

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Югорский государственный университет»

На правах рукописи



Шергин Сергей Николаевич

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ОДНОГО КЛАССА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
ФИЛЬТРАЦИИ И ГИДРОДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ
ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ**

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор ф.-м. наук, профессор
Пятков Сергей Григорьевич

Ханты-Мансийск — 2019

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ	4
ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА Введение	5
ГЛАВА 1 Вспомогательные результаты	36
ГЛАВА 2 Обратные задачи об определении функции источника и па- раметров среды в моделях соболевского типа	46
2.1 Обратные задачи об определении источника в задачах филь- трации и переноса	46
2.2 Определение параметров среды в задачах фильтрации	56
2.3 Линейные обратные задачи для математических моделей Бус- синеска – Лява.....	67
2.4 Коэффициентные обратные задачи для уравнения Буссинеска – Лява.....	75
2.5 Алгоритм численного решения обратных задач для матема- тических моделей фильтрации	87
2.5.1 Описание алгоритма для коэффициентной обратной задачи	88
2.5.2 Численная реализация алгоритма	90
2.5.3 Описание алгоритма определения функции источника	92
2.5.4 Численная реализация алгоритма	94
2.6 Описание комплекса программ и результаты численных экс- периментов.....	96
2.6.1 Определение коэффициента пьезопроводности в задачах фильтрации	101
2.6.2 Определение функции источника в задачах фильтрации....	109
ГЛАВА 3 Обратные задачи для математических моделей квазистаци- онарных электромагнитных волн	112
3.1 Описание математической модели.....	112
3.2 Вспомогательные построения и результаты	115
3.3 Основные результаты.....	120
3.4 Численное определение параметров среды.....	128
3.4.1 Описание алгоритма	128

3.4.2 Численная реализация алгоритма	130
3.5 Описание программы и результаты численных экспериментов	134
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	141
СПИСОК РИСУНКОВ.....	143
СПИСОК ТАБЛИЦ.....	145
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	146
ПРИЛОЖЕНИЕ А СВИДЕТЕЛЬСТВА О ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕ-	
ГИСТРАЦИИ ПРОГРАММ ДЛЯ ЭВМ	167

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

Пространство функций со значениями в банаховом пространстве E определенных и сильно измеримых в области G обозначается символом $L_p(G; E)$. В этом пространстве вводим норму $\| \|u(x)\|_E \|_{L_p(G)}$ [60]. Определения пространств Соболева $W_p^s(G; E)$, $W_p^s(Q; E)$ могут быть найдены в [60, 66, 84, 122]. Также используем пространства Гельдера $C^\alpha(\overline{G}; E)$. Пространство Соболева $W_p^s(G; E)$ в случае $E = \mathbb{C}^n$ ($E = \mathbb{R}^n$) обозначаем через $W_p^s(Q)$.

По определению, если вектор-функция $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ принадлежит пространству $u \in W_p^s(G)$ (или $u \in C^k(\overline{G})$), то это означает, что каждая из компонент u_i принадлежит пространству $W_p^s(G)$ (или $C^k(\overline{G})$). Под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Будем считать, что аналогичное соглашение справедливо и для матриц, т.е. включение $a \in W_p^s(G)$ для данной матрицы-функции $a = \{a_{ij}\}_{j,i=1}^k$ означает, что $a_{ij}(x) \in W_p^s(G)$ для всех i, j . Для данного интервала $J = (0, T)$, положим $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$, соответственно, $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$. Пространство Гельдера $C^{r,s}(\overline{Q})$ определяется аналогичным образом.

Говорим, что $\Gamma \in C^\alpha$ ($\alpha \geq 1$ если для любой точки $x_0 \in \Gamma$ существует окрестность U (координатная окрестность) и система координат y (локальная система координат), полученная путём поворота и переноса начала координат из исходной, в которой

$$\overline{U} \cap G = \{y \in \mathbb{R}^n : y' \in \overline{B_r}, \omega(y') < y_n \leq \omega(y') + \delta\},$$

$$\overline{U} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}) = \{y \in \mathbb{R}^n : \omega(y') - \delta \leq y_n < \omega(y')\},$$

$$\Gamma \cap \overline{U} = \{y \in \mathbb{R}^n : y' \in \overline{B_r}, y_n = \omega(y')\},$$

где $y' = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, $B_r = \{y' : |y'| < r\}$, $\delta > 0$ – некоторая постоянная и $\omega \in C^\alpha(\overline{B_r})$. Ось y_n в локальной системе координат всегда направлена по нормали к Γ в точке x_0 .

Пусть $\rho(x, M)$ – расстояние от точки x до множества M .

Выражение (u, v) обозначает скалярное произведение в пространстве $L_2(G)$, т.е. $(u, v) = \int_G u(x)v(x)dx$.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Многие прикладные задачи, связанные с описанием свойств исследуемых сред, таких как плотность и скорость распространения волн, параметры упругости, проводимость, диэлектрическая и магнитная проницаемость, а также свойства и местоположение неоднородностей сводятся к решению обратных задач. Эта информация интересна и важна во многих областях, в частности, в теории фильтрации, теории упругости, гидродинамике, геофизике, теории волновых процессов, томографии. Диссертационная работа посвящена аналитическому и численному исследованию математических моделей фильтрации и гидродинамики на основе теории обратных задач. В класс рассматриваемых моделей входят модели, основанные на уравнении Баренблатта – Желтова – Кочиной [71], уравнении волн Россби [138], уравнении Буссинеска – Лява [46, 55, 110, 158], уравнении Соболева [138], [150, 151], уравнении электромагнитных волн в анизотропных средах [56] и нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости [6].

Математическая модель Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$u_t - \xi \Delta u_t - k \Delta u = f \quad (1)$$

Эта модель описывает фильтрацию в трещиноватых средах, где физический смысл функции u – давление жидкости в трещинах. Среда рассматривается как материал, состоящий из пор и проницаемых блоков, которые разделены между друг другом другой системой трещин. В отличие от обычного описания фильтрации в пористой среде отличительной особенностью является тот факт, что вводятся два давления в жидкости: одно в порах, второе в трещинах и принимается во внимание обмен жидкости между трещинами и порами. Правая часть f – плотность источников (стоков) [63], Δ – Лапласиан, коэффициент $\xi = \frac{\nu}{\alpha}$ (ν – проницаемость трещин) представляет собой специфическую характеристику трещиноватой среды. Безразмерный коэффициент α характеризует интенсивность обмена между блоками и трещинами. Поскольку она меняется со временем, коэффициент α можно считать функцией времени. Коэффициент κ назы-

вается пьезопроводностью трещиноватой среды. В работе [71] κ выражается в виде $\kappa = \frac{\nu}{\mu(m_0 d_1 + d_2)}$. Здесь коэффициент проницаемости трещин обозначается через ν , вязкость жидкости это μ , коэффициенты сжимаемости жидкости блоков обозначаются через d_1 и d_2 , а m_0 – пористость блоков при стандартном давлении. При различных предположениях относительно среды, коэффициент κ может зависеть от времени и давления u (см. [3, 111, 131]).

При исследовании процесса фильтрации возникает задача о восстановлении коэффициента пьезопроводности среды и (или функции источника) на основе известной информации, что приводит к исследованию обратной задачи (1) о восстановлении функции $\kappa(t)$ и (или) правой части f специального вида по начально-краевым условиям и условиям переопределения. Уравнение (1) рассматривается в ограниченной области $G \subset R^n (n \geq 1)$ с границей $\Gamma \in C^2$. Краевые и начальные условия имеют вид

$$Ru|_S = \varphi, \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (3)$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x, t)u_{x_i} + \sigma(x, t)u$, а условия переопределения имеют вид

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (4)$$

где x_i произвольные точки лежащие в G .

Математическая модель Буссинеска – Лява

$$(\sigma^2 - \Delta)u_{tt} + \gamma_1(\Delta - \beta_1)u_t + \gamma_2(\Delta - \beta_2)u = f, \quad n \geq 1 \quad (5)$$

Модели и уравнения Буссинеска или Буссинеска – Лява рассматривались в работах А. Лява, А.Б. Альшина, Ю.Д. Плетнера, М.Ю. Корпусова А.Г. Свешникова, Т. Кано, Г. Вайтхэма (см. [3, 42, 46, 55, 110, 158]). Эти модели описывают продольные колебания упругого стержня с учетом инерции и при внешней нагрузке, движение длинных волн, распространение волн на мелкой воде, волновые процессы в плазме и ряд других физических процессов. Функция f характеризует плотность внешних сил. Функция u (в первом случае) есть продольное смещение, другие параметры зависят от плотности, модуля Юнга, отношения Пуассона, коэффициента упругости. При описании распространения волн на мелкой

воде, параметры $\sigma, \gamma_i, \beta_i$ ($i = 1, 2$), связывают число Бонда, глубину и гравитационную постоянную. Функция u определяет высоту волны в момент времени t в точке x , функция f задает внешние силы. При определенных значениях параметров в класс уравнений (5) входит также уравнение Соболева [150, 151], возникающее при исследовании малых колебаний вращающейся идеальной жидкости, и уравнение гравитационно-гироскопических волн (см. [5–7]). В работе рассматривается обратная задача об определении правой части или неизвестных параметров среды, входящих в уравнение. В частности, в работах [111, 131] рассматривалась задача управления, в которой определялась правая часть f , а в работе [164] и обратная задача об определении функции f . В отличие от представляемых результатов все рассмотрения проходят в классах непрерывных функций и все коэффициенты в уравнении не зависят от времени.

Для математических моделей, основанных на уравнении (1) рассматривается обратная задача о восстановлении параметров среды γ_i, β_i ($i = 1, 2$) или правой части f специального вида по начально-краевым условиям и условиям переопределения. Уравнение (5) рассматривается в ограниченной области $G \subset R^n$ ($n \geq 1$) с границей $\Gamma \in C^2$. Краевые условия и условия переопределения имеют вид (2), (4), а данные Коши вид

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x). \quad (6)$$

Математические модели нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости (модель распространения электромагнитных волн в анизотропных средах)

Рассматриваются модели, описываемые уравнением

$$\sum_{i=1}^3 (1 + \alpha \kappa_i^*) u_{x_i x_i} - \beta^2 u = F, \quad \kappa_i^* u = \int_0^t \kappa(t-s) u(s) ds, \quad (7)$$

которое при $\beta = 0$, $\alpha = 2\pi$ совпадает с уравнением распространения электромагнитных волн в анизотропных средах [56, стр. 29] а в случае $\alpha = 1$ с уравнением нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости [6]. В первом случае u – потенциал электрического или магнитного поля и параметры κ_i – диагональные элементы тензоров электрической или магнитной восприимчивости, F заданная функция, определяемая начальным распределением поляризации и намагниченности. Во втором случае u

– функция тока. Уравнение (7) рассматривается в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (0, T)$. В качестве условий переопределения рассматриваем условия

$$\Psi_j(u)(t) = \psi_j(t), \quad (8)$$

где Ψ_j – некоторые функционалы общего вида, и краевые условия

$$Ru|_S = g(x, t), \quad S = \partial G \times (0, T), \quad (9)$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x, t)u_{x_i} + \sigma(x, t)u$. В частности, возможно что условие переопределения имеет вид (4).

Уравнения (1), (5) принадлежат классу уравнений соболевского типа вида

$$Lu_t + Mu = f, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (10)$$

$$L_0u_{tt} + L_1u_t + L_2u = f, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (11)$$

где G – ограниченная область в R^n ($n \geq 1$) с границей $\Gamma \in C^2$ и L, M, L_0, L_1, L_2 – операторы второго порядка по переменным x . К уравнению (1) присоединяем краевые, начальные условия и условия переопределения вида (2), (3), (4), а уравнение (5) условиями вида (2), (4), (6). Определению вместе с решением U уравнений (1), (5) подлежат неизвестные функции, входящие в правую часть уравнений и в сами эти уравнения как коэффициенты. Особенностью рассматриваемых задач, в отличие от некоторых известных результатов, является тот факт, что неизвестные коэффициенты и правая часть уравнений представляют из себя произвольные линейные комбинации неизвестных функций, зависящих от времени, что фактически позволяет строить приближение неизвестных коэффициентов, зависящих от всех переменных, в виде конечных отрезков рядов.

Обратные задачи, возникающие при описании процессов распространения электромагнитных волн в анизотропных средах [56] и при рассмотрении нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости [6], входят в класс обратных задач об определении решения u уравнения

$$L_0u + \sum_{i=1}^m \kappa_i * L_i(x, t)u = f \quad (12)$$

и коэффициентов $k_i(t)$, входящих в это уравнение по данным краевой задачи (9) и условиям переопределения (12). При помощи дифференцирования по времени

задача сводится к нелинейной обратной задаче с интегральным слагаемым для уравнения соболевского типа третьего порядка, которое затем исследуется.

Все представленные выше математические модели и соответствующие уравнения входят в класс уравнений соболевского типа (или сводятся к таким уравнениям). По-видимому, первым, кто рассмотрел некоторые математические модели описываемые уравнениями, впоследствии названными уравнениями соболевского типа, был А. Пуанкаре в 1887 [133]. Первые серьезные работы появились в 30-х, 40-х годах прошлого века (С.Г. Россби [138], С.Л. Соболев [150, 151]), однако, основные результаты были получены уже во второй половине прошлого века. Систематическое изучение уравнений соболевского типа началось, по-видимому, с работ Р.Е. Шоултера (см. [142, 143]). Для них исследовались вопросы разрешимости начальных и начально-краевых задач, качественные свойства решений, теория рассеяния и устойчивость решений типа уединенных волн как для одномерных, так и для многомерных уравнений, в частности, для моделей типа Бенджамена – Бона – Махони – Бюргерса и Розенау – Бюргерса [77, 78] и других.

Основы общей теории сингулярных уравнений соболевского типа были заложены в работах Г.А. Свиридюка на основе полугруппового подхода (см. библиографию в [155]). Близкие результаты были получены в работах А. Фавини и А. Яги [95], где были рассмотрены вопросы разрешимости абстрактных уравнений соболевского типа (10). Большое количество близких результатов имеются также в работах Челябинской научной школы (см. [15–17, 19, 20, 24, 26, 29, 30, 40, 47, 48, 53, 54, 57, 59, 62, 117, 153, 154, 165, 166, 168]). Численные методы решения краевых задач для математических моделей, описываемых уравнениями соболевского типа развивались в работах С.А. Загребинной, А.В. Келлер, А.А. Замышляевой (см. библиографию в [22, 29, 32]). Можно отметить цикл работ [90–93, 161]), посвященных стохастическим уравнениям соболевского типа.

В монографии А.Г. Свешникова, А.Б. Альшина, М.О. Корпусова, Ю.Д. Плетнера [56] рассматриваются проблемы глобальной и локальной разрешимости широких классов начально-краевых задач для линейных и нелинейных уравнений в частных производных, включая уравнения соболевского типа и псевдопараболические уравнения, описывающие самые разные физические процессы.

Однако, отметим, что имеется не так много работ, посвящённых вопросам корректности обратных задач для таких уравнений. Основные результаты получены в одномерном случае и для некоторых простых моделей. Имеется только несколько примеров, когда рассматриваются достаточно общие классы уравнений. Это работы А.Ш. Любановой, А.И. Кожанова, А.А. Замышляевой, А. Фавини, В.Е. Федорова.(см., например, [27, 37, 45, 96, 97, 163, 164]). В частности, в класс рассмотренных задач входит и задача об определении правой части уравнения (см., например, [164] и библиографию в этой работе), обратные задачи восстановления коэффициента $\kappa(t)$, зависящего от времени по интегральным условиям переопределения и ряд других задач (см. [125], [35, 112] и [33, 37]). Однако в этих работах очень часто предполагалось, что главная часть оператора не зависит от времени, много работ посвящено рассмотрению других условий переопределения и нередко используются другие функциональные пространства.

Стандартные численные методы решения обратных задач очень часто основываются на сведении задачи к задаче управления и затем к минимизации соответствующего квадратичного функционала. Можно сослаться, например, на монографии [1, 108, 132, 140], где описаны классические методы используемые для численного решения обратных задач. Однако, эти подходы, с одной стороны, довольно трудоемкие с точки зрения объема вычислений, а с другой стороны, не всегда приводят к нужному результату: обратная задача и соответствующая задача управления не всегда эквивалентны. Поэтому проблема построения простых и достаточно быстрых методов решения обратных задач имеется. Среди работ, посвященных численному решению прямых задач для уравнений соболевского типа и некоторых задач оптимального управления для уравнений соболевского типа выделим работы П.Н. Вабишевича, М.Х. Бешкокова, А. Гуензани-Лакода, И. Амиралли, Г.А. Свиридюка, А.А. Замышляевой, А.Л. Шестакова, А.О. Кондюкова, А.В. Келлер, С.А. Загребинной, М.А. Сагадеевой и других авторов (см. [18, 25, 31, 32, 58, 68, 74, 75, 82, 87, 101, 116, 123, 157, 159, 162, 167]). Стоит отметить, что работ, посвященных численному решению обратных задач для математических моделей соболевского типа, не основанных на сведении задачи к задаче оптимального управления, не так много (можно сослаться на работы А. Хасан, А.Л. Бухгейма и некоторых других авторов [76, 103]). Поэтому тематика работы представляется актуальной.

Целью диссертационной работы является исследование математических моделей фильтрации и гидродинамики на основе теории обратных задач с последующей разработкой, обоснованием и программной реализацией эффективных численных методов их решения.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

- Исследовать математическую модель фильтрации и модель Буссинеска – Лява на основе теории обратных задач. Получить условия разрешимости и оценки устойчивости для решений обратных задач с точечными условиями переопределения об определении функции источника и параметров среды.
- Исследовать математические модели квазистационарных электромагнитных волн в анизотропных средах и нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости на основе теории обратных задач. Получить условия разрешимости и оценки устойчивости обратных задач об определений параметров среды.
- Разработать на основе полученных теоретических результатов эффективные численные методы и алгоритмы поиска приближённых решений с помощью методов конечных элементов и конечных разностей.
- Реализовать в виде комплекса программ для решения задач на компьютере разработанные численные методы и алгоритмы, провести вычислительные эксперименты на модельных примерах и проанализировать полученные результаты.

Научная новизна

В области математического моделирования: впервые исследованы вопросы корректности для многомерных достаточно общих классов обратных задач для математических моделей фильтрации и гидродинамики; в отличие от предыдущих работ в диссертации рассмотрены вопросы о построении неизвестных функций, входящих в уравнение, в виде конечных отрезков ряда по известному базису и рассмотрены как линейные задачи об определении правой части, так и нелинейные коэффициентные задачи в случае зависимости всех коэффициентов от времени; получены новые результаты о глобальной по времени корректности обратных задач с условиями переопределения общего вида для математических моделей квазистационарных электромагнитных волн в анизотропных средах и

нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости;

В области численных методов: построены и реализованы новые прямые итерационные численные методы для нахождения неизвестных коэффициентов в задачах фильтрации и задачах определения параметров среды в математических моделях квазистационарных электромагнитных волн и нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости.

В области комплексов программ: разработаны программные комплексы численного определения коэффициента средних гидравлических характеристик в обратных задачах фильтрации и численного определения параметров среды в математических моделях квазистационарных электромагнитных волн.

Степень разработанности темы исследования

По-видимому, первым, кто рассмотрел некоторые математические модели описываемых уравнений, впоследствии названные уравнениями соболевского типа, был А. Пуанкаре в 1887 [133].

В 1939 г. К.Г. Россби [138] описал движение волн в тонком слое жидкости на вращающейся сфере (уравнение волн Россби):

$$\Delta u_t + \beta u_{x_2} = f, \quad n = 2. \quad (13)$$

В сороковых годах прошлого века С.Л. Соболев [150, 151] при исследовании малых колебаний вращающейся идеальной жидкости вывел уравнение

$$\Delta u_{tt} + \omega^2 u_{x_3 x_3} = f, \quad n = 3. \quad (14)$$

где ω – угловая скорость. Для этого уравнения он исследовал задачу Коши и краевые задачи в цилиндрических областях и сформулировал ряд новых интересных задач математической физики [152]. Уравнению Соболева посвящено огромное количество работ, и достаточно полная библиография может быть найдена, например, в [83, 155].

Уравнение гравитационно-гироскопических волн записывается в виде (см. [5–7])

$$(\Delta - \beta^2) u_{tt} + N^2 (u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}) + \omega^2 u_{x_3 x_3} - \omega^2 \beta^2 u = f, \quad n = 3. \quad (15)$$

Оно описывает колебания с малой амплитудой несжимаемой вращающейся идеальной стратифицированной жидкости в поле гравитации. Здесь N – частота

Вайселя-Бранта, β – параметр, характеризующий стратификацию жидкости, ω – угловая скорость.

Уравнение

$$(\sigma^2 - \Delta)u_{tt} + \gamma_1(\Delta - \beta_1)u_t + \gamma_2(\Delta - \beta_2)u = f, \quad n \geq 1. \quad (16)$$

называется уравнением Буссинеска или Буссинеска – Лява. Это уравнение описывает продольные колебания стержней, движение длинных волн, распространение волн на мелкой воде и ряд других физических процессов [46, 55, 110, 158].

В 1960 году Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов И.Н. Кочина [71] для описания фильтрации в трещиноватых средах предложили математическую модель вида

$$(\sigma - \Delta)u_t + k\Delta u = f, \quad n = 3, \quad (17)$$

где физический смысл функции u – давление жидкости в трещинах.

Классические результаты посвященные теории уравнений соболевского типа могут быть найдены в работах Г.В. Демиденко, С.В. Успенского, Т.И. Зеленьяка, С.А. Гальперна, Р.Е. Шоултера, Е.Д. Бенедетто, А. Фавини, А. Лоренци, Х. Гавеского, М.И. Вишика, А.А. Дезина, П.А. Александряна (см. библиографию в [83]).

Опишем наиболее значимые результаты.

В монографии Г.В. Демиденко, С.В. Успенского [83] рассматриваются линейные системы дифференциальных уравнений, не разрешенные относительно старшей производной вида:

$$A_0 \partial_t^m u_t + \sum_{k=1}^{m-1} A_{m-k} \partial_t^k u = f$$

где A_k линейные дифференциальные операторы относительно переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, коэффициенты операторов предполагаются постоянными или зависящими от переменной x , основные результаты связаны с разрешимостью краевых задач и задачи Коши пространствах Соболева с произвольных индексом суммируемости в специальных неограниченных областях (типа полупространства или четверти пространства). Отметим в этой связи также работу [9], где была рассмотрена задача Коши во всем пространстве с коэффициентами зависящими и от параметра t в пространствах W_2^s для уравнений вида (10).

Систематическое изучение уравнений соболевского типа началось по-видимому, с работ Р.Е. Шоултера. Обобщенная разрешимость краевых задач для уравнения (10) в пространствах Соболева W_2^s в случае коэффициентов операторов L_0, L_1 , не зависящих от t , была исследована в работах [142, 143]. Работа [144] была посвящена абстрактной задаче вида (10) в гильбертовом случае, а работа [146] тем же вопросам в банаховом случае, в предположении монотонности и коэрцитивности операторов L_0, L_1 . Результаты представлены в работах [141, 145, 148, 149] и монографии [147].

В ряде работ Х. Гаевского, К. Грегера и К. Захариаса (см. [8]) рассматриваются вопросы локальной разрешимости для нелинейных уравнений псевдопараболического типа.

А.И. Кожанов (см. [34, 36, 38, 39]) рассмотрел уравнения математической физики составного типа, в частности, уравнения вида

$$A_0 \partial_t^{2m+1} u + Bu = f(x, t),$$

где A и B эллиптико-параболические операторы второго порядка. Рассматривались как линейные, так и квазилинейные задачи в пространствах Соболева W_2^s . В том числе рассматривались вопросы разрушения решений (доказательства основаны на принципе максимума).

Большое количество результатов, посвященных общей теории для уравнений соболевского типа было получено в работах Г.А. Свиридюка (см. библиографию в [155]). Рассматривалась задача Коши и близкие к ней задачи для операторно-дифференциальных уравнений вида

$$Lu_t(t) = Mu(t) + f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (18)$$

Можно также сослаться на классическую монографию [95], где были рассмотрены вопросы разрешимости абстрактных уравнений вида (18) в пространствах типа $C^\alpha(0, T; E)$ (E - банахово пространство) в случае, когда операторы L_0, L_1 или их области определения не зависят от времени. Большое количество близких результатов имеются также в работах Челябинской научной школы, где рассматривались как уравнения вида (18), так и более общие классы уравнений, имеющие высокий порядок по переменной t (см. [15, 16, 19, 20, 24, 26, 26, 29, 30, 48, 53, 54, 62, 109, 166]).

Большое количество математических моделей соболевского типа рассмотрено в монографии А.Г. Свешникова, А.Б. Альшина, М.О. Корпусова, Ю.Д. Плетнера [56]. Исследовались вопросы разрешимости краевых задач локально и глобально по времени. Для ряда задач получены двусторонние оценки времени разрушения решений. Кроме аналитических методов были предложены и реализованы численные методы решений конкретных задач.

В работе А.Л. Гладкова [11] доказана единственность решений задачи Коши для квазилинейного уравнения псевдопараболического типа

$$u_t = c\Delta u_t + \varphi(u)$$

где c – положительная постоянная, $\varphi(p) \in C^1(R_+)$ и имеет неотрицательную монотонно не убывающую производную. Единственность имеет место в классе неотрицательных функций $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}$, для которых выполняются неравенства

$$\varphi'(u(x, t)) \leq M_1(1 + |x|^2), \|u_t(x, t)\| \leq M_2(1 + |x|^2)^\beta \quad (\beta > 0)$$

Работа Е.Д. Бенедетто и М. Перье [85] посвящена доказательству принципа максимума для уравнений псевдопараболического типа.

С.И. Похожаева, Э. Митидиери и Г.Г. Лаптева [44, 50] в своих работах предлагают принципиально новый подход, называемый методом пробных функций.

В работе [100] рассматривается задача с начально-краевыми условиями для класса параболических или псевдопараболических уравнений вида:

$$u_t - a\Delta u_t - \Delta u + bu = k(t)|u|^{p-2}u, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T),$$

где $k(t) > 0$, $a \geq 0$, $b > -\lambda_1$ (λ_1 – собственное значение для оператора $-\Delta$).

Краевые задачи для псевдопараболических уравнений с незначаоопределенным или необратимым оператором при старшей производной по времени исследовались в книге И.Е. Егорова, С.Г. Пяткова, С.В. Попова [13].

Бликие к моделям описывающим распространение электромагнитных волн в анизотропных средах и при рассмотрении нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости, возникают в физике (модели фазового поля, теплоперенос) [86, 107], теории упругости (материалы с памятью) [6, 120] и во многих других областях. Наиболее полно рассмотрен

случай параболического (см. [43, 64, 70, 79–81, 86, 88, 102, 107, 121]) или гиперболического (см. [6, 120]) оператора L_0 в (12), причем рассмотрен и самый общий случай, когда $L_0 = \partial_t - A$ или $L_0 = \partial_t^2 - A$, где оператор A – генератор аналитической полугруппы (см., например, [79, 81, 88, 102]). Случай, когда L_0 эллиптичен рассматривался, по-видимому, только в одной работе [12] в случае одной пространственной переменной.

Задачи управления для уравнений соболевского типа рассматривались в работах А.В. Келлер, Н.А. Манаковой, С.А. Загребинной, А.В. Замышляевой, В.Е. Федорова (см., например, [21–23, 32, 48, 98]).

Не так много работ посвящено обратным задачам для уравнений соболевского типа. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений начали исследоваться в 1980-х гг. Первый результат, полученный В. Ранделлом [139], относится к обратным задачам восстановления функции источника $f = g(t)\varphi(x)$ в уравнении (10) с линейными операторами L и M , $L = M + I$. Он доказал глобальные теоремы существования и единственности для функции $\varphi(x)$, в случае финального условия переопределения и для функции $g(t)$, когда вместе с условием Дирихле на границе задается значение нормальной производной от решения в точке на границе области.

Другой тип обратных задач для (10) рассмотрен в работах [2, 69, 88, 89, 94, 96], где восстанавливается ядро в интегральном слагаемом в уравнении (10) с условием переопределения общего вида. В работах [114, 115] исследуются задачи об определении функции источника $f = f(x)$ или $f = f(t)$ по интегральному условию переопределения.

Работы [45, 124, 125] посвящены коэффициентным обратным задачам для уравнения (10), в которых рассматривалась обратная задача нахождения неизвестного коэффициента $k(t)$ в уравнении

$$u_t + (\eta Mu)_t + kMu = f$$

по интегральным данным на границе, где M – дифференциальный оператор второго порядка по пространственным переменным, η и f заданы.

В [127] доказана теорема единственности и построен алгоритм решения обратной задачи о нахождении функций $u(t, x)$, $b(y)$, $c(y)$ и константы a в уравне-

нии (10) вида

$$u_t - \Delta u = a\Delta u + b(y)u_y + c(y)u + \delta(t, x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0.$$

Аналогичная постановка приводится в работе [65], где определяется скалярная функция, зависящая от t и входящая в качестве множителя перед элементом данного банахового пространства в правую часть абстрактного уравнения уравнения соболевского типа. Близкая задача уже в случае обычного дифференциального уравнения (10) рассмотрена в работах [33, 49, 51, 113, 160], где используется интегральное условие переопределения (в последней работе $n = 1$ и дополнительно к данным Дирихле задается еще условие Неймана на одной из стенок прямоугольника). В работах [97, 99] восстанавливается уже элемент банахового пространства в уравнениях

$$Lu_t(t) = Mu(t) + qf(t), \quad t \in [0, T],$$

$$Pu(0) = u_0 \in \text{dom} M_1,$$

по интегральному условию переопределения.

Авторы в [52] относят некоторые классы обратных задач к подклассу задач прогноз-управления, которые подразумевают нахождение такого управляющего воздействия q на систему, чтобы на заданном промежутке времени состояние системы удовлетворяло, вообще говоря, нелокальному по времени требованию $\int_0^T u(t)d\mu(t) = u_T \in M$, которое можно считать условием наблюдения. Поскольку в этом условии содержится интеграл Стильтьеса, частным его случаем является, например, условие финального наблюдения $u(T) = u_T$, которое означает требование приведения управляемой системы в состояние u_T в момент времени T .

В работах [163, 164] рассмотрен вопрос об определении правой части в абстрактном аналоге уравнения Буссинеска – Лява

$$Lu_{tt}(t) = Mu_t(t) + M_0u = S(t)q(t) + f(t), \quad t \in [0, T],$$

где неизвестная функция q определяется при помощи условия вида $Cu(t) = \psi(t)$. Здесь предполагается, что старшая часть оператора не зависит от времени.

Можно отметить монографию [118], где также рассмотрены ряд модельных обратных задач для уравнений составного типа.

В работах [37, 61] рассмотрена обратная задача об определении граничных режимов по интегральному условию переопределения. В качестве основных пространств берется пространство Соболева W_p^s с $p = 2$.

В работах [129, 130] при $n = 1$ рассмотрена задача о восстановлении младшего коэффициента в псевдопараболическом уравнении и в уравнении Буссинеска – Лява в текущей постановке, т.е. переопределение является точечным. Построенное решение является классическим, т.е. принадлежит некоторому пространству непрерывных функций.

Отметим также работы [27, 106], где рассмотрен ряд обратных задач для уравнений соболевского типа. Получен ряд абстрактных результатов об определении неизвестной функции, зависящей от параметра t и входящей в младшую часть уравнения нелинейно. В частности сюда входят как задачи об определении функции источника, так и некоторые коэффициентные задачи (коэффициенты входят в младшую часть уравнения). В качестве приложений рассмотрены система Соболева, Осколкова, фазового поля и ряд других моделей. Рассмотрен случай интегральных условий переопределения, и в некоторых случаях (для системы Осколкова) рассмотрены и задачи с точечным переопределением. Отличие полученных результатов от представленных: в текущей работе неизвестные функции входят и в старшую часть уравнения, все коэффициенты зависят, в том числе и от времени (в работах Ивановой Н.Д. этого не предполагается), все рассмотрения проведены в пространствах Соболева (в работах Ивановой Н.Д. рассматриваются классические решения). Детально исследованы условия переопределения отличные от используемых в работе.

Среди работ, посвященных численному решению прямых задач для математических моделей, описываемых уравнениями соболевского типа выделим работы П.Н. Вабишевича, М.Х. Бешкокова, А. Гуензани-Лакода, И. Амиралли, Г.А. Свиридюка, А.А. Замышляевой, А.О. Кондюкова, С.А. Загребинной и др. (см. результаты и библиографию в [18, 22, 25, 31, 32, 58, 68, 74, 75, 82, 87, 101, 116, 123, 157, 159, 162, 167]). В основном были рассмотрены некоторые модельные задачи. Например, в работах [77, 78] построены численные методы для решения уравнения

$$u_t + \Delta^2 u_t = \nabla \cdot f(u), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T_0]$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

и граничными условиями

$$u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T_0]$$

Здесь впервые для подобных уравнений с несколькими пространственными переменными обсуждается метод конечных элементов по времени и получены оптимальные оценки погрешности в L^2 , H^1 и H^2 нормах для соответствующих решений. Также предложены несколько полных дискретных схем, таких как обратный метод Эйлера, метод Кранка-Николсона и двойной метод обратной оценки.

Численное решение обратной задачи для математических моделей фильтрации в упруго-деформируемой пористой среде (определения дебитов скважин по заданным забойным давлениям) было реализовано в работе [4]. Постановка задачи совпадает с формулировкой задачи об определении правой части в моделях фильтрации, условия переопределения также совпадают, только сама модель является более простой и основана на параболическом уравнении для давления.

Примеров численного решения обратных задач для уравнений соболевского типа в литературе немного (см. например, работы А. Хасан, А.Л. Бухгейма [76, 103]).

Отметим ряд работ и монографий, где получены существенные результаты по теории обратных задач для уравнений математической физики [28, 73, 104, 105, 134]. В частности, для параболических уравнений и систем обратная задача в той же постановке была рассмотрена в [135–137].

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертационного исследования носят теоретический и практический характер. В рамках теоретической значимости впервые проведено исследование вопросов разрешимости, единственности, получены оценки устойчивости для решений обратных задач фильтрации и гидродинамики, в частности для модели Баренблатта – Желтова – Кочиной и Буссинеска – Лява, исследованы вопросы корректности и математической модели квазистационарных электромагнитных волн в анизотропных средах нестационарных внутренних волн в

несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости Получены условия корректности в терминах данных задачи. Теоретические результаты работы развивают теорию обратных задач для уравнений соболевского типа. Приведенные схемы определения решения являются конструктивными и могут быть использованы при построении численных методов для нахождения решения.

В рамках практической значимости построены численные методы решения обратных задач об определении правой части (функции источников) и коэффициента пьезопроводности для уравнения фильтрации и обратных задач об определении параметров среды в математических моделях квазистационарных электромагнитных волн в анизотропных средах и нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости. На основе построенных численных алгоритмов разработаны комплексы программ и проведены вычислительные эксперименты. Программы построены в среде Матлаб. Результаты, полученные при исследовании данных математических моделей, могут быть полезны в теории фильтрации и гидродинамике, физике. Представленные результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют об адекватности проведенного математического моделирования и эффективности выбранного численного метода решения обратных задач, что создает основу для дальнейшего развития численных исследований моделей соболевского типа.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе проведены исследования обратных задач для математических моделей теории фильтрации и гидродинамики соболевского типа. Исследование сводится к рассмотрению вопросов корректности обратных задач для уравнений соболевского типа вида (1), (5), (12). В качестве функциональных пространств используются пространства С.Л. Соболева. Задачи приводятся к операторному уравнению с ограниченным нелинейным оператором в подходящем функциональном пространстве. Далее анализируются свойства этого оператора, выводятся необходимые априорные оценки и используется теорема о неподвижной точке. В качестве численных методов используются комбинации метода конечных элементов и конечных разностей, а также идеи схемы предиктор-корректор.

Основные положения, выносимые на защиту:

- *в рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей:* аналитически исследованы обратные задачи с точечными условиями переопределения об определении функции источника и параметров среды для математических моделей фильтрации и гидродинамики и обратные задачи с условиями переопределения общего вида для математических моделей квазистационарных электромагнитных волн в анизотропных средах и нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости
- *в рамках разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий:* на основе полученных теоретических результатов разработаны алгоритмы и эффективные численные методы для нахождения неизвестных коэффициентов и источников в задачах фильтрации и задачах определения параметров среды в математических моделях квазистационарных электромагнитных волн и нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости
- *в рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента:* разработаны программные комплексы, основанные на пакете математических вычислений Матлаб, проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие эффективность предложенных алгоритмов и адекватность проведенного моделирования.

Степень достоверности результатов:

Полученные результаты подтверждаются строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, согласием между теоретическими положениями и результатами вычислительных экспериментов, приведённых в данной работе и исследованиями других авторов, согласованием результатов вычислительных экспериментов с модельными примерами. Все результаты, выносимые на защиту опубликованы и получены автором лично.

Апробация работы

Основные положения и результаты диссертационной работы обсуждались на научных семинарах Югорского и Южно-Уральского государственных университетов, а также на 9-и научных и научно-практических конференциях:

- 52-ая Международная научная студенческая конференции МНСК-2014 (Новосибирск 2014).
- Международная конференция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», посвящённая 70-летию со дня рождения В. Н. Врагова (Улан-Удэ 2015).
- Международная школа конференция «Соболевские чтения» (Новосибирск 2016).
- Международная конференция по математическому моделированию МКММ-2017 (Якутск 2017).
- Международная конференция «Понтрягинские чтения - XXIX» (Москва 2018).
- Международная научно-практическая конференция «ИНФО-2018» (Сочи 2018).
- Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (Стерлитамак, 2018).
- Всероссийская научная конференция с международным участием «ИТИС-2019» (Ханты-Мансийск 2019).
- Российско-французский семинар «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (Ханты-Мансийск 2019).

Краткое содержание диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 168 страниц. Список литературы содержит 185 наименований. Опишем содержание работы.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, проведен анализ литературы по указанной тематике, сформулированы цели и задачи работы. Также в данной части работы сформулированы положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробация результатов диссертационной работы.

В **первой главе** приводятся вспомогательные утверждения, на которые в дальнейшем опираются основные результаты.

Вторая глава состоит из 6 параграфов, в которой рассматриваются обратные задачи (10), (11). В первом параграфе рассматривается задача об определении вместе с решением u неизвестной правой части уравнения:

$$Lu_t + Mu = f, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (19)$$

где L – эллиптический оператор второго порядка, а M – дифференциальный оператор не более, чем второго порядка по переменным x и G – ограниченная область в $R^n (n \geq 1)$ с границей $\Gamma \in C^2$. Уравнение дополняется краевыми и начальными условиями:

$$Ru|_S = \varphi, \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad (20)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (21)$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x, t)u_{x_i} + \sigma(x, t)u$. В качестве условий переопределения рассматриваются значения решения u в отдельных точках. То есть условия переопределения имеют вид

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (22)$$

где x_i произвольные точки лежащие в G .

Пусть L и M операторы второго порядка.

$$Lu = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m a_i(x, t)u_{x_i} + a_0(x, t)u,$$

$$Mu = \sum_{i,j=1}^m b_{ij}(x, t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x, t)u_{x_i} + b_0(x, t)u,$$

$$f_i \in L_\infty(0, T; L_p(G)) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Пусть правая часть в (10) имеет вид:

$$f = \sum_{i=1}^m c_i(t)f_i(x, t) + f_0(x, t), \quad (23)$$

где функции f_i даны и $c_i(t)$ подлежат определению с использованием условий (4).

Условия на коэффициенты операторов L, M . фиксируем параметр $p > n$ и предполагаем, что

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in C(\overline{Q}), \quad b_{ij} \in L_\infty(Q), \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \\ a_i, a_0 &\in C([0, T]; L_p(G)), \\ b_i, b_0 &\in L_p(Q). \end{aligned} \quad (24)$$

$$\partial_t^k \gamma_i, \partial_t^k \sigma \in L_\infty(0, T; C^1(\bar{\Gamma})), \quad k \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i n_i \geq \delta_1 > 0 \quad \forall (x, t) \in S, \quad (25)$$

$$\gamma_t, \sigma_t \in C^{1/2,1}(\bar{S}) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (26)$$

где n – единичный вектор внешней нормали к Γ и δ_1 – некоторая положительная постоянная.

$$\begin{aligned} a_0 \leq 0 \text{ п.в. в } Q \text{ в случае условий Дирихле и } a_0 \leq 0 \text{ п.в. в } Q \\ \text{и } a_0 < 0 \text{ п.в. в некоторой окрестности} \\ \text{границы } S \text{ и } \sigma \geq 0 \text{ на } S \text{ в случае условий с косой производной.} \end{aligned} \quad (27)$$

Условия согласования:

$$\varphi(x, 0)|_\Gamma = R(0)u_0(x)|_\Gamma, \quad \psi_i(0) = u_0(x_i), \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (28)$$

Условия корректности. Построим матрицу B с элементами $b_{ij} = L^{-1}f_i(x_j, t)$ и пусть существует $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det B| \geq \delta_0 \quad \text{для п.в. } t \in [0, T], \quad (29)$$

где $L^{-1}f_i$ есть решение u_i задачи: $Lu = f_i, \quad Ru|_S = 0$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть коэффициенты операторов L, M удовлетворяют условиям (24), и дополнительно условиям (25) – (27) в случае краевых условий с косой производной, выполнены условия (28), (29) и

$$f_0 \in L_p(Q), \quad f_i \in L_\infty(0, T; L_p(G)), \quad u_0(x) \in W_p^2(G),$$

$$\varphi \in W_p^1(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma)), \quad \psi_i \in W_p^1(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad p > n,$$

Тогда решение задачи (19), (20), (21), (22), (23) существует и единственно и

$$u \in W_p^1(0, T; W_p^2(G)), \quad c_i(t) \in L_p(0, T), \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Решение $(u, c_1, \dots, c_m)$ удовлетворяет оценке:

$$\|u\|_{W_p^1(0, T; W_p^2(G))} + \sum_{i=1}^m \|c_i(t)\|_{L_p(0, T)} \leq c(\|f_0\|_{L_p(Q)})$$

$$+ \|\varphi\|_{W_p^1(0,T;W_p^{s_0}(\Gamma))} + \sum_{i=1}^m \|\psi_i\|_{W_p^1(0,T)} + \|u_0\|_{W_p^2(G)},$$

где постоянная c не зависит от функций f_0, φ, ψ_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

Во втором параграфе рассматривается обратная задача об определении неизвестных функций, которые входят как в правую часть уравнения, так и в сам оператор как коэффициенты. Задача в этом случае является нелинейной.

Пусть правая часть в (10) имеет вид

$$f = \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t) f_i(x, t) + f_0(x, t), \quad f_i \in L_\infty(0, T; L_p(G)) \quad (i = 1, 2, \dots, r_0), \quad (30)$$

где функции f_i даны. Часть коэффициентов оператора M зависящих от t считаются неизвестными, и оператор M имеет вид:

$$Mu = M_{r_0}u + \sum_{k=r_0+1}^r c_k(t) M_k u, \\ M_k u = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^k(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^k(x, t) u_{x_i} + b_0^k(x, t) u.$$

Оператор L имеет такой же вид как и в предыдущем параграфе:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) u_{x_i} + a_0(x, t) u,$$

Фиксируем параметр $p > n$ и предположим, что

$$b_{ij}^k \in L_\infty(Q), \quad b_i^k, b_0^k \in L_\infty(0, T; L_p(G)) \quad (k = r_0 + 1, \dots, r), \quad (31)$$

$$b_{ij}^{r_0} \in L_p(0, T; L_\infty(G)), \quad b_i^{r_0}, b_0^{r_0} \in L_p(Q), \quad (32)$$

$$a_{ij} \in C(\overline{Q}), \quad a_i, a_0 \in C([0, T]; L_p(G)) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (33)$$

$$a_0 \leq 0 \text{ п.в. в } Q \text{ в случае условий Дирихле и } a_0 \leq 0 \text{ п.в. в } Q \\ \text{и } a_0 < 0 \text{ п.в. в некоторой окрестности} \quad (34)$$

границы S и $\sigma \geq 0$ на S в случае условий с косой производной.

В случае краевых условия с косой производной требуем, чтобы

$$\partial_t^k \gamma_i, \partial_t^k \sigma \in L_\infty(0, T; C^1(\overline{\Gamma})), \quad k \leq 1, \\ \sum_{i=1}^n \gamma_i n_i \geq \delta_1 > 0 \quad \forall (x, t) \in S, \quad (35)$$

Условия согласования:

$$\alpha_i(0) = u_0(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad R(0)u_0|_{\Gamma} = \varphi(x, 0). \quad (36)$$

Задача состоит в нахождении решения уравнения (10), т.е. уравнения

$$Lu_t + Mu = f, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (37)$$

удовлетворяющего краевым и начальным условиям

$$Ru|_S = \varphi, \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad (38)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad (39)$$

и условиям переопределения

$$u(x_i, t) = \alpha_i(t), \quad \alpha_i(t) \in W_p^1(0, T), \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (40)$$

где x_i произвольные точки лежащие в G , и нахождении функций $c_i(t)$.

Построим функцию $\Phi \in C([0, T]; W_p^2(G))$ ($p > n$) такую, что

$$\begin{aligned} \Phi &\in W_p^1(0, T; W_p^2(G)), \\ \Phi|_{t=0} &= u_0(x), \quad R(t)\Phi|_S = \varphi. \end{aligned} \quad (41)$$

Построим матрицу B со строками

$$L^{-1}f_1(x_j, t), L^{-1}f_2(x_j, t), \dots, L^{-1}f_{r_0}(x_j, t), -L^{-1}M_{r_0+1}\Phi(x_j, t), \dots, -L^{-1}M_r\Phi(x_j, t),$$

где $j = 1, 2, \dots, r$, и предположим, что существуют постоянные $\delta_0 > 0$, $\tau_0 > 0$ такие, что

$$|\det B| \geq \delta_0 \quad \text{для п.в. } t \in [0, \tau_0]. \quad (42)$$

Здесь $L^{-1}f_i$ есть решение u_i задачи:

$$Lu_i = f_i, \quad u_i|_{t=0} = 0, \quad R(t)u_i|_S = 0.$$

В этом случае, локально по времени, условие (42) от выбора функции Φ не зависит.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (31) – (36), (42) и

$$f_0 \in L_p(Q), \quad f_i \in L_\infty(0, T; L_p(G)), \quad u_0(x) \in W_p^2(G),$$

$$\varphi \in W_p^1(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma)), \quad \alpha_i \in W_p^1(0, T), i = 1, 2, \dots, r, \quad p > n,$$

где $s_0 = 2 - 1/p$ в случае условий Дирихле и $s_0 = 1 - 1/p$ в противном случае. Тогда найдется постоянная $\gamma_0 > 0$ такая, что на промежутке $[0, \gamma_0]$ решение $(u, c_1, \dots, c_r)$ задачи (37) – (40), (30) существует и единственно и

$$u \in C([0, \gamma_0]; W_p^2(G)), u_t \in L_p([0, \gamma_0]; W_p^2(G)),$$

$$c_i(t) \in L_p(0, \gamma_0) \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

В третьем параграфе рассматривается линейная обратная задача для уравнений соболевского типа 4 порядка. Рассматривается задача об определении вместе с решением u неизвестной правой части и коэффициентов в уравнении:

$$L_0 u_{tt} + L_1 u_t + L_2 u = f, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (43)$$

где, L_i ($i = 0, 1, 2$) – операторы второго порядка по переменным x , G – ограниченная область в R^n ($n \geq 1$) с границей $\Gamma \in C^2$. Уравнение дополняется краевыми и начальными условиями:

$$R(t)u|_S = \varphi, \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad (44)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x). \quad (45)$$

Задача состоит в определении неизвестной правой части f , зависящей от времени по заданным условиям переопределения, в качестве которых мы рассматриваем значения решения u в отдельных точках. Таким образом, условия переопределения имеют вид

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (46)$$

где x_i произвольные точки лежащие в G .

Предполагается ниже, что $\Gamma \in C^2$ и считаем, что операторы L_k ($k = 0, 1, 2$) имеют вид

$$L_k u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i^k(x, t) u_{x_i} + a_0^k(x, t) u,$$

где все коэффициенты вещественны, а оператор L_0 предполагается эллиптическим, т.е. существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 \xi_i \xi_j \geq \delta_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in R^n, \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}.$$

Фиксируем параметр $p > n$ (для простоты) и предположим, что

$$\begin{aligned} a_{ij}^0 &\in C(\overline{Q}), \quad a_i^0, a_0^0 \in C([0, T]; L_p(G)), \\ a_{ij}^k &\in L_p(0, T; L_\infty(G)), \quad a_i^k, a_0^k \in L_p(Q) \\ &(i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2). \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} a_0^0 &\leq 0 \text{ п.в. в } Q \text{ в случае условий Дирихле и } a_0^0 \leq 0 \text{ п.в. в } Q \\ &\text{и } a_0^0 < 0 \text{ п.в. в некоторой окрестности} \\ &\text{границы } S \text{ и } \sigma \geq 0 \text{ на } S \text{ в случае условий с косой производной.} \end{aligned} \quad (48)$$

В случае краевых условия с косой производной требуем, чтобы

$$\partial_t^k \gamma_i, \partial_t^k \sigma \in L_\infty(0, T; C^1(\overline{\Gamma})), \quad k \leq 2, \quad \left| \sum_{i=1}^n \gamma_i n_i \right| \geq \delta_1 > 0 \quad \forall (x, t) \in S, \quad (49)$$

Пусть правая часть в (43) имеет вид:

$$f = \sum_{i=1}^m c_i(t) f_i(x, t) + f_0(x, t), \quad (50)$$

где функции $f_i \in L_\infty(0, T; L_p(G))$ даны и $c_i(t)$ подлежат определению с использованием условий (46).

Условия согласования:

$$\begin{aligned} \psi_i(0) &= u_0(x_i), \quad \psi_{it}(0) = u_1(x_i), \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \varphi(x, 0) &= R(0)u_0(x), \\ \varphi_t(x, 0) &= R(0)u_1(x) + R_t(0)u_0(x), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (51)$$

Условия корректности. Пусть B матрица с элементами $b_{ij} = L_0^{-1} f_i(x_j, t)$ и пусть существует $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det B| \geq \delta_0 \quad \text{для п.в. } t \in [0, T], \quad (52)$$

где $L_0^{-1}f_i$ есть решение u_i задачи: $L_0u_i = f_i$, $R(t)u_i|_S = 0$.

Рассматривается задача (43) – (46), (50) считая, что операторы L_i удовлетворяют вышеприведенным условиям.

Теорема 3. Пусть коэффициенты операторов L_i ($i = 0, 1, 2$) удовлетворяют условиям (47), (48), (49), выполнены условия согласования (51), условия корректности (52) и

$$f_0 \in L_p(Q), \quad f_i \in L_\infty(0, T; L_p(G)), \quad U_j(x) \in W_p^2(G) \quad (j = 0, 1),$$

$$\varphi \in W_p^2(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma)),$$

$$\psi_i \in W_p^2(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad p > n.$$

Тогда существует единственное решение задачи (43) – (46), (50) такое, что:

$$u, u_t \in C([0, T]; W_p^2(G)), \quad u_{tt} \in L_p(0, T; W_p^2(G)), \quad c_i(t) \in L_p(0, T), \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

В четвертом параграфе рассматривается то же уравнение, что и в предыдущем параграфе, т.е.

$$L_0u_{tt} + L_1u_t + L_2u = f, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (53)$$

где, L_i ($i = 0, 1, 2$) – операторы второго порядка по переменным x , G – ограниченная область в R^n ($n \geq 1$) с границей $\Gamma \in C^2$. Уравнение дополняется краевыми и начальными условиями:

$$R(t)u|_S = \varphi, \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad (54)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x). \quad (55)$$

Задача состоит в определении неизвестной правой части f и коэффициентов уравнения (53), зависящих от времени по заданным условиям переопределения, в качестве которых мы рассматриваем значения решения u в отдельных точках. Таким образом, условия переопределения имеют вид

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, r_2), \quad (56)$$

где x_i произвольные точки лежащие в G . Правая часть в уравнении (53) имеет вид:

$$f = \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t) f_i(x, t) + f_0(x, t), f_i \in L_\infty(0, T; L_p(G)) \quad (i = 1, 2, \dots, r_0), \quad (57)$$

где функции f_i даны и $c_i(t)$ подлежат определению. Пусть также операторы L_s ($s = 0, 1, 2$) имеют вид

$$\begin{aligned} L_0 u &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i^0(x, t) u_{x_i} + a_0^0(x, t) u, \\ L_s u &= L_{0s} u + \sum_{k=r_{s-1}+1}^{r_s} c_k(t) L^k u, \quad s = 1, 2 \\ L^k u &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i^k(x, t) u_{x_i} + a_0^k(x, t) u, \\ L_{0s} u &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{0s}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i^{0s}(x, t) u_{x_i} + a_0^{0s}(x, t) u. \end{aligned}$$

Это возможно, что правая часть f не содержит неизвестных функций c_i . Полагаем в этом случае, что $r_0 = 0$ и $f = f_0$ – известная функция. Также возможно, что оператор L_1 не содержит неизвестных функций c_i . Полагаем в этом случае, что $r_1 = r_0$, $L_1 = L_{01}$ – известный оператор. Считаем, что либо оператор L_1 , либо оператор L_2 содержит неизвестные коэффициенты, поскольку противоположный случай был рассмотрен в предыдущем параграфе. В случае, если все коэффициенты оператора L_2 известны, полагаем $r_2 = r_1$ и тогда $L_2 = L_{02}$ – известный оператор. Условия на коэффициенты уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} a_{ij}^0 &\in C(\overline{Q}), \quad a_i^0, a_0^0 \in C([0, T]; L_p(G)), \\ a_{ij}^k &\in L_\infty(Q), \quad a_i^k, a_0^k \in L_\infty(0, T; L_p(G)) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, r_2), \\ a_{ij}^{0s} &\in L_p(0, T; L_\infty(G)), \quad a_i^{0s}, a_0^{0s} \in L_p(Q) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2). \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} a_0^0 &\leq 0 \text{ п.в. в } Q \text{ в случае условий Дирихле и } a_0^0 \leq 0 \text{ п.в. в } Q \\ &\text{и } a_0^0 < 0 \text{ п.в. в некоторой окрестности} \end{aligned} \quad (59)$$

границы S и $\sigma \geq 0$ на S в случае условий с косой производной.

В случае краевых условия с косой производной требуем, чтобы

$$\partial_t^k \gamma_i, \partial_t^k \sigma \in L_\infty(0, T; C^1(\overline{\Gamma})), \quad k \leq 2, \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i n_i \geq \delta_1 > 0 \quad \forall (x, t) \in S, \quad (60)$$

Условия согласования:

$$\begin{aligned} \psi_i(0) &= u_0(x_i), \quad \psi_{it}(0) = u_1(x_i), \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \varphi(x, 0) &= R(0)u_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = R(0)u_1(x) + R_t(0)u_0(x), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (61)$$

Пусть функция $\Phi \in C^1([0, T]; W_p^2(G))$ ($p > n$) такова, что $\Phi_{tt} \in L_p(0, T; W_p^2(G))$, $\Phi|_{t=0} = u_0(x)$, $\Phi_t|_{t=0} = u_1(x)$, $\Phi|_S = \varphi$. Построим матрицу B , j -я строка которой имеем вид

$$\begin{aligned} &L_0^{-1}f_1(x_j, t), L_0^{-1}f_2(x_j, t), \dots, L_0^{-1}f_{r_0}(x_j, t), -L_0^{-1}L^{r_0+1}\Phi_t(x_j, t), \dots, \\ &-L_0^{-1}L^{r_1}\Phi_t(x_j, t), -L_0^{-1}L^{r_1+1}\Phi(x_j, t), \dots, -L_0^{-1}L^{r_2}\Phi(x_j, t), \quad j = 1, 2, \dots, r_2, \end{aligned}$$

и предположим, что существует $\delta_0 > 0$, $\tau_0 > 0$ такие, что

$$|\det B| \geq \delta_0 \quad \text{для п.в. } t \in [0, \tau_0], \quad (62)$$

где $L_0^{-1}f_i$ есть решение u_i задачи $L_0u_i = f_i$, $R(t)u_i|_S = 0$. Легко показать, что локально по времени условие (62) не зависит от выбора функции Φ .

Теорема 4. Пусть выполнены условия (58) – (62) и

$$f_0 \in L_p(Q), \quad f_i \in L_\infty(0, T; L_p(G)), \quad u_j(x) \in W_p^2(G) \quad (j = 0, 1),$$

$$\varphi, \varphi_t, \varphi_{tt} \in L_p(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma)),$$

$$\psi_i \in W_p^2(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, r_2, \quad p > n.$$

Тогда существует постоянная $\gamma_0 > 0$ такая, что на промежутке $[0, \gamma_0]$ существует единственное решение $(u, c_1, \dots, c_{r_2})$ задачи (53) – (56) такое, что

$$u, u_t \in C([0, \gamma_0]; W_p^2(G)), \quad u_{tt} \in L_p([0, \gamma_0]; W_p^2(G)),$$

$$c_i(t) \in L_p(0, \gamma_0) \quad (i = 1, 2, \dots, r_2).$$

В пятом параграфе описывается алгоритм численного решения коэффициентных обратных задач и задач об определении функции источника для математических моделей фильтрации. Он основан на способе построения приближённого решения в теоремах существования. Кроме того, используется соответствующая

теорема об устойчивости решений соответствующих обратных задач. Считается, что условия, при выполнении которых обратная задача корректна выполнены. Приведенный алгоритм использует некоторые интегральные тождества. Вначале используется метод конечных элементов, сводя прямую задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Система решается с помощью метода конечных разностей (неявная схема). Обратная задача решается с помощью специальной итерационной процедуры.

В шестом параграфе описан комплекс программ, реализующий алгоритмы численного решения коэффициентных обратных задач об определении функции источника или коэффициента пьезопроводности для математических моделей фильтрации, приведены и описаны основные блок-схемы алгоритма. Программа позволяет численно решать не только обратные задачи теории фильтрации, но и обратные задачи для более общих классов уравнений третьего порядка. Приводятся результаты численных экспериментов и их сравнение при различных входных данных.

В **третьей главе** рассматриваются математические модели, описывающие процессы распространения электромагнитных волн в анизотропных средах и нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости. Приводятся основные результаты и доказательства. Глава состоит из 5 параграфов.

В первом параграфе описываются математические модели, для уравнений нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости (уравнение распространения электромагнитных волн в анизотропных средах). При помощи дифференцирования по времени задача сводится к нелинейной обратной задаче с интегральным слагаемым для уравнения составного типа третьего порядка, которое затем исследуется. Второй параграф содержит ряд вспомогательных построений и результатов.

В третьем параграфе доказывается основная теорема о корректности поставленной задачи в целом по времени. Рассматриваются обратные задачи об определении коэффициентов k_i для общих уравнений вида

$$L_0 u + \sum_{i=1}^m \kappa_i * L_i(x, t) u = f, \quad (63)$$

где

$$L_k u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i^k(x, t) u_{x_i} + a_0^k(x, t) u, \\ (x, t) \in Q = G \times (0, T), G \subset \mathbb{R}^n.$$

Уравнение дополняется условиями переопределения

$$\Psi_j(u)(t) = \psi_j(t), \quad (64)$$

где Ψ_i – некоторые функционалы.

Краевые условия:

$$Ru|_S = g(x, t), \quad S = \partial G \times (0, T), \quad (65)$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x, t) u_{x_i} + \sigma(x, t) u$.

Считаем, что все коэффициенты операторов L_k ($k = 0, 1, \dots, m$) вещественны, а оператор L_0 предполагается эллиптическим, т.е. существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая что:

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}^0 \xi_i \xi_j \geq \delta_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}.$$

Фиксируем параметр $p > n$ (для простоты) и предположим, что

$$a_{ij}^0 \in C(\overline{Q}), \quad a_i^0, a_0^0 \in C([0, T]; L_p(G)), \quad a_{ijt}^0, a_{ijt}^k \in L_p(0, T; L_\infty(G)), \\ a_{ij}^k \in L_\infty(Q), \quad a_i^k, a_0^k \in L_\infty(0, T; L_p(G)), \quad a_{0t}^k, a_{it}^k \in L_p(Q) \\ (i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m), \\ \gamma_i, \gamma_{it}, \sigma, \sigma_t \in C([0, T]; C^1(\overline{\Gamma})) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (66)$$

$a_0 \leq 0$ п.в. в Q в случае условий Дирихле и $a_0 \leq 0$ п.в. в Q

и $a_0 < 0$ п.в. в некоторой окрестности

границы S и $\sigma \geq 0$ на S в случае условий с косой производной.

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i n_i \geq \delta_1 > 0 \quad \forall (x, t) \in S,$$

где $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_n)$ – единичный вектор внешней нормали к S .

Условия корректности. Пусть B матрица с элементами $b_{ij} = \Psi_i(L_0^{-1} L_j(x, 0) u_0(x))$ и существует $\delta_2 > 0$ такая, что

$$|\det B| \geq \delta_2 \quad \forall t \in [0, T], \quad (67)$$

где $L_0^{-1}f$ есть решение v_0 задачи: $L_0v_0 = f$, $Bv_0|_\Gamma = 0$.

Считаем, что функционалы Ψ_j удовлетворяют условиям

$$\Psi_j \in L(W_p^2(G), \mathbb{R}), \quad \Psi_j(u_0) = \psi_j(0), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (68)$$

и, таким образом, $\Psi_j \in (W_p^2(G))^*$. Пусть A, B – банаховы пространства. Тогда $L(A, B)$ – пространство линейных непрерывных операторов, определенных на A со значениями в B .

Используя краевые условия (3), получим

$$Ru_0(x) = g(x, 0). \quad (69)$$

Используя условия (4), получим необходимое условие разрешимости

$$\Psi_j(u_0(x)) = \psi_j(0) \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (70)$$

Построим вспомогательную функцию $\Phi(x, t) \in C([0, T]; W_p^2(G))$ такую, что $\Phi_t \in L_p(0, T; W_p^2(G))$, $B\Phi|_S = g(x, t)$, $\Phi(x, 0) = u_0(x)$.

Теорема 5. Пусть $f, f_t \in L_p(Q)$, выполнены условия (66)–(70), $g \in C([0, T]; W_p^{s_0}(\Gamma))$, $g_t \in L_p(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma))$ ($p > n$), $\psi_j \in W_p^1(0, T)$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Тогда существует единственное решение задачи (63) – (65) такое, что $u_t \in L_p(0, T; W_p^2(G))$, $u \in C([0, T]; W_p^2(G))$, $k_i \in L_p(0, T)$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Для любых двух решений $(u_1, \vec{k}_1), (u_2, \vec{k}_2)$ задачи (63) – (65) отвечающим данным $f_i, g_i, \vec{\psi}_i$ ($i = 1, 2$) и удовлетворяющих условиям теоремы, справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|u_1 - u_2\|_{C([0, T]; W_p^2(G))} + \|u_{1t} - u_{2t}\|_{L_p(0, T; W_p^2(G))} + \sum_{i=1}^m \|k_1 - k_2\|_{L_p(0, T)} \\ & \leq c(\|f_1 - f_2\|_{W_p^1(0, T; L_p(G))} + \|g_1 - g_2\|_{L_p(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma))} + \|\vec{\psi}_1 - \vec{\psi}_2\|_{W_p^1(0, T)}), \end{aligned} \quad (71)$$

где переменная c зависит, в частности, от нормы данных в соответствующих пространствах и констант в условиях (68).

В четвертом параграфе описывается алгоритм численного решения задачи. Приводится описание численного алгоритма, основанного на методе конечных элементов, для модельного уравнения в случае краевых условий Дирихле при $m = 2$. Рассматривается уравнение

$$\Delta u + \int_0^t \sum_{m=1}^2 p_m(s) u_{x_m x_m}(t - s) ds = f(x, t), \quad (72)$$

в области $Q = G \times (0, T)$, $x = (x_1, x_2) \in G \subset R^2$, $t \in [0, T]$.

В пятом параграфе описывается программа численного определения параметров среды в математических моделях квазистационарных электромагнитных волн, реализующая алгоритм предложенный в четвертом параграфе. Приведены и описаны основные блок-схемы алгоритма, рассмотрены результаты численных экспериментов и их сравнение при различных входных данных.

В **заключении** изложены основные выводы, обсуждаются перспективы дальнейшей разработки темы и возможные приложения к практическим задачам.

Публикации

Результаты по теме диссертации изложены в 17 печатных изданиях [169–185], 6 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [169–174], в том числе три в изданиях, входящих в системы цитирования SCOPUS и Web of Science, два свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ, 8 — в тезисах докладов [177–185]. В совместных с научным руководителем работах научному руководителю принадлежит постановка задачи, в диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором и не затрагивают интересы соавторов.

Благодарности. Автор выражает искреннюю и глубокую благодарность своему научному руководителю Пяткову Сергею Григорьевичу за постановку задачи, постоянную поддержку и внимание к работе, чуткое руководство, ценные советы и консультации; Сафонову Егору Ивановичу за ценные советы по построению численного алгоритма.

ГЛАВА 1

Вспомогательные результаты

В данной главе приводятся вспомогательные утверждения, которые используются в доказательствах основных результатов диссертации. Стоит отметить, что в литературе нужных теорем о разрешимости прямых задач не нашлось. Поэтому эти теоремы приводятся с доказательствами.

Пусть L – оператор второго порядка

$$Lu = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m a_i(x, t) u_{x_i} + a_0(x, t) u,$$

где $x \in G \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (0, T)$, G – ограниченная область в границей $\Gamma \in C^2$. Пусть $S = \Gamma \times (0, T)$, $Q = G \times (0, T)$. Оператор L предполагается эллиптическим, т.е. найдется $\delta_0 > 0$ такая что:

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \delta_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (x, t) \in \bar{Q}.$$

Предполагается, что

$$a_{ij} \in C(\bar{Q}), \quad a_i, a_0 \in C([0, T]; L_p(G)), \quad p > n, \quad (1.1)$$

$$\gamma_i, \sigma_i \in C([0, T]; C^1(\bar{\Gamma})) \quad (i = 1, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i n_i \geq \delta_1 > 0 \quad \forall (x, t) \in S, \quad (1.2)$$

$$a_{ij} \in W_p^l(0, T; L_\infty(G)), \quad a_0, a_i \in W_p^l(0, T; L_p(G)) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad l = 1, 2. \quad (1.3)$$

$$\partial_t^k \gamma_i, \partial_t^k \sigma_i \in L_\infty(0, T; C^1(\bar{\Gamma})) \quad (i = 1, \dots, n), \quad \forall k \leq l. \quad (1.4)$$

где n – единичный вектор внешней нормали к Γ и δ_1 – некоторая положительная постоянная.

Условие A_0 . $a_0 \leq 0$ п.в. в Q в случае условий Дирихле и $a_0 \leq 0$ п.в. в Q и $a_0 < 0$ п.в. в некоторой окрестности границы S и $\sigma \geq 0$ на S в случае условий с косой производной.

Теорема 1. Пусть выполнены условия A_0 , (1.1) в случае условий Дирихле и условия A_0 , (1.1), (1.2) в случае условий с косой производной. Задача с параметром $t \in [0, T]$

$$L(t)u = f(x, t), \quad R(t)u|_\Gamma = g(x, t), \quad (1.5)$$

для всех функций $f(x, t), g(x, t)$, определенных при каждом (или п.в.) $t \in [0, T]$ и таких, что $f(x, t) \in L_p(G)$ ($p > n$), $g(x, t) \in W_p^{s_0}(\Gamma)$ при каждом или п.в. $t \in [0, T]$ ($s_0 = 2 - 1/p$ в случае задачи Дирихле и $s_0 = 1 - 1/p$ в случае задачи с косой производной) имеет единственное решение $u(x, t) \in W_p^2(G)$ при каждом или п.в. $t \in [0, T]$ и справедлива оценка:

$$\|u\|_{W_p^2(G)} \leq c(\|f\|_{L_p(G)} + \|g\|_{W_p^{s_0}(\Gamma)}),$$

где постоянная c не зависит от $f, g, t \in [0, T]$.

Следствие 1.1. Как непосредственное следствие утверждения теоремы имеем, что если дополнительно $f(x, t) \in C([\alpha, \beta]; L_p(G))$, $g(x, t) \in C([\alpha, \beta]; W_p^{s_0}(\Gamma))$ ($0 \leq \alpha < \beta \leq T$), то задача (1.5) имеет единственное решение $u \in C([\alpha, \beta]; W_p^2(G))$ и справедлива оценка:

$$\|u\|_{C([\alpha, \beta]; W_p^2(G))} \leq c(\|f\|_{C([\alpha, \beta]; L_p(G))} + \|g\|_{C([\alpha, \beta]; W_p^{s_0}(\Gamma))}),$$

где постоянная c не зависит от f, g, α, β . Аналогично, если дополнительно $f(x, t) \in L_p(\alpha, \beta; L_p(G))$, $g(x, t) \in L_p(\alpha, \beta; W_p^{s_0}(\Gamma))$ ($0 \leq \alpha < \beta \leq T$), то задача (1.5) имеет единственное решение $u \in L_p(\alpha, \beta; W_p^2(G))$ и справедлива оценка:

$$\|u\|_{L_p(\alpha, \beta; W_p^2(G))} \leq c(\|f\|_{L_p(\alpha, \beta; L_p(G))} + \|g\|_{L_p(\alpha, \beta; W_p^{s_0}(\Gamma))}),$$

где c – постоянная. Нетрудно также показать при выполнении условий (1.3), (1.4) при $l = 1$ или $l = 2$, что если существуют обобщенные производные $\partial_t^k f \in L_p(\alpha, \beta; L_p(G))$, $\partial_t^k g \in L_p(\alpha, \beta; W_p^{s_0}(\Gamma))$, $k \leq l$, то решение задачи (1.5) дифференцируемо по t , $u \in W_p^l(\alpha, \beta; W_p^2(G))$, и имеем, что при $l = 1$

$$L(t)u_t = f_t(x, t) - L_t u, \quad Ru_t = g_t(x, t) - R_t u \quad ((x, t) \in S), \quad (1.6)$$

и при $l = 2$

$$L(t)u_{tt} = f_{tt}(x, t) - L_{tt}u - 2L_t u_t, \quad Ru_{tt} = g_{tt}(x, t) - 2R_t u_t - R_{tt}u \quad ((x, t) \in S), \quad (1.7)$$

где L_t, R_t, L_{tt}, R_{tt} – операторы L, R , где коэффициенты заменены их производными по t соответствующего порядка.

Доказательство. теоремы 1. Разрешимость задач (1.5) (зависящих от параметра t) вытекает из единственности решений (см. принцип максимума в гл. 9 и теорему 9.15 в [10] в случае условий Дирихле и утверждение 2.3.2 и теорему 2.3.5

в [128]) в случае условий с косой производной) и фредгольмовости этих задач. Оценка для решений вытекает из непрерывности коэффициентов оператора по t . Тогда в некоторой окрестности любой точки $t_0 \in [0, T]$ можно получить оценку вида $\|u\|_{W_p^2(G)} \leq c\|Lu\|_{L_p(G)}$ с постоянной c не зависящей от t (в случае однородного граничного условия). Эти оценки гарантируют и наличие глобальной оценки из формулировки теоремы. $\square$

Лемма 1.1. *Существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех*

$$u \in W_p^{2,1}(Q^\gamma), \quad u(x, 0) = 0, \quad Q^\gamma = G \times (0, \gamma),$$

справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_p(0,\gamma,W_p^1(G))} \leq c\gamma^{1/2}\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из интерполяционного неравенства

$$\|u\|_{W_p^1(G)} \leq c\|u\|_{W_p^2(G)}^{1/2}\|u\|_{L_p(G)}^{1/2}$$

(см. [156]) и формулы Ньютона – Лейбница. $\square$

Лемма 1.2. *Если $b \in L_q(G)$ с $q > n$ при $p \leq n$ и $q \geq p$ при $p > n$, то существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $u \in W_p^2(G)$ выполнено*

$$\|b\nabla u\|_{L_p(G)} \leq c\|u\|_{W_p^2(G)}. \quad (1.8)$$

Если $b \in L_q(G)$ с $q > n/2$ при $p \leq n/2$ и $q \geq p$ при $p > n/2$, то существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $u \in W_p^2(G)$ выполнено

$$\|bu\|_{L_p(G)} \leq c\|u\|_{W_p^2(G)}. \quad (1.9)$$

Если $b \in L_p(Q)$ с $p > n$, то существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\|b\nabla u\|_{L_p(Q)} \leq c\|u\|_{L_\infty(0,T;W_p^2(G))}, \quad (1.10)$$

$$\|bu\|_{L_p(Q)} \leq c\|u\|_{L_\infty(0,T;W_p^2(G))} \quad (1.11)$$

для всех $u \in L_\infty(0, T; W_p^2(G))$.

Доказательство. Все утверждения доказываются по одной схеме. Докажем, например, первое утверждение. Фиксируем $i = 1, 2, \dots, n$. Имеем, используя неравенство Гельдера, что

$$\|bu_{x_i}\|_{L_p(G)} = \left(\int_G |b|^p |u_{x_i}|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_G |b|^q dx \right)^{\frac{1}{qp}} \left(\int_G |u_{x_i}|^{\frac{pq}{q-p}} dx \right)^{\frac{q-p}{qp}}.$$

В силу теорем вложения (см., например, [156]) имеем оценку

$$\|u_{x_i}\|_{L_{\frac{qp}{q-p}}(G)} \leq c \|u\|_{W_p^2(G)}, \quad \text{если } q > n, p \leq n.$$

Таким образом

$$\|bu_{x_i}\|_{L_p(G)} \leq c \|u\|_{W_p^2(G)}, \quad c = \|b\|_{L_q(G)}^{1/p}.$$

□

Пусть $Q^\gamma = G \times (0, \gamma)$. Определим оператор M

$$Mu = \sum_{i,j=1}^m b_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x, t) u_{x_i} + b_0(x, t) u$$

и предположим, что

$$b_{ij} \in L_p(0, T; L_\infty(G)) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad b_i, b_0 \in L_p(Q). \quad (1.12)$$

Теорема 2. . Пусть $f \in L_p(Q)$, $u_0(x) \in W_p^2(G)$, $\varphi, \varphi_t \in L_p(0, T; W_p^{s_0}(G))$, выполнены условия A_0 , (1.12), (1.1) в случае условий Дирихле и условия A_0 , (1.12), (1.1), (1.2), (1.4) с $l = 1$ в случае условий с косой производной и условия согласования

$$\varphi(x, 0)|_\Gamma = R(0)u_0(x)|_\Gamma. \quad (1.13)$$

Тогда существует единственное решение задачи

$$Lu_t + Mu = f, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (1.14)$$

$$Ru|_S = \varphi, \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad (1.15)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (1.16)$$

такое, что:

$$u, u_t \in L_p(0, T; W_p^2(G)), \quad u(t) \in C([0, T]; W_p^2(G)).$$

Решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{L_\infty(0,T;W_p^2(G))} + \|u_t\|_{L_p(0,T;W_p^2(G))} \leq c(\|f\|_{L_p(Q)} + \|\varphi\|_{W_p^1(0,T;W_p^{s_0}(\Gamma))} + \|u_0\|_{W_p^2(G)}). \quad (1.17)$$

Если $\varphi \equiv 0$, $u_0(x) \equiv 0$, то существует постоянная $c > 0$ не зависящая от $\gamma \in [0, T]$ и f такая, что для решения задачи (1.14) – (1.16) справедлива оценка:

$$\|u\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))} + \|u_t\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq c\|f\|_{L_p(Q^\gamma)}.$$

Доказательство. Рассмотрим промежуток $[0, T]$. Построим функцию

$$\Phi \in W_p^1(0, T; W_p^2(G)) : R\Phi|_S = \varphi, \quad \Phi|_{t=0} = u_0(x),$$

которую можно построить как решение задачи:

$$\Delta\Phi - \Phi = \Delta u_0 - u_0, \quad R(t)\Phi|_\Gamma = \varphi(t).$$

(существование такой функции Φ вытекает из теоремы 1). Легко увидеть, что все условия выполнены. Сделаем замену неизвестного $V = u - \Phi$. Тогда функция V удовлетворяет условиям

$$RV|_S = 0, \quad V|_{t=0} = 0.$$

$$LV_t + MV = f - L\Phi_t - M\Phi = g.$$

Используя теорему 1 можем переписать уравнение в виде:

$$V + \int_0^t L^{-1}MV(\tau, x)d\tau + \int_0^t R_0(V)(x, \tau) d\tau = \int_0^t L^{-1}g(x, \tau) d\tau,$$

или в виде

$$V + S(V) = g_0 = \int_0^t L^{-1}g(x, \tau) d\tau, \quad (1.18)$$

где S – линейный оператор, оператор L^{-1} сопоставляет функции $f_0 \in L_p(G)$ решение задачи $LV = f_0$, $R(t)V|_\Gamma = 0$ и функция $v = R_0(V)$ есть решение задачи $Lv = 0$, $R(t)v = R_tV$ (таким образом, $R_0(V) \equiv 0$ в случае условий Дирихле). Используя условие теоремы 1 и условия на данные имеем, что справедливы оценки:

$$\|L^{-1}MV\|_{W_p^2(G)} \leq c\|MV\|_{W_p^2(G)}. \quad (1.19)$$

$$\|R_0(V)\|_{W_p^2(G)} \leq c_1 \|V\|_{W_p^{s_0}(\Gamma)} \leq c_2 \|V\|_{W_p^2(G)}, \quad (1.20)$$

где постоянные c, c_i зависят от норм коэффициентов и не зависят от t, V . Здесь используется вложение $W_p^2(G) \subset W_p^{2-1/p}(\Gamma)$ [156]. Имеем в силу условий (1.12) и леммы 1.2, что

$$\|MV\|_{W_p^2(G)} \leq \sum_{i,j=1}^n \|b_{ij}\|_{L_\infty(G)} \|u_{x_i x_j}\|_{L_p(G)} + c_3 \|u\|_{W_\infty^1(G)}, \quad (1.21)$$

где c_3 – постоянная. Из определения оператора S , вложения $W_p^2(G) \subset W_\infty^1(G)$ и неравенства Гельдера, получим

$$\|S(V)\|_{L_\infty(0,\tau;W_p^2(G))} \leq \tau^{1-1/p} c_4 \|V\|_{L_\infty(0,\tau;W_p^2(G))}, \quad (1.22)$$

где постоянная c_4 не зависит от $\tau \in (0, T]$ и зависит от норм коэффициентов в Q . Рассмотрим пространство $H_\tau = L_\infty(0, \tau; W_p^2(G))$. Если $\tau^{1-1/p} c_4 = 1/2$, то норма оператора $S : H_\tau \rightarrow H_\tau$ меньше 1 и значит уравнение (1.18) имеет единственное решение. Таким образом, строится решение на промежутке $[0, \tau]$. Из уравнения вытекает, что решение удовлетворяет оценке

$$\|V\|_{L_\infty(0,\tau;W_p^2(G))} \leq 2\|g_0\|_{L_\infty(0,\tau;W_p^2(G))}. \quad (1.23)$$

Покажем, что его можно продолжить на весь промежуток $[0, T]$. Положим $V_0(x, t) = V(x, t)$ при $t \leq \tau$ и $V_0(x, t) = 0$ при $t > \tau$. Сделаем в уравнении (1.18) замену $V = V_0 + V_1$. Относительно функции V_1 выводится уравнение

$$V_1 + S(V_1) = g_0 - S(V_0) = g_1. \quad (1.24)$$

По построению, правая часть здесь равна нулю на $(0, \tau)$. Ищем решение уравнения (1.24). Если V_1 есть решение (1.24), то по доказанному $V_1 \equiv 0$ на $[0, \tau]$ и значит уравнение при $t \geq \tau$ можно переписать в виде

$$V_1 + \int_{\tau}^t (L^{-1}MV(x, \tau) + R_0(V)(x, \tau)) d\tau = g_1. \quad (1.25)$$

Далее повторяются предыдущие рассуждения и можно получить аналог оценки (1.22) вида

$$\|S(V_1)\|_{L_\infty(\tau, 2\tau; W_p^2(G))} \leq \tau^{1-1/p} c_4 \|V_1\|_{L_\infty(\tau, 2\tau; W_p^2(G))}, \quad (1.26)$$

где без ограничения общности можем считать, что постоянная c_4 совпадает с постоянной в (1.22). В силу выбора параметра τ можно заключить, что существует единственное решение V_1 уравнения (1.24), удовлетворяющее оценке

$$\|V_1\|_{L_\infty(\tau, 2\tau; W_p^2(G))} \leq 2\|g_1\|_{L_\infty(\tau, 2\tau; W_p^2(G))}.$$

Повторяя рассуждения на промежутках $[k\tau, (k+1)\tau]$ ($k = 1, 2, \dots$), доказываем разрешимость уравнения (1.18) на всем промежутке $[0, T]$ и оценку вида

$$\|V\|_{L_\infty(0, T; W_p^2(G))} \leq c\|g_0\|_{L_\infty(0, T; W_p^2(G))}. \quad (1.27)$$

Непосредственно из уравнения (1.18) вытекает, что существует обобщенная производная $V_t \in L_p(0, T; W_p^2(G))$ и $V(x, 0) = 0$. Дифференцируя уравнение по t получим

$$V_t + L^{-1}MV + R_0(V) = L^{-1}g(x, t).$$

Применяя оператор R к этому равенству и рассматривая его на границе S , получим $(RV)_t|_S = 0$, откуда вытекает, что $RV|_S = 0$. Используя оценку (1.27) и теорему 1, получим априорную оценку (1.17). Рассмотрим промежуток $(0, \gamma)$ ($\gamma \leq T$) и покажем последнее утверждение теоремы об оценке. Пусть $u_0 = 0$, $\varphi = 0$ и возьмем в качестве f функцию

$$f_0 = \begin{cases} f, & t \leq \gamma \\ 0, & t > \gamma \end{cases} \in L_p(Q).$$

Тогда решение $\tilde{u}$ задачи (1.14) – (1.16) существует, единственно и удовлетворяет оценке (1.17), т.е.

$$\|\tilde{u}\|_{L_\infty(0, T; W_p^2(G))} + \|\tilde{u}_t\|_{L_p(0, T; W_p^2(G))} \leq c\|f_0\|_{L_p(Q)} = c\|f\|_{L_p(Q^\gamma)}. \quad (1.28)$$

В силу единственности, $\tilde{u}$ совпадает на $[0, \gamma]$ с решением u задачи (1.14) – (1.16) где $u_0 = 0$, $\varphi = 0$, тогда из оценки (1.28) получим

$$\|u\|_{L_\infty(0, \gamma; W_p^2(G))} + \|u_t\|_{L_p(0, \gamma; W_p^2(G))} \leq c\|f\|_{L_p(Q^\gamma)}.$$

□

Далее рассматривается уравнение

$$L_0 u_{tt} + L_1 u_t + L_2 u = f, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (1.29)$$

где L_0, L_1, L_2 – операторы второго порядка по переменным x с коэффициентами зависящими от всех переменных, а область G – ограниченная область в $R^n (n \geq 1)$ с границей $\Gamma \in C^2$. Уравнение (1.29) рассматривается с краевыми и начальными условиями:

$$Ru|_S = \varphi, \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad (1.30)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x). \quad (1.31)$$

Считаем, что операторы L_k ($k = 0, 1, 2$) имеют вид

$$L_k u = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^k(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m a_i^k(x, t) u_{x_i} + a_0^k(x, t) u,$$

где все коэффициенты вещественны, а оператор L_0 предполагается эллиптическим. Как и ранее, также фиксируется параметр $p > n$ (для простоты) и предполагается что

$$\begin{aligned} a_{ij}^0 &\in C(\overline{Q}), \quad a_i^0, a_0^0 \in C([0, T]; L_p(G)), \\ a_{ij}^k &\in L_p(0, T; L_\infty(G)), \quad a_i^k, a_0^k \in L_p(Q) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\partial_t^k \gamma_i, \partial_t^k \sigma \in L_\infty(0, T; C^1(\overline{\Gamma})), \quad \left| \sum_{i=1}^n \gamma_i n_i \right| \geq \delta_1 > 0 \quad \forall (x, t) \in S, \quad (1.33)$$

где n – единичный вектор внешней нормали к Γ , $i = 1, \dots, n$, $k = 0, 1, 2$ и δ_1 – некоторая положительная постоянная.

Условия согласования имеют вид:

$$\varphi(x, 0) = R(0)u_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = R(0)u_1(x) + R_t(0)u_0(x), \quad x \in \Gamma. \quad (1.34)$$

Условие A_1 . $a_0^0 \leq 0$ п.в. в Q в случае условий Дирихле и $a_0^0 \leq 0$ п.в. в Q и $a_0^0 < 0$ и п.в. в некоторой окрестности границы S и $\sigma \geq 0$ на S в случае условий с косой производной.

Теорема 3. (о разрешимости прямой задачи). Пусть $f \in L_p(Q)$, $u_0, u_1 \in W_p^2(G)$ и $\varphi \in W_p^2(0, T; W_p^{s_0}(G))$, где $p \in (n, \infty)$, выполнены условия A_1 , (1.32), (1.34) и условие (1.33) в случае задания условия с косой производной. Тогда существует единственное решение задачи (1.29) – (1.31) такое, что:

$$u_{tt} \in L_p(0, T; W_p^2(G)), \quad u, u_t \in C([0, T]; W_p^2(G)).$$

Решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^2(0,T;W_p^2(G))} \leq c(\|u_0\|_{W_p^2(G)} + \|u_1\|_{W_p^2(G)} + \|f\|_{L_p(Q)} + \|\varphi\|_{W_p^2(0,T;W_p^{s_0}(\Gamma))}). \quad (1.35)$$

Если $\varphi \equiv 0$, $u_i(x) \equiv 0$ ($i = 0, 1$), то найдется постоянная $c > 0$ не зависящая от $\gamma \in [0, T]$ такая, что решение задачи (1.29) – (1.31) удовлетворяет оценке:

$$\|u\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))} + \|u_t\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))} + \|u_{tt}\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq c\|f\|_{L_p(Q^\gamma)}. \quad (1.36)$$

Доказательство. Рассмотрим промежуток $[0, T]$. Построим функцию

$$\Phi \in W_p^2(0, T; W_p^2(G)) : \quad R\Phi|_S = \varphi, \quad \Phi|_{t=0} = u_0(x), \quad \Phi_t|_{t=0} = u_1(x),$$

которую можно построить как решение задачи

$$(\Delta - 1)\Phi = (\Delta - 1)u_0 + t(\Delta - 1)u_1(x), \quad R\Phi|_\Gamma = 0.$$

Включение $\Phi \in W_p^2(0, T; W_p^2(G))$ вытекает из теоремы 1. Проверим выполнение начальных условий. Имеем при $t = 0$, что

$$(\Delta - 1)\Phi(x, 0) = (\Delta - 1)u_0(x), \quad R(0)\Phi(x, 0) = \varphi(x, 0) = R(0)u_0(x).$$

В силу единственности решений этой задачи, $\Phi(x, 0) = u_0(x)$. Таким же образом, если продифференцировать уравнение еще раз по t , получим

$$(\Delta - 1)\Phi_t(x, 0) = (\Delta - 1)u_1(x), \quad R(0)\Phi_t(x, 0) + R_t\Phi(x, 0) = \varphi_t(x, 0) = R_t(0)u_0(x) + R(0)u_1(x).$$

Аналогично, имеем $\Phi_t(x, 0) = u_1(x)$. Сделаем замену неизвестного $V = u - \Phi$. Тогда перепишем условия для функции V

$$L_0V_{tt} + L_1V_t + L_2V = f - L_0\Phi_{tt} - L_1\Phi_t - L_2\Phi = g,$$

$$RV|_S = 0, \quad V|_{t=0} = 0, \quad V_t|_{t=0} = 0.$$

Затем перепишем уравнение, с использованием теоремы 1, в виде:

$$V + \int_0^t \int_0^\xi L_0^{-1}(L_1V_t(x, \tau) + L_2V(x, \tau)) + R_0(V)(x, \tau) d\tau d\xi = \int_0^t \int_0^\xi L_0^{-1}g(x, \tau) d\tau d\xi, \quad (1.37)$$

где оператор L_0^{-1} определяется как и в теореме 2, а оператор $R_0(V)$ сопоставляет каждой функции V решение задачи $L_0 v = 0$, $R(t)v|_\Gamma = R_{tt}V + 2R_t V_t$. Как и в теореме 2, легко понять, что справедливы оценки ($\tau \leq T$):

$$\left\| \int_0^t L_0^{-1} L_1 V_t(x, \tau) d\tau \right\|_{L_\infty(0, \tau; W_p^2(G))} \leq c \tau^{2-1/p} \|V_t\|_{L_\infty(0, \tau; W_p^2(G))}, \quad (1.38)$$

$$\left\| \int_0^t L_0^{-1} L_2 V(x, \tau) d\tau \right\|_{L_\infty(0, \tau; W_p^2(G))} \leq c \tau^{2-1/p} \|V\|_{L_\infty(0, \tau; W_p^2(G))}, \quad (1.39)$$

$$\left\| \int_0^t R_0 V(x, \tau) d\tau \right\|_{L_\infty(0, \tau; W_p^2(G))} \leq c \tau^{2-1/p} \|V\|_{W_\infty^1(0, \tau; W_p^2(G))}. \quad (1.40)$$

Утверждение теоремы о разрешимости уравнения (1.37) в пространстве $H_\tau = W_\infty^1(0, \tau; W_p^2(G))$ на некотором промежутке времени $[0, \tau]$ следует из теоремы о неподвижной точке. Утверждение о разрешимости в целом по времени получается повторением рассуждений на последующих промежутках $[\tau, 2\tau]$, $[2\tau, 3\tau]$ и т.д. Легко увидеть, что решение будет удовлетворять оценке из утверждения теоремы.

Рассмотрим промежуток $(0, \gamma)$ ($\gamma \leq T$) и задачу (1.29) – (1.31), где $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $\varphi = 0$ и возьмем в качестве f функцию

$$f_0 = \begin{cases} f, & t \leq \gamma \\ 0, & t > \gamma \end{cases} \in L_p(Q).$$

Тогда существует единственное решение $\tilde{u}$ задачи (1.29) – (1.31), удовлетворяющее оценке:

$$\|\tilde{u}\|_{L_\infty(0, T; W_p^2(G))} + \|\tilde{u}_t\|_{L_p(0, T; W_p^2(G))} \leq c \|f_0\|_{L_p(Q)} = c \|f\|_{L_p(Q^\gamma)}. \quad (1.41)$$

В силу единственности $\tilde{u}$ совпадает на $[0, \gamma]$ с решением u задачи (1.29) – (1.31), где $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $\varphi = 0$, тогда из оценки (1.17) получим

$$\|u\|_{L_\infty(0, \gamma; W_p^2(G))} + \|u_t\|_{L_p(0, \gamma; W_p^2(G))} \leq c \|f\|_{L_p(Q^\gamma)}.$$

□

Замечание. Легко формулируются аналоги теорем 2, 3 при любом $p \in (1, \infty)$. Однако, при получении основных результатов используется условие $p > n$ на параметр p . Поэтому, все теоремы формулируются именно в этом случае.

**Обратные задачи об определении функции источника и параметров среды
в моделях соболевского типа**

**2.1 Обратные задачи об определении источника в задачах фильтрации
и переноса**

В 1960, Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов И.Н. Кочина [71] для описания фильтрации в трещиноватых средах предложили математическую модель вида

$$(\sigma - \Delta)u_t + k\Delta u = f, \quad n = 3,$$

где физический смысл функции u – давление жидкости в трещинах. Среда рассматривается как материал, состоящий из пор и проницаемых блоков, которые разделены между друг другом другой системой трещин. В отличии от обычного описания фильтрации в пористой среде отличительной особенностью является тот факт, что вводятся два давления в жидкости: одно в порах, второе в трещинах и принимается во внимание обмен жидкости между трещинами и порами.

При таком подходе модель фильтрации слабо сжимаемых жидкостей в трещиноватых средах описывается как система уравнений:

$$\begin{cases} \nu \Delta u_1 + \alpha(u_2 - u_1) = 0, \\ \mu(m_0 d_1 + d_2)u_{2t} + \alpha(u_2 - u_1) = 0, \end{cases}$$

где $u_1 = u_1(t, x)$ – давление жидкости в трещинах, а давление в порах – $u_2 = u_2(t, x)$. Здесь Δ – Лапласиан; коэффициент проницаемости трещин обозначается через ν , вязкость жидкости это μ , коэффициенты сжимаемости жидкости блоков обозначаются через d_1 и d_2 , а m_0 – пористость блоков при стандартном давлении. Интенсивность обмена между блоками и трещинами характеризуется безразмерным коэффициентом α .

При исключении u_2 из (2.1) переходим к псевдопараболическому уравнению для u_1 . Поскольку интенсивность обмена жидкостью между трещинами и порами меняется со временем, коэффициент α можно считать функцией, зависящей

от времени, т.е. $\alpha = \alpha(t)$. В этом случае для u_1 получаем уравнение:

$$u_{1t} - \xi \Delta u_{1t} - \kappa \Delta u_1 = 0 \quad (2.1)$$

$$\kappa = \frac{\nu}{\mu(m_0 d_1 + d_2)}, \quad \xi = \frac{\nu}{\alpha}$$

Параметр κ – пьезопроводность трещиноватой среды. Коэффициент ξ представляет собой специфическую характеристику трещиноватой среды. Давление жидкости в порах u_2 удовлетворяет аналогичному уравнению. Если ξ стремится к нулю, то это означает, что размер блока уменьшается, а трещины увеличиваются. В пределе уравнение (2.1) совпадает с обычным уравнением фильтрации. Коэффициент пьезопроводности может зависеть от времени и давления (см. формулу (1.206) и дальнейшие описания в [111], параграф 2.4.3 в [131] или параграф 4 гл. 2 и параграф 2 гл. 9 в [3]).

Обратная задача об определении коэффициента пьезопроводности, зависящего от времени, по интегральным условиям переопределения рассматривалась в работах [45, 124–126]

Естественным обобщением модели (2.1) является класс уравнений

$$Lu_t + Mu = f, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (2.2)$$

где, L, M – операторы второго порядка по переменным x , G – ограниченная область в $R^n (n \geq 1)$ с границей $\Gamma \in C^2$. Уравнение дополняется краевыми и начальными условиями:

$$Ru|_S = \varphi, \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad (2.3)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (2.4)$$

Условия переопределения имеют вид

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2.5)$$

где x_i произвольные точки лежащие в G . Пусть в (2.2)

$$f = \sum_{i=1}^m c_i(t) f_i(x, t) + f_0(x, t), \quad (2.6)$$

где функции f_i даны и $c_i(t)$ подлежат определению с использованием условий (2.5). Рассматривается задача об определении вместе с решением u неизвестных функций c_i , входящих в правую часть f .

Пусть L и M операторы второго порядка.

$$\begin{aligned} Lu &= \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m a_i(x, t) u_{x_i} + a_0(x, t) u, \\ Mu &= \sum_{i,j=1}^m b_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x, t) u_{x_i} + b_0(x, t) u, \\ f_i &\in L_\infty(0, T; L_p(G)) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

Запишем условия на коэффициенты операторов L, M . Мы фиксируем параметр $p > n$ и предположим что

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in C(\overline{Q}), \quad b_{ij} \in L_p(0, T; L_\infty(G)), \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \\ a_i, a_0 &\in C([0, T]; L_p(G)), \quad b_i, b_0 \in L_p(Q). \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\partial_t^k \gamma_i, \partial_t^k \sigma \in L_\infty(0, T; C^1(\overline{\Gamma})), \quad k \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i n_i \geq \delta_1 > 0 \quad \forall (x, t) \in S, \quad (2.8)$$

где n – единичный вектор внешней нормали к Γ и δ_1 – некоторая положительная постоянная.

$$\begin{aligned} a_0 &\leq 0 \text{ п.в. в } Q \text{ в случае условий Дирихле и } a_0 \leq 0 \text{ п.в. в } Q \\ &\text{и } a_0 < 0 \text{ п.в. в некоторой окрестности} \\ \text{границы } S \text{ и } \sigma &\geq 0 \text{ на } S \text{ в случае условий с косой производной.} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Дополним условия согласования (1.13):

$$\varphi(x, 0)|_\Gamma = R(0)u_0(x)|_\Gamma, \quad \psi_i(0) = u_0(x_i), \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.10)$$

Будем считать, что оператор L эллиптичен (см. определение в главе 1).

Условия корректности. Пусть B матрица с элементами $b_{ij} = L^{-1}f_i(x_j, t)$ и предположим, что существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det B| \geq \delta_0 \text{ для п.в. } t \in [0, T], \quad (2.11)$$

где $L^{-1}f_i$ есть решение задачи: $Lu = f_i, \quad Ru|_S = 0$.

Рассматриваем задачу (2.2) – (2.6), где операторы L, M удовлетворяют выше приведенным условиям.

Теорема 4. Пусть коэффициенты операторов L, M удовлетворяют условиям (2.7), и дополнительно условию (2.8) в случае краевых условий с косой производной, выполнены условия (2.10), (2.11) и

$$f_0 \in L_p(Q), \quad f_i \in L_\infty(0, T; L_p(G)), \quad u_0(x) \in W_p^2(G),$$

$$\varphi \in W_p^1(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma)), \quad \psi_i \in W_p^1(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad p > n,$$

где $s_0 = 2 - 1/p$ в случае условий Дирихле и $s_0 = 1 - 1/p$ в противном случае.

Тогда существует единственное решение задачи (2.2) – (2.6) такое, что:

$$u \in W_p^1(0, T; W_p^2(G)), \quad c_i(t) \in L_p(0, T), \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Решение $(u, c_1, \dots, c_m)$ удовлетворяет оценке:

$$\begin{aligned} & \|u\|_{W_p^1(0, T; W_p^2(G))} + \sum_{i=1}^m \|c_i(t)\|_{L_p(0, T)} \leq c(\|f_0\|_{L_p(Q)} \\ & + \|\varphi\|_{W_p^1(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma))} + \sum_{i=1}^m \|\psi_i\|_{W_p^1(0, T)} + \|u_0\|_{W_p^2(G)}), \end{aligned}$$

где c – некоторая постоянная.

Доказательство. Как и в теореме 2, построим функцию $\Phi(x, t)$ такую, что $\Phi, \Phi_t \in L_p(0, T; W_p^2(G))$:

$$R\Phi|_S = \varphi, \quad \Phi|_{t=0} = u_0(x).$$

После замены

$$u = V + \Phi \quad (V = u - \Phi),$$

получим

$$LV_t + MV = f_0 - L\Phi_t - M\Phi + \sum_{i=1}^m c_i f_i = g_0 + \sum_{i=1}^m c_i f_i,$$

где

$$\begin{aligned} V(x_i, t) &= u(x_i, t) - \Phi(x_i, t) = \psi_i - \Phi(x_i, t) = \varphi_i(t), \\ RV|_S &= 0, \quad V|_{t=0} = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Приведем доказательство в случае краевых условий Дирихле. Изменения, которые необходимо сделать в доказательстве в случае других краевых условий

более или менее очевидны. Все рассуждения те же самые, но появляется одно дополнительное слагаемое в интегральном уравнении, которое требует некоторых небольших дополнительных рассуждений.

Обращая L получим:

$$V_t + L^{-1}MV + R_0V = L^{-1}g_0 + \sum_{i=1}^m c_i L^{-1}f_i, \quad (2.13)$$

где оператор L^{-1} сопоставляет функции g решение задачи:

$$LV = g, \quad RV|_S = 0, \quad V|_{t=0} = 0,$$

и функция $v = R_0V$ есть решение задачи $Lv = 0$, $R(t)v = R_tV$ (таким образом, $R_0V \equiv 0$ в случае условий Дирихле). Функция $\Phi(x, t) \in W_p^2(G; W_p^1(0, T))$ и значит (поскольку $p > n$) после может быть изменения на множестве меры ноль функция $\Phi(x, t)$ непрерывна по x при п.в. t и $\Phi(x, t) \in C(\overline{G}; W_p^1(0, T))$. Следовательно,

$$\Phi(x_i, t) \in W_p^1(0, T),$$

тогда $\varphi_i \in W_p^1(0, T)$. Полагая $x = x_i$ в (2.13) получим

$$\varphi_{it} + (L^{-1}MV + R_0V)(x_i, t) = L^{-1}g_0(x_i, t) + \sum_{j=1}^m (L^{-1}f_j)(x_i, t)c_j(t).$$

По условию (2.11) имеем:

$$|\det B| \geq \delta_0 > 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

$$B = \{L^{-1}f_i(x_j, t)\}_{i,j=1}^m.$$

Таким образом:

$$\vec{c} = B^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_{1t} + (L^{-1}M + R_0)V(x_1, t) - L^{-1}g_0(x_1, t) \\ \dots \\ \varphi_{mt} + (L^{-1}M + R_0)V(x_m, t) - L^{-1}g_0(x_m, t) \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Получили уравнение для вектор-функции $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$, где $V = V(c)$ – оператор сопоставляющий $\vec{c}$ решение задачи

$$A_0V = LV_t + MV = g_0 + \sum_{i=1}^m c_i f_i, \quad (2.14)$$

$$RV|_S = 0, \quad V|_{t=0} = 0.$$

Используя теорему 2, представим функцию V в виде

$$V = A_0^{-1}g_0 + A_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^m c_i f_i\right) = V_0 + A_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^m c_i f_i\right).$$

Тогда систему для вектор-функции $\vec{c}$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{c}_0 + R(\vec{c}), \\ \vec{c}_0 &= B^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_{1t} + (L^{-1}M + R_0)V_0(x_1, t)(x_1, t) - L^{-1}g_0(x_1, t) \\ \dots \\ \varphi_{mt} + (L^{-1}M + R_0)V_0(x_m, t)(x_m, t) - L^{-1}g_0(x_m, t) \end{pmatrix}, \\ R(\vec{c}) &= B^{-1} \begin{pmatrix} (L^{-1}M + R_0)A_0^{-1} \sum_{i=1}^m c_i f_i(x_1, t) \\ \dots \\ (L^{-1}M + R_0)A_0^{-1} \sum_{i=1}^m c_i f_i(x_m, t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Отметим, что функции $L^{-1}f_i(x_j, t)$ принадлежат $L_\infty(0, T)$. Действительно, $f_i(x, t) \in L_\infty(0, T; L_p(G))$ и $L^{-1}f_i \in L_\infty(0, T; W_p^2(G))$. Таким образом, при п.в. t $L^{-1}f_i \in W_p^2(G)$. В силу теорем вложения (см., например, [119]) и условия $p > n$ функция $L^{-1}f_i(x, t)$ непрерывна после может быть изменения на множестве меры 0 при п.в. t и определен след $L^{-1}f_i(x_j, t)$. Имеем в силу теоремы 1 и теорем вложения, что

$$\|L^{-1}f_i(x_j, t)\|_{L_\infty(0, T)} \leq c \|L^{-1}f_i(x, t)\|_{L_\infty(0, T; W_p^2(G))} \leq c_1 \|f_i\|_{L_\infty(0, T; L_p(G))}. \quad (2.16)$$

Тогда будет справедлива оценка

$$\|B^{-1}\vec{g}(t)\|_{L_p(0, \gamma)} \leq c \|\vec{g}(t)\|_{L_p(0, \gamma)},$$

для любого вектора $\vec{g} \in L_p(0, \gamma)$ и $\gamma \in [0, T]$, причем постоянная c не зависит от γ . В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \|R(\vec{c})\|_{L_p(0, \gamma)} &\leq c \sum_{j=1}^m \|(L^{-1}M + R_0)A_0^{-1} \sum_{i=1}^m c_i(t) f_i(x_j, t)\|_{L_p(0, \gamma)} \leq \\ &c_1 \|(L^{-1}M + R_0)A_0^{-1} \sum_{i=1}^m c_i(t) f_i(x, t)\|_{L_p(0, \gamma; W_p^2(G))}. \end{aligned}$$

Используя теорему 1, оценим правую часть y через

$$y = c_3(\|MA_0^{-1}(\sum_{i=1}^m c_i(t)f_i)\|_{L_p(0,\gamma;L_p(G))} + \|R_0A_0^{-1}\sum_{i=1}^m c_i(t)f_i\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))}).$$

Рассмотрим

$$Mg_0 = \sum b_{ij}g_{0x_ix_j} + b_i g_{0x_i} + b_0 g_0,$$

где $g_0 = A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m c_i f_i)$. Достаточно оценить каждое слагаемое в этой сумме.

Имеем

$$\|b_{ij}g_{0x_ix_j}\|_{L_p(0,\gamma;L_p(G))} \leq \|b_{ij}\|_{L_p(0,T;L_\infty(G))}\|g_{0x_ix_j}\|_{L_\infty(0,\gamma;L_p(G))} \leq c_{ij}\|g_0\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))},$$

$$\|b_i g_{0x_i}\|_{L_p(0,\gamma;L_p(G))} \leq \|b_i\|_{L_p(Q)}\|g_{0x_i}\|_{L_\infty(Q^\gamma)} \leq c_i\|g_0\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))}.$$

$$\|b_0 g_{0x_i}\|_{L_p(0,\gamma;L_p(G))} \leq \|b_0\|_{L_p(Q)}\|g_0\|_{L_\infty(Q^\gamma)} \leq c_0\|g_0\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))}.$$

Складывая все оценки получим

$$\|Mg_0\|_{L_p(0,\gamma;L_p(G))} \leq c\|g_0\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))}. \quad (2.17)$$

Из оценки (1.20) предыдущей главы вытекает неравенство

$$\|R_0 g_0\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq c_1\|g_0\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))}. \quad (2.18)$$

Далее

$$g_0 = \int_0^t g_\tau(\tau) d\tau$$

$$\|g_0\|_{W_p^2(G)} \leq \int_0^\gamma \|g_{0\tau}(\tau)\|_{W_p^2(G)} d\tau \leq (\int_0^\gamma \|g_{0\tau}\|_{W_p^2(G)}^p d\tau)^{1/p} \gamma^{\frac{p-1}{p}}.$$

Используя оценки из теоремы 2 и оценки (2.17), (2.18) (отметим, что все постоянные не зависят от γ) получаем

$$y \leq \gamma^{\frac{p-1}{p}} c_2 \left\| \sum c_i f_i \right\|_{L_p(0,\gamma;L_p(G))} \quad (2.19)$$

где постоянная c_2 не зависит от γ . Имеем

$$\|c_i f_i\|_{L_p(Q^\gamma)} = \left(\int_0^\gamma \int_G |c_i|^p |f_i|^p(x,t) dx dt \right)^{1/p} =$$

$$\left(\int_0^\gamma |c_i|^p(t) \int_G |f_i|^p(x, t) dx dt\right)^{1/p} \leq \|f_i\|_{L_\infty(0, T; L_p(G))} \left(\int_0^\gamma |c_i|^p(t) dt\right)^{1/p}.$$

Таким образом, величина (2.19) оценивается через

$$c_3 \gamma^{(p-1)/p} \sum_{i=1}^m \|c_i\|_{L_p(0, T)}.$$

Получили неравенство

$$\|R(\vec{c})\|_{L_p(0, \gamma)} \leq c_4 \gamma^{(p-1)/p} \|\vec{c}\|_{L_p(0, T)}, \quad (2.20)$$

где c_4 не зависит от γ . Тогда, при $c_4 \gamma^{(p-1)/p} = q_0 < 1$ уравнение (2.15) имеет единственное решение. $\square$

Рассмотрим уравнение

$$\vec{c} - R(\vec{c}) = \vec{c}_0. \quad (2.21)$$

Отметим, что без ограничения общности можем считать, что все постоянные из доказательства оценки (2.20) не зависят от γ .

Пусть $\vec{c}$ наше решение, определенное на промежутке $[0, \gamma]$. Определим вектор

$$\vec{c}_1 = \begin{cases} \vec{c}, & t \leq \gamma \\ 0, & t > \gamma. \end{cases}$$

Сделаем в (2.21) замену $\vec{k}_1 = \vec{c} - \vec{c}_1$ ($\vec{k}_1 = (k^1, k^2, \dots, k^m)$). Имеем, что $\vec{k}_1 = 0$ при $t \leq \gamma$ и $\vec{k}_1 - R(\vec{k}_1) = \vec{c}_0 - \vec{c}_1 + R(\vec{c}_1)$. Здесь правая часть обращается в ноль на $[0, \gamma]$ и соответственно будем иметь, что $R(\vec{k}_1) = 0$ при $t \leq \gamma$. Рассмотрим систему

$$\vec{k}_1 - R(\vec{k}_1) = \vec{c}_0 - \vec{c}_1 + R(\vec{c}_1) \quad (2.22)$$

на $[\gamma, 2\gamma]$. Если $\vec{k}_1 \in L_p(0, 2\gamma)$, то

$$\begin{aligned} \|R(\vec{k}_1)\|_{L_p(\gamma, 2\gamma)} &\leq c \sum_{j=1}^m \|(L^{-1}M + R_0)A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m k^i f_i)(x_j, t)\|_{L_p(\gamma, 2\gamma)} \\ &\leq c_2 \sum_{j=1}^m \|(L^{-1}M + R_0)A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m k^i f_i)\|_{L_p(\gamma, 2\gamma; W_p^2(G))} \\ &\leq c_3 (\|MA_0^{-1}(\sum_{i=1}^m k^i f_i)\|_{L_p(\gamma, 2\gamma; L_p(G))} + \|R_0A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m k^i f_i)\|_{L_p(\gamma, 2\gamma; W_p^2(G))}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_4 \|A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m k^i f_i)\|_{L_\infty(\gamma, 2\gamma; W_p^2(G))} \\
&\leq c_5 \gamma^{1-1/p} \left\| \sum_{i=1}^m k^i f_i \right\|_{L_p(Q^\gamma)} \leq c_6 \gamma^{1-1/p} \sum_{i=1}^m \|k^i\|_{L_p(0, T)}.
\end{aligned}$$

В итоге получим:

$$\|\vec{R}(\vec{k}_1)\|_{L_p(\gamma, 2\gamma)} \leq c_7 \gamma^{1-1/p} \|\vec{k}_1\|_{L_p(0, T)},$$

где без ограничения общности можем считать, что c_7 та же постоянная, что и в (2.20). Таким образом, уравнение (2.22) имеет единственное решение $\vec{k}_1 \in L_p(0, 2\gamma)$ такое, что при $t \in (0, \gamma)$ $\vec{k}_1 = 0$. Следовательно, функция

$$\vec{c} = \vec{c}_1 + \vec{k}_1$$

есть решение (2.15) из $L_p(0, 2\gamma)$. Повторяя рассуждения, построим решение $\vec{c}$ уравнения (2.15) на $[0, T]$.

Построим функцию V как решение задачи (2.14). Покажем, что построенная функция V удовлетворяет условиям (2.12). Обращая L получим, что V удовлетворяет уравнению (2.13). Берем в (2.13) $x = x_i$ и получаем

$$V_t(x_i, t) + L^{-1}MV(x_i, t) + R_0V(x_i, t) = L^{-1}g_0(x_i, t) + \sum_{j=1}^m L^{-1}c_j(t)f_j(x_i, t). \quad (2.23)$$

Но вектор-функция $\vec{c}$ такова, что

$$\varphi_{it}(t) + L^{-1}MV(x_i, t) + R_0V(x_i, t) = L^{-1}g_0(x_i, t) + \sum_{j=1}^m L^{-1}c_j(t)f_j(x_i, t). \quad (2.24)$$

Вычитая эти равенства, получаем

$$V_t(x_i, t) - \varphi_{it}(t) = 0$$

или $\partial_t(V(x_i, t) - \varphi_i(t)) = 0$. Интегрируя от 0 до t получим

$$V(x_i, t) - \varphi_i(t) = V(x_i, 0) - \varphi_i(0) = 0,$$

поскольку $v(x_i, 0) = 0$ и $\varphi_i(0) = \psi_i(0) - \phi(x_i, 0) = \psi_i(0) - u_0(x_i) = 0$ в силу условий согласования. Тогда $V(x_i, t) = \varphi_i(t) \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$.

Получим оценки для решения. Оценим $\|\vec{c}\|$, где $\vec{c}$ решение уравнения (2.15).
Имеем

$$\begin{aligned} \|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)} &\leq \frac{1}{1-q_0} \|\vec{c}_0\|_{L_p(0,\gamma)} \\ &\leq \frac{c_1}{1-q_0} \left(\sum_i \|\varphi_{it}\|_{L_p(0,\gamma)} + \|f_0\|_{L_p(Q^\gamma)} + \|\Phi_t\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} + \|\Phi\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} \right). \end{aligned}$$

Далее

$$\vec{k}_1 - R(\vec{k}_1) = \vec{c}_0 - \vec{c}_1 + R(\vec{c}_1)$$

на промежутке $[\gamma, 2\gamma]$ и значит

$$\begin{aligned} \|\vec{k}_1\|_{L_p(\gamma,2\gamma)} &\leq \frac{1}{1-q_0} \|\vec{c}_0 - \vec{c}_1 + R(\vec{c}_1)\|_{L_p(\gamma,2\gamma)} \\ &\leq \frac{c_2}{1-q_0} \left(\sum_{i=1}^m \|\varphi_{it}\|_{L_p(0,2\gamma)} + \|f_0\|_{L_p(Q^{2\gamma})} + \|\Phi_t\|_{L_p(0,2\gamma;W_p^2(G))} + \|\Phi\|_{L_p(0,2\gamma)} \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\vec{c}\|_{L_p(0,2\gamma)} &\leq \frac{c_3}{1-q_0} \left(\sum_{i=1}^m \|\varphi_{it}\|_{L_p(0,2\gamma)} + \|f_0\|_{L_p(Q^{2\gamma})} \right. \\ &\quad \left. + \|\Phi_t\|_{L_p(0,2\gamma;W_p^2(G))} + \|\Phi\|_{L_p(0,2\gamma)} \right). \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения получим неравенство вида:

$$\|\vec{c}\|_{L_p(0,T)} \leq c_4 \left(\sum_{i=1}^m \|\varphi_{it}\|_{L_p(0,T)} + \|f_0\|_{L_p(Q)} + \|\Phi_t\|_{W_p^1(0,T;W_p^2(G))} \right).$$

Из свойств построенной функции Φ следует, что правая часть в этом неравенстве оценивается через

$$c(\|f_0\|_{L_p(Q)} + \|\varphi_t\|_{L_p(0,T;W_p^{2-1/p}(G))} + \sum_{i=1}^m \|\psi_{it}\|_{L_p(0,T)} + \|u_0\|_{W_p^2(G)}),$$

откуда и вытекает утверждение теоремы об оценке. Ч.т.д.

Замечание 2.1. Как можно было заметить в процессе доказательства, случай граничных условий Дирихле отличается от случая условий с косой производной только наличием одного слагаемого R_0V в соответствующих уравнениях, который оценивается точно также как и остальные члены в уравнении. В остальном доказательства полностью совпадают.

2.2 Определение параметров среды в задачах фильтрации

Рассматривается обратная задача об определении неизвестных функций, которые входят как в правую часть уравнения, так и в сам оператор как коэффициенты. Задача в этом случае становится нелинейной. Фактически, коэффициенты уравнения характеризуют различные параметры среды (см. примеры в [56]), в частности, в моделях фильтрации типа (2.1) таким коэффициентом может являться коэффициент пьезопроводности $k = k(t)$, зависящий от времени. Такая обратная задача, но с другим условием переопределения была рассмотрена в работе [125].

Как и ранее, правая часть в (2.2) имеет вид

$$f = \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t) f_i(x, t) + f_0(x, t), \quad f_i \in L_\infty(0, T; L_p(G)) \quad (i = 1, 2, \dots, r_0), \quad (2.25)$$

где функции f_i даны. Часть коэффициентов оператора M зависящих от t считаются неизвестными, и оператор M имеет вид:

$$Mu = M_{r_0}u + \sum_{k=r_0+1}^r c_k(t) M_k u,$$

$$M_k u = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^k(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^k(x, t) u_{x_i} + b_0^k(x, t) u.$$

Оператор L имеет такой же вид как и в предыдущем параграфе:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) u_{x_i} + a_0(x, t) u.$$

Фиксируя параметр $p > n$ предполагается, что

$$b_{ij}^k \in L_\infty(Q), \quad b_i^k, b_0^k \in L_\infty(0, T; L_p(G)) \quad (k = r_0 + 1, \dots, r), \quad (2.26)$$

$$b_{ij}^{r_0} \in L_p(0, T; L_\infty(G)), \quad b_i^{r_0}, b_0^{r_0} \in L_p(Q), \quad (2.27)$$

$$a_{ij} \in C(\overline{Q}), \quad a_i, a_0 \in C([0, T]; L_p(G)) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.28)$$

$$a_0 \leq 0 \text{ п.в. в } Q \text{ в случае условий Дирихле и } a_0 \leq 0 \text{ п.в. в } Q$$

$$\text{и } a_0 < 0 \text{ п.в. в некоторой окрестности} \quad (2.29)$$

границы S и $\sigma \geq 0$ на S в случае условий с косой производной.

В случае краевых условия с косой производной требуется, чтобы

$$\partial_t^k \gamma_i, \partial_t^k \sigma \in L_\infty(0, T; C^1(\bar{\Gamma})), \quad k \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i n_i \geq \delta_1 > 0 \quad \forall (x, t) \in S, \quad (2.30)$$

Условия согласования имеют вид

$$\alpha_i(0) = u_0(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad R(t)u_0|_\Gamma = \varphi(x, 0). \quad (2.31)$$

Задача состоит в нахождении решения уравнения (2.2), т.е. уравнения

$$Lu_t + Mu = f, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (2.32)$$

удовлетворяющего краевым и начальным условиям

$$Ru|_S = \varphi, \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad (2.33)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad (2.34)$$

и условиям переопределения

$$u(x_i, t) = \alpha_i(t), \quad \alpha_i(t) \in W_p^1(0, T), \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (2.35)$$

где x_i произвольные точки лежащие в G , и нахождении функций $c_i(t)$. Строится функция $\Phi \in C([0, T]; W_p^2(G))$ ($p > n$) такая, что

$$\Phi \in W_p^1(0, T; W_p^2(G)), \quad \Phi|_{t=0} = u_0(x), \quad R(t)\Phi|_S = \varphi.$$

(эта функция построена в самом начале доказательства теоремы 2). Строится матрица B со строками

$$L^{-1}f_1(x_j, t), L^{-1}f_2(x_j, t), \dots, L^{-1}f_{r_0}(x_j, t), -L^{-1}M_{r_0+1}\Phi(x_j, t), \dots, -L^{-1}M_r\Phi(x_j, t),$$

где $j = 1, 2, \dots, r$, и предполагается, что существуют постоянные $\delta_0 > 0$, $\tau_0 > 0$ такие, что

$$|\det B| \geq \delta_0 \quad \text{для п.в. } t \in [0, \tau_0]. \quad (2.36)$$

Здесь $L^{-1}f_i$ есть решение u_i задачи:

$$Lu_i = f_i, \quad u_i|_{t=0} = 0, \quad R(t)u_i|_S = 0.$$

В этом случае, локально по времени, условие (2.36) от выбора функции Φ не зависит. Действительно, пусть Φ_1 и Φ_2 две такие функции. Рассматривается

$$\begin{aligned} |L^{-1}M_i\Phi_1(x_j, t) - L^{-1}M_i\Phi_2(x_j, t)| &\leq c\|M_i\Phi_1(x, t) - M_i\Phi_2(x, t)\|_{L_p(G)} \\ &\leq c\|\Phi_1(x, t) - \Phi_2(x, t)\|_{W_p^2(G)} \leq ct^{1-1/p}\|\Phi_{1t} - \Phi_{2t}\|_{L_p(0, T; W_p^2(G))}. \end{aligned}$$

Неравенство показывает, что если B_1 и B_2 матрицы построенные при помощи Φ_1 и Φ_2 , соответственно, и $|\det B_1| \geq \delta_0 > 0$, то найдется $\gamma_0 > 0$ такая, что при $t \in [0, \gamma_0]$ выполнено $|\det B_2| \geq \delta_0/2 > 0$ и, таким образом, на интервале $[0, \gamma_0]$ $|\det B_i| \geq \delta_0/2 > 0$ для $i = 1, 2$. Более того, можно в определении матрицы B и в условии (2.36) вместо функций $L^{-1}M_i\Phi(x_j, t)$ можно брать функции $L^{-1}M_iu_0(x_j)$. Доказательство проводится по аналогии, достаточно взять $\Phi_2 = u_0$ и повторить вышеприведенную оценку. Действительно, имеется

$$\begin{aligned} |L^{-1}M_i\Phi_1(x_j, t) - L^{-1}M_iu_0(x_j, t)| &\leq c\|M_i\Phi_1(x, t) - M_iu_0(x, t)\|_{L_p(G)} \\ &\leq c\|\Phi_1(x, t) - u_0(x)\|_{W_p^2(G)} \leq ct^{1-1/p}\|\Phi_{1t}\|_{L_p(0, T; W_p^2(G))}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Теорема 5. Пусть выполнены условия (2.26) – (2.31), (2.36) и

$$f_0 \in L_p(Q), \quad f_i \in L_\infty(0, T; L_p(G)), \quad u_0(x) \in W_p^2(G),$$

$$\varphi \in W_p^1(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma)), \quad \alpha_i \in W_p^1(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad p > n,$$

где $s_0 = 2 - 1/p$ в случае условий Дирихле и $s_0 = 1 - 1/p$ в противном случае. Тогда существует постоянная $\gamma_0 > 0$ такая, что на промежутке $[0, \gamma_0]$ существует единственное решение $(u, c_1, \dots, c_r)$ задачи (2.32) – (2.35), (2.25) такое, что

$$\begin{aligned} u &\in C([0, \gamma_0]; W_p^2(G)), \quad u_t \in L_p(0, \gamma_0; W_p^2(G)), \\ c_i(t) &\in L_p(0, \gamma_0) \quad (i = 1, 2, \dots, r), \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть

$$\Phi \in C([0, T]; W_p^2(G)), \quad \Phi_t \in L_p(0, T; W_p^2(G))$$

решение задачи (см. теорему 2)

$$L\Phi_t + M_{r_0}\Phi = f_0, \quad \Phi|_{t=0} = u_0, \quad R(t)\Phi|_S = \varphi. \quad (2.38)$$

Тогда функция $V = u - \Phi$ есть решение задачи

$$LV_t + MV = \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t) f_i(x, t) - \sum_{i=r_0+1}^r c_i(t) M_i \Phi, \quad (2.39)$$

$$V|_{t=0} = 0, \quad R(t)V|_S = 0.$$

Дальнейшие рассуждения приводятся в случае краевых условий Дирихле. Общий случай почти ничем не отличается, как было отмечено в предыдущем параграфе (см. замечание 2.1) и в этом случае можно воспользоваться оценками из теоремы 2 для дополнительного слагаемого возникающего в интегральном уравнении.

Найдется $\gamma_0 > 0$ такая, что на $[0, \gamma_0]$ выполнено (2.36), где δ_0 заменено на $\delta_0/2$. Стоит отметить, что u решение задачи (2.32) – (2.35). Тогда

$$V(x_j, t) = \alpha_j(t) - \Phi(x_j, t) = \tilde{\alpha}_j(t). \quad (2.40)$$

Функция $\Phi \in W_p^2(G; W_p^1(0, T))$ и значит после может быть изменения на множестве меры 0

$$\Phi \in C^\alpha(\bar{G}; W_p^1(0, T)), \alpha \leq 2 - \frac{n}{p}$$

(см., например, вложение (5.4) в [67]). В частности, $\Phi(x_i, t) \in W_p^1(0, T)$, тогда

$$\tilde{\alpha}_j(t) \in W_p^1(0, T) \quad (j = 1, 2, \dots, r). \quad (2.41)$$

Обратим оператор L в (2.39). Имеется:

$$V_t + L^{-1}MV = \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t) L^{-1} f_i(x, t) - \sum_{i=r_0+1}^r c_i(t) L^{-1} M_i \Phi. \quad (2.42)$$

Также при почти всех t определен след $L^{-1} M_i \Phi(x_j, t)$ и более того $L^{-1} M_i \Phi(x_j, t) \in L_\infty(0, T)$. Действительно, $L^{-1} M_i \Phi(x, t) \in W_p^2(G; L_p(0, T))$ и следовательно существует след [67, (5.4)], $L^{-1} M_i \Phi(x_j, t) \in L_p(0, T)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|L^{-1} M_i \Phi(x_j, t)\|_{L_\infty(0, T)} &\leq c_1 \|L^{-1} M_i \Phi(x, t)\|_{L_\infty(0, T; W_p^2(G))} \leq \\ &c_2 \|M_i \Phi(x, t)\|_{L_\infty(0, T; L_p(G))} \leq c_3 \|\Phi(x, t)\|_{L_\infty(0, T; W_p^2(G))}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|L^{-1} M_i \Phi(x_j, t)\|_{L_\infty(0, T)} \leq c \|\Phi\|_{C([0, T]; W_p^2(G))}. \quad (2.43)$$

Аналогично доказывается, что $L^{-1}f_i(x_j, t) \in L_\infty(0, T)$ и эти следы определены. Можно взять в (2.42) $x = x_j$. Тогда

$$V_t(x_j, t) + L^{-1}MV(x_j, t) = \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t)L^{-1}f_i(x_j, t) - \sum_{i=r_0+1}^r c_i(t)L^{-1}M_i\Phi(x_j, t).$$

В силу условий переопределения:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{jt} + L^{-1}M_{r_0}V(x_j, t) + \sum_{i=r_0+1}^r c_i(t)L^{-1}M_iV(x_j, t) &= \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t)L^{-1}f_i(x_j, t) \\ &- \sum_{i=r_0+1}^r c_i(t)L^{-1}M_i\Phi(x_j, t) \quad (j = 1, 2, \dots, r). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Равенство (2.44) можно записать в виде:

$$B\vec{c} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{1t} + L^{-1}M_{r_0}V(x_1, t) + \sum_{i=r_0+1}^r c_i(t)L^{-1}M_iV(x_1, t) \\ \dots \\ \dots \\ \tilde{\alpha}_{rt} + L^{-1}M_{r_0}V(x_r, t) + \sum_{i=r_0+1}^r c_i(t)L^{-1}M_iV(x_r, t) \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

или в виде

$$\vec{c} = B^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{1t} + L^{-1}M_{r_0}V(x_1, t) + \sum_{i=r_0+1}^r c_i(t)L^{-1}M_iV(x_1, t) \\ \dots \\ \dots \\ \tilde{\alpha}_{rt} + L^{-1}M_{r_0}V(x_r, t) + \sum_{i=r_0+1}^r c_i(t)L^{-1}M_iV(x_r, t) \end{pmatrix} = R(\vec{c}). \quad (2.46)$$

На правую часть можно посмотреть как на оператор $R(\vec{c})$, сопоставляющий вектору $\vec{c}(t)$ решение $V(x, t)$ задачи (2.39) и затем сопоставляющее $V(x, t)$ правую часть (2.46). Необходимо исследовать свойства этого оператора. Фиксируется

$$R_0 = 2\|B^{-1}\vec{\alpha}\|_{L_p(0, T)}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{1t} \\ \dots \\ \tilde{\alpha}_{rt} \end{pmatrix}.$$

По построению $\tilde{\alpha}_{it} \in L_p(0, T)$. В силу того, что элементы матрицы B принадлежат $L_\infty(0, T)$ имеем, что $B^{-1}\vec{\alpha} \in L_p(0, T)$. Как вытекает из теоремы 2, для

любой вектор-функции

$$\vec{c}(t) \in B_{R_0, \gamma} = \{\vec{c} \in L_p(0, \gamma) : \|\vec{c}\|_{L_p(0, \gamma)} \leq R_0\}, \quad \gamma \leq T,$$

задача

$$\begin{aligned} LV_t + MV &= \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t) f_i(x, t) - \sum_{i=r_0+1}^r c_i(t) L^{-1} M_i \Phi, \\ V|_{t=0} &= 0, \quad V|_S = 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

имеет единственное решение и совокупность величин

$$\|V_t\|_{L_p(0, T; W_p^2(G))} + \|V\|_{C([0, T]; W_p^2(G))}$$

равномерно ограничена величиной, зависящей от R_0 .

Так как $e^{-\lambda t} V(t, x) = e^{-\lambda t} \int_0^t V_\tau(\tau) d\tau$ при $\lambda > 0$, имеем

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \|V(t, x)\|_{W_p^2(G)} &\leq e^{-\lambda t} \int_0^t \|V_\tau\|_{W_p^2(G)} e^{-\lambda \tau} e^{\lambda \tau} d\tau \\ &\leq e^{-\lambda t} \left(\int_0^t \|V_\tau\|_{W_p^2(G)}^p e^{-\lambda p \tau} d\tau \right)^{1/p} \left(\int_0^t e^{\lambda \tau q} d\tau \right)^{1/q} \\ &= e^{-\lambda t} \left(\frac{e^{\lambda t q} - 1}{\lambda q} \right)^{1/q} \left(\int_0^t \|V_\tau\|_{W_p^2(G)}^p e^{-\lambda p \tau} d\tau \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{e^{-\lambda t} e^{\lambda t}}{(\lambda q)^{1/q}} \left(\int_0^\gamma \|V_t\|_{W_p^2(G)}^p e^{-\lambda p t} dt \right)^{1/p}, \quad q = p/(p-1). \end{aligned}$$

Имеем

$$\sup_t e^{-\lambda t} \|V(t, x)\|_{W_p^2(G)} \leq \frac{1}{|\lambda|^{1/q}} \left(\int_0^\gamma \|V_t\|_{W_p^2(G)}^p e^{-\lambda t p} dt \right)^{1/p}. \quad (2.48)$$

Из (2.47) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\| \|V_t\|_{W_p^2(G)} e^{-\lambda t} \|_{L_p(0, \gamma)} \leq c(\| \|MV\|_{L_p(G)} e^{-\lambda t} \|_{L_p(0, \gamma)} \\ &+ \| \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t) f_i(x, t) - \sum_{i=r_0+1}^r c_i(t) L^{-1} M_i \Phi \|_{L_p(G)} e^{-\lambda t} \|_{L_p(0, \gamma)}) \\ &\leq \frac{c_0}{|\lambda|^{1/q}} (\|\vec{c}\|_{L_p(0, \gamma)} + 1) \|V_t e^{-\lambda t}\|_{L_p(0, \gamma; W_p^2(G))} + c_1 \|\vec{c}\|_{L_p(0, \gamma)}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где постоянная c_0 не зависит от $\lambda > 0, \gamma \leq T$. Выбрав достаточное большое $\lambda > 0$ и оценив $\|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)}$ через R_0 имеем, что

$$\|V_t\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} + \|V\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq c_2 \|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c(R_0), \quad (2.50)$$

где $c(R_0)$ не зависит от $\vec{c} \in B_{R_0,\gamma}$.

Можно получить дальнейшие оценки. Пусть $\vec{c}^1, \vec{c}^2$ – вектор-функции из $L_p(0, \gamma)$ и V^1, V^2 – соответствующие решения задачи (2.47). Таким образом

$$LV_t^i + M_{r_0}V^i + \sum_{j=r_0+1}^r c_j^i(t)M_jV^i = \sum_{j=1}^{r_0} c_j^i(t)f_i(x, t) - \sum_{j=r_0+1}^r c_j^i(t)M_j\Phi. \quad (2.51)$$

Функции V^i удовлетворяют оценке (2.50). Вычитая равенства (2.51) при $i = 1, 2$ и обозначая $\omega = V^1 - V^2$, можно получить

$$\begin{aligned} L\omega_t + M_{r_0}\omega + \sum_{j=r_0+1}^r c_j^1(t)(M_j\omega) &= \sum_{j=1}^{r_0} (c_j^1 - c_j^2)(t)f_i(x, t) \\ &- \sum_{j=r_0+1}^r (c_j^1 - c_j^2)(t)M_jV^2 - \sum_{j=r_0+1}^r (c_j^1 - c_j^2)(t)M_j\Phi. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Используя неравенство (2.50) и предыдущие рассуждения можно получить оценку

$$\|\omega_t\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} + \|\omega\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq c_3 \|\vec{c}^1 - \vec{c}^2\|_{L_p(0,\gamma)}. \quad (2.53)$$

Оценка справедлива для всех $\vec{c}(t) \in B_{R_0,\gamma}$. Приведем оценки для оператора R . Имеем, используя (2.53), что

$$\begin{aligned} \|R(c^1) - R(c^2)\|_{L_p(0,\gamma)} &\leq c \sum_{j=1}^r \|L^{-1}M_{r_0}(V^1 - V^2)(x_j, t) \\ &+ \sum_{i=r_0+1}^r \|c_i^1 L^{-1}M_i V^1(x_j, t) - c_i^2 L^{-1}M_i V^2(x_j, t)\|_{L_p(0,\gamma)} \\ &\leq \sum_{j=1}^r (\| \sum_{i=r_0+1}^r (c_i^1 - c_i^2)(t) L^{-1}M_i V^1(x_j, t) \|_{L_p(0,\gamma)} \\ &+ \|c_i^2(L^{-1}M_i V^1(x_j, t) - L^{-1}M_i V^2(x_j, t))\|_{L_p(0,\gamma)}) + c_4 \|\vec{c}^1 - \vec{c}^2\|_{L_p(0,\gamma)}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Первая часть слагаемых в правой части оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} &\|(c_i^1 - c_i^2)L^{-1}M_i V^1(x_j, t)\|_{L_p(0,\gamma)} \\ &\leq \|c_i^1 - c_i^2\|_{L_p(0,\gamma)} \|L^{-1}M_i V^1(x_j, t)\|_{L_\infty(0,\gamma)}. \end{aligned}$$

В силу теорем вложения и теоремы 1:

$$\begin{aligned} & \|L^{-1}M_i V^1(x_j, t)\|_{L_\infty(0, \gamma)} \leq \|M_i V^1\|_{L_\infty(0, \gamma; L_p(G))} \\ & \leq c\|V^1(x, t)\|_{L_\infty(0, \gamma; W_p^2(G))} \leq c\gamma^{1/q}\|V_t^1\|_{L_p(0, \gamma; W_p^2(G))} \quad \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1\right). \end{aligned}$$

Тогда можно получить оценку

$$\|(c_i^1 - c_i^2)L^{-1}M_i V^1(x_j, t)\|_{L_p(0, \gamma)} \leq c_1\gamma^{1/q}\|\vec{c}^1 - \vec{c}^2\|_{L_p(0, \gamma)}, \quad (2.55)$$

где постоянная c_1 зависит от R_0 , но не зависит от γ . Точно так же

$$\begin{aligned} & \|c_i^2(L^{-1}M_i(V^1(x_j, t) - V^2(x_j, t)))\|_{L_q(0, \gamma)} \leq R_0\|V^1(x, t) - V^2(x, t)\|_{L_\infty(0, \gamma; W_p^2(G))} \\ & \leq R_0c\gamma^{1/q}\|V_t^1 - V_t^2\|_{L_p(0, \gamma; W_p^2(G))} \leq c_1\gamma^{1/q}\|\vec{c}^1 - \vec{c}^2\|_{L_p(0, \gamma)}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Из (2.55), (2.56) и (2.54) имеется, что

$$\|R(c^1) - R(c^2)\|_{L_p(0, \gamma)} \leq c\gamma^{1/q}\|\vec{c}^1 - \vec{c}^2\|_{L_p(0, \gamma)}. \quad (2.57)$$

Пусть

$$\gamma_0 : c\gamma_0^{1/q} = 1/2.$$

Тогда при всех

$$c^1, c^2 \in B_{R_0, \gamma}$$

с $\gamma \leq \gamma_0$ выполняется неравенство (2.57). Кроме того

$$R(\vec{c}) = R(\vec{c}) - R(0) + R(0)$$

и

$$\|R(\vec{c})\|_{L_q(0, \gamma)} \leq \|R(0)\|_{L_q(0, \gamma)} + \frac{1}{2}\|\vec{c}\|_{L_q(0, \gamma)} \leq \frac{R_0}{2} + \frac{R_0}{2} = R_0.$$

Таким образом R переводит шар B_{R_0, γ_0} в себя и является в нем сжимающим. По теореме о неподвижной точке уравнение (2.47) разрешимо. По построению, V является решением (2.39). То факт, что V удовлетворяет (2.40) доказывается с использованием определений также, как и в линейном случае (см. доказательство теоремы 4). $\square$

Приведем теорему характеризующую устойчивость решений задачи (2.32) – (2.35). Пусть $\vec{F} = (f_0, \varphi, \alpha_1, \dots, \alpha_r, u_0)$ набор данных рассматриваемой задачи. Построим матрицу $B = B(\vec{F})$, j -я строка которой есть вектор

$$(L^{-1}f_1, L^{-1}f_2, \dots, L^{-1}f_{r_0}, -L^{-1}M_{r_0+1}u_0, \dots, -L^{-1}M_ru_0)|_{x=x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Фиксируем параметры τ_0, δ_0 и определим множество данных задачи

$$\begin{aligned} C_{R_0} = \{ \vec{F} = (f_0, \varphi, \alpha_1, \dots, \alpha_r, u_0) : \\ \vec{F} \in L_p(Q) \times W_p^2(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma)) \times (W_p^1(0, T))^r \times W_p^2(G) \\ \|\vec{F}\|_{H_T} = \|f_0\|_{L_p(Q)} + \|\varphi\|_{W_p^2(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma))} + \\ \sum_{i=1}^r \|\alpha_i\|_{W_p^1(0, T)} + \|u_0\|_{W_p^2(G)} \leq R_0, \\ |\det B(\vec{F})| \geq \delta_0 \text{ для п.в. } t \in [0, \tau_0], \text{ выполнены условия (2.31)} \}. \end{aligned}$$

Также рассматриваются пространства H_τ с $\tau \in (0, T)$. Норма в пространстве H_τ определяется как и выше (Q заменяется на Q^τ , интервал $(0, T)$ заменяется на $(0, \tau)$).

Теорема 6. Пусть выполнены условия (2.26) – (2.30). Тогда найдется параметр $\tau_1 \leq \tau_0$ и постоянная $C > 0$ такая, что для любой пары решений u^1, u^2 и $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ рассматриваемой задачи (2.32) – (2.35) из указанного в теореме 5 класса отвечающих данным $\vec{F}_i \in H_{\tau_1}$ ($i = 1, 2$) справедлива оценка устойчивости

$$\|u^1 - u^2\|_{W_p^1(0, \tau_1; W_p^2(G))} + \sum_{i=1}^{r_2} \|c_i^1(t) - c_i^2(t)\|_{L_p(0, \tau_1)} \leq C \|\vec{F}_1 - \vec{F}_2\|_{H_{\tau_1}}.$$

Доказательство. Даны наборы данных $\vec{F}_i = (f_0^i, \varphi^i, \alpha_1^i, \dots, \alpha_r^i, u_0^i)$. Построим функции $\Phi^i \in W_p^2(0, \tau_1; W_p^2(G))$ такие, что $\Phi^i(0) = u_0^i$, $R(t)\Phi^i|_S = \varphi^i$ как решение задачи (2.38) с используемыми данными. В силу теоремы 3, найдутся постоянные $c(R_0), c_1$ такие, что

$$\|\Phi_i\|_{W_p^2(0, \gamma; W_p^2(G))} \leq c(R_0),$$

$$\begin{aligned} \|\Phi^1 - \Phi^2\|_{W_p^1(0, \gamma; W_p^2(G))} \leq c_1(\|u_0^1 - u_0^2\|_{W_p^2(G)} + \|f_0^1 - f_0^2\|_{L_p(0, \gamma)} \\ + \|\varphi^1 - \varphi^2\|_{W_p^1(0, \gamma; W_p^{s_0}(\Gamma))}) \end{aligned} \quad (2.58)$$

для любого набора $\vec{F}_i \in H_{\tau_0}$ и $\gamma \leq \tau_0$. Тогда из оценки (2.37) и определения определителя вытекает, что найдется $\gamma_0 \leq \tau_0$ такое, что $|\det \tilde{B}(\vec{F}_i)| \geq \delta_0/2$ для п.в. $t \in [0, \gamma_0]$ и любых наборов $\vec{F}_i \in H_{\tau_0}$. Как легко можно увидеть из доказательства теоремы 5, в этом случае найдутся постоянные $c_1(R_0)$ и $\gamma_1 \leq \gamma_0$ такие, что на промежутке $[0, \gamma]$ с $\gamma \leq \gamma_1$ существуют решения $u^1, u^2, \vec{c}_1, \vec{c}_2$ задачи (2.32) – (2.35) такие, что

$$\|u^i\|_{W_p^1(0, \gamma; W_p^2(G))} + \sum_{j=1}^{r_2} \|c_j^i(t)\|_{L_p(0, \gamma)} \leq c_1(R_0) \quad (2.59)$$

для любых наборов $\vec{F}_i \in H_{\gamma_1}$ и $\gamma \leq \gamma_1$. Полагая $V^i = u^i - \Phi^i$, получим

$$\begin{aligned} LV_t^i + M_{r_0}V^i + \sum_{j=r_0+1}^r c_j^i(t)M_jV^i = \\ \sum_{j=1}^{r_0} c_j^i(t)f_j(x, t) - \sum_{j=r_0+1}^r c_j^i(t)M_j\Phi^i. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Пусть $\omega = V^1 - V^2$. Тогда вычитая равенства (2.60) при $i = 1, 2$, получим

$$\begin{aligned} L\omega_t + M_{r_0}\omega + \sum_{j=r_0+1}^r c_j^1(t)M_j\omega = \\ \sum_{j=1}^{r_0} (c_j^1 - c_j^2)(t)f_j(x, t) - \sum_{j=r_0+1}^r (c_j^1 - c_j^2)(t)M_jV_t^2 \\ - \sum_{j=r_0+1}^r (c_j^1 - c_j^2)(t)M_j\Phi^1 - \sum_{j=r_0+1}^r c_j^2(t)M_j(\Phi^1 - \Phi^2). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Повторяя соответствующие рассуждения в доказательстве предыдущей теоремы получим аналог неравенства (2.53)

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{W_p^1(0, \gamma; W_p^2(G))} \leq c_1(R_0)\|\vec{c}_1 - \vec{c}_2\|_{L_p(0, \gamma)} + \\ c_2(R_0)\|\Phi^1 - \Phi^2\|_{W_p^1(0, \gamma; W_p^2(G))} + c_3\|f_0^1 - f_0^2\|_{L_p(Q^\gamma)}, \quad \gamma \leq \gamma_1. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Обращая оператор L в (2.61) и полагая $x = x_i$, получим

$$\begin{aligned} (\tilde{\alpha}_{it}^1 - \tilde{\alpha}_{it}^2) + L^{-1}M\omega(x_i, t) + R_0\omega(x_i, t) + \sum_{j=r_0+1}^r c_j^1(t)L^{-1}M_j\omega(x_i, t) \\ = \sum_{j=1}^{r_0} (c_j^1 - c_j^2)(t)L^{-1}f_j(x_i, t) - \sum_{j=r_0+1}^r (c_j^1 - c_j^2)(t)L^{-1}M_jV_t^2(x_i, t) \\ - \sum_{j=r_0+1}^r (c_j^1 - c_j^2)(t)L^{-1}M_j\Phi^1(x_i, t) - \sum_{j=r_0+1}^r c_j^2(t)M_j(\Phi^1 - \Phi^2)(x_i, t), \end{aligned} \quad (2.63)$$

где $\tilde{\alpha}_j^i = \alpha_j^i - \Phi^i(x_j, t)$. Эту систему уравнений можно записать в виде

$$B\vec{c} = \begin{pmatrix} \beta_1 + S_1(\vec{c}) \\ \cdots \\ \beta_r + S_r(\vec{c}) \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_r \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{c}_1 - \vec{c}_2 = (c_1^1 - c_1^2, \dots, c_r^1 - c_r^2)^T, \quad \beta_i = \tilde{\alpha}_{it}^1 - \tilde{\alpha}_{it}^2 + \sum_{j=r_0+1}^r c_j^2(t)M_j(\Phi^1 - \Phi^2)(x_i, t), \\ S_i(\vec{c}) = L^{-1}M_{r_0}\omega(x_i, t) + R_0\omega(x_i, t) + \sum_{j=r_0+1}^r c_j^1(t)L^{-1}M_j\omega_t(x_i, t) \\ \sum_{j=r_0+1}^r (c_j^1 - c_j^2)(t)L^{-1}M_jV_t^2(x_i, t). \end{aligned}$$

Эти равенства можно записать также в виде

$$\vec{c} = B^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 + S_1(\vec{c}) \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_r + S_r(\vec{c}) \end{pmatrix} = S(\vec{c}). \quad (2.64)$$

Далее, фактически повторяется конец доказательства предыдущей теоремы. Поэтому некоторые детали опускаются, записывая лишь результат. Оцениваем величину $\|S(\vec{c})\|_{L_p(0,\gamma)}$ (см. вывод оценки (2.57) в предыдущей теореме). Покажем как оцениваются различные слагаемые входящие в эту норму. Например, имеем (используем (2.58))

$$\begin{aligned} \|(c_i^1 - c_i^2)L^{-1}M_iV_t^2(x_j, t)\|_{L_p(0,\gamma)} &\leq c_1\|c_i^1 - c_i^2\|_{L_p(0,\gamma)}\|L^{-1}M_iV^2(x_j, t)\|_{L_\infty(0,\gamma)} \\ &\leq c_2\|c_i^1 - c_i^2\|_{L_p(0,\gamma)}\|V^2\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq c_3\|c_i^1 - c_i^2\|_{L_p(0,\gamma)}\|V^2\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq \\ &c_4\|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)}\gamma^{1-1/p}\|V^2\|_{W_p^1(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq c_5(R_0)\|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)}\gamma^{1-1/p}, \end{aligned}$$

где все постоянные не зависят от γ . Аналогично (используем (2.62)) имеем, что

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=r_0+1}^r c_j^1(t)L^{-1}M_j\omega(x_i, t) \right\|_{L_p(0,\gamma)} &\leq C(R_0)\|\omega\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))} \\ &\leq C_1(R_0)\gamma^{1-1/p}\|\omega\|_{W_p^1(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq C_3(R_0)\gamma^{1-1/p}\|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|R_0\omega(x_i, t)\|_{L_p(0,\gamma)} &\leq c_1\|R_0\omega(x, t)\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq c_2\|\omega\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))} \\ &\leq c_3\gamma^{1-1/p}\|\omega\|_{W_p^1(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq \gamma^{1-1/p}(c_4\|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)} + c_5(R_0)\|\Phi^1 - \Phi^2\|_{W_p^1(0,\gamma;W_p^2(G))} + c_6\|f_0\|_{L_p(0,\gamma)}). \end{aligned}$$

Другие слагаемые входящие в норму $\|S(\vec{c})\|_{L_p(0,\gamma)}$ оцениваются аналогично. Таким образом, используя определение оператора S и полученные выше оценки (2.61), (2.58) получим, что

$$\|S(\vec{c})\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c(R_0)\gamma^{1-1/p}\|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)} + c_1(R_0)\|\vec{F}_1 - \vec{F}_2\|_{H_{\tau_1}}. \quad (2.65)$$

Выберем $\gamma_2 \leq \gamma_1$ такое, что $c(R_0)\gamma_2^{1/q} \leq 1/2$. Тогда из равенства (2.64) получим оценку ($\gamma \leq \gamma_2$)

$$\|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)} \leq 2\|\vec{\beta}\|_{L_p(0,\gamma)} + 2c_1(R_0)\|\vec{F}_1 - \vec{F}_2\|_{H_{\tau_1}}. \quad (2.66)$$

Используя определение вектора β и оценку (2.38) получим неравенство

$$\|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma_2)} \leq c_1\|\vec{F}_1 - \vec{F}_2\|_{H_{\gamma_2}}.$$

Тогда оценка (2.62) влечет утверждение теоремы. □

Таким образом, доказано, что рассматриваемые обратные задачи корректны, по крайней мере локально по времени.

2.3 Линейные обратные задачи для математических моделей Буссинеска – Лява

Уравнение вида

$$(\sigma^2 - \Delta)u_{tt} + \gamma_1(\Delta - \beta_1)u_t + \gamma_2(\Delta - \beta_2)u = f, \quad n \geq 1. \quad (2.67)$$

называется уравнением Буссинеска или Буссинеска – Лява. Это уравнение описывает продольные колебания упругого стержня с учетом инерции и при внешней нагрузке, движение длинных волн, распространение волн на мелкой воде, волновые процессы в плазме и ряд других физических процессов [42, 46, 55, 110, 158]. Функция u (в первом случае) есть продольное смещение, другие параметры зависят от плотности, модуля Юнга, отношения Пуассона, коэффициента упругости. При описании распространения волн на мелкой воде, параметры $\sigma, \gamma_i, \beta_i$ ($i = 1, 2$), связывают число Бонда, глубину и гравитационную постоянную. Функция u определяет высоту волны в момент времени t в точке x , функция f задает внешние силы. Если значения параметров заменить на некоторые определенные значения, то в класс уравнений (2.67) входит также уравнение Соболева [150, 151], которое возникает при исследовании малых колебаний вращающейся идеальной жидкости, и уравнение гравитационно-гироскопических волн (см. [5–7]). Последнее уравнение может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = mc_0^2 \tau \frac{\partial^3 \rho}{\partial t \partial x^2} - mc_0^2 \frac{\partial^4 \rho}{\partial t^2 \partial x^2} \quad (2.68)$$

В полученном уравнении ρ – плотность, c_0 – скорость звука, τ – время релаксации. За затухание звуковой волны вследствие теплопроводности и вязкости отвечает первый член в правой части, а второй член в правой части регулирует дисперсионные эффекты. Уравнение (2.68) описывает распространение гравитационно-гироскопических волн в диспергирующих средах, например, поверхностно-акустические волны [48].

В работе рассматриваются обратные задачи об определении правой части или неизвестных параметров среды. Ранее, в работах [23, 47] рассматривалась

задача управления, в которой определялась правая часть f а в работе [164] и обратная задача об определении функции f . В отличие от полученных результатов все рассмотрения в этих работах проходят в классах непрерывных функций по времени и все коэффициенты в уравнении не зависят от времени.

Этот параграф посвящен линейным задачам об определении правой части. Рассматривается задача об определении вместе с решением u неизвестной правой части и коэффициентов в уравнении:

$$L_0 u_{tt} + L_1 u_t + L_2 u = f, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (2.69)$$

где, L_i ($i = 0, 1, 2$) – операторы второго порядка по переменным x , G – ограниченная область в R^n ($n \geq 1$) с границей $\Gamma \in C^2$. Уравнение дополняется краевыми и начальными условиями:

$$R(t)u|_S = \varphi, \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad (2.70)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x). \quad (2.71)$$

Задача состоит в определении неизвестной правой части f , зависящей от времени по заданным условиям переопределения, в качестве которых мы рассматриваем значения решения u в отдельных точках. Таким образом, условия переопределения имеют вид

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2.72)$$

где x_i произвольные точки лежащие в G .

Предполагается ниже, что $\Gamma \in C^2$ и считается, что операторы L_k ($k = 0, 1, 2$) имеют вид

$$L_k u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i^k(x, t) u_{x_i} + a_0^k(x, t) u,$$

где все коэффициенты вещественны, а оператор L_0 предполагается эллиптическим, т.е. существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 \xi_i \xi_j \geq \delta_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in R^n, \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}.$$

Фиксируется параметр $p > n$ (для простоты) и предполагается что

$$\begin{aligned} a_{ij}^0 &\in C(\overline{Q}), \quad a_i^0, a_0^0 \in C([0, T]; L_p(G)), Q \\ a_{ij}^k &\in L_p(0, T; L_\infty(G)), \quad a_i^k, a_0^k \in L_p(Q) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = r_0 + 1, \dots, r_2). \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} a_0^0 &\leq 0 \text{ п.в. в } Q \text{ в случае условий Дирихле и } a_0^0 \leq 0 \text{ п.в. в } Q \\ &\text{и } a_0^0 < 0 \text{ п.в. в некоторой окрестности} \end{aligned} \quad (2.74)$$

границы S и $\sigma \geq 0$ на S в случае условий с косой производной.

В случае краевых условия с косой производной также требуется, чтобы

$$\partial_t^k \gamma_i, \partial_t^k \sigma \in L_\infty(0, T; C^1(\overline{\Gamma})), \quad k \leq 2, \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i n_i \geq \delta_1 > 0 \quad \forall (x, t) \in S, \quad (2.75)$$

Пусть правая часть в (2.69) имеет вид:

$$f = \sum_{i=1}^m c_i(t) f_i(x, t) + f_0(x, t), \quad (2.76)$$

где функции $f_i \in L_\infty(0, T; L_p(G))$ даны и $c_i(t)$ подлежат определению с использованием условий (2.72). Условия согласования (1.13):

$$\begin{aligned} \psi_i(0) &= u_0(x_i), \quad \psi_{it}(0) = u_1(x_i), \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \varphi(x, 0) &= R(0)u_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = R(0)u_1(x) + R_t(0)u_0(x), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Условия корректности. Пусть B матрица с элементами $b_{ji} = L_0^{-1} f_i(x_j, t)$ и пусть существует $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det B| \geq \delta_0 \quad \text{для п.в. } t \in [0, T], \quad (2.78)$$

где $L_0^{-1} f_i$ есть решение u_i задачи: $L_0 u_i = f_i, \quad R(t)u_i|_S = 0$.

Рассматривается задача (2.69) – (2.72), (2.76) считая, что операторы L_i удовлетворяют вышеприведенным условиям.

Теорема 7. Пусть коэффициенты операторов L_i ($i = 0, 1, 2$) удовлетворяют условиям (2.73), (2.74), (2.75), выполнены условия (2.77), (2.78) и

$$f_0 \in L_p(Q), \quad f_i \in L_\infty(0, T; L_p(G)), \quad u_j(x) \in W_p^2(G) \quad (j = 0, 1),$$

$$\varphi \in W_p^2(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma)),$$

$$\psi_i \in W_p^2(0, T), i = 1, 2, \dots, m, \quad p > n.$$

Тогда существует единственное решение задачи (2.69) – (2.72), (2.76) такое, что:

$$u, u_t \in C([0, T]; W_p^2(G)), u_{tt} \in L_p(0, T; W_p^2(G)), c_i(t) \in L_p(0, T), \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3, необходимо построить функцию $\Phi(x, t)$ такую, что $\Phi \in W_p^2(0, T; W_p^2(G))$, $R(t)\Phi|_S = \varphi$, $\Phi|_{t=0} = u_0(x)$, $\Phi_t|_{t=0} = u_1(x)$. Делая замену неизвестного: $u = V + \Phi$ ($V = u - \Phi$). Уравнение приведет к виду:

$$L_0 V_{tt} + L_1 V_t + L_2 V = f_0 - L_0 \Phi_{tt} - L_1 \Phi_t - L_2 \Phi + \sum_{i=1}^m c_i f_i = g_0 + \sum_{i=1}^m c_i f_i,$$

где функция V удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} V(x_i, t) &= u(x_i, t) - \Phi(x_i, t) = \psi_i - \Phi(x_i, t) = \varphi_i(t), \\ R(t)V|_S &= 0, \quad V|_{t=0} = 0, \quad V_t|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Обращая L_0 получим:

$$V_{tt} + L_0^{-1} L_1 V_t + L_0^{-1} L_2 V + R_0 V = L_0^{-1} g_0 + \sum_{i=1}^m c_i L_0^{-1} f_i, \quad (2.80)$$

где оператор L_0^{-1} сопоставляет функции g решение задачи: $L_0 V = g$, $R(t)V|_S = 0$. Соответственно, оператор $R_0(V)$ сопоставляет каждой функции V решение задачи $L_0 v = 0$, $R(t)v|_\Gamma = R_{tt}V + 2R_t V_t$. Функция $\Phi(x, t) \in W_p^2(G; W_p^2(0, T))$ и значит (так как $p > n$) после может быть изменения на множестве меры ноль, можно считать, что функция $\Phi(x, t)$ непрерывна по x как функция со значениями в банаховом пространстве $W_p^2(0, T)$ (см. [66]) и более того $\Phi(x, t) \in C^1(\bar{G}; W_p^2(0, T))$. Следовательно, $\Phi(x_i, t) \in W_p^2(0, T)$, тогда $\varphi_i \in W_p^2(0, T)$. Полагая $x = x_i$, при $i = 1, \dots, m$. получим

$$\varphi_{itt} + (L_0^{-1}(L_1 \partial_t + L_2) + R_0)V(x_i, t) = L_0^{-1} g_0(x_i, t) + \sum_{j=1}^m (L_0^{-1} f_j)(x_i, t) c_j(t).$$

В силу условия (2.78) из этого равенства вытекает, что

$$\vec{c} = B^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_{1tt} + (L_0^{-1}(L_1 \partial_t + L_2) + R_0)V(x_1, t) + R_0 V(x_1, t) - L_0^{-1} g_0(x_1, t) \\ \dots \\ \dots \\ \varphi_{mtt} + (L_0^{-1}(L_1 \partial_t + L_2) + R_0)V(x_m, t) + R_0 V(x_m, t) - L_0^{-1} g_0(x_m, t) \end{pmatrix},$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)^T.$$

Получили уравнение для нахождения вектор-функции $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)^T$, где $V = V(\vec{c})$ оператор сопоставляющий вектору $\vec{c}$ решение задачи

$$\begin{aligned} A_0 V &= L_0 V_{tt} + L_1 V_t + L_2 V = g_0 + \sum_{i=1}^m c_i f_i, \\ R(t)V|_S &= 0, \quad V|_{t=0} = 0, \quad V_t|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Представим функцию V в следующем виде:

$$V = A_0^{-1} g_0 + A_0^{-1} \left(\sum_{i=1}^m c_i f_i \right) = V_0 + A_0^{-1} \left(\sum_{i=1}^m c_i f_i \right).$$

Тогда систему для нахождения $\vec{c}$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{c}_0 + R(\vec{c}), \quad (2.82) \\ \vec{c}_0 &= B^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_{1tt} + (L_0^{-1}(L_1 + L_2) + R_0 V_0)(x_1, t) - L_0^{-1} g_0(x_1, t) \\ \dots \\ \dots \\ \varphi_{mtt} + (L_0^{-1}(L_1 + L_2) + R_0 V_0)(x_m, t) - L_0^{-1} g_0(x_m, t) \end{pmatrix}, \\ R(\vec{c}) &= B^{-1} \begin{pmatrix} (L_0^{-1}(L_1 \partial_t + L_2) + R_0) A_0^{-1} \sum_{i=1}^m c_i f_i(x_1, t) \\ \dots \\ \dots \\ (L_0^{-1}(L_1 \partial_t + L_2) + R_0) A_0^{-1} \sum_{i=1}^m c_i f_i(x_m, t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отметим, что функции $L_0^{-1} f_i(x_j, t)$ принадлежат $L_\infty(0, T)$. Действительно, $f_i(x, t) \in L_\infty(0, T; L_p(G))$ и $L^{-1} f_i \in L_\infty(0, T; W_p^2(G))$. Таким образом, при почти всех t $L^{-1} f_i \in W_p^2(G)$. В силу теорем вложения (см., например, [119]) и условия $p > n$ функция $L_0^{-1} f_i(x, t)$ непрерывна после может быть изменения на множестве меры 0 при почти всех t , и определен след $L_0^{-1} f_i(x_j, t)$. Имеем

$$\|L_0^{-1} f_i(x_j, t)\|_{L_\infty(0, T)} \leq C \|L_0^{-1} f_i(x, t)\|_{L_\infty(0, T; W_p^2(G))} \leq C_1 \|f_i\|_{L_\infty(0, T; L_p(G))}.$$

Также легко увидеть, что будет справедлива оценка $\|B^{-1}\vec{g}(t)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq C\|\vec{g}(t)\|_{L_p(0,\gamma)}$, для любого вектора $\vec{g} \in L_p(0,\gamma)$ и $\gamma \in [0, T]$. Отметим, что постоянная C не зависит от γ . Таким образом,

$$\|R(\vec{c})\|_{L_p(0,\gamma)} \leq C_2 \sum_{j=1}^m \|(L_0^{-1}(L_1\partial_t + L_2) + R_0)A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m c_i f_i)(x_j, t)\|_{L_p(0,\gamma)}. \quad (2.83)$$

В силу теорем вложения и теоремы 1 правая часть оценивается через

$$\begin{aligned} & C_3 \sum_{j=1}^m \|(L_0^{-1}(L_1\partial_t + L_2) + R_0)A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m c_i f_i)\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} \\ & \leq C_4(\|(L_1\partial_t + L_2)A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m c_i f_i)\|_{L_p(0,\gamma;L_p(G))} + \|R_0A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m c_i f_i)\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))}). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Оценим выражение

$$L_1\partial_t u = \sum a_{ij}^1 u_{tx_i x_j} + \sum a_i^1 u_{tx_i} + a_0^1 u_t.$$

Для каждого слагаемого имеем:

$$\begin{aligned} \|a_{ij}^1 u_{tx_i x_j}\|_{L_p(0,\gamma;L_p(G))} & \leq \|a_{ij}^1\|_{L_p(0,T;L_\infty(G))} \|u_t\|_{L_\infty(0,\gamma;L_p(G))} \\ & \leq c_{ij} \|u_t\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))}, \\ \|a_i^1 u_{tx_i}\|_{L_p(0,\gamma;L_p(G))} & \leq \|a_i^1\|_{L_p(Q)} \|u_{tx_i}\|_{L_\infty(Q)} \leq c_i \|u_t\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))}, \\ \|a_0^1 u_t\|_{L_p(0,\gamma;L_p(G))} & \leq c_0 \|u_t\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))}, \end{aligned}$$

где c_{ij}, c_i – постоянные. Таким образом, складывая оценки получим, что

$$\|L_1\partial_t u\|_{L_p(0,\gamma;L_p(G))} \leq c \|u_t\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))}. \quad (2.85)$$

Аналогично

$$\|L_2 u\|_{L_p(0,\gamma;L_p(G))} \leq c \|u\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))}. \quad (2.86)$$

Как и в теореме 3 (см. оценку (1.40))

$$\|R_0 u\|_{L_p(0,\gamma;L_p(G))} \leq c \|u\|_{W_\infty^1(0,\gamma;W_p^2(G))}. \quad (2.87)$$

Постоянные в (2.85) – (2.87) не зависят от γ . Учитывая оценки (2.83) – (2.87), получим

$$\begin{aligned} \|R(\vec{c})\|_{L_p(0,\gamma)} &\leq C \|A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m c_i f_i)(x, t)\|_{W_\infty^1(0,\gamma;W_p^2(G))} \\ &\leq C_3 \gamma^{1-1/p} \|A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m c_i f_i)\|_{W_p^2(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq C_4 \gamma^{1-1/p} \|\sum_{i=1}^m c_i f_i\|_{L_p(Q^\gamma)}. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} \|c_i f_i\|_{L_p(Q^\gamma)} &= \left(\int_0^\gamma |c_i|^p(t) \int_G |f_i|^p(x, t) dx dt \right)^{1/p} \\ &\leq \|f_i\|_{L_\infty(0,T;L_p(G))} \left(\int_0^\gamma |c_i|^p(t) dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Тогда выражение в правой части в вышеприведенной оценке оценивается через $C_5 \gamma^{\frac{p-1}{p}} \sum_{i=1}^m \|c_i\|_{L_p(0,T)}$. Окончательная оценка имеет вид:

$$\|R(\vec{c})\|_{L_p(0,\gamma)} \leq C_6 \gamma^{\frac{p-1}{p}} \|\vec{c}\|_{L_p(0,T)}, \quad (2.88)$$

где C_6 не зависит от γ . Тогда, если выполняется $C_6 \gamma^{\frac{p-1}{p}} = q_0 < 1$, то уравнение (2.82) будет иметь единственное решение. Фиксируем γ , удовлетворяющее этому условию. Рассмотрим уравнение

$$\vec{c} - R(\vec{c}) = \vec{c}_0. \quad (2.89)$$

Необходимо отметить, что без ограничения общности считаем, что все постоянные, возникающие в процессе доказательства оценки (2.88), не зависят от γ .

Пусть $\vec{c}$ – решение, определенное на $[0, \gamma]$. Построим вектор $\vec{c}_1 = \begin{cases} \vec{c}, & t \leq \gamma \\ 0, & t > \gamma. \end{cases}$

Сделаем замену в (2.89) $\vec{k}_1 = \vec{c} - \vec{c}_1$ ($\vec{k}_1 = (k^1, k^2, \dots, k^m)$), если $\vec{c}$ решение уравнения (2.89) на $[0, 2\gamma]$, то $\vec{k}_1 = 0$ при $t \leq \gamma$ и $\vec{k}_1 - R(\vec{k}_1) = \vec{c}_0 - \vec{c}_1 + R(\vec{c}_1)$. Здесь правая часть обращается в ноль на $[0, \gamma]$ и, соответственно, имеем, что $R(\vec{k}_1) = 0$ при $t \leq \gamma$. Решаем систему

$$\vec{k}_1 - R(\vec{k}_1) = \vec{c}_0 - \vec{c}_1 + R(\vec{c}_1) \quad (2.90)$$

уже на $[\gamma, 2\gamma]$. Таким образом, если $\vec{k}_1 \in L_p(0, 2\gamma)$, то повторяя вышеприведенные рассуждения получим оценку

$$\begin{aligned}
\|R(\vec{k}_1)\|_{L_p(\gamma, 2\gamma)} &\leq C \sum_{j=1}^m \|(L_0^{-1}(L_1\partial_t + L_2) + R_0)A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m k^i f_i)(x_j, t)\|_{L_p(\gamma, 2\gamma)} \\
&\leq C_2 \sum_{j=1}^m \|(L_0^{-1}(L_1\partial_t + L_2) + R_0)A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m k^i f_i)\|_{L_p(\gamma, 2\gamma; W_p^2(G))} \\
&\leq C_3 (\|(L_1\partial_t + L_2)A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m k^i f_i)\|_{L_p(\gamma, 2\gamma; L_p(G))} + \|R_0A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m k^i f_i)\|_{L_p(\gamma, 2\gamma; W_p^2(G))}) \\
&\leq C_4 \|A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m k^i f_i)\|_{W_\infty^1(\gamma, 2\gamma; L_p(G))} \\
&\leq C_5 \gamma^{\frac{p-1}{p}} \|A_0^{-1}(\sum_{i=1}^m k^i f_i)\|_{W_p^2(\gamma, 2\gamma; W_p^2(G))} \leq C_6 \gamma^{\frac{p-1}{p}} \sum_{i=1}^m \|k^i\|_{L_p(\gamma, 2\gamma)}.
\end{aligned}$$

Здесь используется утверждение теоремы 3. Окончательная оценка имеет вид:

$$\|R(\vec{k}_1)\|_{L_p(\gamma, 2\gamma)} \leq C_7 \gamma^{\frac{p-1}{p}} \|\vec{k}_1\|_{L_p(\gamma, 2\gamma)},$$

где, без ограничения общности, можем считать, что C_7 та же постоянная, что и в (2.88). Тогда уравнение (2.90) имеет единственное решение $\vec{k}_1 \in L_p(0, 2\gamma)$ такое, что при $t \in (0, \gamma)$ $\vec{k}_1 = 0$. Следовательно, функция $\vec{c} = \vec{c}_1 + \vec{k}_1$ есть решение (2.82) из $L_p(0, 2\gamma)$. Повторяя рассуждения, построим решение $\vec{c}$ уравнения (2.82) на всем промежутке $[0, T]$.

Построим функцию V , как решение задачи (2.81). Покажем, что построенная функция V удовлетворяет условиям (2.79). Обращая L_0 получим, что V удовлетворяет уравнению (2.80). Берем в (2.80) $x = x_i$ и получаем

$$\begin{aligned}
V_{tt}(x_i, t) + L_0^{-1}(L_1\partial_t + L_2)V(x_i, t) + R_0V(x_i, t) = \\
L_0^{-1}g_0(x_i, t) + \sum_{j=1}^m L_0^{-1}c_j(t)f_j(x_i, t).
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Но вектор-функция $\vec{c}$ такова, что

$$\begin{aligned}
\varphi_{itt}(t) + L_0^{-1}(L_1\partial_t + L_2)V(x_i, t) + R_0V(x_i, t) = \\
L_0^{-1}g_0(x_i, t) + \sum_{j=1}^m L_0^{-1}c_j(t)f_j(x_i, t).
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Вычитая эти равенства, получаем $V_{tt}(x_i, t) - \varphi_{itt}(t) = 0$ или $\partial_t^2(V(x_i, t) - \varphi_i(t)) = 0$. Интегрируя от 0 до t дважды и используя условия согласования получим $V(x_i, t) - \varphi_i(t) = 0$. Таким образом $V(x_i, t) = \varphi_i(t) \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$. $\square$

2.4 Коэффициентные обратные задачи для уравнения Буссинеска – Лява

Рассматривается то же уравнение, что и в предыдущем параграфе, т.е.

$$L_0 u_{tt} + L_1 u_t + L_2 u = f, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (2.93)$$

где, L_i ($i = 0, 1, 2$) – операторы второго порядка по переменным x , G – ограниченная область в R^n ($n \geq 1$) с границей $\Gamma \in C^2$. Уравнение дополняется краевыми и начальными условиями:

$$R(t)u|_S = \varphi, \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad (2.94)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x). \quad (2.95)$$

Задача состоит в определении неизвестной правой части f и коэффициентов уравнения (2.93), зависящих от времени по заданным условиям переопределения, в качестве которых рассматриваются значения решения u в отдельных точках. Таким образом, условия переопределения имеют вид

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, r_2), \quad (2.96)$$

где x_i произвольные точки лежащие в G . Как и в предыдущем параграфе правая часть в (2.93) имеет вид:

$$f = \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t) f_i(x, t) + f_0(x, t), \quad f_i \in L_\infty(0, T; L_p(G)) \quad (i = 1, 2, \dots, r_0), \quad (2.97)$$

где функции f_i даны и $c_i(t)$ подлежат определению. Пусть также операторы L_s ($s = 0, 1, 2$) имеют вид

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i^0(x, t) u_{x_i} + a_0^0(x, t) u,$$

$$L_s u = L_{0s} u + \sum_{k=r_{s-1}+1}^{r_s} c_k(t) L^k u, \quad s = 1, 2$$

$$L^k u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i^k(x, t) u_{x_i} + a_0^k(x, t) u,$$

$$L_{0s} u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{0s}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i^{0s}(x, t) u_{x_i} + a_0^{0s}(x, t) u.$$

Это возможно, что правая часть f не содержит неизвестных функций c_i . Полагаем в этом случае, что $r_0 = 0$ и $f = f_0$ – известная функция. Также возможно, что оператор L_1 не содержит неизвестных функций c_i . Полагаем в этом случае, что $r_1 = r_0$, $L_1 = L_{01}$ – известный оператор. Считаем, что либо оператор L_1 , либо оператор L_2 содержит неизвестные коэффициенты, поскольку противоположный случай рассмотрен в предыдущем параграфе. В случае, если все коэффициенты оператора L_2 известны, полагаем $r_2 = r_1$ и тогда $L_2 = L_{02}$ – известный оператор. Условия на коэффициенты уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} a_{ij}^0 &\in C(\overline{Q}), \quad a_i^0, a_0^0 \in C([0, T]; L_p(G)), \\ a_{ij}^k &\in L_\infty(Q), \quad a_i^k, a_0^k \in L_\infty(0, T; L_p(G)) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, r_2), \\ a_{ij}^{0s} &\in L_p(0, T; L_\infty(G)), \quad a_i^{0s}, a_0^{0s} \in L_p(Q) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} a_0^0 &\leq 0 \text{ п.в. в } Q \text{ в случае условий Дирихле и } a_0^0 \leq 0 \text{ п.в. в } Q \\ &\text{и } a_0^0 < 0 \text{ п.в. в некоторой окрестности} \end{aligned} \quad (2.99)$$

границы S и $\sigma \geq 0$ на S в случае условий с косой производной.

В случае краевых условия с косой производной также требуется, чтобы

$$\partial_t^k \gamma_i, \partial_t^k \sigma \in L_\infty(0, T; C^1(\overline{\Gamma})), \quad k \leq 2, \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i n_i \geq \delta_1 > 0 \quad \forall (x, t) \in S, \quad (2.100)$$

Условия согласования:

$$\begin{aligned} \psi_i(0) &= u_0(x_i), \quad \psi_{it}(0) = u_1(x_i), \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \varphi(x, 0) &= R(0)u_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = R(0)u_1(x) + R_t(0)u_0(x), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Пусть функция $\Phi \in C^1([0, T]; W_p^2(G))$ ($p > n$) такова, что $\Phi_{tt} \in L_p(0, T; W_p^2(G))$, $\Phi|_{t=0} = u_0(x)$, $\Phi_t|_{t=0} = u_1(x)$, $\Phi|_S = \varphi$ (эта функция была построена в самом начале доказательства теоремы 3). Строится матрица B , j -я строка которой имеет вид

$$\begin{aligned} &L_0^{-1}f_1(x_j, t), L_0^{-1}f_2(x_j, t), \dots, L_0^{-1}f_{r_0}(x_j, t), -L_0^{-1}L^{r_0+1}\Phi_t(x_j, t), \dots, \\ &-L_0^{-1}L^{r_1}\Phi_t(x_j, t), -L_0^{-1}L^{r_1+1}\Phi(x_j, t), \dots, -L_0^{-1}L^{r_2}\Phi(x_j, t), \quad j = 1, 2, \dots, r_2, \end{aligned}$$

и предполагается, что существуют $\delta_0 > 0$, $\tau_0 > 0$ такие, что

$$|\det B| \geq \delta_0 \text{ для п.в. } t \in [0, \tau_0], \quad (2.102)$$

где $L_0^{-1}f_i$ есть решение u_i задачи $L_0u_i = f_i$, $R(t)u_i|_S = 0$. Легко показать, что локально по времени условие (2.102) не зависит от выбора функции Φ (см. §2.2). Более того, можно заменить матрицу B матрицей $\tilde{B}$, у которой j -я строка имеет вид

$$L_0^{-1}f_1(x_j, t), L_0^{-1}f_2(x_j, t), \dots, L_0^{-1}f_{r_0}(x_j, t), -L_0^{-1}L^{r_0+1}u_1(x_j, t), \dots, \\ -L_0^{-1}L^{r_1}u_1(x_j, t), -L_0^{-1}L^{r_1+1}u_0(x_j, t), \dots, -L_0^{-1}L^{r_2}u_0(x_j, t), \quad j = 1, 2, \dots, r_2,$$

Здесь функция $L_0^{-1}L^k u_1(x_j, t)$ строится следующим образом: вначале к функции $u_1(x)$ применяется оператор $L^k = L^k(x, t, D_x)$, затем строится решение задачи $L_0v = L^k u_1(x, t)$, $Rv|_S = 0$, далее вычисляются значения $v(x_j, t) = L_0^{-1}L^k u_1(x_j, t)$. Можно показать, что если $|\det B| \geq \delta_0$ для всех $t \in [0, \tau_0]$, то найдутся $\delta_1 > 0$ и τ_1 такие, что $|\det \tilde{B}| \geq \delta_1$ для всех $t \in [0, \tau_1]$. Действительно, например, если взять целое $k \in [r_0 + 1, r_1]$ и рассмотреть

$$|L_0^{-1}L^k \Phi_t(x_j, t) - L_0^{-1}L^k u_1(x_j, t)| \leq c_1 \|L^k \Phi_t(x, t) - L^k u_1(x, t)\|_{L_p(G)} \\ \leq c_2 \|\Phi_t(x, t) - u_1(x)\|_{W_p^2(G)} \leq c_3 t^{1-1/p} \|\Phi_{tt}\|_{L_p(0, T; W_p^2(G))}, \quad (2.103)$$

где c_i — некоторые постоянные, зависящие от норм коэффициентов. Здесь используются условия на коэффициенты, вложение $W_p^2(G) \subset C^1(\bar{G})$, теорема 1 и формула Ньютона-Лейбница. Аналогично оценивается величина $|L_0^{-1}L^k \Phi(x_j, t) - L_0^{-1}L^k u_0(x_j, t)|$. Неравенство показывает, что если B и $\tilde{B}$ матрицы построенные при помощи Φ и u_1, u_0 , соответственно, и $|\det B| \geq \delta_0 > 0$, то найдется $\gamma_0 > 0$ такая, что при $t \in [0, \gamma_0]$ выполнено $|\det \tilde{B}| \geq \delta_0/2 > 0$ и, таким образом, на интервале $[0, \gamma_0]$ $|\det \tilde{B}| \geq \delta_0/2 > 0$. Верно и обратное.

Теорема 8. Пусть выполнены условия (2.98) – (2.102) и

$$f_0 \in L_p(Q), \quad f_i \in L_\infty(0, T; L_p(G)), \quad u_j(x) \in W_p^2(G) \quad (j = 0, 1),$$

$$\varphi, \varphi_t, \varphi_{tt} \in L_p(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma)),$$

$$\psi_i \in W_p^2(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, r_2, \quad p > n.$$

Тогда существует постоянная $\gamma_0 > 0$ такая, что на промежутке $[0, \gamma_0]$ существует единственное решение $(u, c_1, \dots, c_{r_2})$ задачи (2.93) – (2.96) такое, что

$$u, u_t \in C([0, \gamma_0]; W_p^2(G)), \quad u_{tt} \in L_p([0, \gamma_0]; W_p^2(G)),$$

$$c_i(t) \in L_p(0, \gamma_0) \quad (i = 1, 2, \dots, r_2).$$

Доказательство. Пусть функция Φ есть решение задачи (см. теорему 3)

$$L_0\Phi_{tt} = f_0, \quad \Phi|_{t=0} = u_0, \quad \Phi_t|_{t=0} = u_1, \quad R(t)\Phi|_S = \varphi. \quad (2.104)$$

Известно, что $\Phi, \Phi_t \in C([0, T]; W_p^2(G))$, $\Phi_{tt} \in L_p([0, T]; W_p^2(G))$. Без ограничения общности можно считать, что с данной функцией Φ выполнено условие корректности (2.102). Тогда функция $V = u - \Phi$ есть решение задачи

$$L_0V_{tt} + L_1V_t + L_2V = \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t)f_i(x, t) - \sum_{i=r_0+1}^{r_1} c_i(t)L^i\Phi_t - \sum_{i=r_1+1}^{r_2} c_i(t)L^i\Phi, \\ V|_{t=0} = 0, \quad R(t)V|_S = 0. \quad (2.105)$$

$$V(x_j, t) = \psi_j(t) - \Phi(x_j, t) = \tilde{\psi}_j(t). \quad (2.106)$$

Функция $\Phi \in W_p^2(G; W_p^2(0, T))$ и, значит, после может быть изменения на множестве меры 0 $\Phi \in C^1(\bar{G}; W_p^2(0, T))$ (см., например, вложение (5.4) в [67]). В частности $\Phi(x_i, t) \in W_p^2(0, T)$, тогда $\tilde{\psi}_j(t) \in W_p^2(0, T)$ ($j = 1, 2, \dots, r_2$). Найдется число $\tau_0 > 0$ такое, что на $[0, \tau_0]$ выполнено условие (2.102) с некоторой постоянной $\delta_0 > 0$. Чтобы немного упростить изложение, проводятся дальнейшие рассуждения для случая условий Дирихле. Используя теорему 1, обратим оператор L_0 в (2.105). Имеем

$$V_{tt} + L_0^{-1}(L_1\partial_t + L_2)V = \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t)L_0^{-1}f_i(x, t) \\ - \sum_{i=r_0+1}^{r_1} c_i(t)L_0^{-1}L^i\Phi_t - \sum_{i=r_1+1}^{r_2} c_i(t)L_0^{-1}L^i\Phi. \quad (2.107)$$

Необходимо отметить, что при почти всех t определены следы $L_0^{-1}L^i\Phi_t(x_j, t)$ ($i = r_0 + 1, \dots, r_1$), $L_0^{-1}L^i\Phi(x_j, t)$ ($i = r_1 + 1, \dots, r_2$) и, более того, каждая из этих функций принадлежит $L_\infty(0, T)$. Действительно, имеется $L_0^{-1}L^i\Phi_t(x, t) \in W_p^2(G; L_p(0, T))$, и, следовательно, существует след [67, (5.4)], $L_0^{-1}L^i\Phi_t(x_j, t) \in L_p(0, T)$. Тогда при почти всех t имеется (используя теорему 1)

$$|L_0^{-1}L^i\Phi_t(x_j, t)| \leq c\|L_0^{-1}L^i\Phi_t(x, t)\|_{W_p^2(G)} \leq c_1\|L^i\Phi_t(x, t)\|_{L_p(G)} \leq c_1\|\Phi_t(x, t)\|_{W_p^2(G)}.$$

Таким образом,

$$\|L_0^{-1}L^i\Phi_t(x_j, t)\|_{L_\infty(0, T)} \leq c\|\Phi_t\|_{L_\infty(0, T; W_p^2(G))}, \quad i = r_0 + 1, \dots, r_1. \quad (2.108)$$

Аналогично доказываем, что $L_0^{-1}L^i\Phi(x_j, t) \in L_\infty(0, T)$ ($i = r_1 + 1, \dots, r_2$) и что $L_0^{-1}f_i(x_j, t) \in L_\infty(0, T)$. Возьмем в (2.107) $x = x_j$. В силу условий переопределения имеется

$$\begin{aligned} & \tilde{\psi}_{jtt} + L_0^{-1}(L_{01}\partial_t + L_{02})V(x_j, t) + \sum_{i=r_0+1}^{r_1} c_i(t)L_0^{-1}L^iV_t(x_j, t) \\ & + \sum_{i=r_1+1}^{r_2} c_i(t)L_0^{-1}L^iV(x_j, t) = \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t)L_0^{-1}f_i(x_j, t) \\ & - \sum_{i=r_0+1}^{r_1} c_i(t)L_0^{-1}L^i\Phi_t(x_j, t) - \sum_{i=r_1+1}^{r_2} c_i(t)L_0^{-1}L^i\Phi(x_j, t), \end{aligned} \quad (2.109)$$

где $j = 1, 2, \dots, r_2$. Равенства (2.109) можно записать в виде

$$B\vec{c} = \begin{pmatrix} \beta_1 + S_1(\vec{c}) \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_{r_2} + S_{r_2}(\vec{c}) \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_{r_2} \end{pmatrix}, \quad \beta_i = \tilde{\psi}_{itt},$$

где

$$\begin{aligned} S_k(\vec{c}) &= L_0^{-1}(L_{01}\partial_t + L_{02})V(x_k, t) + \sum_{i=r_0+1}^{r_1} c_i(t)L_0^{-1}L^iV_t(x_k, t) \\ &+ \sum_{i=r_1+1}^{r_2} c_i(t)L_0^{-1}L^iV(x_k, t). \end{aligned}$$

Для п.в. $t \in [0, \tau_0]$ эти равенства можно записать также в виде

$$\vec{c} = B^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 + S_1(\vec{c}) \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_{r_2} + S_{r_2}(\vec{c}) \end{pmatrix} = S(\vec{c}). \quad (2.110)$$

На правую часть можно посмотреть, как на оператор $S(\vec{c})$, сопоставляющий вектору $\vec{c}(t)$ решение $V(x, t)$ задачи (2.105) и затем сопоставляющее $V(x, t)$ правую часть (2.110). Исследуя свойства этого оператора, фиксируются $R_0 = 2\|B^{-1}\vec{\beta}\|_{L_p(0, \tau_0)}$. По построению $\tilde{\psi}_{itt} \in L_p(0, T)$. В силу того, что элементы матрицы B принадлежат $L_\infty(0, T)$ имеется, что $B^{-1}\vec{\beta} \in L_p(0, \tau_0)$. Из теоремы 3 вытекает, что для любой вектор-функции $\vec{c}(t) \in B_{R_0, \gamma} = \{\vec{c} \in L_p(0, \gamma) : \|\vec{c}\|_{L_p(0, \gamma)} \leq$

$R_0\}$ задача

$$\begin{aligned} L_0 V_{tt} + (L_1 \partial_t + L_2) V &= \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t) f_i(x, t) \\ &- \sum_{i=r_0+1}^{r_1} c_i(t) L^i \Phi_t - \sum_{i=r_1+1}^{r_2} c_i(t) L^i \Phi, \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$V|_{t=0} = 0, \quad V_t|_{t=0} = 0, \quad V|_S = 0,$$

имеет единственное решение $V \in W_p^2(0, \gamma; W_p^2(G))$. Получено равенство

$$\begin{aligned} L_0 V_{tt} + (L_{01} \partial_t + L_{02}) V + \sum_{j=r_0+1}^{r_1} c_j(t) L^j V_t + \sum_{j=r_1+1}^{r_2} c_j(t) L^j V = \\ \sum_{j=1}^{r_0} c_j(t) f_i(x, t) - \sum_{j=r_0+1}^{r_1} c_j(t) L^j \Phi_t - \sum_{j=r_1+1}^{r_2} c_j(t) L^j \Phi. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Пусть $\vec{c}(t) \in B_{R_0, \gamma}$ и $\gamma \leq \tau_0$. Из теоремы 3 и условий на данные вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|V\|_{W_p^2(0, \gamma; W_p^2(G))} &\leq c_1 \left(\sum_{j=r_0+1}^{r_1} \|c_j(t) L^j V_t\|_{L_p(0, \gamma; L_p(G))} \right. \\ &\left. + \sum_{j=r_1+1}^{r_2} \|c_j(t) L^j V\|_{L_p(0, \gamma; L_p(G))} \right) + c_2 \|\vec{c}\|_{L_p(0, \gamma)}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Постоянные c_2, c_1 не будут зависеть от γ . Каждое слагаемое, входящее в правую часть вида $J_j = \|c_j(t) L^j V_t\|_{L_p(0, \gamma; L_p(G))}$, оценивается через

$$J_j \leq \alpha_j \|V_t\|_{L_\infty(0, \gamma; W_p^2(G))} \|c_j(t)\|_{L_p(0, \gamma)}, \quad (2.114)$$

где постоянная α_j зависит от норм коэффициентов Q и не зависит от $\gamma \leq \tau_0$.

Аналогично имеется

$$\|c_j(t) L^j V\|_{L_p(0, \gamma; L_p(G))} \leq \tilde{\alpha}_j \|V\|_{L_\infty(0, \gamma; W_p^2(G))} \|c_j(t)\|_{L_p(0, \gamma)} \quad (2.115)$$

Из оценок (2.113) – (2.115) вытекает оценка

$$\begin{aligned} &\|V\|_{W_p^2(0, \gamma; W_p^2(G))} \\ &\leq c_3 (\|\vec{c}\|_{L_p(0, \gamma)} + 1) (\|V_t\|_{L_\infty(0, \gamma; W_p^2(G))} + \|V\|_{L_\infty(0, \gamma; W_p^2(G))}) \\ &\quad + c_4 \|\vec{c}\|_{L_p(0, \gamma)}, \end{aligned} \quad (2.116)$$

где все постоянные не зависят от $\gamma \leq \tau_0$. Оценку также можно записать в виде

$$\|V\|_{W_p^2(0, \gamma; W_p^2(G))} \leq c_5(R_0) \|V\|_{W_\infty^1(0, \gamma; W_p^2(G))} + c_4 \|\vec{c}\|_{L_p(0, \gamma)}, \quad (2.117)$$

С другой стороны, поскольку функция V удовлетворяет однородным начальным условиям, имеется оценку (из формулы Ньютона – Лейбница)

$$\|V_t\|_{L_\infty(0, \gamma; W_p^2(G))} + \|V\|_{L_\infty(0, \gamma; W_p^2(G))} \leq 2\gamma^{1-1/p} \|v\|_{W_p^2(0, \gamma; W_p^2(G))}.$$

Тогда оценка (2.117) переписывается в виде

$$\|V\|_{W_p^2(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq c_6 \gamma^{1-1/p} \|V\|_{W_p^2(0,\gamma;W_p^2(G))} + c_4 \|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)},$$

где постоянная c_6 не зависит от γ . Выберем число $\gamma_0 \leq \tau_0$ такое, что $c_6 \gamma_0^{1-1/p} = 1/2$. Тогда для всех $\gamma \leq \gamma_0$ и $\vec{c} \in B_{R_0,\gamma}$ имеется оценка

$$\|V\|_{W_p^2(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq 2c_4 \|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)} \leq 2c_4 R_0. \quad (2.118)$$

Можно получить дальнейшие оценки. Пусть $\vec{c}^1, \vec{c}^2 \in B_{R_0,\gamma}$ ($\gamma \leq \gamma_0$) и V^1, V^2 – соответствующие решения задачи (2.111). Таким образом

$$\begin{aligned} L_0 V_{tt}^i + (L_{01} \partial_t + L_{02}) V^i + \sum_{j=r_0+1}^{r_1} c_j^i(t) L^j V_t^i + \sum_{j=r_1+1}^{r_2} c_j^i(t) L^j V^i = \\ \sum_{j=1}^{r_0} c_j^i(t) f_i(x, t) - \sum_{j=r_0+1}^{r_1} c_j^i(t) L^j \Phi_t - \sum_{j=r_1+1}^{r_2} c_j^i(t) L^j \Phi. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Необходимо отметить, что функции V^i удовлетворяют оценке (2.118). Вычитая равенства (2.119) при $i = 1, 2$ и обозначая $\omega = V^1 - V^2$, можно получить

$$\begin{aligned} L_0 \omega_{tt} + (L_{01} \partial_t + L_{02}) \omega + \sum_{j=r_0+1}^{r_1} c_j^1(t) L^j \omega_t + \sum_{j=r_1+1}^{r_2} c_j^1(t) L^j \omega = \\ \sum_{j=1}^{r_0} (c_j^1 - c_j^2)(t) f_j(x, t) - \sum_{j=r_0+1}^{r_1} (c_j^1 - c_j^2)(t) L^j V_t^2 \\ - \sum_{j=r_1+1}^{r_2} (c_j^1 - c_j^2)(t) L^j V^2 - \sum_{j=r_0+1}^{r_1} (c_j^1 - c_j^2)(t) L^j \Phi_t \\ - \sum_{j=r_1+1}^{r_2} (c_j^1 - c_j^2)(t) L^j \Phi. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Повторяя рассуждения, использованные выше при получении оценки (2.118), приходим к неравенству

$$\|\omega\|_{W_p^2(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq c_5 \|\vec{c}^1 - \vec{c}^2\|_{L_p(0,\gamma)}, \quad (2.121)$$

где $\gamma \leq \gamma_0$. Приведем оценки для оператора S . Имеем, используя определение оператора, что

$$\begin{aligned}
& \|S(\vec{c}^1) - S(\vec{c}^2)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c \sum_{j=1}^{r_2} \|L_0^{-1}(L_{01}\partial_t + L_{02})(V^1 - V^2)(x_j, t) \\
& + \sum_{i=r_0+1}^{r_1} c_i^1 L_0^{-1} L^i V_t^1(x_j, t) - \sum_{i=r_0+1}^{r_1} c_i^2 L_0^{-1} L^i V_t^2(x_j, t) + \sum_{i=r_1+1}^{r_2} c_i^1 L_0^{-1} L^i V^1(x_j, t) \\
& - \sum_{i=r_1+1}^{r_2} c_i^2 L_0^{-1} L^i V^2(x_j, t)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq \sum_{j=1}^{r_2} (\| \sum_{i=r_0+1}^{r_1} (c_i^1 - c_i^2)(t) L_0^{-1} L^i V_t^1(x_j, t) \\
& + \sum_{i=r_1+1}^{r_2} (c_i^1 - c_i^2)(t) L_0^{-1} L^i V^1(x_j, t)\|_{L_p(0,\gamma)} + \| \sum_{i=r_0+1}^{r_1} c_i^2 (L_0^{-1} L^i (V_t^1 - V_t^2)(x_j, t)) \\
& + \sum_{i=r_1+1}^{r_2} (c_i^2 L_0^{-1} L^i (V^1 - V^2)(x_j, t))\|_{L_p(0,\gamma)} + c_4 \|\vec{c}^1 - \vec{c}^2\|_{L_p(0,\gamma)}.
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Оценим слагаемые, входящие в первую часть в правой части, следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \|(c_i^1 - c_i^2) L_0^{-1} L^i V_t^1(x_j, t)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq \|c_i^1 - c_i^2\|_{L_p(0,\gamma)} \|L_0^{-1} L^i V_t^1(x_j, t)\|_{L_\infty(0,\gamma)}, \\
& \|(c_i^1 - c_i^2) L_0^{-1} L^i V^1(x_j, t)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq \|c_i^1 - c_i^2\|_{L_p(0,\gamma)} \|L_0^{-1} L^i V^1(x_j, t)\|_{L_\infty(0,\gamma)}.
\end{aligned}$$

Имеем в силу теорем вложения и теоремы 1, что

$$\begin{aligned}
& \|L_0^{-1} L^i V_t^1(x_j, t)\|_{L_\infty(0,\gamma)} \leq c \|V_t^1(x, t)\|_{L_\infty(0,\gamma; W_p^2(G))} \\
& \leq c \gamma^{1/q} \|V_{tt}^1\|_{L_p(0,\gamma; W_p^2(G))} \quad \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1\right). \\
& \|L_0^{-1} L^i V^1(x_j, t)\|_{L_\infty(0,\gamma)} \leq c \|V^1(x, t)\|_{L_\infty(0,\gamma; W_p^2(G))} \\
& \leq c \gamma^{1/q} \|V_t^1\|_{L_p(0,\gamma; W_p^2(G))} \quad \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1\right).
\end{aligned}$$

Тогда имеются оценки

$$\|(c_i^1 - c_i^2) L_0^{-1} L^i V_t^1(x_j, t)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c_1 \gamma^{1/q} \|\vec{c}^1 - \vec{c}^2\|_{L_p(0,\gamma)}, \tag{2.123}$$

$$\|(c_i^1 - c_i^2) L_0^{-1} L^i V^1(x_j, t)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c_1 \gamma^{1/q} \|\vec{c}^1 - \vec{c}^2\|_{L_p(0,\gamma)}, \tag{2.124}$$

где постоянная c_1 зависит от R_0 , но не зависит от γ . Аналогично, используя (2.118), (2.121), можно получить

$$\begin{aligned}
& \|c_i^2 (L_0^{-1} L^i (V_t^1(x_j, t) - V_t^2(x_j, t)))\|_{L_p(0,\gamma)} \\
& \leq R_0 \|V_t^1(x, t) - V_t^2(x, t)\|_{L_\infty(0,\gamma; W_p^2(G))} \\
& \leq R_0 c \gamma^{1/q} \|V_{tt}^1 - V_{tt}^2\|_{L_p(0,\gamma; W_p^2(G))} \leq c_1 \gamma^{1/q} \|\vec{c}^1 - \vec{c}^2\|_{L_p(0,\gamma)}.
\end{aligned} \tag{2.125}$$

$$\begin{aligned}
& \|c_i^2(L_0^{-1}L^i(V^1(x_j, t) - V^2(x_j, t)))\|_{L_p(0, \gamma)} \\
& \leq R_0\|V^1(x, t) - V^2(x, t)\|_{L_\infty(0, \gamma; W_p^2(G))} \\
& \leq R_0c\gamma^{1/q}\|V_t^1 - V_t^2\|_{L_p(0, \gamma; W_p^2(G))} \leq c_1\gamma^{1/q}\|\vec{c}^1 - \vec{c}^2\|_{L_p(0, \gamma)}.
\end{aligned} \tag{2.126}$$

Из (2.122) – (2.126) и имеется, что

$$\|S(c^1) - S(c^2)\|_{L_p(0, \gamma)} \leq c\gamma^{1/q}\|\vec{c}^1 - \vec{c}^2\|_{L_p(0, \gamma)}. \tag{2.127}$$

Выбирается $\gamma_1 \leq \gamma_0$ такое, что $c\gamma_1^{1/q} \leq 1/2$. Тогда при всех $c^1, c^2 \in B_{R_0, \gamma}$ с $\gamma \leq \gamma_1$ имеется неравенство (2.127). Кроме того $R(\vec{c}) = R(\vec{c}) - R(0) + R(0)$ и

$$\|S(\vec{c})\|_{L_q(0, \gamma)} \leq \|R(0)\|_{L_q(0, \gamma)} + \frac{1}{2}\|\vec{c}\|_{L_q(0, \gamma)} \leq \frac{R_0}{2} + \frac{R_0}{2} = R_0.$$

Таким образом, R переводит шар B_{R_0, γ_1} в себя и является в нем сжимающим. По теореме о неподвижной точке уравнение (2.111) разрешимо. То, что V является решением (2.105) и удовлетворяет условиям, (2.106) доказывается также, как и в линейном случае. $\square$

Приведем теорему, характеризующую устойчивость решений задачи (2.93) – (2.96). Пусть $\vec{F} = (f_0, \varphi, \psi_1, \dots, \psi_{r_2}, u_0, u_1)$ набор данных нашей задачи. Построим матрицу $B = B(\vec{F})$, j -я строка которой имеет вид

$$\begin{aligned}
& L_0^{-1}f_1(x_j, t), L_0^{-1}f_2(x_j, t), \dots, L_0^{-1}f_{r_0}(x_j, t), -L_0^{-1}L^{r_0+1}u_1(x_j, t), \dots, \\
& -L_0^{-1}L^{r_1}u_1(x_j, t), -L_0^{-1}L^{r_1+1}u_0(x_j, t), \dots, -L_0^{-1}L^{r_2}u_0(x_j, t), \quad j = 1, 2, \dots, r_2,
\end{aligned}$$

Фиксируем параметры τ_0, δ_0, R_0 и определим множество данных задачи

$$\begin{aligned}
C_{R_0} &= \{\vec{F} = (f_0, \varphi, \psi_1, \dots, \psi_{r_2}, u_0, u_1) : \\
& \vec{F} \in L_p(Q) \times W_p^2(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma)) \times (W_p^1(0, T))^{r_2} \times (W_p^2(G))^2 \\
& \|F\|_{H_T} = \|f_0\|_{L_p(Q)} + \|\varphi\|_{W_p^2(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma))} + \\
& \sum_{i=1}^{r_2} \|\psi_i\|_{W_p^2(0, T)} + \|u_0\|_{W_p^2(G)} + \|u_1\|_{W_p^2(G)} \leq R_0, \\
& |\det B(\vec{F})| \geq \delta_0 \text{ для п.в. } t \in [0, \tau_0], \text{ выполнены условия (2.31)}\}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Также рассматриваются пространства H_τ с $\tau \in (0, T)$. Норма в пространстве H_τ определяется как и выше (Q заменяется на Q^τ , интервал $(0, T)$ заменяется на $(0, \tau)$).

Теорема 9. Пусть выполнены условия (2.98) – (2.102). Тогда найдется параметр $\tau_1 \leq \tau_0$ и постоянная $C > 0$ такая, что для любых двух решений $u^1, u^2, \vec{c}_1, \vec{c}_2$ задачи (2.93) – (2.96) из класса, указанного в теореме 8, отвечающих данным $\vec{F}_i \in H_{\tau_1}$ ($i = 1, 2$) справедлива оценка устойчивости

$$\|u^1 - u^2\|_{W_p^2(0, \tau_1; W_p^2(G))} + \sum_{i=1}^{r_2} \|c_i^1(t) - c_i^2(t)\|_{L_p(0, \tau_1)} \leq C \|\vec{F}_1 - \vec{F}_2\|_{H_{\tau_1}}.$$

Доказательство. Даны наборы $\vec{F}_i = (f_0^i, \varphi^i, \psi_1^i, \dots, \psi_{r_2}^i, u_0^i, u_1^i)$. Построим функции $\Phi^i \in W_p^2(0, \tau_1; W_p^2(G))$ такие, что $\Phi^i(0) = u_0^i$, $\Phi_t^i(0) = u_1^i$, $R(t)\Phi^i|_S = \varphi^i$ как решение задачи (2.104). В силу теоремы 1, найдутся постоянные $c(R_0)$, c_1 такие, что

$$\|\Phi_i\|_{W_p^2(0, \tau_0; W_p^2(G))} \leq c(R_0),$$

$$\|\Phi^1 - \Phi^2\|_{W_p^2(0, \tau_0; W_p^2(G))} \leq c_1(\|u_0^1 - u_0^2\|_{W_p^2(G)} + \|u_1^1 - u_1^2\|_{W_p^2(G)} + \|\varphi^1 - \varphi^2\|_{W_p^2(0, \tau_0; W_p^{s_0}(\Gamma))}) \quad (2.128)$$

для любого набора $\vec{F}_i \in H_{\tau_0}$. Тогда из оценки (2.103) и определения определителя вытекает, что найдется $\gamma_0 \leq \tau_0$ такое, что $|\det \tilde{B}(\vec{F}_i)| \geq \delta_0/2$ для п.в. $t \in [0, \gamma_0]$ и любых наборов $\vec{F}_i \in H_{\tau_0}$. Как легко можно увидеть из доказательства теоремы 8, в этом случае найдутся постоянные $c_1(R_0)$ и $\gamma_1 \leq \gamma_0$ такие, что на промежутке $[0, \gamma_0]$ существуют решения $u^1, u^2, \vec{c}_1, \vec{c}_2$ задачи (2.93) – (2.96) такие, что

$$\|u^i\|_{W_p^2(0, \tau_1; W_p^2(G))} + \sum_{j=1}^{r_2} \|c_j^i(t)\|_{L_p(0, \tau_1)} \leq c_1(R_0) \quad (2.129)$$

для любых наборов $\vec{F}_i \in H_{\gamma_1}$. Полагая $V^i = u^i - \Phi^i$, получим

$$\begin{aligned} L_0 V_{tt}^i + (L_{01} \partial_t + L_{02}) V^i + \sum_{j=r_0+1}^{r_1} c_j^i(t) L^j V_t^i + \sum_{j=r_1+1}^{r_2} c_j^i(t) L^j V^i = \\ f_0^i + \sum_{j=1}^{r_0} c_j^i(t) f_j(x, t) - \sum_{j=r_0+1}^{r_1} c_j^i(t) L^j \Phi_t^i - \sum_{j=r_1+1}^{r_2} c_j^i(t) L^j \Phi^i. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Пусть $\omega = V^1 - V^2$. Тогда, вычитая равенства (2.130) при $i = 1, 2$, получим

$$\begin{aligned}
& L_0 \omega_{tt} + (L_{01} \partial_t + L_{02}) \omega + \sum_{j=r_0+1}^{r_1} c_j^1(t) L^j \omega_t + \sum_{j=r_1+1}^{r_2} c_j^1(t) L^j \omega = \\
& f_0^1 - f_0^2 + \sum_{j=1}^{r_0} (c_j^1 - c_j^2)(t) f_j(x, t) - \sum_{j=r_0+1}^{r_1} (c_j^1 - c_j^2)(t) L^j V_t^2 \\
& - \sum_{j=r_1+1}^{r_2} (c_j^1 - c_j^2)(t) L^j V^2 - \sum_{j=r_0+1}^{r_1} (c_j^1 - c_j^2)(t) L^j \Phi_t^1 - \sum_{j=r_1+1}^{r_2} (c_j^1 - c_j^2)(t) L^j \Phi^1 \\
& - \sum_{j=r_0+1}^{r_1} c_j^2(t) L^j (\Phi_t^1 - \Phi_t^2) - \sum_{j=r_1+1}^{r_2} c_j^2(t) L^j (\Phi^1 - \Phi^2).
\end{aligned} \tag{2.131}$$

Повторяя соответствующие рассуждения в доказательстве предыдущей теоремы получим аналог неравенства (2.121)

$$\begin{aligned}
& \|\omega\|_{W_p^2(0, \gamma_1; W_p^2(G))} \leq c_1(R_0) \|\vec{c}^1 - \vec{c}^2\|_{L_p(0, \gamma_1)} + \\
& c_2(R_0) \|\Phi^1 - \Phi^2\|_{W_p^2(0, \gamma_1; W_p^2(G))} + c_3 \|f_0^1 - f_0^2\|_{L_p(Q^{\gamma_1})}.
\end{aligned} \tag{2.132}$$

Обращая оператор L_0 в (2.131) и полагая $x = x_j$, получим

$$\begin{aligned}
& (\tilde{\psi}_{itt}^1 - \tilde{\psi}_{itt}^2) + L_0^{-1} (L_{01} \partial_t + L_{02}) \omega(x_i, t) + R_0 \omega(x_i, t) + \sum_{j=r_0+1}^{r_1} c_j^1(t) L_0^{-1} L^j \omega_t(x_i, t) \\
& + \sum_{j=r_1+1}^{r_2} c_j^1(t) L_0^{-1} L^j \omega(x_i, t) = L_0^{-1} (f_0^1 - f_0^2)(x_i, t) + \sum_{j=1}^{r_0} (c_j^1 - c_j^2)(t) L_0^{-1} f_j(x_i, t) \\
& - \sum_{j=r_0+1}^{r_1} (c_j^1 - c_j^2)(t) L_0^{-1} L^j V_t^2(x_i, t) - \sum_{j=r_1+1}^{r_2} (c_j^1 - c_j^2)(t) L_0^{-1} L^j V^2(x_i, t) \\
& - \sum_{j=r_0+1}^{r_1} (c_j^1 - c_j^2)(t) L_0^{-1} L^j \Phi_t^1(x_i, t) - \sum_{j=r_1+1}^{r_2} (c_j^1 - c_j^2)(t) L_0^{-1} L^j \Phi^1(x_i, t) \\
& - \sum_{j=r_0+1}^{r_1} c_j^2(t) L^j (\Phi_t^1 - \Phi_t^2)(x_i, t) - \sum_{j=r_1+1}^{r_2} c_j^2(t) L^j (\Phi^1 - \Phi^2)(x_i, t).
\end{aligned} \tag{2.133}$$

Эту систему уравнений можно записать в виде

$$B \vec{c} = \begin{pmatrix} \beta_1 + S_1(\vec{c}) \\ \cdots \\ \beta_{r_2} + S_{r_2}(\vec{c}) \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_{r_2} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
\vec{c} = \vec{c}_1 - \vec{c}_2 &= (c_1^1 - c_1^2, \dots, c_{r_2}^1 - c_{r_2}^2)^T, \quad \beta_i = \tilde{\psi}_{itt}^1 - \tilde{\psi}_{itt}^2 - L_0^{-1}(f_0^1 - f_0^2)(x_i, t) + \\
&\quad \sum_{j=r_0+1}^{r_1} c_j^2(t) L^j(\Phi_t^1 - \Phi_t^2)(x_i, t) + \sum_{j=r_1+1}^{r_2} c_j^2(t) L^j(\Phi^1 - \Phi^2)(x_i, t), \\
S_i(\vec{c}) &= L_0^{-1}(L_{01}\partial_t + L_{02})\omega(x_i, t) + R_0\omega(x_i, t) + \sum_{j=r_0+1}^{r_1} c_j^1(t) L_0^{-1} L^j \omega_t(x_i, t) \\
&\quad + \sum_{j=r_1+1}^{r_2} c_j^1(t) L_0^{-1} L^j \omega(x_i, t) + \\
&\quad \sum_{j=r_0+1}^{r_1} (c_j^1 - c_j^2)(t) L_0^{-1} L^j V_t^2(x_i, t) + \sum_{j=r_1+1}^{r_2} (c_j^1 - c_j^2)(t) L_0^{-1} L^j V^2(x_i, t)
\end{aligned}$$

Эти равенства можно записать также в виде

$$\vec{c} = B^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 + S_1(\vec{c}) \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_{r_2} + S_{r_2}(\vec{c}) \end{pmatrix} = S(\vec{c}). \quad (2.134)$$

Далее, фактически повторяется конец доказательства предыдущей теоремы. Поэтому можно опустить некоторые детали, записывая лишь результат. Далее оцениваем величину $\|S(\vec{c})\|_{L_p(0,\gamma)}$ (см. оценку (2.122) и дальнейшие рассуждения) в предыдущей теореме. Покажем как оцениваются различные слагаемые, входящие в эту норму. Например, используя (2.129), получим

$$\begin{aligned}
\|(c_i^1 - c_i^2) L_0^{-1} L^i V_t^2(x_j, t)\|_{L_p(0,\gamma)} &\leq c_1 \|c_i^1 - c_i^2\|_{L_p(0,\gamma)} \|L_0^{-1} L^i V_t^2(x_j, t)\|_{L_\infty(0,\gamma)} \\
&\leq c_2 \|c_i^1 - c_i^2\|_{L_p(0,\gamma)} \|V_t^2\|_{L_\infty(0,\gamma; W_p^2(G))} \leq \\
&c_3 \|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)} \gamma^{1-1/p} \|V^2\|_{W_p^2(0,\gamma; W_p^2(G))} \leq c_4(R_0) \|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)} \gamma^{1-1/p},
\end{aligned}$$

где все постоянные не зависят от γ . Аналогично (используем (2.132)) имеется, что

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=r_0+1}^{r_1} c_j^1(t) L_0^{-1} L^j \omega_t(x_j, t) \right\|_{L_p(0,\gamma)} &\leq C(R_0) \|\omega_t\|_{L_\infty(0,\gamma; W_p^2(G))} \\
&\leq C_1(R_0) \gamma^{1-1/p} \|\omega\|_{W_p^2(0,\gamma; W_p^2(G))} \leq \gamma^{1-1/p} (c(R_0) \|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)} + \\
&c_3 \|\Phi^1 - \Phi^2\|_{W_p^2(0,\gamma; W_p^2(G))} + c_4 \|f_0^1 - f_0^2\|_{L_p(Q\gamma)}).
\end{aligned}$$

Другие слагаемые, входящие в норму $\|S(\vec{c})\|_{L_p(0,\gamma)}$, оцениваются аналогично. Таким образом, используя определение оператора S (см. оценку (2.122) и дальнейшие рассуждения), и полученные выше оценки (2.131), (2.129) получим, что

$$\|S(\vec{c})\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c(R_0) \gamma^{1-1/p} \|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)} + c_1(R_0) \|\vec{F}_1 - \vec{F}_2\|_{H_\gamma}. \quad (2.135)$$

Выберем $\gamma_2 \leq \gamma_1$ такое, что $c(R_0)\gamma_2^{1/q} \leq 1/2$. Тогда из равенства (2.134) получим оценку ($\gamma \leq \gamma_2$)

$$\|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)} \leq 2\|\vec{\beta}\|_{L_p(0,\gamma)} + 2c_1(R_0)\|\vec{F}_1 - \vec{F}_2\|_{H_\gamma}. \quad (2.136)$$

Используя определение вектора β и оценку (2.128), получим неравенство

$$\|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma_2)} \leq c_1\|\vec{F}_1 - \vec{F}_2\|_{H_{\gamma_2}}. \quad (2.137)$$

Тогда оценка (2.132) влечет утверждение теоремы. $\square$

2.5 Алгоритм численного решения обратных задач для математических моделей фильтрации

В этом параграфе приводится описание численных алгоритмов решения обратных задач вида (2.69) – (2.72). Они основаны на способе построения приближенного решения в теоремах существования. Кроме того, используется соответствующая теорема об устойчивости решений соответствующих обратных задач. Считается, что условия, при выполнении которых обратная задача корректна, выполнены. Стандартные численные методы решения обратных задач очень часто основываются на сведении задачи к задаче управления и затем к минимизации соответствующего квадратичного функционала. Можно сослаться, например, на монографии [1, 108, 132, 140], где описаны классические методы, используемые для численного решения обратных задач. Однако, эти подходы, с одной стороны, довольно трудоемкие с точки зрения объема вычислений, а с другой стороны, не всегда приводят к нужному результату: обратная задача и соответствующая задача управления не всегда эквивалентны. Поэтому проблема построения простых и достаточно быстрых методов решения обратных задач имеется. Среди работ, посвященных численному решению прямых задач для уравнений соболевского типа, стоит выделить работы [68] – [159]. Однако, работ, посвященных численному решению обратных задач для уравнений соболевского типа, не так много (имеются только отдельные примеры). Алгоритм, приведенный ниже, использует некоторые интегральные тождества. Сначала, используется метод конечных элементов и сведение прямой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Система решается с помощью

метода конечных разностей (неявная схема). Обратная задача решается с помощью специальной итерационной процедуры. Сначала определяются начальные значения неизвестных коэффициентов (правой части) и решения. Предполагается, что построены приближение неизвестных коэффициентов (или правой части) и решения на $n - 1$ слое по времени. Задав построенное значение коэффициентов в качестве их значений на n слое, строится приближение решения на n слое (из соответствующего конечно-разностного уравнения). Используя условие перопределения, определяется новое приближение коэффициентов на n слое и затем снова строится приближение решения на n слое. Процедура повторяется до тех пор, пока норма невязки не станет достаточно малой. Построенные значения коэффициентов и решения фиксируются и полагаются равными значению коэффициентов и решения на n слое. Далее, переходя на $n + 1$ слой, повторяем процедуру. Схема, в целом, аналогична схеме предиктор-корректор и дает возможность оптимального устойчивого восстановления неизвестных коэффициентов (или правой части). Вся эта схема описана ниже в случае коэффициентных обратных задач фильтрации. Эта схема применима без особых изменений и в случае уравнений соболевского типа четвертого порядка.

2.5.1 Описание алгоритма для коэффициентной обратной задачи

Опишем идею построения алгоритма. Чтобы упростить представление, сделаем это в модельном случае. В частности, в класс задач входит задача определения коэффициента пьезопроводности для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной. Используются некоторые интегральные тождества. Рассматривается задача

$$L_0 u_t + k(t) L_1 u = f, \quad (2.138)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = g, \quad u(0) = u_0(x), \quad (2.139)$$

$$u(x_0, t) = \psi_0(t), \quad (2.140)$$

где

$$L_0 u = -\operatorname{div}(a_0(x, t) \nabla u_t) + b_0(x, t) \cdot \nabla u + c_0(x, t) u,$$

$$L_1 u = -\operatorname{div}(a_1(x, t) \nabla u) + b_1(x, t) \cdot \nabla u + c_1(x, t) u,$$

и a_0, a_1, c_0, c_1 скалярные функции и b_0, b_1 вектор-функции размера n . Функции u и $k(t)$ неизвестны. Предполагается, что выполнены все условия теоремы 5. Пусть функция Φ решение задачи (2.138), (2.139). Так как теорема существования локальна по времени, можно заменить условие (2.36) следующим условием: пусть существует $t_0 > 0$ такое, что

$$|L_0^{-1}L_1\Phi(x_0, t)| \geq \delta_0 > 0 \quad \forall t \in [0, t_0],$$

или записать в простом виде

$$|L_0^{-1}L_1u_0(x_0)| \geq \delta_0 > 0 \quad \forall t \in [0, t_0], \quad (2.141)$$

Пусть $\varphi \in L_q(0, T; W_q^1(G))$ ($1/q + 1/p = 1$) - тестовая функция, и пусть функция u является решением уравнения задачи (2.138), (2.139) из класса, указанного в теореме 5. Интегрируя по частям

$$(L_0u_t, \varphi) + k(t)(L_1u, \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in L_q(0, T; W_q^1(G)), \quad (2.142)$$

приходим к уравнению

$$a(u_t, \varphi) + k(t)b(u, \varphi) = l(\varphi) + k(t)l_1(\varphi), \quad (2.143)$$

где

$$a(u_t, \varphi) = (a_0 \nabla u_t, \nabla \varphi) + (b_0 \cdot \nabla u_t + c_0 u_t, \varphi),$$

$$b(u, \varphi) = (a_1 \nabla u, \nabla \varphi) + (b_1 \cdot \nabla u + c_1 u, \varphi),$$

$$l(\varphi) = (f, \varphi) + l_0(\varphi),$$

$$l_0(\varphi) = \int_{\Gamma} a_0 g_t \varphi d\Gamma,$$

$$l_1(\varphi) = \int_{\Gamma} a_1 g \varphi dt.$$

Затем ищется решение $\varphi_0(x, t)$ задачи

$$L_0^* \varphi_0 = \delta(x - x_0), \quad a_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} + b \cdot n \varphi_0|_{\Gamma} = 0, \quad (2.144)$$

где L_0^* формально сопряжен с L_0 , и δ это дельта-функция Дирака. Подставляя φ_0 в (2.143), получается, что

$$\psi_t + k(t)(b(u, \varphi_0) - l_1(\varphi)) = l(\varphi_0). \quad (2.145)$$

Отсюда заключается, что

$$k(t)(b(u, \varphi_0) - l_1(\varphi_0)) = l(\varphi_0) - \psi_t. \quad (2.146)$$

Отметим, что из определения φ_0 следует, что $b(u, \varphi_0) - l_1(\varphi_0) = L_0^{-1}L_1u(x_0, t)$. Так как $|L_0^{-1}L_1u_0(x_0)| > \delta_0 > 0$ на некотором отрезке $[0, t_0]$ можно сказать, что $|(b(u, \varphi_0) - l_1(\varphi_0))| > 0$ на некотором отрезке времени. Интегральное тождество (2.146) позволяет построить итерационную процедуру, реализованную в доказательстве теоремы 5. Чтобы избежать чрезмерных вычислений, можно опустить определение Φ в рассматриваемом случае. Пусть $k^0 = (l_0(\varphi_0) - \psi_t)/(b(u_0, \varphi_0) - l_1(\varphi_0))|_{t=0}$. Функции k^i даны, можно построить u^{i+1} как решение задачи (2.138), (2.139) с $k(t) = k^i(t)$ и определить следующую итерацию k^{i+1} из одного из равенств

$$k^{i+1}(t) = (l(\varphi_0) - \psi_t)/(b(u^{i+1}, \varphi_0) - l_1(\varphi_0)), \quad (2.147)$$

$$k^{i+1} = (l(\varphi_0) - \psi_t - k^i b(u^{i+1} - u_0, \varphi_0))/(b(u_0, \varphi_0) - l_1(\varphi_0)). \quad (2.148)$$

Последняя формула почти соответствует итерационной процедуре при доказательстве теоремы о неподвижной точке для оператора S , построенного в теореме 8. Особенность заключается в том, что функция Φ заменена на функцию u_0 . В этом случае легко понять, что все выводы остаются в силе. Знаменатель (2.148) отличен от нуля на некотором промежутке $[0, t_0]$. Первая формула (2.147) соответствует другому оператору S , но те же выводы могут быть использованы для доказательства того, что итерационная процедура (2.147) сходится так же на некотором промежутке времени $[0, t_0]$.

2.5.2 Численная реализация алгоритма

Алгоритм является итерационным и опирается на метод конечных элементов. Определим триангуляцию G , узлы сетки $x_1, x_2, \dots, x_N$, и соответствующие кусочно-линейные функции $\{\varphi_i(x)\}$ таким образом $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} символ Кронекера. Без ограничения общности можно считать, что точка наблюдения x_0 является узлом сетки x_{j_0} . Приближенное решение задачи (2.138), (2.139) ищется в виде $u = \sum_{i=1}^N c_i(t)\varphi_i(x)$. Для определения функций c_i используется интегральное тождество (2.143). Вектор-функция $C(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_N(t))^T$ является

решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$AC_t + k(t)BC = F, \quad C(0) = (u_0(x_1), u_0(x_2), \dots, u_0(x_N))^T, \quad (2.149)$$

где A, B являются матрицами с элементами $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, $b_{ij} = b(\varphi_j, \varphi_i)$, и $F = (F_1, \dots, F_N)^T$, $F_i(t) = l_0(\varphi_i) + k(t)l_1(\varphi_i)$. Для решения (2.149), используется метод конечных разностей (неявная схема) и замена (2.149) на конечно-разностное уравнение

$$A_n \frac{C_n - C_{n-1}}{\tau} + k_n B_n C_n = F_{0,n} + k_n F_{1,n}, \quad C_0 = C(0), \quad (2.150)$$

где $n = 1, 2, \dots, M$, $\tau = T/M$, и F_{0n}, F_{1n}, A_n, B_n - значения правой части в (2.149), и матрицы A, B при $n\tau$. Предположим здесь, что аппроксимация $\tilde{k}$ к k является кусочно-постоянной функцией, принимающей значение k_n на $((n-1)\tau, n\tau]$. Соответственно, кусочно-постоянная аппроксимация решения $C(t)$ на (2.149) является кусочно-постоянной функцией, равной вектору C_n на множестве $((n-1)\tau, n\tau]$. Дан вектор C , обозначим его j -th координату как $(C)_j$. Аналог условий переопределения выглядит следующим образом:

$$\left(\frac{C_n - C_{n-1}}{\tau} \right)_{j_0} = \psi_{0t}((n-1)\tau). \quad (2.151)$$

Поскольку полученные результаты являются локальными по времени, используется идея схемы предиктор-корректор. Найдем $k_0 = ((A_0^{-1}F_{0,0})_{j_0} - \psi_t(0))/((A_0^{-1}B_0C_0)_{j_0} - (A_0^{-1}F_{1,0})_{j_0})$. Предположим, что $k_1^1 = k_0$. Пусть известно приближение k_1^i для величины k_1 . Найдем решение C_1^i для уравнения (2.150) с $n = 1$ и $k_1 = k_1^i$, то есть

$$A_1 \frac{C_1^i - C_0}{\tau} + k_1^i B_1 C_1^i = F_{0,1} + k_1^i F_{1,1}. \quad (2.152)$$

Следующее приближение определяется как

$$k_1^{i+1} = ((A_1^{-1}F_{0,1})_{j_0} - \psi_t(0))/((A_1^{-1}B_1C_1^i)_{j_0} - (A_1^{-1}F_{1,1})_{j_0}). \quad (2.153)$$

Повторяем, пока $|k_1^{i+1} - k_1^i| < \varepsilon$, где ε некоторое малое число. Затем возьмем $k_1 := k_1^{i+1}$. Полагаем $C_1 := C_1^{i+1}$. Предположим, что найдены $k_1, \dots, k_m$ ($m < M$) и вектор $C_1, \dots, C_m$. Возьмем $k_{m+1}^1 := k_m$ и вычислим k_{m+1}^i для всех i .

Предположим, что k_{m+1}^i известна. Найдём решение C_{m+1}^i уравнения (2.150) с $n = m + 1$ и $k_n = k_{m+1}^i$, то есть

$$A_{m+1} \frac{C_{m+1}^i - C_m}{\tau} + k_{m+1}^i B_{m+1} C_{m+1}^i = F_{0,m+1} + k_{m+1}^i F_{1,m+1}. \quad (2.154)$$

Далее вычислим

$$k_{m+1}^{i+1} = ((A_{m+1}^{-1} F_{0,m+1})_{j_0} - \psi_t(m\tau)) / l_{m+1}^i, \quad (2.155)$$

где $l_{m+1}^i = ((A_{m+1}^{-1} B_{m+1} C_{m+1}^i)_{j_0} - (A_{m+1}^{-1} F_{1,m+1})_{j_0})$. Рассуждения повторяются, пока $|k_{m+1}^{i+1} - k_{m+1}^i| < \varepsilon$. В этом случае положим, что $k_{m+1} := k_{m+1}^{i+1}$ и $C_{m+1} := C_{m+1}^{i+1}$. Вычисления повторяются до $m = M$. Возможно, что процесс остановится на некоторой итерации (например, если знаменатель в (2.155) станет равным нулю). Это возможно из-за нелинейности задачи. Формула (2.155) соответствует равенству (2.147).

2.5.3 Описание алгоритма определения функции источника

Идея так же описывается в модельном случае. Рассматривается задача

$$L_0 u_t + k(t) L_1 u = f = f_0 + \sum_{i=1}^r q_i(t) f_i(x, t), \quad (2.156)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = g, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad (2.157)$$

$$u(y_i, t) = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (2.158)$$

где

$$L_0 u = -\operatorname{div}(a_0(x, t) \nabla u_t) + b_0(x, t) \cdot \nabla u + c_0(x, t) u,$$

$$L_1 u = -\operatorname{div}(a_1(x, t) \nabla u) + b_1(x, t) \cdot \nabla u + c_1(x, t) u,$$

и a_0, a_1, c_0, c_1 скалярные функции и b_0, b_1 вектор-функции размера n . Функции u и $q_i(t)$ ($i = 1, \dots, r$) неизвестны. Предполагается, что выполнены все условия теоремы 5. Пусть $\varphi \in L_q(0, T; W_q^1(G))$ ($1/q + 1/p = 1$) будет тестовой функцией, а функция u – решение уравнения задачи (2.156), (2.157) из класса, указанного в теореме 5. Интегрируя по частям

$$(L_0 u_t, \varphi) + k(t) (L_1 u, \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in L_q(0, T; W_q^1(G)), \quad (2.159)$$

приходим к уравнению

$$a(u_t, \varphi) + k(t)b(u, \varphi) = l(\varphi) + k(t)l_1(\varphi) + \sum_{k=1}^r q_k(t)(f_k, \varphi), \quad (2.160)$$

где $a(u_t, \varphi) = (a_0 \nabla u_t, \nabla \varphi) + (b_0 \cdot \nabla u_t + c_0 u_t, \varphi)$, $b(u, \varphi) = (a_1 \nabla u, \nabla \varphi) + (b_1 \cdot \nabla u + c_1 u, \varphi)$, $l(\varphi) = (f_0, \varphi) + l_0(\varphi)$, $l_0(\varphi) = \int_{\Gamma} a_0 g_t \varphi d\Gamma$, $l_1(\varphi) = \int_{\Gamma} a_1 g \varphi dt$.

Затем рассматриваем решение $\varphi_j(x, t)$ ($j = 1, 2, \dots, r$) задачи

$$L_0^* \varphi_j = \delta(x - y_j), \quad a_0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} + b \cdot n \varphi_j|_{\Gamma} = 0, \quad (2.161)$$

где L_0^* формально сопряжен с L_0 , и δ это дельта-функция Дирака. Подставляя φ_j в (2.160), получаем

$$\psi_{jt} + k(t)(b(u, \varphi_j) - l_1(\varphi_j)) = l(\varphi_j) + \sum_{k=1}^r q_k(t)(f_k, \varphi_j). \quad (2.162)$$

Отсюда получаем, что

$$\sum_{k=1}^r q_k(t)(f_k, \varphi_j) = \psi_{jt} + k(t)(b(u, \varphi_j) - l_1(\varphi_j)) - l(\varphi_j). \quad (2.163)$$

Отметим, что из определения φ_j следует, что

$$\sum_{k=1}^r q_k(t)(f_k, \varphi_j) = \sum_{k=1}^r q_k(t) L^{-1} f_k(y_j, t).$$

Таким образом, это выражение можно записать как $R\vec{q}$ и с учетом условий корректности определитель матрицы R не обращается в ноль. Интегральное тождество позволяет построить итерационную процедуру, реализованную в доказательстве теоремы 5. Пусть $\vec{q}_0 = R^{-1}F_0$ и $F_{0j} = \psi_{jt} + k(t)(b(u_0, \varphi_j) - l_1(\varphi_j)) - l(\varphi_j)$. Функции $\vec{q}_i$ даны, можно построить u^{i+1} как решение задачи (2.156), (2.157) с $\vec{q} = \vec{q}_i$ и определить следующую итерацию $\vec{q}_{i+1}$ из равенства

$$\begin{aligned} \vec{q}_{i+1} &= R^{-1}F_i, \quad F_i = (F_{i1}, \dots, F_{ir}), \\ F_{ij} &= \psi_{jt} + k(t)(b(u_{i+1}, \varphi_j) - l_1(\varphi_j)) - l(\varphi_j). \end{aligned} \quad (2.164)$$

Последняя формула почти соответствует итерационной процедуре при доказательстве теоремы о неподвижной точке для оператора S , построенного в теореме 8.

2.5.4 Численная реализация алгоритма

Алгоритм также является итерационным и опирается на метод конечных элементов. Определяем триангуляцию области, узлы сетки и соответствующие кусочно-линейные функции. Без ограничения общности можно считать, что точка наблюдения y_j является узлом сетки x_{m_j} ($j = 1, 2, \dots, r$). Приближенное решение задачи (2.156), (2.157) ищется в виде $u^N = \sum_{i=1}^N q_i(t)\varphi_i(x)$. Предполагаем, что $a(u, \varphi) = (a_0 \nabla u, \nabla \varphi) + (b_0 \cdot \nabla u + c_0 u, \varphi)$, $b(u, \varphi) = (a_1 \nabla u, \nabla \varphi) + (b_1 \cdot \nabla u + c_1 u, \varphi)$, $l(\varphi) = (f_0, \varphi) + l_0(\varphi)$, $l_0(\varphi) = \int_{\Gamma} a_0 g_t \varphi d\Gamma$, $l_1(\varphi) = \int_{\Gamma} a_1 g \varphi dt$.

Вектор-функция $C(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_N(t))^T$ является решением системы ОДУ

$$AC_t + k(t)BC = F_0 + F_1, \quad C(0) = (u_0(x_1), u_0(x_2), \dots, u_0(x_N))^T, \quad (2.165)$$

где A, B это матрицы с элементами $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, $b_{ij} = b(\varphi_j, \varphi_i)$, и $F_0 = (F_{01}, \dots, F_{0N})^T$, $F_{0i}(t) = l(\varphi_i) + k(t)l_1(\varphi_i)$, $F_1 = (F_{11}, \dots, F_{1N})^T$, где $F_{1j} = \sum_{k=1}^r q_k(t)(f_k, \varphi_j)$. Таким образом вектор F_1 представляется как $F_1 = R\vec{q}$, где матрица $R = \{r_{ij}\}$ содержит $r_{ij} = (f_j, \varphi_i)$. Тогда система уравнений имеет вид:

$$AC_t + k(t)BC = F_0 + R\vec{q}, \quad C(0) = (u_0(x_1), u_0(x_2), \dots, u_0(x_N))^T, \quad (2.166)$$

Для того, чтобы решить (2.166) используется метод конечных разностей (неявная схема) и замена (2.166) на конечно-разностное уравнение

$$A_n \frac{C_n - C_{n-1}}{\tau} + k_n B_n C_n = F_{0,n} + R_n \vec{q}_n, \quad C_0 = C(0), \quad (2.167)$$

где $n = 1, 2, \dots, M$, $\tau = T/M$, и $F_{0,n}$, A_n , B_n , R_n – значения правой части в (2.166), и матрицы A, B при $n\tau$. Предположим здесь, что аппроксимация $\vec{q}_n$ является кусочно-постоянной функцией, принимающей значение $\vec{q}_n$ на $((n-1)\tau, n\tau]$. Соответственно, кусочно-постоянная аппроксимация решения $C(t)$ на (2.165) является кусочно-постоянной функцией, равной вектору C_n на множестве $((n-1)\tau, n\tau]$. Аналог условий переопределения выглядит следующим образом:

$$\frac{(C_n)_{m_j} - (C_{n-1})_{m_j}}{\tau} = \psi_{jt}((n-1)\tau), \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (2.168)$$

где $(C_n)_{m_j}$ это m_j -ая координата вектора C_n . Из (2.168) имеем

$$\psi_{jt}((n-1)\tau) + k_n((A_n)^{-1}B_n C_n)_{m_j} - ((A_n)^{-1}F_{0,n})_{m_j} = ((A_n)^{-1}R_n \vec{q}_n)_{m_j}, \quad (2.169)$$

где $j = 1, 2, \dots, r$. Обозначим через α_{ij}^n элементы матрицы $(A_n)^{-1}R_n$. Правая часть в (2.169) может быть записана как $S_n \vec{q}_n$ и S_n это матрица с элементами $\beta_{j,l}^n = \alpha_{m_j,l}^n$. Левая часть – вектор G_n с координатами $G_j^n = \psi_{jt}((n-1)\tau) + k_n((A_n)^{-1}B_n C_n)_{m_j} - ((A_n)^{-1}F_{0,n})_{m_j}$, $j = 1, 2, \dots, r$. Таким образом, можно рассмотреть уравнение

$$G_n = S_n \vec{q}_n. \quad (2.170)$$

Рассмотрим численный алгоритм. Находим вектор $\vec{q}_0$ из равенства

$$G_0 = S_0 \vec{q}_0, \quad (2.171)$$

где координаты вектора G_0 имеют вид: $G_j^0 = \psi_{jt}(0) + k_0((A_0)^{-1}B_0 C_0)_{m_j} - ((A_0)^{-1}F_{0,0})_{m_j}$ ($j = 1, 2, \dots, r$). Далее, положим, что $\vec{q}_1^1 = \vec{q}_0$ и найдем вектор C_1^1 из равенства

$$A_n \frac{C_n^i - C_{n-1}}{\tau} + k_n B_n C_n = F_{0,n} + R_n \vec{q}_n^i, \quad C_0 = C(0), \quad (2.172)$$

где $i = 1$ и $n = 1$. Пусть G_n^i это вектор с координатами $G_j^i = \psi_{jt}((n-1)\tau) + k_n((A_n)^{-1}B_n C_n^i)_{m_j} - ((A_n)^{-1}F_{0,n})_{m_j}$, $j = 1, 2, \dots, r$. Найдем вектор $\vec{q}_1^2$ из равенства

$$G_n^i = S_n \vec{q}_n^{i+1}, \quad (2.173)$$

где $n = 1$ и $i = 1$. Подставляя вектор $\vec{q}_1^2$ в (2.172) с $n = 1$ и $i = 2$, можно найти вектор C_1^2 и так далее. Повторяем рассуждения, пока $\|\vec{q}_1^{i+1} - \vec{q}_1^i\| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ некоторое малое число. Затем возьмем $C_1 = C_1^{i+1}$, $\vec{q}_1 = \vec{q}_1^{i+1}$. Предположим, что найдены вектора C_{n-1} , $\vec{q}_{n-1}$. Возьмем $\vec{q}_n^1 = \vec{q}_{n-1}$ и вычислим вектор C_n^1 из (2.172) при $i = 1$. Определим вектор G_n^1 и найдем $\vec{q}_n^2$ из (2.173) при $i = 1$. Повторяем рассуждения, пока $\|\vec{q}_n^{i+1} - \vec{q}_n^i\| < \varepsilon$. В этом случае положим, что $\vec{q}_n = \vec{q}_n^{i+1}$, $C_n = C_n^{i+1}$. Повторяя рассуждения можно найти все величины $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_M$, $C_1, C_2, \dots, C_M$.

В целом, алгоритм численного решения задачи об определении параметров среды и функции источника в математических моделях фильтрации сводится к следующим этапам.

Этап 1. При помощи метода конечных элементов прямая задача об определении давления в математической модели фильтрации сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая далее заменяется разностной схемой для ее решения.

Этап 2. Выписываются дополнительные соотношения, связывающие давление и данные из условия переопределения.

Этап 3. Строится итерационная процедура для определения решения. Используется идея схемы предиктор-корректор. На каждом временном слое производится несколько итераций для построения приближения самого решения (давления) в модели и неизвестных параметров (коэффициента пьезопроводности или неизвестных функций входящих в правую часть). Следующая итерация неизвестных параметров вычисляется из условий переопределения и последующая итерация для решения вычисляется из соответствующей разностной схемы для определения решения прямой задачи. Процесс прекращается, если норма невязки становится меньше наперед заданного ε . Далее происходит переход на следующий временной слой.

2.6 Описание комплекса программ и результаты численных экспериментов

Реализация описанного алгоритма для коэффициентной обратной задачи представлена зарегистрированной программой "Программа численного определения коэффициента средних гидравлических характеристик в обратных задачах фильтрации". Средой разработки был выбран MatLab. Язык MatLab является высокоуровневым интерпретируемым языком программирования, который включает основанные на матрицах структуры данных, широкий спектр функций, интегрированную среду разработки, объектно-ориентированные возможности и интерфейсы к программам, написанным на других языках программирования. Является одним из самых подходящих вариантов, так как он имеет достаточно удобную среду для программирования и реализации различных расчетов, а также возможностью визуализации полученных результатов. Для MatLab имеется возможность создавать специальные наборы инструментов, расширяющих его

функциональность. Наборы инструментов представляют собой коллекции функций, написанных на языке MatLab для решения специализированных задач.

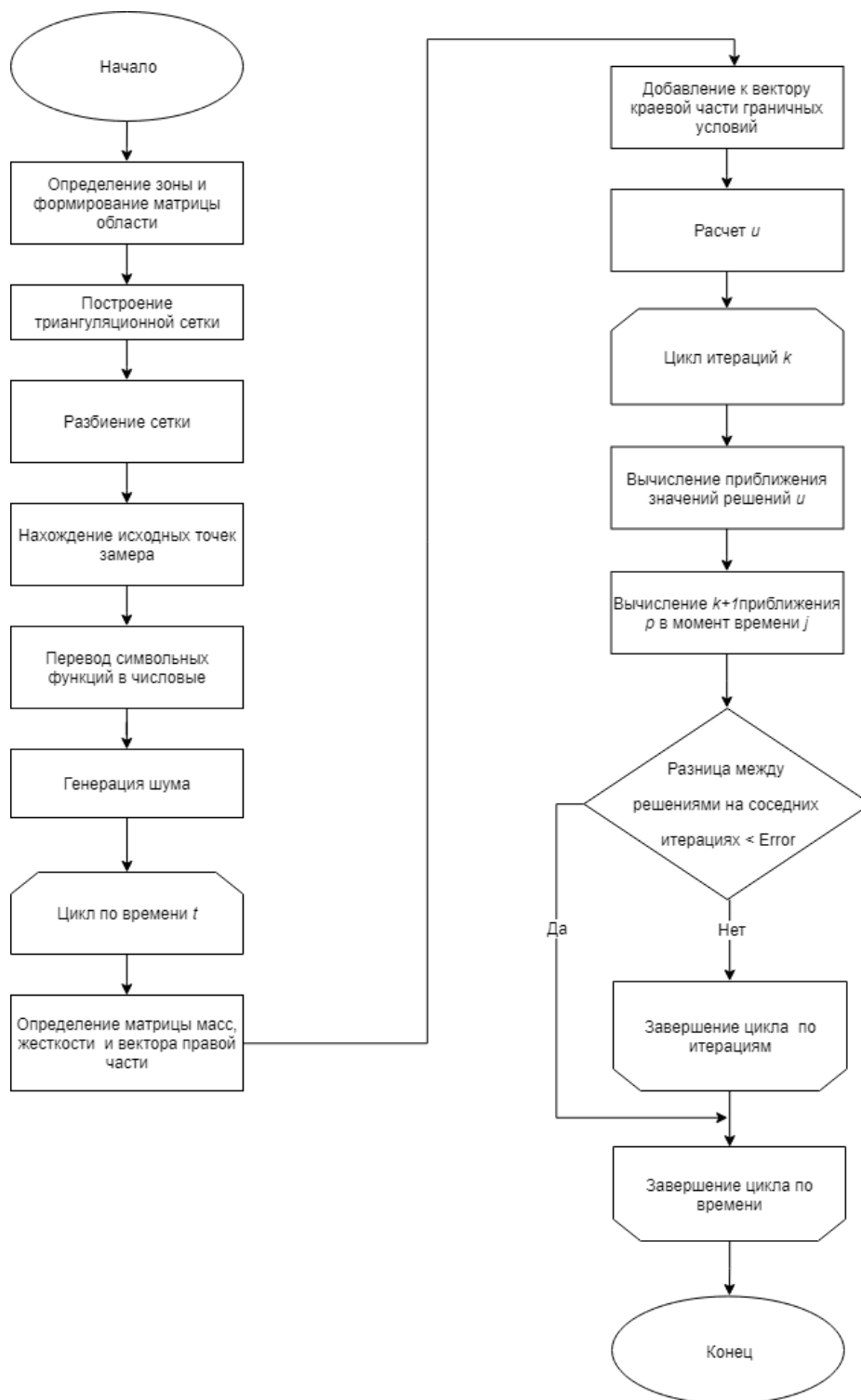


Рисунок 2.1 — Блок схема алгоритма численного решения обратных задач, с определением коэффициента средних гидравлических характеристик в математических моделях теории фильтрации

Библиотеки MatLab отличаются высокой скоростью численных вычислений. Матрицы являются основой автоматического решения и составлений уравнений состояния динамических объектов и систем. MatLab один из наиболее мощных универсальных интегрированных пакетов компьютерной математики. Также стоит отметить кроссплатформенность пакета, так как он работает на большинстве современных операционных систем. Поэтому работа с программой возможна на любом ПК, на котором установлен MatLab.

Программа может быть применена при необходимости численного определения коэффициента средних гидравлических характеристик в обратных задачах фильтрации. Блок схема алгоритма представлена на рисунке 2.1. Вначале определяется зона и формируется матрица области, затем строится триангуляционная сетка, с помощью встроенной функции `initmesh()`. Затем для повышения точности она преобразуется функцией `refinemesh()`, которая разделяет все заданные треугольники на четыре треугольника. Количество повторений преобразований вводится пользователем. Затем находятся исходные точки замера, а все введенные данные переводятся из символьных в числовые. Перед началом цикла по времени инициализируется генерация случайных возмущений, уровень которых также задается пользователем. В начале цикла определяются матрицы масс и жесткости, определяется вектор правой части, к которому затем добавляются граничные условия. После этого происходит расчет u и запускается цикл, вычисляющий приближенные значения u и приближения коэффициентов средних гидравлических характеристик в определенный момент времени (функции p). Расчет ведется, пока разница на соседних итерациях не станет меньше некоторого малого числа (определяемого также пользователем).

Входные данные могут быть введены пользователем вручную или добавлены с помощью загрузки готового файла с данными. Для начала работы необходимо определить основные параметры: ввести младшие коэффициенты, старшие коэффициенты, указать точки наблюдения, выбрать количество слоев, указать начальные условия, выбрать степень разбиения сетки, ввести моделируемое уравнение, ввести уровень точности и, если необходимо, уровень случайно генерируемых возмущений.

Программа обеспечивает выполнение следующих функций:

- вычисление граничных векторов и вектора правой части;

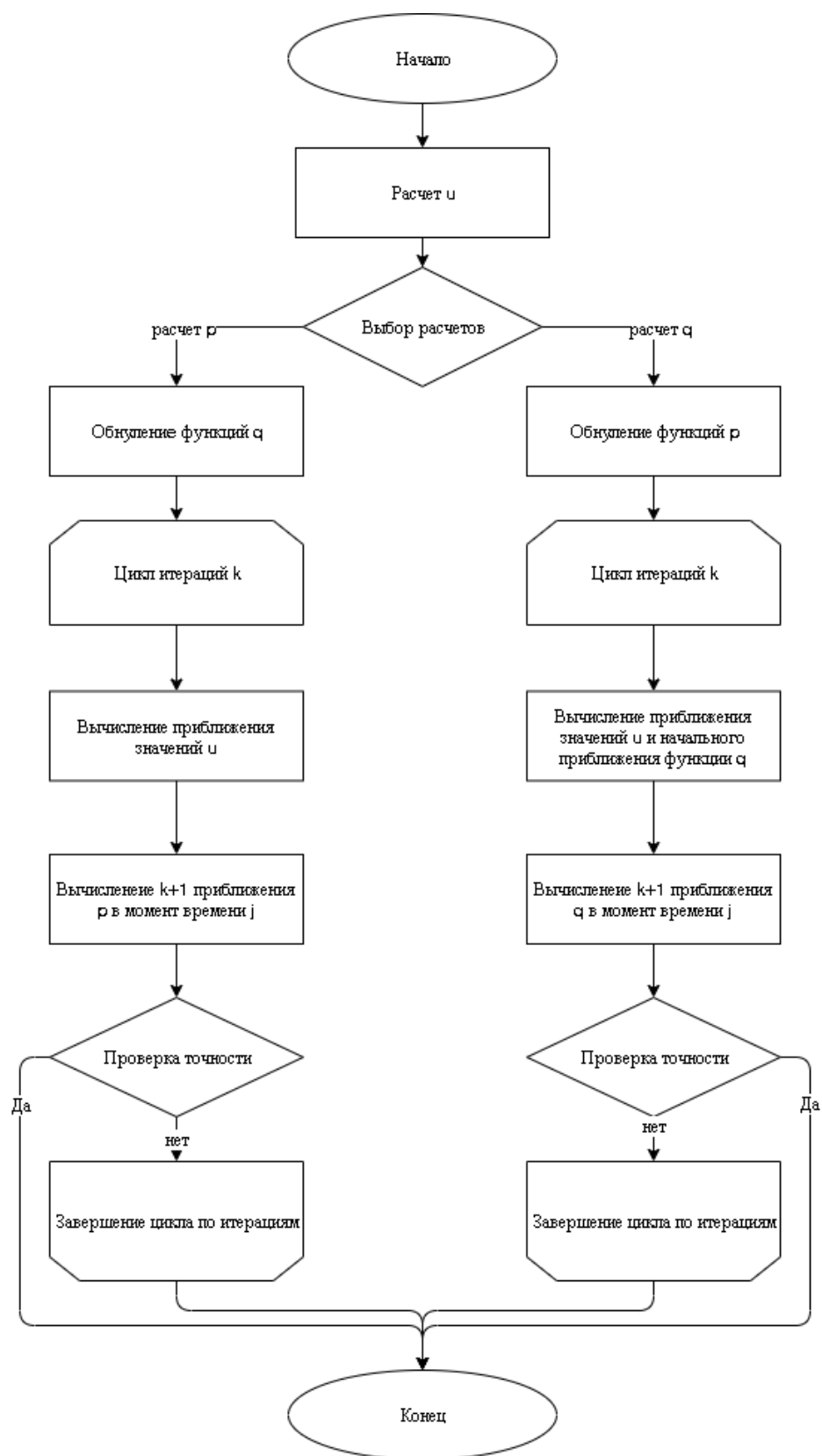


Рисунок 2.2 — Блок схема процедуры расчета коэффициента пьезопроводности и функции источника в задачах фильтрации

- определение и размельчение триангуляционной сетки;
- поиск координат середин треугольников;
- расчет возмущений;
- поиск приближения искомым функций;
- вывод графиков триангуляционной сетки, приближения функции;
- формированием *.mtl файлов содержащих геометрические параметры выводимых моделей решений;
- сохранение результатов вычислений;
- экспорт результатов.

Результатом программы являются кусочно разностное приближение решения уравнения и коэффициентов. Полученные результаты сохраняются в самой программе и могут быть использованы в дальнейшем для построения отдельных расчетов или графиков. Результаты при необходимости можно экспортировать в сторонние приложения.

Для того, чтобы иметь возможность включить в комплекс алгоритм определения функции источника, необходимо было несколько изменить структуру входных данных, в частности правой части - добавилась возможность ввода функций источника q_i . Так же добавлен блок, который рассчитывает приближение этих функций по алгоритму определения функции источника. В целом, блок схема, представленная на рисунке 2.1, соответствует полученной программе, но у пользователя появился выбор: решать коэффициентную задачу или задачу об определении функций источника при, при выборе одного из них другой считается известным или отсутствует. Часть алгоритма, отвечающая за расчет u и приближений функций p , заменятся процедурой, описанной блок схемой, представленной на рисунке 2.2. Остальной функционал можно применять для новых решений и расчетов.

Характеристики компьютера, на котором производились расчеты следующие: процессор Intel(R) Core(TM) i3-8100 CPU @ 3.60GHz 3.60GHz; ОЗУ: 10,00 ГБ; при использовании 64-разрядной операционной системы Windows 10 Pro.

2.6.1 Определение коэффициента пьезопроводности в задачах фильтрации

В результате вычислений получены приближенные значения решения $(u(x, y, t), k(t))$ задачи (2.138) – (2.139) в точках $(t_1, t_2, \dots, t_N)$. Здесь точка (x, y) принадлежит единичной окружности с центром в $(0, 0)$, $t \in (0, 1)$. Ниже приводятся результаты расчетов для функций $k(t), u(x, y, 1)$. Чтобы установить устойчивость определения решения при случайных возмущениях данных проводим численные эксперименты добавляя к данным переопределения случайные возмущения: $\tilde{\psi}_t(x_0, t) = \psi_t(x_0, t)(1 + \delta(2\sigma - 1))$, где δ задается пользователем, а $\sigma \in [0, 1]$ определяется генератором случайных чисел Matlab, а именно – функцией rand.

Для численного решения задачи используются 3 сетки для описанной области с количеством узлов $N_1 = 197$, $N_2 = 751$ и $N_3 = 2933$ (Рис. 2.3).

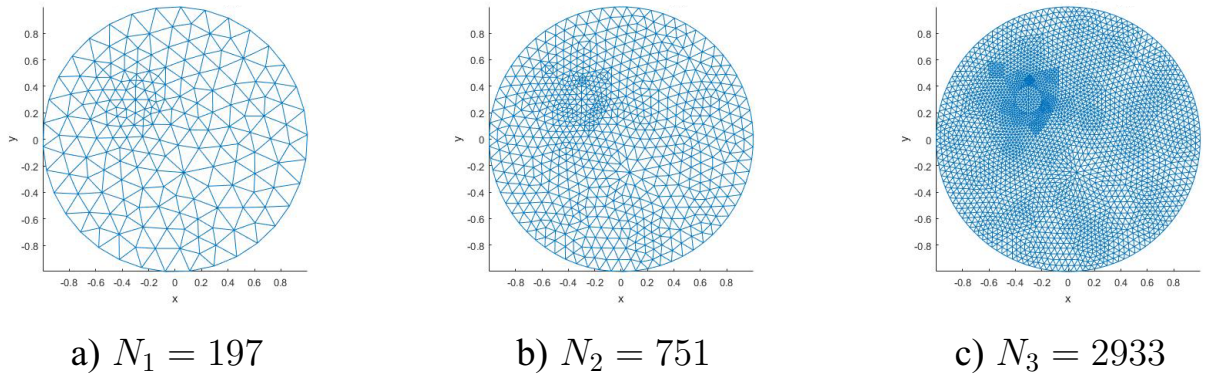


Рисунок 2.3 — Построение сеток с разным количеством узлов

Дополнительная информация (2.140) задана в точке наблюдения $x_{j_0} = (x_0, y_0) = (-0.3, 0.3)$.

Вначале рассматриваем математическую модель Баренблатта – Желтова – Кочинной (2.1) и задачу

$$\begin{aligned}
 u_t - \xi \Delta u_t - k(t) \Delta u &= f \\
 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= g(x, y, t), \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y).
 \end{aligned}
 \tag{2.174}$$

Сначала опишем входные данные, которые имеют следующий вид:

граничные условия: $g = (x(3x^2 - 1)/2 + y^2)(t + 1)/2$;

начальные данные: $u_0(x, y) = x^3 + y^2 - x + 1$;

дополнительная информация: $\psi(x_{j_0}, t) = (x_0^3 + y_0^2 - x + 1)$;

коэффициенты: $a_0 = \xi = 0,5$, $a_1 = 1$, $b_{0,1} = b_{0,2} = b_{1,1} = b_{1,2} = 0$, $c_0 = 1$, $c_1 = 0$;

правая часть: $f = x^3 - 4x + y^2 - 2t^2 \cdot (3x + 1)/(t + 1)$.

На рисунке (2.4) представлен график искомой функции $u(x, y, t) = (x^3 + y^2 - x + 1)(t + 1)/2$ в точке $t = 1$.

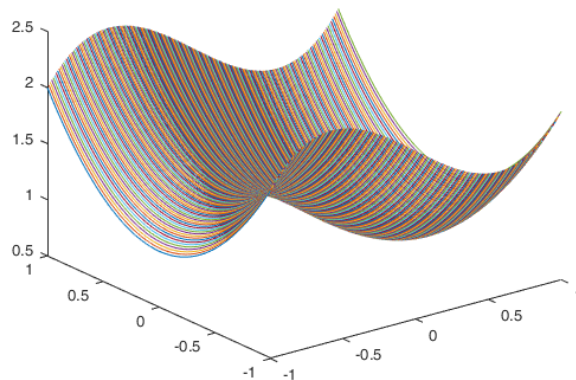
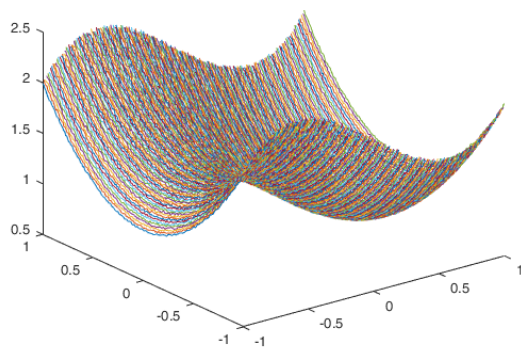
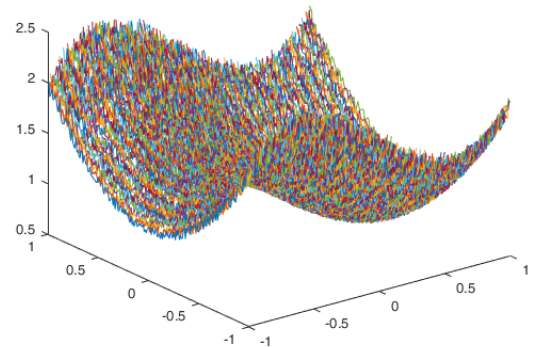


Рисунок 2.4 — Решение $u(x, y, 1)$

В результате численных расчетов были получены приближения функций $k(t)$, $u(x, y, t)$. Полученные графики приближения функций $u(x, y, 1)$ представлены на рисунке (2.5).



а) возмущение 5 %



б) возмущение 10 %

Рисунок 2.5 — Приближенное решение $u(x, y, 1)$ при случайных возмущениях

Полученные графики исходной функции $k(t) = t^3 - t^2$ и ее приближения представлены на рисунке (2.6) для случая сетки с количеством узлов N_1 . Ре-

зультаты построения приближения функции $k(t)$ при добавлении случайного возмущения представлены на рисунке (2.7)

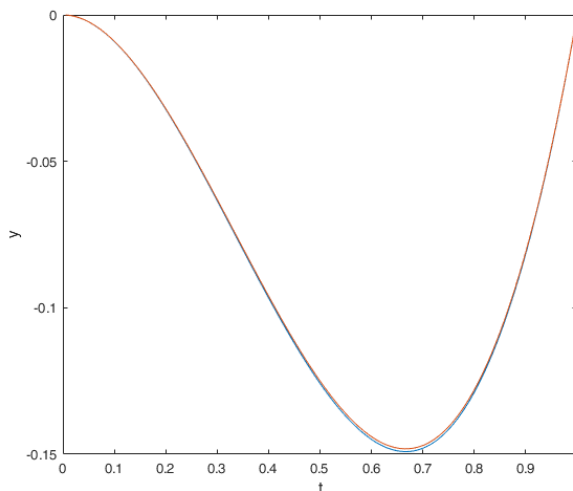
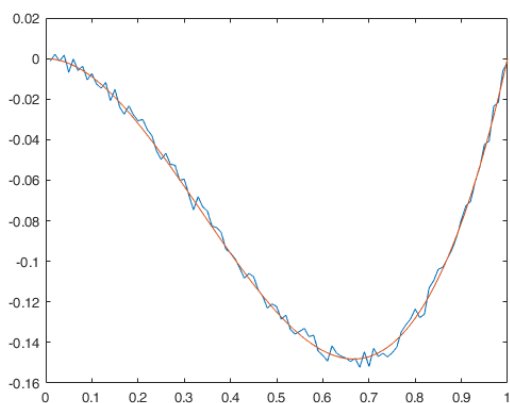
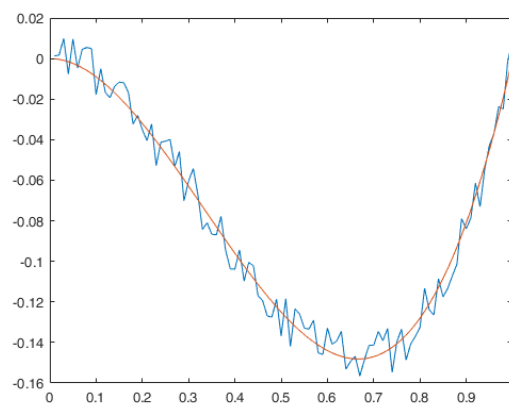


Рисунок 2.6 — График сравнения функции $k(t)$ (красный) и ее приближения(синий)



а) возмущение 5 %



б) возмущение 10 %

Рисунок 2.7 — График сравнения функции $k(t)$ (красный) и ее приближения(синий) при случайных возмущениях

Дальнейшие вычислительные эксперименты можно разбить на две группы в зависимости от неизвестных функций u , k , граничных условий, процента случайных возмущений δ , ошибок между итерациями ε , коэффициентов уравнения $a_0, a_1, b_{0,1}, b_{0,2}, b_{1,1}, b_{1,2}, c_0, c_1$ и правой части f .

Используются граничные условия Неймана (2.143), которые представлены в виде

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = (u_x x + u_y y) = g.$$

Данные первой группы следующие:

исходные данные: $u|_{t=0} = x^2 + y^2 + 1$;

граничные условия Неймана: $g = 2(x^2 + y^2)(1 + t)$;

дополнительная информация: $\psi(x_{j_0}, t) = (x_0^2 + y_0^2 + 1) \cdot (1 + t)$;

коэффициенты: $a_0 = 0.5$, $a_1 = 4/(1 + t)$, $b_{0,1} = b_{0,2} = b_{1,1} = b_{1,2} = 0$, $c_0 = 1/(x_1^2 + x_2^2 + 1)$, $c_1 = 1/(1 + t)$;

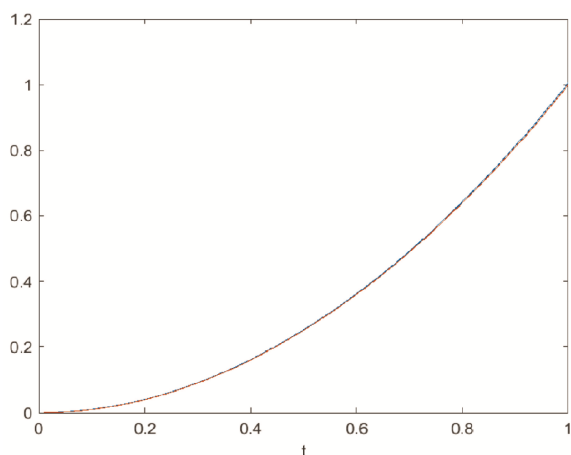
правая часть: $f = t^2 \cdot (x^2 + y^2 - 15) - 1$.

Сравниваются результаты расчетов для трех сеток для данных без добавления возмущений (рисунок (2.8)), т.е. $\delta = 0$. Берется $\varepsilon = 10^{-3}$ – ошибка, определяемая пользователем. Через τ обозначается время работы алгоритма в секундах. Вводится еще одна ошибка алгоритма по равенству $\varepsilon_0 = \max_m |\vec{k}_m^i - \vec{k}(m\Delta t)|$, где $m = 1, 2, \dots, N$. Рассматривается промежуток $[0, T]$, где $T = 1$ и берется $\Delta t = T/N$, $N = 100$.

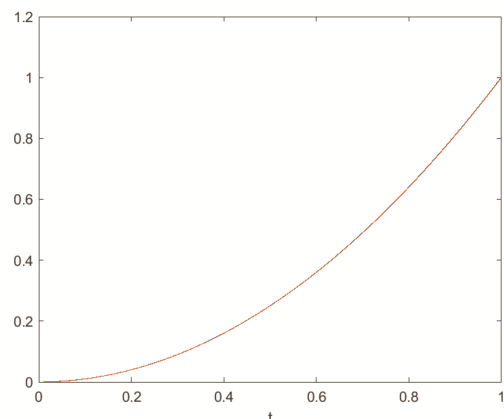
Полученное решение $u(x, y, t) = (x^2 + y^2 + 1) \cdot (1 + t)$. Полученные графики исходных функций $k(t) = t^2$ и их приближение для трех разных сеток почти одинаковы. Для следующих экспериментов добавлены случайные возмущения 5, 10 и 20 процентов. Из-за почти полного совпадения графиков оригинала и приближенной функции проводятся только графики с возмущениями в 20 процентов и $\varepsilon = 10^{-3}$ (рисунок (2.9)).

Рисунок (2.9) показывает, что полученные графики исходных функций $k(t)$ (красный) и их приближение (синий) проходят рядом друг с другом и, независимо от уровня случайных возмущений δ , результаты расчетов повторяют искомые функции или расположены рядом с ними. Таблица (2.1) показывает результаты для разных входных данных.

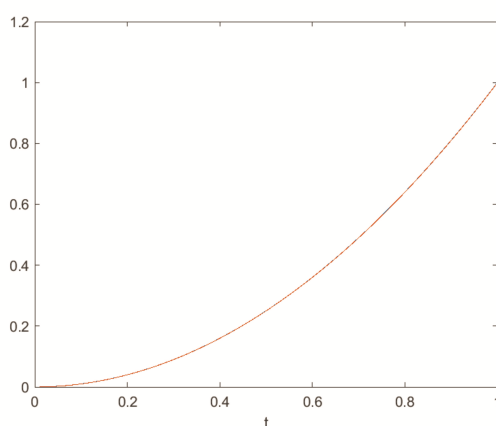
Исходя из результатов численных экспериментов для первой группы данных, можно сделать вывод, что увеличение числа узлов в 4 раза приводит к увеличе-



а) $N_1: \tau = 9.81, \varepsilon_0 = 0.0058$



б) $N_2: \tau = 131.62, \varepsilon_0 = 0.0015$



в) $N_3: \tau = 3820.1, \varepsilon_0 = 0.00035$

Рисунок 2.8 — График сравнения функции $k(t)$ (красный) и ее приближения (синий) для разных сеток

нию времени вычисления в среднем в ≈ 12 раз (для сеток N1 и N2) и ≈ 42 раз (для сеток N2 и N3), но не приводит к значительному повышению точности.

Данные второй группы:

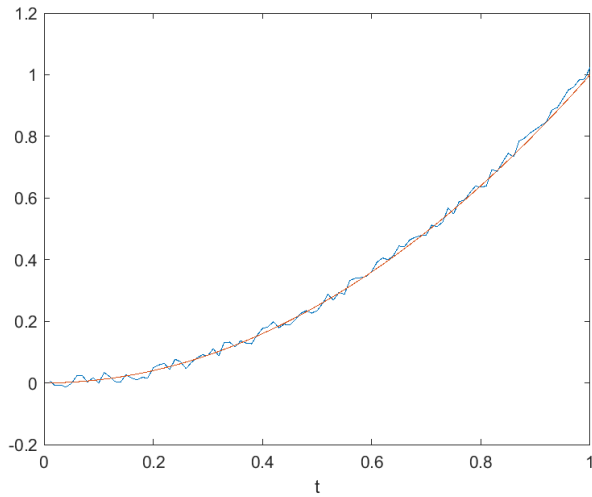
исходные данные: $u|_{t=0} = (x^2 + 1) \cdot (y^2 + 1)$;

граничные условия Неймана: $g = 2(t + 1)(y(x^2 + 1) + x(y^2 + 1))$;

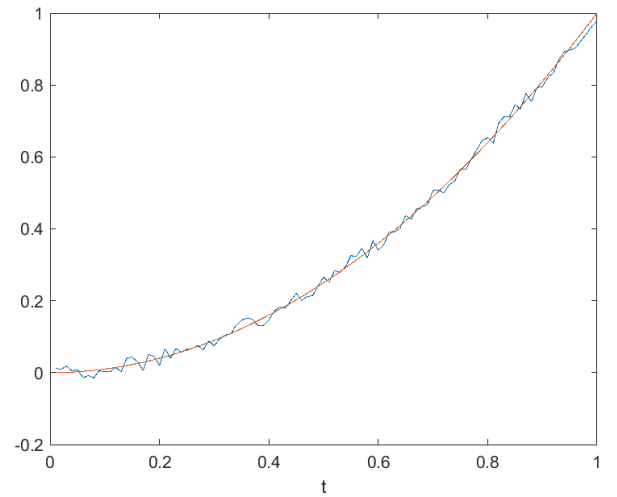
дополнительная информация: $\psi(x_{j_0}, t) = (x_0^2 + 1) \cdot (y_0^2 + 1) \cdot (1 + t)$;

коэффициенты: $a_0 = (t + 1)(x^2 + 1)$, $a_1 = (t^2 + y + 4)/(x^2 + 1)$, $b_{0,1} = x^3 t$, $b_{0,2} = (x + y)t$, $b_{1,1} = y^2/(t + 1)$, $b_{1,2} = xt/(y + 1)$, $c_0 = ty/(x^2 + 1)$, $c_1 = (x + t)/(2 + y)$;

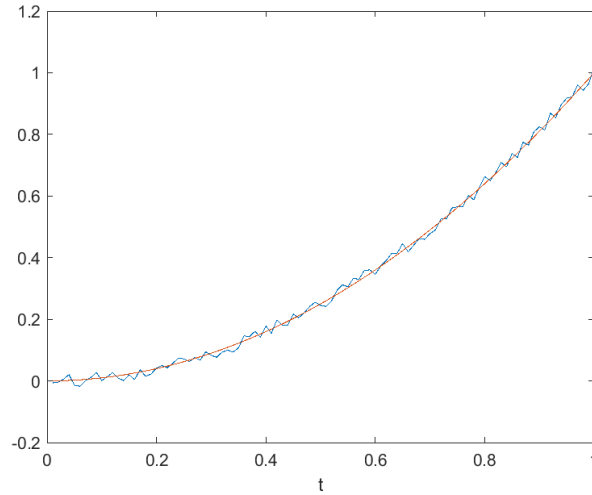
правая часть: $f = (2(x^2 + 1)^2)/(t + 1) + (t - 0.5)^3(((x^2 + 1)(y^2 + 1))/(t + 1)^2 - (2y + 2t^2 + 8)/(t + 1) - (2y)/(t + 1) - (2(y^2 + 1)(y + t^2 + 4))/((x^2 + 1)(t + 1)) + (2xy^2(y^2 + 1))/(t + 1)^2 + (4x^2(y^2 + 1)(y + t^2 + 4))/((x^2 + 1)^2(t + 1)) + (2txy(x^2 +$



a) $N_1: \tau = 8.41, \varepsilon_0 = 0.0286$



b) $N_2: \tau = 110.5, \varepsilon_0 = 0.0231$



c) $N_3: \tau = 3983.1, \varepsilon_0 = 0.0232$

Рисунок 2.9 — График сравнения функции $k(t)$ (красный) и ее приближения (синий) при случайных возмущениях 20%

$$1)) / ((t+1)(y+1))) + (2(x^2+1)(y^2+1)) / (t+1) + (4x^2(y^2+1)) / (t+1) - (2tx^4(y^2+1)) / (t+1)^2 - ((x^2+1)(y^2+1)) / ((t+1)^2(x^2+y^2+1)) - (2ty(x^2+1)(x+y)) / (t+1)^2.$$

Полученное решение $u(x, y, t) = (x^2 + 1) \cdot (y^2 + 1) \cdot (1 + t)$ и функция $k(t) = (t - 0.5)^3$.

Поскольку результаты для разных сеток аналогичны они представляются для сетки N_1 , как и в случае первой группы.

Как видно, уменьшение ε не приводит к значительному повышению точности и сокращению времени вычислений.

В следующих двух экспериментах уменьшается шаг по времени в пять раз.

Таблица 2.1 — Результаты численных экспериментов (первая группа)

No exp.	Grid	δ	ε_0	τ
1	N_1	0	0.0058	8.41
2	N_1	0.1	0.0106	8.8
3	N_1	0.2	0.0166	8.51
4	N_1	0.3	0.0187	8.3
5	N_2	0	0.0015	110.5
6	N_2	0.1	0.0066	109.4
7	N_2	0.2	0.0114	114.32
8	N_2	0.3	0.018	118.57
9	N_3	0	0.00035	3983.1
10	N_3	0.1	0.0058	3773.3
11	N_3	0.2	0.0117	3730.4
12	N_3	0.3	0.0174	3821.9

Таблица 2.2 — Результаты численных экспериментов (вторая группа)

No exp.	Grid	δ	ε	ε_0	τ
1	N_1	0	10^{-4}	0.0035	7.1
2	N_1	0	10^{-5}	0.0035	6.35
3	N_1	0	10^{-6}	0.0035	6.59
4	N_1	0	10^{-7}	0.0035	7.02
5	N_1	0.1	10^{-4}	0.0156	6.2
6	N_1	0.1	10^{-5}	0.0126	5.85
7	N_1	0.1	10^{-6}	0.0151	6
8	N_1	0.1	10^{-7}	0.0137	6.6
9	N_1	0.2	10^{-4}	0.0291	6.38
10	N_1	0.2	10^{-5}	0.0246	6.94
11	N_1	0.2	10^{-6}	0.0262	8.08
12	N_1	0.2	10^{-7}	0.0273	8.2

Таблица 2.3 — Результаты численных экспериментов для второй группы, шаг по времени 0.002

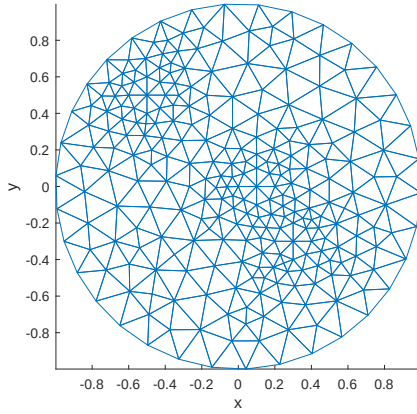
No exp.	Grid	δ	ε	ε_0	τ
1	N_1	0	10^{-4}	0.0031	36.41
2	N_1	0	10^{-5}	0.0031	32.69
3	N_1	0	10^{-6}	0.0031	32.41
4	N_1	0	10^{-7}	0.0031	35.56
5	N_1	0.1	10^{-4}	0.0147	47.44
6	N_1	0.1	10^{-5}	0.0146	37.77
7	N_1	0.1	10^{-6}	0.0142	36.28
8	N_1	0.1	10^{-7}	0.0153	42.46
9	N_1	0.2	10^{-4}	0.0263	45.27
10	N_1	0.2	10^{-5}	0.0269	56.34
11	N_1	0.2	10^{-6}	0.0273	56.35
12	N_1	0.2	10^{-7}	0.0272	54.81

Подводя итоги, можно сказать, что использование сетки с большим количеством узлов показывает лучшую точность, но время вычисления увеличивается на величину, равную отношению количества узлов сеток. Уменьшение переменной ε ведет к увеличению времени вычисления τ , но не приводит к значительному повышению точности.

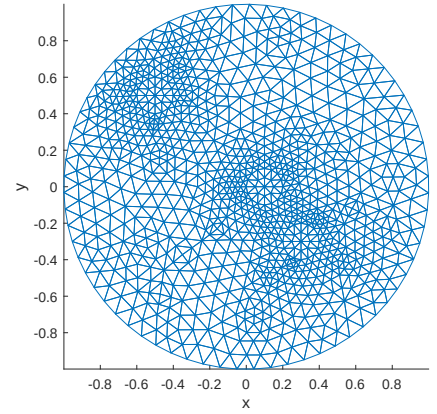
2.6.2 Определение функции источника в задачах фильтрации

При определении функции источника в результате вычислений получены приближенные значения решения $(u(x, y, t), \vec{q}(t))$ задачи (2.156) – (2.157) в точках $(t_1, t_2, \dots, t_N)$. Здесь точка (x, y) принадлежит окружности с центром в $(0, 0)$. Приводятся результаты расчетов для функций $\vec{q}$.

В данном случае используются 2 сетки с количеством узлов $N_1 = 263$ и $N_2 = 1015$ (Рис. 2.10).



a) $N_1 = 263$



b) $N_2 = 1015$

Рисунок 2.10 — Построение сеток

Рассматривается уравнение (2.156), где $r = 3$, и используются следующие данные:

исходные данные: $u|_{t=0} = (x^2 + 1) \cdot (y^2 + 1)$;

граничные условия Неймана: $g = 2(t + 1)(y(x^2 + 1) + x(y^2 + 1))$;

дополнительная информация: $\psi_i(t) = (x_i^2 + 1) \cdot (y_i^2 + 1) \cdot (1 + t)$;

коэффициенты: $a_0 = (t + 1)(x^2 + 1)$, $a_1 = (t^2 + y + 4)/(x^2 + 1)$, $b_{0,1} = x^3 \cdot t$, $b_{0,2} = (x + y) \cdot t$, $b_{1,1} = y^2/(t + 1)$, $b_{1,2} = xt/(y + 1)$, $c_0 = 1/(x^2 + y^2 + 1)$, $c_1 = 1/(1 + t)$;

правая часть: $f = y^2 - 12x^6(y^2 + 1)(t + 1) + x(x^2 + 1)(y^2 + 1) - 2(x^2 + 1)(x^6 + 1)(t + 1) - 2(x^6 + 1)(y^2 + 1)(t + 1) + 2tx(y^2 + 1)(x + x^3) - 2tx^3(x^2 + 1)(t + 1) - 8tx^3(y^2 + 1)(t + 1) + 2ty(x^2 + 1)(x + y) + 2txy(x^2 + 1)(t + 1)/(y + 1) - x(t^2 + 2) - 1 - y(t - 2)^3$.

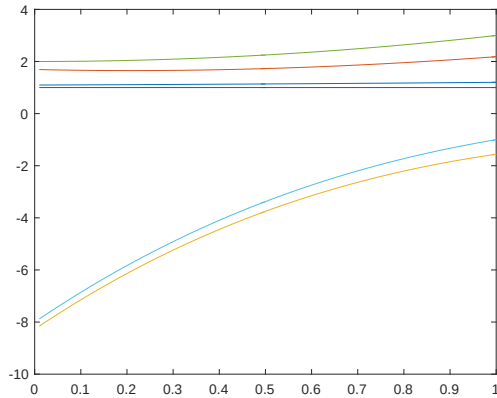
Используются граничные условия Неймана из (2.160), которые представлены как

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = (u_x x + u_y y) = g.$$

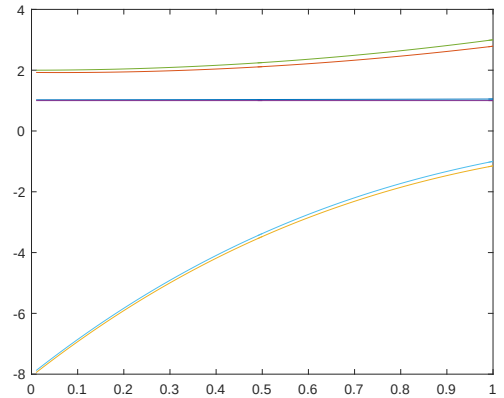
Дополнительная информация (2.158) задана в точках наблюдения $x_{m_1} = (x_1, y_1) = (0.3, -0.3)$, $x_{m_2} = (x_2, y_2) = (0.1, 0)$, $x_{m_3} = (x_3, y_3) = (-0.5, 0.5)$.

Все проводимые вычислительные эксперименты можно разбить на группы в зависимости от неизвестных функций u , $\vec{q}$, граничных условий, случайных возмущений δ , ошибок между итерациями ε , коэффициентов уравнения $a_0, a_1, b_0(x, t) = (b_{0,1}, b_{0,2}), b_1(x, t) = (b_{1,1}, b_{1,2}), c_0, c_1$, и правой части f . Если $\delta \neq 0$ тогда условия переопределения в момент времени Δtk , $k = 1, 2, \dots, N$ (Δt это шаг по времени) определяется как: $\tilde{\psi}_{it}(\Delta tk) = \psi_t(\Delta tk)(1 + \delta(2\sigma_{ik} - 1))$, где числа $\sigma_{ik} \in [0, 1]$ определяются генератором случайных чисел Матлаба (функция `rand`).

Полученное решение $u(x, y, t) = (x^2 + 1) \cdot (y^2 + 1) \cdot (1 + t)$ и функции $q_1 = 1, q_2 = t^2 + 2, q_3 = (t - 2)^3$. На рисунке 2.11 сравниваются результаты расчетов для двух сеток без добавления возмущений, т.е. $\delta = 0$. Рассматривается интервал $[0, T]$, $T = 1$, и $\Delta t = T/N$, $N = 100$ количество слоев. Берется $\varepsilon = 10^{-3}$ – ошибка, определяемая пользователем.



Для сетки N_1



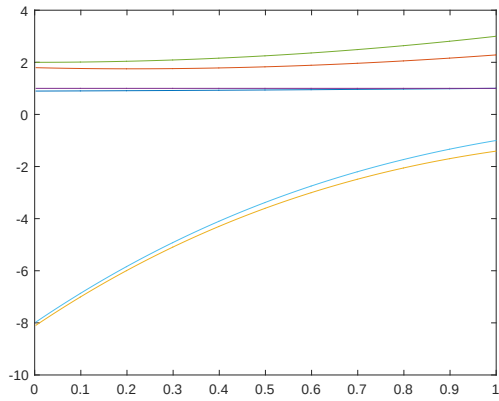
Для сетки N_2

Рисунок 2.11 — Построение функций q_1, q_2, q_3 при $N = 100$:

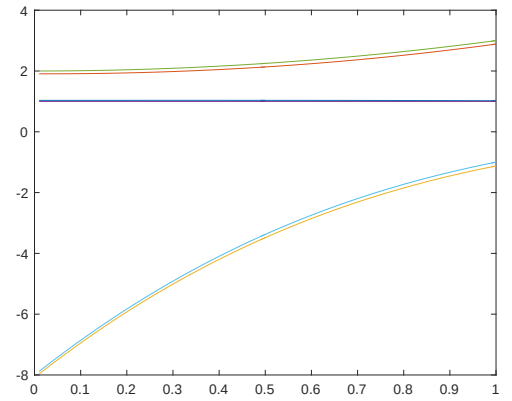
Затем рассматриваются результаты расчетов при тех же условиях, но с увеличенным количеством слоев, т.е. $N = 400$ (Рис. 2.12).

В следующем эксперименте при расчетах добавили случайные возмущения $\delta = 1$. Данные результаты приведены только для второй сетки с $N_2 = 1015$ узлами, но с разными N (Рис. 2.13).

Исходя из результатов численных экспериментов, можно сделать вывод, что увеличение числа узлов сетки в 4 раза приводит к увеличению расчетного времени более, чем в 10 раз. Зато это приводит к значительному увеличению точности

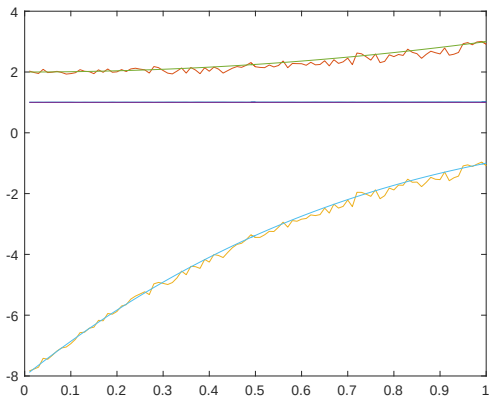


Для сетки N_1

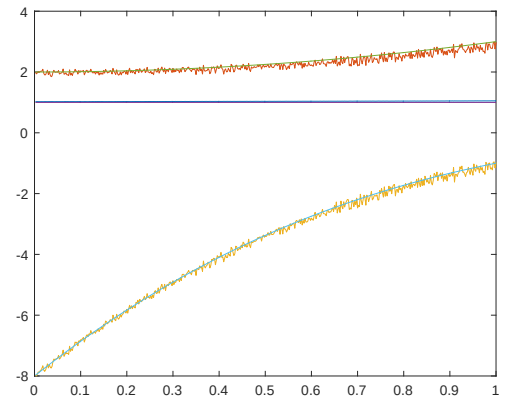


Для сетки N_2

Рисунок 2.12 — Построение функций q_1, q_2, q_3 при $N = 400$:



а) $N = 100$



б) $N = 400$

Рисунок 2.13 — Результаты расчетов при случайных возмущениях 1%

алгоритма. Также, уменьшение значения ε не приводит к значительному увеличению точности. Уменьшение шага по времени показывает хороший результат. Увеличивается точность без больших потерь во времени. Увеличение количества шагов по времени, в достаточной мере, устраняет негативный эффект от добавления случайных возмущений.

Обратные задачи для математических моделей квазистационарных электромагнитных волн

3.1 Описание математической модели

Рассматриваются математические модели, описывающие процессы распространения электромагнитных волн в анизотропных средах [56] и нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости [6]. Особенности распространения электромагнитных волн в анизотропных средах определяются спецификой материальных уравнений. Если длина волны мала по сравнению с пространственными неоднородностями, то эти уравнения можно записать в виде, учитывающем только временную дисперсию

$$\begin{aligned} D_i(r, t) &= E_i(r, t) + 4\pi P_i(r, t) \\ B_i(r, t) &= H_i(r, t) + 4\pi M_i(r, t) \\ P_i(r, t) &= \hat{\mu}_{ij} * E_j(r, t) + P_{i0}(r, t) \\ M_i(r, t) &= \hat{\chi}_{ij} * H_j(r, t) + M_{i0}(r, t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

если не оговорено противное, во всех формулах предполагается суммирование по повторяющимся индексам $i, j = 1, 2, 3$. Используются следующие обозначения: $r = (x, y, z)$, $D(r, t)$, $B(r, t)$ и $E(r, t)$, $H(r, t)$ – векторы индукции и напряженности электромагнитного поля, $P(r, t)$, $M(r, t)$ – векторы поляризации и намагниченности среды, $P_0(r, t)$, $M_0(r, t)$ – заданные векторы, вообще говоря, зависящие от времени, определяемые начальным распределением поляризации и намагниченности среды, $\hat{\mu}_{ij} *$ и $\hat{\chi}_{ij} *$ – свёрточные вольтерровские операторы:

$$\hat{\mu}_{ij} * f(t) = \int_0^t \mu_{ij}(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad \hat{\chi}_{ij} * f(t) = \int_0^t \chi_{ij}(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

При этом интегрирование ведется в пределах от 0 до t , поскольку, с одной стороны, предполагается, что до момента времени $t = 0$ колебания в среде отсутствовали, а с другой стороны, в силу физического принципа причинности, поля в среде в данный момент времени могут зависеть только от полей в предшествующие моменты времени. В простейшем случае функции $\mu_{ij}(t, \tau)$ и $\chi_{ij}(t, \tau)$

зависят от разности аргументов: $\mu_{ij}(t - \tau)$, $\chi_{ij}(t - \tau)$. Предполагается также, что данные функции принадлежат классу $C^2[0; +\infty)$.

В случае квазистационарного электромагнитного поля к материальным уравнениям (3.1) необходимо добавить следующие уравнения электромагнитного поля (см. например Ландау [43]):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} D &= 4\pi\rho^{ext}, \quad \operatorname{rot} R = 0 \\ \operatorname{div} B &= 0, \quad \operatorname{rot} H = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Макроскопический ток j^{ext} сторонних зарядов предполагается отсутствующим. Вводя потенциалы электрического и магнитного полей по формулам

$$E(r, t) = -\nabla\varphi(r, t), \quad H(r, t) = -\nabla\psi(r, t) \quad (3.3)$$

из уравнений (3.1) – (3.3), получим

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^3 (I + 4\pi\hat{\mu}_{ll}^*) \frac{\partial^2 \varphi(r, t)}{\partial x_l^2} &= 4\pi \sum_{i \neq j}^{3,3} \hat{\mu}_{ij}^* \frac{\partial^2 \varphi(r, t)}{\partial x_i \partial x_j} = F_d(r, t) - 4\pi\rho^{ext} \\ \sum_{l=1}^3 (I + 4\pi\hat{\chi}_{ll}^*) \frac{\partial^2 \psi(r, t)}{\partial x_l^2} &= 4\pi \sum_{i \neq j}^{3,3} \hat{\chi}_{ij}^* \frac{\partial^2 \psi(r, t)}{\partial x_i \partial x_j} = F_b(r, t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $F_b(r, t) = 4\pi \operatorname{div} M_0(r, t)$, $F_d(r, t) = 4\pi \operatorname{div} P_0(r, t)$. В дальнейшем операторные тензоры электрической и магнитной восприимчивостей

$$\begin{aligned} \hat{\mu}^* &= \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{11}^* \hat{\mu}_{12}^* \hat{\mu}_{13}^* \\ \hat{\mu}_{21}^* \hat{\mu}_{22}^* \hat{\mu}_{23}^* \\ \hat{\mu}_{31}^* \hat{\mu}_{32}^* \hat{\mu}_{33}^* \end{pmatrix}, \\ \hat{\chi}^* &= \begin{pmatrix} \hat{\chi}_{11}^* \hat{\chi}_{12}^* \hat{\chi}_{13}^* \\ \hat{\chi}_{21}^* \hat{\chi}_{22}^* \hat{\chi}_{23}^* \\ \hat{\chi}_{31}^* \hat{\chi}_{32}^* \hat{\chi}_{33}^* \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

удовлетворяют условиям $\hat{\mu}_{ij}^* = -\hat{\mu}_{ji}^*$, $\hat{\chi}_{ij}^* = -\hat{\chi}_{ji}^*$ при $i \neq j$. В этом случае с учетом (3.1) уравнения (3.4) примут диагональный вид

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^3 (I + 4\pi\hat{\mu}_{ll}^*) \frac{\partial^2 \varphi(r, t)}{\partial x_l^2} &= -4\pi\rho^{ext} + F_d(r, t) \\ \sum_{l=1}^3 (I + 4\pi\hat{\chi}_{ll}^*) \frac{\partial^2 \psi(r, t)}{\partial x_l^2} &= F_b(r, t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Уравнения вида (3.5) также возникают при рассмотрении нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости [5–7].

Таким образом, придем к уравнениям (см. [56], стр. 28)

$$\sum_{i=1}^3 (1 + 4\pi\kappa_i^*)\varphi_{x_i, x_i} = -4\pi\rho + F_d, \quad \sum_{i=1}^3 (1 + 4\pi\kappa_i^*)\psi_{x_i, x_i} = F_b, \quad (3.6)$$

где κ_i – диагональные элементы тензоров электрической и магнитной восприимчивости и $\kappa_i^*\varphi(x, t) = \int_0^t \kappa_i(t - \tau)\varphi(x, \tau) d\tau$. В некоторых случаях модельные задачи о нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией сводятся к интегро-дифференциальным уравнениям вида (3.6) с ядрами сверточных операторов, имеющими вид синуса, полинома или экспоненты. В таких случаях возможна редукция исходной векторной системы уравнений на основе введения обобщенных потенциалов квазистационарного электрического и магнитного полей уже к исследованию уравнений составного типа вида (см. [6])

$$P_s(\partial_t)\Delta\Phi(x, t) + P_{mij}(\partial_t) \sum_{i,j=1}^3 \Phi_{x_i x_j} = F,$$

где P_s, P_{mij} многочлены степеней s, m , соответственно уже без операторов свертки.

Рассматриваются обратные задачи об определении коэффициентов k_i для общих уравнений вида

$$L_0 u + \sum_{i=1}^m \kappa_i^* L_i(x, t)u = f, \quad (3.7)$$

где

$$L_k u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x, t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i^k(x, t)u_{x_i} + a_0^k(x, t)u, \\ (x, t) \in Q = G \times (0, T), G \subset \mathbb{R}^n.$$

Уравнение (3.7) дополняется условиями переопределения

$$\Psi_j(u)(t) = \psi_j(t), \quad (3.8)$$

где Ψ_i – некоторые функционалы, условия на которые мы приведем ниже, и краевыми условиями

$$Bu|_S = g(x, t), \quad S = \partial G \times (0, T), \quad (3.9)$$

где $Bu = u$ или $Bu = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x, t)u_{x_i} + \sigma(x, t)u$.

3.2 Вспомогательные построения и результаты

Лемма 3.1. *Справедливы неравенства*

$$\|u * v\|_{L_p(0,\gamma)} \leq \|u\|_{L_p(0,\gamma)} \|v\|_{L_1(0,\gamma)}, \quad (3.10)$$

$$\|u * v\|_{L_p(0,\gamma)} \leq \gamma^{1-1/p} \|u\|_{L_p(0,\gamma)} \|v\|_{L_p(0,\gamma)}.$$

$$\|u(t)\|_{L_\infty(0,\gamma)} \leq \gamma^{1-1/p} \|u_t\|_{L_p(0,\gamma)}, \quad u(0) = 0. \quad (3.11)$$

$$\|u(t)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq \gamma \|u_t\|_{L_p(0,\gamma)}, \quad u(0) = 0. \quad (3.12)$$

Неравенства (3.10) известны (см., например, Лемма 3.1 в [107]). Неравенства (3.11), (3.12) — очевидное следствие формулы Ньютона-Лейбница.

Рассматривается поставленная задача при выполнении следующих условий.

Считается, что все коэффициенты операторов L_k ($k = 0, 1, \dots, m$) вещественны, а оператор L_0 предполагается эллиптическим, т.е. существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что:

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}^0 \xi_i \xi_j \geq \delta_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in R^n, \quad \forall (x, t) \in \bar{Q}.$$

Фиксируется параметр $p > n$ (для простоты) и предполагается, что

$$a_{ij}^0 \in C(\bar{Q}), \quad a_i^0, a_0^0 \in C([0, T]; L_p(G)), \quad a_{ijt}^0, a_{ijt}^k \in L_p(0, T; L_\infty(G)),$$

$$a_{ij}^k \in L_\infty(Q), \quad a_i^k, a_0^k \in L_\infty(0, T; L_p(G)), \quad a_{0t}^k, a_{it}^k \in L_p(Q)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m),$$

$$\gamma_i, \gamma_{it}, \sigma, \sigma_t \in C([0, T]; C^1(\bar{\Gamma})) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.13)$$

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i n_i \geq \delta_1 > 0 \quad \forall (x, t) \in S,$$

$$a_0^0 \leq 0 \quad \text{п.в. в } Q \text{ в случае условий Дирихле и } a_0^0 \leq 0 \quad \text{п.в. в } Q$$

$$\text{и } a_0 < 0 \quad \text{п.в. в некоторой окрестности}$$

$$\text{границы } S \text{ и } \sigma \geq 0 \text{ на } S \text{ в случае условий с косой производной.}$$

где $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_n)$ — единичный вектор внешней нормали к S .

Условия корректности. Пусть B матрица с элементами $b_{ij} = \Psi_i(L_0^{-1} L_j(x, 0) u_0(x))$ и существует $\delta_2 > 0$ такая, что

$$|\det B| \geq \delta_2 \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.14)$$

где $L_0^{-1}f$ есть решение v_0 задачи: $L_0v_0 = f$, $Bv_0|_\Gamma = 0$.

Рассматривается задача (3.7), (3.8), (3.9), и считается, что функционалы Ψ_j удовлетворяют условиям

$$\Psi_j \in L(W_p^2(G), \mathbb{R}), \quad \Psi_j(u_0) = \psi_j(0), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.15)$$

и, таким образом, $\Psi_j \in (W_p^2(G))^*$. Символ $L(A, B)$ для данных пространств A, B обозначает пространство линейных непрерывных операторов, определенных на A со значениями в B .

Предполагается, что решение задачи (3.7), (3.8), (3.9) обладает свойством $u_t \in L_p(0, T; W_p^2(G))$, $u \in C([0, T]; W_p^2(G))$, выполнены условия (3.13), $g \in C([0, T]; W_p^{s_0}(\Gamma))$, $g_t \in L_p(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma))$ ($s_0 = 2 - 1/p$ в случае условий Дирихле и $s_0 = 1 - 1/p$ в противном случае), $k_i(t) \in L_p(0, T)$ для всех i , $f, f_t \in L_p(Q)$. После взятия $t = 0$ в (3.7), получится то, что $L_0(x, 0)u(x, 0) = f(x, 0)$. Применив теорему 1, находится величина $u(x, 0) = u_0(x)$ как решение задачи (1.5) при $t = 0$. Из краевых условий вытекает равенство

$$Bu_0(x) = g(x, 0). \quad (3.16)$$

Используя условия (3.9), получается необходимое условие разрешимости

$$\Psi_j(u_0(x)) = \psi_j(0) \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.17)$$

Далее, дифференцируя (3.7) по t можно получить

$$(L_0u)_t + \int_0^t \sum_{i=1}^m k_i(\tau)(L_iu_t(x, t - \tau) + L_{it}u(t - \tau)) d\tau = f_t - \sum_{i=1}^m k_i(t)L_i(x, 0)u_0(x). \quad (3.18)$$

Строится вспомогательная функция $\Phi(x, t) \in C([0, T]; W_p^2(G))$ такая, что $\Phi_t \in L_p(0, T; W_p^2(G))$, $B\Phi|_S = g(x, t)$, $\Phi(x, 0) = u_0(x)$. Взяв в качестве Φ решение задачи (1.5), где оператор R заменен на оператор B и сделав замену $u = v + \Phi$, получим задачу

$$(L_0v)_t + \int_0^t \sum_{i=1}^m k_i(\tau)(L_iv)_t(x, t - \tau) d\tau = - \sum_{i=1}^m k_i(t)L_i(x, 0)u_0(x) - \int_0^t \sum_{i=1}^m k_i(\tau)(L_i\Phi)_t(x, t - \tau) d\tau = f_0, \quad (3.19)$$

$$Bv|_{\Gamma} = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad (3.20)$$

$$\Psi_j(v) = \psi_j - \Psi_j(\Phi) = \tilde{\psi}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.21)$$

Теорема 10. Пусть $f, f_t \in L_p(Q)$, выполнены условия (3.13)–(3.17), $g \in C([0, T]; W_p^{s_0}(\Gamma))$, $g_t \in L_p(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma))$ ($p > n$), $\psi_j \in W_p^1(0, T)$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Тогда задача (3.19), (3.20), (3.21) об определении функций $v, k_1, \dots, k_m$ из класса $v_t \in L_p(0, T; W_p^2(G))$, $v \in C([0, T]; W_p^2(G))$, $k_i \in L_p(0, T)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) эквивалентна задаче (3.7), (3.8), (3.9) об определении функций $u, k_1, \dots, k_m$ таких, что $u_t \in L_p(0, T; W_p^2(G))$, $u \in C([0, T]; W_p^2(G))$, $k_i \in L_p(0, T)$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Доказательство. Фактически, рассуждения, приведенные перед теоремой, показывают, что если $u, k_1, \dots, k_m$ – решение задачи (3.7), (3.8), (3.9) из указанного в формулировке теоремы класса, то функции $v, k_1, \dots, k_m$ есть решение задачи (3.19), (3.20), (3.21). Поэтому достаточно проверить обратное утверждение. Итак, $v, k_1, \dots, k_m$ есть решение задачи (3.19), (3.20), (3.21). Полагая $v = u - \Phi$ и используя равенство $f_t = (L_0\Phi)_t$, равенство (3.19) можно записать в виде

$$\partial_t(L_0u) + \partial_t \int_0^t \sum_{i=1}^m k_i(\tau) L_i u(x, t - \tau) d\tau = f_t, \quad (3.22)$$

Интегрируя его от 0 до t , получим

$$L_0u + \int_0^t \sum_{i=1}^m k_i(\tau) L_i u(x, t - \tau) d\tau = f(t) + L_0u(x, 0) - f(x, 0).$$

Поскольку $0 = v(x, 0) = u(x, 0) - \Phi(x, 0) = u(x, 0) - u_0(x)$, $u(x, 0) = u_0(x)$, и в силу определения функции u_0 , вытекает, что $Lu(x, 0) - f(x, 0) = 0$, т.е. выполнено уравнение (3.7). Выполнение условия (3.9) очевидно. $\square$

Пусть $0 \leq \alpha < \beta \leq T$. Определим пространство $H(\alpha, \beta)$ как пространство функций $v(x, t)$ таких, что $v_t \in L_p(\alpha, \beta; W_p^2(G))$, $v \in C([\alpha, \beta]; W_p^2(G))$, $Bv|_{\Gamma} = 0$. Вводится норма $\|v\|_{H(\alpha, \beta)} = \|v\|_{C([\alpha, \beta]; W_p^2(G))} + \|v_t\|_{L_p(\alpha, \beta; W_p^2(G))}$. Далее под нормой вектора понимается сумма норм координат.

Лемма 3.2. Пусть выполнены условия (3.13). Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|(L_j v)_t\|_{L_p(\alpha, \beta; L_p(G))} &\leq c \|v\|_{H(\alpha, \beta)} \quad \forall v \in C([\alpha, \beta]; W_p^2(G)) : \\ v_t &\in L_p(\alpha, \beta; W_p^2(G)), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\|L_{jt}v\|_{L_p(\alpha,\beta;L_p(G))} \leq c\|v\|_{C([\alpha,\beta];W_p^2(G))} \quad \forall v \in C([\alpha,\beta];W_p^2(G)) : \quad (3.24)$$

$$v_t \in L_p(\alpha,\beta;W_p^2(G)),$$

где $0 \leq \alpha < \beta \leq T$ и постоянная c не зависит от α, β, j .

Доказательство. Доказательство оценок более или менее очевидно. Можно доказать, например, неравенство (3.24). Выражение $L_{jt}v$ содержит слагаемые вида $a_{ikt}^j v_{x_i x_k}, a_{kt}^j v_{x_k}, a_{0t}^j v$. Используя теоремы вложения, имеется

$$\begin{aligned} \|a_{ikt}^j v_{x_i x_k}\|_{L_p(\alpha,\beta;L_p(G))} &\leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} \|a_{ikt}^j\|_{L_{\infty}(G)}^p dt \right)^{1/p} \|v_{x_i x_k}\|_{L_{\infty}(\alpha,\beta;L_p(G))} \\ &\leq c_{ik}^j(\alpha, \beta) \|v\|_{H(\alpha,\beta)}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Аналогично,

$$\|a_{kt}^j v_{x_k}\|_{L_p(\alpha,\beta;L_p(G))} \leq \|a_{kt}^j\|_{L_p(\alpha,\beta;L_p(G))} \|v_{x_k}\|_{L_{\infty}(\alpha,\beta;L_{\infty}(G))} \leq c_k^j(\alpha, \beta) \|v\|_{H(\alpha,\beta)}. \quad (3.26)$$

$$\|a_{0t}^j v\|_{L_p(\alpha,\beta;L_p(G))} \leq c_0^j(\alpha, \beta) \|v\|_{H(\alpha,\beta)}. \quad (3.27)$$

Здесь, кроме всего прочего, использовалось вложение $W_p^1(G) \subset L_{\infty}(G)$ (см. [119]). В качестве искомой постоянной в (3.24) можно использовать, например, сумму постоянных c_{ik}^j, c_i^j, c_0^j по всем индексам. $\square$

Лемма 3.3. Пусть выполнены условия (3.13). Тогда для любой функции $w \in C([\alpha, \beta]; W_p^2(G))$ такой, что $w_t \in L_p(\alpha, \beta; W_p^2(G))$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t k_j(\tau) (L_j w)_t(x, t - \tau) d\tau \right\|_{L_p(0,\gamma;L_p(G))} \\ &\leq c_1 \gamma^{1-1/p} \|k_j\|_{L_p(0,\gamma)} \|w\|_{H(0,\gamma)}, \quad \gamma \leq T, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} &\left\| \int_l^t k_j(\tau) (L_j w)_t(x, t - \tau) d\tau \right\|_{L_p(l,l+\gamma;L_p(G))} \\ &\leq c_1 \gamma^{1-1/p} \|k_j\|_{L_p(l,l+\gamma)} \|w\|_{H(0,\gamma)}, \quad l + \gamma \leq T, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^{t-l} k_j(\tau) (L_j w)_t(x, t - \tau) d\tau \right\|_{L_p(l,l+\gamma;L_p(G))} \\ &\leq c_1 \gamma^{1-1/p} \|k_j\|_{L_p(0,\gamma)} \|w\|_{H(l,l+\gamma)}, \quad l + \gamma \leq T, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где постоянная c_1 не зависит от γ, l, j .

Доказательство. Чтобы доказать (3.28), вначале используется неравенство Минковского и вносится норма в $L_p(G)$ под знак интеграла. Далее используется лемма 3.1 и затем лемма 3.2. Чтобы доказать (3.29), используется замена переменных (сдвиг на параметр l). Имеется

$$\begin{aligned} & \left\| \int_l^t k_j(\tau)(L_j w)_t(x, t - \tau) d\tau \right\|_{L_p(l, l+\gamma; L_p(G))} = \\ & \left\| \int_0^r k_j(\tau_1 + l)(L_j w)_t(x, r - \tau_1) d\tau_1 \right\|_{L_p(0, \gamma; L_p(G))}. \end{aligned}$$

Таким образом, пришли к интегралу вида (3.28), оценка которого производится аналогично. Оценка нормы последнего интеграла с помощью замены переменных сводится уже к оценке выражения

$$\left\| \int_0^r k_j(\tau)(L_j w)_t(x, r + l - \tau) d\tau \right\|_{L_p(0, \gamma; L_p(G))},$$

которое снова имеет такой же вид, что и левая часть (3.28), и значит имеет место оценка (3.30). $\square$

Рассматривается вспомогательное уравнение

$$L_0 v_t + L_{0t} v + \int_0^t \sum_{i=1}^m k_i(\tau)(L_i v)_t(x, t - \tau) d\tau = f_0, \quad (3.31)$$

Теорема 11. Пусть $f_0, f_{0t} \in L_p(Q)$ ($p > n$), выполнены условия (3.13), $k_i \in L_p(0, T)$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Тогда существует единственное решение задачи (3.31), (3.20) такое, что $v \in H(0, T)$. Найдется постоянная $c > 0$, не зависящая от $\gamma \in (0, T]$ и f такая, что решение задачи (3.31), (3.20) удовлетворяет оценке:

$$\|v\|_{C([0, \gamma]; W_p^2(G))} + \|v_t\|_{L_p(0, \gamma; W_p^2(G))} \leq c(\|f_0\|_{L_p(Q^\gamma)} + \|f_{0t}\|_{L_p(Q^\gamma)}).$$

Доказательство. Задача сводится к интегральному уравнению. Из (3.31) получим, что

$$\begin{aligned} v(x, t) + L_0^{-1} \int_0^t \int_0^\xi \sum_{i=1}^m k_i(\tau)(L_i v)_\xi(x, \xi - \tau) d\tau d\xi = \\ L_0^{-1} \int_0^t f_0(x, \tau) d\tau = f_1, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где $L_0^{-1} f$ сопоставляет функции f решение задачи (1.5) с $g = 0$. Сначала доказывается локальная разрешимость. Уравнение имеет вид

$$v + S(v) = f_1 \quad (3.33)$$

Можно оценить $\|S(v)\|_{H(0,\gamma)}$ ($\gamma \leq T$). Используя следствие 1.1 и лемму 3.3, получается, что

$$\|S(v)\|_{H(0,\gamma)} \leq c\gamma^{1-1/p}\|v\|_{H(0,\gamma)}\|\vec{k}\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c\gamma^{1-1/p}\|v\|_{H(0,\gamma)}\|\vec{k}\|_{L_p(0,T)}, \quad (3.34)$$

где постоянная c не зависит от γ и $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$. Следовательно, при $\gamma \leq \gamma_0$ с $\gamma_0^{1-1/p}c\|\vec{k}\|_{L_p(0,T)} = 1/2$, имеем, что $\|S(v)\|_{H(0,\gamma)} \leq \|v\|_{H(0,\gamma)}/2$ и в силу теоремы о неподвижной точке уравнение (3.33) разрешимо на промежутке $[0, \gamma_0]$. Доказывается, что уравнение разрешимо и на любом промежутке $[0, l\gamma_0 + \tau_0]$, где $l\gamma_0 < T$, $l = 1, 2, \dots$, $\tau_0 \leq \min(\gamma_0, T - l\gamma_0)$. Продолжая по индукции, предполагается, что уже доказана разрешимость уравнения (3.33) на промежутке $[0, l\gamma_0]$. Переписывая уравнение (3.33) в виде

$$v(x, t) + S_0(v) = f_1 - S(v) + S_0(v) = f_2, \quad (3.35)$$

$$S_0(v) = \begin{cases} 0, & t \leq l\gamma_0, \\ L_0^{-1} \int_{l\gamma_0}^t \int_0^{\xi-l\gamma_0} \sum_{i=1}^m k_i(\tau)(L_i v)_\xi(x, \xi - \tau) d\tau d\xi, & t \in (l\gamma_0, l\gamma_0 + \tau_0) \end{cases} \quad (3.36)$$

легко убедиться, что выражение $-S(v) + S_0(v)$ содержит лишь значения функции v на промежутке $[0, l\gamma_0]$ и следовательно это выражение можно считать уже известной функцией. В силу следствия 1.1 и леммы 3.3, оператор $S_0(v)$ допускает оценку

$$\|S_0(v)\|_{H(0, l\gamma_0 + \tau_0)} \leq c\gamma_0^{1-1/p}\|v\|_{H(l\gamma_0, l\gamma_0 + \tau_0)}\|\vec{k}\|_{L_p(0, \gamma_0)} \leq \|v\|_{H(0, \gamma)}/2, \quad (3.37)$$

(здесь, как легко увидеть, в качестве постоянной c можно взять ту же постоянную, что была в неравенстве (3.34)). Следовательно, уравнение (3.35) разрешимо. Очевидным образом, решение уравнения (3.35) с правой частью f_2 есть продолжение решения уравнения (3.33) на промежутки $[l\gamma_0, l\gamma_0 + \tau_0]$. $\square$

3.3 Основные результаты

В этом параграфе доказывается основная теорема о корректности поставленной задачи в целом по времени.

Теорема 12. Пусть $f, f_t \in L_p(Q)$, выполнены условия (3.13), (3.16), (3.17), (3.14), (3.15), $g \in C([0, T]; W_p^{s_0}(\Gamma))$, $g_t \in L_p(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma))$ ($p > n$), $\psi_j \in W_p^1(0, T)$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Тогда существует единственное решение задачи (3.7), (3.8), (3.9) такое, что $u_t \in L_p(0, T; W_p^2(G))$, $u \in C([0, T]; W_p^2(G))$, $\vec{k} \in L_p(0, T)$ $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$. Для любых двух решений $(u_1, \vec{k}_1), (u_2, \vec{k}_2)$ задачи (3.7), (3.8), (3.9) отвечающим данным $f_i, g_i, \vec{\psi}_i$ ($i = 1, 2$) и удовлетворяющих условиям теоремы, имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \|u_1 - u_2\|_{C([0, T]; W_p^2(G))} + \|u_{1t} - u_{2t}\|_{L_p(0, T; W_p^2(G))} + \sum_{i=1}^m \|k_1 - k_2\|_{L_p(0, T)} \\ & \leq c(\|f_1 - f_2\|_{W_p^1(0, T; L_p(G))} + \|g_1 - g_2\|_{L_p(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma))} + \|\vec{\psi}_1 - \vec{\psi}_2\|_{W_p^1(0, T)}), \end{aligned} \quad (3.38)$$

где переменная c зависит, в частности, от нормы данных в соответствующих пространствах и констант в условиях (3.15).

Доказательство. Рассматривается эквивалентная задача

$$\begin{aligned} (L_0 v)_t + \int_0^t \sum_{j=1}^m k_j(\tau) ((L_j v)_t(x, t - \tau) + (L_j \Phi)_t(x, t - \tau)) d\tau \\ + \sum_{j=1}^m k_j(t) L_j(x, 0) u_0(x) = 0, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$Bv|_{\Gamma} = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad (3.40)$$

$$\Psi_j(v) = \tilde{\psi}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.41)$$

Строится система для нахождения функций k_i . Обращая оператор L_0 можно получить уравнение

$$\begin{aligned} v_t(x, t) + L_0^{-1} L_{0t} v + L_0^{-1} \int_0^t \sum_{j=1}^m k_j(\tau) ((L_j v)_t(x, t - \tau) \\ + (L_j \Phi)_t(x, t - \tau)) d\tau + v_0(v) = \\ - \sum_{j=1}^m k_j(t) L_0^{-1} L_j(x, 0) u_0(x), \end{aligned} \quad (3.42)$$

где $L_0^{-1} f$ сопоставляет функции f решение задачи (1.5) с $g = 0$ и функция $v_0(v)$ в случае условий Дирихле есть просто ноль, а в случае задачи с косой производной $v_0(v)$ есть решение задачи $L_0 v_0 = 0$, $Bv_0 = B_t v$ (B_t – оператор

B с коэффициентами, продифференцированными по t . Уравнение (3.39) также записывается в виде

$$\begin{aligned} L_0 v(x, t) = & - \int_0^t \int_0^\xi \sum_{j=1}^m k_j(\tau) ((L_j v)_t(x, \xi - \tau) + (L_j \Phi)_t(x, \xi - \tau)) d\tau d\xi \\ & - \sum_{j=1}^m \int_0^t k_j(\xi) d\xi L_j(x, 0) u_0(x) = G(v) \end{aligned} \quad (3.43)$$

или в виде

$$v(x, t) = L_0^{-1} G(v). \quad (3.44)$$

Применяя функционал Ψ_i к (3.42), получим, что

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{it} + \Psi_i(L_0^{-1} L_{0t} v) + \Psi_i(L_0^{-1} \int_0^t \sum_{j=1}^m k_j(\tau) (L_j v)_t(x, t - \tau) d\tau) \\ + \Psi_i(v_0) = & - \sum_{j=1}^m k_j(t) \Psi_i(L_0^{-1} L_j(x, 0) u_0(x)) \\ & - \Psi_i(L_0^{-1} \int_0^t \sum_{j=1}^m k_j(\tau) (L_j \Phi)_t(x, t - \tau) d\tau). \end{aligned} \quad (3.45)$$

В силу условия (3.14) вытекает, что

$$\vec{k} = B^{-1} \vec{F} - B^{-1} A(\vec{k}), \quad (3.46)$$

где $\vec{F}$ имеет координаты $F_i = -\tilde{\psi}_{it} \in W_p^1(0, T)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) и оператор $A(\vec{k})$ координаты

$$\begin{aligned} A_i(\vec{k}) = & \Psi_i(L_0^{-1} L_{0t} v) + \Psi_i(L_0^{-1} \int_0^t \sum_{j=1}^m k_j(\tau) ((L_j v)_t(x, t - \tau) \\ & + (L_j \Phi)_t(x, t - \tau)) d\tau) + \Psi_i(v_0(v)), \end{aligned}$$

где $v = v(\vec{k})$ решение задачи (3.39), (3.40). Получили систему для нахождения вектор-функции $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$. Необходимо доказать ее разрешимость. В силу теоремы 11 (используемой на промежутке $[0, \gamma]$, а не на всем $[0, T]$) при данном $\vec{k} \in L_p(0, \gamma)$ ($\gamma \leq T$) можно однозначно восстановить функцию $v = v(\vec{k}) \in H(0, \gamma)$ как решение уравнения (3.44). После этого можно получить оценки. Полагается, что $R = 2\|B^{-1} \vec{F}\|_{L_p(0, T)}$. Вектор $\vec{k}$ ищется в шаре $B_R^\gamma = \{\vec{k} \in L_p(0, \gamma) : \|\vec{k}\|_{L_p(0, \gamma)} \leq R\}$. Пусть $\vec{k} \in B_R^\gamma$. Оценим $\|L_0^{-1} G(v)\|_{H(0, \gamma)}$.

Имеем

$$G(v) - G(0) = \int_0^t \int_0^\xi \sum_{j=1}^m k_j(\tau)(\tau)(L_j v)_t(x, \xi - \tau) d\tau d\xi.$$

Из следствия 1.1, леммы 3.3 и неравенства (3.12) получены неравенства

$$\begin{aligned} \|L_0^{-1}(G(v) - G(0))\|_{H(0,\gamma)} &= \|L_0^{-1}(G(v) - G(0))\|_{H(0,\gamma)} \\ &\leq c_1 \gamma^{1-1/p} \|\vec{k}\|_{L_p(0,\gamma)} \|v\|_{H(0,\gamma)} \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\|L_0^{-1}G(0)\|_{H(0,\gamma)} \leq c_1 \gamma^{1-1/p} \|\vec{k}\|_{L_p(0,\gamma)} \|\Phi\|_{H(0,\gamma)} + c_2 \|\vec{k}\|_{L_p(0,\gamma)}. \quad (3.48)$$

Здесь c_1, c_2 – некоторые постоянные, не зависящие от γ и искомых функций.

Таким образом, если

$$\gamma_0^{1-1/p} c_1 R = 1/2, \quad (3.49)$$

то при $\gamma \leq \gamma_0$ решение уравнения (3.44) удовлетворяет оценке

$$\|v\|_{H(0,\gamma)} \leq 2 \|\vec{k}\|_{L_p(0,\gamma)} (c_1 \|\Phi\|_{H(0,T)} \gamma_0^{1-1/p} + c_2) = 2 \|\vec{k}\|_{L_p(0,\gamma)} c_3, \quad (3.50)$$

которую также можно записать в виде

$$\|v\|_{H(0,\gamma)} \leq 2Rc_3, \quad (3.51)$$

Перейдем к оценкам слагаемых в (3.46), используя следствие 1.1 и теоремы о следах (§4.7, [119]), получим

$$\begin{aligned} \|v_0\|_{L_p(\alpha,\beta;W_p^2(G))} &\leq c \|B_t v\|_{L_p(\alpha,\beta;W_p^{s_0}(\Gamma))} \\ &\leq c_4 \|v\|_{L_p(\alpha,\beta;W_p^{2-1/p}(\Gamma))} \leq c_5 \|v\|_{L_p(\alpha,\beta;W_p^2(G))}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

где константа c_5 не зависит от $0 \leq \alpha < \beta \leq T$. Пусть $\kappa_0 = \max_i \|\Psi_i\|_{L(W_p^2(G),\mathbb{R})}$.

Используя (3.15), (3.52), (3.11), (3.50), получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \|\Psi_i(v_0)\|_{L_p(0,\gamma)} &\leq \kappa_0 c_5 \|v\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} \\ &\leq c_6 \gamma^{1-1/p} \|v_t\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq 2c_3 c_6 \gamma^{1-1/p} \|\vec{k}\|_{L_p(0,\gamma)}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Как и при выводе неравенства (3.24), дополнительно используя (3.11), следствие 1.1 и (3.50), можно получить

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \|\Psi_j(L_0^{-1}L_{0t}v)\|_{L_p(0,\gamma)} &\leq \kappa_0 c_7 \|v\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} \\ &\leq c_8 \gamma^{1-1/p} \|v_t\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} \leq 2c_3 c_8 \gamma^{1-1/p} \|\vec{k}\|_{L_p(0,\gamma)}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

где постоянная c_8 не зависят от γ и $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$. Далее, используя (3.15), следствие 1.1, лемму 3.3 получим, что

$$\sum_{i=1}^m \|\Psi_i(L_0^{-1} \int_0^t \sum_{j=1}^m k_j(\tau)((L_j v)_t(x, t - \tau) + (L_j \Phi)_t(x, t - \tau)) d\tau)\|_{L_p(0, \gamma)} \leq \quad (3.55)$$

$$\kappa_0 c_1 \|\vec{k}\|_{L_p(0, \gamma)} \gamma^{1-1/p} (\|v\|_{H(0, \gamma)} + \|\Phi\|_{H(0, T)}) \leq \|\vec{k}\|_{L_p(0, \gamma)} c_9 \gamma^{1-1/p},$$

где $c_9 = \kappa_0 c_1 (2Rc_3 + \|\Phi\|_{H(0, T)})$. Из оценок (3.53) – (3.55) вытекает оценка

$$\|B^{-1}A(\vec{k})\|_{L_p(0, \gamma)} \leq \|\vec{k}\|_{L_p(0, \gamma)} \gamma^{1-1/p} c_{10}, \quad c_{10} = (2c_3(c_6 + c_8) + c_9). \quad (3.56)$$

Выбирается $\gamma_1 \leq \gamma_0$ такое, что

$$c_{10} \gamma_1^{1-1/p} = 1/2. \quad (3.57)$$

Тогда при $\gamma \leq \gamma_1$ оператор $B^{-1}\vec{F} - B^{-1}A(\vec{k})$ будет переводить шар B_R^γ в себя. Надо показать, что он также является сжимающим при подходящих γ . Итак, пусть $\vec{k}^1, \vec{k}^2 \in B_R^\gamma$ ($\gamma \leq \gamma_1$). Обозначив через v_1, v_2 соответствующие решения уравнения (3.44). Получим

$$L_0 v_i(x, t) = - \int_0^t \int_0^\xi \sum_{j=1}^m k_j^i(\tau)((L_j v_i)_t(x, \xi - \tau) d\tau d\xi$$

$$- \sum_{j=1}^m \int_0^t \int_0^\xi k_j^i(\xi) d\xi L_j(x, 0) u_0(x) - \int_0^t \int_0^\xi \sum_{j=1}^m k_j^i(\tau)(L_j \Phi)_t(x, \xi - \tau) d\tau = G(v_i), \quad (3.58)$$

$$i = 1, 2.$$

Вычитая эти два равенства получим, что

$$L_0(v_1 - v_2) =$$

$$- \int_0^t \int_0^\xi \sum_{j=1}^m (k_j^1 - k_j^2)(\tau)(L_j v_1)_t(x, \xi - \tau) + k_j^2(\tau)(L_j v_1 - L_j v_2)_t(x, \xi - \tau) d\tau d\xi$$

$$- \sum_{j=1}^m \int_0^t \int_0^\xi (k_j^1 - k_j^2)(\xi) d\xi L_j(x, 0) u_0(x)$$

$$- \int_0^t \int_0^\xi \sum_{j=1}^m (k_j^1 - k_j^2)(\tau)(L_j \Phi)_t(x, \xi - \tau) d\tau. \quad (3.59)$$

Как и при получении (3.50) (см. также оценку (3.47) и (3.49)), имеем

$$\|v_1 - v_2\|_{H(0, \gamma)} \leq 4\gamma^{1-1/p} c_1 c_3 R \|\vec{k}_1 - \vec{k}_2\|_{L_p(0, \gamma)} \quad (3.60)$$

$$+ 2c_3 \|\vec{k}_1 - \vec{k}_2\|_{L_p(0, \gamma)} \leq \|\vec{k}_1 - \vec{k}_2\|_{L_p(0, \gamma)} 4c_3.$$

Таким образом, по сравнению с оценкой (3.50) появилось одно дополнительное слагаемое. Далее необходимо рассмотреть разность $A(\vec{k}_1) - A(\vec{k}_2)$. Пусть

$$\begin{aligned} A_i(\vec{k}_1) - A_i(\vec{k}_2) = & \\ \Psi_i(L_0^{-1} \int_0^t \sum_{j=1}^m k_j^1(\tau)(L_j v_1)_t(x, t - \tau) - k_j^2(\tau)(L_j v_2)_t(x, t - \tau) d\tau) & \\ + \Psi_i(L_0^{-1} L_t(v_1 - v_2)) + \Psi_i(v_0(v_1 - v_2)) & \\ + \Psi_i(L_0^{-1} \int_0^t \sum_{j=1}^m (k_j^1 - k_j^2)(\tau)(L_j \Phi)_t(x, t - \tau) d\tau). & \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения с использованием уже полученных оценок (3.60), (3.51) (справедливой для функций v_1, v_2) получим

$$\begin{aligned} \|B^{-1}A(\vec{k}^1) - B^{-1}A(\vec{k}^2)\|_{L_p(0,\gamma)} &\leq \|\vec{k}^1 - \vec{k}^2\|_{L_p(0,\gamma)} \gamma^{1-1/p} c_{11}, \\ c_{11} &= (c_{10} + 4\kappa_0 c_1 R c_3). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Далее находится $\gamma_2 \leq \gamma_1$ такое, что $\gamma_2^{1-1/p} c_{11} = 1/2$. Тогда при всех $\gamma \leq \gamma_2$ уравнение (3.46) будет иметь единственное решение в шаре B_R^γ .

Перейдем к вопросу о глобальной разрешимости уравнения (3.46). Рассуждения примерно такие же, как и в доказательстве теоремы 11. Показывается, что найдется такое $\gamma_3 \leq \gamma_2$, что из того, что система (3.46) разрешима на промежутке $[0, l\gamma_3]$ ($l = 1, 2, \dots$) вытекает, что система разрешима на $[l\gamma_3, l\gamma_3 + \tau_0]$, где $\tau_0 = \min(\gamma_3, T - l\gamma_3)$. Предположим, что система разрешима на промежутке $[0, l\gamma_3]$ ($l\gamma_3 < T$). Получим некоторые оценки. Пусть

$$\tilde{k}(t) = \begin{cases} \vec{k}(t), & t \in [l\gamma_3, l\gamma_3 + \tau_0] \\ 0, & t < l\gamma_3 \end{cases}, \quad \hat{k}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [l\gamma_3, l\gamma_3 + \tau_0] \\ \vec{k}(t), & t < l\gamma_3 \end{cases}.$$

Функция $\hat{k}(t)$ уже известна и необходимо найти функцию $\tilde{k}(t)$. Используя обозначения $S_0(v)$ из теоремы 11, где γ_0 заменяется на γ_3 перепишем уравнение (3.43) в виде

$$v + S_0 v = S_1(\tilde{k}) + f_3, \quad (3.62)$$

где правая часть совпадает с $L_0^{-1}G(v)$ для $t \leq l\gamma_3$ и для $t > l\gamma_3$. Имеем

$$\begin{aligned}
S_1(\tilde{k}) &= -L_0^{-1} \int_0^t \int_0^\xi \sum_{j=1}^m \tilde{k}_j(\tau)(\tau)((L_j v)_\xi(x, \xi - \tau) + (L_j \Phi)_\xi(x, \xi - \tau)) d\tau d\xi \\
&\quad - \sum_{j=1}^m L_0^{-1} \int_0^t \tilde{k}_j(\xi) d\xi L_j(x, 0) u_0(x), \\
f_3 &= -L_0^{-1} \int_0^t \int_0^\xi \sum_{j=1}^m \hat{k}_j(\tau)(\tau)((L_j v)_t(x, \xi - \tau) + (L_j \Phi)_t(x, \xi - \tau)) d\tau d\xi \\
&\quad - L_0^{-1} \sum_{j=1}^m \int_0^t \hat{k}_j(\xi) d\xi L_j(x, 0) u_0(x) + S_0(v).
\end{aligned}$$

Функция f_3 вычисляется с использованием значений функций v , k на промежутке $[0, l\gamma_2]$, и значит можно считать, что это уже известная функция. Из (3.62) можно заметить, что по сути функция v выражается линейным образом через функцию $\tilde{k}$. Из доказательств оценки (3.47) и леммы 4 имеем в силу определения величины γ_2 , что

$$\begin{aligned}
\|S_0 v\|_{H(0, l\gamma_3 + \tau_0)} &\leq c_1 \gamma_3^{1-1/p} \|\vec{k}\|_{L_p(0, \gamma_3)} \|v\|_{H(l\gamma_3, l\gamma_3 + \tau_0)} \\
&\leq \|v\|_{H(l\gamma_3, l\gamma_3 + \tau_0)} / 2.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Пусть $v_1 = (I + S_0)^{-1} S_1(\vec{k})$. Из оценки (3.63) вытекает, что

$$\|(I + S_0)^{-1} v\|_{H(0, l\gamma_3 + \tau_0)} \leq 2 \|v\|_{H(0, l\gamma_3 + \tau_0)}$$

для всех $v \in H(0, l\gamma_3 + \tau_0)$. Тогда имеет место оценка (используются следствие 1.1, лемма 3.3 и (3.49) – (3.51))

$$\begin{aligned}
\|v_1\|_{H(0, l\gamma_3 + \tau_0)} &\leq 2c_1 \gamma_3^{1-1/p} \|\tilde{k}\|_{L_p(l\gamma_3, l\gamma_3 + \tau_0)} (\|v\|_{H(0, \gamma_3)} + \|\Phi\|_{H(0, \gamma_3)}) \\
&\quad + 2c_2 \|\tilde{k}\|_{L_p(l\gamma_3, l\gamma_3 + \tau_0)} \leq 4c_3 \|\tilde{k}\|_{L_p(l\gamma_3, l\gamma_3 + \tau_0)}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Следовательно, сама функция $v = v_1 + (I + S_0)^{-1} f_3$ оценивается через

$$\|v\|_{H(0, l\gamma_3 + \tau_0)} \leq 4c_3 \|\tilde{k}\|_{L_p(l\gamma_3, l\gamma_3 + \tau_0)} + 2 \|f_3\|_{H(0, l\gamma_3 + \tau_0)}. \tag{3.65}$$

Запишем представление для $A_j(\vec{k})$ при $t \geq l\gamma_3$.

$$\begin{aligned}
A_i(\vec{k}) &= A_i(\tilde{k}) + f_{4i}, \quad A_i(\tilde{k}) = \Psi_i(L_0^{-1} L_{0t} v_1) + \Psi_i(v_0(v_1)) \\
&\quad + \Psi_i(L_0^{-1} \int_0^t \sum_{j=1}^m \tilde{k}_j(\tau)((L_j v_1)_t(x, t - \tau) + (L_j \Phi)_t(x, t - \tau)) d\tau) \\
&\quad + \Psi_i(L_0^{-1} \int_0^{t-l\gamma_3} \sum_{j=1}^m \hat{k}_j(\tau)(L_j v_1)_t(x, t - \tau) d\tau),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{4i} = & \Psi_i(L_0^{-1}L_{0t}(I + S_0)^{-1}f_3) + \Psi_i(v_0((I + S_0)^{-1}f_3) \\
& + \Psi_i(L_0^{-1} \int_0^t \sum_{j=1}^m \hat{k}_j(\tau)(L_j\Phi)_t(x, t - \tau) d\tau \\
& + \Psi_i(L_0^{-1} \int_{t-\gamma_3 l}^t \sum_{j=1}^m \hat{k}_j(\tau)(L_j v)_t(x, t - \tau) d\tau) \\
& + \Psi_i(L_0^{-1} \int_0^{t-l\gamma_3} \sum_{j=1}^m \hat{k}_j(\tau)((L_j(I + S_0)^{-1}f_3(\tilde{k}))_t(x, t - \tau) d\tau)
\end{aligned}$$

Мы выделили функцию f_{4i} , зависящую только от значений k на промежутке $(0, l\gamma_3)$. Оставшееся выражение есть некоторый линейный оператор от $\tilde{k}$. Далее, получим некоторые оценки. Носитель функции v_1 принадлежит промежутку $[l\gamma_2, l\gamma_2 + \tau_0]$. Как и при получении оценок (3.53), (3.54) имеем, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^m (\|\Psi_i(L_0^{-1}L_{0t}v_1\|_{L_p(l\gamma_3, l\gamma_3+\tau_0)} + \|\Psi_i(v_0(v_1))\|_{L_p(l\gamma_3, l\gamma_3+\tau_0)}) \\
& \leq (c_6 + c_8)\gamma_3^{1-1/p}\|v_1\|_{H(l\gamma_3, l\gamma_3+\tau_0)} \leq \gamma_3^{1-1/p}(c_6 + c_8)4c_3\|\tilde{k}\|_{L_p(l\gamma_3, l\gamma_3+\tau_0)}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Как и ранее в оценке (3.55) заключаем

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^m \|\Psi_i(L_0^{-1} \int_0^t \sum_{j=1}^m \tilde{k}_j(\tau)((L_j v)_t(x, t - \tau) + (L_j \Phi)_t(x, t - \tau)) d\tau)\|_{L_p(l\gamma_3, l\gamma_3+\tau_0)} \\
& \leq \kappa_0 c_1 \gamma_3^{1-1/p} \|\tilde{k}\|_{L_p(l\gamma_3, l\gamma_3+\tau_0)} (\|v\|_{H(0, \gamma_3)} + \|\Phi\|_{H(0, T)}) \\
& \leq \gamma_3^{1-1/p} \|\tilde{k}\|_{L_p(l\gamma_3, l\gamma_3+\tau_0)} (c_9 + 2Rc_3).
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^m \|\Psi_i(L_0^{-1} \int_0^{t-l\gamma_3} \sum_{j=1}^m \hat{k}_j(\tau)((L_j v_1)_t(x, t - \tau) d\tau)\|_{L_p(l\gamma_3, l\gamma_3+\tau_0)} \\
& \leq \kappa_0 c_1 \gamma_3^{1-1/p} \|\vec{k}\|_{L_p(0, \gamma_3)} 4c_3 \|\tilde{k}\|_{L_p(l\gamma_3, l\gamma_3+\tau_0)} \\
& \leq \kappa_0 c_1 \gamma_3^{1-1/p} 2Rc_3 \|\tilde{k}\|_{L_p(l\gamma_3, l\gamma_3+\tau_0)}.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
& \|B^{-1}A(\tilde{k})\|_{L_p(l\gamma_3, l\gamma_3+\tau_0)} \\
& \leq \gamma_3^{1-1/p} \|\tilde{k}\|_{L_p(l\gamma_3, l\gamma_3+\tau_0)} ((c_6 + c_8)4c_3 + (c_9 + 2Rc_3) + \kappa_0 c_1 2Rc_3).
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Следовательно, если выберем γ_3 таким образом, чтобы

$$\gamma_3^{1-1/p} ((c_6 + c_8)4c_3 + (c_9 + 2Rc_3) + \kappa_0 c_1 2Rc_3) = 1/2,$$

то оператор $B^{-1}A(\tilde{k})$ будет сжимающим, и значит из того, что система (3.46) разрешима на промежутке $[0, l\gamma_3]$ ($l = 1, 2, \dots$), будет вытекать, что система разрешима на $[l\gamma_3, l\gamma_3 + \tau_0]$, где $\tau_0 = \min(\gamma_3, T - l\gamma_3)$. Отсюда вытекает, что система (3.46) разрешима на $[0, T]$. Необходимо показать, что соответствующая функция $v = v(k)$ (решение задачи (3.39), (3.40)) удовлетворяет условиям (3.41). Обращая оператор L_0 можно заметить, что выполнено равенство (3.42). Применяя функционал Ψ_j к (3.45), получим, что

$$\begin{aligned} (\Psi_i(v))_t + \Psi_i(L_0^{-1}L_0tv) + \Psi_i(L_0^{-1} \int_0^t \sum_{j=1}^m k_j(\tau)(L_jv)_t(x, t - \tau) d\tau) \\ + \Psi_i(v_0) = - \sum_{j=1}^m k_j(t)\Psi_i(L_0^{-1}L_j(x, 0)u_0(x)) \\ - \Psi_i(L_0^{-1} \int_0^t \sum_{j=1}^m k_j(\tau)(L_j\Phi)_t(x, t - \tau) d\tau). \end{aligned}$$

Вычитая это равенство из (3.45), придем к равенству $(\Psi_i(v))_t - \tilde{\psi}_{it} = 0$, или (в силу (3.17), (3.21)) $\Psi_i(v) = \tilde{\psi}_i$, т. е. равенства (3.41) выполнены. Утверждение вытекает из теоремы 10. $\square$

3.4 Численное определение параметров среды

3.4.1 Описание алгоритма

Опишем численный алгоритм в случае краевых условий Дирихле при $m = 2$. Рассматривается модельная задача об определении диагональных элементы тензоров электрической (или) магнитной восприимчивости в уравнении (3.6). Уравнение

$$\Delta u + \int_0^t \sum_{m=1}^2 p_m(s)u_{x_mx_m}(t - s)ds = f(x, t), \quad (3.70)$$

рассматриваемое в области $Q = G \times (0, T)$, $x = (x_1, x_2) \in G \subset R^2$, $t \in [0, T]$. Уравнение (3.70) дополняется граничными условиями

$$u|_s = g(x, t), \quad u(x, 0)|_\Gamma = g(x, 0). \quad (3.71)$$

Функция $p_m(s)$ определяется на основе дополнительных измерений вида

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad i = 1, 2. \quad (3.72)$$

Алгоритм основывается на преобразовании задачи (3.70) в псевдопараболическую.

На первом этапе мы строим функцию $u_0(x)$.

1. Поиск начальных данных u_0 .

Начальные условия при $t = 0$, $u(x, 0) = u_0(x)$ определяются как решение задачи

$$\Delta u_0 = f(x, 0), \quad u_0|_{\Gamma} = g(x, 0).$$

Функция u_0 ищется в виде

$$u_0(x) = \tilde{g} + v_0,$$

где $\tilde{g}(x)$ – некоторая функция такая, что

$$\tilde{g}(x)|_{\Gamma} = g(x, 0),$$

т.е. $\tilde{g}(x)$ – продолжение функции $g(x, 0)$ внутрь области. Функция v_0 решение задачи

$$\Delta v_0 = f(x, 0) - \Delta \tilde{g}(x), \quad v_0|_{\Gamma} = 0. \quad (3.73)$$

2. Поиск решения Φ вспомогательной задачи.

Дифференцируем уравнение (3.70) по t и делаем замену $u_t = \Phi + v$, где Φ – решение вспомогательной задачи

$$\Delta \Phi = f_t, \quad \Phi|_S = g_t(x, t).$$

Функцию Φ можно найти как сумму

$$\Phi = \tilde{g}_1 + v_1$$

где $\tilde{g}_1$ – продолжение функции g_t внутрь области, а функция v_1 есть решение задачи

$$\Delta v_1 = f_t - \Delta \tilde{g}_1(x, t), \quad v_1|_{\Gamma} = 0. \quad (3.74)$$

3. Поиск решения v . Функция v есть решение уравнения

$$\begin{aligned} \Delta v + \sum_{m=1}^2 \int_0^t p_m(s) v_{x_m x_m}(t-s) ds \\ + \sum_{m=1}^2 \int_0^t p_m(s) \Phi_{x_m x_m}(t-s) ds \\ + \sum_{m=1}^2 \int_0^t p_m(s) u_{0x_m x_m}(t-s) ds = 0. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Скалярно умножая уравнение (3.75) на пробную функцию ϕ , получаем, что

$$\begin{aligned} (\nabla v, \nabla \phi) + \int_0^t \sum_{m=1}^2 p_m(s) (v_{x_m}, \phi_{x_m})(t-s) ds \\ + \int_0^t \sum_{m=1}^2 p_m(s) (\Phi_{x_m}, \phi_{x_m})(t-s) ds \\ + \sum_{m=1}^2 \int_0^t p_m(s) (u_{0x_m}, \phi_{x_m})(t-s) ds = 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

3.4.2 Численная реализация алгоритма

Необходимо определить из уравнения (3.70) функции $u(x_1, x_2, t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$. Алгоритм основан на методе конечных элементов. Определим триангуляцию G , узлы триангуляционной сетки $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_M$ и соответствующие базисные кусочно-линейные функции $\{\phi_i(x)\}$, удовлетворяющие однородным условиям Дирихле. Без ограничения общности считается, что точки наблюдения или замера x_j являются узлами сетки. Тогда найдутся номера j_1, j_2 такие, что $x_k = \tilde{x}_{j_k}$, $k = 1, 2$.

1. Строится приближение функции v_0 в виде

$$v_0 = \sum_{i=1}^M C_i \phi_i(x),$$

Числа C_i находятся из системы

$$- \sum_{i=1}^N C_i (\nabla \phi_i, \nabla \phi_j) = (f(x, 0), \phi_j) + (\nabla \tilde{g}(x), \nabla \phi_j), \quad (3.77)$$

где $i = 1, 2, \dots, M$ и скобки $(\cdot, \cdot)$ обозначают скалярное произведение в $L_2(G)$. Определим матрицу жесткости K состоящую из элементов $K_{ij} =$

$\int (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i) dx$, а также вектора $\vec{F}_0, \vec{g}$ с координатами $\vec{F}_{0i} = \int_G f(0, x) \phi_i dx$ и $\vec{g} = \int_G \Delta \tilde{g}(x) \phi_i(x) dx$. Тогда вектор-функция $\vec{C} = (C_1, C_2, \dots, C_M)$ записывается в виде

$$\vec{C} = -K^{-1}(\vec{F}_0 - \vec{g}).$$

2. Строится приближение функции Φ в виде

$$\Phi = \tilde{g}_1 + \sum_{i=1}^M c_i \phi_i(x),$$

где функции $c_i(t)$ определяются из системы

$$-\sum_{i=1}^M c_i (\nabla \phi_i, \nabla \phi_j) = (f_t(x, t), \phi_j) + (\nabla \tilde{g}_1(x, t), \nabla \phi_j). \quad (3.78)$$

Таким образом, вектор функция $\vec{c}(t)$ определяется следующим образом. Находятся вектора $\vec{F}_t, \vec{g}_1$ с координатами $\int_G f_t \phi_i dx$ и $\int_G \Delta \tilde{g}_1 \phi_i dx$. Тогда

$$\vec{c}(t) = -K^{-1}(\vec{F}_t - \vec{g}).$$

3. Ищется приближение функции v в виде $v = \sum_{i=1}^M C_i \phi_i$, где функции $C_i(t)$ определяются из системы

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N C_j (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i) + \sum_{m=1}^2 \int_0^t p_m(s) C_j (\phi_{ix_m}, \phi_{jx_m})(t-s) ds \\ & + \sum_{m=1}^2 \int_0^t p_m(s) (\Phi_{x_m}, \phi_{ix_m})(t-s) ds + \sum_{m=1}^2 p_m(t) (u_{0x_m}, \phi_{ix_m}) = 0. \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, M.$$

Вводятся величины

$$\begin{aligned} B_m : \beta_{ij}^m &= (\phi_{ix_m}, \phi_{jx_m}), \\ \vec{F}_{0m} : F_{0mi} &= (u_{0x_m}, \phi_{ix_m}), \quad \vec{F}_m : F_{mi} = (\Phi_{x_m}, \phi_{ix_m}). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Тогда система переписывается в виде

$$\begin{aligned} & K\vec{C} + \int_0^t \sum_{m=1}^2 p_m(s) B_m \vec{C}(t-s) ds \\ & + \int_0^t \sum_{m=1}^2 p_m(s) \vec{F}_m(t-s) ds + \sum_{m=1}^2 p_m(s) \vec{F}_{0m} = 0. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Определяется шаг по времени $\tau = T/N$, где N – большое натуральное число, промежуток $[0, T]$ разбивается на промежутки вида $[(k-1)\tau, k\tau]$, $k = 1, 2, \dots, N$. Система интегральных уравнений (3.81) заменяется системой алгебраических уравнений, считая, что $\vec{C}(\tau l) \approx \vec{C}_l$ ($l = 1, 2, \dots, N$). При этом интегралы заменяются интегральными суммами. Получается система относительно векторов $\vec{C}_l$:

$$\begin{aligned} K\vec{C}_l + \tau \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^l p_{m,j} B_m C_{l-j} + \tau \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^l p_{m,j} F_m((l-j)\tau) \\ + \sum_{m=1}^2 p_m \vec{F}_{0m} = 0. \quad l = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.82)$$

Переписываются условия переопределения (3.72) при условии, что $v = u_t - \Phi$:

$$v(\tilde{x}_{j_i}, t) = \psi_{it}(t) - \Phi(\tilde{x}_{j_i}, t).$$

В используемых терминах это можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \psi_{1t} - \Phi(\tilde{x}_{j_1}, t) &= v(\tilde{x}_{j_1}, t) = C_{j_1}(t), \\ \psi_{2t} - \Phi(\tilde{x}_{j_2}, t) &= v(\tilde{x}_{j_2}, t) = C_{j_2}(t), \\ (C_i)_{j_1} &= \psi_{1t} - \Phi(\tilde{x}_{j_1}, t)|_{t=i\tau}, \\ (C_i)_{j_2} &= \psi_{2t} - \Phi(\tilde{x}_{j_2}, t)|_{t=i\tau}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Применяя матрицу K^{-1} , записываем уравнение (3.82) в точках переопределения с индексами j_k , $k = 1, 2$.

$$\begin{aligned} (C_l)_{j_k} + \tau \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^l p_{m,j} (K^{-1} B_m C_{l-j})_{j_k} \\ + \tau \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^l p_{m,j} (K^{-1} F_m((l-j)\tau))_{j_k} + \sum_{m=1}^2 p_{m,l} (K^{-1} \vec{F}_{0m})_{j_k} = 0. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Определяется $p_{m,0}$ через подстановку в (3.84) $l = 0$:

$$(C_0)_{j_k} = (\psi_0 - \Phi(\tilde{x}_{j_1}, 0)) = - \sum_{m=1}^2 p_{m,0} (K^{-1} \vec{F}_{0m})_{j_k} \quad (3.85)$$

Отсюда находятся $p_{m,0} = p_m(0)$ ($m = 1, 2$), обращая соответствующую матрицу с элементами $f_{km} = (K^{-1} \vec{F}_{0m})_{j_k}$. Далее вектор C_0 будет найден как

$$C_0 = - \sum_{m=1}^2 p_{m,0} (K^{-1} \vec{F}_{0m}).$$

Переписывается система (3.82) как

$$\begin{aligned} \vec{C}_l + K^{-1}(\tau(\sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^{l-1} p_{m,j} B_m C_{l-j} + \sum_{m=1}^2 p_{m,l} B_m C_0 \\ + \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^{l-1} p_{m,j} F_m((l-j)\tau) + \sum_{m=1}^2 p_{m,l} F_m(0) + \sum_{m=1}^2 p_{m,l} \vec{F}_{0m})) = 0. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Для того, чтобы найти вектор $p_{m,l}$, используется равенство (3.84), в котором берем j_k координату всех векторов и используем равенство $(C_l)_{j_k} = (\psi_{kt}(l\tau) - \Phi(x_{j_k}, l\tau))$. Вектор $p_{m,l}$ выражается из (3.84), обращая матрицу с элементами f_{kj} . Тогда C_l определится из равенства

$$\begin{aligned} \vec{C}_l = -K^{-1}(\tau(\sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^{l-1} p_{m,j} B_m C_{l-j} + \sum_{m=1}^2 p_{m,l} B_m C_0 \\ + \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^{l-1} p_{m,j} F_m((l-j)\tau) + \sum_{m=1}^2 p_{m,l} F_m(0) + \sum_{m=1}^2 p_{m,l} F_{0m})). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Повторяя рассуждения на каждом временном слое, определяются вектора C_l и величины $p_{m,l}$.

В целом, алгоритм численного решения задачи об определении параметров среды для рассматриваемых математических моделей сводится к следующим этапам.

Этап 1. При помощи метода конечных элементов прямая задача об определении потенциала u сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Этап 2. Вводится шаг по времени и система заменяется разностной схемой. Выписываются дополнительные соотношения, связывающие потенциал u , коэффициенты p_i и данные из условия переопределения. Интегралы по времени заменяются их приближениями (метод трапеций).

Этап 3. Строится итерационная процедура для определения решения. Для данной сетки в пространственной области и шага по времени послойно вычисляется коэффициенты p_i ($i = 1, 2$) и потенциал u . При переходе на следующий слой коэффициенты p_i вычисляются исходя из данных переопределения и значений решений u на предыдущих временных слоях. Далее используется разностная схема для определения решения u для вычисления решения на этом временном слое.

3.5 Описание программы и результаты численных экспериментов

Реализация описанного алгоритма представлена зарегистрированной программой "Программа численного определения параметров среды в математических моделях квазилинейных электромагнитных волн". Средой разработки был выбран MatLab. Преимущества и выбор среды программирования описаны во второй главе.

Программа обеспечивает выполнение следующих функций:

- вычисление граничных векторов и вектора правой части;
- проверку нахождения всех точек в главной области;
- определение и размельчение триангуляционной сетки;
- поиск координат середин треугольников;
- расчет возмущений;
- поиск приближения искомых функций;
- вывод графиков триангуляционной сетки, приближения функции;
- формированием *.mtl файлов содержащих геометрические параметры выводимых моделей решений;
- сохранение результатов вычислений;
- экспорт результатов.

Полученные результаты сохраняются в самой программе и могут быть использованы в дальнейшем для построения отдельных расчетов или графиков. Результаты при необходимости можно экспортировать в сторонние приложения.

Блок схема алгоритма представлена на рисунке 3.1. В начале строится триангуляционная сетка, с помощью встроенной функции `initmesh()`. Затем для повышения точности она преобразуется функцией `refinemesh()`, которая разделяет все заданные треугольники на четыре треугольника. После построения сетки начинается построение точек граничных узлов и генерация случайных возмущений, с помощью конструкции $rand(1) * 2x - x$ (где x будет значение, введенное пользователем при выборе уровня случайных возмущений). Находится матрица жесткости, а затем вектор правой части. Определяется размер векторов и начинается

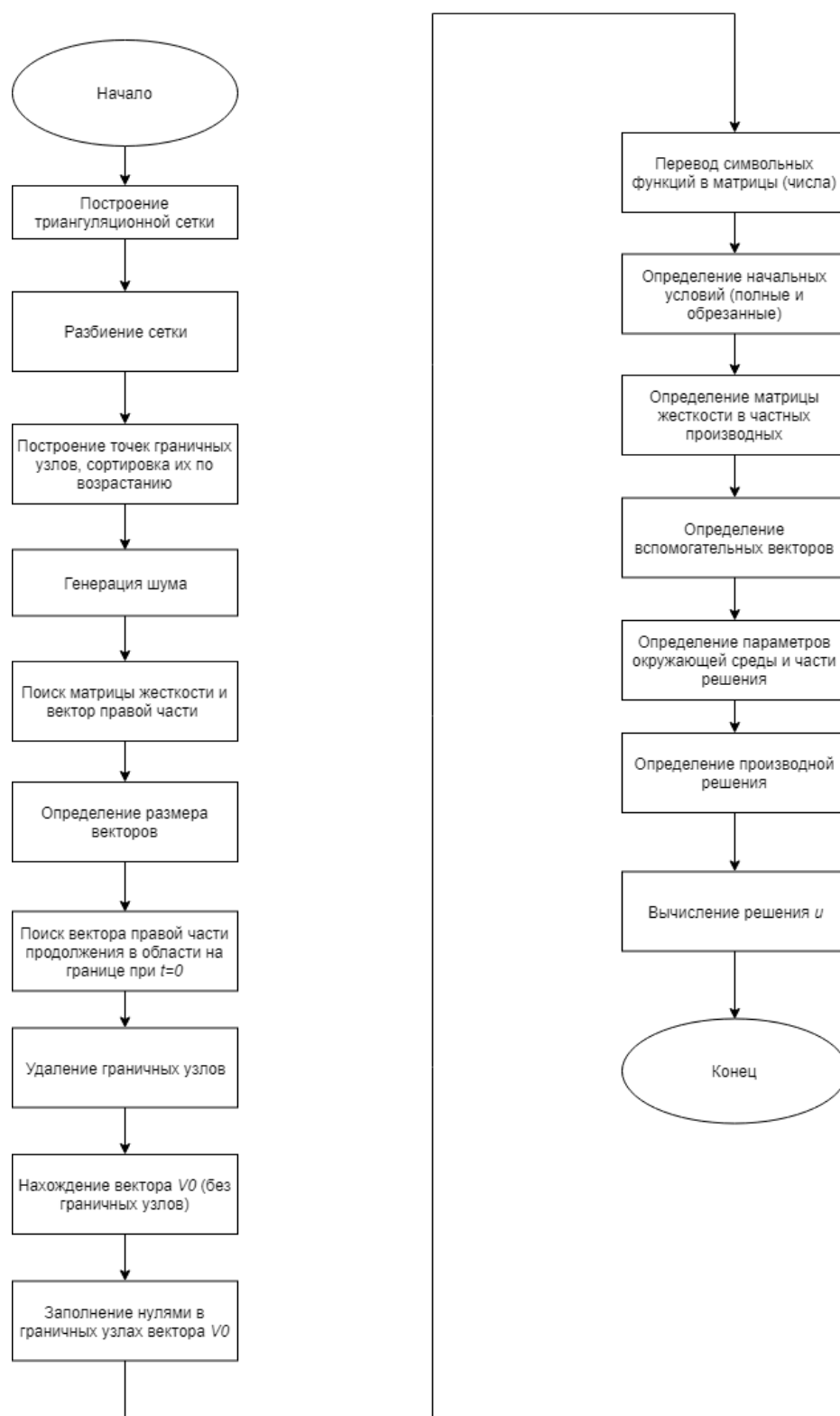


Рисунок 3.1 — Блок схема алгоритма численного определения параметров среды в математических моделях квазистационарных электромагнитных волн

поиск вектора правой части в области на границе при $t = 0$. Затем удаляются граничные узлы и находится вектор V_0 , граничные узлы которого заполняются нулями. Потом, для удобства дальнейших расчетов некоторые функции, опреде-

ленные в символьных переменных переводятся в численные. Затем определяются начальные условия и матрица жесткости.

Входные данные могут быть введены пользователем вручную или добавлены с помощью загрузки готового файла с данными. Для начала работы необходимо определить основные параметры: ввести младшие коэффициенты, старшие коэффициенты, выбрать количество слоев, указать начальные условия, выбрать степень разбиения сетки, ввести моделируемое уравнение, ввести уровень точности и, если необходимо, уровень возмущения.

В этом разделе проанализированы результаты численных экспериментов.

Характеристики испытуемой ЭВМ: Процессор: Intel(R) Core(TM) i3-8100 CPU @ 3.60GHz 3.60GHz; ОЗУ: 10,00 ГБ; при использовании 64-разрядной операционной системы Windows 10 Pro.

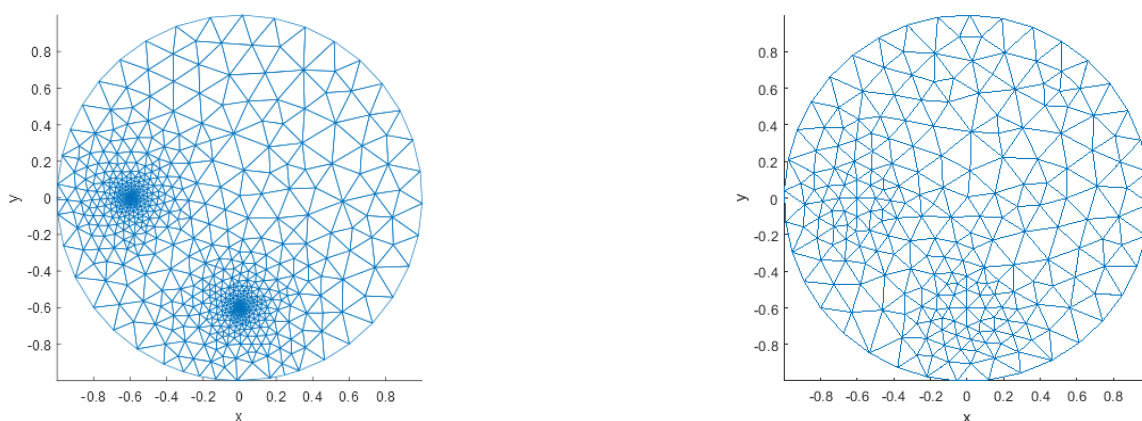


Рисунок 3.2 — Примеры построения сеток

В ходе выполнения расчетов определялось приближённое значение решения $(u(x, y, t), p_1(t), p_2(t))$ задачи (3.70) – (3.72) в узлах сетки в заданные временные моменты $t_1, t_2, \dots, t_N$. В качестве области берется круг единичного радиуса с координатами центра $(0, 0)$. Для численного решения задачи будут рассматриваться несколько сеток (3.2) для описанной области с количеством узлов зависящим от расположения точек наблюдения и количества узлов сетки.

Решение задачи (3.70) – (3.72), а также граничные условия записываются в виде:

$$g(x, t)|_{\Gamma} = (2x^2y^2 + 2)(1 + t^2).$$

Правая часть имеет вид: $f = 1.06t + (2(x^2 + 1)(12\operatorname{atan}(t) - 12t + 18t^2 \cdot \operatorname{atan}(t) + 3t^3 \cdot \ln(t^2 + 1) - 11t^3))/9 - 2y^2 \cdot (0.66(t + 1)^{3/2} - 0.66) - 1.33 \cdot (t + 1)^{3/2} +$

$$2(t^2 + 1)(x^2 + 1) + 2(t^2 + 1)(y^2 + 1) + 2y^2(0.53t + 0.66t^2 - 0.019(t + 1)^{3/2})(16t + 8t^2 + 8) + 0.15) + 1.33t^2 - 0.038 \cdot (t + 1)^{3/2}(16t + 8t^2 + 8) + 1.638.$$

Вводятся несколько величин: $\epsilon_p = \max_{i,m} \|p^m(i\tau) - p_i^m\|$ – ошибка вычислений функций p^1, p^2 , $\epsilon_u = \max_{i,j} \|u_{i,j} - u(x_i, j\tau)\|$, где $i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N$. За τ_s берется время вычислений в секундах. Чтобы установить устойчивость определения решения при случайных возмущениях данных проводим численные эксперименты изменяя данные переопределения: $\tilde{\psi}_t(x_0, t) = \psi_t(x_0, t)(1 + \delta(2\sigma - 1))$, где δ задается пользователем, а $\sigma \in [0, 1]$ определяется генератором случайных чисел Matlab, а именно – функцией `rand`. График решения $u(x, y, t) = (x^2 + 1)(y^2 + 1)(t^2 + 1)$ представлен на рисунке (3.3).

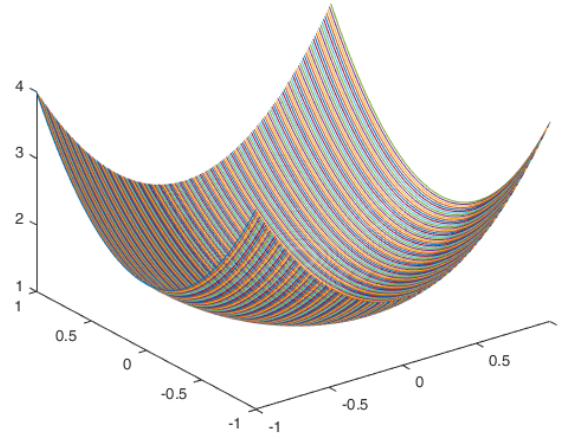
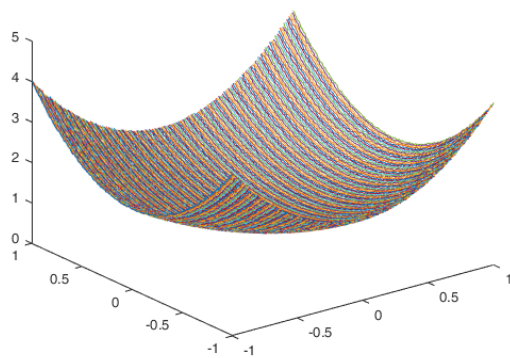
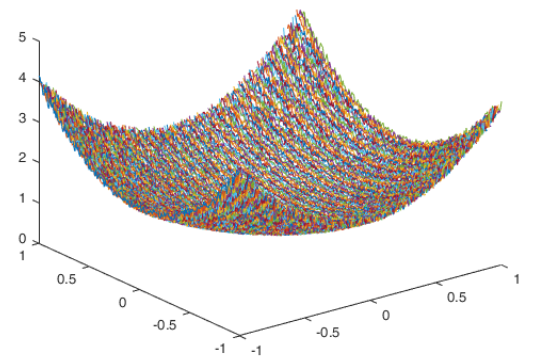


Рисунок 3.3 — Решение $u(x, y, 1)$ рассматриваемой задачи

Полученные графики приближения функций u представлены на рисунке (3.4)



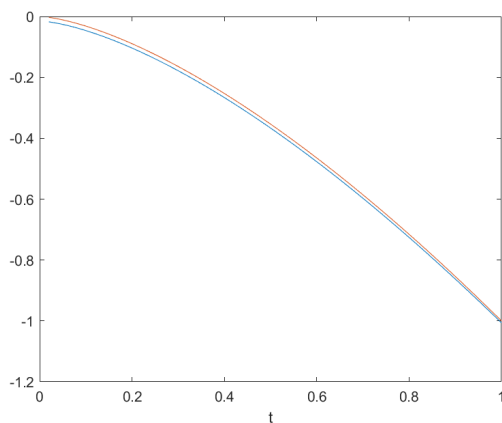
возмущение 5%



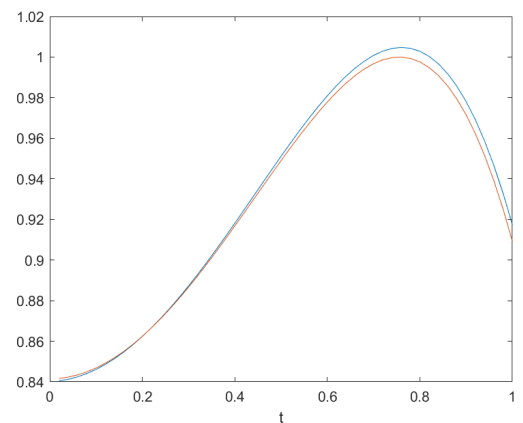
возмущение 10%

Рисунок 3.4 — Приближение решения $u(x, y, 1)$ при случайных возмущениях

Получены функции $p_1(t) = -\sqrt{t}$ и $p_2(t) = \sin(t^2 + 1)$ и проведены численные эксперименты. Результаты экспериментов для шага по времени $t_s = 0.02$ для первой сетки представлены на рисунке (3.5), а так же в таблице (3.1). В связи с тем, что изменяются положения точек наблюдения, меняется и сетка области. На рисунке (3.6) представлены графики функций со случайными возмущениями в 10 процентов. В этом случае подробные результаты для сеток 1 – 5 и 11 – 15 представлены в таблице (3.2).

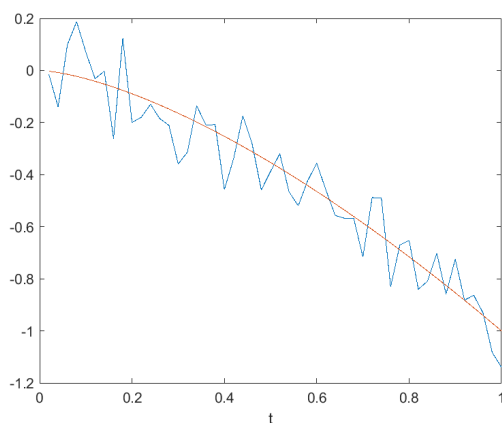


$$p_1(t) = -\sqrt{t}$$

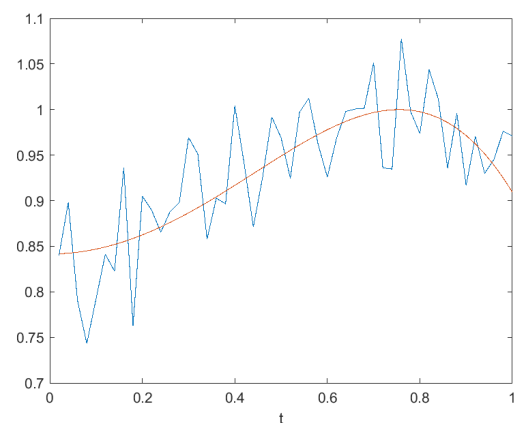


$$p_2(t) = \sin(t^2 + 1)$$

Рисунок 3.5 — Сравнение графиков функций (красный) и их приближения(синий)



$$p_1(t), \text{ возмущение } 10\%$$



$$p_2(t), \text{ возмущение } 10\%$$

Рисунок 3.6 — Построение графиков функций при случайных возмущениях

Как можно заметить, точность вычислений увеличивается в случае большей однородности триангуляционной сетки.

Таблица 3.1 — Результаты численных экспериментов (первая группа)

No exp.	N_x	ε_p	ε_u	τ_s
1	229	0,037002	0,046466	4,147049
2	236	0,011253	0,044536	4,184662
3	237	0,015125	0,047002	4,242981
4	236	0,021869	0,04542	4,004972
5	239	0,027241	0,046797	4,036889
6	669	0,048357	0,04537	49,12766
7	693	0,037822	0,044257	52,20402
8	694	0,014884	0,046501	51,6243
9	698	0,015127	0,045502	51,32633
10	689	0,037445	0,049313	48,90397
11	897	0,017754	0,041931	81,42314
12	907	0,012555	0,04202	86,20059
13	911	0,012972	0,042302	90,10167
14	905	0,015084	0,042173	83,36037
15	915	0,008126	0,042166	89,42623
16	2639	0,022252	0,042182	1755,792
17	2735	0,019808	0,041656	1846,957
18	2736	0,014147	0,042299	1801,659
19	2749	0,013294	0,042023	1790,621
20	2710	0,009836	0,043133	1811,33

Из представленных выше результатов можно сказать, что имеется хорошая точность вычислений при небольшом времени, затраченном на эти вычисления. Точность определения параметров $p_1(t)$, $p_2(t)$ и решения $u(x, y, t)$ возрастает с уменьшением шага по времени, а также с увеличением количества узлов при условии однородности пространственной сетки.

Таблица 3.2 — Результаты численных экспериментов (вторая группа)

No exp.	N_x	ε_p	ε_u	τ_s
1	229	0,03007	0,027882	15,77482
2	236	0,01078	0,026787	16,59276
3	237	0,00867	0,028076	16,87762
4	236	0,01492	0,027352	16,27913
5	239	0,02724	0,027731	16,263
6	897	0,01076	0,021724	321,624
7	907	0,00555	0,021355	334,0045
8	911	0,00602	0,022035	339,4294
9	905	0,00807	0,021586	324,4042
10	915	0,00713	0,021937	329,5462

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги выполненного исследования В диссертационной работе аналитически и численно исследованы математические модели фильтрации и гидродинамики на основе теории обратных задач. Результаты можно описать следующим образом:

- Аналитически исследованы математические модели фильтрации и модели Буссинеска-Лява на основе теории обратных задач. Получены условия разрешимости и оценки устойчивости для решений обратных задач с точечными условиями переопределения об определении функции источника и параметров среды.
- Аналитически исследованы математические модели квазистационарных электромагнитных волн в анизотропных средах и нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости на основе теории обратных задач. Получены условия разрешимости и оценки устойчивости для решений обратных задач об определений параметров среды.
- На основе полученных теоретических результатов разработаны эффективные численные методы и алгоритмы поиска приближённых решений с помощью методов конечных элементов и конечных разностей.
- Реализованы в виде комплекса программ для решения задач на компьютере разработанные численные методы и алгоритмы, проведены вычислительные эксперименты на модельных примерах, проанализированы полученные результаты.

Таким образом, в работе решены все поставленные задачи и достигнута цель исследования.

Рекомендации

Таким образом, теоретические результаты работы развивают теорию обратных задач для уравнений соболевского типа. Приведенные схемы определения решения являются конструктивными и могут быть использованы при построении численных методов для нахождения решения. Результаты, полученные при исследовании данных математических моделей, могут быть полезны в теории

фильтрации и гидродинамике, физике. Представленные результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют об адекватности проведенного математического моделирования и эффективности выбранного численного метода решения обратных задач, что создает основу для дальнейшего развития численных исследований моделей соболевского типа.

Перспективы дальнейшей разработки темы

Представляет интерес более подробное аналитическое и численное исследование обратных задач для других математических моделей, описываемых уравнениями соболевского типа третьего и четвертого порядка. В частности, модель Соболева, модель гравитационно-гироскопических волн, модель двухфазной фильтрации для двухпористой среды и другие.

В работе не нашли отражение вопросы, связанные с аналитическим и численным исследованием математических моделей, описываемых уравнениями соболевского типа высокого порядка, например модельные задачи линейной теории плазмы и линейной теории спиновых волн.

Интересны приложения полученных результатов к решению практических задач фильтрации, возникающих при разработке нефтяных месторождений и некоторых других задач.

СПИСОК РИСУНКОВ

2.1	Блок схема алгоритма численного решения обратных задач, с определением коэффициента средних гидравлических характеристик в математических моделях теории фильтрации.....	97
2.2	Блок схема процедуры расчета коэффициента пьезопроводности и функции источника в задачах фильтрации	99
2.3	Построение сеток с разным количеством узлов	101
2.4	Решение $u(x, y, 1)$	102
2.5	Приближенное решение $u(x, y, 1)$ при случайных возмущениях	102
2.6	График сравнения функции $k(t)$ (красный) и ее приближения(синий).....	103
2.7	График сравнения функции $k(t)$ (красный) и ее приближения(синий) при случайных возмущениях	103
2.8	График сравнения функции $k(t)$ (красный) и ее приближения(синий) для разных сеток.....	105
2.9	График сравнения функции $k(t)$ (красный) и ее приближения(синий) при случайных возмущениях 20%.....	106
2.10	Построение сеток	109
2.11	Построение функций q_1, q_2, q_3 при $N = 100$:	110
2.12	Построение функций q_1, q_2, q_3 при $N = 400$:	111
2.13	Результаты расчетов при случайных возмущениях 1%	111
3.1	Блок схема алгоритма численного определения параметров среды в математических моделях квазистационарных электромагнитных волн	135
3.2	Примеры построения сеток.....	136
3.3	Решение $u(x, y, 1)$ рассматриваемой задачи	137
3.4	Приближение решения $u(x, y, 1)$ при случайных возмущениях	137
3.5	Сравнение графиков функций (красный) и их приближения(синий)	138
3.6	Построение графиков функций при случайных возмущениях.....	138
A.1	Свидетельство № 2018614756. Программа численного определения коэффициента средних гидравлических характеристик в обратных задачах фильтрации.	167

А.2 Свидетельство № 2019613263. Программа численного определе- ния параметров среды в математических моделях квазилинейных электромагнитных волн	168
--	-----

СПИСОК ТАБЛИЦ

2.1	Результаты численных экспериментов (первая группа)	107
2.2	Результаты численных экспериментов (вторая группа)	107
2.3	Результаты численных экспериментов для второй группы, шаг по времени 0.002	108
3.1	Результаты численных экспериментов (первая группа)	139
3.2	Результаты численных экспериментов (вторая группа)	140

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена / Алифанов О.М. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
- [2] Асанов А. Обратная задача для операторного интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения / А. Асанов, Э.Р. Атаманов // Сиб. матем. журн. – 1995. – Т. 36, № 4. – С. 752-762
- [3] Баренблатт Г.И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. – М.: Недра, 1972. – 288 с.
- [4] Вабищевич П.Н. Численное решение одной обратной задачи фильтрации / Вабищевич П.Н., Васильев В.И., Васильева М.В., Никифоров Д.Я. // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157, № 4. – С. 79–89
- [5] Габов С.А. Задачи динамики стратифицированных жидкостей / С.А. Габов, А.Г. Свешников. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
- [6] Габов С.А. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн / С.А. Габов, А.Г. Свешников. – М.: Наука, 1990. – 344 с.
- [7] Габов С.А. Новые задачи математической теории волн / С.А. Габов. – М.: Наука, 1998. – 448 с.
- [8] Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас – М.: Мир, 1978. – 336 с.
- [9] Гальперн С.А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными / С.А. Гальперн // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 119, № 4. – С. 640-643
- [10] Гилбарг Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989. – 646 с.

- [11] Гладков А.Л. Единственность решения задачи Коши для некоторых квазилинейных псевдопараболических уравнений / А.Л. Гладков // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60, № 3. – С. 356-362
- [12] Денисов А.М. Обратная задача для квазилинейного интегродифференциального уравнения / А.М. Денисов // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 10. – С. 1350-1356
- [13] Егоров И.Е. Неклассические дифференциально - операторные уравнения / И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов – Новосибирск: Наука, 2000. – 336 с.
- [14] Загребина С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 5-24
- [15] Загребина С.А. Начально-конечная задача для уравнений Соболевского типа с сильно (L,p) -радиальным оператором / С.А. Загребина // Математические заметки СВФУ. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 39-48
- [16] Загребина С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 5-24
- [17] Замышляева А.А. Математические модели соболевского типа высокого порядка / Замышляева А.А. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 5–28
- [18] Замышляева А.А. Нахождение численного решения задачи Коши - Дирихле для уравнения Буссинеска - Лява методом конечных разностей. / Замышляева А.А., Суровцев С.В. // Вестник Самарского университета. Естественно-научная серия. – 2015. – Т. 128, № 6. – С. 76-81
- [19] Замышляева А.А. Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия "Матема-

- тическое моделирование и программирование". – 2011. – Т. 10, № 37. – С. 22-29
- [20] Замышляева А.А. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2010. – Т. 5, № 27. – С. 23-31
- [21] Замышляева А.А. О численном исследовании математической модели распространения волн на мелкой воде / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20, № 1. – С. 27-34 and bib96
- [22] Замышляева А.А. Об алгоритме численного моделирования волн Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия "Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника". – 2013. – Т. 13, № 4. – С. 24-32
- [23] Замышляева А.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска–Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2012. – Т. 11, № 5. – С. 13-24
- [24] Замышляева А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычислит. технол. – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 45-54
- [25] Замышляева А.А. Численное моделирование нелинейных волн в теории мелкой воды на основе IMBQ уравнения. / Замышляева А.А., Бычков Е.В., Цыпленкова О.Н. // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. – 2016. – Т. 84, № 2. – С. 9-12
- [26] Замышляева А.А. Линейные уравнения соболевского типа высшего порядка: моногр. / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.
- [27] Иванова Н.Д. Обратные и нелокальные задачи для вырожденных эволюционных уравнений: Дисс. канд. физ.-мат. наук. / Н.Д. Иванова. – Екатеринбург, 2015. – 130 с.

- [28] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
- [29] Келлер А.В. Алгоритм решения задачи Шоултера-Сидорова для моделей леонтьевского типа / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2011. – Т. 7, № 4. – С. 40-46
- [30] Келлер А.В. Некоторые обобщения задачи Шоултера - Сидорова для моделей соболевского типа / Келлер А.В., Загребина С.А. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 5-23
- [31] Келлер А.В. Численное решение задач оптимального и жесткого управления для одной нестационарной системы леонтьевского типа. / Келлер А.В., Сагадеева М.А. // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2013. – Т. 162, № 19. – С. 57-66
- [32] Келлер А.В. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. Т. 1. – С. 107-115
- [33] Кожанов А.И. Линейные обратные задачи для одного класса уравнений соболевского типа / А.И. Кожанов, Г.В. Намсараева // Челяб. физ.-матем. журн. – 2018. – Т. 3, № 2. – С. 153–171
- [34] Кожанов А.И. Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником / А.И. Кожанов // Матем. заметки. – 1999. – Т. 65, № 1. – С. 70-75
- [35] Кожанов А.И. О разрешимости обратных задач восстановления коэффициентов в уравнениях составного типа / Кожанов А.И. // Математика, механика, информатика. – 2008. – Т. 8, № 3. – С. 81–99
- [36] Кожанов А.И. О свойствах решений для одного класса псевдопараболических уравнений / А.И. Кожанов // ДАН СССР. – 1992. – Т. 326, № 5. – С. 781-786

- [37] Кожанов А.И. Обратные задачи определения граничных режимов для некоторых уравнений соболевского типа / А.И. Кожанов // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2016. – Т. 9, № 2. – С. 37-45
- [38] Кожанов А.И. Существование "почти регулярных" решений граничной задачи для одного класса линейных соболевских уравнений нечетного порядка / А.И. Кожанов // Матем. заметки Якут. гос. университета. – 1997. – Т. 4, № 1. – С. 29-37
- [39] Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка / А.И. Кожанов. – Новосибирск: Изд. НГУ, 1990. – 132 с.
- [40] Кондюков А.О. Фазовое пространство модели магнитогидродинамики ненулевого порядка / Сукачева Т.Г., Кондюков А.О. // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 8. – С. 1083
- [41] Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1964. – 540 с.
- [42] Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
- [43] Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – 621 с.
- [44] Лаптев Г.Г. Об отсутствии решений одного класса сингулярных полулинейных дифференциальных неравенств / Г.Г. Лаптев // Труды МИАН. – 2001. – Т. 232. – С. 223-235
- [45] Любанова А.Ш. Идентификация коэффициента в старшем члене псевдопараболического уравнения типа фильтрации / А.Ш. Любанова // Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 6. – С. 1315-1330
- [46] Ляв А. Математическая теория упругости / А. Ляв. – Объединенное научно-техническое издательство НКТП, Москва, 1935. – 674 с.

- [47] Манакова Н.А. Неклассические уравнения математической физики. Фазовые пространства полулинейных уравнений соболевского типа / Манакова Н.А., Свиридюк Г.А. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Механика. Физика. – 2016. – Т. 8, № 4. – С. 31–51
- [48] Манакова Н.А. Задачи оптимального управления для уравнений соболевского типа: моногр. / Н.А. Манакова. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.
- [49] Мегралиев Я.Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для уравнения Бусинеска–Лява / Я.Т. Мегралиев // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. – 2013. – Т. 4, № 6. – С. 485-494
- [50] Митидиери Э. Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных / Э. Митидиери, С.И. Похожаев. – Труды МИАН, 234, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2001. – 383 с.
- [51] Намсараева Г.В. Линейные обратные задачи для некоторых аналогов уравнения Бусинеска / Г.В. Намсараева // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21, № 2. – С. 47-59
- [52] Прилепко А.И. Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз-управление и прогноз-наблюдение эволюционных уравнений / А.И. Прилепко // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 11. – С. 1560-1571
- [53] Сагадеева М.А. Разрешимость нестационарной задачи теории фильтрации / М.А. Сагадеева // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2012. – Т. 18. – С. 45-56
- [54] Сагадеева М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа: моногр. / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 139 с.

- [55] Свешников А.Г. К задаче дирихле для двумерного уравнения ионно-звуковых волн / А.Б. Альшин, Ю.Д. Плетнер, А.Г. Свешников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38, № 10. – С. 1743-1450
- [56] Свешников А.Г. Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – Москва: ФМЛ, 2007. – 736 с.
- [57] Свиридюк Г.А. Неклассические модели математической физики / Свиридюк Г.А., Загребина С.А. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – Т. 299, № 40. – С. 7–18
- [58] Свиридюк Г.А. Численное исследование одной модели Фитц Хью - Нагумо / Свиридюк Г.А., Манакова Н.А., Гаврилова О.В. // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. – 2016. – Т. 92, № 10. – С. 3-6
- [59] Сукачева Т.Г. Нестационарная линеаризованная модель движения несжимаемой вязкоупругой жидкости высокого порядка / Сукачева Т.Г. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2009. – Т. 150, № 17. – С. 86–93
- [60] Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Наука, 1980. – 664 с.
- [61] Фаязова З.К. Граничное управление для псевдопараболического уравнения / З.К. Фаязова // Математические заметки СВФУ. – 2018. – Т. 25, № 2. – С. 40-46
- [62] Федоров В.Е. Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений соболевского типа в банаховых и локально выпуклых пространствах: дисс. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / В.Е. Федоров – Челябинск, 2005. – 271 с.
- [63] Щипанов А.А. Модель двухфазной фильтрации в деформируемом трещиновато-пористом пласте / Щипанов А.А. // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Геология. Нефтегазовое и горное дело. – 2004. – Т. 3, № 5. – С. 92-98

- [64] Abaseeva N. Identification problems for nonclassical integro-differential parabolic equations / N. Abaseeva, A. Lorenzi // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2005. – Vol. 13, № 6. – P. 513-535
- [65] Al-Horani M. Degenerate 1-rst order identification problems in Banach spaces / M. Al-Horani, A. Favini // Differential Equations Inverse and Direct Problems. – 2006. – P. 1-15
- [66] Amann H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces / H. Amann // Glasnik matematicki. – 2000. – Vol. 35, № 5. – P. 161-177
- [67] Amann H. Operator-valued Foutier multipliers, vector-valued Besov spaces and applications / H. Amann // Mathem. Nachr. – 1997. – Vol. 186. – P. 5-56
- [68] Amirali I. Explicit Finite Difference Methods for the Delay Pseudoparabolic Equations / I. Amirali, G.M. Amiraliyev, M. Cakir, E. Cimen // The Scientific World Journal. – 2014. Vol. 2014. – <https://doi.org/10.1155/2014/497393>
- [69] Asanov A. Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations / A. Asanov, E.R. Atamanov. – Series: Inverse and Ill-Posed Problems, De Gruyter, 1997. – 152 p.
- [70] Avdonin S.A. Inverse Problems for the Heat Equation with Memory / S.A. Avdonin, S.A.Ivanov, J. Wang // Mathematical Physics. – 2016. – <https://arxiv.org/abs/1612.02129>
- [71] Barenblatt G.I. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks / G.I. Barenblatt, Iu.P. Zheltov, I.N. Kochina // Appl. Math. Mech. – 1960. – Vol. 24, № 5 – P. 852-864
- [72] Bebernes J. Global existence and finite time blow-up for a class of nonlocal parabolic problems / J. Bebernes, A.A. Lacey // Adv. differ. equations. – 1997. – Vol. 2. – P. 927-954
- [73] Belov Yu.Ya. Inverse problems for parabolic equations / Yu.Ya. Belov. – Utrecht: VSP, 2002. – 211 p.

- [74] Beshtokov M.Kh. Differential and Difference Boundary Value Problem for Loaded Third-Order Pseudo-Parabolic Differential Equations and Difference Methods for Their Numerical Solution / M.Kh. Beshtokov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2017. – Vol. 57. – P. 1973-1993
- [75] Beshtokov M.Kh. On the numerical solution of a nonlocal boundary value problem for a degenerating pseudoparabolic equation / M.Kh. Beshtokov // Differential Equations. – 2016. – Vol. 52. – P. 1341-1354
- [76] Bukhgeim A.L. Global convergence of the Newton method in the inverse problems of memory reconstruction / A.L. Bukhgeim, N.I. Kalinina // Siber. Math. J. – 1997. – Vol. 38. – P. 881-895
- [77] Chen Yu. Remark on the global existence for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equations in arbitrary dimension / Yu. Chen // Appl. Anal. – 1988. – Vol. 30. – P. 1-15
- [78] Chung S.K. Numerical methods for the Rosenau equation / S.K. Chung, A.K. Pani // Appl. Anal. – 2001. – Vol. 77 – P. 100-116
- [79] Colombo F. A global in time existence and uniqueness result for a semilinear integrodifferential parabolic inverse problem in Sobolev spaces / F. Colombo, D. Guidetti // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2007. – Vol. 17, № 4. – P. 537-565
- [80] Colombo F. An Inverse Problem for a Phase-field Model in Sobolev Spaces. Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems / F. Colombo, D. Guidetti // Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Basel: Birkhauser Verlag. – 2005. – Vol. 64. – P. 189-510
- [81] Colombo F. On some methods to solve integro-differential inverse problems of parabolic type / F. Colombo // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2015. – Vol. 8, № 3. – P. 95-115
- [82] Cuesta C.M. Numerical schemes for a pseudo-parabolic Burgers equation / C.M. Cuesta, I.S. Pop // Discontinuous data and long-time behaviour J. of Comp. and Appl. Math. – 2009. – Vol. 224. – P. 269-283

- [83] Demidenko G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – Marcel Dekker, Inc., New-York, 2003. – 632 p.
- [84] Denk R. Optimal $L_p - L_q$ -estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data / R. Denk, M. Hieber, J. Pruss // Math. Z. – 2007. – Vol. 257, № 1. – P. 193-224
- [85] Di Benedetto E. On the maximum principle for pseudoparabolic equations / E. Di Benedetto, M. Pierre // Indiana University Mathematical Journal. – 1981. – Vol. 30, № 6. – P. 821-854
- [86] Durdiev D.K. Inverse problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation in a bounded domain / D.K. Durdiev, Zh.Sh. Safarov // Mathematical notes. – 2015. – Vol. 97, № 6. – P. 867-877
- [87] Ewing R.E. Numerical solution of Sobolev partial differential equations / R.E. Ewing // Siam J. Numer. Anal. – 1975. – Vol. 12. – P. 345-363
- [88] Favini A. Identification problems for singular integro-differential equations of parabolic type II / A. Favini, A. Lorenzi // Nonlinear Analysis. – 2004. – Vol. 56, № 6. – P. 879-904
- [89] Favini A. Identification problems in singular integro-differential equations of parabolic type I / A. Favini, A. Lorenzi // Dynamics of continuous, discrete, and impulsive systems, series A: Mathematical Analysis. – 2005. – Vol. 12. – P. 303-328
- [90] Favini A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of "Noises" / Favini A., Sviridyuk G.A., Manakova N.A. // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – 697410, 8 pages.
- [91] Favini A. Linear Sobolev type equations with relatively p-radial operators in space of "noises". / Favini A., Sviridyuk G., Sagadeeva M. // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2016. – V. 13, № 6. – P. 4607–4621
- [92] Favini A. Multipoint initial-final value problems for dynamical Sobolev-type equations in the space of noises. / Favini A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A.

// Electronic Journal of Differential Equations. – 2018. – V. 2018, № 128. – P. 1–10

- [93] Favini A. One class of Sobolev type equations of higher order with additive "white noise". / Favini A., Sviridyuk G.A., Zamyshlyayeva A.A. // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2016. – V. 15, № 1. – P. 185–196
- [94] Favini A. Singular integro-differential equations of parabolic type and inverse problems / A. Favini, A. Lorenzi // Math. Models and Methods in Applied Sciences. – 2003. – Vol. 13. – P. 1745-1766
- [95] Favini A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – Marcel Dekker, Inc., New-York, 1999. – 336 p.
- [96] Favini A. Differential equations. Inverse and direct problems / A. Favini, A. Lorenzi. – Taylor & Francis Group, LLC, 2006. – 304 p.
- [97] Fedorov V.E. An inverse problem for linear Sobolev type equations / V.E. Fedorov, A.V. Nagumanova // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2004. – Vol. 12, № 5. – P. 1-9
- [98] Fedorov V.E. Exact null controllability of degenerate evolution equations with scalar control / V.E. Fedorov, B. Shklyar // Sbornik: Mathematics. – 2012. – Vol. 203, № 12. – P. 1817-1836
- [99] Fedorov V.E. On the Well-Posedness of the Prediction-Control Problem for Certain Systems of Equations / A.V. Urazaeva, V.E. Fedorov // Mathematical notes. – 2009. – Vol. 85, № 3. – P. 426-436
- [100] Fenglong Sun Finite time blow-up for a class of parabolic or pseudo-parabolic equations / Fenglong Sun, Lishan Liu, Yonghong Wu // Computers and Mathematics with Applications. – 2018. – Vol. 75. – <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.02.025>
- [101] Guezane-Lakoud A. Time-discretization schema for an integrodifferential Sobolev type equation with integral conditions / A. Guezane-Lakoud, D.

- Belakroum // *Applied Mathematics and Computation*. – 2012. – Vol. 218. – P. 4695-4702
- [102] Guidetti D. A mixed type identification problem related to a phase-field model with memory / D. Guidetti, A. Lorenzi // *Osaka J. Math.* – 2007. – Vol. 44. – P. 579–613
- [103] Hasan A. Boundary control for a class of pseudo-parabolic differential equations / A. Hasan, A.M. Aamo, B. Foss // *Systems & Control Letters*. – 2013. – Vol. 62. – P. 63-69
- [104] Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations / V. Isakov. – *Appl. Math. Sci.*, 127, 2006. – 358 p.
- [105] Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type / M. Ivanchov. – *Math. Studies. Monograph Series*, 2003. – 238 p.
- [106] Ivanova N.D. Inverse problem for a linearized quasi-stationary phase field model with the degeneracy / N.D. Ivanova // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: математическое моделирование и программирование*. – 2013. – Vol. 6, № 2. – P. 128–132
- [107] Janno J. Inverse Problems for Identification of Memory Kernels in Viscoelasticity / J. Janno, L. Von Wolfersdorf // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 1997. – Vol. 20. – P. 291-314
- [108] Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems / S.I. Kabanikhin. – De Gruyter. Berlin/Boston, 2012. – 459 p.
- [109] Kadchenko S.I. Numerical research of the barenblatt - zheltov - kochina stochastic model. / Kadchenko S.I., Soldatova E.A., Zagrebina S.A. // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*. – 2016. – Т. 9, № 2. – С. 117–123
- [110] Kano T. A mathematical justification for Korteweg-de Vries equation and Boussinesq equation of water surface waves / T. Kano, T. Nashida // *Osaka J. Math.* – 1986. – Vol. 23 № 2. – P. 389-413

- [111] Kelbaliyev G.I. Transport Phenomena in Dispersed Media / G.I. Kelbaliyev, D.B. Tagiyev, S.R. Rasulov – Boca Raton: CRC Press, 2019. – 456 p.
- [112] Khompysh K. Inverse Problem for 1D Pseudo-parabolic Equation / Khompysh K., Kalmenov T., Nursultanov E., Ruzhansky M., Sadybekov M. // Functional Analysis in Interdisciplinary Applications. FAIA 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2017. – V. 216. – P. 382-387
- [113] Khompysh K. Inverse Problem with Integral Overdetermination for System of Equations of Kelvin-Voight Fluids / K. Khompysh // Advanced Materials Research. – 2013. – Vol. 705. – P. 15-20
- [114] Khompysh Kh. An Inverse Problem of Identifying the Coefficient in Kelvin-Voight Equations (integro-differential) / U.U. Abylkairov, Kh. Khompysh // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 9, № 102. – P. 5079 - 5088
- [115] Khompysh Kh. Inverse Problem with Integral Overdetermination for System of Equations of Kelvin-Voight Fluids / Kh. Khompysh // Advanced Materials Research. – 2013. – Vol. 705. – P. 15-20
- [116] Kondyukov A.O. Computational experiment for a class of mathematical models of magnetohydrodynamics. / Kondyukov A.O., Sukacheva T.G., Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2017. – Т. 10, № 1. – С. 149-155
- [117] Kovaleva L.A. The Barenblatt–Zheltov–Kochina equation with boundary neumann condition and multipoint initial-final value condition / Kovaleva L.A., Soldatova E.A., Zagrebina S.A. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Механика. Физика. – 2019. – Т. 11, № 2. – С. 14–19
- [118] Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems / A.I. Kozhanov. – Utrecht: VSP, 1999. – 171 p.
- [119] Ladyzhenskaya O.A. Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type / O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'tseva. – Translations of

- Mathematical Monographs. American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 1968. – 648 p.
- [120] Lorenzi A. Direct and inverse problems in the theory of materials with memory / A. Lorenzi, I. Paparone // *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*. – 1992. – Vol. 87. – P. 105-138
- [121] Lorenzi A. Stabilization of the solution to the identification problem of the source function for one-dimensional parabolic equation / A. Lorenzi, H. Tanabe // *Doklady Mathematics*. – 2009. – Vol. 79, № 1. – P. 70-72
- [122] Lunardi A. Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems / A. Lunardi. – *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, Basel: Birkhauser, 1995. – 424 p.
- [123] Luo Z.D. A reduced-order extrapolated finite difference iterative scheme based on POD method for 2D Sobolev equation / Z.D. Luo, F. Teng // *Applied Mathematics and Computation*. – 2018. – Vol. 329. – P. 374-383
- [124] Lyubanova A.Sh. Inverse problems for the stationary and pseudoparabolic equations of diffusion / A.Sh. Lyubanova, A.V. Velisevich // *Applicable Analysis*. – 2018. – DOI: 10.1080/00036811.2018.1442001
- [125] Lyubanova A.Sh. On inverse problems for pseudoparabolic and parabolic equations of filtration / A.Sh. Lyubanova, A. Tani // *Inverse problems in science and engineering*. – 2011. – Vol. 19, № 7. – P. 1023-1042
- [126] Lyubanova A.Sh. The Inverse Problem for the Nonlinear Pseudoparabolic Equation of Filtration Type / A.Sh. Lyubanova // *J. of Siber. Federal University. Mathematics & Physics*. – 2017. – Vol. 10, № 1. – P. 4-15
- [127] Mamayusupov M.Sh. The problem of determining coefficients of a pseudoparabolic equation / M.Sh. Mamayusupov // *Studies in Integro-differential Equations*, Ilim, Frunze. – 1983. – Vol. 16. – P. 290-297
- [128] Maugeri A. Elliptic and parabolic equations with discontinuous coefficients / Maugeri A., Palagachev D.K., Softova L.G. – Berlin: Wiley-VCH Verlag, 2000.

- [129] Mehraliyev Ya.T. Determination of an Unknown Coefficient in the Third Order Pseudoparabolic Equation with non-Self-Adjoint Boundary Conditions / Ya.T. Mehraliyev, G.Kh. Shafiyeva // Journal of Applied Mathematics. – 2014. – Vol. 7. – <http://dx.doi.org/10.1155/2014/358696>
- [130] Mehraliyev Ya.T. On Solvability of an Inverse Boundary Value Problem for the Boussinesq–Love Equation / Ya.T. Mehraliyev // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2013. – Vol. 6, № 4. – P. 485–494
- [131] Nikolaevskiy V.N. Geomechanics and Fluidodynamics With Applications to Reservoir Engineering / Nikolaevskiy V.N. – Dordrecht: Springer Verlag, 1996. – 352 p.
- [132] Ozisik M.N. Inverse Heat Transfer. Fundamentals and Applications / Ozisik M.N., Orlande H.R.B. – 3rd Ed. – Taylor and Francis, 2000. – 314 p
- [133] Poincare H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation / H. Poincare // Acta Math. – 1887. – Vol. 7. – P. 259-380
- [134] Prilepko A.I. Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. – New-York: Marcel Dekker, 1999. – 744 p.
- [135] Pyatkov S.G. On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations / S.G. Pyatkov, M.L. Samkov // Sib. Adv. in Math. – 2012. – Vol. 22. – P. 287-302
- [136] Pyatkov S.G. On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations / S.G. Pyatkov, B.N. Tsybikov // Evol. Equat. – 2011. – Vol. 11, № 1. – P. 155-186
- [137] Pyatkov S.G. On some classes of inverse problems for parabolic equations / S.G. Pyatkov // J. Inv. Ill-Posed problems. – 2011. – Vol. 18. – P. 917-934
- [138] Rossby C.G. Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacement of the semi-permanent centers of action / C.G. Rossby // J. Marine Res. – 1939. – Vol. 2, № 1. – P. 38-55

- [139] Rundell W. Determination of an unknown nonhomogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data / W. Rundell // *Appl. Anal.* – 1980. – Vol. 10. – P. 231-242
- [140] Samarskii A.A. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics / A.A. Samarskii, P.N. Vabishchevich. – De Gruyter. Berlin/Boston, 2007. – 454 p.
- [141] Showalter R.E. Homogenization of a pseudoparabolic system / R.E. Showalter, M. Peszynska, Yi Son-Young // *Applicable Analysis*. – 2009. – Vol. 88, № 9. – P. 1265-1282
- [142] Showalter R.E. Local regularity of solutions of sobolevgalpern partial differential equations / R.E. Showalter // *Pacific journal of mathematics*. – 1970. – Vol. 34, № 3. – P. 781-787
- [143] Showalter R.E. Well-posed problems for a partial differential equation of order $2m + 1$ / R.E. Showalter // *Siam j. Math. Anal.* – 1970. – Vol. 1, № 2. – P. 214-231
- [144] Showalter R.E. A Nonlinear Parabolic-Sobolev Equation / R.E. Showalter // *Journal of mathematical analysis and application*. – 1975. – Vol. 50. – P. 183-190
- [145] Showalter R.E. Cauchy problem for hyper-parabolic partial differential equations / R.E. Showalter // *Trends in the Theory and Practice of Non-Linear Analysis*. – 1985. – Vol. 23, № 8. – P. 421-425
- [146] Showalter R.E. Degeneration evolution equations and applications / R.E. Showalter // *Indiana Univ. Math. J.* – 1974. – Vol. 23, № 8. – P. 655-677
- [147] Showalter R.E. Hilbert space methods for partial differential equations / R.E. Showalter. – Pitman; London; San Francisco; Melbourne, 1977. – 196 p.
- [148] Showalter R.E. Monotone Operators in Banach Space and nonlinear Partial Differentail Equations / R.E. Showalter // *Mathematical Surveys and Monographs*. – 1997. – Vol. 49. – P. 241-278

- [149] Showalter R.E. Pseudoparabolic Partial Differential Equations / R.E. Showalter, T.W. Ting // Siam j. Math. Anal. – 1970. – Vol. 1, № 1. – P. 1-26
- [150] Sobolev S.L. Methode nouvelle a resoudre le probleme de Cauchy pour les equations lineaires hyperboliques normales / S.L. Sobolev // Mat. Sb. – 1936. – Vol. 1. – P. 39-72
- [151] Sobolev S.L. On a theorem in functional analysis / S.L. Sobolev // Mat. Sb. – 1938. – Vol. 4. – P. 471-497
- [152] Sobolev S.L. Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics / S.L. Sobolev – Translations of Mathematical Monographs, 90. Providence, RI: Amer. Math. Soc, 1991. – 286 p.
- [153] Sukacheva T.G. Математические модели соболевского типа высокого порядка / Sukacheva T.G., Kondyukov A.O. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 4. – С. 5–21
- [154] Sviridyuk G.A. Multipoint initial-final problem for one class of Sobolev type models of higher order with additive "white noise"/ Sviridyuk G.A., Zamyshlyayeva A.A., Zagrebina S.A. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2018. – Т. 11, № 3. – С. 103-117
- [155] Sviridyuk G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator / G.A. Sviridyuk , V.E. Fedorov – Utrecht: VSP, 2003. – 226 p.
- [156] Triebel H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators / H. Triebel. – Amsterdam: North-Holland Mathematical Library, North-Holland Publishing, 1978. – 528 p.
- [157] Vabishchevich P.N. Splitting Schemes for Pseudoparabolic Equations / P.N. Vabishchevich, A.V. Grigor'ev // Differential Equations. – 2013. – Vol. 49. – P. 807-814
- [158] Whitham G. Linear and Nonlinear Waves / G. Whitham. – New York: Wiley, 1999. – 658 p.

- [159] Xia H. An optimized finite difference Crank-Nicolson iterative scheme for the 2D Sobolev equation / H. Xia, Z. Luo // *Advances in Difference Equations*. – 2017. – Vol. 196. – DOI: 10.1186/s13662-017-1253-8
- [160] Yaman M. Blow-up solution and stability to an inverse problem for a pseudo-parabolic equation / M. Yaman // *Journal of Inequalities and Applications*. – 2012. – Vol. 274. – P. 1-8
- [161] Zagrebina S.A. The multipoint initial-final value problems for linear Sobolev-type equations with relatively p-sectorial operator and additive "noise". / Zagrebina S., Sukacheva T., Sviridyuk G. // *Global and Stochastic Analysis*. – 2018. – V. 5, № 2. – P. 129–143
- [162] Zamyshlyayeva A.A. Computational experiment for one mathematical model of ion-acoustic waves. / Zamyshlyayeva A.A., Muravyev A.S. // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 127-132
- [163] Zamyshlyayeva A.A. Inverse problem for Sobolev type equation of the second order / Zamyshlyayeva A.A., Muravyev A.S. // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика*. – 2016. – Т. 8, № 3. – С. 5–12
- [164] Zamyshlyayeva A.A. Inverse problems for Sobolev type mathematical models / A.A. Zamyshlyayeva, A.V. Lut // *Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование"*. – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 25-34
- [165] Zamyshlyayeva A.A. Mathematical Models Based on Boussinesq Love equation / Zamyshlyayeva A.A., Bychkov E.V., Tsyplenkova O.N. // *Applied Mathematical Sciences*. – 2014. – Т. 8, № 110. – С. 5477–5483
- [166] Zamyshlyayeva A.A. Nonclassical equations of mathematical physics. linear Sobolev type equations of higher order / Zamyshlyayeva A.A., Sviridyuk G.A. // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика*. – 2016. – Т. 8, № 4. – С. 5–16

- [167] Zamyshlyayeva A.A. Numerical investigation of one Sobolev type mathematical model. / Zamyshlyayeva A.A., Surovtsev S.V. // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – Т. 2, № 3. – С. 72-80
- [168] Zamyshlyayeva A.A. The Cauchy problem for the Sobolev type equation of higher order / Zamyshlyayeva A.A., Bychkov E.V. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2018. – Т. 11, № 1. – С. 5–14

Публикации автора по теме диссертации

- [169] Шергин С.Н. О некоторых классах обратных задач для псевдопараболических уравнений / С.Н. Шергин, С.Г. Пятков // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21, № 2. – С. 106-116
- [170] Шергин С.Н. Некоторые математические модели фильтрационной теории / С.Н. Шергин, С.Г. Пятков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 105-116
- [171] Шергин С.Н. Обратные задачи для математических моделей соболевского типа / С.Н. Шергин, С.Г. Пятков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: математическое моделирование и программирование. – 2016. – Т. 9, № 2. – С. 75-89
- [172] Шергин С.Н. Обратные задачи для математической модели квазистационарных электромагнитных волн в анизотропных неметаллических средах с дисперсией / С.Н. Шергин, С.Г. Пятков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: математическое моделирование и программирование. – 2018. – Т. 11, № 1. – С. 44-59
- [173] Шергин С.Н. О некоторых коэффициентных обратных задачах с точечным переопределением для математических моделей фильтрации / С.Н. Шергин, С.Г. Пятков, Е.И. Сафонов // Вестник Южно-Уральского государственного

университета. Серия: математическое моделирование и программирование.
– 2019. – Т. 12, № 1. – С. 82-95

- [174] Shergin S.N. A numerical algorithm for solving inverse filtration problems with the pointwise overdetermination / Shergin S.N. // Journal of computational and engineering mathematics. – 2019. – Т. 6, № 3. – С. 39-53
- [175] Шергин С.Н., Пятков С.Г., Сафонов Е.И. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018614756. Программа численного определения коэффициента средних гидравлических характеристик в обратных задачах фильтрации. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 17 апреля 2018 г.
- [176] Шергин С.Н., Пятков С.Г., Сафонов Е.И. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019613263. Программа численного определения параметров среды в математических моделях квазилинейных электромагнитных волн. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 13 марта 2019 г.
- [177] Шергин С.Н. О решении некоторых обратных задач псевдопараболического типа Материалы 52-ой Международной научной студенческой конференции МНСК-2014. Математика. 11 - 18 апреля 2014 - Новосибирск: НГУ 2014. С. 103
- [178] Шергин С.Н., Пятков С.Г. О некоторых математических моделях теории фильтрации Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: Тезисы докладов. 22 – 27 июня 2015 - Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ 2015. С. 333
- [179] Шергин С.Н., Пятков С.Г. Некоторые классы обратных задач для уравнений соболевского типа Международная школа-конференция «Соболевские чтения». Тезисы докладов. 18-22 декабря 2016 - Новосибирск: Изд-во НГУ 2016. С. 165
- [180] Шергин С.Н. Обратные задачи для некоторых математических моделей соболевского типа Сборник трудов МКММ-2017, 04-08 июля 2017 - Якутск: Изд-во СВФУ 2017. С. 26

- [181] Шергин С.Н. Разрешимость некоторых классов обратных задач для уравнений соболевского типа Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции. 02-06 мая 2018 - Москва: Изд-во МАКС Пресс 2018. С. 242
- [182] Шергин С.Н. Некоторые обратные задачи для математической модели квазистационарных электромагнитных волн в анизотропных неметаллических средах с дисперсией Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Материалы международной научной конференции. 25-29 июня 2018 - Стерлитамак: Изд-во БГУ (Уфа) 2018. С. 371-373
- [183] Шергин С.Н. Численное решение некоторой коэффициентной обратной задачи фильтрации Инновационные, информационные и коммуникационные технологии. 1 - 10 октября 2018 г. Сочи 2018. С. 264-267
- [184] Шергин С.Н. Численное решение обратной задачи для уравнения квазистационарных электромагнитных волн Информационные технологии и системы. Тр. Седьмой Междунар. науч. конф. 12 - 16 марта 2019 - Ханты-Мансийск: Изд-во ЮНИИТ 2019. С. 44-49
- [185] Шергин С.Н. ДУММ. Сборник Тезисов российско-французского семинара. 25-29 августа 2019 - Ханты-Мансийск: Изд-во Югорский формат 2019. С. 66

ПРИЛОЖЕНИЕ А

**СВИДЕТЕЛЬСТВА О ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕГИСТРАЦИИ
ПРОГРАММ ДЛЯ ЭВМ**



Рисунок А.1 — Свидетельство № 2018614756. Программа численного
определения коэффициента средних гидравлических характеристик в обратных
задачах фильтрации.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2019613263

Программа численного определения параметров среды в
математических моделях квазилинейных
электромагнитных волн

Правообладатели: *Пятков Сергей Григорьевич (RU), Сафонов Егор
Иванович (RU), Шергин Сергей Николаевич (RU)*

Авторы: *Сафонов Егор Иванович (RU), Пятков Сергей Григорьевич
(RU), Шергин Сергей Николаевич (RU)*



Заявка № 2019612007

Дата поступления 21 февраля 2019 г.

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ 13 марта 2019 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Излиев Г.П. Излиев

Рисунок А.2 — Свидетельство № 2019613263. Программа численного определения параметров среды в математических моделях квазилинейных электромагнитных волн