

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
"Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)"

На правах рукописи



Конкина Александра Сергеевна

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
С МНОГОТОЧЕЧНЫМ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНЫМ  
УСЛОВИЕМ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук,  
доцент С.А. Загребина

Челябинск – 2019

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Обозначения и соглашения	4
Введение	6
<b>1 Теоретические основы исследования гидродинамических моделей</b>	<b>30</b>
1.1 Относительно $p$ -ограниченные операторы . . . . .	30
1.2 Голоморфные вырожденные группы операторов . . . . .	35
1.3 Относительно $p$ -секториальные операторы . . . . .	38
1.4 Единицы полугрупп . . . . .	41
1.5 Существование обратного оператора . . . . .	44
1.6 Задача Штурма - Лиувилля на геометрическом графе . . . . .	46
<b>2 Модель транспортного потока</b>	<b>51</b>
2.1 Математическая модель перекрестка . . . . .	51
2.2 Абстрактная модель . . . . .	54
2.3 Модификация математической модели транспортного потока в населенном пункте . . . . .	59
2.4 Алгоритм численного решения . . . . .	62
2.5 Описание программы для ЭВМ . . . . .	65
2.6 Вычислительный эксперимент . . . . .	66
<b>3 Линейная модель вязкой несжимаемой жидкости</b>	<b>84</b>
3.1 Относительно спектральные проекторы . . . . .	84
3.2 Абстрактная схема в случае $(L, p)$ -секториального оператора	86
3.3 Модель Навье – Стокса . . . . .	88
3.4 Методы численного исследования . . . . .	92
3.5 Описание программы для ЭВМ . . . . .	97
3.6 Вычислительный эксперимент . . . . .	102

Заключение	104
Список литературы	106
Приложение 1. Свидетельство о регистрации программного комплекса моделирования динамики вязкой несжимаемой жидкости	117
Приложение 2. Свидетельство о регистрации программного комплекса моделирования дорожного движения на перекрестке	118

## Обозначения и соглашения

Работа посвящена исследованию математических величин в приложении их к практическим результатам, поэтому вслед за типичными, классическими, принятыми в математической науке обозначениями и сокращениями принимаются нижеперечисленные обозначения для символов множества, фигурирующих в тексте диссертационного исследования как список известных наименований, таких как:

$\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел;

$\mathbb{R}$  – множество действительных чисел,

$\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ ,  $\bar{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$ ;

$\mathbb{C}$  – множество комплексных чисел;

$L_p(\Omega)$  – пространства Лебега;

$W_p^l(\Omega)$  – пространства Соболева и т.д.

Прописные буквы готического алфавита тут, как и в общих, классических исследованиях, занимающихся вопросами математического моделирования, маркируют любое из интересующих произвольных множеств. Латинский и греческий алфавиты частично (в области строчных букв) привлечены для именовании, что укладывается в общематематический подход к именованию элементов различных множеств.

Например,

$$\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$$

обозначает линейную оболочку векторов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ .

Под пространством в перечне данных обозначений и соглашений понимается множество, которое отличается от прочих множеств тем, что оно оснащено структурой какого-либо - алгебраического и (или) топологического вида.

Лаконичность и простота считывания смысла математических расчетов также обеспечивается принятыми в качестве обозначений множества опе-

раторов (множеств отображений множеств) прописные буквы, заимствованные из латинского алфавита, например:

$\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathfrak{F})$  – множество линейных непрерывных операторов, определенных на пространстве  $\mathcal{U}$  и действующих в пространство  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathfrak{F}) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{U})$  при  $\mathcal{U} \equiv \mathfrak{F}$ ;

$Cl(\mathcal{U}; \mathfrak{F})$  – множество линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве  $\mathcal{U}$  и действующих в пространство  $\mathfrak{F}$ ,  $Cl(\mathcal{U}; \mathfrak{F}) \equiv Cl(\mathcal{U})$  при  $\mathcal{U} \equiv \mathfrak{F}$ ;

литеры  $\mathbb{I}$  и  $\mathbb{O}$  выступают как соответственные обозначения «единичного» и «нулевого» операторов, чьи границы областей определения доступны для понимания из контекстуальной информации.

$\text{dom } A$  – область определения оператора  $A$ ,  $\text{im } A$  – образ оператора  $A$ .

В качестве финального замечания относительно соглашений и обозначений, отметим, что под символом  $\text{const}$  понимаются константы всех видов и разновидностей.

Все рассуждения проводятся в вещественных банаховых пространствах, однако при рассмотрении «спектральных» вопросов вводится их естественная комплексификация. Все контуры ориентированы движением «против часовой стрелки» и ограничивают область, лежащую «слева» при таком движении.

Обозначение  $\bullet$  находится в открывающей и завершающей доказательства позиции.

## Введение

**Актуальность.** В настоящее время активно изучаются гидродинамические модели [15, 16, 24, 25, 27, 34, 35, 43, 51, 52, 61], в основе которых лежат уравнения соболевского типа. Рассмотрим некоторые из них:

– система уравнений Навье – Стокса [52]

$$u_t = \nu \nabla^2 u - (u \cdot \nabla)u - \nabla p + f, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad (0.0.1)$$

моделирующая динамику скорости и давления вязкой несжимаемой жидкости;

– система уравнений Осколкова [28]

$$(\lambda - \nabla^2)u_t = \nu \nabla^2 u - (u \cdot \nabla)u - \nabla p + f, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad (0.0.2)$$

моделирующая динамику скорости и давления вязкоупругой несжимаемой жидкости.

В этих моделях за вязкость отвечает параметр  $\nu \in \mathbb{R}_+$ , для описания давления жидкости используется функция  $p = p(x, t)$ , вектор-функция  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ ,  $u_l = u_l(x, t)$ , соответствует скорости жидкости.

Рассмотрим теперь систему (0.0.2) на геометрическом графе [32], главным отличием которого является, что ребро имеет длину и площадь поперечного сечения [70].

$$\lambda u_{kt} - u_{ktxx} = \nu u_{kxx} + f_k. \quad (0.0.3)$$

Полученный одномерный аналог данной системы можно трактовать как изменение скорости транспортного потока [70], отождествляя в этом случае поток транспортных средств с гидродинамическим потоком. Средняя скорость потока транспортных средств является искомой функцией  $u_k = u_k(x, t)$ ,  $x \in [0, l_k]$ ,  $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$  ( $\equiv \{0\} \cup \mathbb{R}_+$ ). Функция внешней силы задана следующим образом  $f_k = f_k(x, t)$ ,  $(x, t) \in [0, l_k] \times \overline{\mathbb{R}}_+$ . Коэффициенты  $\lambda$  определяются через величину, обратную коэффициенту ретардации,

значения которого могут быть как положительными, так и отрицательными, следовательно  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Коэффициент  $\nu$  проецирует параметр вязкости поточного транспортного движения и характеризует его возможности для того, чтобы «гасить» кардинальную разницу при перепаде скоростей; в поле значений  $\nu \in \mathbb{R}_+$ ,  $d_j$  уделяется внимание пропускной способности  $j$  участка дороги. Если обратиться к аналогиям из реальной действительности, то наиболее подходящий иллюстрацией может служить движение потока автомобильного транспорта на дороге. Наиболее показательна динамическая переменная при остановке и возобновлении движения: запрещающий сигнал светофора провоцирует остановку всего потока, однако остановку не одновременную, постепенную. Замедление впереди идущих средств передвижения служит причиной постепенной потери скорости на всей площади потока до окончания торможения и полной остановки. Таким же образом после включения разрешающего сигнала на светофоре, поток начинает движение неоднородно: сначала стартуют впереди идущие, а по мере их продвижения стартуют накопившиеся за стоп-линией другие средства передвижения. При постепенном наборе скорости ритм движения со временем выравнивается, пока на пути потока вновь не возникнет запрещающий сигнал. В данной иллюстрации наблюдается в упрощенном виде эффект ретардации, который характерен для вязкоупругих несжимаемых жидкостей (см. детали в [61]). Будем рассматривать транспортный поток на перекрестке (рис. 1,2), где перекресток представлен в виде восьмиреберного геометрического графа.

Линеаризованные уравнения (0.0.1) и (0.0.3) с граничными условиями (аналогом граничных условий) вырожденные и редуцируются в определенных пространствах к уравнениям соболевского типа.

$$L\dot{u} = Mu + f. \quad (0.0.4)$$

Задача Коши

$$u(0) = u_0, \quad (0.0.5)$$

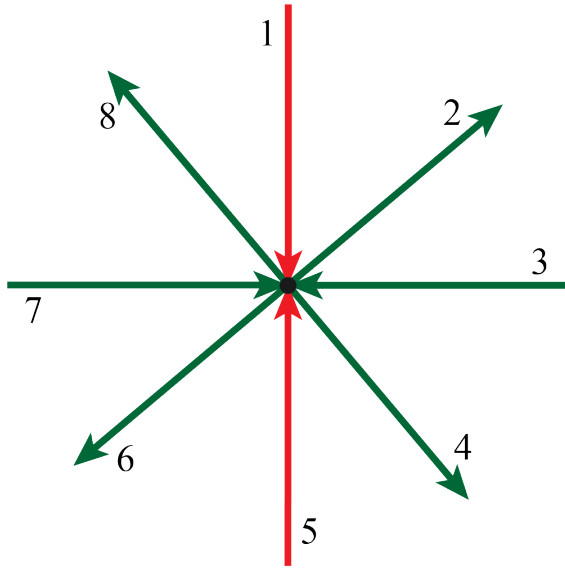


Рис. 1: Перекресток до смены сигнала светофора - геометрический граф  $\mathbf{G}_1$ , в период времени  $[\tau_{j-1}, \tau_j]$

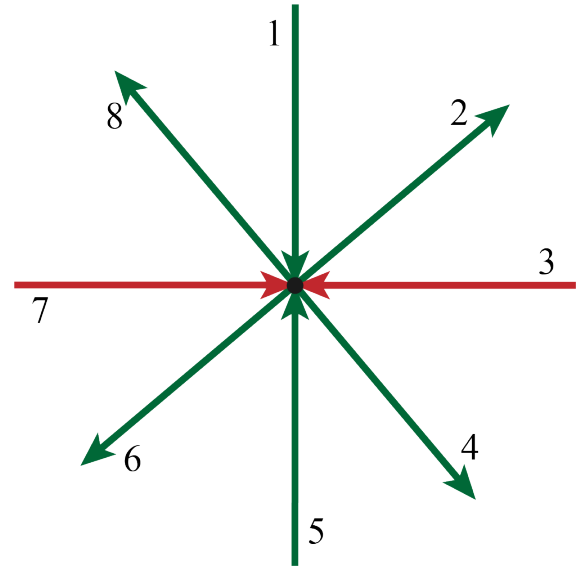


Рис. 2: Перекресток после смены сигнала светофора - геометрический граф  $\mathbf{G}_2$ , в период времени  $[\tau_j, \tau_{j+1}]$

является стандартной задачей для всех уравнений соболевского типа [36].

Так же в настоящее время активно изучается *задача Шоуолтера - Сидорова*

$$P(u(0) - u_0) = 0. \quad (0.0.6)$$

Если существует обратный оператор  $L$ , то задача Коши и задача Шоуолтера - Сидорова совпадают, следовательно их решения равны, отсюда можно сделать вывод, что условие (0.0.6) является обобщением условия (0.0.5). Кроме того, в ряде работ показано, что условие Шоуолтера - Сидорова более естественно, чем условие Коши.

Условие (0.0.6) впервые появилось в 1975 году в работе Р.Е. Шоуолтера (см. [64]). Для развития данного подхода автором было введено понятие «полугильбертовы пространства с нехаусдорфовой метрикой», которое детально было описано в работе [63]. В 1984 г. Н.А. Сидоров [49] пришел к задаче (0.0.6) другим способом. Проинтегрируем на промежутке  $(0, t)$  уравнение (2.6.1) формальным образом, тогда получим

$$L(u(t) - u_0) = \int_0^t M(u(s)) ds.$$



Из этого равенства можно получить условие (0.0.6).

Необходимо отметить, что использование условия Шоуолтера - Сидорова при численных исследованиях позволило получить ряд интересных результатов, таких как, например, сходимости приближенного решения к точному в конечномерном случае уравнений соболевского типа – системам леонтьевского типа [17], а также при решении задач оптимальных динамических измерений [53].

Обобщения условий Шоуолтера - Сидорова [6] для уравнений соболевского типа впервые появились в работах С.А. Загребинной [45], [46]. Если относительно спектральные проекторы, соответствующие отрицательной и положительной частям  $L$ -спектра оператора  $M$ , обозначить  $P_-$ ,  $P_+$  соответственно, то имеют место следующие условия

$$P_-u(0) = u_0, P_+u(T) = u_T, \quad (0.0.7)$$

или более общее условие

$$P_-(u(0) - u_0) = 0, P_+(u(T) - u_T) = 0. \quad (0.0.8)$$

В математической литературе, которая существует по данной теме, можно отметить несколько источников с исследованиями более раннего периода по смежным областям в решении математических задач. Однако отдельного внимания и упоминания заслуживает статья за авторством С.Г. Суворова [50], в которой подробно описано исследование по постановке и решению двухфазной задачи фильтрации при принятии условий (0.0.7) описывающих происходящее на верхнем слое любого разделенного потока. При регулярном повторении открывается, что подобный метод способен привести к приближению решения задачи с предъявленными условиями. По обобщенной разрешимости параболических задач в областях, не являющихся цилиндрическими, проводилось изучение, завершившееся результатами. В научной среде остается дискуссионным вопросом вероятность воплощения в виде вычислительного эксперимента через путь по вариаци-

онному методу. Среди других исследований наособицу стоит статья А.А. Панкова и Т.Е. Панковой [30], где результаты предыдущих исследований (Н.Н. Веригина и С.Г. Суворова [50]) преобразуются и развиваются, обозначая научную перспективу направления.

Исследование Xu Gen Qi [67], который занимался такими научными вопросами, как разностороннее рассмотрение и уместность внесения в общую систему блока с абстрактными уравнениями, существующими в рамках гильбертового пространства

$$T\xi'(x) = -A\xi(x), \quad (0 < x < +\infty),$$

$$Q_+\xi(0) = \xi_+, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \|\xi(x)\| = 0.$$

Стоит учитывать, что в данной системе операций  $T$  – выступает в роли инъективного ограниченного самосопряженного оператора,  $Q_+$  – ортогонального проектора на максимальную  $T$ -положительную версию  $T$ -инвариантного пространства,  $A$  – выступает ограниченным линейным оператором, удовлетворяющим некоторые условия (  $A$  не всегда должен быть самосопряженным,  $\mathbb{I} - A$  не всегда выступает компактным.)

В последующем научном движении с помощью погружения задачи в гильбертово пространство изменился взгляд на уравнение с граничными условиями [68]

$$T \frac{d\varphi(x)}{dx} = -A(x)\varphi(x) + f(x), \quad 0 < x < a \quad (0.0.9)$$

$$\begin{aligned} Q_+\varphi(0) &= \alpha Q_+(a) + g_+, \\ Q_-\varphi(a) &= \alpha Q_-(0) + g_-, \quad 0 < \alpha_1, \quad \alpha_2 \leq 1 \end{aligned} \quad (0.0.10)$$

в которых  $Q_+(Q_-)$  – выступает максимальной позитивной (негативной) спектральной проекцией самосопряженного оператора  $T$ , что применимо при расчетах, имитирующих построение перемещения нейронов. Работа в условиях, которые предполагают соответствие действительности условиям  $\|A(x)\| \leq M, \operatorname{Re}(A(\varphi), \varphi) \geq \varepsilon_0 \|\varphi\|^2$ , обязывает исследователя выстраивать

новую задачу, чтобы приблизиться к решению предыдущей, создавая таким образом цепь последовательных задач, поддающихся решению только в прямой последовательности. Таким образом, комплексное целое, состоящее из последовательно зависимых задач, при учетывании свойств оператора, таких, как обратимость  $(\mathbb{I} + T \frac{d}{dx})$  по классу функций и присущими им краевыми ограничениями, может быть преобразовано в систему интегральных уравнений, которые исследователю предстоит решить:

$$\varphi(x) = \int_0^a K(x, s)B(s)\varphi(s)ds + \int_0^a K(x, s)f(s)ds,$$

где  $B(x) = \mathbb{I} - A(x)$ ,  $K = K_+ + K_-$ , а операторы  $K_+$  ( $K_-$ ) выстраиваются посредством спектральной функции оператора  $T$  варьируются в зависимости от  $\alpha_1$  ( $\alpha_2$ ), а также работают как решение, которым обладает новая задача. Среди важных для понимания научной проблемы работ необходимо вспомнить Эдельштейна С.Л. [54], где  $\mathbb{R}$  производятся расчеты и подробный анализ дифференциального уравнения,

$$\frac{du}{dt} = kA(t)u + F,$$

которое существует и действует в условиях присутствия большого асимптотического параметра  $k$ , а также операторнозначного коэффициента. Для решения данного уравнения необходимо учитывать, что в соотнесении с каждым  $t$  пребывают и действуют два проектора  $P_+(t)$  ( $P_-(t)$ ), которые в свою очередь связывают с  $A(t)$ , и создают такие условия, в которых  $P_+(t) + P_-(t) = \mathbb{I}$ , получившиеся спектры  $\sigma_+(t)$  ( $\sigma_-(t)$ ) разделённых  $A_+(t)$  ( $A_-(t)$ ) операторов  $A(t)$  в каждом из подпространств  $B_+(t) = P_+(t)B$  ( $B_-(t) = P_-(t)B$ ) относятся в правую и левую замкнутую полуплоскость, вдобавок не имеют общих точек. Граничные условия поставленной задачи формулируются через  $\lim_{t \rightarrow +(-)\infty} P_{+(-)}(t)u(t) = 0$ . В подпространствах  $B_+(t)$  ( $B_-(t)$ ) становится возможным решить первоначальные задачи, решение которых необходимо для последующих расчетов, и уже они по мере решения позволяют продемонстрировать в асимптотическом представле-

нии все полученные ранее ответы для последних в получившейся очереди преобразований.

Отметим, что для развития математической науки в рассматриваемом вопросе интересный подход принадлежит С.Г. Пяткову и Н.Л. Абашеевой [1]. Они рассматривают  $E$  – комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и  $\|\cdot\|$  и  $B, L$  – линейные операторы, действующие в нем. Исследователи большое внимание уделяют уравнению

$$Bu_t = Lu + f, \quad t \in (0, T), \quad T \leq \infty. \quad (0.0.11)$$

Среди прочих условий учитывается предположение, что оператор  $B$  необратим, в частности, он может иметь ненулевое ядро, и он имеет произвольное расположение спектра. Подробно анализируется задача, в которой обозначенный оператор  $L$  обладает равномерной диссипативностью, т.е.  $\operatorname{Re}(-Lu, u) \geq \delta\|u\|^2$  для всех  $u \in \operatorname{dom} L$ . В отдельных рассмотрениях есть анализ более слабых условий, при которых оператор  $L$  диссипативный, т.е.  $\operatorname{Re}(-Lu, u) \geq 0$  каждому  $u \in \operatorname{dom} L$  и равномерно диссипативен на  $\operatorname{dom} L \cup M$ , и  $M$  – выступает некоторым подпространством конечной коразмерности. Происходит также анализ и исследование уравнений

$$B(t)u_t = L(t)u + f, \quad t \in (0, T), \quad (0.0.12)$$

$$B(t)u_t = G(t, u) + f, \quad t \in (0, T), \quad (0.0.13)$$

а  $B(t), L(t)$  – семейство линейных операторов, действующих в пространстве  $E$ ,  $G(t, \cdot)$  – семейство монотонных операторов, действующих в  $E$ . Где граничные условия принимают вид

$$E^+u(0) = u_0^+, \quad E^-u(T) = u_T^-, \quad (t < \infty), \quad (0.0.14)$$

$$E^+u(0) = u_0^+, \quad (t = \infty), \quad (0.0.15)$$

в котором надо понимать, что  $E^+$  и  $E^-$  служат спектральными проекторами по значению оператора  $B$ , а также соотносимы с обеими (положитель-

ной и отрицательной) частью спектра. Принятые предположения позволяют установить разрешимость граничных задач для уравнения (0.0.12), и уравнения (0.0.13).

Условие (0.0.7) в текстах трудов [45, 46] ошибочным образом фиксировался как «задача Веригина». Обозначенное именование потянулось вслед за статьёй А. А. Панкова, Т.Е. Панковой [30], но следует принять во внимание, что в данном контексте проектор  $P_-$  и проектор  $P_+$  выступали как спектральные проекторы по оператору  $L$ . Однако детальное изучение истории появления названия выявило тот факт, что условие, сформулированное поставленной Н.Н. Веригиным, не имеет ничего общего с условием (0.0.7). С другой стороны, в рамках теории уравнений с меняющимся направлением времени [62], С.Г. Пятковым были предложены «задачи сопряжения» (0.0.7). Здесь  $P_-$  и  $P_+$  были построены по отрицательной (положительной) части спектра соответственно спектральные проекторы оператора  $L$ .

Различия и неточности в терминологии, а также строгая, но конструктивная критика С.Г. Пяткова, привели к необходимости уточнения понятий и новой постановке условий. Поэтому С.А. Загребинной была поставлена и рассмотрена новая, так называемая «начально-конечная» задача (см. обзор [7]),

$$P_{in}(u(0) - u_0) = 0, \quad P_{fin}(u(\tau) - u_\tau) = 0. \quad (0.0.16)$$

В обзоре [7] приведены результаты о существовании и единственности решений задачи (0.0.4), (0.0.16), к тому же стоит отметить, что удачно реализована демонстрация, благодаря которой видно, что построение проектора  $P_{in}$  и проектора  $P_{fin}$  не всегда необходимо ограничиваться только одной частью (положительной или отрицательной) в относительном спектре, что традиционно учитывалось, как константа, ранее.

Не стоит обходить вниманием также теорию С.Г. Пяткова [62], лежащую в области фундаментальной науки. Эта теория разрабатывалась для

решения задачи (0.0.7), в которой  $P_-$  - является спектральным проектором оператора  $L$ , который, в свою очередь, построен по значениям, включающим только отрицательную часть спектра. С.Г. Пятков предложил называть подобные задачи "задачами сопряжения", что немаловажно в свете еще одного параметра: в таких уравнениях, на которых строятся подобные задачи, меняется вдобавок направление времени. Параметр времени получает нелинейное отображение в рамках задачи. Исходя из всего вышесказанного, можно заключить, что задачи, именуемые «задачами сопряжения», пусть не могут служить в качестве обобщения к задаче Шоуолтера - Сидорова. В то же время они могут выступать закономерным обобщением задачи Коши и становятся свежим перспективным направлением для теории уравнений соболевского типа. Труды С.Г. Пяткова, посвященные этой и другим математическим проблемам, продолжают традицию, открытую такими авторами: Р.Билсом, Н.В. Кисловым [18], В. Гринбергом, К.В.М. ван дер Ми, П.Ф. Звейфелом, П. Гриваром.

Рассмотренные и проанализированные известным исследователем Н.В. Кисловым [18] дифференциально-операторные уравнения вида

$$Au(t) + Bu(t) = f(t), \quad t \in (0, T) \quad (0.0.17)$$

в тех моментах, где оператор  $A$  и оператор  $B$  симметричны относительно друг друга в гильбертовом пространстве  $H$ , оператор  $B$ , кроме того, строго положителен, а оператор, в свою очередь,  $A$  обладает произвольным расположением спектра. Задача с граничными условиями (0.0.7) в которой  $P_+$  и  $P_-$  - выступают спектральными проекторами  $A$ , соответствующими положительной и отрицательной частям спектра, исследования в вариационной постановке. Кроме прочего, в труде Н.В.Кислова есть доказательство некоторой абстрактной теоремы, совпадающей по типу с теоремой Лакса - Мильграма, позволяющая доказывать существование и единственность слабых и сильных решений краевых задач (0.0.7), (0.0.17). Преложенная в качестве применимого алгоритма схема авторства Н.В. Кислова, применя-

ется также в отдельных случаях искажения изначально заданных условий, где оператор  $B$  диссипативен.

Р. Билс [55] занимался подробной разработкой в области изучения уравнения (0.0.17), когда  $A$  – ограниченный, самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве  $H$  с  $\ker A = \{0\}$ ,  $B$  положительно определенный, ограниченный и существует ограниченный  $B^{-1}$ . Поставлены краевые условия

$$P^+u(0) = u_0^+, \quad P^-u(T) = u_T^-, \quad T = \infty. \quad (0.0.18)$$

Исследователями от математической науки ранее применялись подходы, которые давали результат уже на первый взгляд. Одним из таких подходов выступал подход с вариациями и другим служил операторно-теоретический. Для первого подхода реализовалась ситуация, где крайние условия существования системы (0.0.17), (0.0.18) могут быть спровоцированы только внешними обстоятельствами, в свою очередь складывающимися из естественных рациональных причин. Теоремы, относящиеся к жизнеспособности решения задачи, признанного слабым, уже обрели своё доказательство в истории науки (0.0.17), (0.0.18). Таким же образом, были рассмотрены и доказаны способы поиска и нахождения результата в условиях, обозначивших слабое решение задачи, вплоть до убывающего до приближения к бесконечности (0.0.17), (0.0.18). Рассмотренный нами чуть более подробно, второй подход существует как часть конструктивного и результативного подхода к данным задачам вообще, а также состоит в сведении задачи (0.0.17), (0.0.18) к узкому кругу обозначенных нами и интересующих нас задач (0.0.17) и

$$P^+u(0) = v_0^+, \quad P^-u(T) = v_T^- \quad (T < \infty) \quad (0.0.19)$$

Так, рассмотрим условия подробнее и ближе:  $P^+, P^-$  - спектральные проекторы оператора  $L^{-1}B$ , самосопряженного относительно скалярного произведения  $(u, v)_1 = (Lu, v)$ . Решение представлено в явном виде. Эти результаты были обобщены на случай, когда оператор  $B$  не предполагался

ограниченным, а оператор  $L$  ограниченный, самосопряженный, неотрицательный с замкнутой областью значений  $R(L)$  и конечномерный ядром  $\ker L$ . Дополнительно предполагалось, что  $B(\ker L)$  инвариантно относительно оператора  $L$ .

В современном состоянии науки задача (0.0.4), (0.0.16) разнообразно и широко применяется в разработках, посвященных теоретическому блоку науки по уравнениям соболевского типа, в том числе в оптимальном управлении решениями уравнений соболевского типа первого и высокого порядка с начально-конечными условиями [5], [10], [11], [23].

В дальнейшем исследования также С.А. Загребинной для исследования ряда вырожденных моделей было предложено самое общее - многоточечное начально-конечное условие [8]. Рассмотрим в банаховых пространствах  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  многоточечное начально-конечное условие

$$\begin{aligned} P_j(u(\tau_j) - u_j) &= 0, \quad u_j \in \mathfrak{U}, \quad j = \overline{0, n}, \\ \tau_j &\in (a, b), \quad \tau_{j-1} < \tau_j, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (0.0.20)$$

для уравнений соболевского типа (0.0.4). Здесь операторы  $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ , а  $P_j$  выступают относительно спектральными проекторами, подробному рассмотрению которым будет посвящена дальнейшая часть данного исследования. Заметим, вдобавок, что приравнение  $n = 1$  приводит задачу (0.0.20) к виду начально-конечного расчёта (0.0.16), однако приравнение  $n = 0$  делает расчёт подобным задаче Шоултера - Сидорова (0.0.6). В этих условиях, натуральным и естественным общим выводом по этим двум задачам будет объединение их в многоточечную начально-конечную задачу, таким образом, это решение будет релевантно и в работе с задачей Коши (0.0.5).

**Целью работы** является аналитическое и численное исследование гидродинамических моделей с многоточечным начально-конечным условием с разработкой алгоритмов численных методов и комплексов программ.

Для достижения данной цели необходимо решить следующие **задачи**:



1. Исследовать математическую модель транспортного потока в системе перекрестков с учетом эффекта ретардации и доказать однозначную разрешимость многоточечной начально-конечной задачи для этой модели.

2. Исследовать линейную математическую модель Навье - Стокса и доказать однозначную разрешимость многоточечной начально-конечной задачи для этой модели.

3. Разработать алгоритмы численных методов решения многоточечных начально-конечных задач для исследуемых моделей.

4. Реализовать в виде программ для ЭВМ разработанные численные методы и провести вычислительные эксперименты для численного решения многоточечных начально-конечных задач для исследуемых моделей.

### **Научная новизна.**

#### *В области математического моделирования*

В диссертационной работе впервые: разработан новый метод моделирования транспортного потока в системе перекрестков с учетом эффекта ретардации, свойственный вязкоупругим несжимаемым жидкостям. Для этого были доказаны однозначные разрешимости для модели Осколкова на восьмирёберном геометрическом графе и линейной модели Навье - Стокса с многоточечным начально-конечным условием в области.

*В области численных методов* разработаны алгоритмы численных методов, позволяющие находить приближенные решения многоточечных начально-конечных задач для изучаемых вырожденных гидродинамических моделей.

*В области комплексов программ* разработаны программные комплексы нахождения приближенного решения вырожденных моделей с многоточечными начально-конечными условиями, позволяющие проводить вычислительные эксперименты для модельных задач.

**Методология и методы диссертационного исследования.** Исследования, проведенные в работе, опираются на методологию уравнений со-

болевского типа, разработанную Г.А. Свиридюком [38, 41]. Сюда включается метод Г.А. Свиридюка разрешающих (полу)групп операторов; теория графов для уравнений соболевского типа, заложенная Г.А. Свиридюком [44] и развитой его учениками (см., например, [3, 14, 47, 48]). В ее рамках были проведены редукции математической модели транспортного потока и модели Навье - Стокса к абстрактным уравнениям соболевского типа, которые были дополнены соответствующими многоточечными начально-конечными условиями [8]. Задействованный для создания алгоритмической системы по численным методам, метод Галеркина (модифицированный), прежде описывался в работах автора данного исследования [72, 73].

**Теоретическая и практическая значимость.** Значимость результатов обусловлена решением актуальных задач теории ньютоновских и неньютоновских жидкостей с применением современного математического аппарата. Теоретические положения, достигнутые и проверенные в процессе работы над исследованием, служат дополнением теоретической базы в рамках раздела, посвященного общей теории линейных моделей (соболевский тип). По итогу исследования обрела однозначное доказательство однозначная разрешимость многоточечных начально-конечных задач для математических моделей Навье – Стокса и движения транспортного потока. в использовании и приложении достигнутых в исследовании результатов к различным научным и предметным областям, где необходимо как можно точнее моделировать движение гидродинамического потока. Таким образом, результаты диссертационного исследования являются полезными для развития общей теории уравнений соболевского типа, теории многоточечных начально-конечных задач.

Практическая значимость работы заключается в применимости алгоритмов численных методов и комплексов программ для решения прикладных задач в динамической метеорологии для описания движения воздушных масс атмосферы, в частности, при формировании прогноза погоды.

Модель движения транспортного потока может быть использована для разработки навигационных программ. Разработанные алгоритмы численных решений рассматриваемых задач и реализованные в виде программных комплексов в вычислительной среде Maple, могут быть использованы в дальнейшем для исследования других вырожденных математических моделей.

### **Степень разработанности темы исследования.**

В настоящее время до сих пор не нашел своего ответа вопрос относительно нахождения и вообще реальности такого решения для задачи Коши - Дирихле в системе уравнений (0.0.2) и, как следствие, (0.0.1). Проблема существования классического решения в размерности  $n = 2, 3, 4$  этой задачи оказалась настолько трудной, что она вошла в списки наиболее тяжелых математических проблем нынешнего века и за ее решение назначена награда в один миллион долларов. Поскольку все попытки исследователей перечислить в данной диссертации невозможно из-за ограниченного объема, ограничимся лишь только исследованиями, с подходом, близким к этому.

Прежде всего необходимо упомянуть исследования Т.Г. Сукачевой и ее учеников. В докторской диссертации [51] исследована разрешимость неавтономные полулинейные уравнения соболевского типа (0.0.4), причем для изучения их множества допустимых начальных данных задачи Коши разработан метод конфигурационного пространства. Этот метод применяется для исследования динамических и эволюционных моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей с условием Коши. В монографии Т.Г. Сукачевой [25] исследуются математические модели вязкоупругих несжимаемых жидкостей ненулевого порядка проводится в рамках теории разрешимости задачи Коши для автономных полулинейных уравнений соболевского типа. Получены теоремы существования решений соответствующих начально-краевых задач, являющихся квазистационарными полутраекто-

риями, а также дано описание соответствующих фазовых пространств.

В исследование предлагается заменить задачу Коши - Дирихле более общей многоточечной начально - конечной задачей с граничным условием Дирихле, что позволит доказать однозначную разрешимость системы уравнений Навье - Стокса.

Так же активно в мире изучается модель транспортного потока (0.0.3), а в связи с проблемой образования предзаторных и заторных ситуаций в населенных пунктах, соответственно, эти исследования также актуальны. Существует несколько подходов математического моделирования поведения движения автотранспорта. Отметим наиболее распространенные из них: на основе теории клеточных автоматов, микроскопический, макроскопический.

Теория клеточных автоматов возникла в середине прошлого века. Одним из ее разработчиков был Дж. фон Нейман,<sup>1</sup> предложивший двумерный клеточный автомат. Позже теорию клеточных автоматов стали использовать при построении моделей транспортного потока. Микроскопический подход моделирует поведение отдельного транспортного средства, здесь в явном виде задаются координаты местоположения каждого автомобиля, его скорость, ускорение [2]. Базовая модель такого подхода - «Следование за лидером» [31]. Она основана на предположении, что имеется связь между «ведомым» и «ведущим» автомобилями, и поведение первого сильно зависит от действий второго. Третий подход – макроскопический, с его помощью строятся модели-аналоги, и транспортный поток рассматривается как гидродинамический, или газодинамический поток. При применении данного подхода можно найти время или интенсивность движения, среднюю скорость, уровень загрузки сети. Одним из создателей данного подхода является А.Б. Куржанский [20], который транспортный поток моделирует системой Навье - Стокса.

---

<sup>1</sup>Дж. фон Нейман, Теория самовоспроизводящихся автоматов. М.: «Мир», 1971.

В исследованной области науки уже применялась в моделировании система уравнений Навье - Стокса, которая учитывает среди параметров системы лишь вязкость и несжимаемость потока, однако этот подход е до конца точен и не может абсолютно достоверно отразить движение потока - среди важных параметров не учитывается упругость. Помимо модели Навье-Стокса принято использовать уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

– для описания отдельных процессов гидродинамики или ряда математических моделей, главная цель которых – выявить плотность в потоке транспорта, обозначенного как  $u(x, t)$ . Составляющая уравнения, которая обозначает процесс появления «пробок» –  $uu_x$ . Процесс учитывает разную скорость движения машин, где едущие с высокой скоростью приближаются к медленным, отчего и происходит неравномерное нарастание плотности потока  $u(x, t)$ . Другим параметром, который рассматривается в уравнении Бюргерса, выступает  $\nu u_{xx}$ , который учитывает ширину этого неравномерного нарастания плотности на конечном этапе его действия. Данный параметр, в свою очередь, обусловлен технологией движения в потоке, то есть тем, что автомобили должны соблюдать дистанцию и не сталкиваться друг с другом. Другой важный параметр – «вязкость» – и его величину для приведённой системы показывает коэффициент  $\nu$  [22]. Для построения адекватной действительности модели более оправдано использование системы уравнений Осколкова. Считается система уравнений Осколкова более точной и подходящей для реализации целей работы, она совмещает в себе параметры двух предыдущих модели, таких как вязкость, несжимаемость, упругость, это предусмотренная создателем уравнения возможность представить исследуемый объект на геометрическом графе, который значительно отличается от прочих схем возможностью постановки в соответствие для каждого ребра пары, состоящей из положительных чисел, в свою очередь соотнесённых (релевантно для нас) с его «длиной» и «шириной».

Так как в исследовании этого предмета исходят из фундаментальной теории уравнений соболевского типа (которая была разработана Г.А. Свиридюком и развитая позже его учениками), следует предварительно немного уточнить информацию по самим уравнениям соболевского типа. В современном состоянии математическая наука располагает двумя подходами к изучению заявленных уравнений. Сущность первого подхода состоит в изучении и выявлении возможности поиска разрешимости по начально-краевым задачам в применении их к уравнениям и (или) системам уравнений среди частных производных. В рамках первого подхода обычно используют коэрцитивные оценки в совопусности с теоретическим положением - теоремой о неподвижной точке. Среди исследований подобного типа стоит отметить исследования, которые проводил В.Н. Врагов и его ученики: А.И. Кожанова, С.Г. Пяткова [60]; А.П. Осколков [27, 28] с его учениками [29]; Г.В. Демиденко [57] а также многих других исследователей с их результатами по близким или аналогичным тематическим блокам [56, 66].

Второй подход заключается в исследовании абстрактного операторного уравнения вида (0.0.2), для него изучаются вопросы существования и единственности решения различных начальных задач, и др. Полученные абстрактные результаты применяются для разрешимости конкретных дифференциальных уравнений в частных производных с начально-краевыми условиями, таких, как например, (0.0.1) - (0.0.3), которые служат их иллюстративными примерами. Можно перечислить научные коллективы, работающие русле данного подхода: екатеринбургская научная школа И.В. Мельниковой [26]; иркутская научная школа Н.А. Сидорова [59], московский коллектив, возглавляемый в настоящее время М.О. Корпусовым [21], а так же иностранные исследователи R.E. Showalter (США) [64], A. Favini (Италия) и A. Yagi (Япония) [58], и многие другие.

В русле этого подхода лежат фундаментальные исследования абстрактного операторного уравнения (0.0.4) челябинской школы Г.А. Свиридюка

[9, 12, 25, 65]. Генерально-общим понятием, к которому апеллируют исследования данной области, является понятие «фазовое пространство», которое расшифровывается по уравнению (0.0.4). В силу того, что при рассмотрении уравнений соболевского типа была выявлена их характерная черта - наличие яркого феномена «несуществования» и «неединственности» для совокупности результатов и решений относительно задачи Коши при подобранных произвольно исходных данных, то выделение и изучение структуры фазового пространства важный вопрос. Первое знакомство с термином «фазовое пространство» в текущем значении произошло в текстах трудов [39, 43], где данный термин пришел на смену устаревшей формулировке «многообразие решений» [35, 36, 37, 40]. В рамках развития данного подхода было защищено семь докторских диссертаций. К настоящему времени проведено много исследований фазовых пространств различных линейных и полулинейных уравнений соболевского типа, в основе которых лежит докторская диссертация Г.А. Свиридюка, изложенная в виде обзора в работе [41]. В этой работе были заложены основные положения теории  $(L, p)$ -ограниченного и  $(L, p)$ -секториального оператора  $M$ , а основы теории  $(L, p)$ -радиального оператора  $M$  были заложены в работе [42].

В полной мере фазовые пространства уравнений (0.0.4) при условии  $(L, p)$ -радиальности оператора  $M$  были исследованы В.Е. Федоровым. Им были доказаны обобщения теорем Хилле - Иосиды и Соломяка - Иосиды о порождении полугрупп операторов в банаховых и локально выпуклых пространствах.

В докторской диссертации А.В. Келлер [17] рассматриваются системы леонтьевского типа - конечномерный аналог уравнений соболевского типа. Для этих систем были проведены численные исследования задачи Шоултера - Сидорова для различных задач, в том числе оптимального управления (стартового, жесткого, смешанного), причем была впервые доказана сходимость приближенного решения к точному.

Докторская диссертация А.А. Замышляевой [13] посвящена разработке аналитического и численного методов исследования детерминированных и стохастических математических моделей с начальным (начально-конечным) условием для неполных уравнений соболевского типа высокого порядка с относительно  $p$ -ограниченным оператором, с относительно  $p$ -секториальным оператором. Полученные абстрактные результаты проиллюстрированы математическими моделями высокого порядка, такими, как модель de Gennes звуковых волн в смектиках, модель колебаний в молекуле ДНК, модель линейных ионно-звуковых волн в «незамагниченной» плазме.

В докторской диссертации С.А. Загребинной [8] предложено вместо условия Коши рассматривать многоточечные начально-конечные условия для детерминированных и стохастических линейных уравнений соболевского типа первого порядка. Разработаны аналитический и численный методы исследования полученных задач относительно поиска решений по ряду актуальных вопросов различных отраслей науки, таких как гидродинамика, теория неньютоновских жидкостей, теория фильтрации.

В докторской диссертации Н.А. Манаковой [24] проведено аналитическое и численное исследование полулинейных уравнений соболевского типа и оптимального управления их решений. Создана теория для численного исследования изучаемых моделей, доказаны однозначные разрешимости задачи Коши и задачи Шоуолтера - Сидорова для различных классов исследуемых уравнений, устанавливающие сходимость приближенных решений к точному.

Еще одно современное направление в области дифференциальных уравнений - это изучение их на множествах различной геометрической структуры, например, на графах. Данным направлением активно занималась воронежская школа Ю.В. Покорного, исследования которой были систематизированы в 2004 году в монографии [32], которая представляла собой совокупность итогов современных актуальных исследований, в свою



очередь посвященных качественным свойствам дифференциальных уравнений, рассмотренных в многообразиях типа сети. Рассмотрение интересных нас уравнений по соболевскому типу посредством расположения их на графах впервые произошло в начале XXI века (в 2002 году) [44]. Сейчас, по прошествии некоторого времени и совершению новых достижений в науке, традиционным стало рассматривать (полу)линейные уравнения соболевского типа (1-го, высокого порядка) посредством геометрических графов и с рассмотрением самых разных аспектов процесса - сейчас их использование является одним из рабочих направлений математического моделирования.

**Положения выносимые на защиту.** На защиту выносятся результаты диссертационного исследования, соответствующие следующим пунктам паспорта специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

– в рамках разработки новых математических методов моделирования объектов и явлений (п.1) разработан новый метод моделирования транспортного потока с учетом эффекта ретардации, свойственный вязкоупругим несжимаемым жидкостям; предложено новое начальное-конечное условие для исследования разрешимости линейной модели Навье – Стокса;

– в рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п.2) качественно исследованы вырожденные модели гидродинамики с применением многоточечных начальное-конечных условий, построены алгоритмы численных решений для приближенного решения указанных задач;

– в рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов (п.4) на основе разработаны программные комплексы, реализованные в вычислительной среде в вычислительной среде Maple; проведены вычислительные эксперименты.

**Краткое содержание диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, содержащего 84 наименований, и двух приложений. Отметим сразу, что утверждения, приведенные без доказательства, на защиту не выносятся.

**Во введении** приводится постановка задачи, ставится цель исследования, описываются методы исследования и обосновывается актуальность, теоретическая и практическая значимость проведенного исследования, определяются методы исследования и новизна полученных результатов, дана характеристика степени разработанности проблемы и степени достоверности результатов, представлена апробация результатов.

**Первая глава** содержит пропедевтический характер. Она содержит определения, теоремы и вспомогательные утверждения, опираясь на которые исследователь получил основные результаты исследования, построенные на базе теории Г.А. Свиридюка [65].

В п.1.1 вводятся и изучаются относительно  $p$ -ограниченные операторы. В п.1.2 рассмотрены вырожденные разрешающие аналитические группы операторов. В п.1.3. рассматриваются относительно  $p$ -секториальные операторы. В п.1.4. изучаются единицы полугрупп. В п.1.5. указаны условия, достаточные для существования обратного оператора. В п.1.6. рассмотрена задача Штурма - Лиувилля на геометрическом графе [3],[14].

**Во второй главе** моделируется транспортный поток в системе перекрестков с учетом эффекта ретардации, свойственный вязкоупругим несжимаемым жидкостям.

В п.2.1. изучается математическая модель транспортного потока на перекресток. Для этого рассматривается система уравнений Осколкова, описывающая транспортный поток, на восьмирёберном геометрическом графе с которым ассоциируется перекресток. Многоточечное начально-конечное условие понимается здесь следующим образом: два последующих момента переключения светофора являются началом и концом временного отрезка

на котором будет рассматриваться транспортный поток на определенном восьмирёберном геометрическом графе. По окончании временного отрезка транспортный поток меняет свое направление движения, тем самым возникает необходимость на новом временном отрезке (до следующего переключения светофора) рассмотреть новый восьмирёберный геометрический граф. В п.2.2. модель транспортного потока на перекрестке редуцируется к уравнению соболевского типа с относительно  $p$ -ограниченным оператором и доказываемая однозначная разрешимость модели дорожного движения на перекрестке с многоточечным начально-конечным условием. В п.2.3. изучается математическая модель транспортного потока в населенном пункте. Здесь используются результаты первого и второго параграфов, при этом для описания транспортного потока в населенном пункте используется система восьмирёберных геометрических графов. Проводится редукция рассматриваемой модели к системе уравнений соболевского типа, доказываемая их однозначная разрешимость. В п.п 2.4., 2.5. представлен алгоритм численного решения и описание программы. В п.2.6. приведен вычисленный эксперимент. Для проведения вычислительного эксперимента вычисляются собственные значения и собственные функции на необходимом восьмирёберном геометрическом графе.

**Третья глава** посвящена изучению линейной модели Навье - Стокса с многоточечным начально-конечным условием. В п.3.1. рассматриваются относительно спектральные проекторы. В п.3.2. рассматривается многоточечная начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с относительно  $p$ -секториальным оператором. В п.3.3. рассматривается линейная модель вязкой несжимаемой жидкости. В п.3.4 изучен метод численного исследования линейной модели Навье-Стокса в осесимметричной области, найдены собственные значения и собственные функции задачи Штурма – Лиувилля для указанной области. В п.3.5. разработан алгоритм метода численного исследования, а также дано описание программы. В п.3.6 показан

и проведен вычисленный эксперимент для модельного примера.

В заключении обобщаются и рассматриваются итоги выполненного исследования, перспективы дальнейшей разработки тем.

В приложениях приводятся свидетельства о регистрации программ ЭВМ.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Результаты работы апробированы на международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2014», г. Воронеж, 25–31 января 2016 г.; на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, г. Суздаль, 04-09 июля 2014 г.; на XV Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике, г. Сочи, 28 сентября - 5 октября 2014 г.; на Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти В.К. Иванова, г. Челябинск, 10 - 14 нояб. 2014 г.; на XVI Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике, г. Челябинск, 21 - 27 июня 2015 г.; на Всероссийской научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», Самара, 01 - 04 июля 2015 г.; на XII Всероссийской школе-конференции молодых учёных «Управление большими системами», г. Волгоград, 07 - 11 сентября 2015 г.; на международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2016», г. Воронеж, 25–31 января 2016 г.; 2016 2nd international conference on industrial engineering, applications and manufacturing, Chelyabinsk, 19-20 мая 2016 г.; на XXIX Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-29», г. Санкт-Петербург, 31 мая - 3 июня 2016 г.; на XIII Всероссийской школе-конференции молодых учёных «Управление большими системами», г. Самара, 05 - 09 сентября 2016 г.; на XIV Всероссийской школе-конференции молодых учёных «Управление большими системами», г. Пермь, 04 - 08 сентября 2016 г.; на XIX всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике, г. Сочи, 22 - 30 сентября 2018

г.; на XXXII Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-32», г. Санкт-Петербург, 03 - 07 июня 2019 г.; на XIII Всероссийском совещание по проблемам управления, г. Москва, 17 - 20 июня 2019г. Выводы и промежуточные итоги исследования не единожды были представлены и апробированы на областном семинаре «Уравнения соболевского типа» профессора Г.А. Свиридюка.

**Публикации.** Результаты по теме диссертации изложены в 16 печатных изданиях [69-84], 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [69–73], в том числе 4 в изданиях, входящих в системы цитирования SCOPUS и (или) Web of Science, два свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [74,75], 7 — в тезисах докладов [78–84]. В совместных с научным руководителем работах научному руководителю принадлежит постановка задачи, на защиту выносятся только результаты, полученные ее автором и не затрагивают интересы соавторов.

**Благодарность.** Автор выражает искреннюю и глубокую благодарность своему научному руководителю Софье Александровне Загребинной за постановку задачи и консультации; профессору Георгию Анатольевичу Свиридюку за ценные советы при создании нового метода исследования транспортного потока; коллективам обеих кафедр - Уравнения математической физики, а также Математическое и компьютерное моделирование ЮУрГУ - за конструктивные, последовательные, разумные и рациональные обсуждения, за практическую и целесообразную критику, эффективную коммуникацию и создание благоприятной для поисковой деятельности атмосферы в ходе работы над диссертационным исследованием. Особую благодарность выражаю моей семье за понимание и поддержку.

# 1 Теоретические основы исследования гидродинамических моделей

Результаты параграфов 1.1 - 1.5, почерпнуты из статьи Г.А. Свиридюка [41], и монографии Г.А. Свиридюка, В.Е. Федорова [65]. Результаты параграфа 1.6 почерпнуты из А.А. Баязитовой [3], А.А. Замышляевой [14]. Данные результаты на защиту не выносятся и используются для понимания результатов главы 2 и 3.

## 1.1 Относительно $p$ -ограниченные операторы

В банаховых пространствах  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  рассмотрим линейные операторы  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ,  $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ .

**Определение 1.1.1.** [65] Назовем  $L$ -резольвентным множеством множество

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$$

и  $L$ -спектром множества  $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$  оператора  $M$ .

**Замечание 1.1.1.** Существование обратного оператора  $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$  обеспечивает совпадение  $L$ -резольвентного множества оператора  $M$  с резольвентным множеством оператора  $L^{-1}M$  (или  $ML^{-1}$ ), отсюда можно сделать вывод о совпадении  $L$ -спектра оператора  $M$  со спектром оператора  $L^{-1}M$  (или  $ML^{-1}$ ).

**Замечание 1.1.2.** Множество  $\rho^L(M)$  всегда является открытым, следовательно множество  $\sigma^L(M)$  является замкнутым.

**Определение 1.1.2.** [65] Оператор-функцию  $(\mu L - M)^{-1}$  назовем *резольвентой* оператора  $M$  *относительно* оператора  $L$  (или, по другому,  $L$ -резольвентой). Назовем *правой (левой) резольвентой* оператора  $M$  *относительно* оператора  $L$  (короче, *правой (левой)  $L$ -резольвентой оператора  $M$* ) оператор-функцию  $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$  ( $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ ).

**Лемма 1.1.1.** [65] Если существует  $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$ , то правая (левая)  $L$ -резольвента оператора  $M$  совпадает с резольвентой оператора  $L^{-1}M$  ( $ML^{-1}$ ).

Пусть  $\mu \in \rho^L(M)$ . Получим, используя тождества

$$\begin{aligned} (\lambda L - M)(\mu L - M)^{-1} &= I + (\lambda - \mu)L(\mu L - M)^{-1}, \\ (\mu L - M)^{-1}(\lambda L - M) &= I + (\lambda - \mu)(\mu L - M)^{-1}L, \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

в таком случае служит аналогом *резольвентному тождеству Гильберта*

$$(\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu L - M)^{-1}L(\lambda L - M)^{-1}, \quad (1.1.2)$$

вдобавок, от (1.1.2) получается последовательность *правого*

$$R_\lambda^L(M) - R_\mu^L(M) = (\mu - \lambda)R_\mu^L(M)R_\lambda^L(M) \quad (1.1.3)$$

и *левого*

$$L_\lambda^L(M) - L_\mu^L(M) = (\mu - \lambda)L_\mu^L(M)L_\lambda^L(M) \quad (1.1.4)$$

$L$ -резольвентные тождества.

**Теорема 1.1.1.** [65] Если оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ , а  $M : \text{dom } M \subset \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$  линейен и замкнут, то  $L$ -резольвента, правая и левая  $L$ -резольвенты оператора  $M$

- (i) непрерывны в  $\rho^L(M)$ .
- (ii) голоморфны в  $\rho^L(M)$ .

**Определение 1.1.3.** [65] Назовем оператор  $M$  *спектрально ограниченным относительно оператора  $L$*  (или проще,  $(L, \sigma)$ -ограниченным), если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Пусть оператор  $M$   $(L, \sigma)$ - является ограниченным, тогда берём контур  $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$  и, в свою очередь строим ряд операторов

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}). \quad (1.1.5)$$

**Лемма 1.1.2.** *Если  $M$   $(L, \sigma)$ -ограничен, то операторы из формулы (1.1.5) являются проекторами.*

**Лемма 1.1.3.** *Если оператор  $M$   $(L, \sigma)$ -ограничен, то для любого  $u \in \text{dom} M$  вектор  $Pu \in \text{dom} M$ .*

Положим  $\mathfrak{U}^0 = \ker P$ ,  $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$ ;  $\mathfrak{U}^1 = \text{im} P$ ,  $\mathfrak{F}^1 = \text{im} P$ . Сужения оператора  $L$  на  $\mathfrak{U}^0$  ( $\mathfrak{U}^1$ ) обозначим через  $L_0$  ( $L_1$ ). Аналогично, сужение оператора  $M$  на  $\text{dom} M \cap \mathfrak{U}^0$  ( $\text{dom} M \cap \mathfrak{U}^1$ ) обозначим через  $M_0$  ( $M_1$ ).

**Теорема 1.1.2.** (Теорема Свиридюка о расщеплении, [65]). Если оператор  $M$   $(L, \sigma)$ -ограничен, то справедливы следующие утверждения:

- (i)  $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$ ,  $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$ ;
- (ii) операторы  $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$ ,  $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$ ;
- (iii) существуют операторы  $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$ ,  $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ .

Положим  $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ ,  $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$ .

Впредь будем именовать в данном фрагменте и впоследствии *как собственный вектор* оператора  $L$  любой вектор  $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ , в котором  $\ker L \neq \{0\}$

Упорядоченное множество  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  будет рассматриваться нами как *цепочка  $M$ -присоединенных векторов*, принадлежащая собственному вектору  $\varphi_0$ , при условии, что  $L\varphi_{q+1} = M\varphi_q$ ,  $q = 0, 1, \dots$ ,  $\varphi_l \notin \ker L \setminus \{0\}$ ,  $l = 1, 2, \dots$

*Высотой* мы станем именовать номер вектора в цепочке по порядку. Также стоит принять во внимание, что собственным векторам оператора  $L$  будет присвоено название  *$M$ -присоединенных векторов высоты 0*. Линейная оболочка  $M$ -присоединенных векторов оператора  $L$  будет называться далее принадлежащимему  *$M$ -корневым линеалом*.  *$M$ -корневым пространством* станет именовать замкнутый  *$M$ -корневой линеал* оператора  $L$ . Цепочка, состоящая из одного за другим  $M$ -присоединенного вектора может уйти в бесконечность. Например, одним из частных случаев такого



построения может выступать её заполнение рядом нулей, при условии, что  $\varphi_0 \in \ker M \cap \ker L$ . Однако есть вероятность, что таковая цепочка станет конечной при условии нахождения такого  $M$ -присоединенного вектора  $\varphi_q$ , что значения станут равны или  $\varphi_q \notin \text{dom}M$ , или  $M\varphi_q \notin \text{im}L$ . Высота  $q$  последнего  $M$ -присоединенного вектора, состоящего в ряду конечной цепочки  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_q\}$  назовём *длиной* данного ряда или данной цепочки.

**Лемма 1.1.4.** (i) Если  $\varphi_p$  является  $M$ -присоединенным вектором собственного вектора  $\varphi_0$  оператора  $L$ , причем точка  $\mu \in \rho^L(M)$ , то

$$-R_\mu^L(M)\varphi_p = \varphi_{p-1} + \mu\varphi_{p-2} + \dots + \mu^{p-1}\varphi_0.$$

Здесь набор  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p\}$  обозначает цепочку  $M$ -присоединенных векторов оператора  $L$ .

(ii) Если  $\psi_p$  является присоединенным вектором собственного вектора  $\psi_0$  оператора  $R_\mu^L(M)$ , причем точка  $\mu \in \rho^L(M)$ , то

$$-L\psi_p = M(\psi_{p-1} + \mu\psi_{p-2} + \dots + \mu^{p-1}\psi_0).$$

Здесь набор  $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_p\}$  является цепочкой присоединенных векторов оператора  $R_\mu^L(M)$ .

**Следствие 1.1.1.** В условиях леммы 1.1.4 (i) справедливо представление

$$(-R_\mu^L(M))^p\varphi_p = \varphi_0.$$

На данном этапе расчетов примем, что оператор  $M$  ( $L, \sigma$ )-ограничен. В таком случае согласно теореме 1.1.2 естественным образом следует фактическое наличие оператора  $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$  и оператора  $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$ , с чьей помощью реально осуществить преобразование  $L$ -резольвенты оператора  $M$  в ряд Лорана

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(I - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q$$

в кольце  $|\mu| > a$ . Кроме того, аналогично можно установить существование операторов  $G = L_0 M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0)$  и  $T = M_1 L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$  и получить разложение

$$(\mu L - M)^{-1} = - \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k M_0^{-1} G^k (I - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} L_1^{-1} T^{k-1} Q.$$

**Определение 1.1.4.** Точка  $\infty$  именуется *устраняемой особой точкой*, служащей как полюс порядка  $p \in \mathbb{N}$ , существенно особой точкой  $L$ -резольвенты оператора  $M$ , при условии соблюдения соответствий  $H \equiv \mathbb{O}$ ;  $H^p \neq \mathbb{O}$ ,  $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$ ;  $H^q \neq \mathbb{O} \forall q \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 1.1.3.** Если оператор  $M$   $(L, \sigma)$ -ограничен и точка  $\infty$  является

(i) существенно особой точкой  $L$ -резольвенты оператора  $M$ , то  $M$ -корневой линейал оператора  $L$  содержится в  $\mathfrak{U}^0$ ;

(ii) полюсом порядка  $p \in \mathbb{N}$   $L$ -резольвенты оператора  $M$ , то  $M$ -корневое пространство оператора  $L$  совпадает с  $\mathfrak{U}^0$  и состоит из  $M$ -присоединенных векторов оператора  $L$  высоты не больше  $p$ ;

(iii) устраняемой особой точкой  $L$ -резольвенты оператора  $M$ , то  $\ker L = \mathfrak{U}^0$ ,  $\text{im } L = \mathfrak{F}^1$ , и любой собственный вектор оператора  $L$  не имеет  $M$ -присоединенных векторов.

**Замечание 1.1.3.** Примем, что  $\{\varphi_0^1, \varphi_0^2, \dots, \varphi_0^k\}$  - являются набором линейно независимых собственных векторов оператора  $L$ . Если  $\{\varphi_1^l, \varphi_2^l, \dots, \varphi_p^l\}$  - цепочка  $M$ -присоединенных векторов вектора  $\varphi_0^l$ ,  $l = 1, 2, \dots, k$ , то при условии  $(L, \sigma)$ -ограниченности оператора  $M$  множество

$$\{\varphi_0^1, \varphi_1^1, \dots, \varphi_p^1; \varphi_0^2, \varphi_1^2, \dots, \varphi_p^2; \dots; \varphi_0^k, \varphi_1^k, \dots, \varphi_p^k\}$$

состоит из линейно независимых векторов. Действительно, допустим противное, т. е. существуют константы  $a_q^l$ ,  $l = 1, 2, \dots, k$ ,  $q = 0, 1, \dots, p$ , такие, что

$$\sum_{l=1}^k \sum_{q=0}^p |a_q^l| > 0, \quad \sum_{l=1}^k \sum_{q=0}^p a_q^l \varphi_q^l = 0.$$

Тогда

$$0 = H^p \left( \sum_{l=1}^k \sum_{q=0}^p a_q^l \varphi_q^l \right) = \sum_{l=1}^k a_p^l \varphi_0^l.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что  $a_p^l = 0$ ,  $l = 1, 2, \dots, k$ . И это в свою очередь значит, что

$$0 = H^{p-1} \left( \sum_{l=1}^k \sum_{q=0}^{p-1} a_q^l \varphi_q^l \right) = \sum_{l=1}^k a_{p-1}^l \varphi_0^l,$$

т. е.  $a_{p-1}^l = 0$ ,  $l = 1, 2, \dots, k$ . Продолжение данной процедуры приводит нас вслед за выкладками к противоречивым данным. Одним из частных выводов данного этапа рассмотрения модели является вывод о том, что собственный вектор  $\varphi_0$  и принадлежащие ему  $M$ -присоединенные векторы, которые включены в единство любой одной цепочки, обретают линейную независимость.

Следует освежить часть условных обозначений, одно из которых гласит, что оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$  будет именоваться *фредгольмовым*, при условии  $\dim \ker L = \text{codim im} L < \infty$ .

**Теорема 1.1.4.** *Если оператор  $L$ -фредгольмовый, значит, дальнейшие утверждения равнозначны:*

- (i) оператор  $M$  ( $L, p$ )-ограничен,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ;
- (ii) длины всех цепочек  $M$ -присоединенных векторов не превосходят  $p$ , и имеется как минимум одна цепочка, соответствующая длине  $p$ .

## 1.2 Голоморфные вырожденные группы операторов

Для исследования данного вопроса нужно изучить построение в банаховых пространствах  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  и проанализируем поведение операторов  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$  и  $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ .

В конкретном примере рассмотрим, проанализируем по модели и уделим внимание линейному однородному уравнению соболевского типа

$$Li = Mu. \tag{1.2.1}$$

Для удобства исчисления переименуем вектор-функцию  $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$  в решение  $u = u(t)$  уравнения (1.2.1), если она удовлетворяет этому уравнению. Назовем *решением задачи Коши для уравнения (1.2.1)* решение  $u(t)$  уравнения (1.2.1), если при некотором векторе  $u_0 \in \mathfrak{U}$  оно дополнительно удовлетворяет *условию Коши*

$$u(0) = u_0. \quad (1.2.2)$$

**Определение 1.2.1.** *Фазовое пространство* уравнения (1.2.1) сейчас и впредь будет обозначать множество  $\mathfrak{P}$ , если

- (i)  $u(t) \in \mathfrak{P}$  при любом соответственном  $t \in \mathbb{R}$ , и в котором любое решение  $u = u(t)$  уравнения (1.2.1);
- (ii) сопровождается существованием единственного решения задачи (1.2.1), (1.2.2) при любом  $u_0 \in \mathfrak{P}$ .

**Теорема 1.2.1.** *В том случае, когда оператор  $M$   $(L, p)$ -ограничен,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ , фазовое пространство в уравнении (1.2.1) - будет субпространство  $\mathfrak{U}^1$ .*

**Определение 1.2.2.** Впредь будем придерживаться именованя как *группы разрешающих операторов* уравнения (1.2.1) отображение  $U \cdot \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$  (или, сокращённо, *группы*), при выполнении условия, что

- (i)  $U^s U^t = U^{s+t}$  при любых  $s, t \in \mathbb{R}$  ;
- (ii) где в соответствии с любым  $u_0 \in \mathfrak{U}$  вектор-функция  $u(t) = U^t u_0$  будет выступать решением для уравнений (1.2.1).

Установим тождество между группой и ее множеством значений (графиком)  $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ . Группа  $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$  будет именоваться *голоморфная*, при выполнении предварительного условия, что её аналитическое продолжение может заполнить всю комплексную плоскость  $\mathbb{C}$ , и одновременно будет сохраняться неизменный статус свойств (i), (ii) , которые были обозначены в определении 1.2.2; однако эта же группа будет называться *вы-*

рожденная, при выполнении условия, что её единица  $U^0$  выступает в роли проектора.

**Определение 1.2.3.** Далее будем именовать согласно порядку как *ядро* и *образ* аналитической группы  $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$  принадлежащего множеству  $\ker U^\cdot = \ker U^0 = \ker U^t$  и  $\text{im}U^\cdot = \text{im}U^0 = \text{im}U^t$  при любом  $t \in \mathbb{R}$ .

Голоморфная вырожденная группа  $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$  - станет называться разрешающая группа уравнения (1.2.1), при выполнении условия, что её образ  $\text{im}U^\cdot$  соответствует и подобен фазовому пространству уравнения (1.2.1).

**Теорема 1.2.1.** В случае, когда оператор  $M$   $(L, \sigma)$ -ограничен, фактически является существующей только одна разрешающая группа для уравнений (1.2.1), принимающая вдобавок данный вид

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R},$$

в котором значение замкнутого контура  $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ .

- Примем, что значение контура  $\gamma' = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r' > r\}$ , тогда

$$\begin{aligned} U^s U^t &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma'} \int_{\gamma} R_{\lambda}^L(M) R_{\mu}^L(M) e^{\mu t + \lambda s} d\lambda d\mu = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left( \int_{\gamma'} \frac{e^{\lambda s} d\lambda}{\lambda - \mu} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu + \int_{\gamma'} R_{\lambda}^L(M) e^{\lambda s} d\lambda \int_{\gamma} \frac{e^{\mu t} d\mu}{\mu - \lambda} \right) = U^{s+t} \end{aligned}$$

что в соответствии с данными и выводами, вытекающими из теоремы Фубини, которая конкретизирует данные по вычетах и *правом относительно резольвентном тождестве Гильберта* (тождество (1.1.2))

$$R_{\lambda}^L - R_{\mu}^L(M) = (\mu - \lambda) R_{\mu}^L(M) R_{\lambda}^L(M).$$

После проведенных вычислений можно принять, что  $u_0 \in \mathfrak{U}$ , следовательно

$$L \frac{d}{dt} (U^t u_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mu L R_{\mu}^L(M) u_0 e^{\mu t} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \times$$

$$\times \left( \int_{\gamma} (\mu L - M)(\mu L - M)^{-1} L u_0 e^{\mu t} d\mu + \int_{\gamma} M R_{\mu}^L(M) u_0 e^{\mu t} d\mu \right) = M(U^t u_0).$$

Следующие расчеты учитывают теорему 1.1.1 и согласно ей

$$\begin{aligned} U^t &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu H - \mathbb{I})^{-1} H(\mathbb{I} - P) e^{\mu t} d\mu + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu \mathbb{I} - S)^{-1} P e^{\mu t} d\mu = \mathbb{O}(\mathbb{I} - P) + e^{tS} P. \end{aligned}$$

Как следствие - единственность группы  $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$  происходит от подобной единственности группы  $\{e^{tS} : t \in \mathbb{R}\}$ . Следует учесть также то, что,  $U^0 = P$ . •

**Следствие 1.2.1.** *В условиях теоремы 1.2.1*

$$\ker U^{\bullet} = \mathfrak{U}^0, \quad \text{im } U^{\bullet} = \mathfrak{U}^1; \quad \ker F^{\bullet} = \mathfrak{F}^0, \quad \text{im } F^{\bullet} = \mathfrak{F}^1.$$

### 1.3 Относительно $p$ -секториальные операторы

Примем, что  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  - пара банаховых пространств, где оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ , а другим оператором является  $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ . Следуя п. 1.1 главы 1, введем в рассмотрение  $L$ -резольвентное множество

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$$

и  $L$ -спектр  $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$  оператора  $M$ . В дальнейшем нам потребуется аналог тождества Гильберта

$$(\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu L - M)^{-1} L (\lambda L - M)^{-1}, \quad (1.3.1)$$

правое

$$R_{\lambda}^L(M) - R_{\mu}^L(M) = (\mu - \lambda) R_{\mu}^L(M) R_{\lambda}^L(M) \quad (1.3.2)$$

и левое

$$L_{\lambda}^L(M) - L_{\mu}^L(M) = (\mu - \lambda) L_{\mu}^L(M) L_{\lambda}^L(M) \quad (1.3.3)$$

$L$ -резольвентные тождества. (Напомним, что  $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$  - правая, а  $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$  - левая  $L$ -резольвенты оператора  $M$ . Оператор-функция  $(\mu L - M)^{-1}$  называется  $L$ -резольвентой оператора  $M$ ).

Кроме этого пригодятся тождества (1.1.1), которые можно записать в более частном виде

$$\begin{aligned} M(\mu L - M)^{-1} &= \mu L_\mu^L(M) - I, \\ (\mu L - M)^{-1}M &= \mu R_\mu^L(M) - I. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

**Лемма 1.3.1.** Если принять, что  $\mu \in \rho^L(M)$  оператор  $M(\mu L - M)^{-1}$ , а также оператор  $(\mu L - M)^{-1}M$  являются линейными и могут продолжаться до непрерывного каждый в условиях пребывания их на пространстве  $\mathfrak{F}$  и пространстве  $\mathfrak{U}$  в соответствующем порядке.

**Лемма 1.3.2.** Примем, что точки  $\lambda, \mu \in \rho^L(M)$ . Отсюда следует, что

- (i)  $\text{im } R_\lambda^L(M) = \text{im } R_\mu^L(M)$ ,  $\text{im } L_\lambda^L(M) = \text{im } L_\mu^L(M)$ ;
- (ii)  $\ker R_\lambda^L(M) = \ker L$ ,  $\ker L_\lambda^L(M) = \{M\varphi : \varphi \in \text{dom } M \cap \ker L\}$ .

**Определение 1.3.1.** Пусть точки  $\mu_q \in \rho^L(M)$ ,  $q = 0, 1, \dots, p$ . Оператор-функции

$$R_{(\mu,p)}^L(M) = \prod_{q=0}^p R_{\mu_q}^L(M) \quad \text{и} \quad L_{(\mu,p)}^L(M) = \prod_{q=0}^p L_{\mu_q}^L(M)$$

могут быть поименованы в соответствии как *правая  $p$ -резольвента* и *левая  $p$ -резольвента* к оператору  $M$  относительно оператора  $L$  (более лаконично, *правая  $(L, p)$ -резольвента* и, соответственно, *левая  $(L, p)$ -резольвента* оператора  $M$ ).

Следуя п. 1.2 главы 1, введем в рассмотрение  $M$ -присоединенные векторы оператора  $L$ . Согласно лемме 1.1.4  $M$ -корневой линеал оператора  $L$  и корневой линеал правой  $L$ -резольвенты оператора  $M$  совпадают. Номер по порядку, который относится к  $M$ -присоединенному вектору, который соответствует номеру вхождения в общую цепочку, примем далее как *высоту*

обозначенного нами вектора. Собственным векторам присвоим обозначение  $M$ -присоединенными высоты 0.

**Теорема 1.3.1.** *Если  $\lambda_q, \mu_q \in \rho^L(M)$ ,  $q = 0, 1, \dots, p$ , то*

$$(i) \quad \begin{aligned} \operatorname{im} R_{(\lambda,p)}^L(M) &= \operatorname{im} R_{(\mu,p)}^L(M), \\ \operatorname{im} L_{(\lambda,p)}^L(M) &= \operatorname{im} L_{(\mu,p)}^L(M); \end{aligned}$$

(ii)  $\ker R_{(\mu,p)}^L(M)$  является линейной оболочкой, действующей для каждого из собственных векторов высоты, однако, не превосходящей  $p$ ,  $\ker L_{(\lambda,p)}^L(M) = \{M\varphi : \varphi \in \operatorname{dom} M \cap \ker R_{(\mu,p)}^L\}$ .

Пусть  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  - банаховы пространства, оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ , а оператор  $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ .

**Определение 1.3.2.** Оператор  $M$  называется  $p$ -секториальным относительно оператора  $L$  с числом  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  (короче,  $(L, p)$ -секториальным), если

(i) существуют константы  $a \in \mathbb{R}$  и  $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  такие, что сектор

$$S_{a,\Theta}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \mu \neq a\} \subset \rho^L(M),$$

(ii) существует константа  $K \in \mathbb{R}_+$  удовлетворяющая таким условиям и создающая такие условия, чтобы

$$\max \left\{ \|R_{(\mu,p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|L_{(\mu,p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})} \right\} \leq \frac{K}{\prod_{q=0}^p |\mu_q - a|}$$

при любом значении  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in S_{a,\Theta}^L(M)$ .

**Замечание 1.3.1.** В [43]  $(L, 0)$ -секториальный оператор  $M$  обретает именование  $L$ -секториального. В случае существования оператора  $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$ , оператор становится  $M$   $L$ -секториальным точно в тот момент, в котором становится секториальным оператор  $L^{-1}M$  (или, что равносильно, оператор  $ML^{-1}$ ).



**Лемма 1.3.3.** Если оператор  $M$   $(L, \sigma)$ -ограничен, причем  $\infty$  - является или устранимой особой точкой, или, напротив, полюсом порядка не превышающим  $p$ . Доказать, что оператор  $M$   $(L, p)$ -секториален, используя соотношения

$$R_{\mu}^L(M) = (\mu H - I)^{-1} H(I - P) + (\mu I - S)^{-1} P, \quad (1.3.5)$$

$$L_{\mu}^L(M) = G(\mu G - I)^{-1}(I - Q) + (\mu I - T)^{-1} Q. \quad (1.3.6)$$

**Замечание 1.3.2.** Не размыкая сложившуюся общность, примем, что  $a = 0$  в условиях, обозначенных определением 1.3.2. В обозначенных рамках, при условии нахождения разрешающей полугруппы  $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$  при  $a = 0$ , полугруппа  $\{e^{at}U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$  приобретет статус разрешающей если  $a \neq 0$ . Соответственно, определим  $S_{0,\Theta}^L(M) = S_{\Theta}^L(M)$  и сделаем аналогичные преобразования в определении секториального оператора во введении.

**Лемма 1.3.4.** При условии, что оператор  $M$   $(L, p)$ -секториален, вытекает  $\exists C, R \in \mathbb{R}_+ \|\mu L - M\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})}^{-1} \leq C(1 + |\mu|^p) \forall \mu \in S_{\Theta}^L(M) \setminus \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > R\}$ .

**Лемма 1.3.5.** Если оператор  $M$   $(L, p)$ -секториален, то длины всех цепочек относительно присоединенных векторов ограничены числом  $p$ .

**Теорема 1.3.2.** Если оператор  $M$   $(L, p)$ -секториален, то

$$(i) \ker R_{(\mu,p)}^L(M) \cap \operatorname{im} R_{(\mu,p)}^L(M) = \{0\},$$

$$(ii) \ker L_{(\mu,p)}^L(M) \cap \operatorname{im} L_{(\mu,p)}^L(M) = \{0\}.$$

## 1.4 Единицы полугрупп

По аналогии с п. 1.2 из главы 1 предлагается к рассмотрению пара равноценных уравнению интересующего нас и рассматриваемого подробно соболевского типа (0.0.4) уравнений

$$R_{\alpha}^L(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1} M u, \quad (1.4.1)$$

$$L_{\alpha}^L(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1} f. \quad (1.4.2)$$

Каждое из обозначенных уравнений будет анализироваться и рассматриваться в качестве конкретизированном понимании уравнения

$$A\dot{v} = Bv, \quad (1.4.3)$$

в котором обозначенные предварительно операторы  $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y})$ , а  $\mathfrak{Y}$  - уже выступает как одно из некоторых банаховых пространств. *Решение уравнения (1.4.3)* с учетом данных обстоятельств теперь будет обозначать вектор-функцию  $v \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathfrak{Y})$ , которая, соответственно, способна удовлетворять расчеты к данному уравнению.

**Определение 1.4.1.** Отображением для  $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathfrak{Y})$  будет именоваться *полугруппа разрешающих операторов* (лапидарно, *разрешающая полугруппа*) в рамках уравнения (1.4.3), при удовлетворении условия, что

$$(i) \quad V^s V^t = V^{s+t} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+;$$

(ii) с любым значением  $v_0 \in \mathfrak{Y}$  вектор-функции  $v(t) = V^t v_0$  находится решение уравнения (1.4.3).

Как в п. 1.2 главы 1, отождествим полугруппу с ее множеством значений  $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ . Полугруппу  $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$  назовем *аналитической*, если она располагает таким параметром: аналитическим продолжением, уходящим из исходной точки и пролегающим в некоторый сектор, который, в свою очередь, обладает лучом  $\mathbb{R}_+$  и обеспечивает сохранение обозначенных свойств (i), (ii), и *равномерно ограниченной*, если

$$\|V^t\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y})} \leq \text{const} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

**Замечание 1.4.1.** Отметим, что наличие единицы у разрешающей полугруппы уравнения (1.4.3) *не постулируется*.

**Теорема 1.4.1.** *Если оператор  $M$   $(L, p)$ -секториален, то существует аналитическая и равномерно ограниченная разрешающая полугруппа уравнения (1.4.1) (уравнения (1.4.2)).*

**Определение 1.4.2.** Примем, что  $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$  - является полугруппой, определенной на банаховом пространстве  $\mathfrak{B}$ . Оператором  $E \in \mathcal{L}(\mathfrak{B})$  будет именоваться *единица* вышеупомянутой полугруппы, в условиях  $E = s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0^+} V^t$ .

В данном контексте и впредь как  $s\text{-}\lim$  обозначается и будет обозначаться предел, погруженный в сильную (поточечную) топологию для пространства, обозначенного нами  $\mathcal{L}(\mathfrak{B})$ .

**Замечание 1.4.2.** Как нетрудно видеть, единица  $E$  полугруппы  $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$  выступает и действует в качестве проектора на  $\mathfrak{B}$ , причем  $\ker E = \ker V^\bullet$  и  $\text{im } E = \text{im } V^\bullet$ .

**Определение 1.4.3.** Оператор  $M$  называется *сильно  $(L, p)$ -секториальным справа (слева)*, если он  $(L, p)$ -секториален и

$$\|R_{(\mu, p)}^L(M)(\lambda L - M)^{-1}Mu\|_{\mathfrak{U}} \leq \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod_{q=0}^p |\mu_q|} \quad \forall u \in \text{dom } M,$$

где  $\text{const} = \text{const}(u)$

(существует плотный в  $\mathfrak{F}$  линейал  $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$  который позволяет реализоваться следующим условиям

$$\|M(\lambda L - M)^{-1}L_{(\mu, p)}^L(M)f\|_{\mathfrak{F}} \leq \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod_{q=0}^p |\mu_q|} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}},$$

где  $\text{const} = \text{const}(f)$ , а  $\lambda, \mu_q \in S_{\Theta}^L(M)$ ,  $q = 0, 1, \dots, p$ .

**Лемма 1.4.1.** Необходимо рассчитать и убедительно доказать, что при условиях ограничения оператора как  $M$   $(L, \sigma)$ -ограниченного, и одновременно  $\infty$  - является несущественной особой точкой для  $L$ -резольвенты к оператору  $M$ , таким образом, что оператор  $M$  сильно и недвусмысленно  $(L, p)$ -секториальный единомоментно справа и слева.

**Теорема 1.4.2.** Если оператор  $M$   $(L, p)$ -секториален справа (слева), то существует единица полугруппы (1.4.1).

**Следствие 1.4.1.** *Если оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -секториален справа и слева, то*

$$(i) \forall u \in \mathfrak{U} \quad LPu = QLu;$$

$$(ii) \forall u \in \text{dom } M \quad (Pu \in \text{dom } M) \wedge (MPu = QMu).$$

С помощью обозначения передадим  $L_1 (M_1)$  более узкое значение оператора  $L (M)$  на  $\mathfrak{U}^1$  ( $\text{dom } M_1 = M \cap \mathfrak{U}^1$ ). С помощью обозначения  $\text{dom } M_0$  впредь обозначим, в соответствии с порядком, что  $\text{dom } M \cap \mathfrak{U}^0$ . Согласно уже обозначенному следствию 1.4.1 справедливое суждение является

**Следствие 1.4.2.** *В условиях следствия 1.4.1 оператор  $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$ , а операторы  $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$ ,  $k = 0, 1$ .*

## 1.5 Существование обратного оператора

Пусть  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  - банаховы пространства, оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ , а оператор  $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ .

В соответствии с логикой изложения следует указать также и совокупность условий существования для оператора  $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ . Чтобы сделать это грамотно, привлечём интеграл типа Данфорда - Тейлора, чтобы технично определить границы семейства операторов  $\{R^t : t > 0\}$

$$R^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu, \quad (1.5.1)$$

в котором оператор  $M$   $(L, p)$ -секториален (поэтому интеграл сходится).

**Лемма 1.5.1.** *Если оператор  $M$   $(L, p)$ -секториален, то семейство операторов  $\{R^t : t > 0\}$ , определяемое соотношением (1.5.1), аналитично в секторе  $\{\tau \in \mathbf{C} : |\arg \tau| < \Theta - \pi/2\}$ .*

**Лемма 1.5.2.** *В условиях леммы 1.5.1*

$$(i) \forall t > 0 \quad R^t L = U^t, \quad LR^t = F^t;$$

$$(ii) \forall s, t > 0 \quad R^{s+t} = U^s R^t = R^t F^s.$$

**Лемма 1.5.3.** Если оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -секториален справа (слева), то

$$(i) \quad \forall t > 0 \quad R^t = PR^t \quad (R^t = R^tQ).$$

$$(ii) \quad \overline{\bigcup_{t>0} \text{im}R^t} = \mathfrak{U}^1 \quad (\forall t > 0 \quad \ker R^t = \mathfrak{F}^0).$$

Другим следствием, которое важно указать, выступает вывод, что подобно происходящему с полугруппами, образы операторов  $R^t$  приобретают новый объем "вширь" если происходит уменьшение  $t$ , т.е.

$$\text{при } s > t > 0 \quad \text{im}R^s \subset \text{im}R^t,$$

и это в свою очередь вытекает из обозначенной нами леммы 1.5.2 (ii).

**Определение 1.5.1.** Для оператора  $M$  принимается название *сильно  $(L, p)$ -секториального*, в случае его сильной  $(L, p)$ -секториальности слева и

$$\forall \lambda, \mu_0, \dots, \mu_p \in S_{\Theta}^L(M) \quad \|R_{(\mu,p)}^L(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})} \leq \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod_{k=0}^p |\mu_k|}.$$

**Замечание 1.5.1.** Соответственно, в случае, когда  $(L, p)$ -секториальный оператор сильно  $M$  сильно  $(L, p)$ -секториальный справа.

**Замечание 1.5.2.** Примем существование оператора  $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$  и оператора, где  $T = ML^{-1}$  (либо  $S = L^{-1}M$ ) секториальным. В таком случае оператор  $M$  также обозначается сильно  $(L, p)$ -секториальным. Соответствием плотного в пространстве  $\mathfrak{F}$  линейала  $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$  будет обозначен  $L[\text{dom}M]$ .

**Замечание 1.5.3.** Если оператор  $M$   $(L, \sigma)$ -ограничен, причем  $\infty$  - несущественная особая точка. То оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -секториален.

**Лемма 1.5.4.** В случае, когда оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -секториален, для семейства операторов  $\{R^t : t > 0\}$ , определяющегося по формуле (1.5.1), возникает и существует равномерное ограничение.

**Теорема 1.5.1.** *В случае, когда оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -секториален, обозначает своё существование оператор  $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ . (1.5.2)*

Более узкий спектр значений  $\{U_1^t : t \geq 0\}$  ( $\{F_1^t : t \in \overline{\mathbf{R}_+}\}$ ) действующий в рамках полугруппы  $\{U^t : t \geq 0\}$  ( $\{F^t : t \geq 0\}$ ) и воздействующий, распространяющийся на подпространство  $\mathfrak{U}^1$  ( $\mathfrak{F}^1$ ) выступает в качестве и становится примером взгляда на невырожденную аналитическую полугруппу в данном её варианте.

Напомним принятые нами ранее обозначения:  $S_1 = L_1^{-1}M_1, T_1 = M_1L_1^{-1}$ .

**Следствие 1.5.1.** *Согласно обозначенным условиям в теореме 1.5.1 инфинитезимальный генератор полугруппы  $\{U_1^t : t \geq 0\}$  ( $\{F_1^t : t \in \overline{\mathbf{R}_+}\}$ ) это оператор  $S_1 \in Cl(\mathfrak{U}^1)$  ( $T_1 \in Cl(\mathfrak{F}^1)$ ).*

Логично рассматривая данный предмет, следует воспользоваться в дальнейшем вычислении теоремой Хилле - Йосиды - Феллера - Филлипса - Миядеры, что немедленно даёт нам такой результат, как

**Следствие 1.5.2.** *Согласно рассмотренной нами теореме 1.5.1 и её условиям можно сделать вывод, что оператору  $S_1$  ( $T_1$ ) секториальность свойственно, и стоит учитывать, что  $\sigma^L(M) = \sigma(S_1) = \sigma(T_1)$ .*

## 1.6 Задача Штурма - Лиувилля на геометрическом графе

Примем, что условие  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  - выступает конечным связным ориентированным геометрическим графом,  $\mathcal{V} = \{V_i\}$  - в свою очередь является множеством вершин, и третьим компонентом системы обозначается  $\mathcal{E} = \{E_j\}$  - выступающее множеством ребер, в условиях, где каждое ребро  $E_j$  имеет длину  $l_j \in \mathbb{R}_+$  и площадью поперечного сечения выходит  $d_j \in \mathbb{R}_+$ .

На геометрическом графе  $\mathbf{G}$  проанализируем и исследуем задачу Штурма - Лиувилля в условиях, ограниченных уравнением

$$a_j(x)u_j - (c_j(x)u_{jx})_x = f_j, u_j = u_j(x), x \in (0, l_j), t \in \mathbb{R}. \quad (1.6.1)$$

Для уравнений (1.6.1) в каждой вершине  $V_i$  зададим краевые условия

$$\sum_{j:E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{k:E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0; \quad (1.6.2)$$

$$u_n(0, t) = u_j(0, t) = u_k(l_k, t) = u_m(l_m, t), \quad (1.6.3)$$

для всех  $E_n, E_j \in E^\alpha(V_i), E_k, E_m \in E^\omega(V_i)$ ,

которые являются аналогами законов Кирхгофа. На данном этапе с помощью  $E^{\alpha, \omega}(V_i)$  выведено в поле значений множество ребер с началом (концом) в вершине  $V_i$ . Принятое в задаче условие (1.6.2) интерпретируется так, что становится ясно: поток, направленный по каждой вершине должен быть приравнен к нулевому значению. Другое условие (1.6.3) - трактуется так, что решение для каждой вершины должно быть непрерывным.

Далее вводится для анализа и рассмотрения пара пространств, и первое - гильбертово пространство

$$L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots), g_j \in L_2(0, l_j)\}$$

со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_j d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx$$

второе - банахово пространство

$$\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ и выполнено (1.6.2)}\}$$

с нормой

$$\|u\|_{\mathfrak{U}}^2 = \sum_j d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$$

**Определение 1.6.1.** Не равная тождественно нулю функция  $X = (X_1, \dots, X_j, \dots)$  называется *собственной функцией* задачи (1.6.1) - (1.6.3) для оператора

$$A = \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( -c_1(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + a_1(x), \frac{\partial}{\partial x} \left( -c_2(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + a_2(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x} \left( -c_j(j) \frac{\partial}{\partial x} \right) + a_j(x), \dots \right),$$

при выполнении условия существования такого числа  $\lambda$ , чтобы обозначенная функция  $X$  становилась классическим решением для нижеописанной задачи:

$$a_j(x)X_j - (c_j(x)X_{jx})_x = \lambda X_j, \quad (1.6.4)$$

$$X_j(0, t) = X_k(0, t) = X_m(l_m, t) = X_n(l_n, t), E_j, E_k \in E^a(V_i) \cup E^\omega(V_i), \quad (1.6.5)$$

$$\sum_{j: E_j \in E^a(V_i)} d_j c_j(x) X_{jx}(0, t) - \sum_{k: E_k \in E^\omega(V_i)} d_k c_k(x) X_{kx}(l_k, t) = 0. \quad (1.6.6)$$

Число  $\lambda$  называется собственным значением (соответствующим собственной функции  $X$ ).

Не подлежит сомнению и ясно распознается на основе полученных результатов вывод о собственной функции задачи (1.6.1) - (1.6.3) которая при любых  $Y \in \mathfrak{U}$  подходит для интегрального тождества

$$\sum_{j: E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (c_j(x)X_{jx}Y_{jx} + a_j(x)X_jY_j)dx = \lambda \sum_{j: E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} X_jY_jdx. \quad (1.6.7)$$

**Определение 1.6.2.** Не равняющаяся нулю функция  $X \in \mathfrak{U}$  будет поименована как *обобщенная собственная функция* задачи (1.6.1) - (1.6.3) для оператора  $A$ , при условии существования такого числа  $\lambda$  (собственное значение, отвечающее  $X$ ), чтобы функция  $X$  при любых рассматриваемых  $X \in \mathfrak{U}$  удовлетворяла интегральному тождеству (1.6.7).

Впредь нами будет производиться рассмотрение исключительно обобщенных собственных функций, а также соотнесённых с ними собственных значений, нормированных условием  $\|X\|_{L_2(\mathbf{G})} = 1$ . Удобному рассмотрению тождества (1.6.7), определяющего обобщенные собственные функции, будет способствовать равенство скалярных произведений в пространствах  $L_2(\mathbf{G})$  и  $\mathfrak{U}$  соответственно. Примем, что

$$m = \min_j \left( \min_{x \in (0, l_j)} a_j(x) \right)$$



(в данном случае происходит отказ от предположения, что  $a_j(x) \geq 0$ ). В таком случае функции  $\tilde{a}_j(x) = a_j(x) - m + 1 \geq 1$ . Следовательно, исходя из вышеизложенного, скалярное произведение (равнозначное как в случае с обычным) в  $\mathfrak{U}$  можно представить как равенство

$$[X, Y] = \sum_{j: E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (c_j(x) X_{jx} Y_{jx} + \tilde{a}_j(x) X_j Y_j) dx.$$

Тождество (1.6.7) следующим этапом рассуждений может быть изменено посредством логических операций в данный вид

$$[X, Y] = (\lambda - m + 1) \langle X, Y \rangle.$$

**Теорема 1.6.1.** *Собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  задачи (1.6.1) - (1.6.3) для оператора*

$$A = \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( -c_1(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + a_1(x), \frac{\partial}{\partial x} \left( -c_2(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + a_2(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x} \left( -c_j(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + a_j(x), \dots \right)$$

*вещественны и  $\lambda_s \rightarrow +\infty$  при  $s \rightarrow \infty$ . Собственные значения удовлетворяют неравенству*

$$\lambda_s > m = \min_j \left( \min_{x \in (0, l_j)} a_j(x) \right)$$

*во всех случаях, кроме  $a_j(x) = a_i(x) = \text{const}$  для всех  $i, j$ .*

Если же  $a_j(x) = a_i(x) = \text{const}$  для всех  $i, j$ , то собственные значения удовлетворяют неравенству  $\lambda_s \geq m, s = 1, 2, \dots$ , причем существует однократное собственное значение, равное  $m$ , с собственной функцией

$$\left( \sum_{j: E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} c_j(x) dx \right)^{-1} (1, 1, \dots, 1, \dots).$$

**Теорема 1.6.2.** *Обобщенные собственные функции  $X_1(x), X_2(x), \dots$  задачи (1.6.1) - (1.6.3) создают в совокупности ортонормированный базис в  $L_2(\mathbf{G})$ , иными словами можно сказать, что каждая из всех функций  $f \in L_2(\mathbf{G})$  может быть разложена при необходимости в так называемый ряд Фурье*

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} f_s X_s, f_s = \langle f, X_s \rangle, \quad (1.6.8)$$

который, в свою очередь, может сводиться в  $L_2(\mathbf{G})$ . В пределах функционирования и использования функции  $f \in \mathfrak{U}$  отдельный ряд (1.6.8) согласно с обобщенными собственными функциями задачи (1.6.1) - (1.6.3) может сойтись в  $\mathfrak{U}$ , где уже на следующем шагу рассуждений может быть воспроизведено неравенство

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s| |f_s|^2 \leq C \|f\|_{\mathfrak{U}}^2$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $f$ .

## 2 Модель транспортного потока

### 2.1 Математическая модель перекрестка

Для начала рассмотрим перекресток - это место перекрещивания, объединения или рассоединения одного транспортного пути на разные. Это место может быть ограничено и построено мысленно до соединения противоположных дорог, дальних относительно центра перекрестка. Внутри этой локации также будут стартовые закругления дорожного полотна. Однако в нее не входят въезды или выезды прилегающих участков или побочных путей дорожного сообщения <sup>2</sup>.

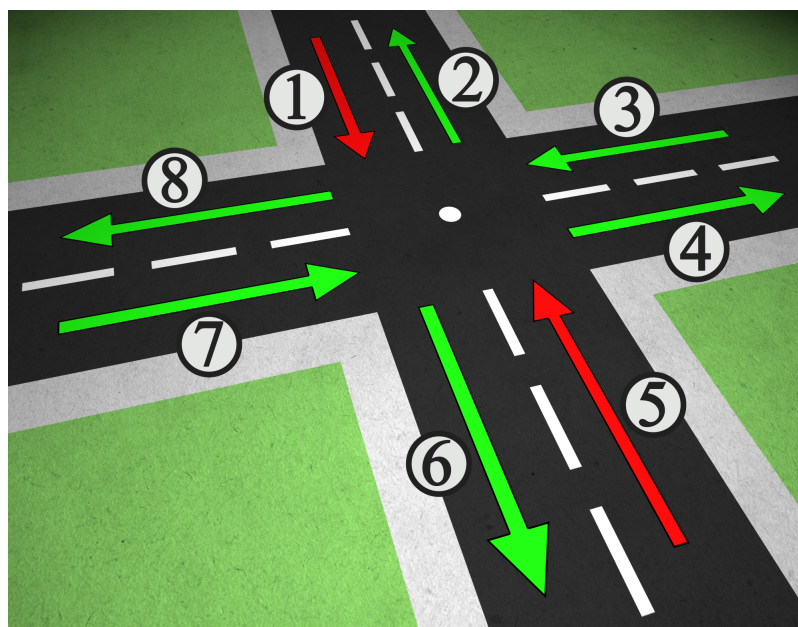


Рис. 3: Карта дороги

Представим перекресток с изменяющимся режимом его проезда (работает светофор) в виде восьмиреберного геометрического графа  $G_1$  (рис. 4). В этом случае условия «непрерывности» и «баланса потока» будут иметь

<sup>2</sup>Постановление Правительства РФ от 23.10.1993 N 1090 (ред. от 04.12.2018) «О Правилах дорожного движения»(вместе с «Основными положениями по допуску транспортных средств к эксплуатации и обязанности должностных лиц по обеспечению безопасности дорожного движения»).

ВИД

$$\begin{aligned} u_1^1(l_1, t) = u_2^1(0, t) = u_3^1(l_3, t) = u_4^1(0, t) = \\ = u_5^1(l_5, t) = u_6^1(0, t) = u_7^1(l_7, t) = u_8^1(0, t), \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned} d_1 u_{1x}^1(l_1, t) - d_2 u_{2x}^1(0, t) + d_3 u_{3x}^1(l_3, t) - d_4 u_{4x}^1(0, t) + \\ + d_5 u_{5x}^1(l_5, t) - d_6 u_{6x}^1(0, t) + d_7 u_{7x}^1(l_7, t) - d_8 u_{8x}^1(0, t) = 0, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

$$\begin{aligned} u_{1x}^1(0, t) = u_{2x}^1(l_2, t) = u_{3x}^1(0, t) = u_{4x}^1(l_4, t) = \\ = u_{5x}^1(0, t) = u_{6x}^1(l_6, t) = u_{7x}^1(0, t) = u_{8x}^1(l_8, t) = 0. \end{aligned}$$

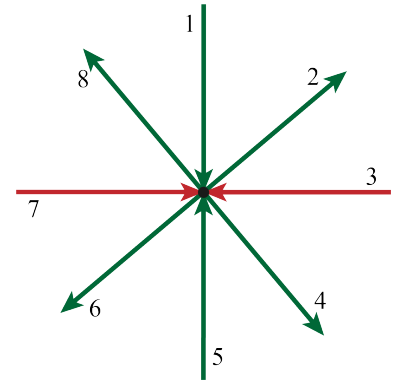
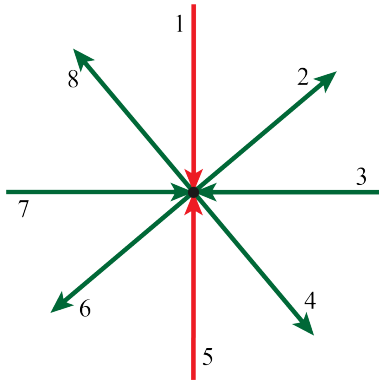


Рис. 4: Перекресток в состоянии перед сменой сигнала светофора, в период времени  $[\tau_{j-1}, \tau_j]$       Рис. 5: Перекресток в состоянии, следующем за сменой сигнала светофора, в период времени  $[\tau_j, \tau_{j+1}]$

Длина  $k$ -ого ребра  $l_k$  измеряется в линейных метрических единицах (километры или мили), однако в математической модели транспортного потока величина  $l_k$  безразмерна. Общее число всех задействованных и подлежащих использованию для транспорта полос на дороге, на проезжей части, идущих в одном направлении  $d_k$  называется "пропускная способность" таким образом, чтобы не допустить путаницу, стоит сразу уточнить, что в прочтении для математических моделей величина  $d_k$  является безразмерной. Примем, что в условиях нахождения на перекрёстке, все соотносящиеся с ним, примыкающие полосы, пути и дороги являются равноценными, следовательно примем и утверждение об однозначности, одинаковой пропускной способности, вероятной для каждого направления, таким образом  $d_1 = d_2 = \dots = d_8 = d$ .

Для определения дорожного потока здесь и далее будут применяться варианты и реализации по уравнениям Осколкова, которые зададим на геометрическом графе  $\mathbf{G}_1$

$$\lambda u_{kt}^1 - u_{ktxx}^1 = \nu u_{kxx}^1 + f_k^1, \quad k = \overline{1, 8}. \quad (2.1.3)$$

Здесь  $u_k^1 = u_k^1(x, t)$ ,  $x \in [0, l_k]$ ,  $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$  ( $\equiv \{0\} \cup \mathbb{R}_+$ ),  $k = \overline{1, 8}$ , характеризует среднюю скорость транспортного потока на множестве ребер  $E_k$  геометрического графа  $\mathbf{G}_1$ . Усредненной силой, которая заставляет крутиться колеса транспортных средств, будем считать  $f_k = f_k(x, t)$ ,  $(x, t) \in [0, l_{ik}] \times \overline{\mathbb{R}}_+$ . Для коэффициента  $\lambda$  актуально значение, приравненное к единице, которую в свою очередь разделили на коэффициент ретардации, которые могут приобретать значения отрицательного спектра, следовательно, принимается, что  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Вязкость транспортного потока, а именно, его способность «гасить» резкие перепады скорости, задает коэффициент  $\nu$ , в силу физического смысла  $\nu \in \mathbb{R}_+$ .

Рассмотрим перекресток в начальный момент включения светофора, когда режим перекрестка меняется с нерегулируемого (желтый мигающий режим светофора) на регулируемый и обозначим этот момент  $t = \tau_0$ . Предположим, что в этот момент на первом и пятом ребре сигнал светофора красный, т.е. скорости потока на этих ребрах для определенности возьмем равными нулю  $u_1^1(x, \tau_0) = u_5^1(x, \tau_0) = 0$ , на остальных ребрах  $u_k^1(x, \tau_0) = u_{0k}^1(x)$ ,  $k = 2, 3, 4, 6, 7, 8$ . В общем виде запишем эти условия

$$P(u^1(x, \tau_0) - u_0^1(x)) = 0.$$

При достижении времени  $t = \tau_1$  сигнал светофора изменится, дорожные потоки на перекрестке будут другие, поэтому будем рассматривать новый геометрический граф  $\mathbf{G}_2$  (рис. 5). На этом геометрическом графе уравнения примут вид

$$\lambda u_{kt}^2 - u_{ktxx}^2 = \nu u_{kxx}^2 + f_k^2, \quad k = \overline{1, 8}, \quad (2.1.4)$$

а условия «непрерывности» и «баланса потока»

$$\begin{aligned} u_1^2(l_1, t) = u_2^2(0, t) = u_3^2(l_3, t) = u_4^2(0, t) = \\ = u_5^2(l_5, t) = u_6^2(0, t) = u_7^2(l_7, t) = u_8^2(0, t), \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

$$\begin{aligned} du_{1x}^2(l_1, t) - du_{2x}^2(0, t) + du_{3x}^2(l_3, t) - du_{4x}^2(0, t) + \\ + du_{5x}^2(l_5, t) - du_{6x}^2(0, t) + du_{7x}^2(l_7, t) - du_{8x}^2(0, t) = 0, \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

$$\begin{aligned} u_{1x}^2(0, t) = u_{2x}^2(l_2, t) = u_{3x}^2(0, t) = u_{4x}^2(l_4, t) = \\ = u_{5x}^2(0, t) = u_{6x}^2(l_6, t) = u_{7x}^2(0, t) = u_{8x}^2(l_8, t) = 0. \end{aligned}$$

При смене сигнала светофора в момент времени  $t = \tau_1$  средняя скорость третьего и седьмого ребер будет стремиться к нулю, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \tau_2} u_3^2(x, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \tau_2} u_7^2(x, t) = 0.$$

При этом на остальных ребрах скорость будет той, которая достигнута на ребре, которое соответствует процессу, да вдобавок в определённый момент времени  $\tau_1$ , и конкретно  $u_k^2(x, \tau_1) = u_k^1(x, \tau_1) = u_{1k}^2(x)$ ,  $k = 1, 2, 4, 5, 6, 8$ . В общем виде эти условия примут вид

$$P(u^2(x, \tau_1) - u_1^2(x)) = 0.$$

Продолжая процедуру переключения светофора в моменты времени  $t = \tau_j$ ,  $j = \overline{0, n}$ , и при четных  $n$  рассматривать перекресток как геометрический граф  $\mathbf{G}_1$ , а при нечетных  $n$  - как геометрический граф  $\mathbf{G}_2$ . В общем виде многоточечные начально-конечные условия приобретут такие черты

$$P(u^m(x, \tau_j) - u_j^m(x)) = 0, \quad j = \overline{0, n}, \quad m = 1, 2, \quad (2.1.7)$$

где  $\tau_j$  - мгновение, когда будет сигнал светофора поменяется.

## 2.2 Абстрактная модель

Здесь от нас требуется рассмотрение при построении на пространстве банаховых пространств  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  операторов  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ,  $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ , с условием, что оператор  $M$  ( $L, p$ )-ограниченный,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ .

При работе с линейным неоднородным уравнением, построенным по соболевскому типу

$$L\dot{u} = Mu + f. \quad (2.2.1)$$

требуется формулировка многоточечного начально-конечного условия

$$P(u(\tau_j) - u_j) = 0, \quad j = \overline{0, n}, \quad (2.2.2)$$

где  $\tau_j \in \mathfrak{J} = [0, \tau]$ ,  $(\tau_{j-1} < \tau_j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ;  $u_j \in \mathfrak{U}$ ,  $j = \overline{0, n}$ ,  $f \in C^\infty(\mathfrak{J}; \mathfrak{F})$ .

Назовем вектор-функцию  $u \in C^\infty(\mathfrak{J}; \mathfrak{U})$  решением уравнения (2.2.1), если она удовлетворяет этому уравнению. Назовем решение  $u = u(t)$ ,  $t \in \mathfrak{J}$ , уравнения (2.2.1) решением многоточечной начально-конечной задачи для уравнения (2.2.1), если оно дополнительно удовлетворяет условиям (2.2.2).

**Теорема 2.2.1.** *Если оператор  $M$   $(L, p)$ -ограничен,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ , то для любых  $f \in C^\infty(\mathfrak{J}; \mathfrak{F})$ ,  $u_j \in \mathfrak{U}$ ,  $j = \overline{0, n}$ , задача (2.2.1), (2.2.2) однозначно разрешима, причем решение имеет вид*

$$u(t) = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) f^{(k)}(t) + \sum_{j=0}^n U^{t-\tau_j} u_j + \sum_{j=0}^n \int_{\tau_j}^t U^{t-s} L_1^{-1} Q f(s) ds. \quad (2.2.3)$$

- Уравнение (2.2.1) сведем к системе

$$H\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) f, \quad \dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1} Q f, \quad (2.2.4)$$

где  $u^0 = (\mathbb{I} - P)u$ ,  $u^1 = Pu$ ,  $j = \overline{0, n}$ ,

Для нахождения первого слагаемого необходимо последовательно продифференцировать первое уравнение (2.2.4), при этом умножать его на  $H$  слева. Используя нильпотентность оператора  $H$ , получим

$$u^0(t) = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) f^{(k)}(t). \quad (2.2.5)$$

Заметив, что проектор  $P$  является единичным оператором на  $\mathfrak{U}^1$ , в силу (2.2.2) сформулируем условия Коши в различные моменты времени для

второго уравнения (2.2.4)

$$\dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1}Qf, \quad u^1(\tau_j) = Pu_j, \quad j = \overline{0, n}. \quad (2.2.6)$$

Последовательно решая задачи (2.2.6), получим

$$u^1(t) = U^{t-\tau_j}u_j + \int_{\tau_j}^t U^{t-s}L_1^{-1}Qf(s)ds, \quad j = \overline{0, n}. \quad (2.2.7)$$

Складывая (2.2.5) и (2.2.7), получим (2.2.3). Единственность решения задачи (2.2.1), (2.2.2) в силу приведенного доказательства очевидна. •

Рассмотрим теперь геометрический граф - конечный связный геометрический граф  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ . Здесь множество вершин (ребер) обозначено  $\mathfrak{V} = \{V_k\}$  ( $\mathfrak{E} = \{E_k\}$ ). Примем как дополнительное условие - равнозначность значений длины каждой диги  $E_j$  и эта длина будет равна  $l_j \in \mathbb{R}_+$  в сумме с площадью поперечного сечения  $d_j \in \mathbb{R}_+$ . Актуальным для вершин  $\mathfrak{V}$  на геометрическом графе  $\mathbf{G}$  становится воспроизведение условий, то есть «непрерывность» в совокупности с «балансом потока» что можно соотнести с

$$u_j(0, t) = u_h(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t), \quad (2.2.8)$$

$$E_j, E_h \in E^\alpha(V_k), E_m, E_n \in E^\omega(V_k),$$

$$\sum_{j: E_j \in E^\alpha(V_k)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{n: E_n \in E^\omega(V_k)} d_n u_{nx}(l_n, t) = 0, \quad (2.2.9)$$

где через  $E^{\alpha(\omega)}(V_k)$  обозначено множество ребер с началом (концом) в вершине  $V_k$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Введем множество

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_k, \dots) : g_k \in L_2(0, l_k)\}, \quad (2.2.10)$$

являющееся гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_k \in \mathfrak{E}} b_k \int_0^{l_k} g_k(x) h_k(x) dx. \quad (2.2.11)$$



Определим гильбертово пространство

$$\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_k, \dots) : u_k \in W_2^1(0, l_k)\}, \quad (2.2.12)$$

со скалярным произведением

$$[u, v] = \sum_{E_k \in \mathcal{E}} d_k \int_0^{l_k} (u_{kx} v_{kx}(x) + u_k v_{kx}(x)) dx. \quad (2.2.13)$$

и нормой

$$\|u\|_{\mathfrak{U}}^2 = \sum_{E_k \in \mathcal{E}} d_k \int_0^{l_k} (u_{kx}^2(x) + u_k^2(x)) dx. \quad (2.2.14)$$

Такое определение пространства  $\mathfrak{U}$  корректно, кроме того,  $\mathfrak{U}$  плотно и компактно вложено в  $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ . Это утверждение следует из теорем вложения Соболева и определения пространства  $W_2^1(0, l_k)$  абсолютно непрерывных функций.

Введем теперь пространство  $\mathfrak{F}$ , сопряженное относительно двойственности  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  к  $\mathfrak{U}$ . Для этого отождествим  $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$  со своим сопряженным. Пространство  $\mathfrak{F}$  является банаховым, причем имеет место компактное вложение  $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ .

Зададим линейный оператор  $A : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$  следующим способом:

$$\langle Au, v \rangle = \sum_{E_k \in \mathcal{E}} b_k \int_0^{l_k} (u_{kx}(x)v_{kx}(x) + au_k(x)v_k(x)) dx, \quad (2.2.15)$$

в котором  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $u, v$  пребывают в качестве элементов для  $\mathfrak{U}$ . Свойство непрерывности, а также инъективности  $A$  вытекает из заданного

$$|\langle Au, v \rangle| \leq C_1 \|u\|_{\mathfrak{U}} \|v\|_{\mathfrak{U}} \quad (2.2.16)$$

по причине существования неравенства Коши - Буняковского, вдобавок с

$$C_2 \|u\|_{\mathfrak{U}}^2 \leq \langle Au, u \rangle \leq C_3 \|u\|_{\mathfrak{U}}^2 \quad (2.2.17)$$

для каждого из  $u, v \in \mathfrak{U}$  а также отдельных  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}_+$ . Следующим этапом рассуждений, что в силу означенных свойств пространства  $\mathfrak{U}$  оно

рефлексивно, и в этот самый момент оператор  $A$  самосопряженный, делаем вывод об операторе  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$  который биективен, к тому же отсюда следует существование обратного оператора  $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$  обоснованного теоремой Банаха. Из-за того, что вложение  $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$  является компактным, оператор  $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$  также выступает как компактный. Следует отметить также, что обусловленный первой оценкой (2.2.17) сюръективный сопряженный оператор  $A^* : \mathfrak{F}^* \rightarrow \mathfrak{U}^*$ . Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что обозначенный для оператора  $A$  спектр является вещественным, дискретным, конечнократным и сгущающимся исключительно в приближении к  $+\infty$ .

При зафиксированных  $\nu \in \mathbb{R}_+$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$  и построим операторы

$$L = (\lambda - a)\mathbb{I} + A, \quad M = \nu(a\mathbb{I} - A). \quad (2.2.18)$$

Тогда имеет место следующая

**Теорема 2.2.2.** *Оператор  $L : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$  линеен и непрерывен, и его спектр  $\sigma(L)$  является вещественным, дискретным, конечнократным и сгущается только к  $-\infty$ . Оператор  $M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$  линейный и непрерывный.*

На основании теоремы (2.2.2) имеет место

**Следствие 2.2.1.** *Оператор  $L$  - фредгольмов, причем  $\ker L = \{0\}$ , если  $0 \notin \sigma(L)$ .*

Пусть  $\{\lambda_r\}$  - принадлежащие оператору  $A$  собственные значения, которые занумеруются по порядку неубывания, с выполнением условия их кратности; а  $\{\varphi_r\}$  - соответствующие им ортонормированные в смысле  $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$  функции. Для заданных условий построим проектор и разрешающую группу

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } 0 \notin \sigma(L); \\ \mathbb{I} - \sum_{\lambda_r = \lambda - a} \langle \cdot, \varphi_r \rangle \varphi_r, & \text{если } 0 \in \sigma(L); \end{cases} \quad U^t = \sum_{r=1}^{\infty} e^{\mu_r t} \langle \cdot, \varphi_r \rangle \varphi_r, \quad (2.2.19)$$

следует принять, что появление штриха возле знака суммы несёт значение отсутствия для членов ряда, номера которых  $r$  такие, что  $\lambda_r = \lambda - a$ ;  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -скалярное произведение в  $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ .  $L$ -спектр оператора  $M$  приобретает означенный вид

$$\sigma^L(M) = \{\mu_r = \frac{\nu(a - \lambda_r)}{\lambda - (a + \lambda_r)}, r \in \mathbb{N}\}. \quad (2.2.20)$$

**Лемма 2.2.1.** Пусть параметры  $\nu \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , тогда оператор  $M$   $(L, 0)$ -ограничен.

Возьмем  $\tau_j \in \overline{\mathbb{R}_+}$ ,  $j = \overline{0, n}$ , такие что  $\tau_{j-1} < \tau_j$  для  $j = \overline{1, n}$ ,  $u_j \in \mathfrak{U}$ ,  $j = \overline{0, n}$ , и рассмотрим задачу (2.2.1), (2.2.2), где операторы  $L$  и  $M$  из (2.2.18).

**Теорема 2.2.3.** Для всех значений  $\lambda$ ,  $\nu \in \mathbb{R}_+$ ,  $u_j \in \mathfrak{U}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , задача (0.0.3), (1.6.2), (1.6.2), (2.2.2) в условиях с уравнениями (2.2.1) обладает единственным решением  $u \in C^\infty(\mathcal{I}; \mathfrak{U})$ .

### 2.3 Модификация математической модели транспортного потока в населенном пункте

Далее анализируется и изучается одно из конечных упорядоченных множеств  $\mathbf{G} = \{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \dots, \mathbf{G}_i, \dots\}$  на конечном связном геометрическом графе и  $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i(\mathcal{V}_i, \mathcal{E}_i)$ . Каждая пара геометрических графов  $\mathbf{G}_i$  и  $\mathbf{G}_{i+1}$  соответствует  $i$ -тому перекрестку до запуска работы светофора и тогда, когда светофор уже работает, который определяется в п.2.1. Примем, что тут  $\mathcal{V}_i = \{V_{ij}\}$  - является множеством вершин геометрического графа  $\mathbf{G}_i$ , а  $\mathcal{E}_i = \{E_{ik}\}$  - является множеством ребер  $\mathbf{G}_i$ . При работе с геометрическим графом  $\mathbf{G}_i$  каждой ребре  $E_{ik}$  поставлено в соответствие два числа - «длина» ребра  $l_{ik} \in \mathbb{R}_+$  и её «ширина»  $d_{ik} \in \mathbb{R}_+$ .

Необходимо найти на промежутке времени  $[\tau_{j-1}, \tau_j]$  решения уравнений Осколкова

$$\lambda_i u_{ikt} - u_{ikt} x x = \nu_i u_{ik} x x + f_{ik}, \quad (2.3.1)$$

заданного на каждой ребре  $E_{ik}$  каждого геометрического графа  $\mathbf{G}_i$ . Коэффициенты  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  и  $\nu_i \in \mathbb{R}_+$  имеют смысл, как в п.2.1.

Рассмотрим первое условие на скоростной режим при проезде перекрестка, заключающееся в равенстве скоростей транспортного средства при въезде и съезде с перекрестка, иначе на перекрестке возможны заторы или ДТП. Данное условие в математической модели является *условием непрерывности*

$$\begin{aligned} u_{ik}(0, t) = u_{im}(l_{im}, t) = u_{il}(0, t) = u_{in}(l_{in}, t), \\ \forall E_{ik} \in E^\alpha(V_{ij}), \forall E_{im} \in E^\omega(V_{ij}). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Тут принимается  $E^\alpha(V_{ij})$  как символ для обозначения множества ребер геометрического графа  $\mathbf{G}_i$ , которые объединены общим выходом из из вершины  $V_{ij}$ , а  $E^{\alpha(\omega)}(V_{ij})$  представляет нам обозначение для множества ребер геометрического графа  $\mathbf{G}_i$ , входящих в вершину  $V_{ij}$ ).

Второе условие скоростного режима при проезде перекрестка - союлюдается подобным первому образом, то есть тут совпадает количество выезжающих и съезжающих на перекресток транспортных средств. В математической модели оно сформулировано как *условие баланса потоков*

$$\sum_{E_{ik} \in E^\alpha(V_{ij})} b_{ik} u_{ikx}(0, t) - \sum_{E_{im} \in E^\omega(V_{ij})} b_{im} u_{imx}(l_{im}, t) = 0. \quad (2.3.3)$$

Следуя схеме, изложенной в п.2.2 для одного перекрестка, покажем однозначную разрешимость для всего населенного пункта  $\mathbf{\Gamma}$ . Рассмотрим гильбертово пространство

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{G}_i) = \{g_i = (g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{ik}, \dots) : g_{ik} \in L_2(0, l_{ik})\}$$

со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle_i = \sum_{E_{ik} \in \mathcal{E}_i} b_{ik} \int_0^{l_{ik}} u_{ik} v_{ik} dx.$$

Кроме того, проанализируем и подробно исследуем пространство

$$\mathfrak{U}(\mathbf{G}_i) = \{u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ik}, \dots) : u_{ik} \in W_2^1(0, l_{ik})\}$$

и соблюдаются или такие условия (2.3.2) - (2.3.3) в каждой вершине  $V_{ij} \in \mathcal{V}_i$  со скалярным произведением

$$[u, v]_i = \sum_{E_{ik} \in \mathcal{E}_i} b_{ik} \int_0^{l_{ik}} (u_{ikx} v_{ikx} + u_{ik} v_{ik}) dx.$$

Отождествим  $\mathbf{L}_2(\mathbf{G}_i)$  с его же сопряженным, а также сквозь  $\mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$  примем обозначение, которое сопрягается с  $\mathfrak{U}(\mathbf{G}_i)$  относительной двойственностью  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  пространство. Отметим о плотных и непрерывных вложениях  $\mathfrak{U}(\mathbf{G}_i) \hookrightarrow \mathbf{L}_2(\mathbf{G}_i) \hookrightarrow \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$  вдобавок, мы отметим, определяется значимостью теорем вложения Соболева функции из  $W_2^1(0, l_{ik})$  п.в. на  $[0, l_{ik}]$  совпадают с абсолютно непрерывными функциями, поэтому пространства  $\mathfrak{U}(\mathbf{G}_i)$  определяются адекватным образом.

Примем  $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$  в совокупности с формулой

$$\langle L_i u_i, v_i \rangle_i = \sum_{E_{ik} \in \mathcal{E}_i} b_{ik} \int_0^{l_{ik}} (u_{ikx} v_{ikx} + \lambda_i u_{ik} v_{ik}) dx, \quad u_i, v_i \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i),$$

зададим оператор  $L_i \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}(\mathbf{G}_i); \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i))$ . Рассмотрим пространство

$$\mathfrak{A}(\mathbf{G}_i) = \{u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ik}, \dots) : u_{ik} \in C^2(0, l_{ik}) \cap C^1[0, l_{ik}]\}$$

и выполнены либо условия (2.3.2) - (2.3.3), в каждой вершине  $V_{ij} \in \mathcal{V}_i$ .

Становятся несомненными вклады плотного и непрерывного характера  $\mathfrak{A}(\mathbf{G}_i) \hookrightarrow \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i)$ , и стоит отдельно отметить  $\langle (\lambda_i u_i - u_{ixx}, v_i) \rangle_i = \langle L_i u_i, v_i \rangle_i$  при всех  $u_i, v_i \in \mathfrak{A}(\mathbf{G}_i)$ . Следовательно, условия, согласно которым создается баланс потоков ((2.3.3) «спрятаны» в том значении, которое придает О.А. Ладыженская определению операторов  $L_i$ .

Примем  $\nu_i \in \mathbb{R}_+$ , далее захватим  $M_i = \nu_i(\lambda_i \mathbb{I}_i - L_i)$ , где  $\mathbb{I}_i : \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$  является оператором вложения. Рассмотрим уравнение

$$L_i u_{it} = M_i u_i + f_i. \quad (2.3.4)$$

Для вектор-функции  $u_i \in C^1((\tau_{j-1}, \tau_j); \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i))$ , удовлетворяющей (2.3.4) при отдельных случаях  $f_i \in \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$ , будем именовать как *решение уравнения* (2.3.4), удовлетворяющее многоточечному начально-конечному условию

$$P_i(u_i(\tau_j) - u_{ij}) = 0, \quad j = \overline{0, n}. \quad (2.3.5)$$

где  $P_i$  - *относительно спектральные проекторы*, причем в момент времени  $\tau_j$  скорость, которая была потоком и этому моменту становится начальной

**Лемма 2.3.1.** *При любых  $\lambda_i, \nu_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $f_i \in \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$  и  $u_{0i} \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i)$  существует единственное решение задачи (2.3.4), (2.3.5).*

После всех операций по условиям  $u_{m+1}(\tau_m) = u_m(\tau_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, i, \dots$ , «соединим» решений задач (2.3.4), (2.3.5), чьи фактическое пребывание и единичность проистекает из выводов по лемме 2.3.1. При рассмотрении ситуации с одного края, согласно с определением  $u_m(\tau_m) \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_m)$ ; но по другому краю, по лемме 2.3.1 требует, чтобы  $u_m(\tau_m) \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_{m+1})$ . Поэтому в силу леммы 2.3.1 имеет место следующая

**Теорема 2.3.1.** *При любых  $\lambda_i, \nu_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $f_i \in \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$  и*

$$u_0 \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_1) \quad \text{таких, что } u_m(\tau_m) \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_{m+1}), \quad m = 1, 2, \dots, i, \dots, \quad (2.3.6)$$

*существует единственное решение задачи (2.3.1) - (2.3.3).*

## 2.4 Алгоритм численного решения

Разработанный в п. 2.4 алгоритм численных методов исследования математических моделей транспортного потока на геометрическом графе реализованы в программном комплексе «Программный комплекс моделирования дорожного движения на перекрестке» в системе Maple 2017.

Рассмотрим обобщенную схему алгоритма работы модулей программного комплекса (рис.6).

Этап 1. Внесение в диалоговом окне входных данных: параметры уравнения Осколкова  $\lambda, \nu, n, l, k, \tau_j$ , начальные функции определяющие скорость, параметры, характеризующие длины ребер геометрического графа.

Этап 2. Представление приближенного решения в виде галеркинской суммы

$$\sum_{k=1}^N u_k(t)\varphi_k(x)$$

осуществляется в цикле от 1 до  $N$ . Пользователем задается количество слагаемых.

Этап 3. Подстановка приближенного решения в уравнение осуществляется с помощью процедуры **subs**.

Этап 4. Найдем собственные функции, которые находятся при решении задачи Штурма - Лиувилля.

Этап 5. Цикл стартует в условиях по  $k$  от 1 до  $N$ . Полученное уравнение, а также стартовые функции преобразуются с помощью умножения на собственную, принадлежащую им функцию  $\varphi_k(x)$  скалярно. Получаем уравнение и начальные условия на функцию  $u_k(t)$ .

Этап 6. Для каждого ребра в цикле от 1 до  $N$  составляется система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Этап 7. Для каждого ребра составляются многоточечные начально-конечные условия для системы уравнений..

Этап 8. Начальные функции для каждого ребра раскладываются в галеркинскую сумму, и уже при переходе из которых, рассчитываются условия стартовой ситуации по системе уравнений, которая была выведена из расчетов предыдущего шага.

Этап 9. Полученная система однородных дифференциальных уравнений с начальными данными решается методом, встроенным в пакет Maple 2017.

Этап 10. То решение, которое было выведено в рамках предыдущего этапа транслируется на монитор как функции посредством графика с анимированием.

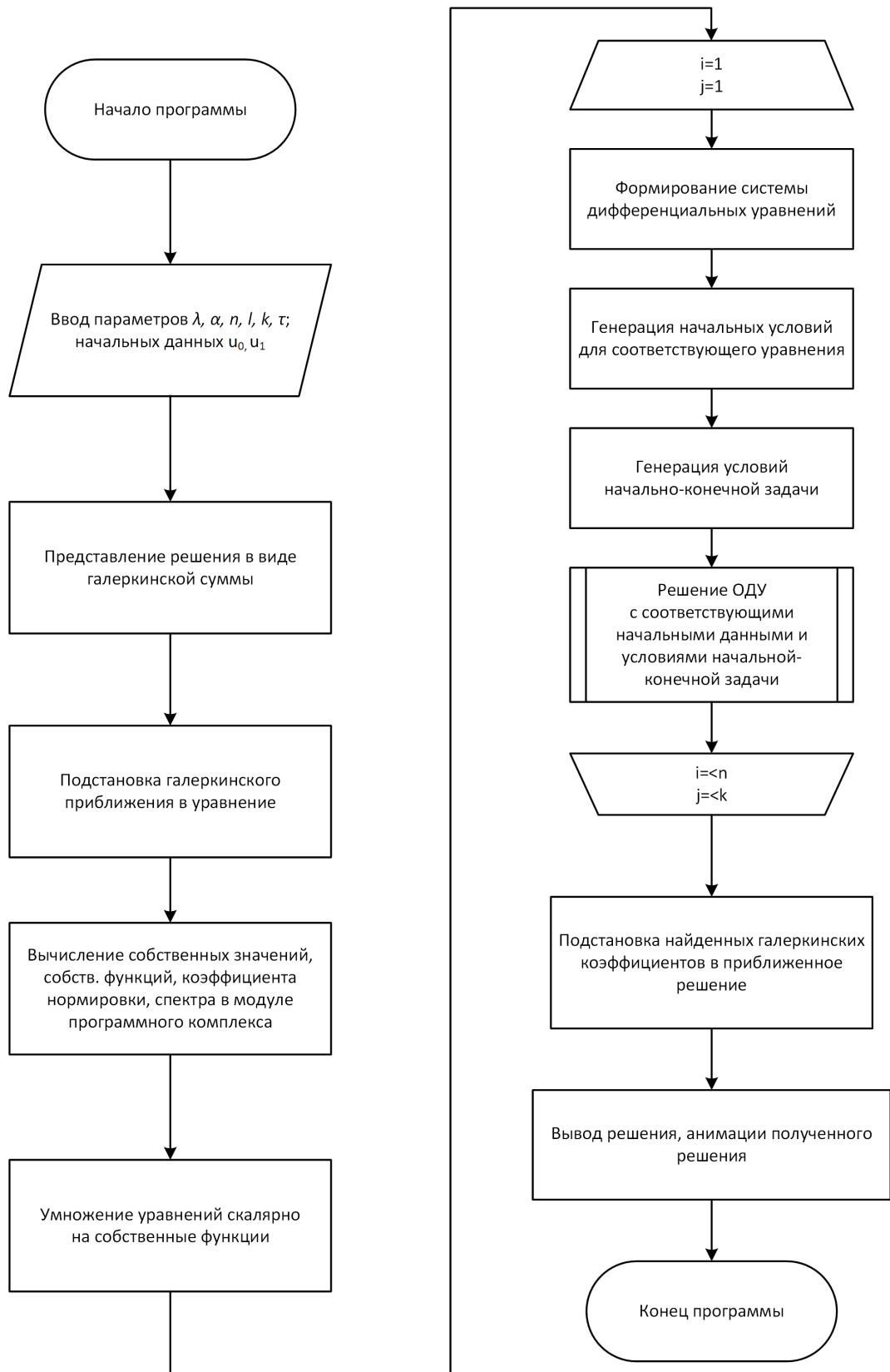


Рис. 6: Программа 1 Блок-схема



## 2.5 Описание программы для ЭВМ

*Функциональное назначение программы, область её применения.*

Программная структура создавалась и существует для численного рассмотрения моделей построения транспортного потока с многоточечным начально-конечным условием в зависимости от заданных параметров и начальных данных. Напомним, что в основе модели транспортного потока лежат уравнения Осколкова, рассмотренные на геометрическом графе. Программный комплекс состоит из трех модулей и реализует модифицированным метод Галеркина. В каждом из трех модулей будут поисковым способом обнаружены решения, которые представляются галеркин-ской суммой, согласно совокупности нескольких первых собственных функций. Программный комплекс делает воплотимым график на основе численных решений по указанным задачам. Он предназначен специалистам в области математического моделирования, а также может быть использован в магистратуре и аспирантуре при изучении элективных дисциплин, связанных с исследованием вырожденных моделей. Отдельно сами по себе процессы и алгоритмы программы, которые позволяют найти собственные значения и собственные функции в перспективе приспособлены в применении составными частями для различных авторских программ, приспособленных для исследования по неклассическим моделям математической физики.

*Описание логической структуры.*

На старте работы с программой пользователю предлагается ввести параметры задачи. После запускается модули программного комплекса. Который состоит из:

- ввод данных;
- нахождение собственных значений и собственных векторов
- процедура вывода решения;
- вывод решения и соответствующего ему графика.

### *Используемые технические средства*

В процессе, посвященном воплощению и реализации по составленным вычислительным алгоритмам были использованы входящие в стандартный пакет функций и операторов программ Maple 15.0. В создании окон диалоговых отдельно подключался другой пакет - Maplets[Elements]. Для проведения расчётов по интегралам от спец. функций автор испытал и позже задействовал пакет IntegrationTools. Графическим средством создания требуемых изображений был пакет программ plots. Для дальнейшего изучения конкретного вопроса был создан авторский М-файл по исследованию (нахождению решения) в условиях размещения представленных программе математических моделей Осколкова на виртуальном графе. Означенная программа вводилась в эксплуатацию посредством технического обрудования данных параметров: персональный компьютер, оснащённый платформой Intel (80 × 86), который в свою очередь работал в оболочке операционной системы Microsoft Windows.

### *Выходные данные*

В качестве выходных данных подразумевается выведение на монитор результатов по собственным значениям и собственным функциям, один из компонентов решения  $u_k(t)$ , а также графиком решения  $u(x, t)$  в заданные моменты тайминга, а также анимацию дорожного движения по мере изменения показателя времени.

Программный комплекс зарегистрирован в Реестре программ для ЭВМ.

## **2.6 Вычислительный эксперимент**

Рассмотрим на геометрическом графе  $\mathbf{G}$  линеаризованные уравнения Осколкова

$$\lambda u_{kt} - u_{ktxx} = \nu u_{kxx} + f_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.6.1)$$

с условиями «непрерывности»

$$\begin{aligned} u_1(l_1, t) &= u_2(0, t) = u_3(l_3, t) = u_4(0, t) = \\ &= u_5(l_5, t) = u_6(0, t) = u_7(l_7, t) = u_8(0, t), \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

а также с «балансом потока»

$$\begin{aligned} d_1 u_{1x}(l_1, t) + d_3 u_{3x}(l_3, t) + d_5 u_{5x}(l_5, t) + d_7 u_{7x}(l_7, t) - \\ - d_2 u_{2x}(0, t) - d_4 u_{4x}(0, t) - d_6 u_{6x}(0, t) - d_8 u_{8x}(0, t) &= 0, \\ u_{1x}(0, t) = u_{2x}(l_2, t) = u_{3x}(0, t) = u_{4x}(l_4, t) = \\ = u_{5x}(0, t) = u_{6x}(l_6, t) = u_{7x}(0, t) = u_{8x}(l_8, t) &= 0, \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Будем данный геометрический граф рассматривать как перекресток, на котором все примыкающие дороги равнозначны и для безопасного движения требуется задавать режим проезда перекрестка, а именно, необходим светофор. Поскольку все дороги перекрестка равнозначны, будем считать, что пропускная способность каждого направления будет одинакова, т.е.  $d_1 = d_2 = \dots = d_8 = d$ .

Дополним задачу начально-конечным условием

$$\sum_{k: \mu_k \in \sigma^L(M)} \langle (u(\tau_k) - u_k), X^k \rangle X^k = 0, u_k(\tau_{k-1}) = u_k. \quad (2.6.4)$$

В силу теоремы 2.2.1 решение будет иметь вид

$$u(t) = \sum_{k: \mu_k \in \sigma^L(M)} e^{\mu_k(t - \tau_k)} \langle u_k, X^k \rangle_{L_2(\mathbf{G})} X^k, \quad (2.6.5)$$

где функции  $X^k$  являются собственными в условиях функций по задаче Штурма - Лиувилля, и выведены с помощью графа  $\mathbf{G}$ . Рассмотрим задачу Штурма - Лиувилля для уравнения (1.6.1) для геометрического графа  $\mathbf{G}$ , который состоит из восьми ребер длин  $l_1, l_2, \dots, l_8$ , соединяющих девять вершин вершины (см. рис. 15). Будем считать площади поперечных сечений ребер геометрического графов  $d_1, d_2, \dots, d_8$ .

Теперь займемся поиском собственных функций  $X^k$  а также собственных значений  $\lambda^k$  соотнесенных с задачей Штурма - Лиувилля на данном

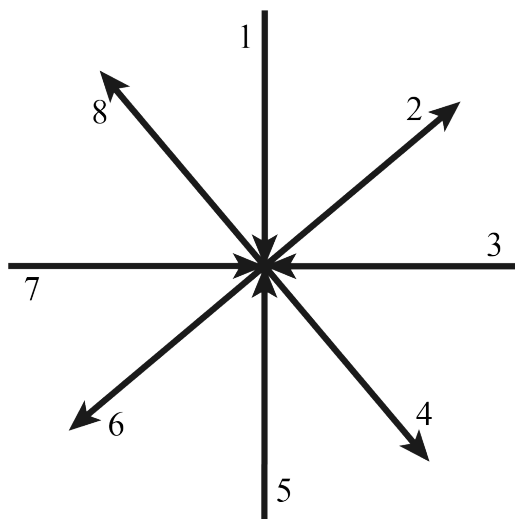


Рис. 7: Граф G

геометрическом графе  $\mathbf{G}$ . Условия (2.6.2), (3.4.1) примут вид

$$\left\{ \begin{array}{l} X'_1(0) = X'_3(0) = X'_5(0) = X'_7(0) = 0, \\ X'_2(l_2) = X'_4(l_4) = X'_6(l_6) = X'_8(l_8) = 0, \\ dX'_1(l_1) + dX'_3(l_3) + dX'_5(l_5) + dX'_7(l_7) - \\ -dX'_2(0) - dX'_4(0) - dX'_6(0) - dX'_8(0) = 0, \\ X_1(l_1) = X_2(0), \\ X_3(l_3) = X_4(0), \\ X_5(l_5) = X_6(0), \\ X_7(l_7) = X_8(0), \end{array} \right. \quad (2.6.6)$$

Требуется найти ненулевое решение  $X(x) = (X_1(x), \dots, X_8(x))$  (собствен-

ные функции) системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1'' + \lambda X_1 = 0, \\ X_2'' + \lambda X_2 = 0, \\ X_3'' + \lambda X_3 = 0, \\ X_4'' + \lambda X_4 = 0, \\ X_5'' + \lambda X_5 = 0, \\ X_6'' + \lambda X_6 = 0, \\ X_7'' + \lambda X_7 = 0, \\ X_8'' + \lambda X_8 = 0, \end{array} \right. \quad (2.6.7)$$

с условиями (2.6.6). Тогда общие решения уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} X_1 &= C_{11} \cos \sqrt{\lambda}x + C_{12} \sin \sqrt{\lambda}x, \\ X_2 &= C_{21} \cos \sqrt{\lambda}x + C_{22} \sin \sqrt{\lambda}x, \\ X_3 &= C_{31} \cos \sqrt{\lambda}x + C_{32} \sin \sqrt{\lambda}x, \\ X_4 &= C_{41} \cos \sqrt{\lambda}x + C_{42} \sin \sqrt{\lambda}x, \\ X_5 &= C_{51} \cos \sqrt{\lambda}x + C_{52} \sin \sqrt{\lambda}x, \\ X_6 &= C_{61} \cos \sqrt{\lambda}x + C_{62} \sin \sqrt{\lambda}x, \\ X_7 &= C_{71} \cos \sqrt{\lambda}x + C_{72} \sin \sqrt{\lambda}x, \\ X_8 &= C_{81} \cos \sqrt{\lambda}x + C_{82} \sin \sqrt{\lambda}x. \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Подставим условия (2.6.6) в общие решения (2.6.8) системы уравнений (2.6.7) и получим систему алгебраических уравнений относительно  $C_{i1}$ ,  $C_{i2}$ ,

$i = \overline{1, 8}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sqrt{\lambda}C_{12} = \sqrt{\lambda}C_{32} = \sqrt{\lambda}C_{52} = \sqrt{\lambda}C_{72} = 0, \\
 C_{11} \cos \sqrt{\lambda}l_1 + C_{12} \sin \sqrt{\lambda}l_1 = C_{21}, \\
 C_{31} \cos \sqrt{\lambda}l_3 + C_{32} \sin \sqrt{\lambda}l_3 = C_{41}, \\
 C_{51} \cos \sqrt{\lambda}l_5 + C_{52} \sin \sqrt{\lambda}l_5 = C_{61}, \\
 C_{71} \cos \sqrt{\lambda}l_7 + C_{72} \sin \sqrt{\lambda}l_7 = C_{81}, \\
 -\sqrt{\lambda}C_{21} \sin \sqrt{\lambda}l_2 + \sqrt{\lambda}C_{22} \cos \sqrt{\lambda}l_2 = 0, \\
 -\sqrt{\lambda}C_{41} \sin \sqrt{\lambda}l_4 + \sqrt{\lambda}C_{42} \cos \sqrt{\lambda}l_4 = 0, \\
 -\sqrt{\lambda}C_{61} \sin \sqrt{\lambda}l_6 + \sqrt{\lambda}C_{62} \cos \sqrt{\lambda}l_6 = 0, \\
 -\sqrt{\lambda}C_{81} \sin \sqrt{\lambda}l_8 + \sqrt{\lambda}C_{82} \cos \sqrt{\lambda}l_8 = 0, \\
 -d\sqrt{\lambda}C_{11} \sin \sqrt{\lambda}l_1 + d\sqrt{\lambda}C_{12} \cos \sqrt{\lambda}l_1 - d\sqrt{\lambda}C_{22} - \\
 -d\sqrt{\lambda}C_{31} \sin \sqrt{\lambda}l_3 + d\sqrt{\lambda}C_{32} \cos \sqrt{\lambda}l_3 - d\sqrt{\lambda}C_{42} - \\
 -d\sqrt{\lambda}C_{51} \sin \sqrt{\lambda}l_5 + d\sqrt{\lambda}C_{52} \cos \sqrt{\lambda}l_5 - d\sqrt{\lambda}C_{62} - \\
 -d\sqrt{\lambda}C_{71} \sin \sqrt{\lambda}l_7 + d\sqrt{\lambda}C_{72} \cos \sqrt{\lambda}l_7 - d\sqrt{\lambda}C_{82} = 0, \\
 C_{21} = C_{41} = C_{61} = C_{81}.
 \end{array} \right. \quad (2.6.9)$$

Будем последовательно решать систему (2.6.9). Из первого равенства получим

$$C_{12} = C_{32} = C_{52} = C_{72} = 0.$$

С учетом этого следующие четыре равенства будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 C_{11} \cos \sqrt{\lambda}l_1 &= C_{21}, \\
 C_{31} \cos \sqrt{\lambda}l_3 &= C_{41}, \\
 C_{51} \cos \sqrt{\lambda}l_5 &= C_{61}, \\
 C_{71} \cos \sqrt{\lambda}l_7 &= C_{81},
 \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

Подставив (2.6.10) в следующие четыре равенства системы (2.6.9), получим

$$\begin{aligned} C_{11} \cos \sqrt{\lambda}l_1 \sin \sqrt{\lambda}l_2 &= C_{22} \cos \sqrt{\lambda}l_2, \\ C_{31} \cos \sqrt{\lambda}l_3 \sin \sqrt{\lambda}l_4 &= C_{42} \cos \sqrt{\lambda}l_4, \\ C_{31} \cos \sqrt{\lambda}l_3 \sin \sqrt{\lambda}l_6 &= C_{62} \cos \sqrt{\lambda}l_6, \\ C_{71} \cos \sqrt{\lambda}l_7 \sin \sqrt{\lambda}l_8 &= C_{82} \cos \sqrt{\lambda}l_8, \end{aligned}$$

или иначе

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{\cos \sqrt{\lambda}l_1 \sin \sqrt{\lambda}l_2}{\cos \sqrt{\lambda}l_2} &= C_{22}; \\ C_{31} \frac{\cos \sqrt{\lambda}l_3 \sin \sqrt{\lambda}l_4}{\cos \sqrt{\lambda}l_4} &= C_{42}; \\ C_{51} \frac{\cos \sqrt{\lambda}l_5 \sin \sqrt{\lambda}l_6}{\cos \sqrt{\lambda}l_6} &= C_{62}; \\ C_{71} \frac{\cos \sqrt{\lambda}l_7 \sin \sqrt{\lambda}l_8}{\cos \sqrt{\lambda}l_8} &= C_{82}. \end{aligned} \tag{2.6.11}$$

С учетом полученных равенств последнее равенство системы (2.6.9)

$$\begin{aligned} &C_{11} \sin \sqrt{\lambda}l_1 + C_{11} \frac{\cos \sqrt{\lambda}l_1 \sin \sqrt{\lambda}l_2}{\cos \sqrt{\lambda}l_2} + \\ &+ C_{31} \sin \sqrt{\lambda}l_3 + C_{31} \frac{\cos \sqrt{\lambda}l_3 \sin \sqrt{\lambda}l_4}{\cos \sqrt{\lambda}l_4} + \\ &+ C_{51} \sin \sqrt{\lambda}l_5 + C_{51} \frac{\cos \sqrt{\lambda}l_5 \sin \sqrt{\lambda}l_6}{\cos \sqrt{\lambda}l_6} + \\ &+ C_{71} \sin \sqrt{\lambda}l_7 + C_{71} \frac{\cos \sqrt{\lambda}l_7 \sin \sqrt{\lambda}l_8}{\cos \sqrt{\lambda}l_8} = 0. \end{aligned} \tag{2.6.12}$$

Применив тригонометрические преобразования имеем

$$\begin{aligned} &C_{11} \frac{\sin (\sqrt{\lambda}l_1 + \sqrt{\lambda}l_2)}{\cos \sqrt{\lambda}l_2} + C_{31} \frac{\sin (\sqrt{\lambda}l_3 + \sqrt{\lambda}l_4)}{\cos \sqrt{\lambda}l_4} + \\ &+ C_{51} \frac{\sin (\sqrt{\lambda}l_5 + \sqrt{\lambda}l_6)}{\cos \sqrt{\lambda}l_6} + C_{71} \frac{\sin (\sqrt{\lambda}l_7 + \sqrt{\lambda}l_8)}{\cos \sqrt{\lambda}l_8} = 0. \end{aligned} \tag{2.6.13}$$

Перепишем теперь (2.6.10) в виде

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{C_{21}}{\cos \sqrt{\lambda} l_1}, \\
C_{31} &= \frac{C_{41}}{\cos \sqrt{\lambda} l_3}, \\
C_{51} &= \frac{C_{61}}{\cos \sqrt{\lambda} l_3}, \\
C_{71} &= \frac{C_{81}}{\cos \sqrt{\lambda} l_7},
\end{aligned} \tag{2.6.14}$$

Подставив (2.6.14) в (2.6.13) получим

$$\begin{aligned}
&\frac{C_{21}}{\cos \sqrt{\lambda} l_1} \frac{\sin(\sqrt{\lambda} l_1 + \sqrt{\lambda} l_2)}{\cos \sqrt{\lambda} l_2} + \frac{C_{41}}{\cos \sqrt{\lambda} l_3} \frac{\sin(\sqrt{\lambda} l_3 + \sqrt{\lambda} l_4)}{\cos \sqrt{\lambda} l_4} + \\
&+ \frac{C_{61}}{\cos \sqrt{\lambda} l_3} \frac{\sin(\sqrt{\lambda} l_5 + \sqrt{\lambda} l_6)}{\cos \sqrt{\lambda} l_6} + \frac{C_{81}}{\cos \sqrt{\lambda} l_7} \frac{\sin(\sqrt{\lambda} l_7 + \sqrt{\lambda} l_8)}{\cos \sqrt{\lambda} l_8} = 0.
\end{aligned} \tag{2.6.15}$$

С учетом последнего равенства в (2.6.9) в результате будем иметь

$$\begin{aligned}
&C_{21} \left( \frac{\sin(\sqrt{\lambda} l_1 + \sqrt{\lambda} l_2)}{\cos \sqrt{\lambda} l_1 \cos \sqrt{\lambda} l_2} + \frac{\sin(\sqrt{\lambda} l_3 + \sqrt{\lambda} l_4)}{\cos \sqrt{\lambda} l_3 \cos \sqrt{\lambda} l_4} + \right. \\
&\left. + \frac{\sin(\sqrt{\lambda} l_5 + \sqrt{\lambda} l_6)}{\cos \sqrt{\lambda} l_5 \cos \sqrt{\lambda} l_6} + \frac{\sin(\sqrt{\lambda} l_7 + \sqrt{\lambda} l_8)}{\cos \sqrt{\lambda} l_7 \cos \sqrt{\lambda} l_8} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.6.16}$$

Отсюда получаем, что для нахождения собственных значений задачи Штурма - Лиувилля на геометрическом графе  $\mathbf{G}$ , необходимо решить тригонометрическое уравнение вида

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l_1 + \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l_2 + \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l_3 + \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l_4 + \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l_5 + \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l_6 + \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l_7 + \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l_8 = 0.$$

Поскольку все  $l_i > 0$ ,  $i = \overline{1, 8}$ , в силу физического смысла модели, а  $\lambda \geq 0$  как собственные значения, отсюда получаем, что все слагаемые нашего уравнения являются возрастающими функциями и сумма их равна нулю только в случае, когда каждое слагаемое обращается в нуль. Это возможно, если  $\lambda = 0$ , а поскольку рассматриваются периодические функции, то  $\sqrt{\lambda} = 0 + T_0 n$ ,  $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Таким образом, необходимо найти основные



периоды для каждого слагаемого по формуле  $T_{0i} = \frac{\pi}{l_i}$ ,  $i = \overline{1, 8}$ . Чтобы найти период исходной функции, являющейся суммой восьми функций, нужно найти наименьшее общее кратное периодов слагаемых функций, следовательно,  $T_0 = \text{НОК}(T_{0i}, i = \overline{1, 8})$ .

Предположим для определенности, что все длины ребер  $l_i$ ,  $i = \overline{1, 8}$ , равны между собой и равны  $l_1 = \dots = l_8 = l$ . Тогда для нахождения собственных значений необходимо решить уравнение  $\frac{\sin \sqrt{\lambda} l}{\cos \sqrt{\lambda} l} = 0$ . Оно имеет решение, если  $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$ , тогда  $\cos \sqrt{\lambda} l = 1$ . Отсюда, собственные значения  $\lambda = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$ . Подставим собственные значения и коэффициенты в систему (2.6.8) и получим

$$\begin{aligned}
 X_1^k &= \frac{C_{21}}{\cos \frac{\pi k}{l} l} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots \\
 X_2^k &= C_{21} \cos \frac{\pi k}{l} x + \frac{C_{21} \sin \frac{\pi k}{l} l}{\cos \frac{\pi k}{l} l} \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots \\
 X_3^k &= \frac{C_{21}}{\cos \frac{\pi k}{l} l} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots \\
 X_4^k &= C_{21} \cos \frac{\pi k}{l} x + \frac{C_{21} \sin \frac{\pi k}{l} l}{\cos \frac{\pi k}{l} l} \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots \\
 X_5^k &= \frac{C_{21}}{\cos \frac{\pi k}{l} l} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots \\
 X_6^k &= C_{21} \cos \frac{\pi k}{l} x + \frac{C_{21} \sin \frac{\pi k}{l} l}{\cos \frac{\pi k}{l} l} \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots, \\
 X_7^k &= \frac{C_{21}}{\cos \frac{\pi k}{l} l} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots \\
 X_8^k &= C_{21} \cos \frac{\pi k}{l} x + \frac{C_{21} \sin \frac{\pi k}{l} l}{\cos \frac{\pi k}{l} l} \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots
 \end{aligned}$$

В завершении преобразований добьемся результата в виде

$$\begin{aligned}
 X_1^k &= (-1)^k C_{21} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots \\
 X_2^k &= C_{21} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots \\
 X_3^k &= (-1)^k C_{21} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots \\
 X_4^k &= C_{21} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots \\
 X_5^k &= (-1)^k C_{21} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots \\
 X_6^k &= C_{21} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots, \\
 X_7^k &= (-1)^k C_{21} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots \\
 X_8^k &= C_{21} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots
 \end{aligned}$$

Из условия  $\|X\|_{L_2(G)} = 1$ , найдем константу  $C_1$ . Так как

$$\begin{aligned}
 1 &= 4 \int_0^l \left( C_{21} \cos \frac{\pi k}{l} x \right)^2 dx + 4 \int_0^l \left( (-1)^k C_{21} \cos \frac{\pi k}{l} x \right)^2 dx = \\
 &= 8 \int_0^l \left( C_{21} \cos \frac{\pi k}{l} x \right)^2 dx = 8C_{21}^2 \int_0^l \frac{1 + \cos \frac{2\pi k}{l} x}{2} dx = \\
 &= 8C_{21}^2 \left( \frac{l}{2} + \frac{l}{4\pi k} \left( \sin \frac{2\pi k l}{l} - \sin \frac{2\pi k \cdot 0}{l} \right) \right) = C_{21}^2 \cdot \frac{8l}{2},
 \end{aligned}$$

получим  $C_1 = \sqrt{\frac{2}{8l}}$ .

Окончательно достигаем результатов в виде

$$\begin{aligned}
X_1^k &= \sqrt{\frac{2}{8l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \\
X_2^k &= \sqrt{\frac{2}{8l}} (-1)^k \cos \frac{\pi k}{l} x, \\
X_3^k &= \sqrt{\frac{2}{8l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \\
X_4^k &= \sqrt{\frac{2}{8l}} (-1)^k \cos \frac{\pi k}{l} x, \\
X_5^k &= \sqrt{\frac{2}{8l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \\
X_6^k &= \sqrt{\frac{2}{8l}} (-1)^k \cos \frac{\pi k}{l} x, \\
X_7^k &= \sqrt{\frac{2}{8l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \\
X_8^k &= \sqrt{\frac{2}{8l}} (-1)^k \cos \frac{\pi k}{l} x,
\end{aligned}$$

Возьмем для определенности длины ребер  $l = \pi$ , в этом случае собственные функции, соответствующие собственным значениям примут такую форму

$$X^0(x) = \left( \sqrt{\frac{2}{8\pi}}, \sqrt{\frac{2}{8\pi}}, \sqrt{\frac{2}{8\pi}}, \sqrt{\frac{2}{8\pi}}, \sqrt{\frac{2}{8\pi}}, \sqrt{\frac{2}{8\pi}}, \sqrt{\frac{2}{8\pi}}, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \right), \quad \lambda^0 = 0,$$

$$\begin{aligned}
X^1(x) &= \left( \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos x, -\sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos x, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos x, -\sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos x, \right. \\
&\quad \left. \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos x, -\sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos x, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos x, -\sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos x \right), \quad \lambda^1 = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^2(x) &= \left( \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 2x, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 2x, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 2x, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 2x, \right. \\
&\quad \left. \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 2x, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 2x, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 2x, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 2x \right), \quad \lambda^2 = 4,
\end{aligned}$$

$$X^3(x) = \left( \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 3x, -\sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 3x, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 3x, -\sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 3x, \right.$$

$$\left( \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 3x, -\sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 3x, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 3x, -\sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 3x, \right), \quad \lambda^3 = 9,$$

$$X^4(x) = \left( \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 4x, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 4x, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 4x, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 4x, \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 4x, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 4x, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 4x, \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \cos 4x, \right), \quad \lambda^4 = 16,$$

и т.д.

Теперь запишем относительный спектр  $\sigma^L(M)$  следующим образом:

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu_k = \frac{\nu \lambda^k}{\lambda^k - \lambda} : k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \right\},$$

причем  $\lambda^k$  - собственные значения задачи Штурма - Лиувилля на геометрическом графе  $\mathbf{G}$ . Итак, все подготовлено для того, чтобы представить решение задачи (2.6.1) - (3.4.2) по формуле (2.6.5) покомпонентно

$$u_1(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k: \mu_k \in \sigma^L(M)} \left( \int_0^{\pi} u_{j1}(x) X_1^k dx + \int_0^{\pi} u_{j2}(x) X_2^k dx + \right.$$

$$+ \int_0^{\pi} u_{j3}(x) X_3^k dx + \int_0^{\pi} u_{j4}(x) X_4^k dx + \int_0^{\pi} u_{j5}(x) X_5^k dx + \int_0^{\pi} u_{j6}(x) X_6^k dx +$$

$$\left. + \int_0^{\pi} u_{j7}(x) X_7^k dx + \int_0^{\pi} u_{j8}(x) X_8^k dx \right) \exp(\nu \lambda^k (\lambda^k - \lambda)^{-1} (t - \tau_j)) X_1^k.$$

$$u_2(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k: \mu_k \in \sigma^L(M)} \left( \int_0^{\pi} u_{j1}(x) X_1^k dx + \int_0^{\pi} u_{j2}(x) X_2^k dx + \right.$$

$$+ \int_0^{\pi} u_{j3}(x) X_3^k dx + \int_0^{\pi} u_{j4}(x) X_4^k dx + \int_0^{\pi} u_{j5}(x) X_5^k dx + \int_0^{\pi} u_{j6}(x) X_6^k dx +$$

$$\left. + \int_0^{\pi} u_{j7}(x) X_7^k dx + \int_0^{\pi} u_{j8}(x) X_8^k dx \right) \exp(\nu \lambda^k (\lambda^k - \lambda)^{-1} (t - \tau_j)) X_2^k.$$

$$u_3(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k: \mu_k \in \sigma^L(M)} \left( \int_0^{\pi} u_{j1}(x) X_1^k dx + \int_0^{\pi} u_{j2}(x) X_2^k dx + \right.$$

$$+ \int_0^{\pi} u_{j3}(x) X_3^k dx + \int_0^{\pi} u_{j4}(x) X_4^k dx + \int_0^{\pi} u_{j5}(x) X_5^k dx + \int_0^{\pi} u_{j6}(x) X_6^k dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\pi u_{j7}(x)X_7^k dx + \int_0^\pi u_{j8}(x)X_8^k dx \Big) \exp(\nu\lambda^k(\lambda^k - \lambda)^{-1}(t - \tau_j))X_3^k. \\
u_4(x, t) &= \sum_{j=0}^\infty \sum_{k:\mu_k \in \sigma^L(M)} \left( \int_0^\pi u_{j1}(x)X_1^k dx + \int_0^\pi u_{j2}(x)X_2^k dx + \right. \\
& + \int_0^\pi u_{j3}(x)X_3^k dx + \int_0^\pi u_{j4}(x)X_4^k dx + \int_0^\pi u_{j5}(x)X_5^k dx + \int_0^\pi u_{j6}(x)X_6^k dx + \\
& \left. + \int_0^\pi u_{j7}(x)X_7^k dx + \int_0^\pi u_{j8}(x)X_8^k dx \right) \exp(\nu\lambda^k(\lambda^k - \lambda)^{-1}(t - \tau_j))X_4^k. \\
u_5(x, t) &= \sum_{j=0}^\infty \sum_{k:\mu_k \in \sigma^L(M)} \left( \int_0^\pi u_{j1}(x)X_1^k dx + \int_0^\pi u_{j2}(x)X_2^k dx + \right. \\
& + \int_0^\pi u_{j3}(x)X_3^k dx + \int_0^\pi u_{j4}(x)X_4^k dx + \int_0^\pi u_{j5}(x)X_5^k dx + \int_0^\pi u_{j6}(x)X_6^k dx + \\
& \left. + \int_0^\pi u_{j7}(x)X_7^k dx + \int_0^\pi u_{j8}(x)X_8^k dx \right) \exp(\nu\lambda^k(\lambda^k - \lambda)^{-1}(t - \tau_j))X_1^k. \\
u_6(x, t) &= \sum_{j=0}^\infty \sum_{k:\mu_k \in \sigma^L(M)} \left( \int_0^\pi u_{j1}(x)X_1^k dx + \int_0^\pi u_{j2}(x)X_2^k dx + \right. \\
& + \int_0^\pi u_{j3}(x)X_3^k dx + \int_0^\pi u_{j4}(x)X_4^k dx + \int_0^\pi u_{j5}(x)X_5^k dx + \int_0^\pi u_{j6}(x)X_6^k dx + \\
& \left. + \int_0^\pi u_{j7}(x)X_7^k dx + \int_0^\pi u_{j8}(x)X_8^k dx \right) \exp(\nu\lambda^k(\lambda^k - \lambda)^{-1}(t - \tau_j))X_6^k. \\
u_7(x, t) &= \sum_{j=0}^\infty \sum_{k:\mu_k \in \sigma^L(M)} \left( \int_0^\pi u_{j1}(x)X_1^k dx + \int_0^\pi u_{j2}(x)X_2^k dx + \right. \\
& + \int_0^\pi u_{j3}(x)X_3^k dx + \int_0^\pi u_{j4}(x)X_4^k dx + \int_0^\pi u_{j5}(x)X_5^k dx + \int_0^\pi u_{j6}(x)X_6^k dx + \\
& \left. + \int_0^\pi u_{j7}(x)X_7^k dx + \int_0^\pi u_{j8}(x)X_8^k dx \right) \exp(\nu\lambda^k(\lambda^k - \lambda)^{-1}(t - \tau_j))X_7^k. \\
u_8(x, t) &= \sum_{j=0}^\infty \sum_{k:\mu_k \in \sigma^L(M)} \left( \int_0^\pi u_{j1}(x)X_1^k dx + \int_0^\pi u_{j2}(x)X_2^k dx + \right. \\
& + \int_0^\pi u_{j3}(x)X_3^k dx + \int_0^\pi u_{j4}(x)X_4^k dx + \int_0^\pi u_{j5}(x)X_5^k dx + \int_0^\pi u_{j6}(x)X_6^k dx + \\
& \left. + \int_0^\pi u_{j7}(x)X_7^k dx + \int_0^\pi u_{j8}(x)X_8^k dx \right) \exp(\nu\lambda^k(\lambda^k - \lambda)^{-1}(t - \tau_j))X_8^k.
\end{aligned}$$

**Пример 2.6.1.** Приведем результаты вычислительных экспериментов, в которых решение существует, то есть возможно моделирование дорожно-го движения.

Требуется найти решение задачи (2.3.1) на геометрическом графе  $\mathbf{G}$  при заданных параметрах  $\lambda = 10; n = 2; \nu = 1; k = 2; l = \pi$ , т.е.

$$10u_{1t} - u_{1txx} = u_{1xx},$$

$$10u_{2t} - u_{2txx} = u_{2xx},$$

$$10u_{3t} - u_{3txx} = u_{3xx},$$

$$10u_{4t} - u_{4txx} = u_{4xx},$$

$$10u_{5t} - u_{5txx} = u_{5xx},$$

$$10u_{6t} - u_{6txx} = u_{6xx},$$

$$10u_{7t} - u_{7txx} = u_{7xx},$$

$$10u_{8t} - u_{8txx} = u_{8xx},$$

а также заданные одна за другой начальные функции

$$u_1 = 0,$$

$$u_2 = \left( 10 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3, 10 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \right).$$

$$u_3 = \left( 15 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2, 15 \sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) - 2 \right),$$

$$u_4 = \left( 20 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3, 20 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \right).$$

$$u_5 = 0,$$

$$u_6 = \left( 30 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3, 30 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \right).$$

$$u_7 = \left( 35 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2, 35 \sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) - 2 \right),$$

$$u_8 = \left( 40 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3, 40 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \right).$$

Поиск комплекса решений  $u_j(x, t)$ ,  $j = \overline{1, 8}$  по обозначенной задаче будем

производить по такому виду в галеркинских суммах

$$u_j(x, t) = \sum_{i=0}^N a_i(t) \varphi_i^j(x). \quad (2.6.17)$$

$$u(t) = \sum_{\mu_k \in \sigma_j^L(M)} e^{\mu_k(t-\tau_j)} \langle u_j, X_j^k \rangle_{L_2(\mathbf{G})} X_0^k, j = \overline{1, 8}$$

Табл.1: Численное решение системы в период времени  $[\tau_{j-1}, \tau_j]$

$x$	1	2	3	4
1	0.1354017426	30.0886898129	61.38907709	38.36383512
2	0.0624894731	30.0730387274	58.72288540	42.85878867
3	0.0426287976	30.0663610716	56.15303960	45.74243026
4	0.0200176562	30.0535727678	54.16615711	47.49135030
5	0.0045377105	30.0305398288	52.75908172	48.52413560

Табл.2: Численное решение системы в период времени  $[\tau_j, \tau_{j+1}]$

$x$	1	2	3	4
1	0.0045377105	30.0305398288	52.75908172	48.52413560
2	1.18235631	35.0630387274	49.97171811	44.16615711
3	10.32232691	46.85187992	1.33265265	43.97086522
4	19.74350234	56.15303960	0.0000377105	41.49135030

Табл.3: Численное решение системы в период времени  $[\tau_{j-1}, \tau_j]$

$x$	5	6	7	8
1	0.1550417426	40.0786898129	60.28907709	34.26383512
2	0.0524894731	40.0530387274	57.32288540	41.15878867
3	0.0476287976	40.0363610716	54.55303960	44.24243026
4	0.00470176562	40.0253727678	54.16615711	45.12135030
5	0.0045377105	40.0003398288	52.6808172	47.22413560

Табл.4: Численное решение системы в период времени  $[\tau_j, \tau_{j+1}]$

$x$	5	6	7	8
1	0.0045377105	40.0003398288	52.6808172	47.22413560
2	5.28235631	44.2150387274	35.17171811	44.56615711
3	11.82232691	46.25187992	1.4565265	42.18086522
4	19.94350234	46.55303960	0.0000377105	41.23435030



Рассмотрим геометрический граф состоящий из двух ребер. В эксперименте введем параметры  $\nu$  и  $\lambda$  коэффициенты,  $k$ -номер ребра,  $l$ -длина ребра. Пусть  $\lambda = 10$ ;  $\nu = 1$ ;  $f_k(x) = 0$ ;  $l_1 = l_2 = \pi$ .



Рис. 8: Карта города

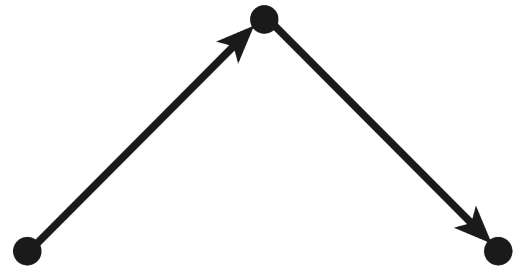


Рис. 9: Граф G

$$10u_{1t} - u_{1txx} = u_{1xx},$$

$$10u_{2t} - u_{2txx} = u_{2xx},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(0, t) = u_2(0, t), \\ u_{1x}(\pi, t) = 0, \\ u_{2x}(\pi, t) = 0, \\ u_{1x}(0, t) + u_{2x}(0, t) = 0. \end{array} \right.$$

Получим решение задачи Штурма - Лиувилля на геометрическом гра-

фе.

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1'' + \lambda X_1 = 0, \\ X_2'' + \lambda X_2 = 0, \\ X_1(l_1) = X_2(0), \\ X_1'(l_1) - X_2'(0) = 0, \\ X_1'(0) = 0, \\ X_2'(l_2) = 0. \end{array} \right.$$

Найдем собственные значения  $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l_1+l_2}\right)^2$ ,  $k = \{0\} \cup \mathbb{N}$ ,

$$X^k(x) = (X_1^k(x), X_2^k(x)) = \left( C_1 \cos\left(\frac{\pi k}{l_1+l_2}x\right), C_1 \cos\left(\frac{\pi k}{l_1+l_2}(x+l_1)\right) \right),$$

$$k = \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Для точности расчётов будет произведено добавление двуточечного начально-конечного условия

$$\sum_{k:\mu_k \in \sigma_0^L(M)} \langle (u(\tau_0) - u_0), X_0^k \rangle X^k = \sum_{k:\mu_k \in \sigma_1^L(M)} \langle (u(\tau_1) - u_1), X_1^k \rangle X^k = 0,$$

when

$$\sigma_0^L(M) = \left\{ \mu_k = \frac{1}{10 - \lambda^k} : k > 4 \right\},$$

$$\sigma_1^L(M) = \left\{ \mu_k = \frac{\alpha}{\lambda - \lambda^k} : k = \overline{0, 4} \right\} = \left\{ \frac{1}{10}, \frac{4}{39}, \frac{1}{9}, \frac{4}{31}, \frac{1}{6} \right\},$$

$$u_0 = \left( 5 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2, 5 \sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) - 2 \right),$$

$$u_1 = \left( 10 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3, 10 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \right).$$

Решение запишем в виде

$$u(t) = \sum_{\mu_k \in \sigma_0^L(M)} e^{\mu_k(t-\tau_0)} \langle u_0, X_0^k \rangle_{L_2(\mathbf{G})} X_0^k + \sum_{\mu_k \in \sigma_1^L(M)} e^{\mu_k(t-\tau_1)} \langle u_1, X_1^k \rangle_{L_2(\mathbf{G})} X_1^k$$

и представим на графике

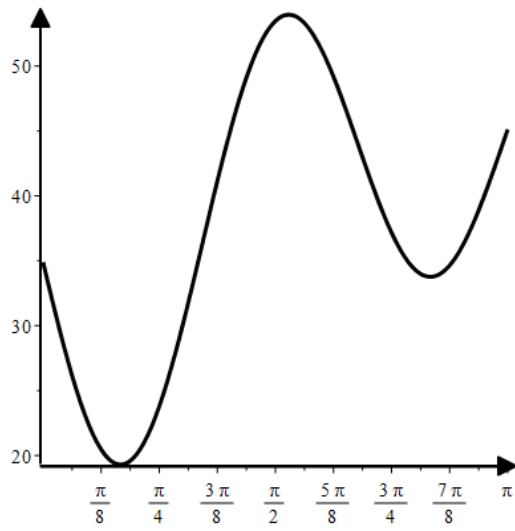


Рис. 10: Ребро 1

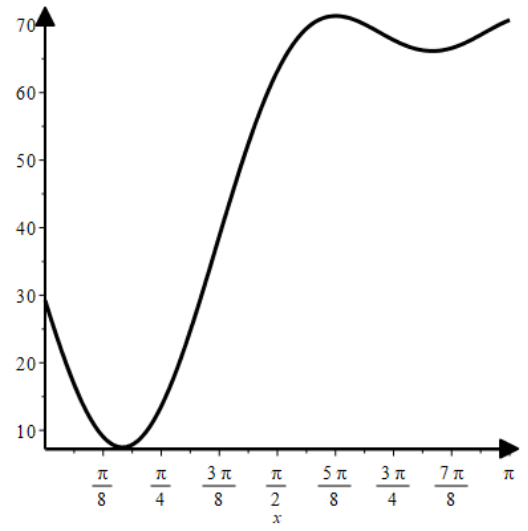


Рис. 11: Ребро 2

### 3 Линейная модель вязкой несжимаемой жидкости

#### 3.1 Относительно спектральные проекторы

Рассмотрим в банаховых пространствах  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  операторы  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ,  $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ , причем оператор  $M$   $(L, p)$ -секториален.

Пусть выполняется условие

$$\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U} \quad (\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}). \quad (A1)$$

Отметим, что условие (A1) будет выполняться, если оператор  $M$  является сильно  $(L, p)$ -секториальным справа (слева),  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ; либо если пространства  $\mathfrak{U}$  ( $\mathfrak{F}$ ) рефлексивны.

Введем следующие обозначения: сужение оператора  $L$  на  $\mathfrak{U}^k$  обозначено  $L_k$ , а сужение оператора  $M$  на  $\text{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$  обозначено  $M_k$ ,  $k = 0, 1$ . Кроме условия (A1) необходимо учитывать дополнительный параметр -

$$\text{существование оператора } L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1), \quad (A2)$$

и это в свою очередь существует при условии сильной  $(L, p)$ -секториальности оператора  $M$ ,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Отметим, что в случае выполнения двух условий (A1) и (A2), будет иметь место сильная  $(L, p)$ -секториальность оператора  $M$ ,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ .

Сформулируем теперь дополнительное условие на относительный спектр  $\sigma^L(M)$  по оператору  $M$

$$\left. \begin{aligned} \sigma^L(M) &= \bigcup_{j=0}^n \sigma_j^L(M), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{вдобавок } \sigma_j^L(M) \neq \emptyset \text{ наблюдается} \\ &\text{в границах области, которая ограничена } D_j \subset \mathbb{C} \text{ и обладает кусочно} \\ &\text{гладкой границей } \partial D_j = \Gamma_j \subset \mathbb{C}. \text{ К тому же, } \overline{D_j} \cap \sigma_0^L(M) = \emptyset \text{ и} \\ &\quad \overline{D_k} \cap \overline{D_l} = \emptyset \\ &\text{с любым значением } j, k, l = \overline{1, n}, k \neq l. \end{aligned} \right\} \quad (A3)$$

**Теорема 3.1.1.** [83] При соблюдении условия, что оператор  $M$  является  $(L, p)$ -секториальный, а также выполняется (A3), и согласно этому условию существуют проекторы  $P_j \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$  и  $Q_j \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ ,  $j = \overline{1, n}$ , в свою очередь приобретающие вид

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} R_\mu^L(M) d\mu, \quad Q_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} L_\mu^L(M) d\mu, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.1.1)$$

**Следствие 3.1.1.** [83] Пусть выполнены условия теоремы 3.1.1. Тогда  $P_j P = P P_j = P_j$  и  $Q_j Q = Q Q_j = Q_j$ .

Положим  $P_0 = P - \sum_{j=1}^n P_j$ , в силу следствия 3.1.1  $P_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$  - проектор.

**Теорема 3.1.2.** Примем, что свойство оператора  $M$   $(L, p)$ -секториальный, вдобавок были соблюдены условия (A1), (A2), (A3). В таком случае

$$U^t = \sum_{j=0}^n P_j U^t = \sum_{j=0}^n U_j^t, \quad F^t = \sum_{j=0}^n Q_j F^t = \sum_{j=0}^n F_j^t,$$

причем  $U_j^t$  и  $F_j^t$  можно представить в виде

$$U_j^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad F_j^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad j = \overline{1, n} \quad (3.1.2)$$

где контур  $\gamma = \partial\Omega$ .

• Аналитическая группа  $U_j$  может быть доведена до аналитической группы, следовательно  $U_j^0 = P_j$ . На следующем этапе

$$\begin{aligned} P_j U^t &= (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} \int_{\Gamma} R_\mu^L(M) R_\nu^L(M) e^{\nu t} d\mu d\nu = \\ &= (2\pi i)^{-1} \left( \int_{\Gamma} \frac{e^{\nu t} d\nu}{\nu - \mu} \int_{\gamma} R_\mu^L(M) d\mu + \int_{\gamma} \frac{d\mu}{\mu - \nu} \int_{\Gamma} R_\mu^L(M) e^{\nu t} d\nu \right) = U_j^t \end{aligned}$$

согласно с теоремой о вычетах и аналогом тождества Гильберта, действующих с  $L$ -резольвентными

$$(\nu - \mu) R_\mu^L(M) R_\nu^L(M) = R_\mu^L(M) - R_\nu^L(M).$$

Из данной предпосылки появляется и вывод об условии  $P_j P = P P_j = P_j$ .

•

В продолжении отметим, что  $\text{im } P_j = \mathfrak{U}^{1j}$ ,  $\text{im } Q_j = \mathfrak{F}^{1j}$ ,  $j = \overline{0, n}$ . Согласно построения

$$\mathfrak{U}^1 = \bigoplus_{j=0}^n \mathfrak{U}^{1j} \text{ и } \mathfrak{F}^1 = \bigoplus_{j=0}^n \mathfrak{F}^{1j}.$$

Обозначим через  $L_j$  ( $M_j$ ) сужение оператора  $L$  ( $M$ ) на  $\mathfrak{U}^{1j}$  ( $\text{dom} M \cap \mathfrak{U}^{1j}$ ),  $j = \overline{0, n}$ . Как очевидно следует из демонстрации и наглядно показываем, что операторы  $L_j \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{1j}; \mathfrak{F}^{1j})$ ,  $M_j \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^{1j}; \mathfrak{F}^{1j})$ ,  $j = \overline{0, n}$ , стоит также учесть, что под действием (A2) находится и доказанно существует оператор  $L_j^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{1j}; \mathfrak{U}^{1j})$ ,  $j = \overline{0, n}$ . Дополнительно достаточно элементарно демонстрируется, сущность оператора  $S_0 = L_0^{-1} M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}_0)$  будет секториальным, а оператор  $S_j = L_j^{-1} M_j : \mathfrak{U}^{1j} \rightarrow \mathfrak{U}^{1j}$ ,  $j = \overline{1, n}$  - ограниченным.

### 3.2 Абстрактная схема в случае $(L, p)$ -секториального оператора

Рассмотрим в банаховых пространствах  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  операторы  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ,  $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ , причем оператор  $M$   $(L, p)$ -секториален и выполняются условия (A1), (A2), (A3).

Возьмем  $\tau_j \in \mathbb{R}_+$  ( $\tau_{j-1} < \tau_j$ ),  $u_j \in \mathfrak{U}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathfrak{F})$ , и рассмотрим задачу

$$\lim_{t \rightarrow 0+} P_0(u(t) - u_0) = 0, \quad P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.2.1)$$

для линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \quad (3.2.2)$$

Назовем вектор-функцию  $u \in C^1((0, \tau_n); \mathfrak{U}) \cap C([0, \tau_n]; \mathfrak{U})$  решением уравнения (3.2.2), если она удовлетворяет этому уравнению. Назовем решение  $u = u(t)$  уравнения (3.2.2) решением многоточечной начально-конечной задачи для уравнения (3.2.2), если оно дополнительно удовлетворяет условиям (3.2.1).

Докажем теперь однозначную разрешимость задачи (3.2.1), (3.2.2). Для этого редуцируем уравнение (3.2.2), используя  $(L, p)$ -секториальность оператора  $M$ , выполнение условий (A1), (A2), (A3). Получим систему уравнений

$$G\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}f^0, \quad (3.2.3)$$

$$\dot{u}^{1j} = S_j u^{1j} + L_{1j}^{-1} f^{1j}, \quad j = \overline{0, n} \quad (3.2.4)$$

где  $f^0 = (\mathbb{I} - Q)f$ ,  $f^{1j} = Q_j f$ ,  $u^0 = (\mathbb{I} - P)u$ ,  $u^{1j} = P_j u$ ,  $j = \overline{0, n}$ .

**Лемма 3.2.1.** *Если оператор  $M$   $(L, p)$ -секториален и выполнены условия (A1), (A2), (A3), то для любой вектор-функции*

$$f^0 \in C^p([0, \tau_n]; \mathfrak{F}^0) \cap C^{p+1}((0, \tau_n); \mathfrak{F}^0),$$

уравнение (3.2.3) однозначно разрешимо причем решение имеет вид

$$u^0(t) = - \sum_{q=1}^p G^q M_0^{-1} f^{0(q)}(t).$$

• Существование решения  $u^0 = u^0(t)$  докажем его подстановкой в (3.2.3). Единственность получается последовательным дифференцированием однородного уравнения (3.2.3)  $0 = G^p u^{0(p)} = \dots = G\dot{u}^0 = u^0$ . •

**Лемма 3.2.2.** *В условиях леммы 3.2.1 для любых  $u_j \in \mathfrak{U}$  и  $f^{1j} \in C([0, \tau_n]; \mathfrak{F}^{1j})$ ,  $j = \overline{0, n}$ , существует единственное решение задачи*

$$u^j(\tau_j) = P_j u_j = 0$$

для  $j$ -го уравнения (3.2.4), которое к тому же имеет вид

$$u^{1j}(t) = U_j^{t-\tau_j} u_j + \int_{\tau_j}^t U_j^{t-s} L_{1j}^{-1} Q_j f(s) ds.$$

• С помощью использования метода подстановки можно убедиться в сущности вектор-функции, которая  $u^j = u^j(t)$  может служить как решение, применимое по условиям данной задачи. Примем, что  $v^j = v^j(t)$ ,  $t \in [0, \tau_n]$

является альтернативным решением означенной задачи. Построим вектор-функцию  $w(s, t) = L_j U_j^{t-s} v(s)$ . По построению

$$\frac{\partial w(s, t)}{\partial s} = L_j \frac{\partial U_j^{t-s}}{\partial s} v(s) + L_j U_j^{t-s} \frac{\partial v(s)}{\partial s} = 0.$$

Значит,  $w(\tau_j, t) = w(t, t)$ , т.е.  $U_j^{t-\tau_j}$ . •

Итак, доказана

**Теорема 3.2.1** *Принимается, что оператор  $M$  является  $(L, p)$ -секториальным,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ , вдобавок с тем, что состоится выполнение условий (3.2.1), (A1) - (A3). В таком случае при любом значении вектор-функции  $f^0 \in C([0, \tau]; \mathfrak{F}^0) \cap C^{p+1}((0, \tau); \mathfrak{F}^0)$ ,  $f^1 \in C([0, \tau]; \mathfrak{F}^1)$  и при каждом существующем значении  $u_j \in \mathfrak{U}$ ,  $j = \overline{0, n}$  есть одно реальное решение задачи (3.2.2), пребывающее в виде*

$$u(t) = - \sum_{q=0}^p G^q M_0^{-1} f^{0(q)}(t) + \sum_{j=0}^n \left( U_j^{t-\tau_j} u_j + \int_{\tau_j}^t U_j^{t-s} L_{1j}^{-1} Q_j f(s) ds \right). \quad (3.2.5)$$

### 3.3 Модель Навье – Стокса

Примем, что  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m = \{2, 3\}$ , является ограниченной областью, очерченной так по одному краю  $\partial\Omega$  в классе  $C^\infty$ .

Приступим к анализу линейной системы Навье - Стокса в данной демонстрации

$$\begin{aligned} \vec{v}_t &= \nu \nabla^2 \vec{v} - \vec{p} + \vec{f}, \\ 0 &= \nabla(\nabla \cdot \vec{v}). \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Впредь нам удобно представить задачу (3.3.1) а также редуцировать относительно задачи Дирихле в некотором операторном уравнении.

Введем как наименование  $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$ ,  $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^n$  и  $\mathbb{L}^2 = (L^2(\Omega))^n$  пространства вектор-функций  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , которые определяются и разграничиваются в обозначенной области  $\Omega$ . Далее анализируем



и исследуем линейал  $\mathcal{L} = \{\vec{v} \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot \vec{v} = 0\}$  вектор-функций, соленоидальных и финитных в области  $\Omega$ . Замыкание  $\mathcal{L}$  по норме пространства  $\mathbb{L}^2$  обозначим через  $\mathbb{H}_\sigma$ . Пространство  $\mathbb{H}_\sigma$  - гильбертово со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$ , унаследованным от  $\mathbb{L}^2$ , вдобавок следует учесть существование расщепления  $\mathbb{L}^2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$ , где  $\mathbb{H}_\pi$  - ортогональное дополнение к  $\mathbb{H}_\sigma$ . Обозначим через  $\Pi : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$  соответствующий ортопроектор. Сужение проектора  $\Pi$  на подпространство  $\mathbb{H}^2 \cap \mathring{\mathbb{H}}^1$  является непрерывным оператором  $\Pi : \mathbb{H}^2 \cap \mathring{\mathbb{H}}^1 \rightarrow \mathbb{H}^2 \cap \mathring{\mathbb{H}}^1$ . Представим поэтому пространство  $\mathbb{H}^2 \cap \mathring{\mathbb{H}}^1$  в виде прямой суммы  $\mathbb{H}^2 \cap \mathring{\mathbb{H}}^1 = \mathbb{H}_\sigma^2 \oplus \mathbb{H}_\pi^2$ , где  $\mathbb{H}_\pi^2$  - образ  $\text{im } \Pi$ , а  $\mathbb{H}_\sigma^2$  -  $\text{ker } \Pi$ . Имеют место включения и непрерывные плотные вложения  $\mathbb{H}_\sigma^2 \hookrightarrow \mathbb{H}_\sigma$  и  $\mathbb{H}_\pi^2 \hookrightarrow \mathbb{H}_\pi$ . Пространство  $\mathbb{H}_\pi^2$  состоит из вектор-функций  $\vec{v}$ , равных нулю на  $\partial\Omega$  и являющихся градиентами функций из  $W_2^3(\Omega)$ .

**Лемма 3.3.1.** [34] *Формулой*

$$A = \begin{pmatrix} -\nabla^2 & & \mathbb{O} \\ & \dots & \\ \mathbb{O} & & -\nabla^2 \end{pmatrix} : \mathbb{H}_\sigma^2 \oplus \mathbb{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbb{L}^2$$

*Происходит задача линейного непрерывного оператора, а также дискретного конечнократного спектра*

$\sigma(A) \subset R_+$ , *который становится более густым только на  $+\infty$ .*

**Лемма 3.3.2.** [16] *Формула  $B : \vec{v} \rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{v})$  задает линейный непрерывный сюръективный оператор  $B : \mathbb{H}_\sigma^2 \oplus \mathbb{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$  который включает ядро  $\text{ker } B = \mathbb{H}_\sigma^2$ .*

Примем за факт, что пространства  $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_p$ ,  $\mathbb{H}_p = \mathbb{H}_\pi$ . Элемент  $u \in \mathfrak{U}$  имеет вид  $u = (u_\sigma, u_\pi, u_p)$ , а элемент  $f \in \mathfrak{F}$  имеет вид  $f = (f_\sigma, f_\pi, f_p)$ . Положим  $\Sigma = I - \Pi$ . Как нетрудно видеть, формулой

$$L = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

задается линейный непрерывный оператор  $L : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ , причем  $\text{im } L = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \{0\}$ , а  $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{H}_p$ .

**Лемма 3.3.3.** [83] *Формулой*

$$M = \begin{pmatrix} \nu A_\sigma & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \nu A_\pi & -\mathbb{I} \\ \mathbb{O} & B & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

задается линейный замкнутый плотно определенный оператор

$$M : \text{dom } M \subset \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}, \quad \text{dom } M = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi^2 \times \mathbb{H}_p.$$

Доказательство следует из лемм 3.3.1 и 3.3.2

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m = \{2, 3\}$ , - ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ . Пусть  $\mathbb{H}_\sigma^2$  и  $\mathbb{H}_\pi^2$  ( $\mathbb{H}_\sigma$  и  $\mathbb{H}_\pi$ ) - подпространства соленоидальных и потенциальных вектор-функций пространства  $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))^n$  ( $\mathbb{L}^2 = (L^2(\Omega))^n$ ). Формулой  $A = \text{diag} \{\nabla^2, \dots, \nabla^2\}$  задается линейный непрерывный оператор с дискретным конечнократным отрицательным спектром  $\sigma(A)$ , который сгущается исключительно в пределах значения  $-\infty$ . С помощью  $A_{\sigma(\pi)}$  определим сужение оператора  $A$  на  $\mathbb{H}_{\sigma(\pi)}^2$ .

**Лемма 3.3.4.** [34] (теорема Солонникова - Воровича - Юдовича).

Оператор  $A_{\sigma(\pi)} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_{\sigma(\pi)}^2, \mathbb{H}_{\sigma(\pi)})$ , вдобавок  $\sigma(A_{\sigma(\pi)}) = \sigma(A)$  и  $A = A_\sigma \Sigma + A_\pi \Pi$ .

Примем, что тут с помощью  $\Pi \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^2, \mathbb{H}_\pi^2)$  определён проектор вдоль  $\mathbb{H}_\sigma^2$ ,  $\Sigma = \mathbb{I} - \Pi$ .

**Лемма 3.3.5.** [16] (теорема Капитанского - Пилецкаса). С помощью формулы  $B : u \rightarrow \nabla(\nabla \cdot u)$  происходит задача оператора  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^2, \mathbb{H}_\pi)$ , к тому же  $\ker B = \mathbb{H}_\sigma^2$ .

Соотнесём, что  $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} \equiv \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_p$ ,  $\mathbb{H}_p = \mathbb{H}_\pi$ . Вектор  $u \in \mathfrak{U}$  имеет вид  $u = (u_\sigma, u_\pi, u_p)$ . Формулами из леммы 3.3.2 и 3.3.3 задаются операторы  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ,  $\text{im}L = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \{0\}$ ,  $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{H}_p$  и  $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ,  $\text{dom } M = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi^2 \times \mathbb{H}_p$ . Итак, редукция пришла к своему финальному этапу.

**Лемма 3.3.6.** [83]. *При любых  $\nu \in \mathbb{R}_+$  оператор  $M$  сильно  $(L, 1)$ -секториален.*

Выполним построение подпространств  $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{F}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_p$ ,  $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{F}^1 = \mathbb{H}_\sigma \times \{0\} \times \{0\}$ . Причем

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & B_\pi^{-1} \\ -\mathbb{I} & \nu A_\pi B_\pi^{-1} \end{pmatrix},$$

с учетом условия, что  $B_\pi$  - сокращение оператора  $B$  на  $\mathbb{H}_\pi^2$  (исходя из леммы 3.3.5 следует, что  $B_\pi : \mathbb{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$  - топологический изоморфизм). Не составляет труда вдобавок убедиться, что

$$M_0^{-1}L_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} -$$

нильпотентный оператор степени 1.

Спектр  $\sigma(A) = \{\lambda_k\}$ , где  $\lambda_k \in \mathbb{R}_-$  - собственные значения, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности, тогда  $\sigma^L(M) = \{\nu^{-1}\lambda_k\}$ .

Теперь построим

$$U_j^t = \begin{pmatrix} \sum_{\nu^{-1}\lambda_k \in \sigma_j^L(M)} e^{\nu\lambda_k t} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{0, n}.$$

Тогда в силу леммы 3.3.5 справедлива следующая

**Теорема 3.3.1.** *При любых  $\nu \in \mathbb{R}_+$ ,  $\tau_j \in \mathbb{R}_+$  ( $\tau_j < \tau_{j+1}$ ),  $u_j \in \mathfrak{U}$ ,  $j = \overline{0, n}$ , существует единственное решение задачи (3.2.1) для модели (3.3.1),*

причем это решение  $u = u(t)$  имеет вид  $u_\sigma(t) = \sum_{j=0}^n U_j^{t-\tau_j} u_{\tau_j\sigma}$ ,  $u_\pi \equiv 0, u_p \equiv 0$ .

### 3.4 Методы численного исследования

Вслед за учёным Э.Н. Лоренцем [15], утвердимся во мнении, что система (2.6.2) инвариантна по сдвигу вдоль одной из горизонтальных координат, таким образом, производим подсчёт величин  $u_i = u_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $p = p(x, t)$  неменяющимися вдоль координаты  $x_2$ , а величину  $u_2(x, t)$  принимаем как постоянную. При таковых исходных данных и предварительных выводах, можно сказать, что уравнению несжимаемости  $\nabla \cdot u = 0$  соответствует вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad (3.4.1)$$

это, как понимаем, даёт возможность введения функции тока, которая будет определена с точностью, доведенной до аддитивной постоянной при помощи уравнений:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = -u_3, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = u_1. \quad (3.4.2)$$

Заменим обозначения координат  $x_1$  и  $x_3$  более стандартными  $x_1 = x$  и  $x_3 = z$  и преобразуем систему (2.6.2) к виду

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \nabla^2 u_1 + \nabla p, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \nu \nabla^2 u_2 + \nabla p, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = \nu \nabla^2 u_3 + \nabla p. \end{cases} \quad (3.4.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x_3} = \nu \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} \right) - \nabla p, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x_1} = \nu \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} \right) + \nabla p. \end{cases} \quad (3.4.4)$$

$$\nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\nu \nabla^4 \Psi, \quad (3.4.5)$$

Для уравнения (3.4.5) в прямоугольнике  $[0, L] \times [0, H]$  поставим задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Psi(x, 0, t) = \Psi(x, H, t), \\ \Psi(0, z, t) = \Psi(L, z, t), \\ \nabla^2 \Psi(0, z, t) = \nabla^2 \Psi(L, z, t). \end{cases} \quad (3.4.6)$$

Подтверждая исследования Э.Н.Лоренца [15] и применяя его методы, произведём поиск трехмерного галеркинского приближения к задаче (3.4.6) по уравнению (3.4.5). Чтобы добиться результата, мы примем как основополагающие - функции метода Галеркина - как собственные функции в рамках нижеизложенной задачи:

$$\begin{cases} -\nabla^2 \phi = \lambda \phi, & [0, L] \times [0, H], \\ \phi(x, 0) = \phi(x, H) = 0, \\ \phi(0, z) = \phi(L, z), \\ \phi'(0, z) = \phi'(L, z). \end{cases} \quad (3.4.7)$$

Для начала решим в осесимметричной области (прямоугольнике)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L, 0 < y < H\}$  задачу Штурма - Лиувилля. Найти собственные значения и собственные функции оператора Лапласа

$$-\Delta u = \nu u \quad (3.4.8)$$

в ограниченной области  $\Omega$  с условием Дирихле

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (3.4.9)$$

Представим решение (3.4.8) в виде

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.4.10)$$

Тогда уравнение Лапласа на плоскости имеет вид

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = -\nu X(x)Y(y), \quad (3.4.11)$$

где функции  $X(x) \neq 0$ ,  $Y(y) \neq 0$ . Разделим переменные в уравнении (3.4.11), поделив его на  $X(x)Y(y)$ , получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\nu,$$

приведем подобные и получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\nu - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Сформулируем для нахождения функций  $X$  и  $Y$  задачу Штурма - Ливилля для оператора Лапласа в прямоугольнике  $\Omega$

$$\begin{cases} X'' - (-\nu - \lambda)X = 0, \\ Y''(y) = \lambda Y(y). \end{cases} \quad (3.4.12)$$

$$\begin{cases} X''(x) = (-\nu - \lambda)X(x), \\ X(0) = X(L) \end{cases} \quad (3.4.13)$$

и

$$\begin{cases} Y''(y) = \lambda Y(y), \\ Y(0) = Y(H) = 0. \end{cases} \quad (3.4.14)$$

Произведём поиск и выбор по тем значениям параметров  $\nu$  и  $\lambda$ , при которых находятся действительные нетривиальные решения по задачам (3.4.13), (3.4.14). А также найдём решения  $X$  и  $Y$ . Для этого для задачи (3.4.13) рассмотрим три случая относительно параметра  $\lambda$ .

1) При  $\lambda > 0$  задача не имеет нетривиальных решений, так как общее решение для задачи (6) имеет вид

$$Y(y) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}y} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}y}.$$

Граничные условия дают

$$\begin{aligned} Y(0) &= C_1 + C_2 = 0, \\ Y(H) &= C_1 e^{\sqrt{\lambda}H} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}H} = 0, \end{aligned}$$

то есть

$$C_1 = -C_2 \quad \text{и} \quad C_1(e^{\sqrt{\lambda}H} - e^{-\sqrt{\lambda}H}) = 0.$$

Но в рассматриваемом случае степень экспоненты - действительна и положительна, так что  $e^{\sqrt{\lambda}H} - e^{-\sqrt{\lambda}H} \neq 0$ . Поэтому

$$C_1 = 0 \quad \text{и} \quad C_2 = 0.$$

Это значит, что  $Y(y) \equiv 0$ . Получено противоречие неравенства нулю функции  $X$  при любых  $y$ .

2) При  $\lambda = 0$  также не существует нетривиальных решений. В этом случае решение задачи Штурма - Лиувилля (3.4.13) имеет вид

$$Y(y) = C_1 y + C_2,$$

комплекс краевых условий определяет

$$\begin{aligned} Y(0) &= C_2 = 0, \\ Y(H) &= C_1 H = 0, \end{aligned}$$

Следовательно,  $Y(y) = 0$ . Получено противоречие неравенства нулю функции  $Y$  при любых  $y$ .

3) При  $\lambda < 0$  общее решение уравнения может быть записано в виде

$$Y(y) = D_1 \cos \sqrt{-\lambda}y + D_2 \sin \sqrt{-\lambda}y,$$

комплекс краевых условий определяет

$$\begin{aligned} Y(0) &= D_1 = 0, \\ Y(H) &= D_2 \sin \sqrt{-\lambda}H = 0. \end{aligned}$$

Если  $Y(y) \neq 0$ , то  $D_2 \neq 0$ , поэтому

$$\sin \sqrt{-\lambda}H = 0,$$

что соответствует

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{\pi l}{H} \quad \text{при} \quad l = \mathbb{N}.$$

Следовательно, нетривиальные решения задачи (3.4.13) возможны лишь при значениях

$$\lambda = \lambda_l = -\left(\frac{\pi l}{H}\right)^2. \quad (3.4.15)$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$Y_l(y) = D_l \sin \frac{\pi l}{H} y,$$

где  $D_l$  - произвольная постоянная.

Аналогично рассуждая, найдем решения  $Y$  задачи (3.4.14)

$$X_k(y) = D_k \sin \frac{\pi k}{H} y. \quad (3.4.16)$$

Поэтому значение параметров

$$\lambda = \lambda_k = -k^2. \quad (3.4.17)$$

$$-\nu - \lambda = -n^2.$$

$$\nu_{k,n} = k^2 + n^2. \quad (3.4.18)$$

Таким образом, собственные числа в квадрате - это сумма собственных чисел по осям. Пользуясь формулой (3.4.10) получим, что

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{k,n} X_k(x) Y_n(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{k,n} \sin kx \sin ny. \quad (3.4.19)$$

Подберём постоянные  $D_{k,n}$  таким образом, чтобы  $\|u\| = 1$ . Для этого вычислим

$$\begin{aligned} \|C_{k,n} \sin kx \sin ny\|^2 &= \iint_{\Omega} (C_{k,n} \sin kx \sin ny)^2 dx dy = \\ &= C_{k,n}^2 \iint_{\Omega} (\sin kx \sin ny)^2 dx dy = C_{k,n}^2 \int_0^{\pi} (\sin kx)^2 dx \int_0^{\pi} (\sin ny)^2 dy = C_{k,n}^2 \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\|u\| = 1$ , то

$$C_{k,n} = \frac{2}{\pi}.$$

Следовательно,  $u(x, y)$  имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin kx \sin ny, \\ \nu_{k,n} &= k^2 + n^2. \end{aligned} \quad (3.4.20)$$



Обозначим семейство собственных значений задачи (3.4.8), (3.4.9)  $\{\nu_j\} \subset \mathbb{R}_+$ . Оно занумеровано по неубыванию с учетом их кратности и сгущающихся только к  $+\infty$ . А семейство собственных функций этой задачи обозначим  $\{\varphi_j\}$ , оно ортонормированное (в смысле  $\mathfrak{U}$ ).

Все нетривиальные решения задачи (3.4.7) можно разбить на три семейства:

$$\begin{cases} \alpha_{lk} = \{\sin \frac{\pi l}{H} z \cdot \sin \frac{2\pi k}{L} x\}, & l, k \in \mathbb{N}, \\ \beta_{lk} = \{\sin \frac{\pi l}{H} z \cdot \cos \frac{2\pi k}{L} x\}, & l, k \in \mathbb{N}, \\ \gamma_l = \{\sin \frac{\pi l}{H} z\}, & l \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.4.21)$$

Галеркинское приближение к решению задачи (3.4.6) для системы (3.4.7) возьмем в виде

$$\Psi = X(t)\alpha_{11} \quad (3.4.22)$$

Нетрудно заметить что (3.4.22) удовлетворяет краевым условиям (3.4.6).

Подставив (3.4.22) в (3.4.5), получим:

$$\pi^2 \left( \frac{1}{H^2} + \frac{4}{L^2} \right) \dot{X}\alpha_{11} = -\nu\pi^4 \left( \frac{1}{H^2} + \frac{4}{L^2} \right)^2 X\alpha_{11}. \quad (3.4.23)$$

Из первого уравнения (3.4.23) сразу получаем:

$$\dot{X} = -aX, \quad (3.4.24)$$

где

$$a = \nu\pi^2 \left( \frac{1}{H^2} + \frac{4}{L^2} \right), \quad (3.4.25)$$

### 3.5 Описание программы для ЭВМ

Численные методы исследования математических Навье - Стокса реализованы в программном комплексе "Программный комплекс моделирования динамики вязкой несжимаемой жидкости" в системе компьютерной математики Maple 2017.

*Функциональное назначение программы, область её применения.*

Программный комплекс состоит из четырех модулей и предназначен для получения численного решения многоточечной начально-конечной задачи в прямоугольнике для уравнения Навье - Стокса, в зависимости от заданных параметров и начальных данных. В программном комплексе реализован модифицированный метод Галеркина. В каждом из трех модулей вычисляются собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа в соответствующей области, находится решение в виде галеркинской суммы по нескольким первым собственным функциям. Программа позволяет строить график численного решения указанных задач. Для специалистов в области математической физики и математического моделирования. Кроме того, программа может быть использована студентами ВУЗов при изучении специальных курсов и дисциплин, связанных с исследованием уравнений соболевского типа. Процедуры нахождения собственных значений и собственных функций могут использоваться как составные части других программ по исследованию неклассических моделей математической физики.

*Описание логической структуры.*

В начале программы пользователю вводятся параметры. Модули включает в себя следующие этапы:

- ввод данных;
- нахождение собственных значений и собственных векторов
- расчет решения;
- вывод решения и его графика.

На рис. 12 представлена обобщенная схема алгоритма работы модулей программного комплекса.

Этап 1. Вводятся параметра  $N$  - количество слагаемых галеркинской суммы.

Этап 2. Составляется системы уравнений для модели Навье - Стокса.

Этап 3. Представление приближенного решения в виде галеркинской

суммы

$$\sum_{k=1}^N u_k(t)\varphi_k(x)$$

осуществляется в цикле от 1 до  $N$ .

Этап 4. Вводятся данные пользователем в диалоговом окне. В качестве входных являются следующие данные: параметры уравнения Навье - Стокса  $\lambda, \alpha, \beta, \nu, \chi$ , начальные функции, параметры, характеризующие длины сторон прямоугольника.

Этап 5. Подстановка приближенного решения в уравнение осуществляется с помощью процедуры **subs**.

Этап 6. Начало цикла по  $k$  от 1 до  $N$ . Уравнение и начальные функции умножаются на собственную функцию  $\varphi_k(x)$  скалярно (используется формула для скалярного произведения в прямоугольнике. Получаем уравнение и начальные условия на функцию  $u_k(t)$ .

Этап 7. Составляется система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Этап 8. Генерация начальных условий.

Этап 9. Решается система ОДУ с начальными условиями.

Этап 10. Подстановка полученных галеркинских коэффициентов в приближенное решение с использованием процедуры **subs**.

Этап 11. Полученное решение выводится на экран в виде функции и в виде графика с анимацией .

#### *Используемые технические средства*

Для реализации вычислительных алгоритмов использовались встроенные функции и стандартные операторы программного пакета Maple 15.0. Для создания диалоговых окон подключен пакет Maplets[Elements]. При вычислении интегралов от спец. функций используется пакет IntegrationTools. Для получения графического изображения подключен пакет plots. Автором программы создан М-файл для исследования (нахождения решения) математических моделей Навье - Стокса в прямоугольнике.

Программа эксплуатируется на персональном компьютере платформы Intel (80 × 86), работает под управлением Microsoft Windows.

*Выходные данные*

Выходными данными являются вывод на экран собственных значений и собственных функций, компонент решения  $u_k(t)$ , график решения  $u(x, t)$  в определенные промежутки времени.

Программный комплекс зарегистрирован в Реестре программ для ЭВМ.

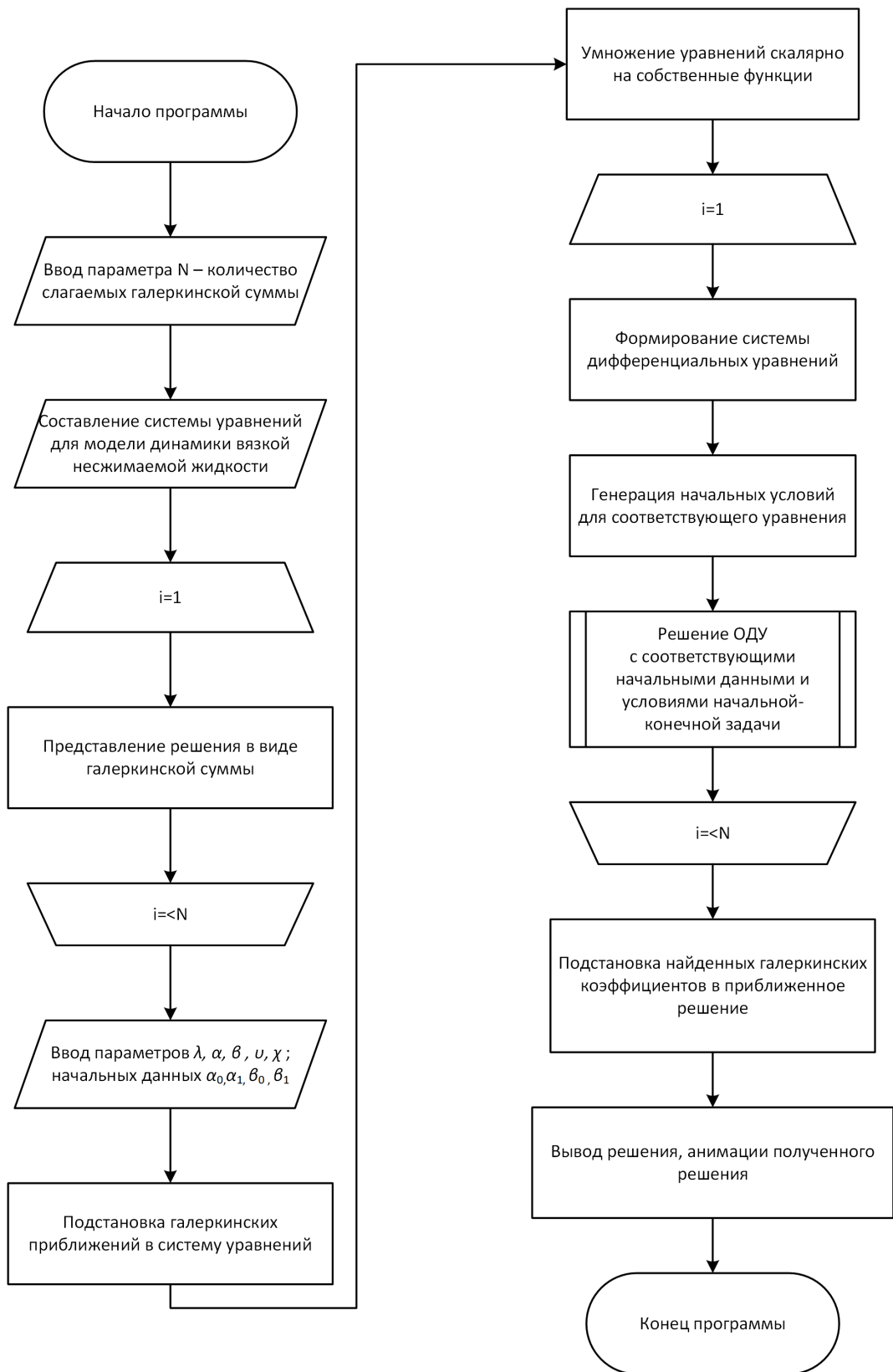


Рис. 12: Блок-схема

### 3.6 Вычислительный эксперимент

Требуется найти решение задачи в прямоугольнике  $\Pi$  при заданных параметрах:

$\lambda = -5$ ,  $a = -3$ ,  $b = -1$ ,  $\nu = \chi = 1$ ,  $l_1 = l_2 = \pi$ ,  $N = 2$ , и начальных функциях

$$u_0(x, y) = \frac{2}{\pi} \sin(2x) \sin(y),$$

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \cos(2x) \sin(y) + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin(2y).$$

Собственные функции и собственные значения:

$$\varphi_1 = \frac{2}{\pi} \sin 2x \sin y, \quad \lambda_{11} = -2;$$

$$\varphi_2 = \frac{2}{\pi} \cos x \sin y, \quad \lambda_{12} = -5;$$

Решение  $u(x, y, t)$  задачи (3.3.1) будем искать в виде галеркинской суммы

$$u(x, y, t) = \sum_{i,j=0}^N u_j(t) \varphi_j(x, y). \quad (3.6.1)$$

После подстановки ее в уравнение и умножения скалярно на собственные функции, получим систему.

Решив оставшуюся систему с начальными условиями

$$u_1(0) = \frac{\pi}{2}, \dot{u}_1(0) = \frac{\pi}{2}, u_2(0) = \frac{5\pi}{2}, \dot{u}_2(0) = -\frac{3\pi}{2},$$

найдем галеркинские коэффициенты

$$u_1(t) = 2\sqrt{13}/52 [(\sqrt{13} + 7)e^{(-1+\sqrt{13})t/6} + (-7 + \sqrt{13})e^{-(1+\sqrt{13})t/6}],$$

$$u_2(t) = 2[(5/117)\sqrt{(59)}e^{-5/6t} \sin(\sqrt{59}t/6) + 5/2e^{-5/6t} \cos(\sqrt{59}t/6)].$$

Подставив их в представление (3.6.1), окончательно получим приближенное решение исходной задачи

$$u(x, y, t) = \frac{2\sqrt{13}}{52} \sin(x) \sin(y) [(\sqrt{13} + 7)e^{\frac{(-1+\sqrt{13})t}{6}} + (-7 + \sqrt{13})e^{-\frac{(1+\sqrt{13})t}{6}}] +$$

$$+ 2 \sin(2x) \sin(2y) [(7/118)\sqrt{(59)}e^{-5/6t} \sin(\sqrt{59}t/6) + 5/2e^{-5/6t} \cos(\sqrt{59}t/6)].$$

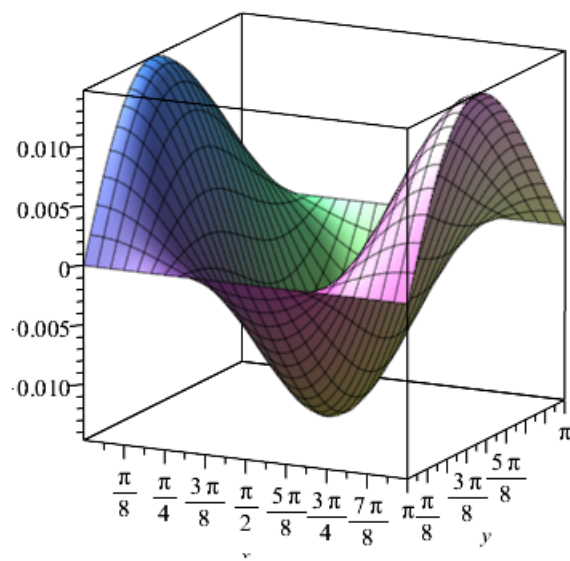


Рис. 13: График решения задачи (2.6.1) при  $t = 1$

## Заключение

**Итоги выполненного исследования.** В тексте диссертационного исследования представлены результаты состоявшегося аналитического и численного многоаспектного рассмотрения многоточечных начально-конечных задач в их реализации на материале гидродинамических моделей. Кроме того, были разработаны программы, реализующие численные методы их исследования, а именно

1. Исследована линейная математическая модель Навье - Стокса и доказано, что существует способ найти однозначную разрешимость для многоточечной начально-конечной задачи в рамках данной модели.

2. Проведено исследование математической модели, которая воспроизводит транспортный поток в сложности и многообразии составляющих его параметров, и доказано существование однозначной разрешимости многоточечной начально-конечной задачи в условиях, применимых для данной модели.

3. Сформулирована совокупность алгоритмов, действующих для решения поставленной задачи и поиска численных методов решения многоточечных начально-конечных задач в интересующих нас моделях.

4. Написан комплекс программ для ЭВМ, которые демонстрируют авторские разработки по численным методам и реализовано множество вычислительных экспериментов по численному решению многоточечных начально-конечных задач, предназначенных для работы с исследуемыми моделями.

В итоге, можно сказать, что все задачи, поставленные перед исследователем, были решены, а цель успешно достигнута.

Результаты, которые были получены в ходе исследования и на завершающих его этапах, новы для науки и представляют интерес для научного сообщества. Это, в свою очередь, позволяет сделать вывод о том, что диссертационная работа соответствует следующим областям исследования



паспорта специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.

3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

4. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

**Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы исследования.** Исследование может быть продолжено в ключе рассмотрения качественных и численных характеристик стохастической модели транспортных потоков таким образом, чтобы характеристика усредненной силы в модели, воспроизводящей дорожное движение, принималась в качестве случайного внешнего воздействия. Подобные изменения повлияют на характер модели: детерминированная ранее, она видоизменяется в стохастическую. В продолжение исследования предполагается расширенное рассмотрение, качественное и численное, модели Навье - Стокса с многоточечным начально-конечным условием в нелинейном случае.

## Библиографический список

- [1] *Абашеева, Н.Л.* Неклассические операторно-дифференциальные уравнения и связанные с ними спектральные задачи: дис... канд. физ.-мат. наук / Н.Л. Абашеева. –Новосибирск, 2000.
- [2] *Бабичева, Т.А.* Разнообразные методы моделирования транспортных потоков: дис... канд. физ.-мат. наук / Т.А. Бабичева. – Долгопрудный, М.: МФТИ, 2015. – 163 с.
- [3] *Баязитова, А. А.* Задача Штурма - Лиувилля на геометрическом графе / А. А. Баязитова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. - 2010. - № 16 (192). - С. 4 - 10.
- [4] *Врагов, В.Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В.Н. Врагов. - Новосибирск: НГУ, 1983.
- [5] *Дыльков, А.Г.* Исследование оптимального управления решениями начально-конечной задачи для неклассических моделей математической физики: дис... канд. физ.-мат. наук / А.Г. Дыльков. - Магнитогорск, 2012.
- [6] *Загребина, С.А.* О задаче Шоуолтера - Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. - 2007. - № 3. - С. 22-28.
- [7] *Загребина, С.А.* Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. - Челябинск, 2013. - Т.2, № 6. - С.5-24.
- [8] *Загребина, С.А.* Исследование многоточечных начально-конечных задач для неклассических моделей математической физики : дис. . . . докт. физ.- мат. наук / С. А. Загребина. – Челябинск, 2013. – 228 с.

- [9] Загребина, С.А. Устойчивые и неустойчивые многообразия решений полулинейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина, М.А. Сагадеева. - Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2016.
- [10] Замышляева, А.А. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска - Лява на графе / А.А. Замышляева, А.В. Юзеева // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. - Иркутск, 2010. - Т. 3, № 2. - С. 85-95.
- [11] Замышляева, А.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска - Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Мат. моделирование и программирование. - Челябинск, 2012. - № 5 (264), вып. 11. - С. 13-24.
- [12] Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. - Челябинск: Изд. Центр ЮУрГУ, 2012.
- [13] Замышляева, А.А. Исследование линейных математических моделей соболевского типа высокого порядка: дис. . . . докт. физ. - мат. наук / А.А. Замышляева. - Челябинск, 2013. - 276 с.
- [14] Замышляева, А.А. Уравнения соболевского типа на графе / А.А. Замышляева, О.Н.Цыпленкова. - Изд. центр ЮУрГУ: Челябинск, 2016.
- [15] Лоренц Э. Н. Детерминированное непериодическое течение/Э. Н. Лоренц // В сб. Странные аттракторы. -М. Мир, -1981.
- [16] Капитанский, Л. В. О некоторых задачах векторного анализа. / Л. В. Капитанский, К. И. Пилецкас // Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР. - 1984. - Т. 138. - С. 65 - 85.
- [17] Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа — дисс. ... д-ра. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. — Челябинск, 2011.

- [18] Кислов Н.В. Неоднородные краевые задачи дифференциально-операторных уравнений смешанного типа и их приложение // Мат. сборник. 1984. Т. 125 (167), №1 (9). С. 19-37.
- [19] *Кожанов, А.И.* Псевдогиперболические и гиперболические уравнения с растущими младшими членами / А.И. Кожанов // Вест. Челяб. ун-та. Сер. математика и механика. - 1999. - С. 31-47.
- [20] Куржанский А. Б. Текущие задачи динамики и теории управления, мотивации, теории и вычисления. Дорожная карта [Электронный ресурс]: пленар. докл. на заседании «П1 - БКЗ Общее пленарное заседание 1»/ А.Б. Куржанский // XII Всерос. совещание по проблемам управления, Россия, Москва, ИПУ РАН, 16-19 июня 2014 г. - Режим доступа: [http://vspu2014.ipu.ru/conference/section\\_meeting\\_pubs?target=7860](http://vspu2014.ipu.ru/conference/section_meeting_pubs?target=7860). - 09.07.2015
- [21] Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. - М.: Физматлит, 2007.
- [22] *Малинецкий Г.Г.* Хаос. Структура. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику / Г.Г. Малинецкий – М.:Эдиториал УРСС, 2000. – 256 с.
- [23] *Манакова, Н.А.* Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа /Н.А. Манакова, А.Г.Дыльков // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. - Челябинск, 2011. - № 17 (234), вып. 8. С. 113-114.
- [24] *Манакова, Н.А.* Аналитическое и численное исследования оптимального управления в полуполинейных моделях гидродинамики и упруго-

сти: дис. . . . докт. физ. - мат. наук / Н.А. Манакова. – Челябинск, 2015. – 255 с.

- [25] *Матвеева О.П.* Уравнения соболевского типа на графе / О.П.Матвеева, Т.Г. Сукачева. - Изд. центр ЮУрГУ: Челябинск, 2014.
- [26] *Мельникова, И.В.* Интегрированные полугруппы и  $C$ -полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач / И.В. Мельникова, А.И. Филинков // Успехи мат. наук. - 1994. - Т. 49, № 6. - С. 111-150.
- [27] *Осколков, А.П.* Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Зап. науч. сем. ЛОМИ. - 1991. - Т. 198. - С. 31-48.
- [28] *Осколков, А.П.* К теории устойчивости решений полулинейных диссипативных уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Зап. науч. сем. ЛОМИ. - 1992. Т. 200. - С. 139-148.
- [29] *Осколков, А.П.* Нелокальные задачи для одного класса нелинейных диссипативных уравнений типа Соболева / А.П.Осколков, А.А. Котсиолис, Р.Д. Щадиев // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1992. Т. 199. С. 91-113.
- [30] *Панков, А.* А.Нелинейные эволюционные уравнения с необратимым операторным коэффициентом при производной / А. А. Панков, Т. Е. Панкова // Докл. АН Укр. - 1993. - № 9. - С. 18-20.
- [31] *Пинянский А.И.* Качественные и численные исследования математической модели следования за лидером / А.И. Пинянский, А.П. Буслев // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. - 2017. - Т. 11, № 8. - С. 27-31.

- [32] *Покорный, Ю.В.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. - М.: Физматлит, 2004. - 272с.
- [33] *Сагадеева, М.А.* Дихотимии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. - Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.
- [34] Солонников, В. А. Линейные эллиптические системы. Конспект лекций. / В. А. Солонников // – Л.: ЛГУ, 1979. – 168 с.
- [35] *Свиридюк, Г.А.* О многообразии решений одной задачи несжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Дифференц. уравнения. - 1988. - Т. 24, №10. - С. 1846-1848.
- [36] *Свиридюк, Г.А.* Многообразия решений одного класса эволюционных и динамических уравнений / Г.А. Свиридюк // Докл. акад. наук СССР. - 1989. - Т. 304, № 2. - С. 301-304.
- [37] *Свиридюк, Г.А.* Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. - 1990. - №12. - С. 65-70.
- [38] *Свиридюк, Г. А.* Исследование полулинейных уравнений типа Соболева в банаховых пространствах: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Г.А. Свиридюк. - Челябинск, 1993.
- [39] *Свиридюк, Г.А.* Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. акад. наук СССР, сер. мат. - 1993. - Т. 57, №3. - С. 192-207.
- [40] *Свиридюк, Г.А.* Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Докл. акад. наук СССР. - 1993. - Т. 329, №3. - С. 274-277.
- [41] *Свиридюк, Г. А.* К общей теории полугрупп операторов / Г.А.Свиридюк // Успехи мат. наук. - 1994. - Т. 49, № 4. - С. 47–74.

- [42] *Свиридюк, Г.А.* Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывные полугруппы разрешающих операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк // Докл. РАН. -1994. - Т.337, № 5. - С. 581–584
- [43] *Свиридюк, Г.А.* Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. - 1994. - №1. - С. 62-70.
- [44] *Свиридюк, Г.А.* Уравнения соболевского типа на графах / Г. А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. - Новосибирск, 2002. - С. 221 - 225.
- [45] *Свиридюк, Г.А.* Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно  $p$ -секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Дифференц. уравнения. - 2002. - Т. 38, № 12. - С. 1646-1652.
- [46] *Свиридюк, Г. А.* О задаче Веригина для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. - 2003. - № 7. - С. 54-58.
- [47] *Свиридюк, Г.А.* Фазовое пространство одной неклассической модели / Г. А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Изв. вузов. Математика. - 2005. - № 10.- С. 47 - 52.
- [48] *Свиридюк, Г.А.* Уравнения Хоффа на графе / Г. А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференц. уравнения. - 2006. - Т.42, № 1. - С. 126 - 131.
- [49] *Сидоров, Н.А.* Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н.А. Сидоров // Мат. заметки. - 1984. - Т. 25, № 4. - С. 569-578.
- [50] *Суворов, С.Г.* Вариационная постановка эллиптически-параболической задачи Веригина / С.Г. Суворов // Исслед. матем.

моделей фильтр. жидкости и газа в пористых средах. Киев. 1987.  
С.20–29. (Препринт / АН УССР Ин-т математики; № 87. - 7)

- [51] *Сукачева, Т.Г.* Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук/ Т.Г. Сукачева. - Великий Новгород, 2004.
- [52] *Темам, Р.* Уравнения Навье - Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. - М.: Мир, 1981.
- [53] *Шестаков, А.Л.* Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. - 2011. - № 12. - С. 56-68.
- [54] *Эдельштейн, С.Л.* Асимптотическое расщепление краевых задач для абстрактных дифференциальных уравнений / С.Л. Эдельштейн // Дифференц. уравнения. - 1994. - Т. 30, № 5. - С. 797–805.
- [55] Beals R. Indefinite Sturm -Liouville problems and Half - Range Completeness // J. of Differential equations, 1985. V. 56 P. 391-407.
- [56] *Coleman, B.D.* Instability, uniqueness and nonexistence theorems for the equation  $u_t = u_{xx} - u_{xxt}$  on a strip / B.D. Coleman, R.J. Duffin, V.J. Mizel // Arch. Rat. Mech. Anal.- 1965. - V. 19. - P. 100-116.
- [57] *Demidenko, G.V.* Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest - order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. - N.-Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.
- [58] *Favini, A.* Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. - N.-Y.: Marcel Dekker, Inc. 1999.
- [59] Lyapunov -- Shmidt method in nonlinear analysis and applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. - Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002.



- [60] On the theory of nonclassical equations of mathematical physics / V.N. Vragov, A.I. Kozhanov, S.G. Pyatkov, S.N. Glazatov // Conditionally wellposed problems. - Moscow, Utrecht: TVP/TSP, 1993. - P. 299-321.
- [61] *Oskolkov A. P.* Some nonstationary linear and quasilinear systems occurring in the investigation of the motion of viscous fluids. Journal of Soviet Mathematics, 1978, vol. 10, no. 2, pp. 299-335.
- [62] *Pyatkov, S.G.* Operator theory. Nonclassical problems / S.G. Pyatkov. - Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2002.
- [63] *Showalter, R.E.* Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations / R.E. Showalter. - London; San Francisco; Melbourne: Pitman, 1977.
- [64] *Showalter, R.E.* Monotone operators in Banach Space and and nonlinear partial differential equations / R.E. Showalter. - Providence: AMS, 1997.
- [65] *Sviridyuk, G.A.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. - Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
- [66] *Ting, T.W.* Certain non-steady flows of second order fluids / T.W. Ting // Arch. Rat. Mech. Anal. - 1963. - V.14, № 1. - P. 28-57.
- [67] *Xi Gen Qi*, Well-posedness of abstract dynamical equations / Xi Gen Qi // Acta Math. Sci. - 1992. - V. 12, № 1. - P. 56-67. (Chinese)
- [68] *Xu Gen Qi*, Well-posedness of abstract kinetic equation boundary value problems / Xi Gen Qi // Acta. Math. Sci. - 1993. - V.13., № 3. - P.323-334.

### Статьи списка, рекомендованого ВАК

- [69] Zagrebina, S.A. The multipoint initial-final value condition for the Navier-Stokes linear model./ S.A. Zagrebina, A.S. Konkina // Вестник ЮУрГУ.

Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2015.  
— Том 8,. № 1 . — С. 132 -- 137 .

- [70] Свиридюк Г.А. Уравнения Осколкова на геометрических графах как математическая модель дорожного движения/Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина, А.С. Конкина //Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2015. -- Том 8,. № 3 . — С. 148 -- 154, DOI: 10.14529/mmp1503010.
- [71] Zagrebina S.A. Traffic management model / S.A. Zagrebina, A.S. Konkina // 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2016 – Proceedings, article № 7911712, DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7911712.
- [72] Konkina A.S. Numerical solution of a linear system of Navier - Stokes equations in an axisymmetric domain // Journal of Computational and Engineering Mathematics, 2019, Vol. 6, № 3, pp. 69-75.
- [73] Konkina A.S. Numerical Research of the Mathematical Model for Traffic Flow // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. - 2019. - Т. 12, № 4. - С. 128-134.

### **Свидетельства о регистрации программ**

- [74] Программный комплекс моделирования динамики вязкой несжимаемой жидкости № 20196618468 / Конкина А.С. (RU); правообладатель Конкина А.С. - 2019660610; заявл. 29.08.2019; зарегистр. 10.09.2019, реестр программ для ЭВМ.
- [75] Программный комплекс моделирования дорожного движения на перекрестке: свидетельство № 2019660195 / Конкина А.С. (RU); правообладатель Конкина А.С. - 2019619142; заявл. 25.07.2019; зарегистр. 02.08.2019, реестр программ для ЭВМ.

## Другие статьи

- [76] Загребина, С.А. Об одной новой задаче для уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной. / С.А. Загребина, А.С. Конкина // Вестн. МаГУ. Сер. Математика. – Магнитогорск, 2012. - Вып. 14. - С. 67 - 77.
- [77] Konkina, A.S. Multipoint Initial-Final Value Problem for the Model of Devis With Additive White Noise/ A.S. Konlina // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2017. - Том 10,. № 2 . - С. 144 - 149, DOI: 10.14529/mmp170212.

## Тезисы докладов

- [78] Загребина, С.А. Многоточечная начальнo-конечная задача для уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной на графе. / С.А. Загребина, А.С. Конкина// СамДиф – 2013: Дифференциальные уравнения и их приложения, Всерос. науч. конф., Самара, 01 -- 03 июля 2013 г.: тез. докл. – Самара, 2013. – С.32-33.
- [79] Загребина, С.А. Модель Девиса с условием Коши и аддитивным белым шумом. / С.А. Загребина, А.С. Конкина// Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2014»: тез. докл. - Воронеж, 2014. – С.209 – 211.
- [80] Загребина, С.А. Об одной стохастической эволюционной модели. / С.А. Загребина, А.С. Конкина// Материалы международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 04-09 июля 2014 г.: тез. докл. - Суздаль, 2014. – С. 63-64.
- [81] Загребина, С.А. Об одной новой стохастической модели. / С.А. Загребина, А.С. Конкина// Обзорение приклад. и пром. математики. – М., 2014. – Т.21, вып. 4. - С.365-366.

- [82] Загребина, С.А. Многоточечная начально-конечная задача для системы Навье - Стокса. / С.А. Загребина, А.С. Конкина// Алгоритмический анализ неустойчивых задач = Algorithmic Analysis of Unstable Problems: тез. докл. Всерос. конф. С междунар. участием, посвящ. памяти В.К. Иванова, Челябинск, 10 – 14 нояб. 2014 г. - Челябинск, 2014. - С.193.
- [83] Конкина, А.С. Многоточечная начально-конечная задача для линейной модели Навье - Стокса// Управление большими системами Материалы XII Всероссийской школы-конференции молодых ученых. под общей редакцией Д.А. Новикова, А.А. Воронина. 2015. С. 98-106.
- [84] Конкина, А.С. Математическая модель управления транспортными потоками в населенном пункте// Управление большими системами Материалы XIII Всероссийской школы-конференции молодых ученых. под общей редакцией Д.А. Новикова, А.А. Воронина. 2016. С. 623-630.

# Приложение 1. Свидетельство о регистрации программного комплекса моделирования динамики вязкой несжимаемой жидкости

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



**RU2019661846**

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА  
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ  
**ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ**

Номер регистрации (свидетельства):  
2019661846  
Дата регистрации: 10.09.2019  
Номер и дата поступления заявки:  
2019660610 29.08.2019  
Дата публикации и номер бюллетеня:  
10.09.2019 Бюл. № 9

Автор(ы):  
Конкина Александра Сергеевна (RU)  
Правообладатель(и):  
Конкина Александра Сергеевна (RU)

Название программы для ЭВМ:  
**Программный комплекс моделирования динамики вязкой несжимаемой жидкости**

**Реферат:**

Программный комплекс предназначен для расчета скорости течения вязкой несжимаемой жидкости. Функциональные возможности программы: математическое моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости на основе неклассического уравнения математической физики Соболевского типа с многоточечными начально-конечными условиями. Область применения программы: учреждения и организации Министерства природных ресурсов и экологии Российской Федерации, Министерства сельского хозяйства Российской Федерации, Министерства транспорта Российской Федерации, профильные научно-исследовательские организации и учебные заведения. Тип ЭВМ: IBM PC-совмест. ПК; ОС: Windows XP/Vista/7/8/10.

**Язык программирования:** Maple  
**Объем программы для ЭВМ:** 137,3 Кб

## Приложение 2. Свидетельство о регистрации программного комплекса моделирования дорожного движения на перекрестке

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



**RU2019660195**

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА  
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ  
**ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ**

Номер регистрации (свидетельства):  
2019660195  
Дата регистрации: 02.08.2019  
Номер и дата поступления заявки:  
2019619142 25.07.2019  
Дата публикации и номер бюллетеня:  
02.08.2019 Бюл. № 8  
Контактные реквизиты:  
нет

Автор(ы):  
Конкина Александра Сергеевна (RU)  
Правообладатель(и):  
Конкина Александра Сергеевна (RU)

Название программы для ЭВМ:  
**Программный комплекс моделирования дорожного движения на перекрестке**

**Реферат:**

Программный комплекс предназначен для моделирования дорожного движения на перекрестке с использованием представления транспортного потока как течения вязкоупругой несжимаемой жидкости с помощью уравнений Соболевского типа. Область применения программы: учреждения и организации проектирования сети автомобильных дорог и управления дорожным движением в населенных пунктах, профильные научно-исследовательские организации и учебные заведения. Функциональные возможности программы: математическое моделирование дорожного движения на перекрестке для любых сценариев развития ситуации с учетом специфики транспортного потока.

**Язык программирования:** Maple  
**Объем программы для ЭВМ:** 137,3 Кб