. – № 34 (293). – С. 11–16.
- [18] Дильман, В.Л. Анализ прочности неоднородных сварных швов стержней арматуры / В.Л. Дильман, Т.В. Карпета // Вестник машиностроения. – 2015. – № 2. – С. 29–33.
- [19] Дильман, В.Л. Исследование аналитическими методами математических моделей напряженного состояния тонкостенных неоднородных цилиндрических оболочек / В.Л.Дильман // Вест. ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2009. – Вып. 3. – № 17(150). – С. 36–58.
- [20] Дильман, В.Л. Исследование математических моделей напряженного состояния неоднородного поперечного слоя в круглом стержне / В.Л.Дильман, Т.В. Ерошкина // Вест. ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2009. – Вып. 4. – № 37(170). – С. 65–77.
- [21] Дильман, В.Л. Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 202 с.
- [22] Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина.— Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 276 с.
- [23] Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний пластического слоя / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, вып. 5. – С. 2502–2504.

- [24] Дильман, В.Л. Математическое моделирование напряженного состояния тонкостенных неоднородных цилиндрических оболочек. Дисс. ... доктора физ.-мат. наук. – Челябинск. – 2011. – 316 с.
- [25] Дильман, В.Л. Напряженное состояние и прочность неоднородной пластической полосы с дефектом в более прочной части / В.Л. Дильман // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2010. – № 2. – С. 89–102.
- [26] Дильман, В.Л. Напряженное состояние и прочность сварных швов труб большого диаметра / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Химич. и нефтегаз. машиностроение. – 1998. – № 4. – С. 16–20.
- [27] Дильман, В.Л. Напряженное состояние и статическая прочность пластичной прослойки при плоской деформации / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. – № 4. – С. 38–48.
- [28] Дильман, В.Л. Напряженное состояние пластического слоя с переменным по толщине пределом текучести при плоской деформации / В.Л. Дильман, Т.В. Карпета // Известия ВУЗов. Математика. – 2013. – № 8. – С. 34–43.
- [29] Дильман, В.Л. Напряженное состояние пластического слоя с переменной прочностью по толщине / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 1. – С. 141–148.
- [30] Дильман, В.Л. Несущая способность спиральношовных труб большого диаметра / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Хим. и нефтегаз. машиностроение. – 2002. – № 6. – С. 11–15.
- [31] Дильман, В.Л. О влиянии двухосности нагружения на несущую способность труб магистральных газонефтепроводов / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 5. – С. 179–185.
- [32] Дильман, В.Л. О напряженно-деформированном состоянии при растяжении пластического слоя с двумя осями симметрии / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2001. – № 6. – С. 115–124.
- [33] Дильман, В.Л. О потере пластической устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2002. – № 5. – С. 50–57.
- [34] Дильман, В.Л. Об одной математической модели напряженного состояния пластического слоя при плоской деформации / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Вест. ЮУрГУ. Серия "Математика, физика, химия". – 2005. – Вып. 6. – № 6. – С. 19–23.
- [35] Дильман, В.Л. Пластическая неустойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 4. – С. 165–175.

- [36] Дильман, В.Л. Прочность механически неоднородных сварных соединений стержневой арматуры / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин, Т.В. Ерошкина // Вестник машиностроения. – 2008. – № 9. – С. 13–17.
- [37] Дильман, В.Л. Численный анализ критического давления в тонкостенной цилиндрической оболочке, содержащей мягкую прослойку / В.Л. Дильман // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – Вып. 8. – № 17 (234). – С. 29–35.
- [38] Дильман, В.Л. Численный анализ напряжений на наклонной контактной поверхности при растяжении дискретно-неоднородного твердого тела / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 14. – № 40 (299). – С. 164–168.
- [39] Друккер, Д. О постулате устойчивости материала в механике сплошной среды / Д. Друккер // Механика. – 1964. – № 3. – С. 115–128.
- [40] Жуков, А.М. О пластических деформациях изотропного металла при сложном нагружении / А.М. Жуков // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1956. – № 8. – С. 81–82.
- [41] Жуков, А.М. Сложное нагружение и теория пластичности изотропных металлов / А.М. Жуков // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1955. – № 8. – С. 81–92.
- [42] Задоян, М.А. О сжатии пластически неоднородной по длине полосы двумя жесткими плитами / Изв. АН СССР Отд. техн. наук. "Механика и машиностроение". – 1962. – № 4. – С. 142–145.
- [43] Зайнуллин, Р.С. Прочность сварных соединений с разупрочненными участками при двухстороннем растяжении / Р.С. Зайнуллин, А.В. Бакиев // Свароч. пр-во. – 1973. – № 4. – С. 35–36.
- [44] Зубчанинов, В.Г. Устойчивость и пластичность. Т.1. Устойчивость. / В.Г. Зубчанинов. – М.: Физматлит, 2007. – 448 с.
- [45] Ивлев, Д.Д. Метод возмущений в теории упругопластических деформаций / Д.Д. Ивлев, Л.В. Ершов. – М.: Наука, 1978. – 196 с.
- [46] Итон, Н. Особенности разрушения при изготовлении и эксплуатации сварных конструкций: / Н. Итон, А. Гловер, Дж. Мак-Грат // Механика разрушения. Разрушение конструкций. Механика. Новое в зарубеж. науке / под ред. Д. Тэплина. – М.: Мир, 1984. – С. 92–120.
- [47] Ишлинский, А.Ю. Математическая теория пластичности / М.: Физматлит, 2001. – 296 с.

- [48] К вопросу о расчетной прочности составных образцов с мягкой прослойкой при статическом растяжении / А.В. Гурьев, В.П. Багмутов, Ю.Д. Хесин, Л.В. Бойков // Проблемы прочности. – 1973. – № 1. – С. 9–13.
- [49] Качанов, Л.М. Основы механики разрушения / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1974. – 310 с.
- [50] Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
- [51] Качанов, Л.М. К задаче о деформации пластического слоя / Л.М. Качанов // ДАН СССР. – 1954. – Т. ХСVI, № 2. – С. 249–252.
- [52] Качанов, Л.М. О напряженном состоянии пластической прослойки / Л.М. Качанов // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1962. – № 5. – С. 63–67.
- [53] Качанов, Л.М. Об одном способе определения сопротивления отрыву / Л.М. Качанов, А.Л. Немчинский // Физика металлов и металловедение. – 1957. – Том 4, вып. 1. – С. 151–160.
- [54] Ключников, В.Д. Математическая теория пластичности / В.Д. Ключников. – М.: Изд-во МГУ, 1979. – 208 с.
- [55] Ковальчук, Г.И. К вопросу о потере устойчивости пластического деформирования оболочек / Г.И. Ковальчук // Проблемы прочности. – 1983. – № 5. – С. 11–16.
- [56] Когут, Н.С. Несущая способность сварных соединений / Н.С. Когут, М.В. Шахматов, В.В. Ерофеев. – Львов: Свит, 1991. – 184 с.
- [57] Коллинз, Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение / Дж. Коллинз. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 624 с.
- [58] Кроха, В.А. О зависимости показателя деформационного упрочнения от степени деформации и выполнении степенного закона упрочнения / В.А. Кроха // Проблемы прочности. – 1981. – № 8. – С. 72–77.
- [59] Кривошея, В.Н. Свойства металла ЗТВ сварных соединений сталей 17Г1С и 17Г2АФ / В.Н. Кривошея, В.Н. Дубров // Автомат. сварка. – 1989. – № 11. – С. 51–54.
- [60] Куркин, С.А. Прочность сварных тонкостенных сосудов, работающих под давлением / С.А. Куркин. – М.: Машиностроение, 1976. – 184 с.
- [61] Лифанов, В.Я. Современное состояние и перспективы развития трубной промышленности Российской Федерации / В.Я. Лифанов // Металлург. – 2004. – 10. – С. 60–63.

- [62] Людвиг, П. Основы технологической механики / П. Людвиг // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение, 1971. – Вып. 15. – С. 132–166.
- [63] Максимова, Л.А. О предельном состоянии слоя, сжатого шероховатыми плитами // Прикл. математика и механика. – 2000. – Т. 64, вып. 6.
- [64] Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
- [65] Махутов, Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность / Н.А. Махутов. – М.: Машиностроение, 1981. – 272 с.
- [66] Махутов, Н.А. Исследование пространственной механической неоднородности сварных соединений аустенитных нержавеющей сталей / Н.А. Махутов, И.В. Макаренко, Л.В. Макаренко // Завод. лаб. – 2004. Т. 70. – № 2. – С. 39–49.
- [67] Михайлов, Н.Я. Экспериментальное исследование предельной несущей способности тонкостенных никелевых трубок при различных путях нагружения растягивающей силой, крутящим моментом и внутренним давлением / Н.Я. Михайлов, Ю.И. Ягн // ДАН СССР. – 1960. – Т. 135. – С. 545–548.
- [68] Моношков, А.Н. Пластическая устойчивость и ее роль в оценке прочности труб / А.Н. Моношков, С.И. Пыхов, И.А. Пустин // Производство труб с покрытиями, отделка и контроль качества труб. – М.: Металлургия, 1972. – С. 77–81.
- [69] Мяченков, В.И. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: справочник / В.И. Мяченков, В.П. Мальцев, В.П. Майборода и др. / под общ. ред. В.И. Мяченкова. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
- [70] Новожилов, В.В. Вопросы механики сплошной среды / В.В. Новожилов. – Л.: Судостроение, 1989. – 398 с.
- [71] О влиянии степени механической неоднородности на статическую прочность сварных соединений / О.А. Бакши, В.В. Ерофеев, М.В. Шахматов и др. // Свароч. пр-во. – 1983. – № 4. – С. 1–4.
- [72] О разрушении высокопрочных сталей при сварке / А.М. Макара, В.А. Саржевский, Н.Е. Протосей и др. // Свароч. пр-во. – 1968. – № 8. – С. 1–5.
- [73] Одквист, Ф. Упрочнение стали и ей подобных материалов / Ф. Одквист // Теория пластичности / Под ред. Ю.Н. Работнова. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – С. 283–290.
- [74] Олейник, Н.В. Определение вязкости разрушения материалов по их механическим свойствам / Н.В. Олейник, Нго Ван Куэт // Проблемы прочности. – 1976. – № 1. – С. 72–77.

- [75] Островский, А.А. О предельном состоянии материала, обусловленном развитием слоев текучести / А.А. Островский // Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии. – Киев, 1978. – С. 67–75.
- [76] Остсемин, А.А. О сжатии пластического слоя двумя шероховатыми плитами / А.А. Остсемин, В.Л. Дильман // Проблемы прочности. – 1990. – № 7. – С. 107–113.
- [77] Остсемин, А.А. Расчет испытательного давления магистральных трубопроводов / А.А. Остсемин, В.Л. Дильман // Хим. и нефтегаз. машиностроение. – 2003. – № 1. – С. 14–17.
- [78] Остсемин, А.А. Расчет толщины стенки труб магистральных газонефтепроводов (анализ нормативных документов) / А.А. Остсемин, В.Л. Дильман // Хим. и нефтегаз. машиностроение. – 2002. – № 2. – С. 15–18.
- [79] Писаренко, Г.С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г.С. Писаренко, А.А. Лебедев. – Киев: Наук. думка, 1976. – 416 с.
- [80] Пластичность и разрушение / В.Л. Колмогоров, А.А. Богатов, В.А. Мигачев и др. – М.: Металлургия, 1977. – 331 с.
- [81] Практические примеры на сопротивление хрупкому разрушению трубопроводов под давлением / А.Р. Даффи, Дж.М. Мак-Клур, Р.Дж. Айбер, У.А. Мэкси // Разрушение. – Т.5. – М.: Машиностроение, 1977. – С. 146–210.
- [82] Прандтль, Л. Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел // Теория пластичности / под ред. Ю.Н. Работнова. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – С. 103–113.
- [83] Предельное состояние деформируемых тел и горных пород / Д.Д. Ивлев, Л.А. Максимова, Р.И. Непершин, Ю.Н. Радаев, С.И. Сенашов, Е.И. Шемякин. – М.: Физматлит, 2008. – 832 с.
- [84] Применение модели вязкого разрушения труб осевыми дефектами для анализа результатов натурных экспериментов / И.В. Орыняк, С.В. Ляшенко, В.М. Тороп, В.Н. Горицкий // Проблемы прочности. – 1996. – № 6. – С. 5–15.
- [85] Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1979. – 774 с.
- [86] Рождественский, Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Наука, 1978. – 688 с.
- [87] Сегал, В.М. Технологические задачи теории пластичности (методы исследования) / В.М. Сегал. – Минск.: Наука и техника, 1977. – 254 с.

- [88] Серьяк, Г. Структура и свойства сварных соединений / Г. Серьяк, Э. Литовски // Автомат. сварка. – 2000. – № 9–10. – С. 117–121.
- [89] Смирнов, В.С. Теория обработки металлов давлением / В.С. Смирнов. – М.: Металлургия, 1973. – 496 с.
- [90] Смирнов-Аляев, Г.А. Сопротивление металлов пластическому деформированию / Г.А. Смирнов-Аляев. – Л.: Машиностроение, 1978. – 368 с.
- [91] Соколовский, В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
- [92] СП 34-101-98. Выбор труб для магистральных нефтепроводов при строительстве и капитальном ремонте. – М.: АК "Транснефть 1998. – 44 с.
- [93] СП 34-116-97. Инструкция по проектированию, строительству и реконструкции промысловых нефтегазопроводов. – М.: Минтопэнерго РФ, 1997. – 206 с.
- [94] Сравнительные испытания прямошовных и спиральношовных труб / А.А. Груздев, Г.Г. Тарабрин, Н.Ф. Хохлов и др. // Трубопровод. транспорт нефти. – 1999. – № 7. – С. 29–32.
- [95] Теорияковки и штамповки / Е.П. Унксов, У. Джонсон, В.Л. Колмогоров и др. – М.: Машиностроение, 1992. – 720 с.
- [96] Теория пластических деформаций металлов / Е.П. Унксов, У. Джонсон, В.Л. Колмогоров и др. – М.: Машиностроение, 1983. – 598 с.
- [97] Томленов, А.Д. Теория пластического деформирования металлов / А.Д. Томленов. – М.: Металлургия, 1972. – 408 с.
- [98] Томсен, Э. Механика пластических деформаций при обработке металлов / Э. Томсен, Ч. Янг, Ш. Кобаяши. – М.: Машиностроение, 1969. – 502 с.
- [99] Шахматов, М.В. Инженерные расчеты сварных оболочковых конструкций / М.В. Шахматов, В.В. Ерофеев. – Челябинск: ЧГТУ, 1995. – 229 с.
- [100] An American Nacional Standart. ASME B31.G – 1991. Code for Pressure Piping. Manual for Determining the Remaning Strength of Corroded Pipelines. – N.Y.: ASME, 1991.
- [101] An American Nacional Standart. ASME B31.8 – 1992. Code for Pressure Piping. Gas Transmission and Distribution Piping Sistems. – N.Y.: ASME, 1993.
- [102] An G.B., Ohata M., Toyoda M. Effect of strength mis-match and dinamic loading on ductile fracture inintiation // Engineering Fracture Mechanics. – 2003. – Vol. 70. – P. 1359–1377.

- [103] Broek, D. The Practical Use of Fracture Mechanics / D. Broek. – Kluwer Academic Publishers. – Dordrecht, 1989. – 522 p.
- [104] Davis, E.A. Combine tension-torsion test with bixed principal directions / E.A. Davis // Journal of applied mechanics / – 1955. – Vol. 22. – Issue 3. – P. 411–417.
- [105] Dilman, V.L. Critical State of a Thin-Walled Cylindrical Shell Containing an Interlayer Fabricated from a Material of Lesser Strength / V.L. Dilman, T.V. Karpeta // Chemical and Petroleum Engineering. – 2014, – V. 49, Issue 9-10. – P. 668-674.
- [106] Dilman, V.L. Effect of defect on the load carrying capacity of pipes of transmission oil and gas pipelines under biaxial loading / V.D. Dilman, A.A. Ostsemin // Welding International. – 2006. – V. 20(1). – P. 63–67.
- [107] Dilman, V.L. Static strenght of welded joints in spiral-seam pipes / V.L. Dilman, A.A. Ostsemin // Welding International. – 2001. – V. 15(10). – P. 812–815.
- [108] Dilman, V.L. Strenght of straight-seam pipes in transmission gas and oil pipelines / V.L. Dilman, A.A. Ostsemin // Welding International. – 2001. – V. 15(7). – P. 557–562.
- [109] Dilman, V.L. The critical state of inclined layer in a sheet specimen with negative loading biaxiality coefficient / V.L. Dilman, A.N. Dheyab // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software (Bulletin SUSU MMCS). – 2016. – V. 9, № 1. – P.123–129.
- [110] Eiber, P.J. Outside force causes moust natural gas pipeline failures / P.J. Eiber // Oil and Gas J. – 1987. – V. 85, № 11. – P. 52–53, 56–57.
- [111] Folias, E.S. An axial crack in apressured cylindrical shell / E.S. Folias // Jnt. J. Fract. Mech. – 1965. – № 2. – P. 104–113.
- [112] Kim Y.-J., Schwalbe K.-H. Compendium of yield solutions for strength mis-matched DE(T), SE(B) and C(T) specimens // Engineering Fracture Mechanics. – 2001. – Vol. 68. – P. 1137–1151.
- [113] Kim Y.-J., Schwalbe K.-H. Numerical analyses of strength mis-match effect on local stresses for ideally plastic materials // Engineering Fracture Mechanics. – 2004. – Vol. 71. – P. 1177–1199.
- [114] Kozak D., Gubeljak N., Konjatic, Sertic J. Yield load solutions of heterogeneous welded joints // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2009. – Vol. 86. – P. 807–812.
- [115] Marciniak, Z. Limit Strains in the Process of Stretch - Forming Sheet Metall / Z. Marciniak, K. Kuczynski // International Journal of Mechanical Sciences. – 1967. – Vol. 9. – P. 609–620.
- [116] Marciniak, Z. Utrata statecznosci rozciąganych powłok plastycznych / Z. Marciniak // Mech. teoretyczna i stosowana. – 1966. – Vol. 4, – № 3.

- [117] Prandtl, L. Beispiele der Anwendung des Hencky's Theorems zum Gleichgewicht der plastischen Körper / L. Prandtl // ZAMM – 1923. – Bd. 3, № 6. – S. 401–406.
- [118] Satoh, K. Joint strength of heavy plastics with lower strength weld metal / K. Satoh, M. Toyoda // Welding Jornal. Sept. – 1975. – № 9. – P. 311–319.
- [119] Storakers, B. Plastic and visco-plastic under internal pressure, tarsion and axial tension / B. Storakers // IJMS. – 1968. – V. 10, № 6. – P. 519–528.
- [120] Svensson, N.L. The bursting pressure of cylindrical and spherical vessels / N.L. Svensson // J. Appl. Mech. – 1958. – № 3. – P. 89–96.
- [121] Swift, H. Plastic instability under plane stress / H. Swift // J. Mech. and Phys. Solids. – 1952. – № 1. – P. 1–18.
- [122] Ruiz Ocelo, J. Comparison between structural integrity assessment procedures for cracked components / J. Ruiz Ocelo, M.A. Gonzales-Posada, J. Gorrochategui, F. Gutierrez-Solana // Lifetime Management and Evalution of Plant. Structures and Component / Eds. J.H. Edwards, P.E.J. Flewitt, B.C. Gasper, et al. – Cambridge, UK, Sept, 1998. – Publishers EMAS, UK. – P. 319.
- [123] Schnabl, S. Analytical solution of two-layer beam taking into account interlayer slip and shear deformation /S. Schnabl, M. Saje, G. Turk, I. Planinc // Journal of Structural Engineering/ – 2007. – V. 133, № 6. – P. 886–894.
- [124] Yonise, B. Numerical analysis of constraint effect on ductile tearing in strenght mismatched welded CCT spesiments using micromechanical approach // B. Yonise, M. Rakin, B. Medio / Tecnical Gazette. – 2011. – V. 18, № 3. – P. 333–340.
- [125] Hector S.S. Deformation of steel pipies with internal presure under axial compression and bending load under seismic action //S.S. Hector, S.C. Carlos / The 14-th World Conference on Earthquake Engineering. – October 12-17, 2008. – Beijing, China.
- [126] Дильман, В.Л. Анализ напряженно-деформированного состояния неоднородной пластической полосы / В.Л. Дильман, А.Н. Дияб // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, механика, физика». – 2015.– Т. 7, № 4.– С. 11–19.
- [127] Дильман, В.Л. Анализ расположения линий разрыва напряжений в дискретно неоднородной растягиваемой полосе при плоской деформации / В.Л. Дильман, А.Н. Дияб // Наука ЮУрГУ: материалы 66-й научной конференции. Секции естественных наук. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ: 2014. – С. 170–177.
- [128] Дияб, А.Н. Деформированное состояние пластического слоя при сжатии без проскальзывания / А.Н. Дияб // Новая наука: стратегия и вектор развития: Международное научное периодическое издание по итогам Международной научно-практической конференции (19.11.2015, г. Стерлитамак). Ч. 2. – С. 123–129.

- [129] Дильман, В.Л. Математическое моделирование напряженного состояния пластического слоя под сжимающей нагрузкой / В.Л. Дильман, А.Н. Дияб // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань, 2015. – Т. 51. – С. 173–176.
- [130] Дильман, В.Л. Моделирование напряженного состояния пластического слоя при сжатии на основе деформационных гипотез / В.Л. Дильман, А.Н. Дияб // Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах: тез. докл. междунар. конф., посвящ. 80-летию члена-корреспондента РАН И.К. Камилова. Челябинск, 24-28 августа 2015 г. – Челябинск: Изд-во Челябинского государственного университета, 2015. – С. 160.
- [131] Дильман, В.Л. Моделирование напряженного состояния растягиваемой неоднородной полосы / В.Л. Дильман, А.Н. Дияб // XXII Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». Тезисы докладов. – Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, 2014. – С. 126.
- [132] Дильман, В.Л. Об обратной граничной задаче деформирования пластического слоя при его сжатии со скольжением / В.Л. Дильман, А.Н. Дияб // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, вып. 5. – С. 1125–129.
- [133] Дильман, В.Л. Особенности напряженного состояния наклонного менее прочного слоя в листовом образце / В.Л. Дильман, А.Н. Дияб // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2015. – Т. 19, вып. 2. – С. 273–274.
- [134] Дильман, В.Л. Разрывные решения граничных задач для уравнений напряженного состояния неоднородной полосы / В.Л. Дильман, А.Н. Дияб // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти В.К. Иванова. Челябинск, 10-14 ноября 2014 г. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – С.111–112.
- [135] Dilman, V.L. The critical state of inclined layer in a sheet specimen with negative loading biaxiality coefficient / V.L. Dilman, A.N. Dheyab // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software (Bulletin SUSU MMCS) – 2016. – V. 9, № 1. – P. 123–129.
- [136] Программа для ЭВМ "Вычисление критических напряжений и давления в тонкостенной цилиндрической оболочке, содержащей слои из менее прочного материала, при ее двухосном нагружении": свидетельство 2016617507 / А.Н. Дияб; правообладатель ФГБОУ ВПО "Южно-Уральский государственный университет"(национальный исследовательский университет)(RU). 2016612437; заявл. 21.03.2016; зарегистр. 06.07.2016, Реестр программ для ЭВМ.
- [137] Программа для ЭВМ "Вычисление средних критических напряжений пластического слоя при его растяжении при плоской деформации": свидетельство

2017662934 / А.Н. Дияб; правообладатель ФГАОУ ВПО "Южно-Уральский государственный университет"(национальный исследовательский университет)(RU). 2017660073; заявл. 06.10.2017; зарегистр. 21.11.2017, Реестр программ для ЭВМ.