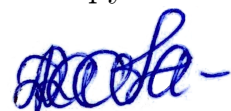


Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Солдатова Екатерина Александровна

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО
ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ
ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ

2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

доктор физико-математических наук,

доцент А.В. Келлер,

доктор физико-математических наук,

профессор С.А. Загребина

Содержание

Обозначения	4
Введение	5
1 Аналитический обзор математических методов исследования неклассических линейных моделей математической физики	26
1.1 Информационно-логическая модель исследования неклассических линейных моделей математической физики	26
1.2 Начальные и начально-конечная задачи для линейных уравнений соболевского типа	39
1.3 Детерминированные линейные модели	42
1.3.1 Модель Баренблатта – Желтова – Кочиной	43
1.3.2 Модель Осколкова	44
1.3.3 Модель Хоффа	47
2 Линейная модель Баренблатта – Желтова – Кочиной фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде со случайным внешним воздействием	49
2.1 Аналитическое исследование	49
2.2 Алгоритм метода Рунге – Кутты – Фелберга	52
2.3 Описание программной реализации алгоритма метода Рунге – Кутты – Фелберга. Результаты вычислительного эксперимента .	57
2.4 Алгоритм проекционного метода Галеркина	64
2.5 Алгоритм программной реализации проекционного метода Галеркина. Результаты вычислительного эксперимента	67

2.6	Обработка информации и алгоритм ее программной реализации. Результаты вычислительных экспериментов	72
-----	--	----

3 Линейные модели Осколкова и Хоффа на графах

	со случайным внешним воздействием	85
--	--	-----------

3.1	Аналитическое исследование модели Осколкова транспортировки нефти по нефтепроводу с начальным условием Шоултера – Сидорова	86
3.2	Аналитическое исследование модели Хоффа деформации в конструкции из двутавровых балок с начально–конечным условием	91
3.3	Алгоритм численного метода	96
3.4	Описание программной реализации алгоритма и результаты вычислительных экспериментов	99
3.5	Обработка информации и алгоритм ее программной реализации. Результаты вычислительных экспериментов	117

Заключение	130
-----------------------------	------------

Список литературы	132
------------------------------------	------------

Приложения	146
-----------------------------	------------

Приложение 1. Свидетельство о регистрации программы численного исследования жидкости, фильтрующей в трещиноватопористой среде со случайным внешним воздействием	147
---	-----

Приложение 2. Свидетельство о регистрации программного комплекса решения стохастических уравнений соболевского типа .	148
---	-----

Обозначения

$$I_a^b = (a, b) \subset \mathbb{R}$$

$\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – полное вероятностное пространство

$\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}(\Omega; \mathfrak{U})$ – пространство случайных величин

$$\mathbf{L}_2 \equiv \mathbf{L}_2(\Omega; \mathfrak{U}) = \{\xi \in \mathcal{V} : \int_{\Omega} \|\xi(\omega)\|^2 d\mathbf{P}(\omega) < +\infty\}, \|\xi\|^2 = \langle \xi, \xi \rangle;$$

$$\mathbf{CL}_2 = \{\eta(t, \cdot) \in \mathbf{L}_2 : t \in I_a^b\};$$

$\mathcal{L}(\mathfrak{Z}; \mathfrak{F})$ – множество линейных непрерывных операторов, определенных на пространстве $\mathfrak{Z}$ и действующих в пространство $\mathfrak{F}$;

$\text{dom } M$ – область определения оператора M ;

$\text{im } M$ – образ оператора M ;

$\text{ker } M$ – ядро оператора M ;

$\mathcal{Cl}(\mathfrak{Z}; \mathfrak{F})$ – множество линейных замкнутых операторов с областью определения плотной в $\mathfrak{Z}$;

$$\mathcal{L}(\mathfrak{Z}) \equiv \mathcal{L}(\mathfrak{Z}; \mathfrak{F}), \mathcal{Cl}(\mathfrak{Z}) \equiv \mathcal{Cl}(\mathfrak{Z}; \mathfrak{F}) \text{ при } \mathfrak{Z} \equiv \mathfrak{F};$$

$\mathbb{I}$ – единичный оператор;

$\mathbb{O}$ – нулевой оператор;

$\sigma^L(M)$ – относительный спектр оператора M ;

Символ $\bullet$ означает конец доказательства.

Введение

Актуальность исследования темы. В теоретических и прикладных исследованиях, связанных с задачами обработки и анализа информации, идентификации и управления, для оценивания состояния сложных физических и финансовых систем и их параметров используются стохастические модели [6], [26], [57]. Отметим, что для описания и моделирования большого числа физических, технических и технологических процессов уже несколько десятков лет применяют уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f, \quad \ker L \neq \{0\}, \quad (0.0.1)$$

однако аналитические и численные исследования именно стохастических уравнений соболевского типа начали системно изучаться только в последние годы [69], [70], [71]. Поэтому новые результаты для теории стохастических уравнений соболевского типа, позволяющие проводить исследование различных математических моделей с разработкой численных методов и алгоритмов являются актуальными.

Диссертационная работа посвящена аналитическому и численному исследованиям трех неклассических стохастических динамических математических моделей фильтрации, упругости и гидродинамики.

Математическая модель Баренблатта – Желтова – Кочиной. В ее основе лежит уравнение

$$(\lambda - \Delta)z_t = \alpha\Delta z + f, \quad (0.0.2)$$

рассматриваемое в цилиндре $G \times \mathbb{R}$, где $G \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область, граница области ∂G класса C^∞ , и однородным первым краевым условием

$$z(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \quad (0.0.3)$$

Модель Баренблатта – Желтова – Кочиной используется при описании процессов, связанных с фильтрацией жидкости в трещиновато-пористых сре-

дах [2]. Параметры α, λ – вещественные, характеризуют среду; параметр $\alpha \in \mathbb{R}_+$, а параметр λ в случаях, когда не возникает противоречия физическому смыслу задачи, может принимать и отрицательные значения [44]; функция $f = f(x)$ описывает внешнюю нагрузку.

Линейная математическая модель Осколкова. В рамках данной работы исследуются уравнения Осколкова

$$\lambda z_{jt} - z_{jxxt} = \alpha z_{jxx} + f_j, \quad (0.0.4)$$

на конечном связном ориентированном геометрическом графе $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$. Обозначив $E^\alpha(V_i)$ ($E^\omega(V_i)$) множество ребер с началом (концом) в вершинах $V_i \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$, зададим в них условия непрерывности

$$\begin{aligned} z_j(0, t) = z_k(0, t) = z_m(l_m, t) = z_n(l_n, t), \\ E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i) \end{aligned} \quad (0.0.5)$$

и баланса потоков

$$\sum_{j: E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j z_{jx}(0, t) - \sum_{k: E_k \in E^\omega(V_i)} d_k z_{kx}(l_k, t) = 0. \quad (0.0.6)$$

где $l_j \in \mathbb{R}_+$ – длина и $d_j \in \mathbb{R}_+$ – площадь поперечного сечения ребра E_j соответственно.

Линейная модель Осколкова описывает динамику скорости и давления несжимаемой вязкоупругой жидкости, в ее основе система [84]

$$(\lambda - \nabla^2)v_t = \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla)v - \nabla p + f, \quad \nabla \cdot v = 0, \quad (0.0.7)$$

где $\nu \in \mathbb{R}_+$ – вязкость, $\lambda \in \mathbb{R}$ – упругость, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $v_k = v_k(x, t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, – скорость, $p = p(x, t)$ – давление несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта [84]. В данной работе будет исследован случай, когда жидкость течет по трубопроводу, представляющему собой систему последовательно соединенных труб. Кроме того, модель на основе линейных

уравнений Осколкова в одномерном случае можно рассматривать, как модель Баренблатта – Желтова – Кочиной, т.е. линейное приближение течения вязкоупругой жидкости по трубопроводу .

Линейная математическая модель Хоффа. В ее основе лежит уравнение Хоффа

$$\lambda z_{jt} + z_{jxxt} = \alpha z_j + f_j, \quad (0.0.8)$$

которое рассматривается на графе $\mathbf{G}$ с условиями (0.0.5) и (0.0.6). Уравнение Хоффа

$$(\lambda + \Delta)z_t = \alpha z + \beta z^3, \quad (0.0.9)$$

и моделирует отклонение от вертикали двутавровой балки, которая находится под постоянной внешней нагрузкой [75]. Функция $z = z(x, t)$ характеризует насколько балка отклонилась от вертикали, параметры $\lambda \in \mathbb{R}_+$ описывает нагрузку, т.е. сжимающую силу, которая мы считаем величиной постоянной. Параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, где $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}_+$, – свойства материала балки. Одномерное уравнение Хоффа на графе моделирует нагруженную конструкцию из двутавровых балок. Линейная модель Хоффа (0.0.5), (0.0.8), (0.0.6) является частным случаем линейной модели Баренблатта – Желтова – Кочиной и потому может быть представлена в различных предметных областях.

Для всех динамических уравнений классическим считается начальное условие Коши

$$z(0) = z_0. \quad (0.0.10)$$

Кроме того, наряду с задачей (0.0.1), (0.0.10) уже более 30 лет в решении прикладных задач активно развивается направление, использующее при математическом моделировании в качестве начального *условие Шоуолтера – Сидорова*

$$P(z(0) - z_0) = 0 \quad (0.0.11)$$

для уравнения (0.0.1), где P – относительно спектральный проектор.

Более общим случаем условий (0.0.10) и (0.0.11) является начально-конечное условие вида

$$P_0(z(\tau_0) - z_0) = P_1(z(\tau_1) - z_1) = 0, \quad (0.0.12)$$

где P_0, P_1 аналогично, как и P – относительно спектральные проекторы.

В рамках данного исследования будем редуцировать математические модели к абстрактному стохастическому уравнению соболевского типа

$$Ld\zeta = M\zeta dt + NdW, \quad (0.0.13)$$

где L, M и N – линейные непрерывные операторы, действующие из гильбертова пространства $\mathfrak{Z}$ в гильбертово пространство $\mathfrak{F}$; $\zeta = \zeta(t)$ – искомый процесс, а $W = W(t)$ – заданный стохастический K -процесс. В каждом случае уравнение (0.0.13) снабжено либо уравнением Коши

$$\zeta(0) = \xi_0, \quad (0.0.14)$$

либо условием Шоултера–Сидорова

$$P(\zeta(0) - \xi_0) = 0, \quad (0.0.15)$$

либо начально-конечным условием

$$P_0(\zeta(0) - \xi_0) = P_1(\zeta(t_1) - \xi_1) = 0. \quad (0.0.16)$$

Здесь P, P_0 и P_1 – относительно спектральные проекторы, а

$$\xi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_{0k} \varphi_k, \quad \xi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_{1k} \varphi_k,$$

$\xi_0, \xi_1 \in \mathbf{L}_2$ попарно независимые гауссовы случайные величины, такие что $D\xi_{0k}, D\xi_{1k} \leq C_j, k \in \mathbf{N}, j = \overline{0, m}$.

В рамках данной работы все три модели будем объединять термином "неклассические стохастические линейные динамические модели", отмечая тем самым вырожденность уравнений и неклассические начальные условия.

В стохастических моделях, являющимися объектами исследования, рассматривается случайное внешнее воздействие. Отметим, что такой подход актуализируется и развитием прикладных задач, например, в рамках гидродинамических исследований трещиновато-пористых пластов и сложных систем "пласт – скважина – коллектор". Большое количество работ и разнообразие методов в этих исследованиях обусловлены и сложностью систем, и поиском менее затратных и трудоемких методов гидрогеологических исследований, к которым относят опытные откачки, наливов, нагнетания, расходомертия.

В последние годы эффективными признаны гидродинамические методы с использованием импульсного возбуждения скважин без забора жидкости. Изменения уровня жидкости могут спровоцировать землетрясение [42], импульсную регенерацию скважин, отдавливание столба воды сжатым воздухом и как следствие разгерметизацию устья скважины [9], [23] и т.д.

Вместе с тем у методов, использующих импульсно-волновое воздействие в скважине, есть и недостатки, к которым относятся малая информативность и низкая точность определения параметров трещиновато-пористой среды. В связи с чем, для повышения точности, используются различные методы гидропрослушивания для оценки скачка давления воды в наблюдательных скважинах. Для этого оказывают в возмущающих скважинах внешнее воздействие. Для совершенствования таких методов активно используются методы математического моделирования, численные алгоритмы и программы [7], [9], [60], [62], [82]. Подчеркнем, что значительное число математических методов, используемых в практике гидродинамических исследований, построено на основе уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной, например [9], [13], [32].

При этом во многих работах, несмотря на достигнутые успехи, признается важным поиск новых математических методов и моделей. Таким образом, и для прикладных исследований актуально качественное и количественное исследования модели Баренблатта – Желтова – Кочиной, линейной модели Осколкова и линейной модели Хоффа, как стохастических моделей.

Области применения исследуемых в работе математических моделей различны. Так, например, модель Баренблатта – Желтова – Кочиной описывает процесс влагопереноса в почве [74], процесс теплопроводности с "двумя температурами" [63], динамику некоторых неньютоновских жидкостей [64], [79].

Степень разработанности темы исследования.

Первыми работами, связанными с уравнениями в частных производных, неразрешимые относительно временной производной, были работы А. Пуанкаре, Ж. Буссинеска, С.Г. Россби, и др. (конец XIX – начало XX веков) [66]. В них рассматривались вопросы моделирования различных гидродинамических волн и течений. Однако, систематическое изучение таких уравнений началось в середине XX века с работ С.Л. Соболева [52]. Несмотря на то, что R.E. Showalter [87], [88] более 40 лет назад предложили именовать такие уравнения соболевского типа, и тот факт, что термин активно используется [18], [19], [34], [61], [90], необходимо сказать, что он не нашел широкого применения. Анализ опубликованных научных работ показывает, что употребляются следующие термины: уравнения неразрешенные относительно старшей производной [66], вырожденные уравнения [67], уравнения не типа Коши – Ковалевской [33], псевдопараболические уравнения [93].

На сегодняшний день число научных работ, в которых рассматриваются уравнения соболевского типа, стремительно растет, и привести здесь все труды не представляется возможным. Отметим лишь некоторое количество

монографий, частично или в полном объеме посвященных изучению таких уравнений [11], [66], [67], [68], [80], [85], [86], [89].

К современным исследованиям уравнений соболевского типа и их приложений (в детерминированном случае) отнесем работы российских ученых – В.Н. Врагова [94], Г.В. Демиденко, С.В. Успенского [66], С.А. Загребинной [15], А.А. Замышляевой [19], А.В. Келлер [25], А.И. Кожанова [27], Н.А. Манаковой [34], И.В. Мельниковой [38], С.Г. Пяткова [85], Г.А. Свиридюка [44], [90], Н.В. Сидорова [80], Т.Г. Сукачевой [53], М.В. Фалалеева [55], В.Ф. Чистякова [58] и многих других., и зарубежных авторов А. Favini, А. Yagi [67], [68], R.E. Showalter [89], Т. Ting [93] и других.

Исследования стохастических уравнений, в том числе и стохастических уравнений соболевского типа, и их приложений проводились многими российскими – К. Ито, Р.Л. Стратонович, А.В. Скороход [73], Ю.Е. Гликлик [73], И.В. Мельникова [81], Г.А. Свиридюк [91], С.А. Загребина [16], А.А. Замышляева [20], [71], Н.А. Манакова [69], и др. – и зарубежными – G. Da Prato, J. Zabczyk [65], M. Kovács, S. Larsson [77], E. Nelson [83], A. Favini [70] и др. авторами.

Необходимо отметить, что уравнения на графах с различными начальными и граничными условиями вызвали интерес ученых разных стран и начали изучаться в 90-е годы прошлого столетия. Среди наиболее важных работ выделим исследования F. Barra, C. Cattaneo, S. Kosugu, G. Medolla, A.G. Setti (см. исторический обзор в [41]). В России исследования свойств дифференциальных уравнений на многообразиях типа сеть были начаты Ю.В. Покорным [14], им и его учениками разработаны теоретические положения для эллиптических уравнений на ветвящихся многообразиях.

Исследования уравнений соболевского типа на геометрических графах были начаты Г.А. Свиридюком [45] и В.В. Шеметовой [50], получены условия од-

нозначной разрешимости полулинейного уравнения соболевского типа на геометрическом графе. Затем П.О. Пивоварова [41] получила условия устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения в моделях Хоффа как в области, так и на графе. А.А. Баязитовой для уравнения Хоффа, заданного на геометрическом графе, были изучены обратные задачи [3].

Исследования, результаты которых изложенные в представленной к защите диссертации, проведены в научной школе профессора Г.А. Свиридюка в рамках научного направления, возглавляемое профессором С.А. Загребинной. Оно выделяется изучением различных начальных

$$P_0(z(0) - z_0) = 0 \quad (0.0.17)$$

и начально-конечных

$$P_0(z(\tau_0) - z_0) = P_1(z(\tau_1) - z_1) = 0 \quad (0.0.18)$$

задач для линейных детерминированных уравнений соболевского типа вида

$$L\dot{z} = Mz + f. \quad (0.0.19)$$

и их приложений. Здесь P_0, P_1 – относительно спектральные проекторы.

Это направление начало развиваться в начале нынешнего века [47]. В частности, в [15] была изучена обобщенная задача Шоултера–Сидорова (0.0.18) для нескольких классов уравнений соболевского типа (0.0.20), моделирующих широкий круг процессов и явлений естествознания. К настоящему времени детерминированные модели с условиями (0.0.18) и (0.0.19) в основном изучены [16], [17], [48]. Пришло время исследования стохастических моделей вида (0.0.14) с условиями (0.0.15)–(0.0.16).

Одно из важнейших направлений в школе Г.А. Свиридюка возглавляет профессор Т.Г. Сукачева и связано оно с исследованием неавтономных уравнений соболевского типа, которые моделируют поведение несжимаемых

вязкоупругих жидкостей. Ряд прикладных задач сводится к неавтономной абстрактной задаче. Однако, непосредственное применение метода фазового пространства в случае неавтономных уравнений сопряжено с определенными трудностями, для преодоления которых предложено Т.Г. Сукачевой понятие и метод конфигурационного пространства [53]. Учениками Т.Г. Сукачевой исследуется однородная модель динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина — Фойгта ненулевого порядка, в том числе для исследования магнитного поля Земли [28], [37].

В челябинской научной школе теории уравнений соболевского типа сложились несколько основных направлений, одно которых возглавляет А.А. Замышляева. Профессор А.А. Замышляева и ее ученики исследуют различные задачи для детерминированных и стохастических (полу)линейных уравнений соболевского типа порядка n при производной по времени, $n \geq 2$ [19], [20]. Для уравнений соболевского типа при $n = 2$ А.А. Замышляевой построены семейства косинус, синус вырожденных оператор-функций и M , N -функций, получено необходимое и достаточное условие полиномиальности A -ограниченности пучка операторов – один из важнейших результатов работы, позволяющий исследовать разрешимость различных начальных и начально-краевых задач. Абстрактные результаты применяются к исследованию различных моделей математической физики – модель Бусинеска – Лява, модель распространения волн на мелкой воде, модели колебаний в молекуле ДНК и продольных колебаний в упругом стержне [8].

Одно из молодых направлений научной школы Г.А. Свиридюка возглавляет профессор Н.А. Манакова, оно связано с построением общей теории оптимального управления решениями полулинейных уравнений соболевского типа [34]. Для различных (полу)линейных неклассических моделей математической физики с условиями Шоуолтера – Сидорова и начально-конечными

условиями изучаются задачи оптимального управления [36], в том числе исследуются такие модели на геометрическом графе [4], [10], [35].

В последнее десятилетие появилось новое направление исследования – теория оптимального измерения, руководителями этого направления являются А.Л. Шестаков и Г.А. Свиридчук [92]. Это направление является примером трансформации синтеза теоретических и прикладных исследований в новое значимое направление. Во многом развитие этого направления стало возможным благодаря результатам аналитического и численного исследования начальных задач и задач оптимального управления для систем леонтьевского типа, проведенных А.В. Келлер [24], [25].

Особое следует уделить вниманию вырожденности изучаемых моделей. Всегда возникал вопрос о естественности этого случая в приложениях. Особенно остро стоял этот вопрос в технических приложениях – теории оптимального измерения. Но и в рамках данного направления были приведены примеры измерительного устройства, которые моделируются системой леонтьевского типа – конечномерным аналогом уравнений соболевского типа [76]. Подчеркнем, что общий принцип получения таких моделей в различных прикладных исследованиях описан в [31].

Отметим, что исследования линейных стохастических дифференциальных уравнений развиваются в последние годы. Одно из самых первых направлений исследования невырожденных стохастических уравнений в конечномерном случае – направление Ито – Стратоновича – Скорохода (например, [73]). Оно относится к одному из классических направлений. Здесь решается задача дифференцирования винеровского процесса, который в "обычном" смысле считается недифференцируемым. Предложен переход от дифференциального уравнения к интегральному, с последующим рассмотрением интегралов Ито, Стратоновича и т.д. В работе G. Da Prato [65] приведен обзор результа-

тов применения подхода Ито – Стратоновича – Скорохода, а в исследованиях М. Kovacs и S. Larsson [77] показаны приложения результатов [65] к классическим моделям математической физики.

Нельзя также не отметить направление, возглавляемое И.В. Мельниковой. Здесь стохастические уравнения исследуются в пространствах Шварца [81], [38]. При этом используется традиционный подход к понятию белого шума, как обобщенной производной винеровского процесса.

Для исследования вырожденных стохастических уравнений было предложено моделирование "белого шума" производной Нельсона – Гликлиха винеровского процесса [73], [83]. Именно этот подход получил широкое распространение для уравнений соболевского типа в последние годы [69], [70], [91].

Однако, как отмечалось выше, во всех случаях изучения стохастических задач в приложениях рассматриваются невырожденные стохастические уравнения, которые к тому же в основном исследованы с нулевыми начальными условиями. В рамках нашей диссертации впервые исследуются вырожденные стохастические уравнения с ненулевыми начальными условиями, такими, как условие Коши, условие Шоултера – Сидорова и начально-конечное условие.

Как уже было отмечено в предыдущем разделе уравнение Баренблатта – Желтовой – Кочиной активно используется математиками, механиками, физиками, инженерами для исследования различных научных и прикладных задач.

В работах Умарова Х.Г. исследуется модель Баренблатта – Желтовой – Кочиной в применении к грозненским нижнемеловым залежам, для которых характерно ярко выраженное вертикальное направление трещиноватости, поэтому фильтрационный поток в основном осуществляется "снизу – вверх". При горизонтальной и вертикальной анизотропии, для определенного вида модели псевдопараболического типа, получены явный вид решения ряда за-

дачи, разработан численный метод. В [54] использованы также методы теории сильно-непрерывных полугрупп. Заметим, что методы, применяемые в данной диссертации являются более общими и позволяют исследовать более широкий класс математических моделей, чем в [54]. Кроме того, в данной работе модель Баренблатта – Желтова – Кочиной рассмотрена в более общей форме и с учетом внешнего воздействия.

В работах Е.П. Вольницкой в ряде исследований оценки параметров сложных пластов при импульсно-волновом воздействии использована математическая модель Баренблатта – Желтовой – Кочиной [9]. Импульсно-волновое воздействие задается граничным условием на стенке скважины: давление меняется по гармоническому закону, в результате находятся периодические решения. Е.П. Воынцева отмечает, что при пневмоимпульсной обработке скважин создать гармонические колебания достаточно сложно, действительно, процесс выглядит, как на рис. 0.1.

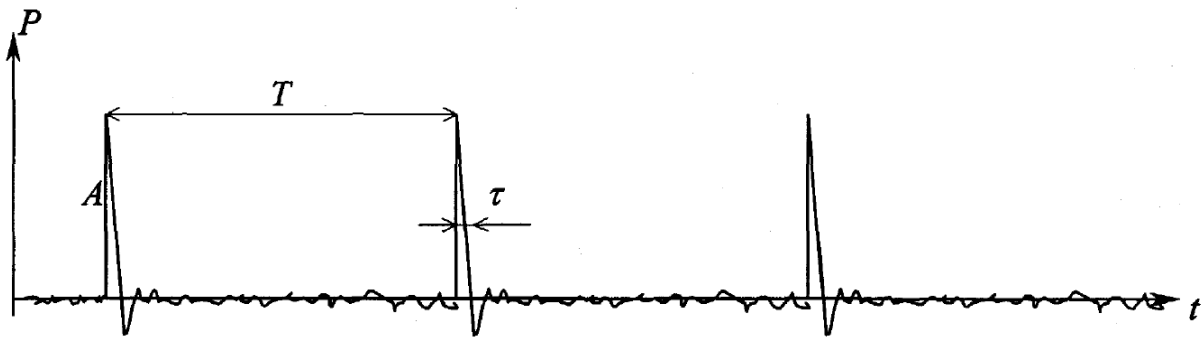


Рис. 0.1. Импульсы давления, создаваемые в скважине при воздействии пневмоисточником [9]

Амплитуда импульсов может достигать 5 МПа, их длительность составляет 0,01 – 0,02 с, а период – от 2 до 20 с (или частотой 0,5 – 0,005 Гц соответственно). Импульс, в предположении его представления прямоугольной формы, раскладывается в ряд Фурье, коэффициенты которого задаются пара-

метрами импульса. Получаемое решение позволяет находить поле давления в круговом неограниченном пласте, вскрытом совершенной скважиной (имеющей осесимметричный характер), в которой проводится импульсное периодическое воздействие. Затем по полученному выражению при наличии данных, зарегистрированными измерительными приборами, о колебаниях давления в пласте определяются параметры трещиновато-пористой среды.

Отметим, что импульсно-волновое воздействие используется при решении различных технических задач: повышение эффективности нефтедобычи [29], повышение качества крепления скважины [12], повышение проницаемости угля [30], очистки забоев водозаборных скважин [5] и т.д. Безусловно, в приводимых здесь исследованиях обсуждается целенаправленное импульсное воздействие. Однако, случайное воздействие может оказываться на трещиновато-пористую среду в результате техногенных катастроф, сейсмической активности. Поэтому стохастическая модель Баренблатта – Желтова – Кочиной может быть полезна в оценке динамики грунтов при моделировании различных сейсмических воздействий.

Цель и задачи. Целью диссертации является разработка аналитических и численных методов исследования неклассических стохастических линейных динамических моделей с реализацией алгоритмов анализа и обработки информации и комплексов программ.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Осуществить структурный системный анализ предметной области с применением метода информационно-логического моделирования для проектирования исследования.

2. Провести аналитическое исследование стохастических моделей Баренблатта – Желтова – Кочиной с условием Коши, Осколкова с условием Шоултера – Сидорова, Хоффа с начально-конечным условием.

3. Разработать численные методы и алгоритмы исследования линейных стохастических моделей Баренблатта – Желтова – Кочиной с условием Коши, Осколкова с условием Шоултера – Сидорова и Хоффа с начально-конечным условием.

4. Разработать алгоритмы и программное обеспечение для обработки информации, получаемой в результате вычислительных экспериментов, и анализа состояния систем при различных значениях их параметров.

5. Провести комплекс вычислительных экспериментов с обработкой информации на примере линейной стохастической модели Баренблатта – Желтова – Кочиной и линейной стохастической модели Хоффа на графе.

Научная новизна.

В области математического моделирования:

Проведено аналитическое исследование стохастических моделей Баренблатта – Желтова – Кочиной с условием Коши, Осколкова с условием Шоултера – Сидорова и Хоффа с начально-конечным условием. Найдены условия потраекторной однозначной разрешимости поставленных задач.

В области численных методов:

Предложены алгоритмы численных методов, модифицирующих методы Галеркина, Рунге – Кутты – Фелберга, позволяющие для исследуемых стохастических неклассических линейных динамических моделей находить приближенные решения (потраекторно).

В области комплексов программ:

Разработан и зарегистрирован комплекс программ для нахождения приближенного решения стохастических неклассических линейных динамиче-

ских моделей с начальными или начально-конечными условиями. Проведены вычислительные эксперименты для линейных стохастических моделей Баренблатта – Желтова – Кочиной в области, Осколкова и Хоффа на геометрическом графе.

В области системного анализа, управления и обработки информации: Разработан алгоритм и программное обеспечение обработки информации для линейных стохастических моделей Баренблатта – Желтова – Кочиной, Осколкова и Хоффа с применением методов информационно–логического моделирования. Представлены результаты обработки информации, полученной при проведении комплекса вычислительных экспериментов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретическая значимость работы заключается в обосновании аналитического метода исследования актуальных стохастических неклассических динамических моделей. Полученные результаты о разрешимости исследуемых задач развивают групповой подход в теории вырожденных стохастических уравнений. Применение абстрактных результатов для исследования стохастических неклассических динамических моделей, активно используемых в прикладных исследованиях, развивают методы математического моделирования и системного анализа.

Практическая значимость диссертационной работы заключается в применимости результатов исследования к проблемам гидродинамических исследований, моделирования течения жидкости по системе труб, изучения деформаций в конструкции из двутавровых балок. Это позволяет расширить применимость существующих методов оценки состояний сложных систем, их параметров в задачах гидродинамики, геологии при изучении фильтрации воды в почве, повышения эффективности добычи нефти. Комплексы программ реализованы с использованием разработанных алгоритмов численных

методов. Интерфейс программы позволяет встраивать ее в вычислительные среды для решения прикладных задач. Реализованы статичная (графики и трехмерные диаграммы) и динамическая визуализации (трехмерная анимация), позволяющие проводить анализ состояний моделируемых систем.

Методология и методы диссертационного исследования. В работе используются следующие методы исследования: математическое моделирование, абстрактно-логический и эмпирический. Метод моделирования с использованием системного подхода позволил на основе анализа развития методов решения практических задач и методов теории уравнений соболевского типа определить объекты исследования – стохастические линейные модели Баренблатта – Желтова – Кочиной, Осколкова и Хоффа. Математический метод, как абстрактно-логический, заключается в использовании: 1) методов линейного функционального анализа – выбор функциональных пространств для решения исследуемых задач; 2) методов теории уравнений соболевского типа и теории вырожденных групп операторов; 3) численных методов решения дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Эмпирический метод используется в работе с информацией и ее обработкой.

Краткое содержание диссертации. Структура диссертационной работы: введение, три главы, заключение, список литературы и два приложения. Список литературы включает 108 наименований.

Введение к диссертации включает в себя актуальность избранной темы, постановку задачи, степень разработанности избранной темы, цели и задачи, научную новизну, теоретическую и практическую значимость работы, методологию и методы диссертационного исследования, положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробацию результатов.

Первая глава состоит из трех параграфов. *Первый параграф* содержит результаты структурного системного анализа предметной области с приме-

нением метода информационно–логического моделирования. В основу положена контекстная диаграмма процесса исследования математической модели. Затем, используя метод уровневой декомпозиции, строятся 8 диаграмм, позволяющие разработать методологию исследования неклассических стохастических математических моделей на основе теории относительно ограниченных операторов. *Второй параграф* посвящен разрешимости начальных и начально-конечной задач для линейных уравнений соболевского типа в детерминированном случае. В *третьем параграфе* обсуждаются прикладной характер и особенности исследуемых математических моделей в детерминированном случае, приводятся результаты, полученные ранее другими авторами.

Вторая глава представляет результаты аналитического и численного исследований математической модели Баренблатта – Желтова – Кочиной фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде со случайным внешним воздействием. В *первом параграфе* содержатся результаты аналитического исследования, доказывається теорема о разрешимости начально-краевой задачи для стохастического уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной с начальным условием Коши. Во *втором параграфе* описан метод Рунге – Кутты – Фелберга для исследования математической модели. *Третий параграф* представляет программу, реализующую численный метод Рунге – Кутты – Фелберга и приводятся результаты вычислительных экспериментов. Во *четвертом параграфе* дано описание проекционного метода Галеркина для численного исследования математической модели и его алгоритма. *Пятый параграф* представляет программу, реализующую численный метод Галеркина, приводятся графические отображения результатов вычислительного эксперимента. В *шестом параграфе* представлен алгоритм обработки информации, получаемой при численном исследовании. Приводятся результаты серии

вычислительных экспериментов и графическое отображение результатов их обработки.

Третья глава состоит из пяти параграфов и содержит результаты аналитического и численного исследований стохастических линейных математических моделей с относительно ограниченными операторами на графах. В *первом параграфе* содержатся результаты аналитического исследования модели Осколкова транспортировки нефти по трубопроводу со случайным внешним воздействием, доказываемая теорема о разрешимости модели с начальным условием Шоултера – Сидорова и граничными условиями баланса потока и условием непрерывности. Во *втором параграфе* содержатся результаты аналитического исследования модели Хоффа деформации в конструкции из двутавровых балок со случайным внешним воздействием, доказываемая теорема о разрешимости модели с начально-конечным условием и граничными условиями баланса потока и условием непрерывности. В *третьем параграфе* дано описание проекционного метода Галеркина для численного исследования математических моделей. Обсуждаются общие для обеих моделей аспекты, и особенности численного алгоритма для каждой из них. *Четвертый параграф* представляет программу, реализующую численный метод Галеркина, приводятся графические отображения результатов вычислительных экспериментов на разных графах с различными начальными условиями. В *пятом параграфе* представлен алгоритм программы, позволяющей обработать информацию по исследованию процессов, при моделировании которых используются уравнение Осколкова и Хоффа на графе.

В заключении диссертации излагаются итоги выполненного исследования, рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы, обосновывается соответствие диссертационной работы специальностям 2.3.1 и 1.2.2

Положения, выносимые на защиту:

В рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей получены:

1. Результаты аналитического исследования математической модели Баренблатта – Желтова – Кочиной для задачи Коши со случайным внешним воздействием и однозначная разрешимость задачи Коши в модели динамики давления жидкости, фильтрующей в трещиновато-пористой среде со случайным внешним воздействием.
2. Результаты аналитического исследования линеаризированной математической модели Осколкова с условием Шоултера – Сидорова со случайным внешним воздействием и однозначная разрешимость задачи Шоултера – Сидорова в модели динамики давления и скорости вязкоупругой несжимаемой жидкости, движущейся в j -ой секции трубопровода со случайным внешним воздействием.
3. Результаты аналитического исследования линейной математической модели Хоффа с начально-конечным условием со случайным внешним воздействием и однозначная разрешимость начально-конечной задачи в модели выпучивания двутавровых балок в конструкции, находящихся под постоянной нагрузкой со случайным внешним воздействием.

В рамках разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий получены:

4. Модификация численного метода Рунге – Кутты – Фелберга седьмого порядка точности и разработка алгоритма нахождения приближенного решения начальной задачи для стохастической математической модели Баренблатта – Желтова – Кочиной.
5. Модификация численного метода Галеркина и разработка алгоритмов на-

хождения приближенных решений при исследовании стохастических модели Баренблатта – Желтова – Кочиной, линеаризированной модели Осолова и линейной модели Хоффа с различными начальными или начально-конечными условиями.

В рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов получены:

6. Комплекс программ для ЭВМ, реализующих алгоритмы нахождения приближенного решения стохастических уравнений соболевского типа.

В рамках разработки специального математического и программного обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации получены :

7. Алгоритм и его программная реализация обработки информации комплекса вычислительных экспериментов (на основе метода логико-информационного моделирования) для движения жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде со случайным внешним воздействием.

8. Алгоритм и его программная реализация обработки информации комплекса вычислительных экспериментов (на основе метода логико-информационного моделирования) для динамики выпучивания конструкции из двутавровых балок со случайным внешним воздействием.

Степень достоверности результатов. Степень достоверности результатов диссертации подтверждается глубокой и всесторонней проработкой результатов, опубликованных в ведущих научных журналах. Научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, апробированы на международных и всероссийских конференциях и семинарах. Результаты вычислительных экспериментов качественно согласуются с аналитическими результатами.

Апробация результатов. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались на Международных конференциях и симпозиумах: "Измерения: состояние, перспективы развития" (Челябинск, 2012), "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Белгород, 2013), "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений" (Новосибирск, 2013), "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна" (Воронеж, 2016), "Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование" (Иркутск, 2019), "Новые тренды стохастического анализа" (Геленджик, 2021).

Результаты диссертационного исследования были представлены и обсуждены на XVI Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике.

Отдельные результаты, выносимые на защиту, представлялись на областных семинарах профессора Г.А. Свиридюка, (ФГАОУ ВО "ЮУрГУ (НИУ)", г.Челябинск), профессора С.И. Кадченко в ФГБОУ ВО "МГТУ им. Г.И. Носова", г. Магнитогорск).

Публикации По результатам диссертации опубликовано 14 научных работ [95] – [108], в том числе: 6 [95] – [100] опубликованы в рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ, из них 3 [97] – [99] – в изданиях, индексируемых базами данных Scopus и WoS, 2 [96], [100] – в изданиях, индексируемых в наукометрической базе данных RSCI; а также 2 свидетельства о регистрации программ [101], [102]. Из работ, выполненных в соавторстве, в диссертацию вошли только результаты, полученные автором лично.

1. Аналитический обзор математических методов исследования неклассических линейных моделей математической физики

1.1. Информационно-логическая модель исследования неклассических линейных моделей математической физики

В настоящее время с одной стороны математиками ведутся аналитические и численные исследования неклассических моделей математической физики, с другой стороны ставятся новые практические задачи, требующие более эффективного математического обеспечения для их решения. Метод информационно-логического моделирования, используя методы структурного системного анализа, представляет совокупность информационных объектов, их атрибутов и отношений между ними, позволяет достигать целей исследовательских разработок в различных предметных областях.

Процесс построения информационно-логической модели исследования неклассических линейных моделей математической физики начинается с построения контекстной диаграммы (рис. 1.1), которая отображает процесс работы с математической моделью в целом. Выделены семь основных этапов: описание исходного реального объекта (или процесса), позволяющее начать работу с ним; постановка задачи, позволяющая провести ее формализацию; построение неклассической модели математической физики; применение математических методов для исследования модели; разработка и применение программы (или комплекса программ) для ЭВМ; анализ результатов; получение выводов по результатам работы. Отметим, что семь этапов определены на основе общепринятых подходов к построению математической модели (например, [43]), с учетом ее интеграции в процессы системного анализа и синтеза (например, [1]). Номера этапов контекстной диаграммы обозначены

римскими цифрами. Кроме того, показана необходимость проверки адекватности математической модели и возможность корректировок и устранения недостатков в процессе работы.



Рис. 1.1. Контекстная диаграмма работы с неклассическими моделями математической физики.

После описания процесса работы с математической моделью в целом (контекст) проводится его функциональная декомпозиция. Диаграмма декомпозиции верхнего уровня (рис. 1.2) состоит из семи основных функциональных блоков.

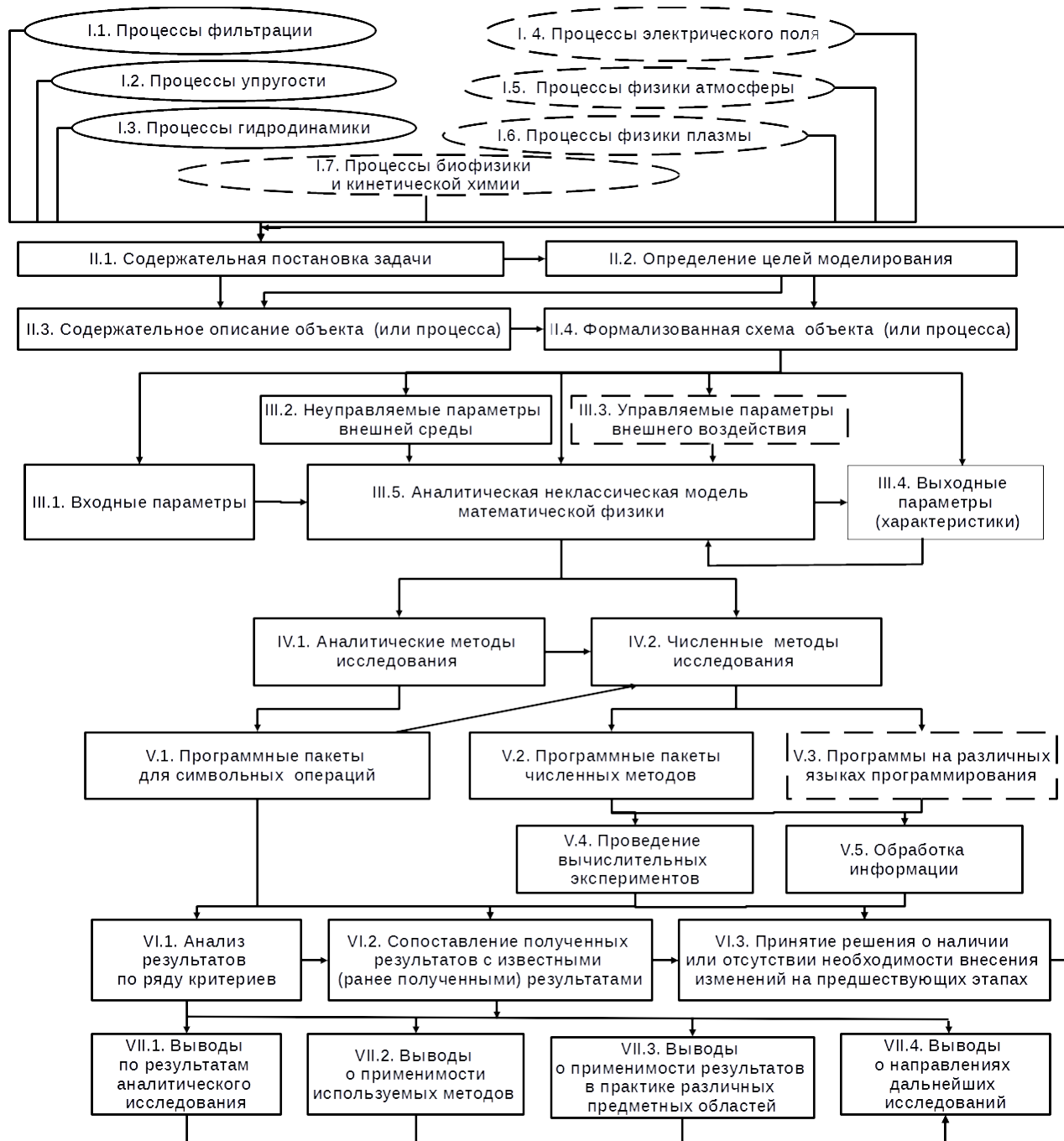


Рис. 1.2. Диаграмма декомпозиции верхнего уровня.

В рамках построения декомпозиционных диаграмм, как второго, так и последующего уровня, пунктирными линиями структурных объектов выделяются те элементы, которые непосредственно не относятся к данному исследованию.

Проведенный анализ исследуемых объектов и процессов с использованием неклассических моделей математической физики показал, что в настоящее время наиболее активно изучаемыми являются следующие процессы:

- фильтрация жидкости в трещиновато-пористой и других средах;
- распределение потенциала скорости движения свободной поверхности фильтрующейся жидкости;
- эволюция свободной поверхности жидкости, фильтрующейся в пласте ограниченной мощности;
- деформация двутавровой балки и конструкции из двутавровой балки;
- колебания тонкого стержня и в конструкции тонких упругих стержней;
- течение вязкоупругой жидкости по трубопроводу;
- распространение длинных волн на мелкой воде;
- малые колебания вращающейся жидкости;
- движение несжимаемой вязкоупругой жидкости в магнитном поле Земли;
- динамика слабосжимаемой вязкоупругой жидкости;
- распространение потенциального электрического поля в полупроводнике;
- распространение волн Россби или планетарных волн, которые имеют длинноволновой характер и малую частоту;
- распространение линейных волн в плазме во внешнем магнитном поле;
- колебания в молекуле ДНК;
- распространение нервного импульса в мембранной оболочке;
- «реакция – диффузия».

На рисунке 1.3 названные процессы отражены в виде иерархической древовидной структуры. Группа первых двух цифр позволяет связать структурно каждый процесс с объектами диаграммы декомпозиции.



Рис. 1.3. Исследуемые процессы с использованием неклассических моделей математической физики.

Выделяют четыре цели математического моделирования:

- дескрипторные, связанные с описанием и пониманием устройства конкретного объекта, его структуры и основные свойства, закономерности его динамики и взаимосвязи с окружающим миром;
- оптимизационные, связанные с поиском наилучших значений параметров и(или) характеристик модели при заданных критериях;

– управления, связанные с определением возможностей управления объектом или процессом и нахождением наилучшего способа управления при заданных целях и критериях управления;

– прогнозные, связанные с прогнозированием последствий реализации заданных способов и форм воздействия на объект или процесс.

Отметим, что в проводимых исследованиях неклассических моделей математической физики реализовывались только два вида целей – дескрипторные, например, [53], [54], [61] и управления, например, [21], [25], [36]. На рисунке 1.4 представлена структура неклассических моделей математической физики во взаимосвязи с различными целями математического моделирования.

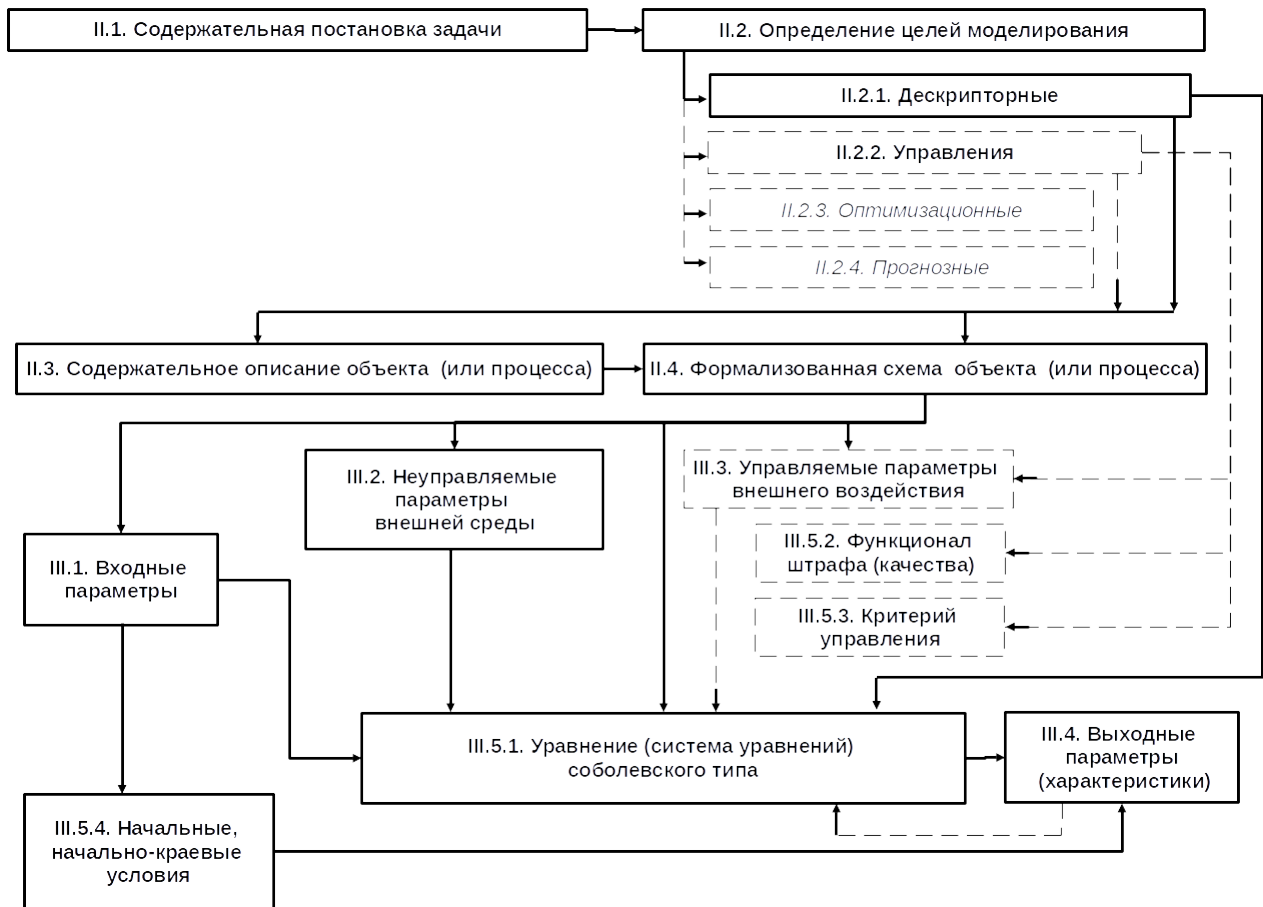


Рис. 1.4. Структура неклассических моделей математической физики с учетом целей математического моделирования.

В данной работе для изучаемых трех моделей была поставлена и реализована дескрипторная цель математического моделирования.

При декомпозиции блоков математической модели (рис. 1.5) предполагается, что входные параметры могут быть и стохастическими и детерминированными. Например, начальное состояние может задаваться как случайная величина, а краевое условие как детерминированное нулевое значение. Кроме того, в блоке начальных и краевых условий выделены условие Коши, условие Шоултера – Сидорова, начально–конечное условие и многоточечные начально–конечные условия.

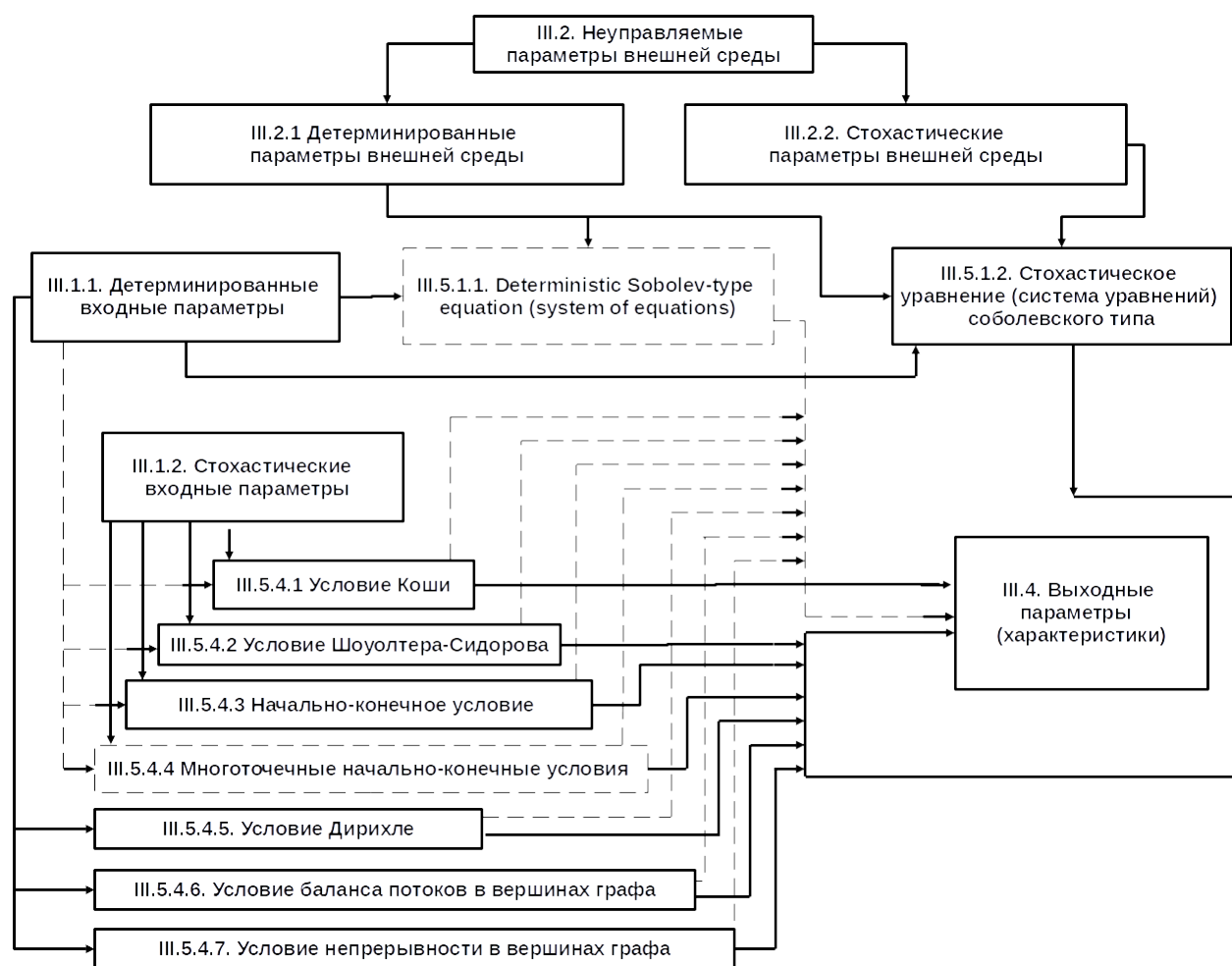


Рис. 1.5. Декомпозиция структуры неклассических моделей математической физики

Отметим, что если математическая модель предполагает рассмотрение графа, то в блоке начальных и краевых условий выделяют условие баланаса потоков и условия непрерывности в вершинах графа. Важной характеристикой математической модели является наличие внешнего неуправляемого или управляемого воздействия, при этом в рамках проводимого исследования изучаются математические модели при наличии неуправляемого внешнего воздействия, имеющего стохастическую природу.

При декомпозиции блока аналитических исследований выделено два основных направления: математические основания исследования и теоретические исследования поставленных математических задач (рис. 1.6). Математические основания предполагают развитие математических теорий и методов, позволяющих проводить теоретические исследования. В качестве основных выделены методы классических теорий и разделов математики: функциональный анализ; уравнения математической физики. Для исследований неклассических моделей математической физики используются:

- теория относительно p -ограниченных операторов и порождаемых ими разрешающих групп;
- теория относительно p -секториальных операторов и порождаемых ими аналитических разрешающих полугрупп;
- теория относительно p -радиальных операторов и порождаемых ими сильно непрерывных разрешающих полугрупп.

При рассмотрении конечномерных математических моделей используется теория дескрипторных (или алгебро-дифференциальных) систем, к которым в том числе относится и теория систем леонтьевского типа.

При проведении теоретических исследований выделяют направления, связанные с изучением разрешимости различных задач для уравнений соболевского типа, получение условий единственности решения, получение аналити-

ческого решения задачи. В качестве методов исследования, которые используются при этом выделим как те, которые используются в работах научной школы профессора Г.А. Свиридюка, так и в других научных школах.

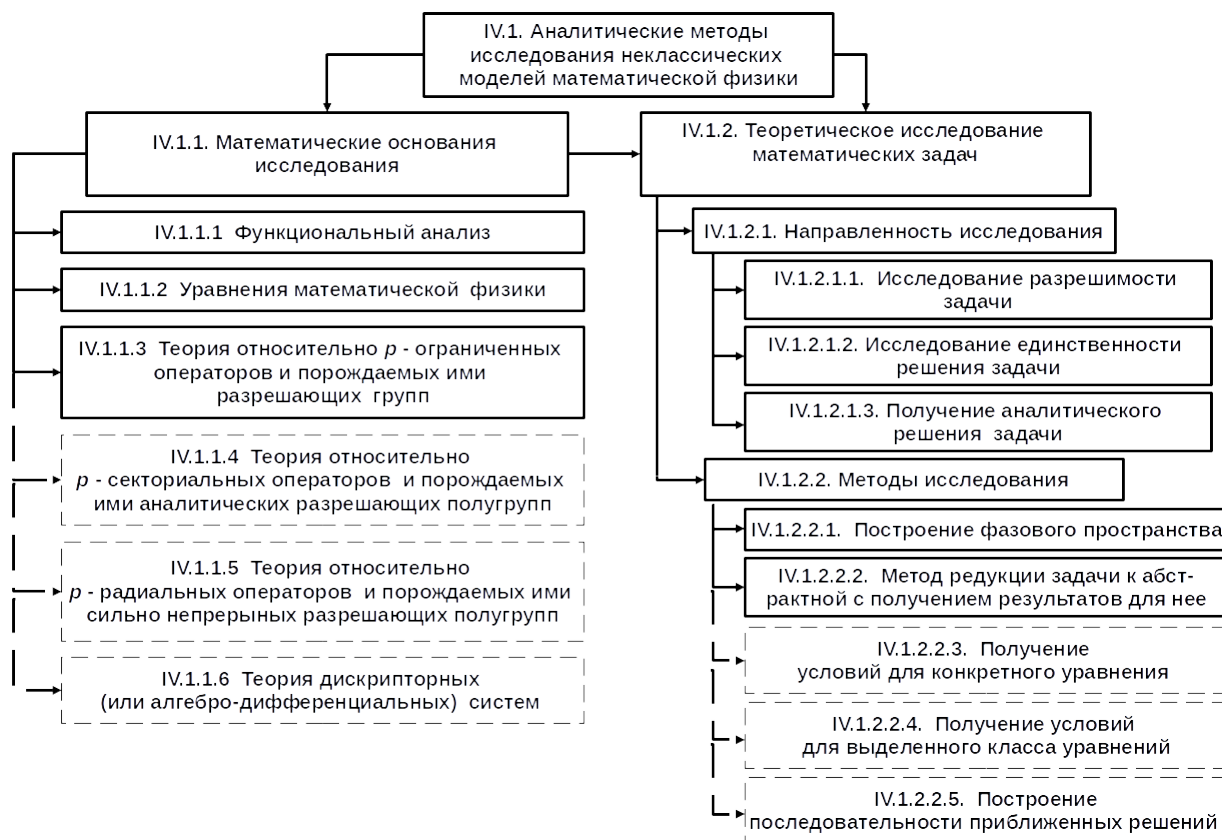


Рис. 1.6. Аналитические методы исследования неклассических моделей математической физики

При исследовании математической модели с начальным условием Коши в челябинской научной школе был развит метод построения фазового пространства. В большинстве своем математические модели редуцируются к абстрактной задаче, которая затем исследуется на основе теории вырожденных (полу)групп. Именно в русле этих методов исследуются стохастические неклассические линейные модели математической физики, которые будут представлены в следующем параграфе статьи.

На рисунке 1.7 представлен декомпозиция блока численных методов исследования. На первом шаге проводится выбор, модификация или разработка

численного метода. Проведя анализ различных исследований выделены следующие подходы:

- модификации метода Галеркина;
- метод Рунге – Кутты (или Рунге – Кутты – Фельдберга);
- многошаговый метод по координатного спуска и его модификации;
- метод декомпозиции и метод штрафа;
- метод Ритца;
- методы, базирующиеся на теории алгебро-дифференциальных систем,

развиваемых в иркутской математической школе.

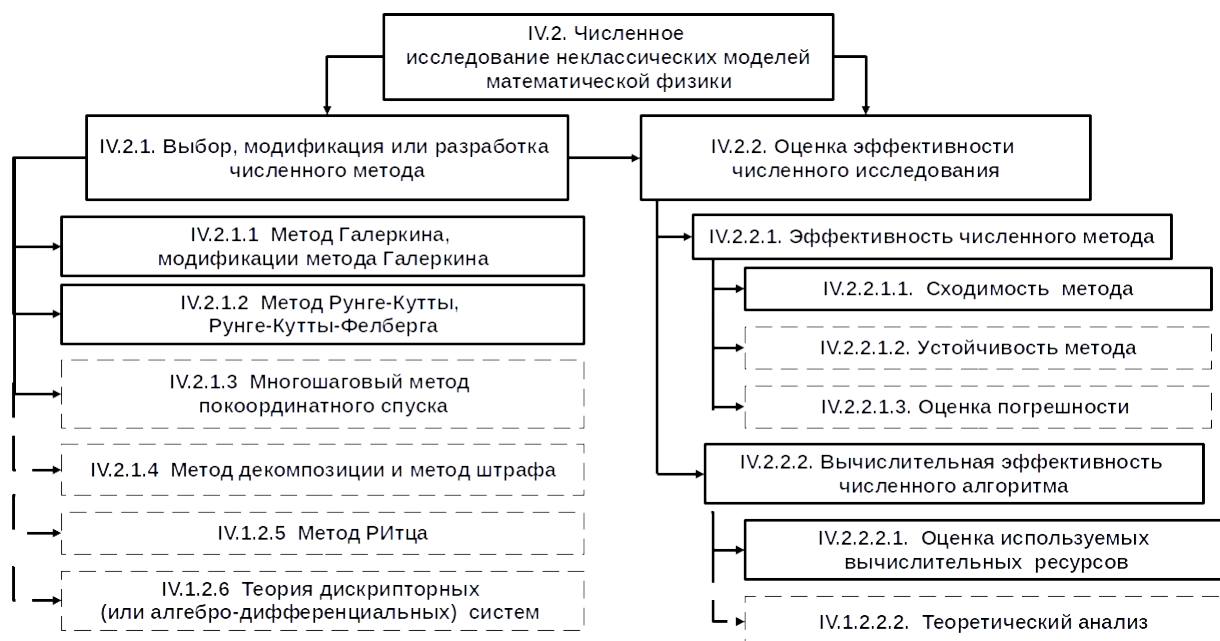


Рис. 1.7. Численные методы исследования неклассических моделей математической физики

Важным этапом численного исследования является оценка эффективности построенного алгоритма. В качестве основных элементов такой оценки является выяснения вопросов, связанных со сходимостью и (или) устойчивостью численного метода. Кроме того, оценка погрешностей метода при тех или иных его характеристиках дает представление об эффективности чис-

ленного алгоритма. Важным является оценка используемых при реализации алгоритма вычислительных ресурсов.

Декомпозиция блока программного обеспечения исследования математической модели представлена на рисунке 1.8. Программа может быть реализована в математических программных пакетах – Matlab, Maple, Mathcad и др, так и написана на различных языках программирования, например, C++, Python, Fortran и др. Безусловно, важными элементами программной реализации являются проведение вычислительных экспериментов и обработка получаемых на их основе информации.

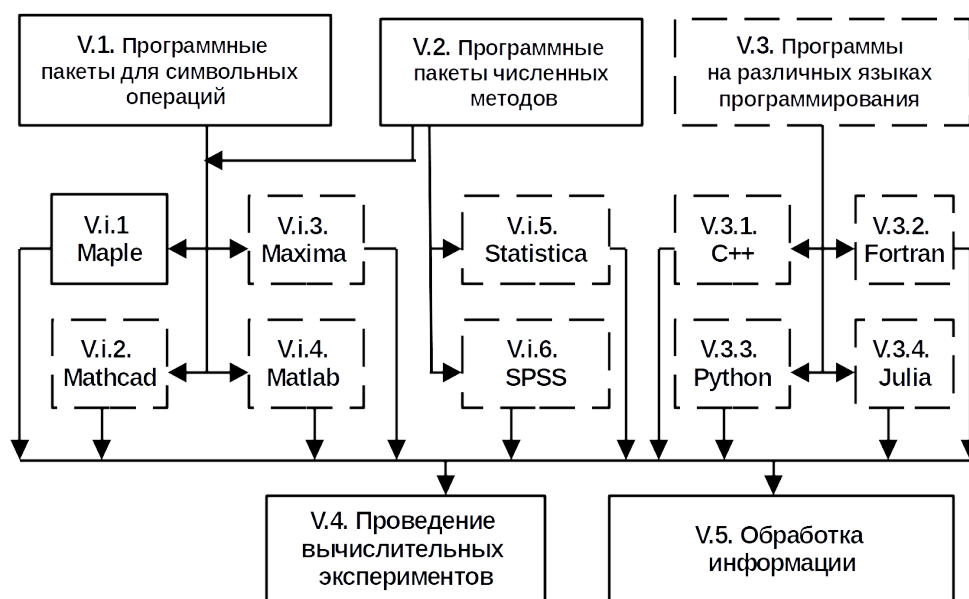


Рис. 1.8. Структурная диаграмма этапа программного обеспечения работы с математической моделью.

Применим метод информационно-логического моделирования к исследованию трех неклассических линейных моделей математической физики со случайным внешним воздействием – модель Баренблатта – Желтова – Кочиной, модель Хоффа и модель Осколкова (рис.1.9). Модель Баренблатта – Желтова – Кочиной используется для нахождения давления жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде, на рисунке 1.9 ее рассмотрение

начинается с пп. I.1 Процессы фильтрации – I.1.1. Фильтрация жидкости в трещиновато-пористой среде. Модель Хоффа используется для нахождения динамики выпучивания двутавровых балок в конструкции. На рисунке 1.9 рассмотрение этой модели начинается с пп. I.2. Процессы упругости – I.2.2. Деформация конструкции из двутавровых балок. Модель Осколкова используется для нахождения давления вязкоупругой несжимаемой жидкости в сечениях трубопровода. На рисунке 1.9 рассмотрение этой модели начинается с пп. I.3. Процессы гидродинамики – I.3.1. Течение вязкоупругой жидкости по трубопроводу.

В Информационно-логической модели исследования всех трех моделей есть структурные элементы, присущие всем трем моделям, они отмечены на рисунке 1.9 двойными линиями, например, п. II.2 – Дескрипторная цель математического моделирования. Общими структурными элементами являются: стохастическое линейное уравнение соболевского типа; используется теория относительно p -ограниченных операторов и порождаемых ими теории вырожденных групп; проводится исследование разрешимости и единственности решения с получением аналитического решения; в численном исследовании используются модификации метода Галеркина, а для их реализации используется программа Matlab. Именно эти структурные элементы и создают единую концепцию данного диссертационного исследования разных трех математических моделей.

Различия в других структурных элементах обусловлены различными параметрами и характеристиками моделей, различными начальными условиями и другими особенностями исследуемых математических моделей.

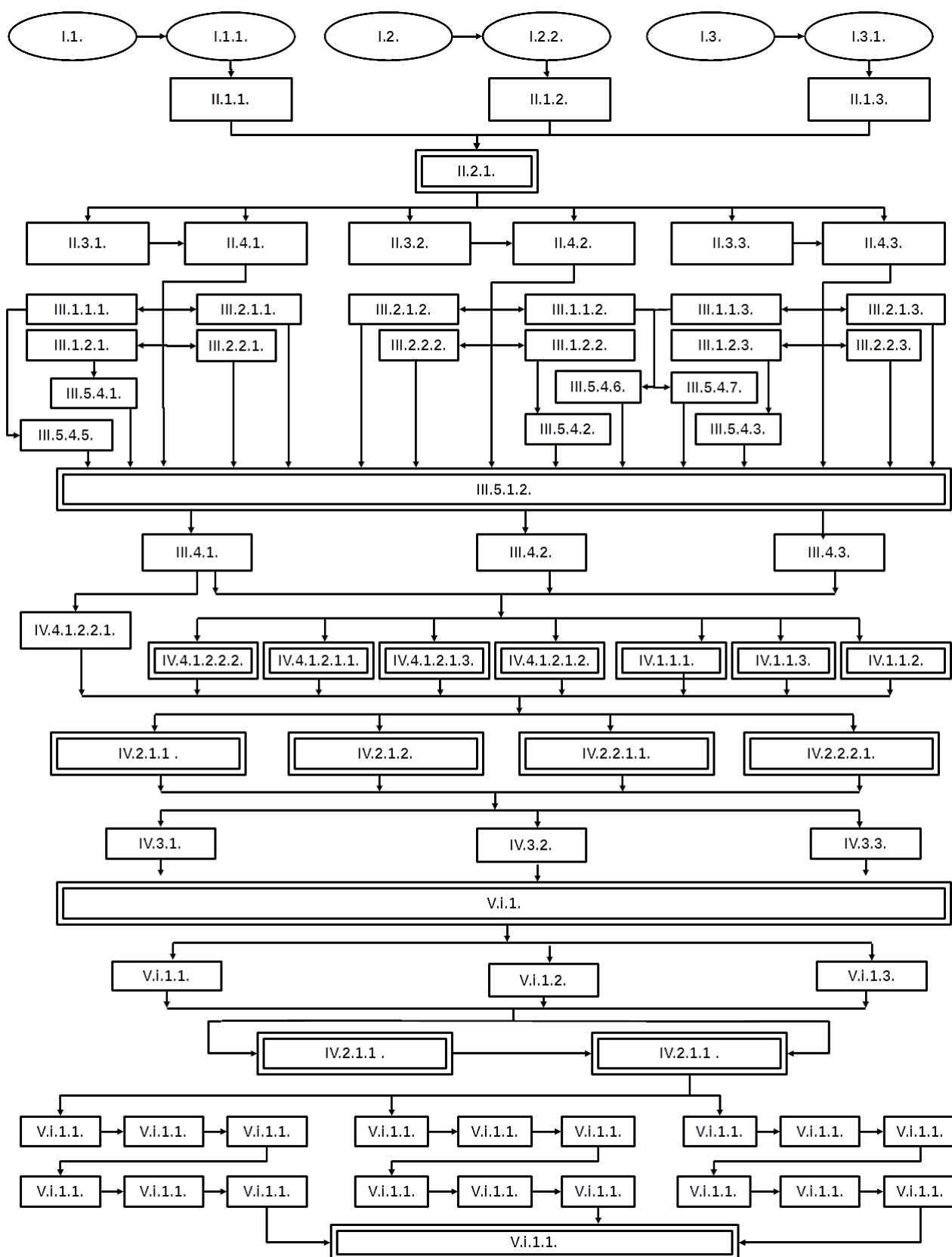


Рис. 1.9. Информационно-логическая модель исследования.

1.2. Начальные и начально-конечная задачи для линейных уравнений соболевского типа

В данном параграфе кратко представлены ранее опубликованные другими авторами результаты [16], [48], [90], их изложение позволит познакомиться с рядом важных утверждений теории уравнений соболевского типа. Подчеркнем, что ни один результат для детерминированного случая на защиту не выносится.

Пусть $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}; \mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{Z}; \mathfrak{F})$ и M с областью определения $\text{dom } M \subset \mathfrak{Z}$, $\overline{\text{dom } M} = \mathfrak{Z}$, причем M (L, p) -ограничен. Пусть $I_a^b = (a, b)$ – некоторый интервал, содержащий точку нуль. Будем рассматривать различные начальные и начально-конечное условие для линейного неоднородного уравнения соболевского типа

$$L\dot{z} = Mz + f, \quad (1.2.1)$$

где вектор-функция $f \in C^\infty(I_a^b; \mathfrak{F})$

Задача Коши

Рассмотрим задачу Коши

$$z(0) = z_0 \quad (1.2.2)$$

для (1.2.1).

Задача (1.2.1), (1.2.2) редуцируется к эквивалентной системе [44]

$$\begin{cases} H\dot{z}^0 = z^0 + M_0^{-1}f^0, & z^0(0) = z_0^0, \\ \dot{z}^1 = Sz^1 + L_1^{-1}f^1, & z^1(0) = z_0^1, \end{cases} \quad (1.2.3)$$

где векторы $z^0 \in \mathfrak{U}^0$, $z^1 \in \mathfrak{U}^1$, $f^0 \in \mathfrak{F}^0$, $f^1 \in \mathfrak{F}^1$, а операторы $H = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$ и заметим, что операторы $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^0)$ и $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^1)$.

Теорема 1.2.1. [90]. Пусть $M(L, p)$ -ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, тогда задача (1.2.1), (1.2.2) однозначно разрешима для любых $\tau \in \mathbb{R}_+$, $f \in C^{p+1}(I_a^b; \mathfrak{F})$ и

$$z_0 \in \{u \in \mathfrak{Z} : (\mathbb{I} - P)z + \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f^{(k)}(0) = 0\},$$

решение $z \in C(I_a^b; \mathfrak{Z}) \cap C^1((0, \tau); \mathfrak{Z})$ и имеет вид

$$z(t) = Z^t z_0 + \int_0^t Z^{t-s} L_1^{-1}(\mathbb{I} - Q)f(s)ds - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f^{(k)}(t),$$

где

$$Z^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu, \quad F^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu,$$

$$Z^0 \equiv P, \quad F^0 \equiv Q.$$

Задача Шоултера – Сидорова

Рассмотрим задачу Шоултера – Сидорова

$$P(z(0) - z_0) = 0, \tag{1.2.4}$$

для уравнения (1.2.1).

Теорема 1.2.2. Пусть $M(L, p)$ -ограничен, тогда $\forall f \in C^\infty((a, b); \mathfrak{F})$, $z_0 \in \mathfrak{Z}$ задача (1.2.1), (1.2.4) имеет единственное решение

$$z(t) = - \sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f^{(q)}(t) + Z^t z_0 + \int_0^t Z^{t-s} L_1^{-1} Q f(s) ds,$$

где аналитические разрешающие группы имеют вид

$$Z^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu, \quad F^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu,$$

$$Z^0 \equiv P, \quad F^0 \equiv Q.$$

Начально–конечная задача

Пусть выполняется условие расщепления относительного спектра оператора M

$$\sigma^L(M) = \sigma_0^L(M) \cup \sigma_1^L(M), \text{ причем } \sigma_1^L(M) \neq \emptyset,$$

при этом существует замкнутый контур $\gamma_1 \subset \mathbb{C}$, ограничивающий (1.2.5)

$$\text{область } D_1 \supset \sigma_1^L(M), \text{ такой, что } \overline{D_1} \cap \sigma_0^L(M) = \emptyset.$$

Определены подпространства $\mathfrak{Z}^{10} = \text{im } P_0$, $\mathfrak{F}^{10} = \text{im } Q_0$ и $\mathfrak{Z}^{11} = \text{im } P_1$, $\mathfrak{F}^{11} = \text{im } Q_1$, такие что

$$\mathfrak{Z}^1 = \mathfrak{Z}^{10} \oplus \mathfrak{Z}^{11} \text{ и } \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}^{10} \oplus \mathfrak{F}^{11}.$$

Кроме того, L_{10} (L_{11}) – сужение оператора L на $\mathfrak{Z}^{10}$ ($\mathfrak{Z}^{11}$), M_{10} (M_{11}) – сужение оператора M на $\text{dom } M \cap \mathfrak{Z}^{10}$ ($\text{dom } M \cap \mathfrak{Z}^{11}$). Так как $P_0\varphi \in \text{dom } M$ ($P_1\varphi \in \text{dom } M$), если $\varphi \in \text{dom } M$, то область определения $\text{dom } M_{10} = \text{dom } M \cap \mathfrak{Z}^{10}$ ($\text{dom } M_{11} = \text{dom } M \cap \mathfrak{Z}^{11}$) плотна в $\mathfrak{Z}^{10}$ ($\mathfrak{Z}^{11}$). Справедливы следующие утверждения:

- (i) $L_{10} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^{10}; \mathfrak{F}^{10})$ и $L_{11} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^{11}; \mathfrak{F}^{11})$;
- (ii) $M_{10} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^{10}; \mathfrak{Z}^{10})$ и $M_{11} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^{11}; \mathfrak{F}^{11})$;
- (iii) существуют операторы $L_{10}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{10}; \mathfrak{Z}^{10})$ и $L_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{11}; \mathfrak{Z}^{11})$.

Поэтому существуют операторы $S_0 = L_{10}M_{10} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^{10})$ и $S_1 = L_{11}M_{11} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^{11})$.

Возьмем $0 \leq a < \tau_0 < \tau_1 < b \leq +\infty$ и векторы $z_0, z_1 \in \mathfrak{Z}$.

Рассмотрим начально–конечные условия

$$P_0(z(\tau_0) - z_0) = P_1(z(\tau_1) - z_1) = 0 \quad (1.2.6)$$

для уравнения (1.2.1). Здесь P_0 и P_1 –относительно спектральными проекторы.

Задача (1.2.1), (1.2.6) редуцируется к эквивалентной системе [17]

$$\begin{cases} H\dot{z}^0 = z^0 + M_0^{-1}f^0, \\ \dot{z}^{10} = S_0 z^{10} + L_{10}^{-1}Q_0 f, \quad z^{10}(\tau_0) = P_0 z_0, \\ \dot{z}^{11} = S_1 z^{11} + L_{11}^{-1}Q_1 f, \quad z^{11}(\tau_1) = P_1 z_1. \end{cases} \quad (1.2.7)$$

где векторы $z^0 = (\mathbb{I} - P)z$, $z^{10} = P_0 z$, $z^{11} = P_1 z$, и каждое уравнение определено на соответствующем подпространстве, а операторы $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^0)$, $S_0 = L_{10}M_{10} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^{10})$ и $S_1 = L_{11}M_{11} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^{11})$.

Теорема 1.2.3. [17] Пусть M (L, p) -ограничен и выполняется условие расщепления (1.2.5) относительно спектра оператора M , тогда $\forall z_0, z_1 \in \mathfrak{Z}$ и $\forall f \in C^\infty(I_a^b; \mathfrak{F})$ задача (1.2.1), (1.2.6) однозначна разрешима, решение имеет вид

$$\begin{aligned} z(t) = & - \sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f^{(q)}(t) + Z_0^{t-\tau_0} z_0 + Z_1^{t-\tau_1} z_1 + \\ & + \int_{\tau_0}^t Z_0^{t-s} L_{10}^{-1} Q_0 f(s) ds + \int_{\tau_1}^t Z_1^{t-s} L_{11}^{-1} Q_1 f(s) ds, \end{aligned}$$

где аналитические разрешающие группы имеют вид

$$Z_1^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\mu^L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu, \quad Z_0^t = Z^t - Z_1^t, \quad P_j \equiv U_j^0, \quad j = 0, 1.$$

1.3. Детерминированные линейные модели

В данном параграфе кратко представлены ранее опубликованные другими авторами результаты [2], [3], [15], [22], [35], [45], [50], [53], [75], [90] их изложение позволит познакомиться с рядом важных утверждений теории уравнений соболевского типа. Результаты, приведенные в этом разделе, на защиту не выносятся.

1.3.1. Модель Баренблатта – Желтова – Кочиной

Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с границей ∂G класса C^∞ . Ищется функция $z = z(x, t)$, удовлетворяющая в цилиндре $G \times \mathbb{R}_+$ уравнению

$$(\lambda - \Delta)z_t = \alpha \Delta z + f, \quad (1.3.1)$$

условиям Дирихле

$$z(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial G \times \mathbb{R}_+, \quad (1.3.2)$$

и Коши

$$z(x, 0) = z_0(x). \quad (1.3.3)$$

Здесь параметр $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ характеризуют среду. Модель (1.3.1), (1.3.2) описывает динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде. (Заметим, что это уравнение имеет универсальный характер – оно также моделирует процесс влагопереноса в почве и процесс теплопроводности с двумя температурами).

Определим пространства $\mathfrak{Z} = \{u \in W_2^{l+2} : \text{выполнено (1.3.2)}\}$, $\mathfrak{F} = W_2^l$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $W_2^k = W_2^k(G)$ – пространства Соболева. Заметим, что оператор Лапласа $-\Delta : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{F}$ – тоplineйный изоморфизм. Формулами $L = \lambda - \Delta$ и $M = \alpha \Delta$ зададим линейные непрерывные операторы, $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}; \mathfrak{F})$, которые фредгольмовы (т.е. $\text{ind } L = \text{ind } M = 0$), $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Если λ равно нулю, то относительный спектр оператора $\sigma^L(M) = \mathbb{C}$, а значит примем, что $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Множество собственных значений однородной задачи Дирихле в области G для оператора $-\Delta$ будем обозначать здесь $\{\mu_k\}$, нумерация строится по неубыванию (кратность учитывается), а обозначение $\{\varphi_k\}$ будем использовать для семейства соответствующих собственных функций, ортонормированных относительно $\{\langle \cdot, \cdot \rangle\}$ из $L^2(G)$.

Лемма 1.3.1. *При любых значениях параметров $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, входящих в состав уравнения (1.3.1), оператор M ($L, 0$)-ограничен.*

Проекторы в этом случае имеют вид

$$P = \sum_{-\lambda \neq \mu_k} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \quad Q = \sum_{-\lambda \neq \mu_k} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Теорема 1.3.1. Пусть лемма 1.3.1 справедлива, тогда

(i) если $-\lambda \neq \sigma(\Delta)$, тогда $\forall z_0 \in \mathfrak{Z}$ и $\forall f \in \mathfrak{F}$ существует единственное решение $z \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{Z})$ задачи (1.3.1)–(1.3.3) вида

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{\alpha \mu_k}{\lambda + \mu_k} t} \langle z_0, \varphi_k \rangle \varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\alpha \mu_k}{\lambda + \mu_k} t} - 1 \right) \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\alpha \mu_k} \varphi_k;$$

(ii) если $-\lambda \in \sigma(\Delta)$, то для любых $f \in \mathfrak{F}$ и $z_0 \in \mathfrak{B}_f = \{z \in \mathfrak{Z} : \alpha \lambda \langle z, \varphi_k \rangle = -\langle f, \varphi_k \rangle, \mu_k = -\lambda\}$ существует единственное решение $z \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{B}_f)$ задачи (1.4.1)–(1.4.3), имеющее вид

$$z(t) = -\frac{1}{\alpha \lambda} \sum_{\lambda = \mu_k} \langle f, \varphi_k \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{\alpha \mu_k}{\lambda + \mu_k} t} \langle z_0, \varphi_k \rangle \varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\alpha \mu_k}{\lambda + \mu_k} t} - 1 \right) \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\alpha \mu_k} \varphi_k.$$

Штрих у знака суммы означает суммирование по всем k за исключением таких, что $-\lambda = \mu_k$.

1.3.2. Модель Осколкова

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$ – конечный связный ориентированный граф. На ребрах E_j графа $\mathbf{G}$ зададим одномерные линейные уравнения Осколкова

$$\lambda_j z_{jt} - z_{jxt} = \beta_j z_{jxx}, \quad (1.3.4)$$

с условием Шоултера–Сидорова

$$P(z_j(x, 0) - z_{j0}(x)) = 0, \quad (1.3.5)$$

здесь P – относительно спектральный проектор. Обозначив $E^\alpha(V_i)$ ($E^\omega(V_i)$) множество ребер с началом (концом) в вершинах $V_i \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$, зададим два условия

$$z_j(0, t) = z_k(0, t) = z_m(l_m, t) = z_n(l_n, t), \quad (1.3.6)$$

$$E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i)$$

и

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j z_{jx}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k z_{kx}(l_k, t) = 0, \quad (1.3.7)$$

где $l_j \in \mathbb{R}_+$ – длина и $d_j \in \mathbb{R}_+$ – площадь поперечного сечения ребра E_j соответственно.

Уравнение (1.3.4) моделирует динамику давления и скорости вязкоупругой несжимаемой жидкости, движущейся в j -той секции трубопровода. В качестве примера такой жидкости можно использовать высокопарафиновые сорта нефти, добыча которых ведется на месторождениях Западной Сибири. Параметр $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ характеризует упругость, параметр $\lambda \in \mathbb{R}$ – вязкость жидкости, $z_j = z_j(x, t), (x, t) \in \mathbb{R} \times I_a^b$ характеризует изменение скорости и давления вязкоупругой несжимаемой жидкости в j -той секции трубопровода.

При исследовании данной задачи рассматривается гильбертово пространство

$$\mathfrak{Z} = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_j, \dots) : z_j \in W_2^1(0, l_j)\}$$

со скалярным произведением

$$\langle z, v \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (z_{jx} v_{jx} + z_j v_j) dx.$$

Затем построим еще одно гильбертово пространство

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_i, \dots) : g_i \in L_2(0, l_j)\}$$

со скалярным произведением

$$(g, h) = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx.$$

Причем заметим плотность и непрерывность (даже компактность) вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbf{L}_2(\mathbf{G})$. отождествим $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ со своим сопряженным пространством,

получим гильбертово пространство $\mathfrak{F}$, а $\mathfrak{Z} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ является компактным вложением.

Фиксируем $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$, определим оператор $A : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{F}$

$$\langle Az, v \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (z_{jx} v_{jx} + a z_j v_j) dx, \quad (1.3.8)$$

построим операторы $L = (\lambda - a)\mathbb{I} + A$, $M = \beta(a\mathbb{I} - A)$.

Уравнение (1.3.4) приводится к линейному уравнению соболевского типа

$$L\dot{z} = Mz. \quad (1.3.9)$$

Лемма 1.3.2. (i) Спектр $\sigma(L)$ оператора L вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$ при любых $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$;

(ii) При любых $\alpha, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M $(L, 0)$ -ограничен.

Обозначим через $\{\nu_k\}$ собственные значения оператора L (занумерованные по неубыванию с учетом их кратности), а через $\{\varphi_k\}$ – соответствующие им ортонормированные в смысле $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ функции. Далее строим проекторы и разрешающую группу задачи (1.3.4) – (1.3.7) соответственно

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } 0 \notin \sigma(L), \\ \mathbb{I} - \sum_{\nu_k = a - \lambda} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, & \text{если } 0 \in \sigma(L), \end{cases} \quad (1.3.10)$$

$$Q = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } 0 \notin \sigma(L), \\ \mathbb{I} - \sum_{\nu_k = a - \lambda} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, & \text{если } 0 \in \sigma(L), \end{cases} \quad (1.3.11)$$

$$Z^t = \sum_{k=1}^{\infty} 'e^{\mu_k t} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k. \quad (1.3.12)$$

Заметим, что в формуле (1.4.12) не учитываются члены ряда с номерами k , для которых выполняется условие $\nu_k = a - \lambda$, поэтому у знака суммы мы ставим штрих. Справедлива

Теорема 1.3.2. Пусть $\alpha, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Для произвольного начального значения z_0 из $\mathfrak{Z}$ существует единственное решение задачи (1.3.4) – (1.3.7) такое, что $z \in C^\infty(I_a^b, \mathfrak{Z})$ и определяется выражением

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} \langle z_0, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

1.3.3. Модель Хоффа

В данном разделе представим линейную модель Хоффа

$$\lambda_j z_{jj} + z_{jxt} = \beta_j z_j, \quad (1.3.13)$$

с начально-конечным условием

$$P_0(z(x, \tau_0) - z_0(x)) = P_1(z(x, \tau_1) - z_1(x)) = 0, \quad (1.3.14)$$

причем $0 \leq a < \tau_0 < \tau_1 < b \leq \infty$.

Зададим, так же, как и в п.1.3.2. конечный связный ориентированный граф $\mathbf{G}$ с условиями непрерывности (1.3.6) и баланса потоков (1.3.7)

Уравнение (1.3.13) описывает динамику выпучивания двутавровых балок в конструкции, находящихся под постоянной нагрузкой со случайным внешним воздействием. Параметры $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и $\beta \in \mathbb{R}$ характеризуют нагрузку и свойства материала j -й балки соответственно, $z_j = z_j(x, t), (x, t) \in \mathbb{R} \times I_a^b$ характеризует отклонение j -той балки от положения равновесия, P_0, P_1 – относительно спектральные проекторы.

Гильбертовы пространства $\mathfrak{Z}$ и $L_2(\mathbf{G})$ и оператор $A : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{Z}$ зададим так же, как и в п. 1.3.2. Зафиксируем $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$ и определим операторы $L = (\lambda - a)\mathbb{I} + A, M = \beta\mathbb{I}$.

Лемма 1.3.3. (i) Спектр $\sigma(L)$ оператора L вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$ при любых $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$;

(ii) При любых $\beta, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор $M (L, 0)$ -ограничен.

Обозначим через $\{\nu_k\}$ собственные значения оператора L (занумерованные по неубыванию с учетом их кратности), а через $\{\varphi_k\}$ – соответствующие им ортонормированные в смысле $L_2(G)$ функции.

Проекторы имеют вид

$$P_0 = \sum_{k:\mu_k \in \sigma_0^L(M)} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \quad P_1 = \sum_{k:\mu_k \in \sigma_1^L(M)} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

Возьмем $z_0(x), z_1(x) \in \mathfrak{Z}$ и для уравнений (1.3.13) рассмотрим начально-конечную задачу

$$\sum_{k:\mu_k \in \sigma_0^L(M)} \langle z(x, \tau_0) - z_0(x), \varphi_k \rangle \varphi_k = 0, \quad \sum_{k:\mu_k \in \sigma_1^L(M)} \langle z(x, \tau_1) - z_1(x), \varphi_k \rangle \varphi_k = 0 \quad (1.3.15)$$

Теорема 1.3.3. Пусть $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $z_0(x), z_1(x) \in \mathfrak{Z}$ существует единственное решение задачи (1.3.13), (1.3.6), (1.3.7), (1.3.15) $z \in C^\infty(I_a^b, \mathfrak{U})$ вида

$$z(t) = \sum_{k:\mu_k \in \sigma_0^L(M)} e^{\mu_k(t-\tau_0)} \langle z_0, \varphi_k \rangle \varphi_k + \sum_{k:\mu_k \in \sigma_1^L(M)} e^{\mu_k(t-\tau_1)} \langle z_1, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

2. Линейная модель Баренблатта – Желтова – Кочиной фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде со случайным внешним воздействием

2.1. Аналитическое исследование

Положим $\Omega = (\Omega, A, P)$ – полное вероятностное пространство, $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{F}$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}; \mathfrak{F})$. Важным условием является относительная ограниченность оператора M (или кратко, оператор $M(L, p)$ -ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) [44]. Все последующие утверждения будем проводить, считая это условие выполненным. Условия на оператор N наложим далее. Введем в рассмотрение ограниченную область $G \subset \mathbb{R}^d$ с границей ∂G класса C^∞ .

Линейная стохастическая модель Баренблатта – Желтова – Кочиной, моделирующая динамику движения жидкости в трещиновато пористой среде со случайным внешним воздействием, содержит уравнение

$$(\lambda - \Delta)d\zeta = \alpha\Delta\zeta dt + NdW, \quad (2.1.1)$$

начальное состояние задается условием Коши

$$\zeta(x, 0) = \xi_0(x), \quad (2.1.2)$$

на границе области

$$\zeta(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial G \times [0, \tau]. \quad (2.1.3)$$

Параметры $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ характеризуют среду, а dW – обобщенный дифференциал ($\mathfrak{Z}$ -значного, ядерного) K -винеровского процесса, оператор $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ – ядерный ($\text{Tr } K = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < +\infty$).

Прежде всего рассмотрим задачу (2.1.2) для линейного стохастического уравнения соболевского типа

$$Ld\zeta = M\zeta dt + NdW. \quad (2.1.4)$$

Определение 2.1.1. $\mathfrak{Z}$ -значный винеровский процесс $\zeta(t)$, $t \in [0, \tau]$ называется решением задачи (2.1.2), (2.1.4), если $\int_0^\tau \|M\zeta(s)\|ds < \infty$ п.н., причем для любого $t \in [0, \tau]$

$$L(\zeta(t) - \xi_0) = \int_0^t M\zeta(s)ds + \int_0^t NdW, \text{ п.н.}$$

Следуя теории относительно ограниченных операторов и порождаемых ими вырожденных групп [44] отметим, что пространства $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{F}$ представимы в виде прямых сумм $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^0 \oplus \mathfrak{Z}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$, операторы L_k (M_k) есть сужение операторов L (M) на $\mathfrak{Z}^k$ ($\text{dom } M \cap \mathfrak{Z}^k$) $k = 0, 1$. Если оператор M ($L, 0$)-ограничен, то операторы $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$; $M_0 \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{Z}^0; \mathfrak{F}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^1; \mathfrak{F}^1)$; существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{Z}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{Z}^0)$. Обозначим $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^0)$, $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^1)$.

Теорема 2.1.1. Пусть процесс W является $\mathfrak{F}^1$ -значным K -винеровским, оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$ и при каждом фиксированном t $\xi_0 \in \mathbf{L}_2(\Omega, \mathfrak{Z}^1)$ и W независимы. Тогда для любого $\xi_0 \in \mathbf{L}_2(\Omega, \mathfrak{Z}^1)$ задача (2.1.2), (2.1.4) имеет единственное решение, определяемое выражением

$$\zeta(t) = Z^t \xi_0 + \int_0^t Z^{t-s} L_1^{-1} N W(s) ds. \quad (2.1.5)$$

где

$$Z^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu.$$

Доказательство. В силу условий на W , его обобщенный дифференциал dW также принадлежит $\mathfrak{F}^1$. Аналогично детерминированному случаю задача (2.1.2), (2.1.4) распадается на две независимых задачи

$$Hd\zeta^0(t) = \zeta^0 dt, \quad (2.1.6)$$

$$\zeta^0(0) = \xi_0^0, \quad (2.1.7)$$

и

$$d\zeta^1(t) = S\zeta dt + L_1^{-1}NdW, \quad (2.1.8)$$

$$\zeta^1(0) = \xi_0^1, \quad (2.1.9)$$

где случайные процессы $\zeta^0 = (I - P)\zeta$, $\zeta^1 = P\zeta$, а случайные величины $\xi_0^k \in \mathbf{L}_2(\Omega, \mathfrak{Z}^k)$, $k = 0, 1$, где P – проектор. В силу того, что оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$ случайное воздействие NdW входит в состав только (2.1.8).

Уравнение (2.1.6) является однородным, поэтому имеет единственное, причем п.н. тривиальное, решение, значит, задача (2.1.6), (2.1.7) разрешима только при нулевом значении ξ_0^0 . Необходимым условием для существования единственного решения задачи (2.1.2), (2.1.4) является принадлежность п.н. пространству $\mathbf{L}_2(\Omega, \mathfrak{Z}^1)$ начального значения ξ_0 . Обратимся к задаче (2.1.8), (2.1.9) и перейдем к стохастическому интегро-дифференциальному уравнению

$$\zeta^1(t) = \int_0^t S\zeta dt + \int_0^t L_1^{-1}NdW, \quad (2.1.10)$$

Тогда случайный процесс $\zeta^1(t)$, определяемый выражением вида

$$\zeta^1(t) = Z^t\xi_0 + \int_0^t Z^{t-s}L_1^{-1}NdW(s)$$

будет единственным формальным решением. •

Для операторов L и M будем использовать обозначения $M = \alpha\Delta$, $L = \lambda - \Delta$; для множества собственных значений однородной задачи Дирихле в области G для оператора $-\Delta$ – обозначения $\{\mu_k\}$, их нумерацию будем вести по неубыванию с учетом кратности; для семейства соответствующих собственных функций – обозначения $\{\varphi_k\}$.

Теорема 2.1.2. Пусть процесс W является $\mathfrak{F}^1$ -значным K -винеровским, оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$ и при каждом фиксированном t $\xi_0 \in \mathbf{L}_2(\Omega, \mathfrak{Z}^1)$ и W

независимы. Тогда при любых $-\lambda \in \{\mu_k\}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\xi_0 \in \mathbf{L}_2(\Omega, \mathfrak{Z}^1)$ задача (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3), имеет единственное решение $\zeta \in \mathbf{CL}_2$ вида (2.1.5)

Доказательство. Отметим, что $\xi_{0k} \in \mathbf{L}_2$ – независимые гауссовы случайные величины, такие что их дисперсии ограничены ($D\xi_{0k} \leq C_j$, $k \in \mathbf{N}$, $j = \overline{0, m}$), а ряд

$$\xi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_{0k} \varphi_k, \quad (2.1.11)$$

сходится. В силу леммы 1.3.1 оператор $M = \alpha\Delta$ будет $(L, 0)$ -ограничен при $L = \lambda - \Delta$. Таким образом, выполняются условия теоремы 2.1.1, из справедливости которой следует утверждение данной теоремы. •

2.2. Алгоритм метода Рунге – Кутты – Фелберга

Рассмотрим алгоритм построения численного решения задачи (2.1.1)–(2.1.3) на примере неустановившейся фильтрации однородной жидкости в горизонтальном пласте, который вскрыт вертикальной скважиной малого радиуса. При рассмотрении стохастического случая считаем, что на жидкость начинают воздействовать случайная нагрузка, которая моделируется случайным процессом w и случайной величиной ξ_0 . Пусть область $G \in \mathbb{R}^2$ представляет собой круг радиуса r_0 с центром на оси скважины.

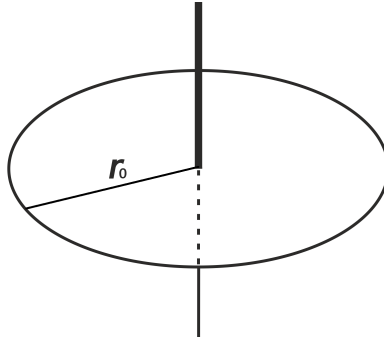


Рис. 2.1. Область $G \subset \mathbb{R}^2$ – круг радиуса r_0 с центром на оси скважины.

Введем полярную систему координат и предположим, что течение осесимметричное. В этом случае давление жидкости в трещинах находится при решении следующей начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} (\lambda - \Delta_r)d\zeta &= \alpha\Delta_r\zeta dt + dW, \\ |\zeta(0, t)| &< +\infty, \quad \zeta(r_0, t) = 0, \quad \zeta(r, 0) = \xi_0, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

где $\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $\lambda = 1/\eta$, η – специфическая характеристика трещиноватой породы, $\alpha = \chi/\eta$, χ – коэффициент пьезопроводности трещиноватой породы, ω – частота.

Преобразуем (2.2.1) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого проведем дискретизацию области G . На отрезке $[0, r_0]$ введем равномерную сетку $r_j = (j-1)h_r$, $j = \overline{1, J}$, $h_r = r_0/(J-1)$, J – число узлов дискретизации. Известно, что построение разностных аппроксимаций производных p -го порядка в j -том узле дискретизации основано на выражениях вида

$$\left(\frac{\partial^q \zeta}{\partial r^q}\right)_j = \frac{1}{h_r^q} \sum_{i=j-j_l}^{j+j_q} a_{qji} \zeta_i + O\left(h_r^{n_p-q}\right), \quad (2.2.2)$$

где $j_l(j_q)$ – число узлов слева(справа) от j -го узла, используемых в аппроксимации производной, $n_p = j_l + j_q + 1$ – число узлов используемых при аппроксимации производной, $n_u \leq J$. Используя разложения функции $\zeta(r, t)$ в ряд Тейлора в точке r_j нетрудно получить системы линейных уравнений для нахождения коэффициентов a_{qji} . В среде математического пакета Maple написана программа, с помощью которой, можно вычислять a_{qji} для производных порядка $q \in \mathbb{N}$ и для $j, i = \overline{1, J}$. Это позволяет, в процессе численного моделирования, по усмотрению исследователя, использовать формулы (2.3.5) с различными ошибками аппроксимации $O\left(h_r^{n_p-q}\right)$.

Проводя дискретизацию начально-краевой задачи (2.2.1) в области G придем к задаче Коши для системы ОДУ относительно функций $\zeta_j(t)$, которую

запишем в матричном виде

$$\begin{aligned} L(\lambda) \frac{dP(t)}{dt} &= \alpha M P(t) + W(t), \\ P(0) &= P_0. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b_{21} & \lambda - b_{22} & \dots & -b_{2J-1} & -b_{2J} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{J-1,1} & -b_{J-1,2} & \dots & \lambda - b_{J-1,J} & -b_{J-1,J} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ P(t) &= \begin{pmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \\ \vdots \\ \zeta_{J-1}(t) \\ \zeta_J(t) \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} \xi_{0_1} \\ \xi_{0_2} \\ \vdots \\ \xi_{0_{J-1}} \\ \xi_{0_J} \end{pmatrix}, \\ M &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2J} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{J-1,1} & b_{J-1,2} & b_{J-1,3} & \dots & b_{J-1,J} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad W(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_{J-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ζ_j – значения давления жидкости в j -том узле дискретизации. Если узел не участвует в аппроксимации производной, то $b_{ji} = 0$, иначе $b_{ji} = \frac{a_{2ji}}{h_r^2} + \frac{a_{1ji}}{r_j h_r}$, где первый индекс j определяет номер узла в котором производится аппроксимация производной, а второй i – номер узла, который участвует в аппроксимации.

Нетрудно показать, что определитель матрицы $L(0)$ не равен нулю. В редких случаях при задании λ может оказаться, что определитель матрицы $L(0)$ равен нулю. В этом случае надо изменить количество узлов участвующих в аппроксимации производных, что изменит величину определителя матрицы $L(0)$ и следовательно определителя матрицы $M(\lambda)$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\det(L(\lambda)) \neq 0$.

Обращая матрицу $L(\lambda)$ из уравнения (2.2.3), приходим к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в матричной форме

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} &= F(t, P(t)), \quad 0 < t \leq t_0, \\ P(0) &= P_0, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

где $F(t, P(t)) = L^{-1}(\lambda) \left(\alpha M P(t) + W(t) \right)$.

Для численного решения задачи (2.2.4) будем использовать алгоритмы, основанные на явных одношаговых формулах типа Рунге – Кутты седьмого порядка точности следующего вида:

$$\begin{aligned} P_{jn+1} &= P_{jn} + \sum_{i=1}^{13} q_{mi} k_i, \\ k_i &= h_t F \left(t_n + \alpha_i h_t, \eta_{jn} + \sum_{j=1}^{13} \beta_{ij} k_j \right). \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Здесь h_t – шаг интегрирования, m – порядок точности, $j = \overline{2, J-1}$ Коэффициенты $\alpha_i h_t, \beta_{ij}, q_{mi}$ берутся из [40]

При решения жестких задач шаг интегрирования использование явных методов имеет ограничения, связанные с точностью вычислений и устойчивостью численной схемы. Локальную ошибку δ_n метода седьмого порядка точности можно вычислять по формуле

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{13} (q_{8i} - q_{7i}) k_i, \quad (2.2.6)$$

где коэффициенты q_{8i} равны

$$q_{81} = q_{82} = q_{83} = q_{84} = q_{85} = 0, \quad q_{86} = \frac{34}{105}, \quad q_{87} = q_{88} = \frac{9}{35},$$

$$q_{89} = q_{8,10} = \frac{9}{280} \quad q_{8,11} = q_{8,12} = 0, \quad q_{8,13} = \frac{41}{840}.$$

Для оценки контроля точности вычислений можно использовать неравенство

$$\|\delta_n\| \leq \varepsilon.$$

Здесь $\|\cdot\|$ – некоторая норма в R^J , J – размерность матрицы столбца $F(t, U(t))$, ε – необходимая точность вычислений. В нашем случае $\delta_n = O(h_t^8)$. Поэтому шаг интегрирования h^{ac} по точности вычисляется по формуле

$$h^{ac} = q h_t, \quad q = \sqrt[8]{\frac{\varepsilon}{\|\delta_n\|}}.$$

В случае если $q < 1$ необходимо повторить вычисления полученное при шаге h_t с шагом h^{ac} . В противном случае вычисления продолжаются на следующем временном отрезке.

Представим основные шаги алгоритма для нахождения приближенного решения рассматриваемой задачи.

Шаг 1. Вводятся значения коэффициентов уравнения Барнеблатта – Желтова – Кочиной α , λ , количество узлов дискретизации r_j области G , начальные и граничные условия. Определяются равномерные шаги сетки h_r .

Шаг 2. Вычисляются коэффициенты алгебраических формул аппроксимации производных и коэффициентов q_{mi} , α_i , β_{ij} и k_j .

Шаг 3. Находятся сеточные выражения для матриц $L(\lambda)$, M , $W(t)$.

Шаг 4. Вычисляется $\det L(0)$. Если $\det L(0) \neq \lambda$, то продолжаем выполнять алгоритм. Если $\det L(0) = \lambda$, то необходимо изменить схемы аппроксимаций производных оператора Δ_r . Это изменит величину $\det L(0)$.

Шаг 5. Используя явные одношаговые формулы типа Рунге – Кутты, находим приближенное решение задачи (2.2.1)–(2.2.3) в узлах дискретизации в заданный момент времени t_* .

Шаг 6. Найдем приближенные значения давления $P(r, t_*)$ в узлах дискретизации области G в заданный момент времени t_* . Результаты расчетов записываются в таблицы. По таблицам строятся графики функции $P(r, t_*)$ в заданный момент времени t_* . Необходимо отметить, что в случае одношаговых формул типа Рунге – Кутта, информация о решаемой задаче используется в пределах одного шага. Поэтому при переходе к следующему шагу, ее необходимо получать заново. Величина шага h_t должна быть взята достаточно малой, что приводит к получению требуемой точности. Однако, эти обстоятельства уменьшают вычислительную эффективность разработанного алгоритма.

2.3. Описание программной реализации алгоритма метода Рунге – Кутты – Фелберга. Результаты вычислительного эксперимента

Программа "Численное исследование движения жидкости, фильтрующей-ся в трещиновато-пористой среде со случайным внешним воздействием" предназначена для получения решений задачи Коши для модели Баренблатта – Желтова – Кочиной. Программа написана в прикладном пакете Maple, эксплуатируется на персональном компьютере платформы Intel (UX64), работает под управлением Microsoft Windows. Программа зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ (Приложение 1) [101]. Используемый численный метод решения представлен в п. 2.2.

Опишем логическую структуру программы, ее блок-схема представлена на рисунке 2.2. В ее состав входят следующие модули:

- подключение стандартных библиотек, необходимых для работы программы;
- ввод исходных данных;
- вспомогательные расчеты;

- численное решение начально-краевой задачи;
- решение задачи Коши;

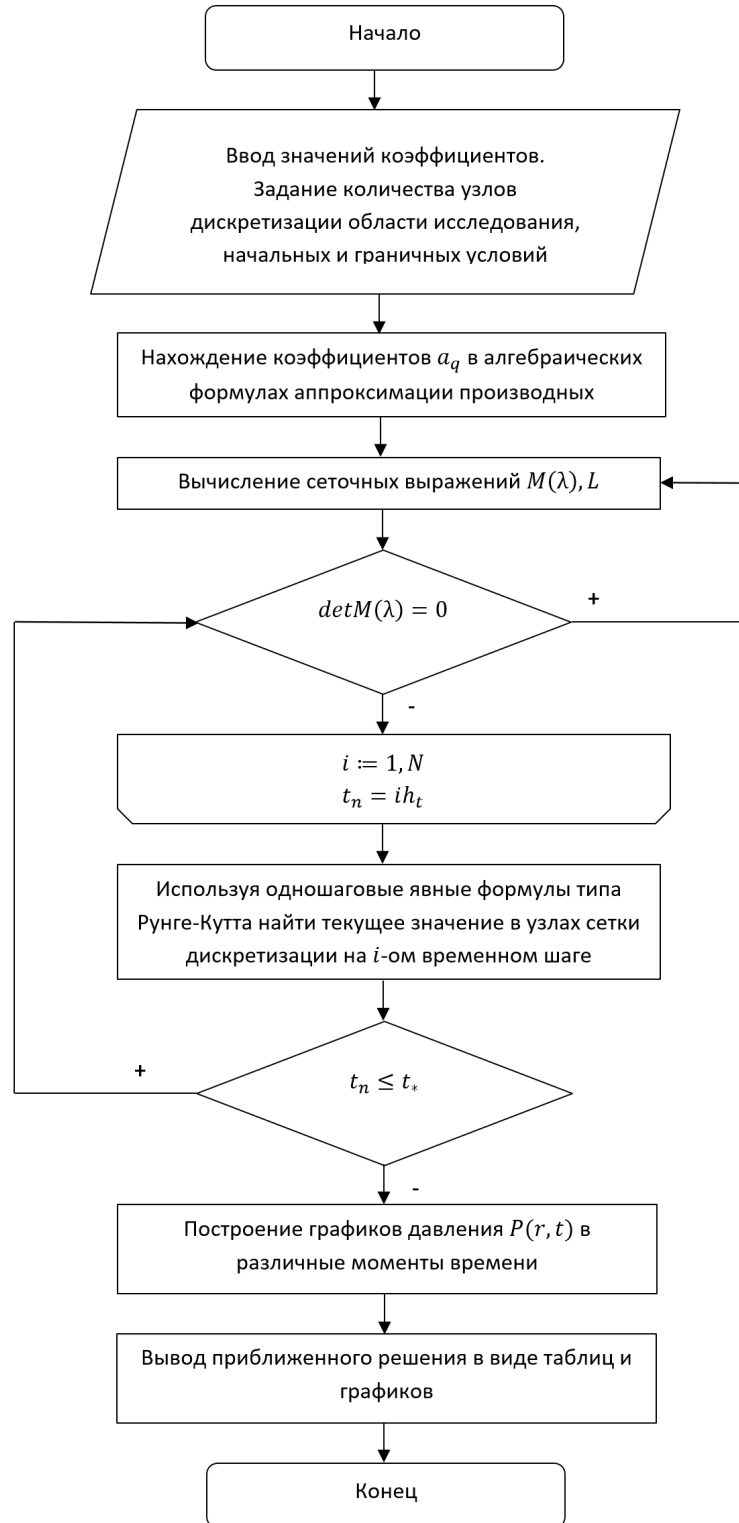


Рис. 2.2. Блок-схема алгоритма программы исследования модели Баренблатта – Желтова – Кочиной методом Рунге – Кутты – Фелберга.

- вывод результатов расчетов;
- проверка результатов.

В качестве стандартных библиотек использованы: МАТЕМАТИКА.m, ZADACHA KOCHI.m, ZAPIS.m.

При вводе исходных данных задаются необходимые константы и характеристики задачи. Прежде всего, вводятся значения параметров дискретизации области исследования, задаются размерные характеристики области исследования. Вводятся элементы матриц, величины параметров, входящих в состав уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной, начальные значения.

В процедуры вспомогательных расчетов входят вычисление значений, при которых матрица при производной необратима, вычисление производной, и численное решение краевой задачи. В модуль решения задачи Коши входят задание начального условия, явные формулы Рунге – Кутты седьмого порядка точности. В модуле вывода результатов используются функции графического представления результатов.

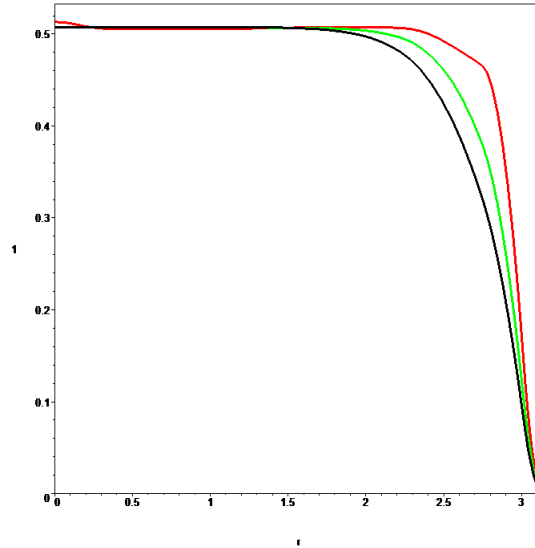
Отметим, что интерфейс программы разработан так, чтобы в дальнейшем она, как функция, могла войти в состав программы для решения практических задач по оценке состояния трещиновато-пористых сред. В ходе работы программы выводится подробный протокол расчета.

Представим результаты вычислительного эксперимента VE1 без случайного воздействия при начальном состоянии давления $p_0 = 0,5$, радиус равен π . В таблицах 2.1 и 2.2 представлены значения $p = p(r, t)$ по результатам вычислительного эксперимента VE1 при отдельных значениях t и r

На рисунке 2.3 представлены графики зависимости $p = p(r, t^*)$. Черным цветом выделен график при $t^* = 0,3$ с., зеленым цветом – график при $t^* = 0,65$ с., красным цветом – график при $t^* = 1,0$ с.

Таблица 2.1. Значения давления $p = p(r, t)$. Эксперимент VE1

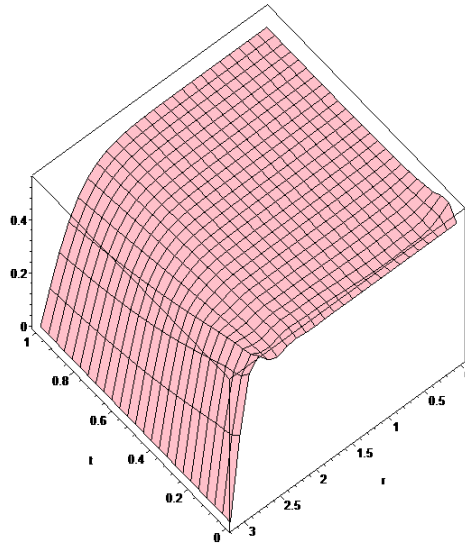
r	0.00	0.26	0.52	0.79	1.05	1.31	1.57
t=0.000	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000
t=0.100	0.540759	0.507067	0.501337	0.499427	0.500685	0.504296	0.508897
t=0.200	0.521651	0.506802	0.504277	0.503431	0.503979	0.505561	0.507579
t=0.300	0.513276	0.506731	0.505618	0.505244	0.505481	0.506173	0.507044
t=0.400	0.509646	0.506760	0.506270	0.506104	0.506206	0.506503	0.506848
t=0.500	0.508122	0.506848	0.506632	0.506558	0.506599	0.506715	0.506790
t=0.600	0.507538	0.506975	0.506878	0.506844	0.506857	0.506879	0.506774
t=0.700	0.507381	0.507129	0.507086	0.507068	0.507063	0.507022	0.506751
t=0.800	0.507421	0.507306	0.507286	0.507273	0.507252	0.507151	0.506690
t=0.900	0.507557	0.507503	0.507491	0.507478	0.507437	0.507265	0.506571
t=1.000	0.507743	0.507715	0.507706	0.507688	0.507621	0.507359	0.506375

**Рис. 2.3.** Результаты VE1. Графики зависимости давления $p = p(r, t^*)$ в трещинах в моменты времени $t_* = 0,3$ с., $t_* = 0,65$ с., $t_* = 1$ с.

На рисунке 2.4 представлен график функции двух переменных $p = p(r, t)$ по результатам вычислительного эксперимента VE1.

Окончание Таблицы 2.1. Значения давления $p = p(r, t)$. Эксперимент VE1

r	1.83	2.09	2.36	2.62	2.88	3.14
t=0.000	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000	0.000000
t=0.100	0.512816	0.514415	0.512028	0.500958	0.448952	0.000000
t=0.200	0.509274	0.509750	0.507091	0.492155	0.414666	0.000000
t=0.300	0.507694	0.507326	0.502936	0.480299	0.378862	0.000000
t=0.400	0.506924	0.505673	0.498535	0.466638	0.346096	0.000000
t=0.500	0.506441	0.504119	0.493519	0.452089	0.317601	0.000000
t=0.600	0.505999	0.502366	0.487825	0.437298	0.293300	0.000000
t=0.700	0.505475	0.500286	0.481523	0.422702	0.272672	0.000000
t=0.800	0.504808	0.497838	0.474733	0.408575	0.255111	0.000000
t=0.900	0.503965	0.495024	0.467585	0.395079	0.240064	0.000000
t=1.000	0.502927	0.491867	0.460200	0.382294	0.227065	0.000000

Рис. 2.4. Результаты VE 1. Зависимость давления $p = p(r, t)$ в трещинах от t и r .

В таблице 2.2 представлены значения функции $p = p(r, t)$ при некоторых значениях r и t , полученные в результате вычислительного эксперимента VE2.

Таблица 2.2. Значения $p = p(r, t)$. Эксперимент VE2, $r = 0.0 - 1.57$

r	0.00	0.22	0.45	0.67	0.90	1.12	1.35	1.57
t=0.000	0.506500	0.506500	0.506500	0.506500	0.506500	0.506500	0.506500	0.506500
t=0.100	0.506500	0.500915	0.504991	0.506673	0.507437	0.507733	0.507722	0.507458
t=0.200	0.506500	0.494806	0.503733	0.507405	0.509067	0.509714	0.509697	0.509133
t=0.300	0.506500	0.488793	0.502921	0.508710	0.511326	0.512345	0.512330	0.511462
t=0.400	0.506500	0.482854	0.502543	0.510579	0.514203	0.515619	0.515612	0.514435
t=0.500	0.506500	0.476964	0.502581	0.512996	0.517683	0.519518	0.519528	0.518040
t=0.600	0.506500	0.471091	0.503013	0.515940	0.521744	0.524022	0.524056	0.522255
t=0.700	0.506500	0.465201	0.503810	0.519383	0.526358	0.529101	0.529170	0.527055
t=0.800	0.506500	0.459253	0.504939	0.523293	0.531492	0.534724	0.534836	0.532409
t=0.900	0.506500	0.453204	0.506363	0.527632	0.537108	0.540852	0.541017	0.538280
t=1.000	0.506500	0.447004	0.508039	0.532358	0.543164	0.547442	0.547670	0.544627

На рисунках 2.5 и 2.6 графически представлены результаты вычислительного эксперимента VE2 при наличии возмущения случайной величиной в начальный момент времени и внешним воздействием.

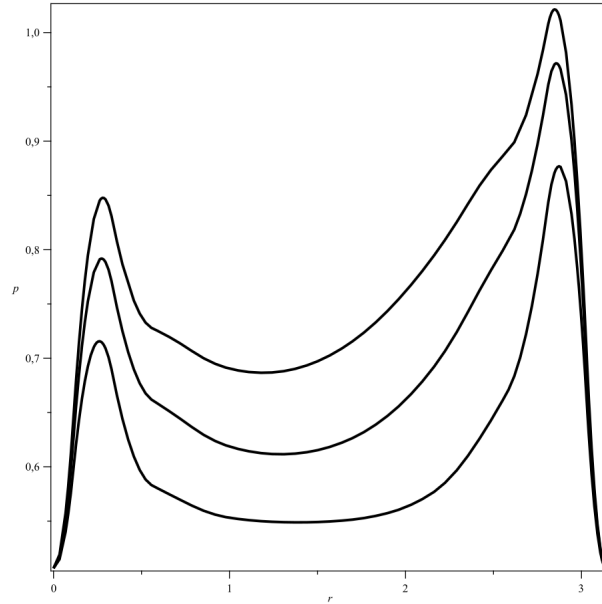


Рис. 2.5. Графики зависимости давления $p = p(r, t_*)$ в трещинах в моменты времени $t_* = 0, 3$ с., $t_* = 0, 65$ с., $t_* = 1$ с. Результаты Эксперимента VE2.

Окончание Таблицы 2.2. Значения давления $p = p(r, t)$. Эксперимент VE2, $r = 1.80 - 3.14$

r	1.80	2.02	2.24	2.47	2.69	2.92	3.14
t=0.000	0.506500	0.506500	0.506500	0.506500	0.506500	0.506500	0.506500
t=0.100	0.506917	0.506025	0.504613	0.502484	0.499178	0.494197	0.506500
t=0.200	0.507974	0.506049	0.502990	0.498352	0.491117	0.480158	0.506500
t=0.300	0.509663	0.506664	0.501875	0.494576	0.483134	0.465712	0.506500
t=0.400	0.511980	0.507866	0.501264	0.491151	0.475219	0.450828	0.506500
t=0.500	0.514911	0.509644	0.501148	0.488068	0.467356	0.435475	0.506500
t=0.600	0.518438	0.511981	0.501514	0.485311	0.459526	0.419619	0.506500
t=0.700	0.522538	0.514857	0.502341	0.482864	0.451706	0.403219	0.506500
t=0.800	0.527182	0.518245	0.503606	0.480702	0.443869	0.386234	0.506500
t=0.900	0.532335	0.522114	0.505280	0.478800	0.435985	0.368618	0.506500
t=1.000	0.537958	0.526429	0.507333	0.477128	0.428020	0.350321	0.506500

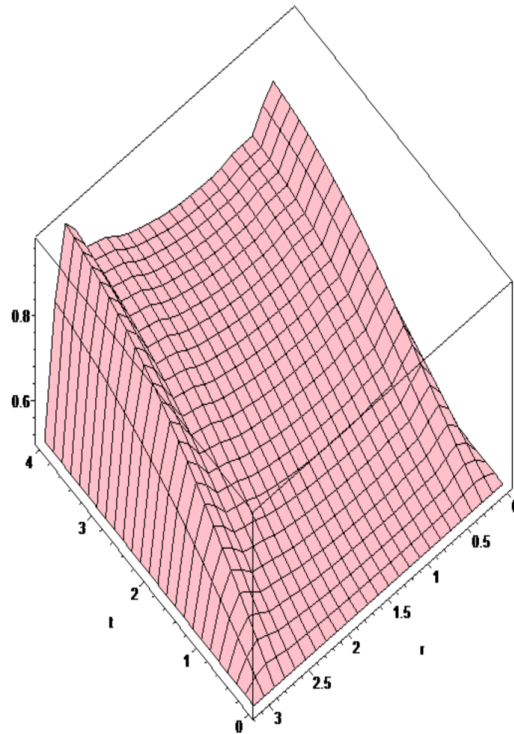


Рис. 2.6. Давление $p = p(r, t)$. Результаты Эксперимента VE2.

2.4. Алгоритм проекционного метода Галеркина

Давление жидкости в трещинах находится при решении следующей начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} (\lambda - \Delta_r)\zeta_t &= \alpha\Delta_r\zeta + NW, \\ |\zeta(0, t)| &< +\infty, \quad \zeta(r_0, t) = 0, \quad \zeta(r, 0) = \xi_0, \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

где $\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $\lambda = \frac{1}{\eta}$, η – специфическая характеристика трещиноватой породы, $\alpha = \frac{\nu}{\eta}$, ν – коэффициент пьезопроводности трещиноватой породы.

Будем искать решение начально-краевой задачи (2.3.10) проекционным методом Галеркина в виде

$$\zeta_n(r, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) X_k(r). \quad (2.3.11)$$

Здесь $X_k(r) = C_k J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right)$; $C_k = \frac{\sqrt{2}}{r_0 J_1\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right)}$; $J_0(r)$ – функция Бесселя нулевого порядка; μ_k – положительные корни уравнения $J_0(r) = 0$; $J_1(r)$ – функция Бесселя первого порядка. Можно показать, что

$$\int_0^{r_0} r X_k(r) X_n(r) dr = \delta_{kn},$$

где δ_{kn} – символ Кронекера.

Разложим функцию $f(r) = 1$ в ряд Бесселя

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k X_k(r), \quad b_k = \int_0^{r_0} r X_k(r) dr.$$

Подставляя сумму (2.3.11) в уравнение (2.3.10), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n C_k \left[\lambda J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right) - \frac{d^2 J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right)}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dJ_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right)}{dr} \right] \frac{da_k(t)}{dt} = \\ & = \alpha \sum_{k=1}^n C_k \left[\frac{d^2 J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right)}{dr} \right] a_k(t) + N \left(A \sin(\omega t) \sum_{k=1}^n b_k C_k J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right) \right). \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Функции $J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right)$ являются решениями уравнения

$$\frac{d^2 J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right)}{dr} + \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2 J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) = 0$$

Если $\lambda = -\left(\frac{\mu_{k_0}}{r_0}\right)^2$ для $k_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, то (2.3.12) запишется

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n'} C_k \left\{ \left[\lambda + \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2 \right] \frac{da_k(t)}{dt} + \alpha \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2 a_k(t) \right\} J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) = \\ = A \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{n'} b_k C_k J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n'} C_k \left\{ \left[\lambda + \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2 \right] \frac{da_k(t)}{dt} + \alpha \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2 a_k(t) - \right. \\ \left. - N(A \sin(\omega t) b_k) \right\} J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k_0 такими, что $\lambda = -\left(\frac{\mu_{k_0}}{r_0}\right)^2$.

Если $\lambda \neq -\left(\frac{\mu_{k_0}}{r_0}\right)^2$ для $k_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, то (2.3.12) запишется

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n C_k \left\{ \left[\lambda + \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2 \right] \frac{da_k(t)}{dt} + \alpha \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2 a_k(t) \right\} J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) = \\ = N \left(A \sin(\omega t) \sum_{k=1}^n b_k C_k J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) \right) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n C_k \left\{ \left[\lambda + \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2 \right] \frac{da_k(t)}{dt} + \alpha \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2 a_k(t) - \right. \\ \left. - N(A \sin(\omega t) b_k) \right\} J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Затем определяются дифференциальные уравнения для нахождения функций $a_k(t)$

$$\left[\lambda + \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2 \right] \frac{da_k(t)}{dt} + \alpha \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2 a_k(t) = N A b_k \sin(\omega t), \quad k = \overline{1, n}.$$

Используя начальное условие (2.3.10) и представление (2.3.11), найдем

$$\sum_{k=1}^n a_k(0) X_k(r) = \sum_{k=1}^n \gamma_k X_k(r), \quad (2.3.15)$$

где $\gamma_k = \int_0^{r_0} r p_0(r) X_k(r) dr$. Используя (2.3.15) найдем начальные условия, которым удовлетворяют функции $a_k(t)$

$$a_k(0) = \gamma_k, \quad k = \overline{1..n}.$$

В результате получим задачи Коши для нахождения функций $a_k(t)$

$$\begin{aligned} \left[\lambda + \left(\frac{\mu_k}{r_0} \right)^2 \right] \frac{da_k(t)}{dt} + \alpha \left(\frac{\mu_k}{r_0} \right)^2 a_k(t) &= N A b_k \sin(\omega t), \\ a_k(0) &= \gamma_k, \quad k = \overline{1..n}. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Решение задачи Коши (2.3.16) имеет вид

$$a_k(t) = \gamma_k e^{-\frac{\alpha \mu_k^2 t}{\lambda r_0^2 + \mu_k^2}} + \frac{N A b_k r_0^2}{\lambda r_0^2 + \mu_k^2} \int_0^t e^{-\frac{\alpha \mu_k^2 (t-\tau)}{\lambda r_0^2 + \mu_k^2}} \sin(\omega \tau) d\tau.$$

Тогда приближенное решение начально-краевой задачи (2.3.11), найденное нами методом Галеркина, запишется в виде

$$p_n(r, t) = \sum_{k=1}^n \left\{ \gamma_k e^{-\frac{\alpha \mu_k^2 t}{\lambda r_0^2 + \mu_k^2}} + \frac{N A b_k r_0^2}{\lambda r_0^2 + \mu_k^2} \int_0^t e^{-\frac{\alpha \mu_k^2 (t-\tau)}{\lambda r_0^2 + \mu_k^2}} \sin(\omega \tau) d\tau \right\} X_k(r).$$

Рассмотрим основные шаги алгоритма, осуществляющего поиск приближенного решения рассматриваемой задачи методом Галеркина.

Шаг 1. Ввод значений коэффициентов α , λ , ω , r_0 . Задаются начальное и граничное условия.

Шаг 2. Вычисление n -первых корней уравнения $J_0(r_0) = 0$.

Шаг 3. Если $\lambda = -\left(\frac{\mu_{k_0}}{r_0}\right)^2$, тогда используем (2.3.13), если $\lambda \neq -\left(\frac{\mu_{k_0}}{r_0}\right)^2$, тогда используем (2.3.14).

Шаг 4. Используя формулу (2.3.13) для необходимого значения времени t_* находим коэффициенты $a_k(t^*)$, $k = \overline{1, n}$.

Шаг 5. Вычисление приближенного значения давления $P_n(r, t)$ в узлах дискретизации области G в момент времени t^* .

Шаг 6. Вывод таблиц с результатами расчетов в узлах дискретизации и построенных на их основе графиков функции $P_n(r, t)$ в заданный момент времени t^* .

2.5. Алгоритм программной реализации проекционного метода Галеркина. Результаты вычислительного эксперимента

Представим алгоритм программы, реализующей проекционный метод Галеркина. Программа написана в прикладном пакете Maple 2017, эксплуатируется на персональном компьютере платформы Intel (UX64), работает под управлением Microsoft Windows. Используемый численный метод решения описан в п. 2.4.

Прежде всего, по результатам генерирования случайных величин ξ_{ok} получаем ξ_0 и проводим проверку выполнения требований Теоремы 2.1.2 существования решения. Если оно не выполняется, то задача не имеет решения. Дальнейшее изложение алгоритма проведем для случая выполнения условия $\xi_0 \in \mathbf{L}_2(\Omega, \mathfrak{Z}^1)$.

На рисунке 2.7 представлена блок-схема программы.

Опишем ее работу по шагам.

Шаг 1. Вводятся коэффициенты уравнения Баренблатта – Желтова – Кочинной α , λ , параметр области r_0 , количество галеркинских приближений N , параметр T временного интервала $[0, T]$, параметры случайного воздействия - математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, ω , генери-

руются случайные величины, входящие в состав разложения для начальной функции, с помощью функции `stats[random, normald[ $\mu, \sigma$ ]](1)`.

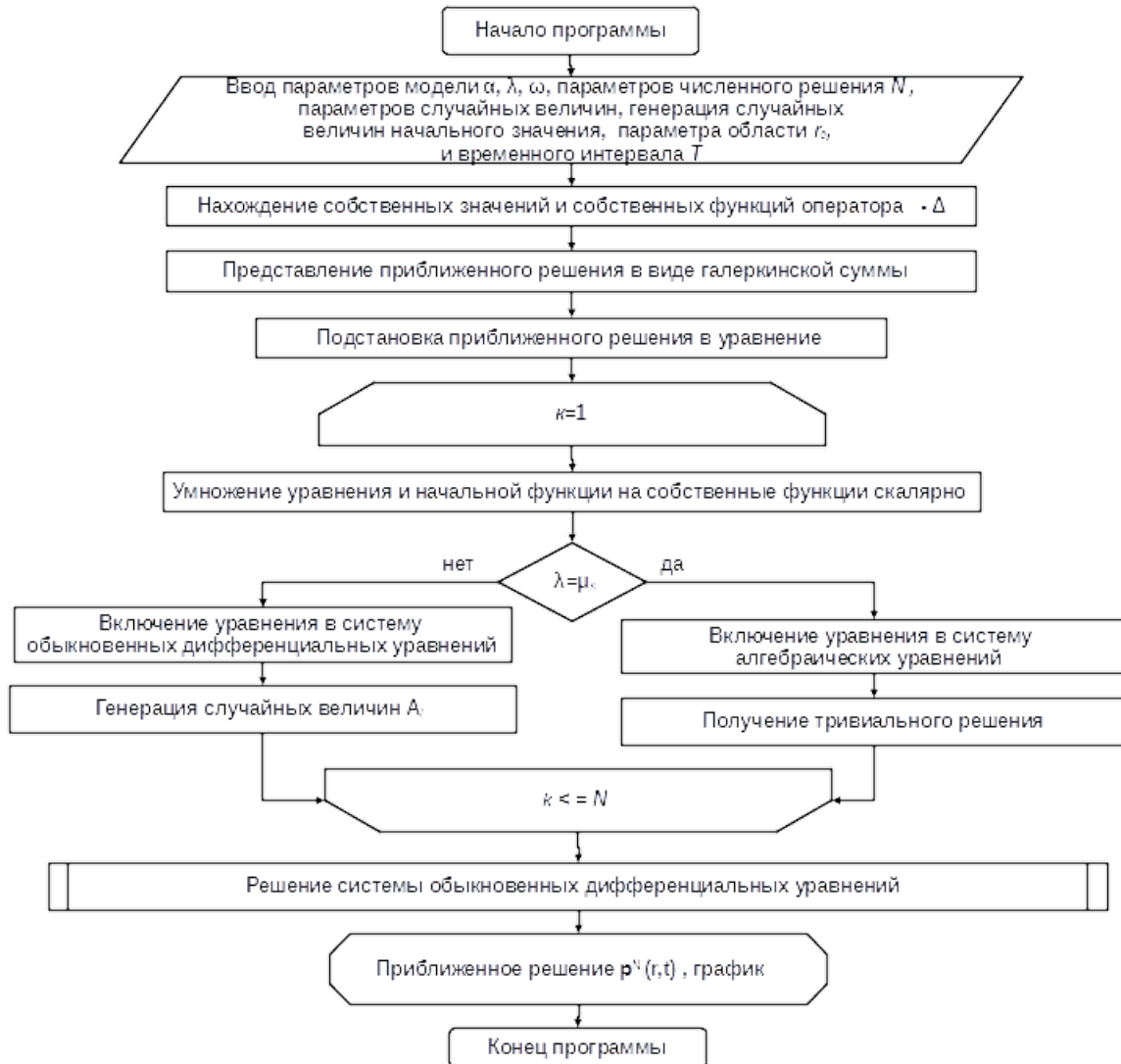


Рис. 2.7. Блок-схема программы для исследования модели Баренблатта–Желтова–Кочиной проекционным методом Галеркина.

Шаг 2. Отдельной процедурой находятся собственные значения и собственные функции оператора $-\Delta$.

Шаг 3. С помощью встроенного конструктора функций задается приближенное решение задачи, эта функция затем используется в записи уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной.

Шаг 4. Отдельной процедурой, в цикле **for i to 1 do N end do** формируется система дифференциальных уравнений и система алгебраических уравнений. Генерируются случайные величины, определяющие внешнее воздействие в уравнениях.

Шаг 5. Решается система алгебраических уравнений.

Шаг 6. Решается система дифференциальных уравнений с помощью встроенной процедуры **dsolve**.

Шаг 7. Формируется функция решения задачи с помощью операции **evalf**.

Шаг 8. С помощью встроенных процедур **plot**, **plot3d**, **animate(plot3d)** выводятся двумерные и трехмерные графики с построением трехмерного анимированного графика.

Приведем результаты вычислительного эксперимента VE3. Заданы следующие коэффициенты уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной $\alpha = 0,5$, параметр области $r_0 = 7$, $\lambda = -\left(\frac{\mu_2}{7}\right)^2$, количество галеркинских приближений $N = 10$, параметр $T = 60$ временного интервала $[0, T]$, параметры случайного воздействия - математическое ожидание, равное 0 и среднее квадратическое отклонение, равное 2, $\omega = 0,5$. Генерация случайных величин, входящих в состав разложения для начальной функции, дала следующие результаты:

$$\begin{aligned}\xi_{0_1} &= -1.689598303, & \xi_{0_3} &= 0.9830205088, & \xi_{0_4} &= -0.9230094340, \\ \xi_{0_5} &= -3.528396980, & \xi_{0_6} &= -2.501917784, & \xi_{0_7} &= -1.980152585, \\ \xi_{0_8} &= 0.2082854430, & \xi_{0_9} &= -2.341814556, & \xi_{0_{10}} &= 2.410637304.\end{aligned}$$

Генерация случайного внешнего воздействия проводилась как

$$\begin{aligned}NdW &= A \sin(\omega t)X_1(r) + A \sin(\omega t)X_3(r) + A \sin(\omega t)X_4(r) + \\ &+ A \sin(\omega t)X_5(r) + A \sin(\omega t)X_6(r) + A \sin(\omega t)X_7(r) + \\ &+ A \sin(\omega t)X_8(r) + A \sin(\omega t)X_9(r) + A \sin(\omega t)X_{10}(r)\end{aligned}$$

при $A = 0.1109310767$.

Система дифференциальных уравнений вида (2.3.14) содержит 9 уравнений, алгебраическое уравнение получено одно – второе (так как второе собственное значение равно $-\lambda$).

$$\begin{aligned}
5.986411705 \frac{da_1(t)}{dt} + 0.3896625746a_1(t) - 0.7324885528\sin(0.5t) &= 0, \\
a_2(t) &= 0, \\
4.182715588 \frac{da_3(t)}{dt} + 1.379537569a_3(t) - 0.2002656033\sin(0.5t) &= 0, \\
4.800720460 \frac{da_4(t)}{dt} + 1.878349886a_4(t) - 0.1468639312\sin(0.5t) &= 0, \\
5.579535798 \frac{da_5(t)}{dt} + 2.377652661a_5(t) - 0.1159457174\sin(0.5t) &= 0, \\
6.435276814 \frac{da_6(t)}{dt} + 2.877194869a_6(t) - 0.09578138984\sin(0.5t) &= 0, \\
7.333758282 \frac{da_7(t)}{dt} + 3.376871499a_7(t) - 0.08159160609\sin(0.5t) &= 0, \\
8.258436797 \frac{da_8(t)}{dt} + 3.876631021a_8(t) - 0.07106367812\sin(0.5t) &= 0, \\
9.200331010 \frac{da_9(t)}{dt} + 3.876631021a_9(t) - 0.06294212480\sin(0.5t) &= 0, \\
10.15414403 \frac{da_{10}(t)}{dt} + 4.876297381a_{10}(t) - 0.05648652725\sin(0.5t) &= 0.
\end{aligned}$$

Получены следующие начальные значения для решения задачи Коши

$$\begin{aligned}
a_1(0) &= -1.689598304, & a_2(0) &= 0, \\
a_3(0) &= 0.9830205086, & a_4(0) &= -0.9230094335, \\
a_5(0) &= -3.528396981, & a_6(0) &= -2.501917785, \\
a_7(0) &= -1.980152584, & a_8(0) &= 0.2082854429, \\
a_9(0) &= -2.341814556, & a_{10}(0) &= 2.410637304.
\end{aligned}$$

Затем находится приближенное решение начально-краевой задачи, результат которой графически представлен на рисунке 2.8. (результат VE3) в виде трехмерных графиков в различные моменты времени t^* через равные временные промежутки.

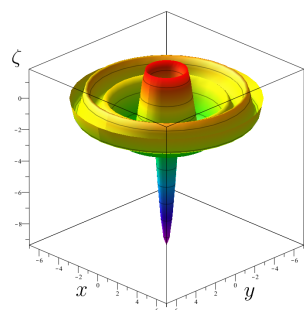
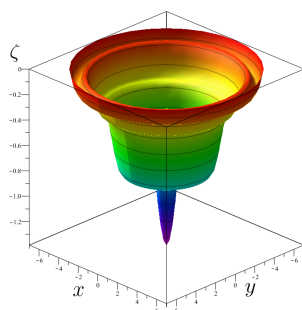
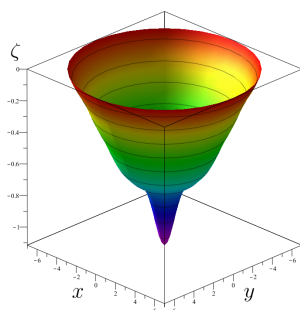
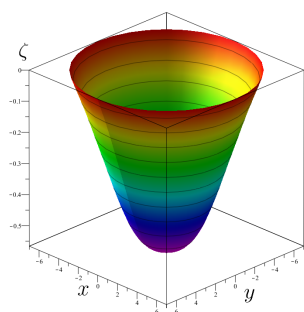
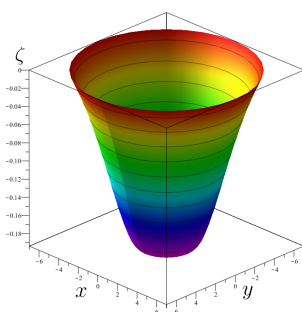
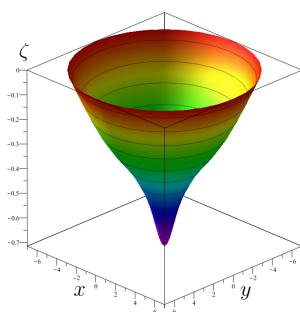
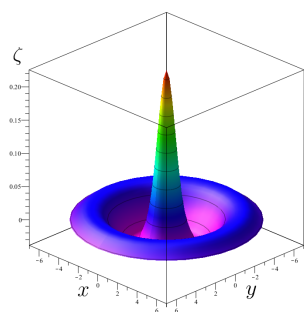
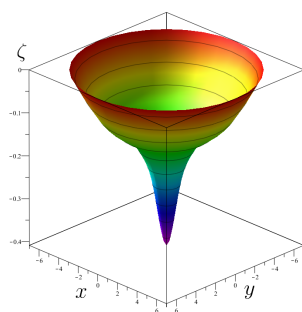
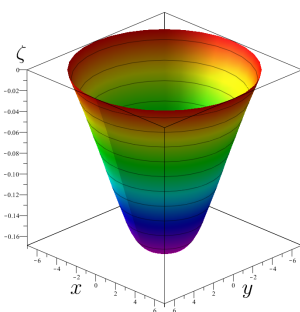
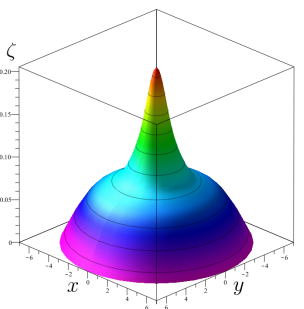
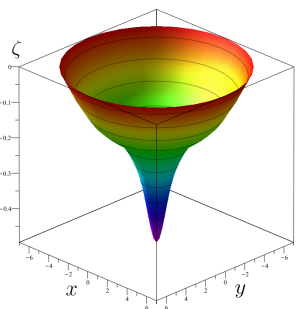
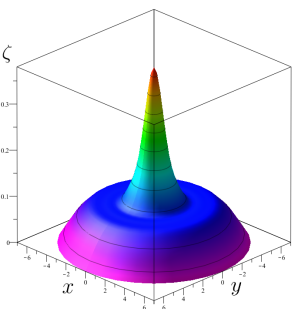
(a) $t^*=0$ c(b) $t^*=5$ c(c) $t^*=10$ c(d) $t^*=15$ c(e) $t^*=20$ c(f) $t^*=25$ c(g) $t^*=30$ c(h) $t^*=35$ c(i) $t^*=40$ c(j) $t^*=45$ c(k) $t^*=50$ c(l) $t^*=55$ c

Рис. 2.8. Результаты вычислительного эксперимента ВЕЗ проекционным методом Галеркина

2.6. Обработка информации и алгоритм ее программной реализации. Результаты вычислительных экспериментов

Исследование стохастической модели предполагает проведение m вычислительных экспериментов, из которых в первой группе – m_1 эксперимент – для моделирования внешнего воздействия используется генератор случайной нормально распределенной случайной величины с заданными параметрами математического ожидания и дисперсии, а во второй группе – $m - m_1$ экспериментов – моделируется внешнее воздействие при значении случайной величины, вероятность которого крайне мала. Для первой группы экспериментов генерируются A_i и ζ_{0i_j} , где $i = 1, \dots, m_1$, $j = 1, \dots, N$, для второй группы величины A_i , где $i = m_1 + 1, \dots, m$ задаются, исходя из физических свойств случайного воздействия как редкого события.

Алгоритм численного исследования стохастической модели Баренблатта – Желтова – Кочиной представлена на рисунке 2.9. После генерации случайных величин реализуются первые три этапа численного решения задачи Коши – Дирихле для стохастического уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной (п. 2.5). Для последующей обработки результатов запускается цикл по i , что позволяет в одной программе обработать результаты m_1 экспериментов. Каждый цикл позволит получить несколько реализаций решения.

По результатам экспериментов математическим ожиданием будет являться неслучайная функция $M(\tilde{\zeta}(r, t))$, которая при любом значении t равна математическому ожиданию соответствующего сечения, т.е. усредненную траекторию (реализацию), полученную в результате обработки m_1 экспериментов. Дисперсией и средним квадратическим отклонением будут являться неслучайные функции $D(\tilde{\zeta}(r, t))$ и $\sigma_{\zeta}(t)$, которые при любом значении t равны дисперсии и среднему квадратическому отклонению соответствующего сечения случайного процесса.

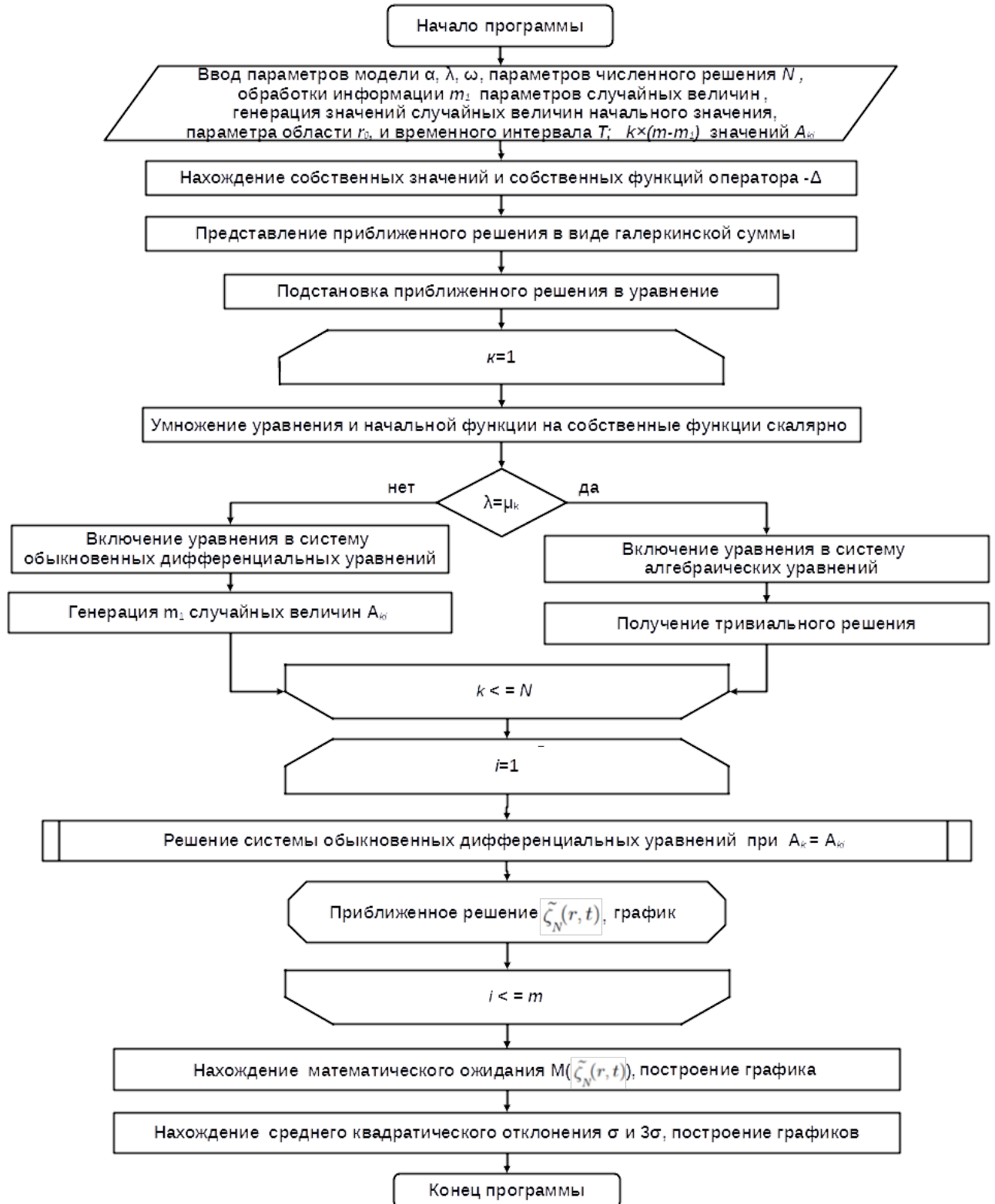


Рис. 2.9. Блок-схема алгоритма обработки информации при численном исследовании модели Баренблатта – Желтова – Кочиной.

В результате, с вероятностью 0,997 можем использовать оценку

$$\|\zeta(r, t) - M(\tilde{\zeta}(r, t))\| < 3\sigma_{\zeta}(t) \quad (2.6.1)$$

В качестве примера обработки информации, получаемой в результате серии вычислительных экспериментов, будем использовать результаты 5 экспериментов VE3 – VE7. В таблице 2.3 представлены значения случайных величин вычислительных экспериментов VE4 – VE7, все остальные параметры соответствуют параметрам эксперимента VE3 (п.2.5).

Таблица 2.3. Значения случайных величин вычислительных экспериментах VE4 – VE7

	VE4	VE5	VE6	VE7
ζ_{0i_1}	-1,9208689511	-0,8767424642	0,1437890496	-0,04785773296
ζ_{0i_2}	0,4578391120	1,5029153477	-0,9847561281	-1,43819203485
ζ_{0i_3}	-0,2207517856	2,0230076801	1,8560420876	1,801834825
ζ_{0i_4}	-0,8170520620	-1,0224094102	0,9826358670	-1,718646489
ζ_{0i_5}	-0,2074605708	1,4643521840	-4,2788140887	0,3249371616
ζ_{0i_6}	-1,1247152170	1,3703205531	-2,0469799408	-1,177418217
ζ_{0i_7}	0,4473476772	3,2957938182	0,9468284588	-0,7271342588
ζ_{0i_8}	1,5125467051	-0,4545505372	-0,8691248618	1,095097482
ζ_{0i_9}	-2,7408411742	0,0693819909	0,9353709696	-0,03088692142
$\zeta_{0i_{10}}$	1,2214549541	0,1973947166	-0,1460908619	1,134314459
A_i	-2.1507374223	0,9417937502	1,8865394871	2,076380126

На рисунках 2.10 – 2.13 графически представлены функции давления, полученные в результате вычислительных экспериментов VE4 – VE7 соответственно, в виде трехмерных графиков в различные моменты времени t^* через равные временные промежутки.

Представление результатов оценки математического ожидания по результатам пяти экспериментов целесообразно осуществлять на двумерных графиках при фиксированном значении r^* . Для этого были взяты три значения $r^* = 0$, $r^* = \frac{r_0}{3}$, $r^* = \frac{2r_0}{3}$.

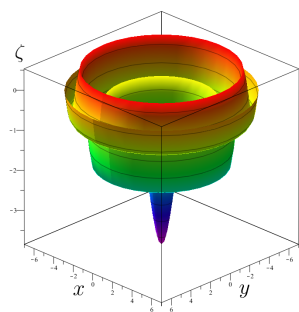
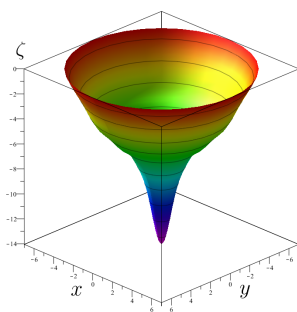
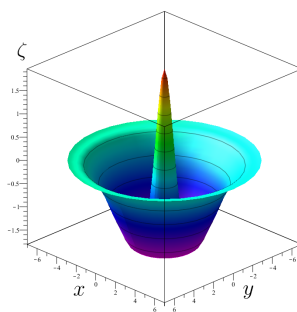
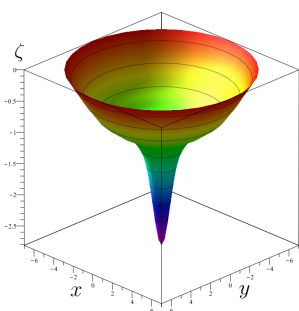
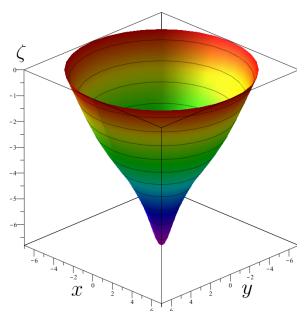
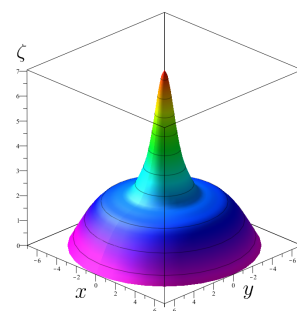
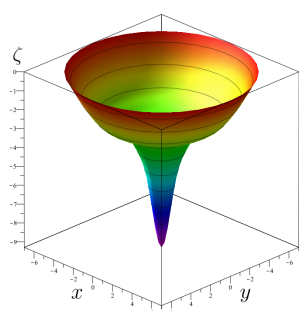
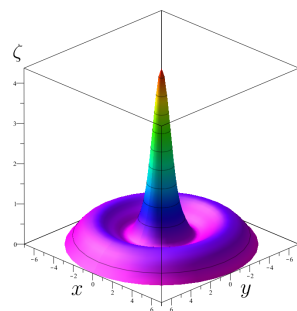
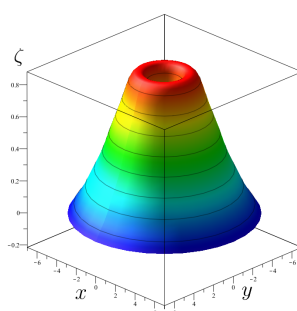
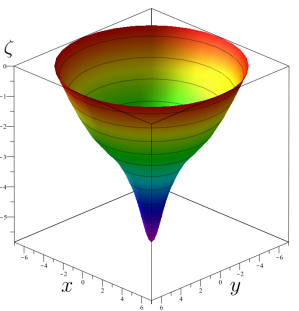
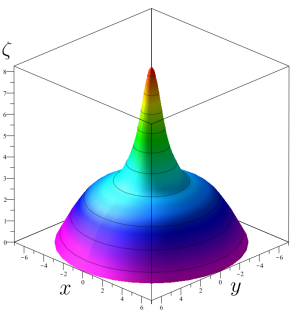
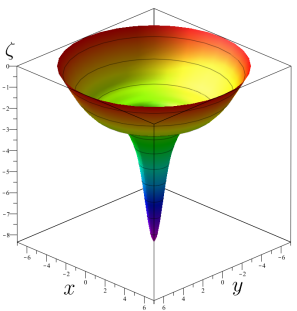
(a) $t^*=0$ c(b) $t^*=5$ c(c) $t^*=10$ c(d) $t^*=15$ c(e) $t^*=20$ c(f) $t^*=25$ c(g) $t^*=30$ c(h) $t^*=35$ c(i) $t^*=40$ c(j) $t^*=45$ c(k) $t^*=50$ c(l) $t^*=55$ c

Рис. 2.10. Результаты вычислительного эксперимента VE4 проекционным методом Галеркина

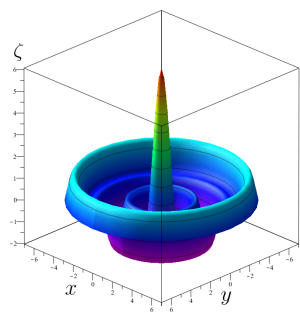
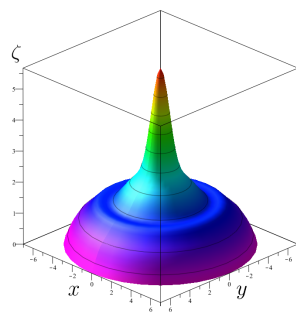
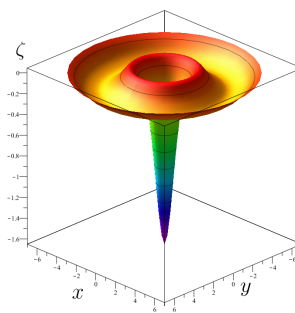
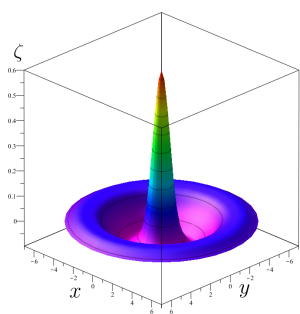
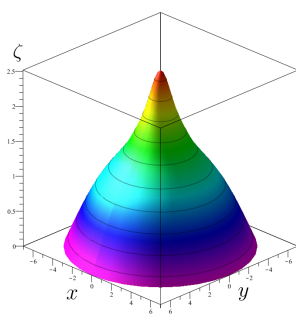
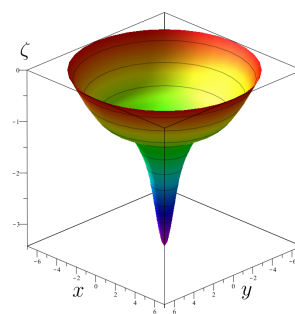
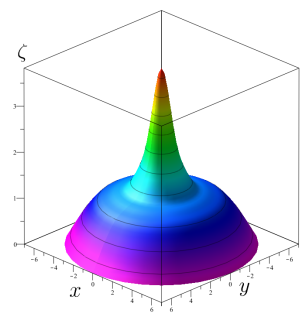
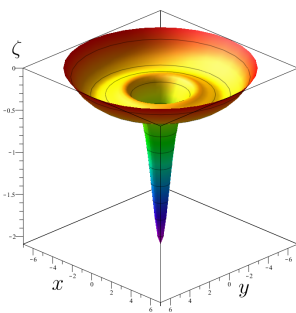
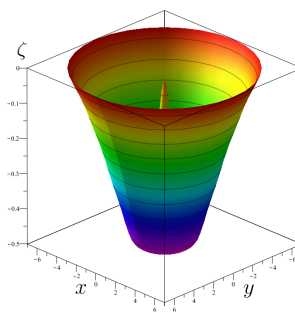
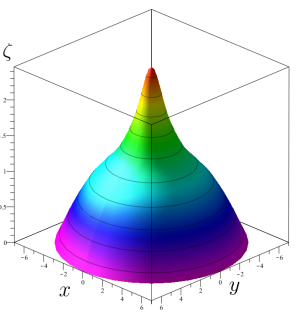
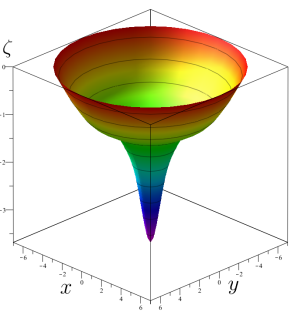
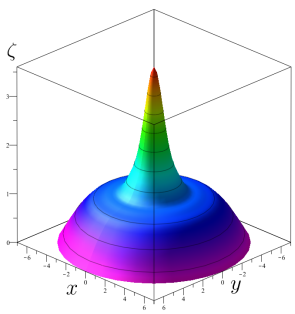
(a) $t=0$ c(b) $t=5$ c(c) $t=10$ c(d) $t=15$ c(e) $t=20$ c(f) $t=25$ c(g) $t=30$ c(h) $t=35$ c(i) $t=40$ c(j) $t=45$ c(k) $t=50$ c(l) $t=55$ c

Рис. 2.11. Результаты вычислительного эксперимента VE5 проекционным методом Галеркина

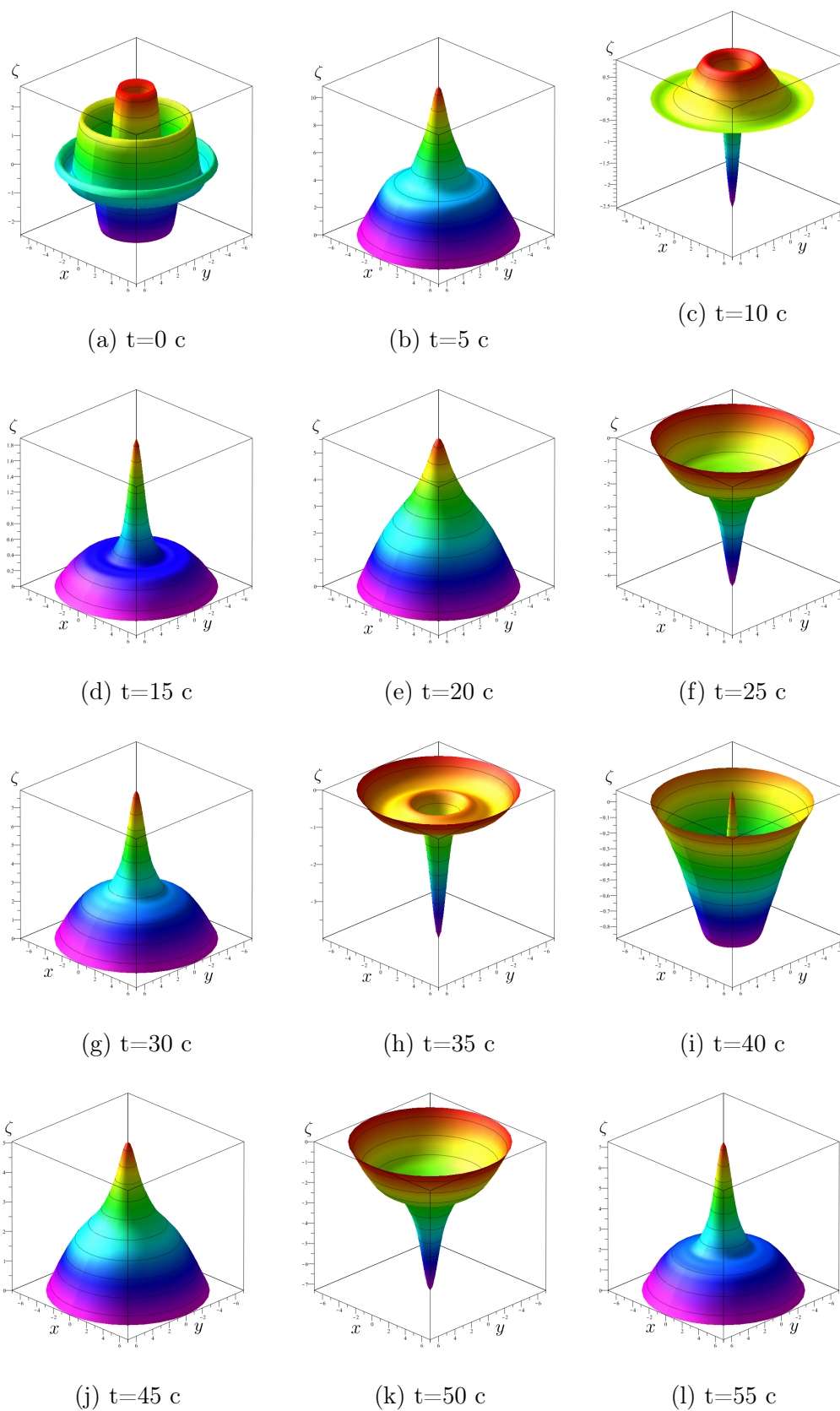


Рис. 2.12. Результаты вычислительного эксперимента VE6 проекционным методом Галеркина

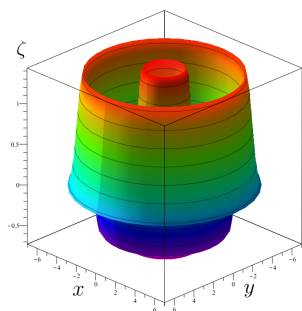
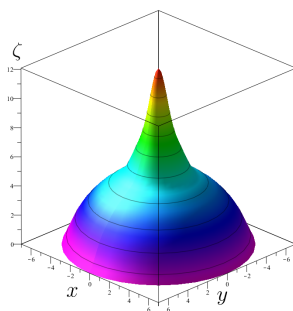
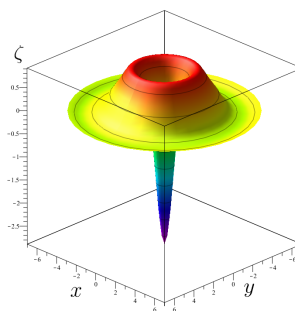
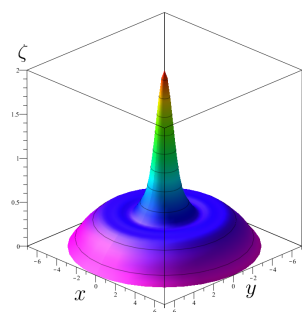
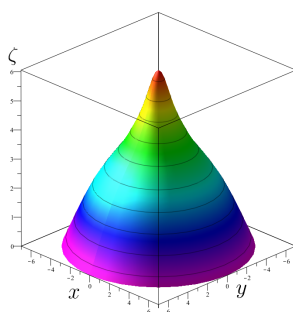
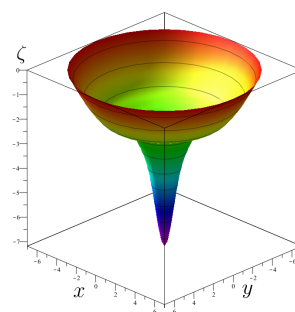
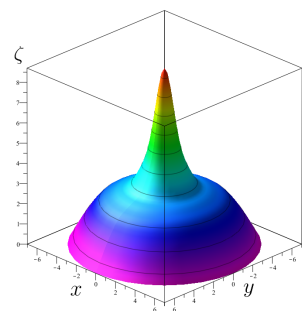
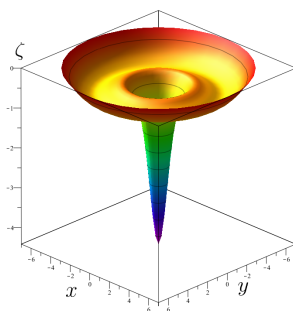
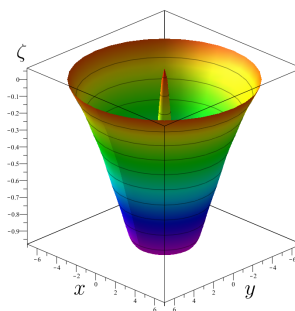
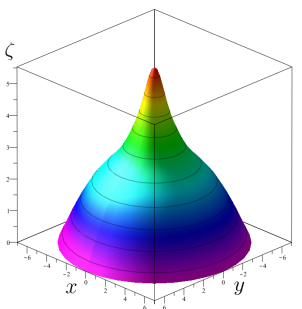
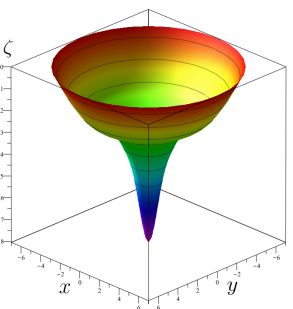
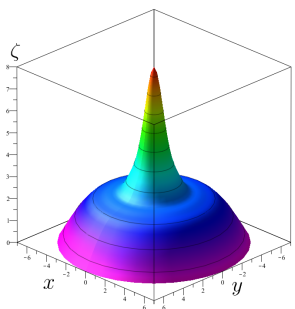
(a) $t=0$ c(b) $t=5$ c(c) $t=10$ c(d) $t=15$ c(e) $t=20$ c(f) $t=25$ c(g) $t=30$ c(h) $t=35$ c(i) $t=40$ c(j) $t=45$ c(k) $t=50$ c(l) $t=55$ c

Рис. 2.13. Результаты вычислительного эксперимента VE7 проекционным методом Галеркина

На рисунке 2.14 представлены пять графиков функции $\tilde{\zeta}_i(0, t)$, $i = 1, \dots, 5$ при $r = 0$. Графики размещены по одному в соответствии с номером эксперимента, ось абсцисс – время t .

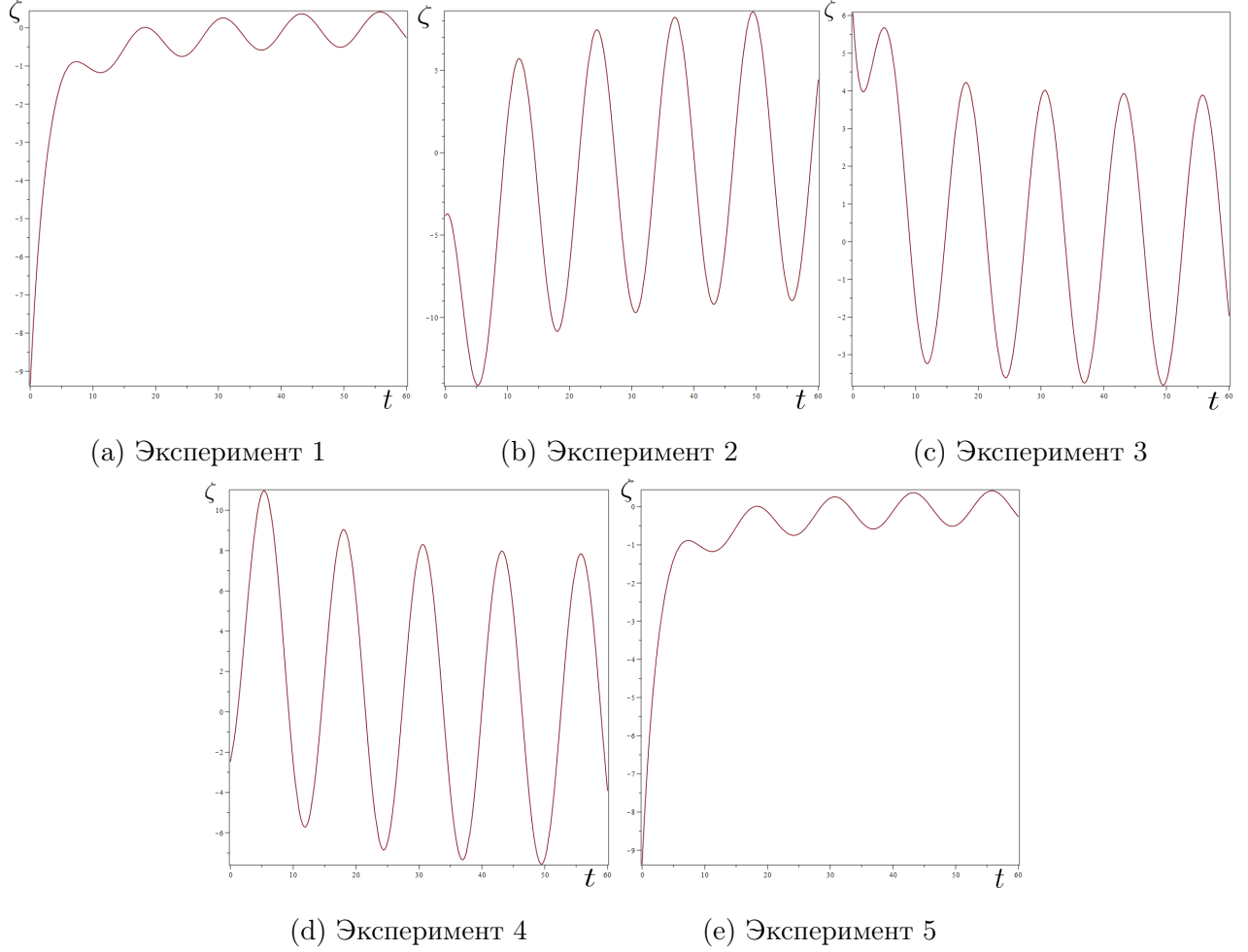


Рис. 2.14. Графики функции $\tilde{\zeta}_i(0, t)$, $i = 1, \dots, 5$ при $r = 0$,

На рисунке 2.15 совмещено несколько графиков функций. Зелеными пунктирными линиями отражены пять графиков функций $\tilde{\zeta}_i(0, t)$, $i = 1, \dots, 5$, темной сплошной линией показана функция $M(\tilde{\zeta}(0, t))$, получаемая численно, красными линиями представлены функции $M(\tilde{\zeta}(0, t)) + 3\sigma_\zeta(t)$ и $M(\tilde{\zeta}(0, t)) - 3\sigma_\zeta(t)$, получаемые также численно. Отметим, что оценка (2.6.1) выполняется.

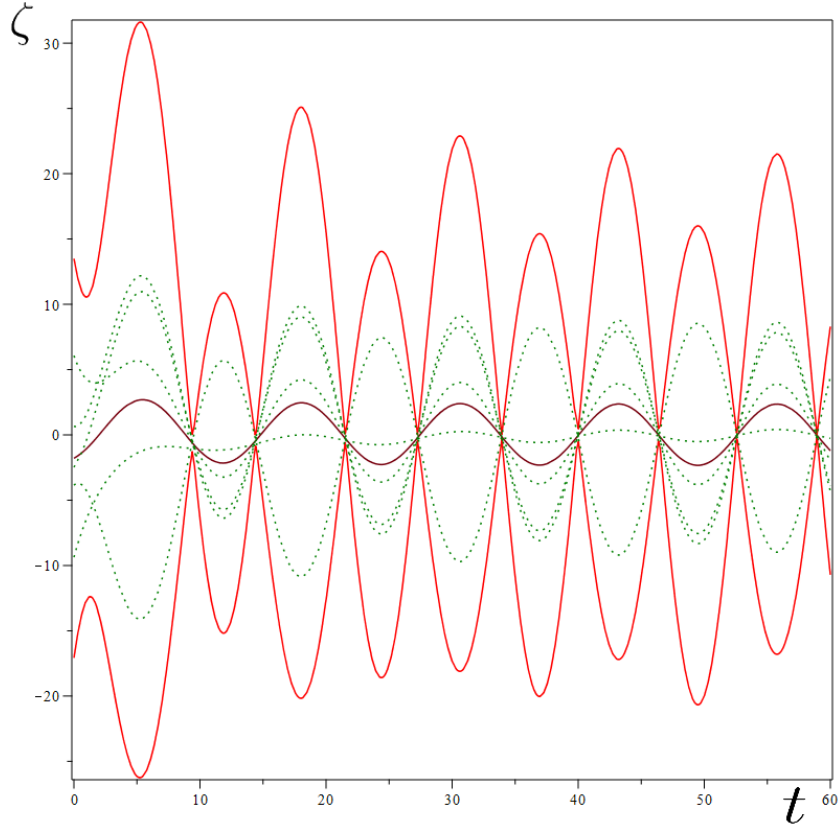
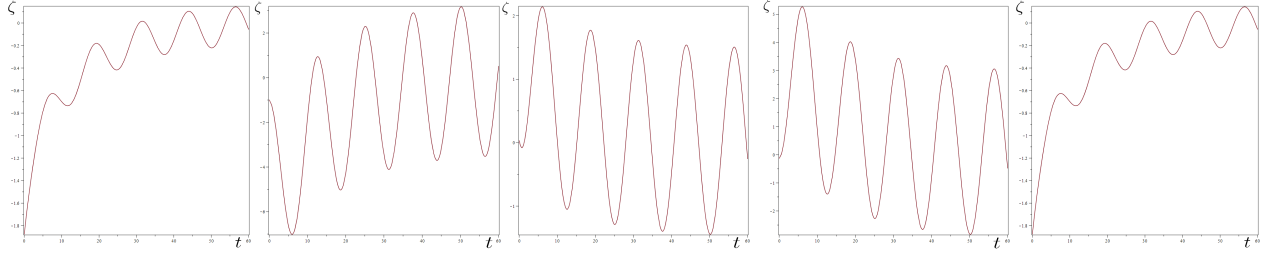


Рис. 2.15. Математическое ожидание $M(\tilde{\zeta}(0, t))$ и его оценка при $r^*=0$.

На рисунке 2.16 представлены функции $\tilde{\zeta}_i(\frac{r_0}{3}, t)$.



(a) Эксперимент 1 (b) Эксперимент 2 (c) Эксперимент 3 (d) Эксперимент 4 (e) Эксперимент 5

Рис. 2.16. Изменение давления при $r^* = \frac{r_0}{3}$

На рисунке 2.17 зелеными пунктирными линиями отражены пять графиков функций $\tilde{\zeta}_i(\frac{r_0}{3}, t)$, $i = 1, \dots, 5$, темной сплошной линией показана функция $M(\tilde{\zeta}(\frac{r_0}{3}, t))$, получаемая численно, красными линиями представлены функции $M(\tilde{\zeta}(\frac{r_0}{3}, t)) + 3\sigma_\zeta(t)$ и $M(\tilde{\zeta}(\frac{r_0}{3}, t)) - 3\sigma_\zeta(t)$, получаемые также численно. Отметим, что оценка (2.6.1) выполняется.

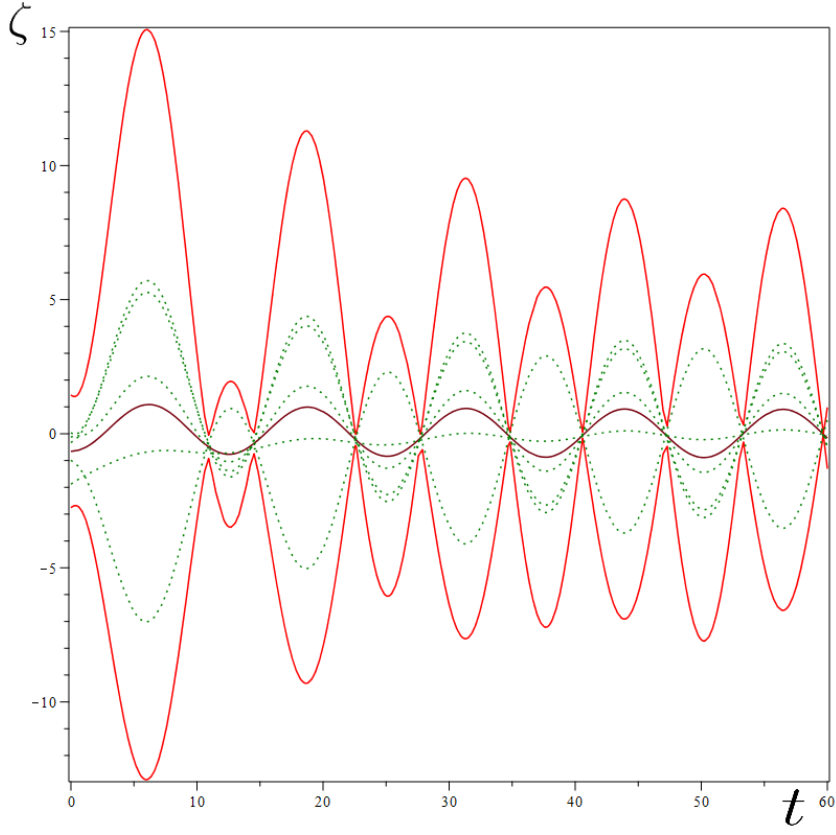
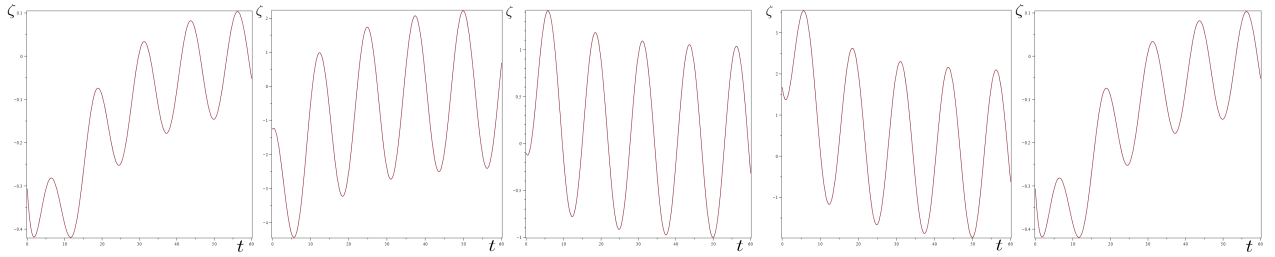


Рис. 2.17. Математическое ожидание $M(\tilde{\zeta}(\frac{r_0}{3}, t))$ и его оценка при $r = \frac{r_0}{3}$

На рисунке 2.18 представлены функции $\tilde{\zeta}_i(\frac{2r_0}{3}, t)$ для всех пяти экспериментов.

На рисунке 2.19 зелеными пунктирными линиями отражены пять графиков функций $\tilde{\zeta}_i(\frac{2r_0}{3}, t)$, $i = 1, \dots, 5$, темной сплошной линией показана функция $M(\tilde{\zeta}(\frac{2r_0}{3}, t))$, получаемая численно, красными линиями представлены функ-



(a) Эксперимент 1 (b) Эксперимент 2 (c) Эксперимент 3 (d) Эксперимент 4 (e) Эксперимент 5

Рис. 2.18. Изменение давления при $r^* = \frac{2r_0}{3}$

ции $M(\tilde{\zeta}(\frac{2r_0}{3}, t)) + 3\sigma_\zeta(t)$ и $M(\tilde{\zeta}(\frac{2r_0}{3}, t)) - 3\sigma_\zeta(t)$, получаемые также численно. Отметим, что оценка (2.6.1) выполняется.

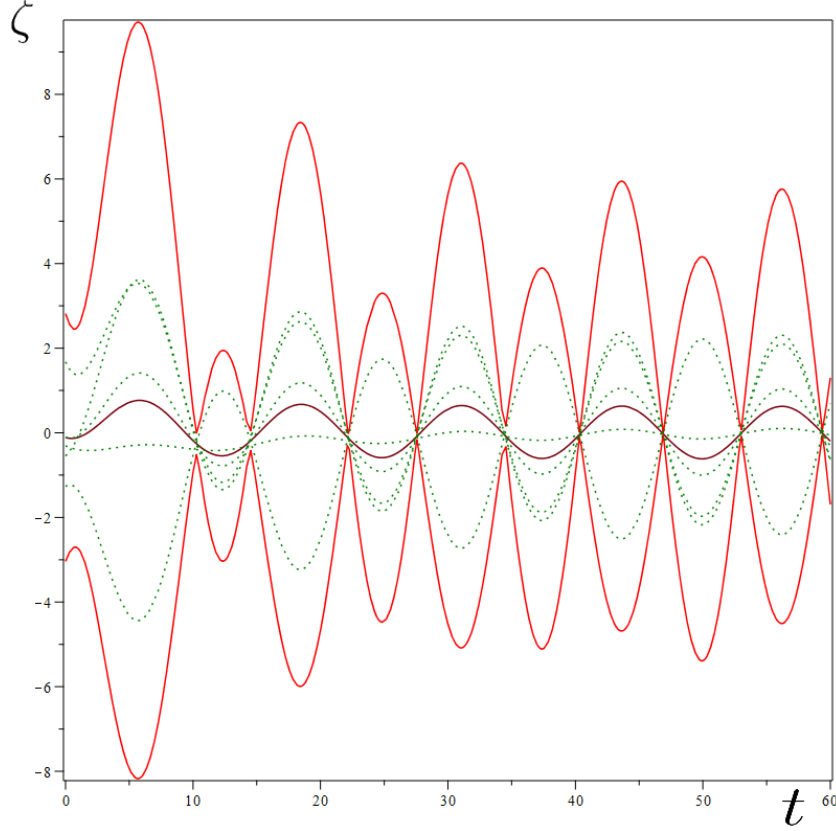


Рис. 2.19. Математическое ожидание $M(\tilde{\zeta}(\frac{2r_0}{3}, t))$ и его оценка при $r = \frac{2r_0}{3}$

При проведении второй группы экспериментов целью является моделирование состояния системы, ее реакции на случайное воздействие, относящееся к редким событиям.

Для проведения такого рода вычислительного эксперимента (VE8) зададим $A = 58$, генерация случайных величин, входящих в состав разложения для начальной функции, дала следующие результаты: $\eta_{0_1} = 0.1109310767$, $\eta_{0_1} = 0.10205073456$, $\eta_{0_3} = -1.689598303$, $\eta_{0_4} = 0.9830205088$, $\eta_{0_5} = -0.9230094340$, $\eta_{0_6} = -3.528396980$, $\eta_{0_7} = -2.501917784$, $\eta_{0_8} = -1.980152585$, $\eta_{0_9} = 0.2082854430$, $\eta_{0_{10}} = -2.341814556$.

На рисунке 2.20 представлены результаты вычислительного эксперимента VE8.

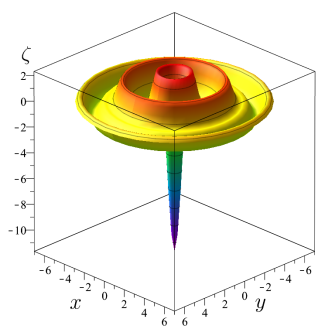
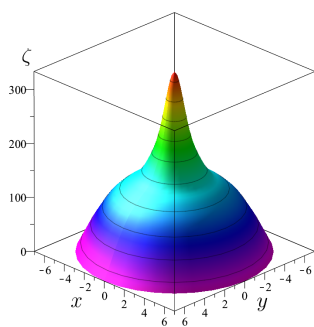
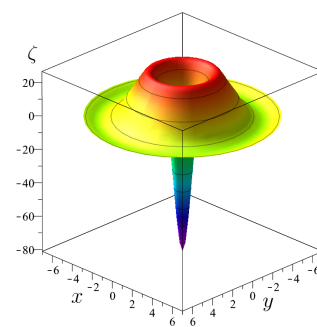
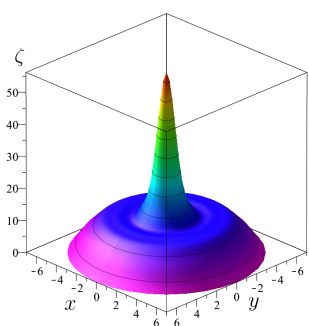
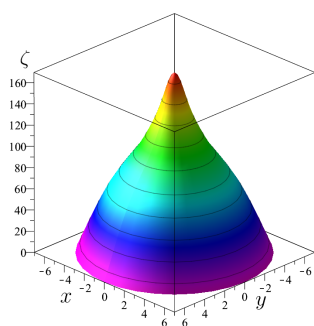
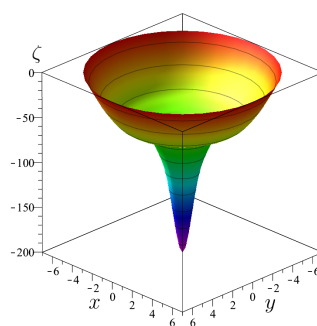
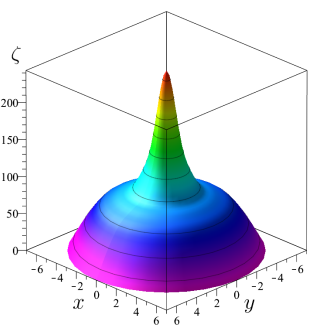
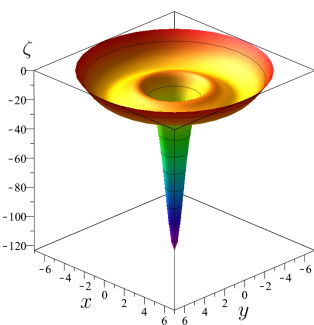
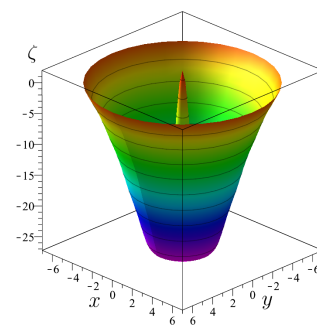
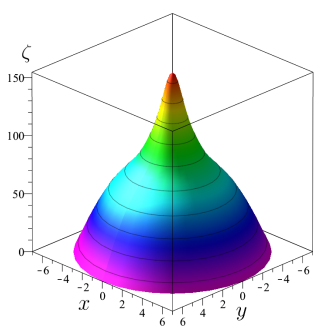
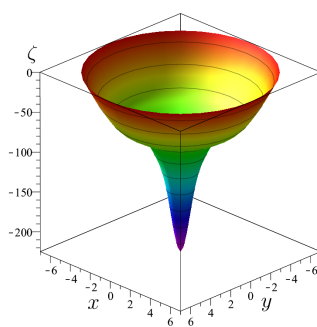
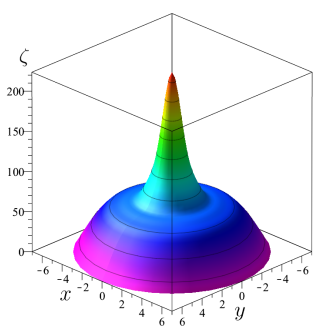
(a) $t=0$ c(b) $t=5$ c(c) $t=10$ c(d) $t=15$ c(e) $t=20$ c(f) $t=25$ c(g) $t=30$ c(h) $t=35$ c(i) $t=40$ c(j) $t=45$ c(k) $t=50$ c(l) $t=55$ c

Рис. 2.20. Результаты вычислительного эксперимента VE8 проекционным методом Галеркина

Отметим, что в программе, реализующей алгоритм обработки информации используются процедуры, позволяющей автоматически формировать файлы формата PNG и их заголовки. Для этого применяется цикл **for i to m_1 do for tn from 0 to 12 do , for end do end do**; , процедуры **plotsetup(png, plotoutput, plotoptions); display , plotsetup(default)**.

3. Линейные модели Осколкова и Хоффа на графах со случайным внешним воздействием

Пусть $G = G(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$ – конечный связный ориентированный граф, через $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ обозначим множество вершин, а через $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ – множество ребер, в вершинах V_i графа G зададим условия непрерывности

$$\begin{aligned} \zeta_j(0, t) = \zeta_k(0, t) = \zeta_m(l_m, t) = \zeta_n(l_n, t), \\ E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i) \end{aligned} \quad (3.0.1)$$

и условия баланса потоков

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j \zeta_{jx}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k \zeta_{kx}(l_k, t) = 0, \quad (3.0.2)$$

где $E^\alpha(V_i)$ ($E^\omega(V_i)$) – множество ребер, имеющих в вершине V_i начало (конец), $l_j > 0$ и $d_j > 0$ – длина ребра и диаметр его поперечного сечения. Важно заметить несколько самостоятельных случаев для вершин и ребер графа.

(i) Если у графа две вершины (т.е. граф представлен в виде одного нециклического ребра), то условие (3.0.1) отсутствует, а условие (3.0.2) трансформируется в условие Неймана.

(ii) Если у графа одна вершина (т.е. ребро циклическое), то условие (3.0.1), (3.0.2) превращаются в условие согласования.

Отдельно отметим, что в конкретном случае условий (3.0.1), (3.0.2) термин "отсутствовать" не следует понимать как "равенство нулю". Так, если возьмем V_i , в которую все ребра "входят", то в (3.0.1) первых двух равенств и уменьшаемого в (3.0.2) не будет.

Положим $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{F}$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства. Следуя теории относительно ограниченных операторов и порождаемых ими вырожденных групп [44] отметим, что пространства $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{F}$ представимы в виде прямых сумм $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^0 \oplus \mathfrak{Z}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$, операторы $L_k (M_k)$ есть сужение операторов $L (M)$ на $\mathfrak{Z}^k (\text{dom } M \cap \mathfrak{Z}^k)$ $k = 0, 1$.

Важным условием является относительная ограниченность оператора M (или кратко, оператор $M(L, p)$ -ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) [44]. Все последующие утверждения будем проводить, считая это условие выполненным. В этом случае операторы $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$; $M_0 \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{Z}^0; \mathfrak{F}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^1; \mathfrak{F}^1)$; существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{Z}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{Z}^0)$. Обозначим $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^0)$, $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^1)$.

3.1. Аналитическое исследование модели Осколкова транспортировки нефти по нефтепроводу с начальным условием Шоултера – Сидорова

На ребрах E_j графа $\mathbf{G}$ одномерные линейные стохастические уравнения Осколкова запишутся

$$\lambda d\zeta_j - d\zeta_{jxx} = \beta_j \zeta_{jxx} dt + NdW_j \quad (3.1.1)$$

для всех $x \in (0, l_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, а условие Шоултера–Сидорова будет иметь вид

$$P(\zeta(0) - \xi_0) = 0, \quad (3.1.2)$$

где $W = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ – $\mathfrak{F}$ -значный, ядерный K -винеровского процесса, оператор $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ – ядерный, P – проектор. Уравнение (3.1.1) моделирует динамику давления и скорости вязкоупругой несжимаемой жидкости, движущейся в j -той секции трубопровода. В качестве примера такой жидкости можно использовать высокопарафиновые сорта нефти, добыча которых ведется на месторождениях Западной Сибири. Параметр $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ характеризует упругость жидкости, параметр $\lambda \in \mathbb{R}$ описывает вязкость жидкости, случайный процесс $\zeta_j = \zeta_j(x, t)$, $(x, t) \in (0, l_j) \times \mathbb{R}$, характеризует изменение скорости и давления вязкоупругой несжимаемой жидкости в j -той секции трубопровода.

Будем рассматривать гильбертово пространство

$$\mathfrak{Z} = \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_j, \dots) : \zeta_j \in W_2^1(0, l_j), \text{ и выполнено (3.0.1)}\}$$

со скалярным произведением

$$\langle \zeta, v \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (\zeta_{jx} v_{jx} + \zeta_j v_j) dx.$$

Затем построим еще одно гильбертово пространство

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_i, \dots) : g_i \in L_2(0, l_j)\}$$

со скалярным произведением

$$(g, h) = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx.$$

Формулой

$$\langle D\zeta, v \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (\zeta_{jx} v_{jx} + a \zeta_j v_j) dx$$

определим оператор $D : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{F}$ при фиксированном $a \in \mathbb{R}_+$. Операторы L и M построим так, что $L = (\lambda - a)\mathbb{I} + D$, $M = \beta_j(a\mathbb{I}) - D$ при фиксированных β_j , $\lambda \in \mathbb{R}$.

Лемма 3.1.1. (i) Спектр $\sigma(L)$ оператора L вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$ при любых $\lambda \in \mathbb{R}$;

(ii) При любых $\beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M $(L, 0)$ -ограничен.

Доказательство. Вложение $\mathfrak{Z} \hookrightarrow \mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ плотно и непрерывно (даже компактно). отождествим $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ со своим сопряженным пространством и полученное пространство обозначим через $\mathfrak{F}$. Важно заметить, что $\mathfrak{F}$ будет сопряженным относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространством к $\mathfrak{Z}$. Очевидно, $\mathfrak{F}$ – гильбертово пространство, причем вложение $\mathfrak{Z} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ компактно.

Линейный оператор $D : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{F}$ биективен и непрерывен, поскольку $c_1 \|u\|_{\mathfrak{Z}}^2 \leq \langle D\zeta, \zeta \rangle \leq c_2 \|\zeta\|_{\mathfrak{Z}}^2$ при всех $\zeta \in \mathfrak{Z}$ и $c_1 \in \mathbb{R}_+$ и $c_2 \in \mathbb{R}_+$. По теореме Банаха отсюда следует, что существует оператор $D^{-1} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{Z}$. Поскольку вложение $\mathfrak{Z} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ компактно, то оператор $D^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{Z})$ будет компактным. Следовательно спектр оператора D вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$. Отсюда следует, что спектр $\sigma(D) \subset \mathbb{R}_+$. Справедливость утверждения (i) показана.

В силу справедливости (i) и Леммы 1.3.2 утверждение (ii) доказано. •

Теперь рассмотрим разрешимость задачи Шоултера – Сидорова

$$P(\zeta(0) - \xi_0) = 0, \quad (3.1.3)$$

для абстрактного стохастического уравнения соболевского типа

$$Ld\eta = M\eta dt + NdW. \quad (3.1.4)$$

Определение 3.1.1. $\mathfrak{Z}$ -значный винеровский процесс $\zeta(t)$, $t \in [0, \tau]$ называется решением задачи (3.1.3), (3.1.4), если он удовлетворяет (3.1.3) и $\int_0^\tau \|M\zeta(s)\| ds < \infty$ п.н., причем для любого $t \in [0, \tau]$

$$L(\zeta(t) - \xi_0) = \int_0^t M\zeta(s) ds + \int_0^t NdW, \text{ п.н.}$$

Теорема 3.1.1. Пусть процесс W является $\mathfrak{F}^1$ -значным K -винеровским, оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$ и при каждом фиксированном t $\xi_0 \in \mathbf{L}_2(\Omega, \mathfrak{Z}^1)$ и W независимы. Тогда для любого $\xi_0 \in \mathbf{L}_2(\Omega, \mathfrak{Z}^1)$ задача (3.1.3), (3.1.4) имеет единственное решение, определяемое выражением

$$\zeta(t) = Z^t \xi_0 + \int_0^t Z^{t-s} L_1^{-1} N W(s) ds. \quad (3.1.5)$$

где Z^t имеет вид

$$Z^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu.$$

Доказательство. Так как W – $\mathfrak{F}^1$ -значный K -винеровский процесс, то dW также принадлежит пространству $\mathfrak{F}^1$. Аналогично детерминированному случаю (п.1.2) задача (3.1.3), (3.1.4) распадается на две независимых задачи: первая

$$Hd\zeta^0(t) = \zeta^0 dt, \quad (3.1.6)$$

и вторая

$$d\zeta^1(t) = S\zeta dt + L_1^{-1}NdW, \quad (3.1.7)$$

$$\zeta^1(0) = P\xi_0, \quad (3.1.8)$$

где случайные процессы $\zeta^0 = (\mathbb{I} - P)\zeta$, $\zeta^1 = P\zeta$, а случайная величина $\xi_0 \in \mathbf{L}_2(\Omega, \mathfrak{F})$, $k = 0, 1$, где P – проектор. А в силу того, что оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$, случайное воздействие NdW входит в состав только (3.1.7).

Уравнение (3.1.6) является однородным и имеет единственное, причем п.н. тривиальное, решение.

Необходимым условием для существования единственного решения задачи (3.1.7), (3.1.8) является принадлежность п.н. пространству $\mathbf{L}_2(\Omega, \mathfrak{F}^1)$ начального значения ξ_0 , что и обеспечивает действие проектора в (3.1.8).

Обратимся к задаче (3.1.7), (3.1.8) и перейдем к стохастическому интегро-дифференциальному уравнению

$$\zeta^1(t) - \zeta^1(0) = \int_0^t S\zeta dt + \int_0^t L_1^{-1}NdW, \quad (3.1.9)$$

Тогда случайный процесс $\zeta^1(t)$, определяемый выражением вида

$$\zeta^1(t) = Z^t\xi_0 + \int_0^t Z^{t-s}L_1^{-1}NdW(s)$$

будет единственным формальным решением. •

Покажем разрешимость задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.0.1), (3.0.2).

Обозначим через $\{\nu_k\}$ собственные значения оператора L , а через $\{\varphi_k\}$ – соответствующие им ортонормированные в смысле $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ функции. Важно отметить, что $\{\nu_k\}$ занумерованы по неубыванию с учетом их кратности.

Далее строим проекторы и разрешающую группу задачи (3.1.1), (3.1.2) соответственно

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } 0 \notin \sigma(L), \\ \mathbb{I} - \sum_{\nu_k = a - \lambda} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, & \text{если } 0 \in \sigma(L), \end{cases} \\
 Q &= \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } 0 \notin \sigma(L), \\ \mathbb{I} - \sum_{\nu_k = a - \lambda} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, & \text{если } 0 \in \sigma(L), \end{cases} \\
 Z^t &= \sum_{k=1}^{\infty} 'e^{\mu_k t} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k.
 \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Заметим, что в формуле (3.1.10) не учитываются члены ряда с номерами k , для которых выполняется условие $\nu_k = a - \lambda$, поэтому у знака суммы мы ставим штрих. (Отметим, что проекторы P и Q кажутся "похожими", однако, они определены на разных пространствах).

Вернемся к оператору D , и в качестве оператора K возьмем оператор Грина D^{-1} . Его собственные значения $\lambda_k = \nu_k^{-1}$ занумерованные по неубыванию сходятся к точке нуль. Будем полагать, что асимптотическое поведение собственных чисел ν_k оператора D таково, что

$$\nu_k \sim k^2 \text{ при } k \rightarrow \infty, \tag{3.1.11}$$

которая заведомо выполняется, если граф $\mathbf{G}$ представляет собой цепочку последовательно соединенных ребер. Считая, что (3.1.11) выполнено, заключаем, что K – ядерный оператор. Наконец, построим K -винеровский процесс

$$W(t) \equiv W(t, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} ' \sqrt{\lambda_k} \beta_k(t) \varphi_k. \tag{3.1.12}$$

Теорема 3.1.2. Пусть $\beta, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. W – $\mathfrak{F}^1$ -значный K -винеровский процесс, оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$. Тогда для любой $\mathfrak{Z}$ -значной случайной величины ξ_0 , независимой от K -винеровского процесса (3.1.12) существует единственное решение задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.0.1), (3.0.2).

Доказательство. Отметим, что $\xi_{0k} \in \mathbf{L}_2$ – независимые гауссовы случайные величины, такие что их дисперсии ограничены ($D\xi_{0k} \leq C_j$, $k \in \mathbf{N}$, $j = \overline{0, m}$), а ряд

$$\xi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_{0k} \varphi_k, \quad (3.1.13)$$

сходится. В силу леммы 3.1.1 и теоремы 3.1.1 выполняются условия данной теоремы.

Кроме того, по построению пространство $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ является конечной прямой суммой попарно ортогональных подпространств. Обозначив через Ω_j ортопроектор на j -ое подпространство, получим $W_j = \Pi_j W$, где $W = W(t)$ (3.1.13).

Таким образом, учитывая (3.1.11), (3.1.12) и справедливость теоремы 3.1.1, теорема доказана. •

3.2. Аналитическое исследование модели Хоффа деформации в конструкции из двутавровых балок с начально–конечным условием

На ребрах $\mathfrak{E}_j$ графа $\mathbf{G}$ будем рассматривать линейные стохастические уравнения Хоффа

$$\lambda d\zeta_j + du_{jxx} = \beta_j \zeta_j dt + NdW_j, \quad (3.2.1)$$

с начально-конечным условием

$$P_0(\zeta(\tau_0) - \xi_0) = P_1(\zeta(\tau_1) - \xi_1) = 0, \quad (3.2.2)$$

где $W = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ – $\mathfrak{F}$ -значный, ядерный K -винеровского процесса, оператор $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ – ядерный, P_0, P_1 – относительно спектральные проекторы.

Уравнение (3.2.1) описывает динамику выпучивания двутавровых балок в конструкции, находящихся под постоянной нагрузкой со случайным внешним

воздействием. Здесь параметр $\lambda \in \mathbb{R}_+$ характеризует нагрузку на j -ю балку, параметр $\beta \in \mathbb{R}$ в свою очередь описывает свойства материала j -й балки, случайный процесс $\zeta_j = \zeta_j(x, t)$, $(x, t) \in (0, l_j) \times \mathbb{R}$ характеризует отклонение j -той балки от положения равновесия.

Так же как и в п.3.1 будем рассматривать гильбертово пространство $\mathfrak{Z}$ со скалярным произведением $\langle \zeta, v \rangle$, гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ со скалярным произведением (g, h) , и определим оператор $D : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{F}$. Зафиксируем β_J , $\lambda \in \mathbb{R}$, построим операторы $L = (\lambda + a)\mathbb{I} - D$, $M = \beta_J \mathbb{I}$.

Лемма 3.2.1. *(i) Спектр $\sigma(L)$ оператора L вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$ при любых $\lambda \in \mathbb{R}$;*

(ii) При любых $\beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M $(L, 0)$ -ограничен.

Доказательство. Отметим, что вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ плотно и непрерывно (даже компактно). отождествляя $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ со своим сопряженным пространством, полученное пространство обозначим как $\mathfrak{F}$, которое будет сопряженным относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространством к $\mathfrak{Z}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – гильбертово пространство, а вложение $\mathfrak{Z} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ компактно.

Линейный оператор $D : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{F}$ биективен и непрерывен, так как $c_1 \|\zeta\|_{\mathfrak{Z}}^2 \leq \langle D\zeta, \zeta \rangle \leq c_2 \|\zeta\|_{\mathfrak{Z}}^2$ при всех $\zeta \in \mathfrak{Z}$ и $c_1 \in \mathbb{R}_+$ и $c_2 \in \mathbb{R}_+$. По теореме Банаха отсюда следует, что существует оператора $D^{-1} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{Z}$. В силу компактности вложения $\mathfrak{Z} \hookrightarrow \mathfrak{F}$, оператор $D^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{Z})$ будет являться компактным. Следовательно спектр оператора D вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$.

В силу справедливости (i) и Леммы 1.3.3 утверждение (ii) доказано. •

Теперь рассмотрим разрешимость начально-конечной задачи

$$P_0(\zeta(\tau_0) - \xi_0) = P_1(\zeta(\tau_1) - \xi_1) = 0, \quad (3.2.3)$$

для абстрактного линейного стохастического уравнения соболевского типа

$$Ld\zeta = M\zeta dt + NdW. \quad (3.2.4)$$

Определение 3.2.1. $\mathfrak{Z}$ -значный винеровский процесс $\zeta(t)$, $t \in [0, \tau]$ называется решением задачи (3.2.3), (3.2.4), если он удовлетворяет (3.2.3) и $\int_0^\tau \|M\zeta(s)\| ds < \infty$ п.н., причем для любого $t \in [0, \tau]$

$$L(\zeta(t) - \zeta(0)) = \int_0^t M\zeta(s) ds + \int_0^t NdW, \text{ п.н.}$$

Теорема 3.2.1. Пусть процесс W является $\mathfrak{F}^1$ -значным K -винеровским, оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$ и при каждом фиксированном t случайные величины $\xi_0, \xi_1 \in \mathbf{L}_2(\Omega, \mathfrak{Z}^1)$ и процесс W независимы. Тогда для любых $\xi_0, \xi_1 \in \mathbf{L}_2(\Omega, \mathfrak{Z}^1)$ задача (3.2.3), (3.2.4) имеет единственное решение, определяемое выражением

$$\begin{aligned} \zeta(t) = & Z_0^{t-\tau_0} \xi_0 + \int_{\tau_0}^t Z_0^{t-s} L_{10}^{-1} Q_0 N W(s) ds + \\ & + Z_1^{t-\tau_1} \xi_1 + \int_{\tau_1}^t Z_1^{t-s} L_{11}^{-1} Q_1 N W(s) ds, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

где Z_0^t и Z_1^t

$$Z_0^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} (s\mathbb{I} - S_0)^{-1} e^{st} ds, \quad Z_1^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (s\mathbb{I} - S_1)^{-1} e^{st} ds.$$

Доказательство. Так как W – $\mathfrak{F}^1$ -значный K -винеровский процесс, то dW также принадлежит пространству $\mathfrak{F}^1$. Аналогично детерминированному случаю примем выполнение условия расщепления относительного спектра оператора M , $\mathfrak{Z}^1 = \mathfrak{Z}^{10} \oplus \mathfrak{Z}^{11}$ и $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}^{10} \oplus \mathfrak{F}^{11}$, $L_{10} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^{10}; \mathfrak{F}^{10})$ и $L_{11} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^{11}; \mathfrak{F}^{11})$, $M_{10} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^{10}; \mathfrak{Z}^{10})$ и $M_{11} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^{11}; \mathfrak{Z}^{11})$, существование операторов $L_{10}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{10}; \mathfrak{Z}^{10})$, $L_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{11}; \mathfrak{Z}^{11})$, $S_0 = L_{10}^{-1} M_{10} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^{10})$ и $S_1 = L_{11}^{-1} M_{11} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}^{11})$.

В результате задача (3.2.2), (3.2.4) распадается на три независимых задачи: первая

$$Hd\zeta^0(t) = \zeta^0 dt, \quad (3.2.6)$$

вторая

$$d\zeta^{10}(t) = S_0\zeta^{10}dt + L_{10}^{-1}Q_0NdW, \quad (3.2.7)$$

$$\zeta^{10}(0) = P_0\xi_0, \quad (3.2.8)$$

и третья

$$d\zeta^{11}(t) = S_1\zeta^{11}dt + L_{11}^{-1}Q_1NdW, \quad (3.2.9)$$

$$\zeta^{11}(0) = P_1\xi_1, \quad (3.2.10)$$

где случайные процессы $\zeta^0 = (I - P_0 - P_1)\zeta$, $\zeta^{10} = P_0\zeta$, $\zeta^{11} = P_1\zeta$, а случайные величины $\xi_0, \xi_1 \in \mathbf{L}_2(\Omega, \mathfrak{Z})$, где P_0, P_1 – относительно спектральные проекторы. В силу того, что оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$, случайное воздействие NdW входит в состав только (3.1.7) и (3.1.9). Уравнение (3.2.6) является однородным, поэтому имеет единственное, причем п.н. тривиальное, решение.

Необходимым условием для существования единственного решения задачи (3.2.7), (3.2.8) ((3.2.9), (3.2.10)) является принадлежность п.н. пространству $\mathbf{L}_2(\Omega, \mathfrak{Z}^{10})$ ($\mathbf{L}_2(\Omega, \mathfrak{Z}^{11})$) начального значения $\xi_0, (\xi_1)$ что и обеспечивает действие проектора в (3.2.8) ((3.2.10)).

Обратимся к задаче (3.2.7), (3.2.8) ((3.2.9), (3.2.10)) и перейдем к стохастическому интегро-дифференциальному уравнению

$$\zeta^{10}(t) - \zeta^{10}(\tau_0) = \int_{\tau_0}^t S_0\zeta dt + \int_{\tau_0}^t L_{10}^{-1}Q_0NdW, \quad (3.2.11)$$

$$\left(\zeta^{11}(t) - \zeta^{11}(\tau_1) = \int_{\tau_1}^t S_1\zeta dt + \int_{\tau_1}^t L_{11}^{-1}Q_1NdW \right), \quad (3.2.12)$$

Тогда единственным формальным решением будет случайный процесс вида (3.2.5) •

Покажем разрешимость задачи (3.2.1), (3.2.2) (3.0.1), (3.0.2)

Обозначим через $\{\nu_k\}$ собственные значения оператора L , занумерованные по неубыванию с учетом их кратности, а через $\{\varphi_k\}$ – соответствующие им ортонормированные в смысле $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ функции.

Выберем $h_1, h_2 \in \mathbb{R}_+$ такие, что $h_1 < h_2$ и множества $\sigma_0^L(M) = \{\nu_\ell \in \sigma^L(M) : |\nu_\ell| \leq h_1\}$, $\sigma_{10}^L(M) = \{\nu_\ell \in \sigma^L(M) : h_1 < |\nu_\ell| \leq h_2\}$, $\sigma_{11}^L(M) = \{\nu_\ell \in \sigma^L(M) : h_2 < |\nu_\ell|\}$ будут не пустыми, причем $\sigma_0^L(M) \cap \sigma_{10}^L(M) \cap \sigma_{11}^L(M) = \emptyset$.

Построим проекторы

$$P_0 = \mathbb{I} - \sum_{h_1 < |\nu_\ell| \leq h_2} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

$$P_1 = \mathbb{I} - \sum_{h_2 < |\nu_\ell|} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

$$Q_0 = \mathbb{I} - \sum_{h_1 < |\nu_\ell| \leq h_2} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

$$Q_1 = \mathbb{I} - \sum_{h_2 < |\nu_\ell|} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

$$U_0^t = \sum_{\nu_\ell \in \sigma_{10}^L(M)} e^{\nu_\ell t} (\cdot, \varphi_k) \varphi_k, \quad U_1^t = \sum_{\nu_\ell \in \sigma_{11}^L(M)} e^{\nu_\ell t} (\cdot, \varphi_k) \varphi_k. \quad (3.2.13)$$

Проекторы P_0 и P_1 (Q_0 и Q_1) определены на пространстве $\mathfrak{Z}$ ($\mathfrak{F}$).

В качестве оператора K возьмем оператор Грина D^{-1} . Его собственные значения $\lambda_k = \nu_k^{-1}$ занумерованные по невозрастанию сходятся к точке нуль.

Будем предполагать, что

$$\nu_k \sim k^2 \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad (3.2.14)$$

тогда K – ядерный оператор.

Наконец, построим K -винеровский процесс

$$W(t) \equiv W(t, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} ' \sqrt{\lambda_k} \beta_k(t) \varphi_k, \quad (3.2.15)$$

где штрих означает то же самое, что суммирование проводится по тем номерам k , при которых $\nu_k \in \sigma_{10}^L \cup \sigma_{11}^L$.

Теорема 3.2.2. Пусть $\beta, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. W – $\mathfrak{F}^1$ -значный K -винеровский процесс, оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$. Тогда для любых $\mathfrak{Z}$ -значных гауссовых случайных величин ξ_0 и $\xi_1 \in \mathbf{L}_2$ (независимых друг от друга и от винеровского K -процесса W) существует единственное решение задачи (3.2.1), (3.2.2), (3.0.1), (3.0.2).

Доказательство. Отметим, что $\xi_{0k}, \xi_{1k} \in \mathbf{L}_2$ попарно независимые гауссовы случайные величины, такие что ряды

$$\zeta_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_{0k} \varphi_k, \quad \zeta_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_{1k} \varphi_k, \quad (3.2.16)$$

сходятся. (Например, $D\xi_{0k}, D\xi_{1k} \leq C_j, k \in \mathbf{N}, j = \overline{0, m}$). В силу леммы 3.1.1 и теоремы 3.1.1 выполняются условия данной теоремы.

По построению пространство $\mathbf{L}_2(G)$ является конечной прямой суммой попарно ортогональных подпространств. Обозначим через Ω_j ортопроектор на j -ое подпространство. Так вот, $W_j = \Pi_j W$, где $W = W(t)$.

Таким образом, учитывая (3.2.14), (3.2.15) и справедливость теоремы 3.2.1, теорема доказана. •

3.3. Алгоритм численного метода

Будем искать приближенное решение в виде

$$\tilde{\zeta}(x, t) = \left(\tilde{\zeta}_1(x, t), \tilde{\zeta}_2(x, t), \dots, \tilde{\zeta}_n(x, t) \right), \quad (3.3.1)$$

где $\tilde{\zeta}_j(x, t)$ – приближенное решение на j -ом ребре графа вида

$$\tilde{\zeta}_j(x, t) = \zeta_j^N(x, t) = \sum_{k=1}^N a_k(t) \varphi_k^j(x), \quad (3.3.2)$$

здесь $\{\varphi_k\} = \{\varphi_k^1, \varphi_k^2, \dots, \varphi_k^N\}$ – соответствующие им ортонормированные относительно скалярного произведения из $\mathbf{L}_2(G)$.

Затем, или в уравнение Осколкова (3.1.6), или в уравнение Хоффа (3.2.5) подставляем представление (3.3.2), после чего скалярно умножаем на собственные функции будем получать систему уравнений. Каждое уравнение в ней будет содержать только один неизвестный галеркинский коэффициент, поэтому выражение (3.3.2) является частичной суммой ряда, сходимость которой обеспечивает сходимость приближенного решения к точному.

В силу того, что линиаризированные модели Осколкова и Хоффа рассматриваются на графе, построим описание алгоритма численного решения в табличном виде. Такой вид позволит выделить общие шаги и показать особенности алгоритма при численном исследовании обеих моделей на графе.

	Модель Осколкова	Модель Хоффа
<i>Шаг 1.</i>	Задаются: N – количество слагаемых галеркинской суммы; l_j, d_j – соответственно длинна и площадь поперечного сечения ребер графа (равные для всех ребер), ω – параметр внешнего воздействия, случайная величина A	
	λ_j, β_j – коэффициенты линейного уравнения Осколкова	λ_j, β_j – коэффициенты линейного уравнения Хоффа
	коэффициенты берутся равными значениями для всех ребер графа	
<i>Шаг 2.</i>	Задаются начальные условия	
	Шоултера–Сидорова, функция $\xi_0(x)$	$\xi_0(x), \quad \xi_1(x)$ – функции начально-конечного условия
	коэффициенты которой(ых) являются нормально распределенными случайными величинами	

Шаг 3. Генерация приближенных решений

$$\tilde{\zeta}_j(t, x) = \sum_{k=1}^N a_k(t) \varphi_k^j(x), \quad (3.3.1)$$

и подстановка (3.3.1) уравнение.

Шаг 4. Используя полученное на предыдущем шаге дифференциальное уравнение относительно неизвестных $a_k(t)$ будем умножать его скалярно на функции $\varphi_k^j(x)$, $k = 1, \dots, N$, и получим систему дифференциальных уравнений.

<i>Шаг 5.</i>	Генерируются случайные величины ξ_{0k}	Генерируются случайные величины ξ_{0k}, ξ_{1k}
---------------	--	--

<i>Шаг 6.</i>	Если для номеров k_0 , при которых параметр λ совпадает с собственным значением ν_{k_0} оператора	$-\Delta$	Δ
	то составляется и решается система соответствующих алгебраических уравнений		

<i>Шаг 7.</i>	Остальные уравнения образуют систему дифференциальных уравнений	Система дифференциальных уравнений разбивается на две. В одну (другую) включаются дифференциальные уравнения, чьи номера совпадают с номерами собственных значений, относящихся
---------------	---	---

<i>Шаг 8.</i>	Решается система дифференциальных уравнений с начальными условиями Шоултера–Сидорова	к $\sigma_{10}^L(M)$ ($\sigma_{11}^L(M)$) Первая (вторая) система дифференциальных уравнений решается с начальными (конечными) условиями.
---------------	--	--

3.4. Описание программной реализации алгоритма и результаты вычислительных экспериментов

Представим алгоритм программы, реализующей проекционный метод Галеркина для численного исследования и обработки информации линейных стохастических уравнений соболевского типа с относительно ограниченными операторами на графе. Программа написана в прикладном пакете Maple 2017, эксплуатируется на персональном компьютере платформы Intel (*UX64*), работает под управлением Microsoft Windows. Используемый численный метод решения описан в п. 3.3.

На рисунке 3.1 представлена блок-схема программы при реализации более общей – начально-конечной – задачи для уравнения Хоффа. Программный комплекс содержит 4 модуля:

- выбор условия – начального или начально-конечного;
- ввод данных – параметров уравнения, соотношений величин в уравнении, генерация случайных величин, параметров внешнего воздействия, при этом используется встроенных функций **stats[random, normald[0, ss]]**;
- нахождение собственных значений и собственных функций;
- отбор уравнений в соответствующие подсистемы с использованием вложенных циклов **for j from 0 to K do do end do** и логических функций;
- процедура решения с использованием встроенной функции **dsolve**;

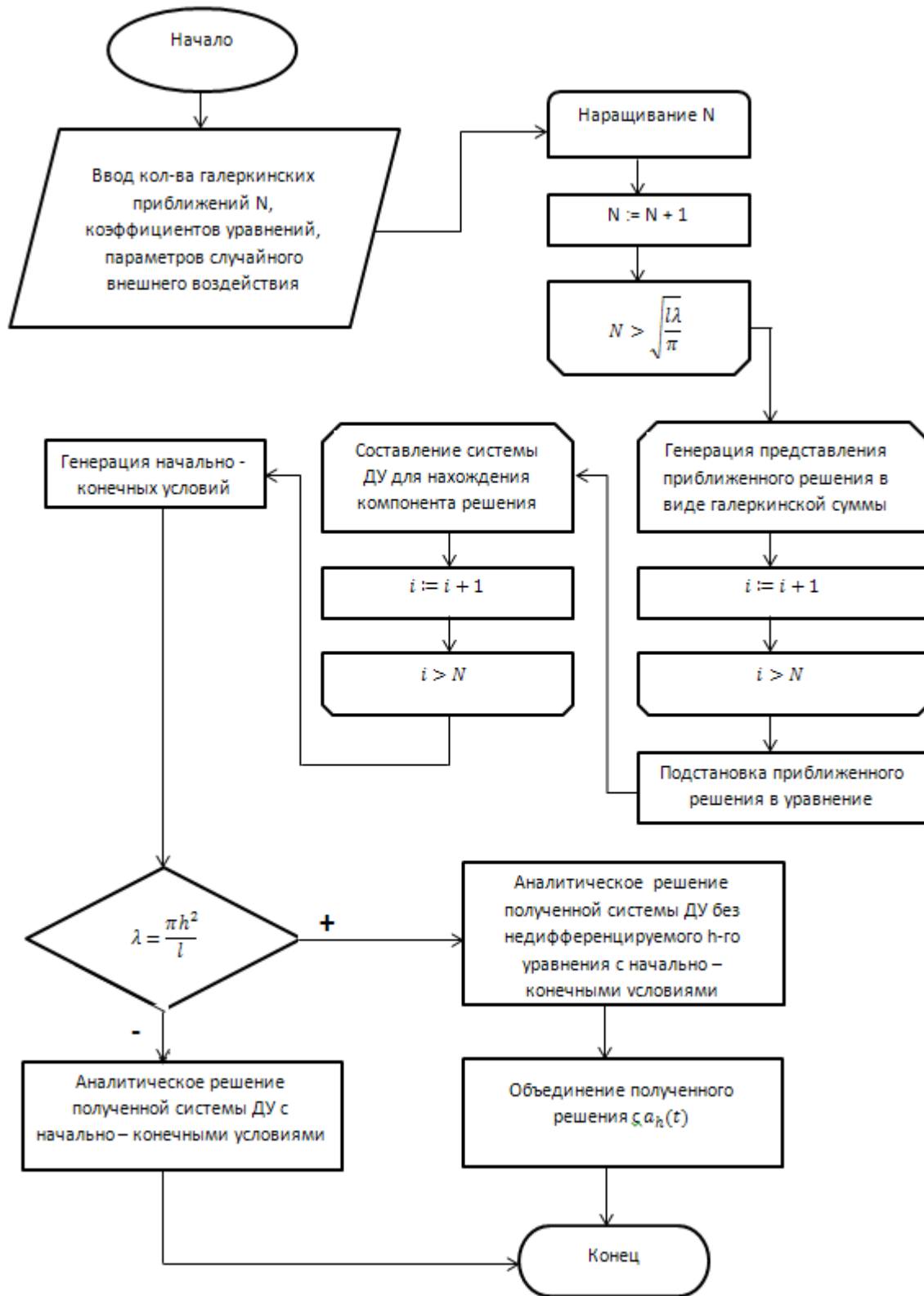


Рис. 3.1. Блок-схема процедуры программы, реализующей численный метод исследования линейризованной модели Хоффа с начально-конечным условием на графе.

–вывод решения и графическое представление результатов с использованием процедур `plotsetup(png, plotoutput, plotoptions); display`, `plotsetup(default), plot, plot3d, animate(plot3d)`.

Модель Осколкова

Рассмотрим пятиреберный граф с шестью вершинами, изображенный на рисунке 3.1, $l_j = 2\pi$, $d_j = 1$, $j = 1, 2, \dots, 5$.

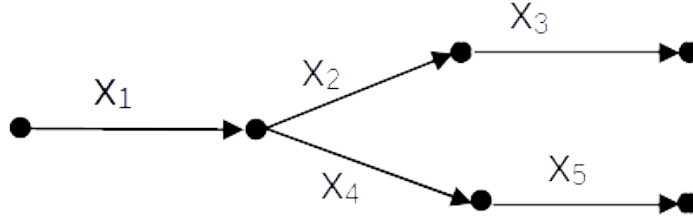


Рис. 3.2. Граф для вычислительного эксперимента VE9 .

Для такого графа запишем условия непрерывности (3.0.1)

$$\begin{aligned}\zeta_1(\pi) - \zeta_2(0) &= 0, \\ \zeta_1(\pi) - \zeta_4(0) &= 0, \\ \zeta_2(\pi) - \zeta_3(0) &= 0, \\ \zeta_4(\pi) - \zeta_5(0) &= 0\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

и условие баланса потоков (3.0.2)

$$\begin{aligned}\zeta_{1x}(0) &= 0, \\ \zeta_{1x}(2\pi) - \zeta_{2x}(0) - \zeta_{3x}(0) &= 0, \\ \zeta_{2x}(2\pi) - \zeta_{3x}(0) &= 0, \\ \zeta_{4x}(2\pi) - \zeta_{5x}(0) &= 0, \\ \zeta_{3x}(\pi) &= 0, \\ \zeta_{5x}(\pi) &= 0.\end{aligned}\tag{3.4.2}$$

При заданных коэффициентах $\beta = 0, 4$, $\lambda = 25$ уравнения Осколкова будут заданы на ребрах графа

$$25d\zeta_j + d\zeta_{jxx} = 0, 4\zeta_{jxx}dt + NdW_j, \quad j = 1, 2, \dots, 5.\tag{3.4.3}$$

Решения $\zeta_j(t, x)$, $j = 1, 2, \dots, 5$ данной задачи будем искать в виде галеркинских сумм, взяв 6 слагаемых

$$\zeta_j(t, x) = \sum_{k=1}^6 a_k(t) \varphi_{j,k}(x), \quad j = 1, 2, \dots, 5.$$

Решив задачу Штурма – Лиувилля получим

$$\begin{aligned} \lambda_k &= k^2, \quad \varphi_{1,k}(x) = \sqrt{\frac{2}{15\pi}} \cos(kx), \\ \varphi_{2,k}(x) &= \sqrt{\frac{1}{30\pi}} (\cos(kx) + \cos(k(x - 4\pi)) + \cos(k(x - 8\pi))), \\ \varphi_{3,k}(x) &= \sqrt{\frac{1}{120\pi}} (\cos(k(x + 6\pi)) + \cos(k(x - 10\pi)) + 2 \cos(k(x - 2\pi)) + \\ &\quad + \cos(k(x + 2\pi)) + \cos(k(x - 6\pi))), \\ \varphi_{4,k}(x) &= \sqrt{\frac{1}{30\pi}} (\cos(k(x - 2\pi)) + \cos(k(x - 6\pi))), \\ \varphi_{5,k}(x) &= \sqrt{\frac{1}{30\pi}} (\cos(kx) + \cos(k(x - 4\pi))). \end{aligned}$$

Отметим, что $\lambda = \lambda_5$.

В рамках исследования модели будем полагать, что система подвергается одному воздействию, поэтому все случайные величины являются здесь нормально распределенными гауссовыми величинами $\sim N(0; 1, 25)$ Используя условие Шоултера–Сидорова, получим представление для начальных значений рассматривается следующим образом

$$P(\zeta(0) - \xi_0) = \sum_{k: \mu_k \in \sigma^L(M)} \langle \zeta(0, x) - \xi_0(x), \varphi_k \rangle \varphi_k = 0, \quad (3.4.4)$$

причем $\xi_0 = (\xi_{1,0}, \xi_{2,0}, \xi_{3,0}, \xi_{4,0}, \xi_{5,0})$ в соответствии с количеством ребер $j = 5$. Генерация случайных величин, входящих в состав разложения для начальных функций, дала следующие результаты:

$$\begin{aligned} \xi_{1,0_1} &= -3,27506776941, \quad \xi_{1,0_2} = -1,36125225452, \quad \xi_{1,0_3} = -0,0374554524740, \\ \xi_{1,0_4} &= -1,62043139820, \quad \xi_{1,0_6} = -0,890328852651; \\ \xi_{2,0_1} &= 1,60281626452, \quad \xi_{2,0_2} = 0,408184155311, \quad \xi_{2,0_3} = 0,265945587541, \\ \xi_{2,0_4} &= 0,856971714096, \quad \xi_{2,0_6} = -1,00930692980; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{3,0_1} &= 0,958534529949, \quad \xi_{3,0_2} = 0,120316052745, \quad \xi_{3,0_3} = 1,02490924543, \\
\xi_{3,0_4} &= -0,370702322849, \quad \xi_{3,0_6} = 0,393900792945; \\
\xi_{4,0_1} &= -0,494744421722, \quad \xi_{4,0_2} = 0,00570200585236, \quad \xi_{4,0_3} = 1,02337140616, \\
\xi_{4,0_4} &= -0,190279173650, \quad \xi_{4,0_6} = -0,769749348792; \\
\xi_{5,0_1} &= 0,980319608250, \quad \xi_{5,0_2} = -1,689598303, \quad \xi_{5,0_3} = -0,967844689800, \\
\xi_{5,0_4} &= -1,91954474140, \quad \xi_{5,0_6} = -1,70725764039.
\end{aligned}$$

Внешнее воздействие на каждом ребре представимо разложением

$$\begin{aligned}
&A \sin(wt) \phi_1 \varphi_1(x) + A \sin(wt) \phi_2 \varphi_2(x) + A \sin(wt) \phi_3 \varphi_3(x) + \\
&-A \sin(wt) \phi_1 \varphi_4(x) + A \sin(wt) \varphi_6(x)
\end{aligned}$$

при $A = 1.59459504258$, $w = 5$, $\phi_k = (\phi_{1_k}, \phi_{2_k}, \phi_{3_k}, \phi_{4_k}, \phi_{5_k})$ в соответствии с количеством ребер $j = 5$. Генерация случайных величин, входящих в состав разложения для случайного внешнего воздействия дала следующие результаты:

$$\begin{aligned}
\phi_{1_1} &= 0,163047495059, \quad \phi_{1_2} = -1,63591146136, \quad \phi_{1_3} = -0,684145716945, \\
\phi_{1_4} &= 1,70539232724, \quad \phi_{1_5} = 1,62659212805; \\
\phi_{2_1} &= -1,64638499412, \quad \phi_{2_2} = -0,0658169964062, \quad \phi_{2_3} = 0,429340925424, \\
\phi_{2_4} &= -2,85293688880, \quad \phi_{2_5} = -0,390588206061; \\
\phi_{3_1} &= -1,39574691274, \quad \phi_{3_2} = -1,88806707585, \quad \phi_{3_3} = 0,954004456482, \\
\phi_{3_4} &= 0,899288864784, \quad \phi_{3_5} = -0,488478751168; \\
\phi_{4_1} &= 1,88421514070, \quad \phi_{4_2} = -0,243309185254, \quad \phi_{4_3} = -0,107823473285, \\
\phi_{4_4} &= 0,531389289132, \quad \phi_{4_5} = -2,06626981338; \\
\phi_{5_1} &= -0,735193065646, \quad \phi_{5_2} = -1,44835524134, \quad \phi_{5_3} = 0,247186393888, \\
\phi_{5_4} &= 3,64531828196, \quad \phi_{5_5} = -0,589661784796.
\end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений для нахождения $a_k(t)$ содержит 5 уравнений, алгебраическое уравнение получено одно – пятое (так как пятое

собственное значение равно λ).

$$\begin{aligned}
& 50,0000000000 \frac{da_1(t)}{dt} + \\
& + (6,94399999180 \cos^4(t) - 5,20799999385 \cos^2(t) + 0,433999999488) \sin(t) = 0, \\
& 26,0000000001 \frac{da_2(t)}{dt} + 0.399999999999 a_2(t) + \\
& + (26,2748953373 \cos^4(t) - 19,7061715030 \cos^2(t) + 1,64218095857) \sin(t) = 0, \\
& 29,0000000001 \frac{da_3(t)}{dt} + 1,599999999999 a_3(t) + \\
& + (-8,73495968431 \cos^4(t) + 6,55121976324 \cos^2(t) - 0,545934980270) \sin(t) = 0, \\
& 33,9999999999 \frac{da_4(t)}{dt} + 1,599999999999 a_3(t) + \\
& + (-5,05641187458 \cos^4(t) + 3,79230890600 \cos^2(t) - 0,316025742165) \sin(t) = 0, \\
& a_5(t) = 0, \\
& 41,0000000000 \frac{da_6(t)}{dt} + 6,400000000000 a_6(t) + \\
& + (2,61619669064 \cos^4(t) - 1,96214751799 \cos^2(t) + 0,163512293166) \sin(t) = 0.
\end{aligned}$$

Получены следующие начальные значения для решения задачи Коши

$$\begin{aligned}
a_1(0) &= -0,392191341073, & a_2(0) &= 0,116407043162 \\
a_3(0) &= 0,374812563896, & a_4(0) &= -0,437183729135, \\
a_5(0) &= 0, & a_6(0) &= -0,532669260320.
\end{aligned}$$

Получили решения

$$\begin{aligned}
a_1(t) &= 1,00000000000 \cdot 10^{-14} \cos(t) + 0,001735999997 \cos(5t) - 0,393927341071, \\
a_2(t) &= -6,72917652624 \cdot 10^{-13} \cos(t) - 5,63788659793 \cdot 10^{-12} \sin(t) - \\
& - 8,01260979327 \cdot 10^{-14} \cos(3t) + 4,10903066319 \cdot 10^{-16} \sin(3t) + \\
& + 0,0126320416265 \cos(5t) - 0,388678203890 \cdot 10^{-4} \sin(5t) + \\
& + 0,1103775001536 e^{-0.0153846153845t},
\end{aligned}$$

$$a_3(t) = 4,29726397647 \cdot 10^{-14} \cos(t) - 2,37090426285 \cdot 10^{-15} \sin(t) + \\ - 2,15444373418 \cdot 10^{-14} \cos(3t) - 3,96219537316 \cdot 10^{-16} \sin(3t) - \\ - 0,376461045118 \cdot 10^{-2} \cos(5t) + 0,415405291161 \cdot 10^{-4} \sin(5t) + \\ + 0,378577174347 e^{-0,055172413782t},$$

$$a_4(t) = 3,63571037504 \cdot 10^{-13} \cos(t) - 3,84957569124 \cdot 10^{-14} \sin(t) + \\ + 5,88813426710 \cdot 10^{-13} \cos(3t) - 5,61584185793 \cdot 10^{-15} \sin(3t) - \\ - 0,185814168344 \cdot 10^{-2} \cos(5t) + 0,393488827082 \cdot 10^{-4} \sin(5t) + \\ - 0,435325587452 e^{-0,105882352941t},$$

$$a_5(t) = 0, \quad a_6(t) = -3,57151153337 \cdot 10^{-14} \cos(t) + 5,575042393557 \cdot 10^{-15} \sin(t) - \\ - 2,02703237187 \cdot 10^{-14} \cos(3t) + 1,05471603089 \cdot 10^{-15} \sin(3t) + \\ + 0,796844291651 \cdot 10^{-3} \cos(5t) - 0,248770900808 \cdot 10^{-4} \sin(5t) + \\ - 0,533466104612 e^{-0,156097560976t}.$$

Затем находится приближенное решение задачи Шоултера – Сидорова на указанном графе, результат которой (вычислительный эксперимент 9) графически представлен на рисунках 3.2 – 3.4 (результат VE3) в виде двумерных графиков в различные моменты времени t^* . Ось абсцисс отражает значения переменной x и отражает длину ребер графа. Ось ординат отражает значения функции $\tilde{\zeta}_j(x, t^*)$ – динамику давления вязкоупругой несжимаемой жидкости, движущейся в j -той секции трубопровода. Цветами показаны решения на различных ребрах графа:

$\tilde{\zeta}_1(x, t^*)$ – синий,

$\tilde{\zeta}_2(x, t^*)$ – зеленый,

$\tilde{\zeta}_3(x, t^*)$ – красный,

$\tilde{\zeta}_4(x, t^*)$ – черный,

$\tilde{\zeta}_5(x, t^*)$ – маджента.

Последовательность графиков отражает развитие процесса во времени с учетом структуры графа.

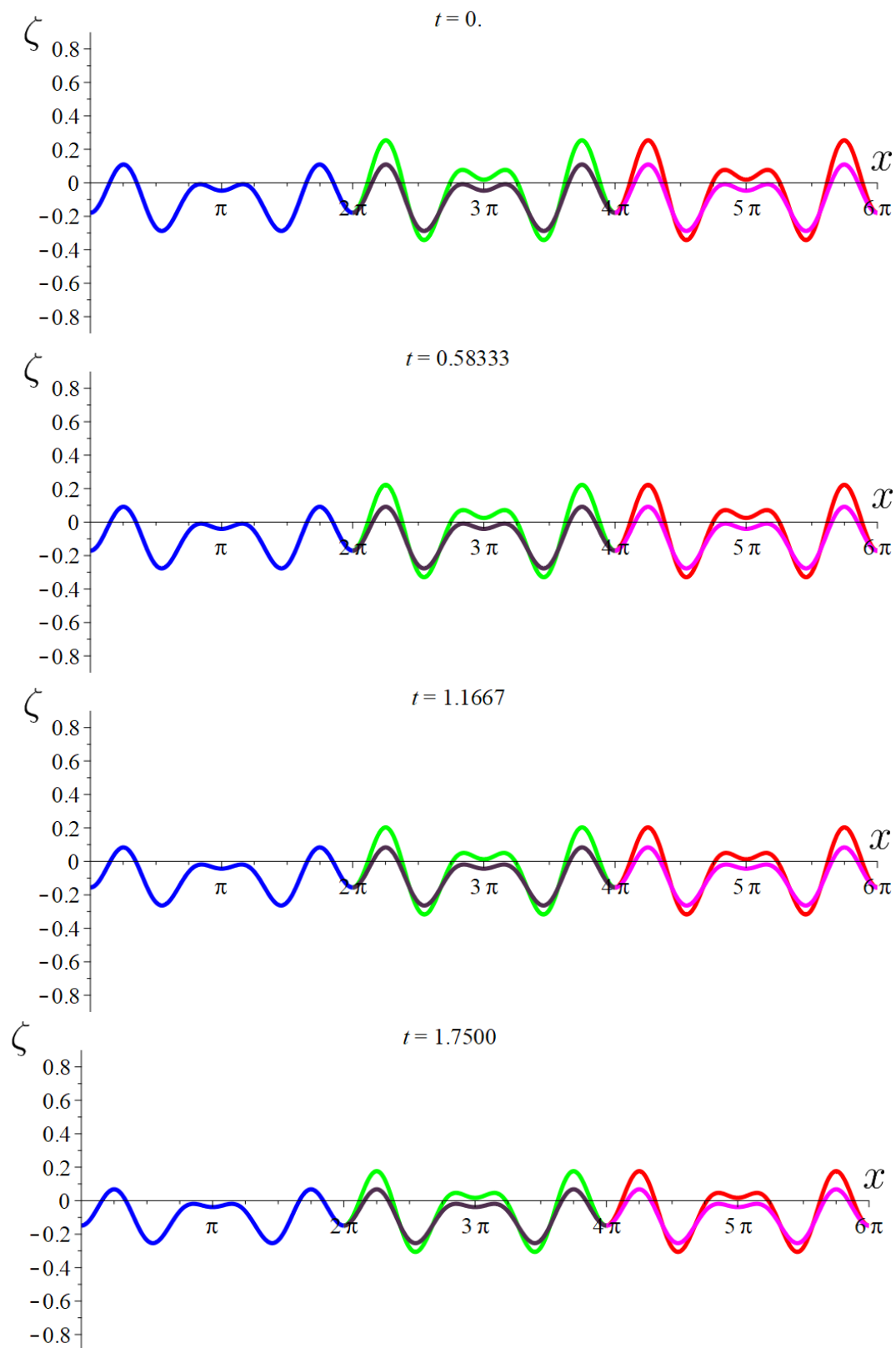


Рис. 3.2. Результаты вычислительного эксперимента VE9. Блок 1

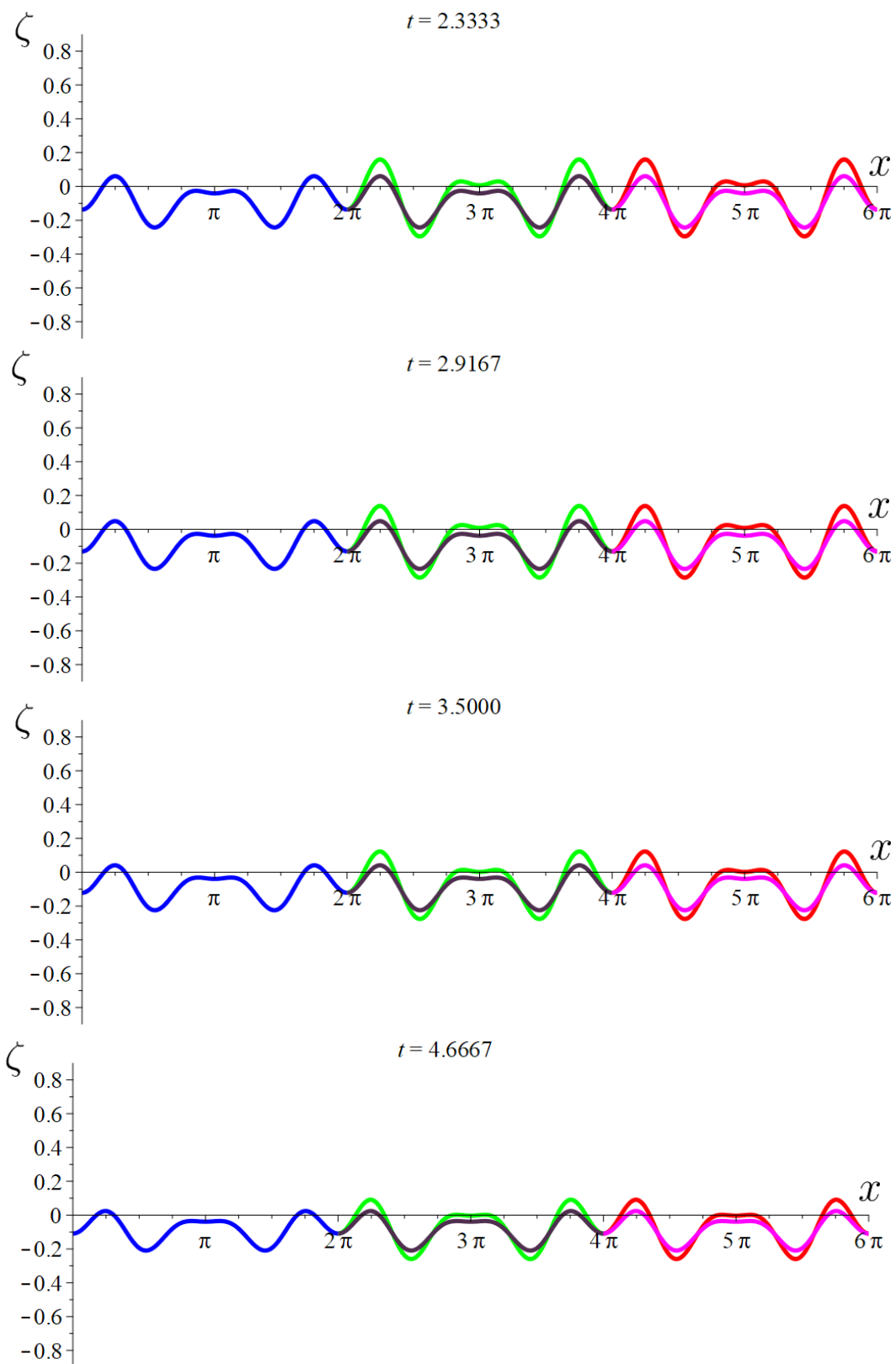


Рис. 3.3. Результаты вычислительного эксперимента VE9. Блок 2

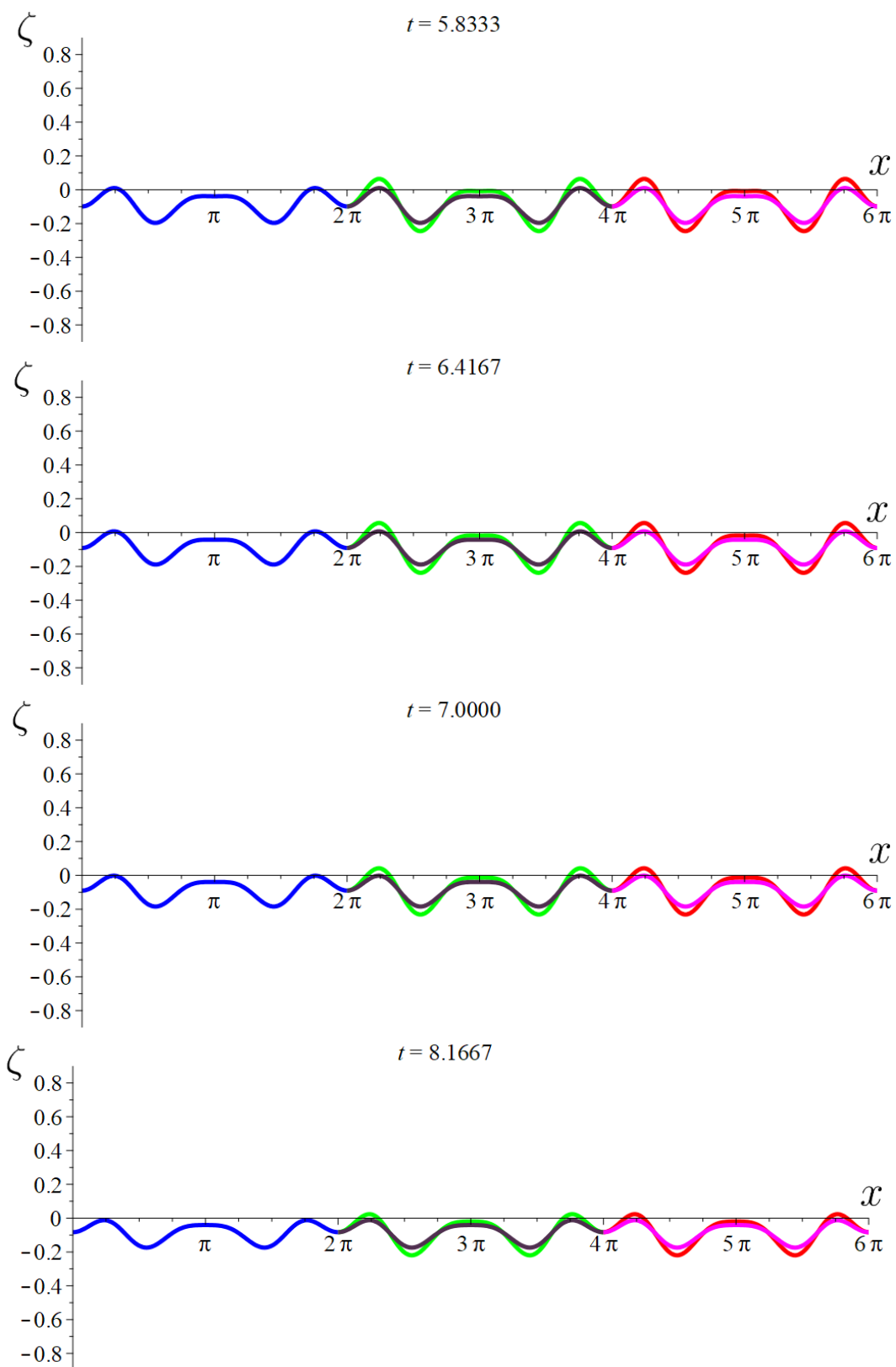


Рис. 3.4. Результаты вычислительного эксперимента VE9. Блок 3

Модель Хоффа

Рассмотрим пятиреберный граф с шестью вершинами, изображенный на рисунке 3.5, длины всех ребер различны: $l_1 = \pi$, $l_2 = 2\pi$, $l_3 = 3\pi$, $l_4 = 4\pi$, $l_5 = 5\pi$, а диаметр сечений выбран один для все ребер $d_j = 1$, $j = 1, 2, \dots, 5$.

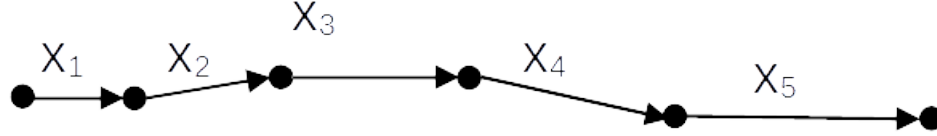


Рис. 3.5. Граф для вычислительного эксперимента VE10 .

Для такого графа запишем условия непрерывности (3.0.1)

$$\begin{aligned} \zeta_1(l_1) - \zeta_2(0) &= 0, \\ \zeta_2(l_2) - \zeta_3(0) &= 0, \\ \zeta_2(l_3) - \zeta_3(0) &= 0, \\ \zeta_4(l_4) - \zeta_5(0) &= 0 \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

и условие баланса потоков (3.0.2)

$$\begin{aligned} \zeta_{1x}(0) &= 0, \\ \zeta_{1x}(l_1) - \zeta_{2x}(0) &= 0, \\ \zeta_{2x}(l_2) - \zeta_{3x}(0) &= 0, \\ \zeta_{3x}(l_3) - \zeta_{4x}(0) &= 0, \\ \zeta_{4x}(l_4) - \zeta_{5x}(0) &= 0, \\ \zeta_{5x}(l_5) &= 0. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

При заданных коэффициентах $\beta = 0,15$, $\lambda = 1,44$ уравнения Хоффа будут заданы на ребрах графа

$$1,44d\zeta_j + d\zeta_{jxx} = 0,15\zeta_j dt + NdW_j, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \tag{3.4.7}$$

Решения $\zeta_j(t, x)$, $j = 1, 2, \dots, 5$ данной задачи будем искать в виде галеркинских сумм, взяв 7 слагаемых

$$\tilde{\zeta}_j(t, x) = \sum_{k=1}^6 a_k(t) \varphi_{j,k}(x), \quad j = 1, 2, \dots, 5.$$

Решив задачу Штурма – Лиувилля получим

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{k^2}{25}, \quad \varphi_{1,k}(x) = \sqrt{\frac{1}{15\pi}} + \sqrt{\frac{2}{15\pi}} \cos\left(\frac{k}{15}x\right), \\ \varphi_{2,k}(x) &= \sqrt{\frac{1}{15\pi}} \cos\left(\frac{k}{15}(x + \pi)\right), \\ \varphi_{3,k}(x) &= \sqrt{\frac{1}{15\pi}} \cos\left(\frac{k}{15}(x + 3\pi)\right), \\ \varphi_{4,k}(x) &= \sqrt{\frac{1}{15\pi}} \cos\left(\frac{k}{15}(x + 6\pi)\right), \\ \varphi_{5,k}(x) &= \sqrt{\frac{1}{15\pi}} \cos\left(\frac{k}{15}(x + 10\pi)\right), \end{aligned}$$

Отметим, что $\lambda = \lambda_6$. Таким образом $\lambda_6 \in \sigma_0^L(M)$. Будем считать, следуя п.3.2, что $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \sigma_{10}^L(M)$ и $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_7 \in \sigma_{11}^L(M)$.

В рамках исследования модели будем полагать, что система подвергается одному воздействию, поэтому все случайные величины являются здесь нормально распределенными гауссовыми величинами $\sim N(0; 0, 6)$ Используя начально-конечные условия, получим представление для начальных значений рассматривается следующим образом

$$P_0(\zeta(0) - \xi_0) = \sum_{k: \mu_k \in \sigma_{10}^L(M)} \langle \zeta(0, x) - \xi_0(x), \varphi_k \rangle \varphi_k = 0, \quad (3.4.8)$$

$$P_1(\zeta(0) - \xi_1) = \sum_{k: \lambda_k \in \sigma_{11}^L(M)} \langle \zeta(\tau, x) - \xi_1(x), \varphi_k \rangle \varphi_k = 0, \quad (3.4.9)$$

причем $\xi_\tau = (\xi_{1,0}, \xi_{2,0}, \xi_{3,0}, \xi_{4,0}, \xi_{5,0})$ и $\xi_1 = (\xi_{1,1}, \xi_{2,1}, \xi_{3,1}, \xi_{4,1}, \xi_{5,1})$ в соответствии с количеством ребер $j = 5$.

Генерация случайных величин, входящих в состав разложения для функций начального условия, дала следующие результаты:

$$\begin{aligned}\xi_{1,0_1} &= -1,57203252932, & \xi_{1,0_2} &= -0,653401082172, & \xi_{1,0_3} &= -0,0179786171875, \\ \xi_{2,0_1} &= 0,769351806972, & \xi_{2,0_2} &= 0,195928394549, & \xi_{2,0_3} &= 0,127653882020, \\ \xi_{3,0_1} &= 0,460096574375, & \xi_{3,0_2} &= 0,0577517053175, & \xi_{3,0_3} &= 0,491956437808, \\ \xi_{4,0_1} &= -0,237477322427, & \xi_{4,0_2} &= 0,00273696280913, & \xi_{4,0_3} &= 0,491218274956, \\ \xi_{5,0_1} &= 0,470553411960, & \xi_{5,0_2} &= 0,500317731453, & \xi_{5,0_3} &= -0,464565451104,\end{aligned}$$

Генерация случайных величин, входящих в состав разложения для начальных функций конечного условия, дала следующие результаты:

$$\begin{aligned}\xi_{1,1_4} &= -0,328389944134, & \xi_{1,1_5} &= 0,818588317074; & \xi_{1,1_7} &= 0,780764221464; \\ \xi_{2,1_4} &= 0,206083644203, & \xi_{2,1_5} &= -1,36940970662; & \xi_{2,1_7} &= -0,187482338909; \\ \xi_{3,1_4} &= 0,457922139112, & \xi_{3,1_5} &= 0,431658655096; & \xi_{3,1_7} &= -0,234469800560; \\ \xi_{4,1_4} &= -0,0517552671768, & \xi_{4,1_5} &= 0,255066858784; & \xi_{4,1_7} &= -0,991809510420; \\ \xi_{5,1_4} &= 0,118649469066, & \xi_{5,1_5} &= 1,74975277534; & \xi_{5,1_7} &= -0,283037656702;\end{aligned}$$

Внешнее воздействие на каждом ребре представимо разложением

$$\begin{aligned}NdW_j &= A \sin(wt) \phi_1 \varphi_1(x) + A \sin(wt) \phi_2 \varphi_2(x) + A \sin(wt) \phi_3 \varphi_3(x) + \\ &\quad - A \sin(wt) \phi_4 \varphi_4(x) + A \sin(wt) \varphi_5(x) + A \sin(wt) \varphi_7(x)\end{aligned}$$

при $A = 0,765405620436$, $w = \frac{1}{6}$, $\phi_k = (\phi_{1_k}, \phi_{2_k}, \phi_{3_k}, \phi_{4_k}, \phi_{5_k})$ в соответствии с количеством ребер $j = 5$.

Генерация случайных величин, входящих в состав разложения для случайного внешнего воздействия дала следующие результаты:

$$\begin{aligned}\phi_{1_1} &= 0,224694803326, & \phi_{1_2} &= 1,36697483457, & \phi_{1_3} &= -0,0273783663649, \\ \phi_{1_4} &= 0,849889651584, & \phi_{1_5} &= -0,351885418568; & \phi_{1_7} &= 0,0782627976282; \\ \phi_{2_1} &= 0,0873526354260, & \phi_{2_2} &= -0,931286037978, & \phi_{2_3} &= -0,101726672484,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{2_4} &= -0,298219687394, \quad \phi_{2_5} = -0,534486794825; \quad \phi_{2_7} = -0,0315921582750; \\
\phi_{3_1} &= -0,221271726195, \quad \phi_{3_2} = 0,790312224696, \quad \phi_{3_3} = 0,688775855652, \\
\phi_{3_4} &= 0,0306816716578, \quad \phi_{3_5} = -0,704180010870; \quad \phi_{2_7} = -0,669958518114; \\
\phi_{4_1} &= 0,472277017184, \quad \phi_{4_2} = -0,243309185254, \quad \phi_{4_3} = 0,0428975148832, \\
\phi_{4_4} &= -0,501215424649, \quad \phi_{4_5} = 0,297270173974; \quad \phi_{4_7} = 0,904423267536 \\
\phi_{5_1} &= 0,0272506222977, \quad \phi_{5_2} = 0,248945857216, \quad \phi_{5_3} = -0,0497990056170, \\
\phi_{5_4} &= -0,276453812802, \quad \phi_{5_5} = 0,546380097573, \quad \phi_{5_7} = -0,352892671510.
\end{aligned}$$

Первая система дифференциальных уравнений с начальными условиями содержит три уравнения и три начальных условия. Вторая система дифференциальных уравнений содержит три уравнения и три конечных условия при $\tau = 10$. Алгебраическое уравнение получено одно – шестое (так как шестое собственное значение равно λ).

Первая система

$$\begin{aligned}
&\frac{da_1(t)}{dt} - 0,15a_1(t) - 0,06329635798 \sin 0,16666667t = 0 \\
&0,995555555556 \frac{da_2(t)}{dt} - 0,15a_2(t) - \\
&-8,1716891549 \cdot 10^{-16} \cos(0,16666667t) - 0,27851468013 \sin(0,16666667t) = 0, \\
&0,982222222222 \frac{da_3(t)}{dt} - 0,15a_3(t) + \\
&-2,0429222887 \cdot 10^{-15} \cos(0,16666667t) - 0,044257363913 \sin(0,16666667t) = 0,
\end{aligned}$$

с условиями

$$a_1(0) = -0,37641056168, \quad a_2(0) = 0,016411436175, \quad a_3(0) = 0,086205048568.$$

Вторая система

$$\begin{aligned}
&0,96 \frac{da_4(t)}{dt} - 0,15a_4(t) - \\
&-1,0910128482 \cdot 10^{-15} \cos 0,16666667t + 0,24853682937 \sin 0,16666667t = 0, \\
&0,928888888888 \frac{da_5(t)}{dt} - 0,15a_5(t) + \\
&+4,1175177912 \cdot 10^{-16} \cos 0,16666667t - 0,30034281017 \sin 0,16666667t = 0,
\end{aligned}$$

$$0,888888888888 \frac{da_7(t)}{dt} - 0,15a_7(t) - \\ -1,1013640245 \cdot 10^{-16} \cos 0,166666667t - 0,19798110151 \sin 0,166666667t = 0,$$

с условиями

$$a_4(10) = -0,74869454124, \quad a_5(10) = 0,26369746669, \quad a_7(10) = -0,06913216419.$$

Алгебраическое уравнение

$$a_6(t) = 0, \quad a_6(0) = 0.$$

Объединяем две системы, решаем, после чего находится приближенное решение начально–конечной задачи на рассматриваемом графе. Аналитический результат достаточно громоздок, поэтому результаты вычислительного эксперимента 10 представим графически (рис. 3.6 – 3.8.) в виде двумерных графиков в различные моменты времени t^* . Ось абсцисс отражает значения переменной x и отражает длину ребер графа. Ось ординат отражает значения функции $\tilde{\zeta}_j(x, t^*)$ – динамику выпучивания двутавровых балок в конструкции, находящихся под постоянной нагрузкой со случайным внешним воздействием. Цветами показаны решения на различных ребрах графа:

$\tilde{\zeta}_1(x, t^*)$ – синий,

$\tilde{\zeta}_2(x, t^*)$ – зеленый,

$\tilde{\zeta}_3(x, t^*)$ – черный,

$\tilde{\zeta}_4(x, t^*)$ – красный,

$\tilde{\zeta}_5(x, t^*)$ – маджента.

Последовательность графиков отражает развитие процесса во времени с учетом структуры графа.

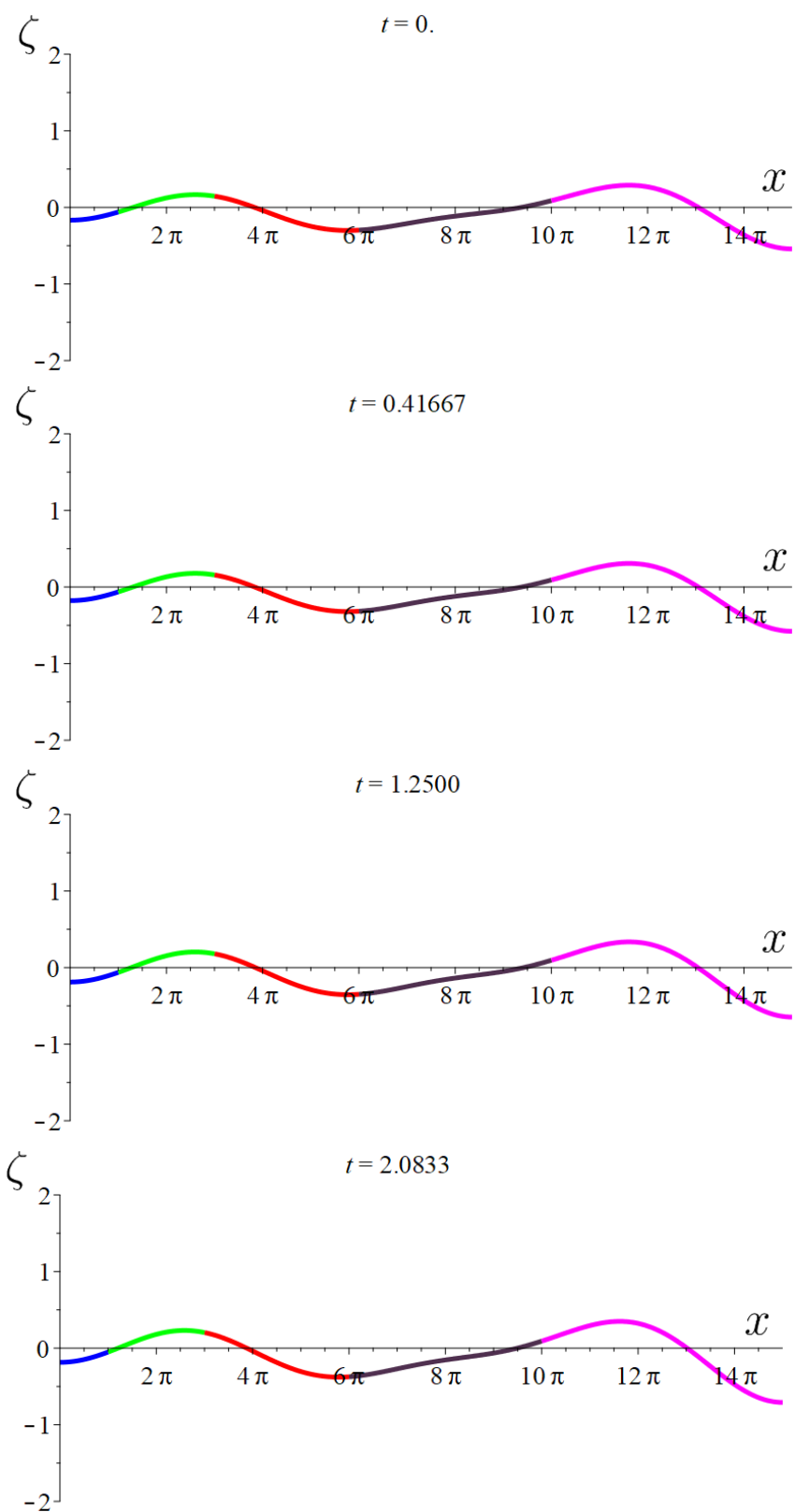


Рис. 3.6. Результаты вычислительного эксперимента VE10. Блок 1

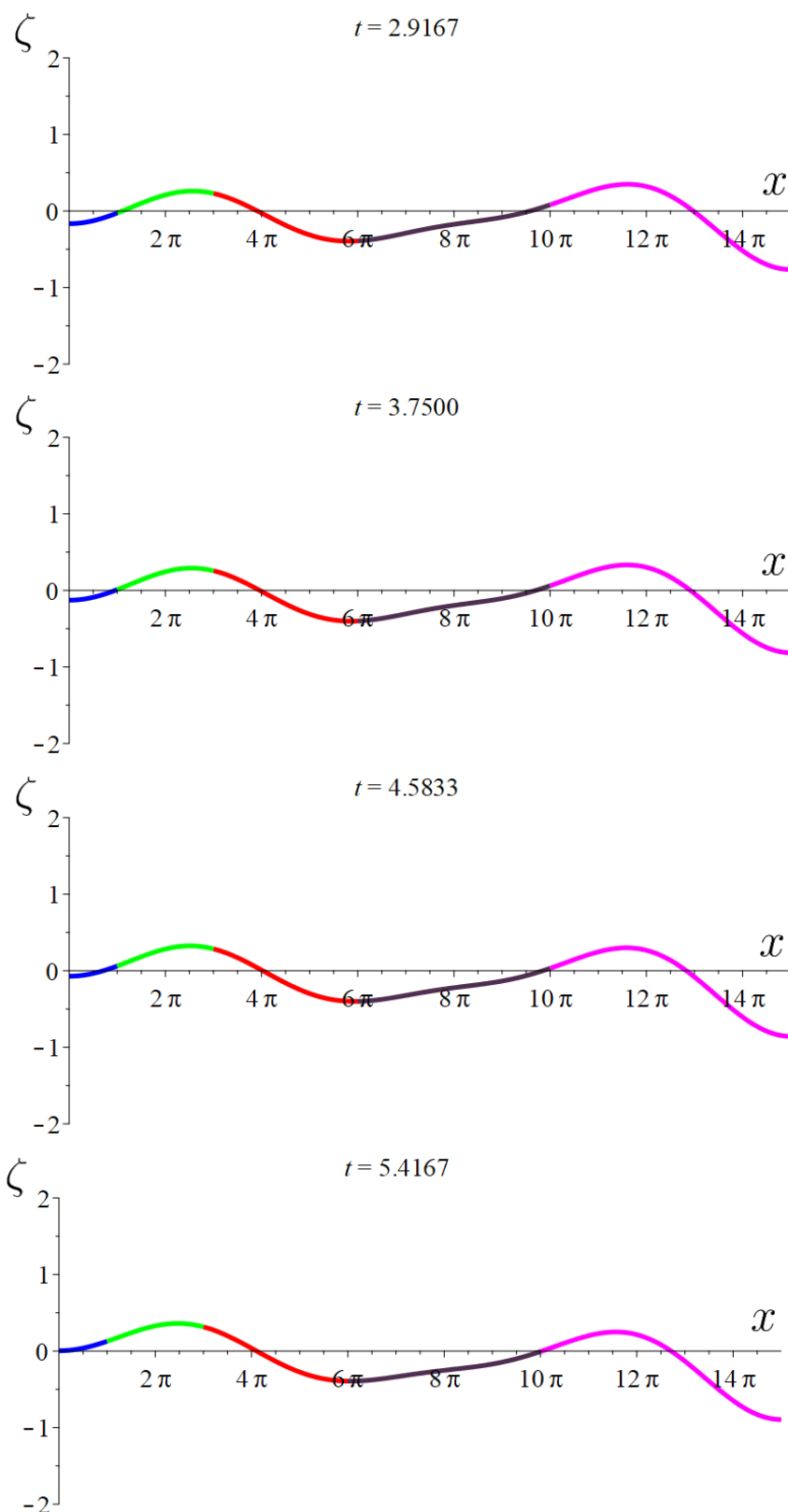


Рис. 3.7. Результаты вычислительного эксперимента VE10. Блок 2

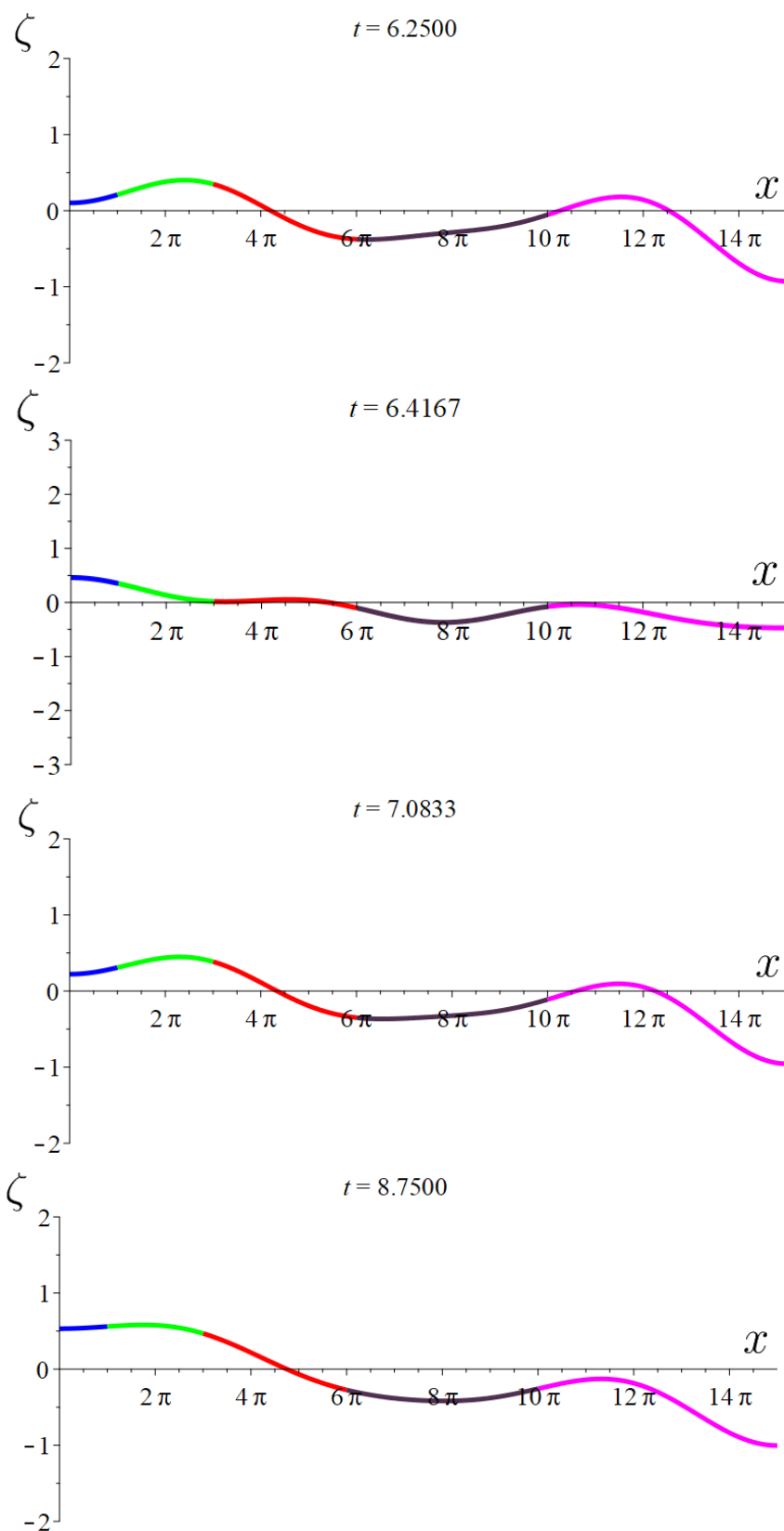


Рис. 3.8. Результаты вычислительного эксперимента VE10. Блок 3

3.5. Обработка информации и алгоритм ее программной реализации. Результаты вычислительных экспериментов

Обработку информации, получаемой на основании исследования стохастической модели, будем проводить по той же схеме, которая описана в п. 2.6 – проводятся m вычислительных экспериментов, разбиваемых на две группы. В первой группе – m_1 эксперимент – для моделирования внешнего воздействия используется генератор случайной нормально распределенной случайной величины с заданными параметрами математического ожидания и дисперсии, а во второй группе – $m - m_1$ экспериментов – моделируется внешнее воздействие при значении случайной величины, вероятность которого крайне мала, поэтому устанавливается исследователем.

Алгоритм численного исследования стохастических моделей Осколкова и Хоффа на графе представлена на рисунке 3.9. После генерации случайных величин реализуются основные этапы решения задачи начально-конечной задачи или задачи Шоуолтера – Сидорова для стохастического уравнения соболевского типа (п. 3.3). Для последующей обработки результатов запускается цикл по i , что позволяет в одной программе обработать результаты m_1 экспериментов. Каждый цикл позволит получить несколько реализаций решения.

По результатам экспериментов математическим ожиданием будет являться неслучайная функция $M(\tilde{\zeta}(r, t))$, которая при любом значении t равна математическому ожиданию соответствующего сечения, т.е. усредненную траекторию (реализацию), полученную в результате обработки m_1 экспериментов. Дисперсией и средним квадратическим отклонением будут являться неслучайные функции $D(\tilde{\zeta}(r, t))$ и $\sigma_{\zeta}(t)$, которые при любом значении t равны дисперсии и среднему квадратическому отклонению соответствующего сечения случайного процесса.

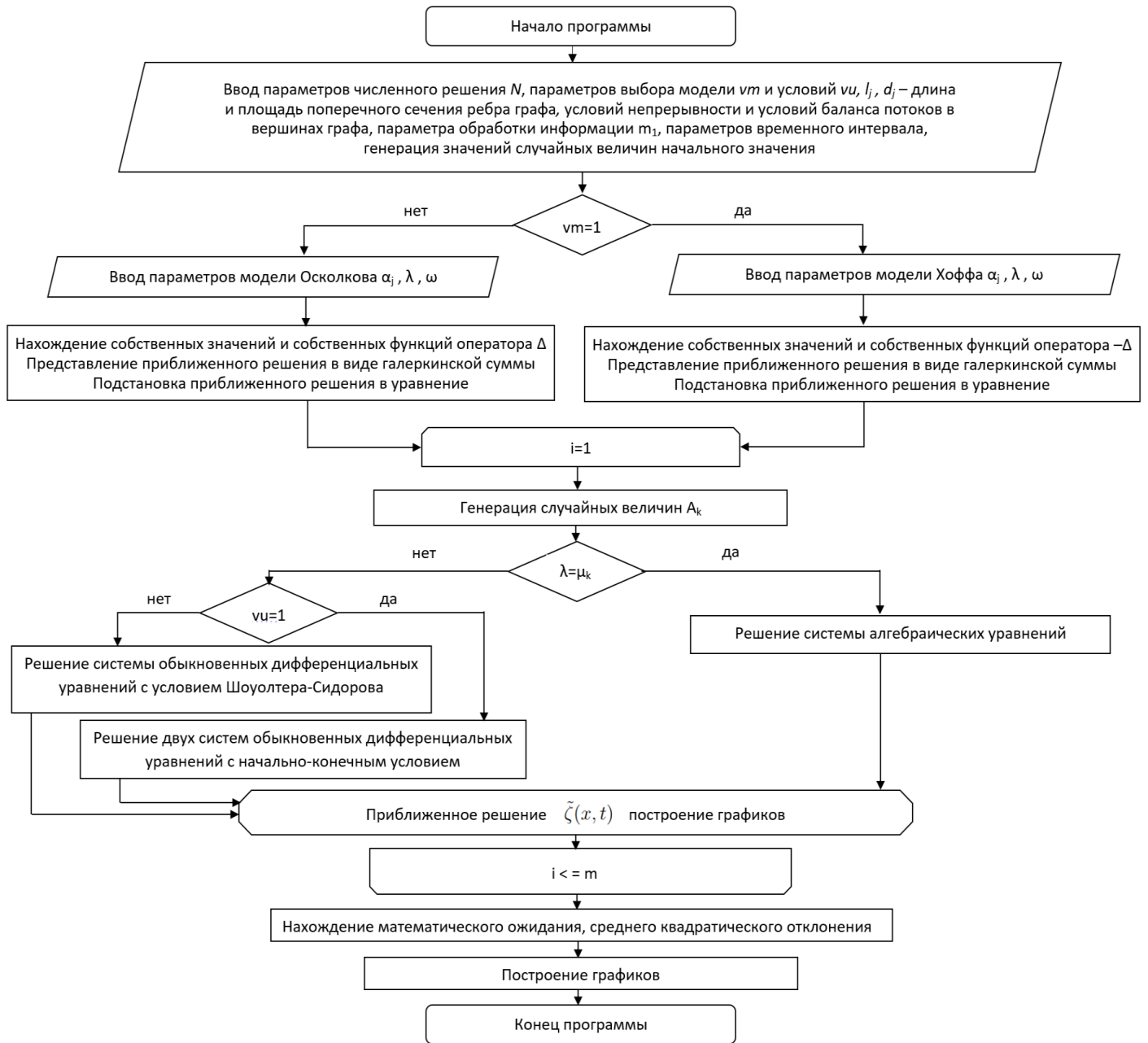


Рис. 3.9. Блок-схема программы реализации алгоритма при обработке информации для моделей на графе.

В результате, с вероятностью 0,997 можем использовать оценку

$$\|\zeta(r, t) - M(\tilde{\zeta}(r, t))\| < 3\sigma_{\zeta}(t) \quad (3.5.1)$$

В качестве примера обработки информации, получаемой в результате серии вычислительных экспериментов для модели Хоффа на графе с начально–

конечным условием, будем использовать результаты пяти экспериментов VE11 – VE15.

Граф взят тот же, что в вычислительном эксперименте VE10: пятиреберный последовательный граф, длины ребер которого различны. Приведем используемые в расчетах: $\lambda = 1$, $\beta = 0,5$. Все случайные величины $\sim N(0; 0,6)$, $w = \frac{1}{6}$. Изменен временной промежуток, $\tau = 4$. Количество слагаемых в галеркинском приближении взято 6.

При значении $\lambda = 1$ получаем, что $\lambda = \lambda_5$, таким образом $\lambda_5 \in \sigma_0^L(M)$. Будем считать, следуя п.3.2, что $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \sigma_{10}^L(M)$ и $\lambda_4, \lambda_6 \in \sigma_{11}^L(M)$

В таблице 3.1 представлены значения случайных величин вычислительных экспериментов VE11 – VE15 для моделирования начальных условий.

Таблица 3.1. Значения $\xi_{j,0}$ в вычислительных экспериментах VE11 – VE15

	VE11	VE12	VE13	VE14	VE15
$\xi_{1,0_1}$	-0,779671042530	-0,773481943152	-0,65194737702	-0,264436114886	0,166096108670
$\xi_{1,0_2}$	-0,355592739575	0,419796122955	0,39315087325	0,286625928373	0,010354611634
$\xi_{1,0_3}$	-0,004818953195	-0,527574491168	0,55836731265	-0,034213482971	0,271694189722
$\xi_{2,0_1}$	-0,066249915079	0,673889068056	-0,82823782498	-0,174217416646	0,672158594262
$\xi_{2,0_2}$	-0,787855288218	0,332471483682	-0,39075931496	-0,054226385102	0,194954691424
$\xi_{2,0_3}$	0,128306402269	-0,191192655552	0,15314815135	-0,450422385215	0,596536723385
$\xi_{3,0_1}$	-0,716583757002	0,108515903921	0,77007915419	0,016474384405	0,884686270806
$\xi_{3,0_2}$	-0,407663745313	0,310163291146	-0,38985927871	0,043044670564	-1,48796637680
$\xi_{3,0_3}$	0,493131901747	-0,596645085796	-0,32190031575	0,235231406065	-0,53279750234
$\xi_{4,0_1}$	0,640125546330	0,160873020596	-0,64169272174	-0,351941728483	-0,33125691708
$\xi_{4,0_2}$	0,355130171038	0,036589552705	-0,84473526895	-0,527756360872	0,778873001820
$\xi_{4,0_3}$	-0,145937632375	-0,409190476263	0,57862838430	-0,068249476512	0,570220114263
$\xi_{5,0_1}$	0,303163902217	0,161114995321	0,18772341794	0,705430115838	1,12851268818
$\xi_{5,0_2}$	-0,012342194709	-0,829303660296	1,49443492483	0,568142426464	0,883749488592
$\xi_{5,0_3}$	0,169641423760	0,423315312358	0,19890637211	0,467860466913	0,664079377524

В таблице 3.2 представлены значения случайных величин вычислительных экспериментов VE11 – VE15 для моделирования конечных условий.

Таблица 3.2. Значения $\xi_{j,1}$ в вычислительных экспериментах VE11 – VE15

	VE11	VE12	VE13	VE14	VE15
$\xi_{1,1_4}$	0,467741833300	0,0579339772213	0,80460123223	-0,98517904296	0,425669087469
$\xi_{1,1_6}$	0,569440849059	0,0614650495620	-1,03508463194	0,86574718419	-0,441945145651
$\xi_{2,1_4}$	-0,538938975409	-0,0446552238869	0,82100170511	0,86460993109	0,222007516039
$\xi_{2,1_6}$	-0,681622493136	-0,4132811579040	-0,17850898763	0,29647507948	0,356348266111
$\xi_{3,1_4}$	-0,423138883925	0,0442609894315	0,79719804754	-0,26192719414	-0,605604455352
$\xi_{3,1_6}$	-0,755761111230	0,2220894042480	-0,28669570947	-0,07411884252	-0,071104219163
$\xi_{4,1_4}$	-0,789087835884	1,0265955807210	1,36293385508	0,70339826852	-0,066152083937
$\xi_{4,1_6}$	0,106348123088	0,0714721621266	-0,03010323731	0,05778626207	0,029825652899
$\xi_{5,1_4}$	-0,361701373667	-0,0094400283991	-0,15512217883	0,61720445091	-0,224558905193
$\xi_{5,1_6}$	-0,263440253947	0,7368487083420	0,40207341786	0,16091185201	-0,944578479498

В таблице 3.3 представлены значения случайных величин в вычислительных экспериментах VE11 – VE15 для моделирования внешнего воздействия.

Значения случайной величины A :

$$A_1 = -0,0543028383959, \quad A_2 = -0,00847309280262,$$

$$A_3 = 0,0335194188116, \quad A_4 = 0,186279583106,$$

$$A_5 = -0,229622962725.$$

На рисунке 3.10 в виде трехмерных графиков представлены результаты вычислительных экспериментов VE11–VE15. Координатная плоскость Oxt задает точку, которой ставится в соответствие график функции $\tilde{\zeta}(x, t)$ как поверхность.

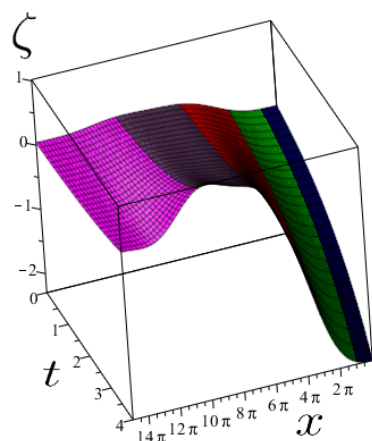
Значение $\tilde{\zeta}(x, t^*)$ на различных ребрах отмечены различными цветами: $\tilde{\zeta}_1(x, t^*)$ – синий, $\tilde{\zeta}_2(x, t^*)$ – зеленый, $\tilde{\zeta}_3(x, t^*)$ – черный, $\tilde{\zeta}_4(x, t^*)$ – красный, $\tilde{\zeta}_5(x, t^*)$ – маджента.

Представление результатов оценки математического ожидания по результатам пяти экспериментов целесообразно осуществлять на двумерных графиках при фиксированном значении t^* , для этого были взяты три значения $t^* = 0$ (рис. 3.11), $t^* = 2$ (рис. 3.11), $t^* = 4$ (рис. 3.12).

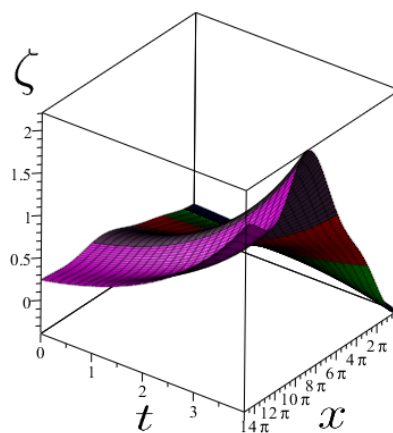
Таблица 3.3. Значения ϕ_{jk} в вычислительных экспериментах VE11 – VE15

	VE11	VE12	VE13	VE14	VE15
ϕ_{1_1}	0,213320513773	0,575152691383	-0,518716611544	1,12160658842	0,45098589412
ϕ_{1_2}	0,161351616084	-0,503635904705	1,858003611310	0,81977728665	0,96361571274
ϕ_{1_3}	1,282452724621	-0,578347606868	0,355646974661	0,47816681943	1,11073349228
ϕ_{1_4}	0,389745459154	0,924306773070	0,290992633032	0,09909755425	0,06374666276
ϕ_{1_6}	1,454714996030	0,239778800224	-0,078888591215	0,29137790915	-0,15435828855
ϕ_{2_1}	-0,139285889315	0,276020383157	-0,181334465899	0,23003895401	0,06746981897
ϕ_{2_2}	0,592508951848	0,043887981203	-0,405234382318	-0,99891232366	-0,20866896201
ϕ_{2_3}	0,328222646313	-0,482648664989	-0,459982083773	-0,35488979803	0,69945256883
ϕ_{2_4}	0,131168140925	0,637132437108	1,457443809821	0,73135910269	-0,23157471013
ϕ_{2_6}	-0,194589533207	0,344774199637	-0,398743780939	-0,06386674021	-0,15140605016
ϕ_{3_1}	0,997977732696	1,275213779040	0,453104091433	0,06204154125	-0,36096164122
ϕ_{3_2}	0,638318552916	-0,766477821408	0,122149373638	-0,49014731138	0,07561915282
ϕ_{3_3}	0,905647850790	-0,841522649934	0,867363252678	0,03786424209	-0,05767787465
ϕ_{3_4}	0,234874743325	0,484438307690	-0,594068882124	0,79722031151	-0,02457810743
ϕ_{3_6}	0,232156465324	-0,381489818368	0,745928605038	0,32493716161	0,42110255644
ϕ_{4_1}	-0,637731554328	0,535452834298	0,331861696033	-0,77283267889	0,11824598512
ϕ_{4_2}	0,416538399062	-0,207176960996	1,203991570481	-0,38801605506	-0,43688549921
ϕ_{4_3}	0,518987049908	1,063209627850	-0,340662061697	0,06287912412	0,18397533323
ϕ_{4_4}	0,080403727187	0,067983451584	0,190668927197	1,39376990569	1,47027445418
ϕ_{4_6}	-0,403763931418	-0,284536137794	1,362236026961	-0,32685572741	1,32876123932
ϕ_{5_1}	0,847802745828	-0,132218320984	-0,021800402787	-0,76195210235	-0,24704400047
ϕ_{5_2}	0,593434773411	0,497426077804	-0,001927318369	-1,09396669582	-0,33237242456
ϕ_{5_3}	-0,255085781362	0,006301276751	0,057165603619	0,71707994106	-0,56570371285
ϕ_{5_4}	0,862173905514	0,565074702313	0,457092186423	-1,71864648901	0,41482603603
ϕ_{5_6}	0,373297885274	-0,157875118982	-0,163596649049	-1,03568087748	0,68805888679

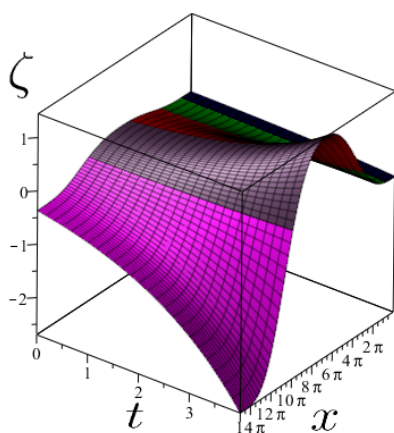
Пунктирными линиями отмечены значения $\tilde{\zeta}(x, t^*)$ при отдельных экспериментах. Сплошной линией (с соблюдением тех же цветов) отмечены значения математического ожидания $M(\tilde{\zeta}(x, t^*))$, синими линиями представлены функции $M(\tilde{\zeta}(x, t^*)) + 3\sigma_{\zeta}(t^*)$ и $M(\tilde{\zeta}(x, t^*)) - 3\sigma_{\zeta}(t^*)$, получаемые также численно. Отметим, что оценка (3.5.1) выполняется.



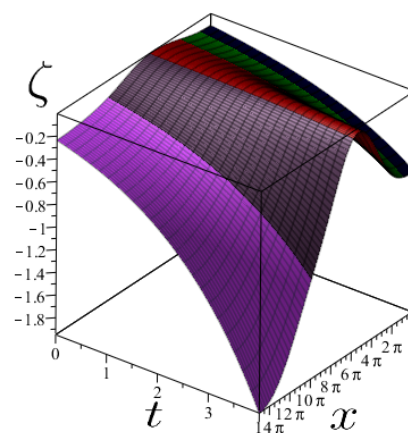
(a) Эксперимент VE11



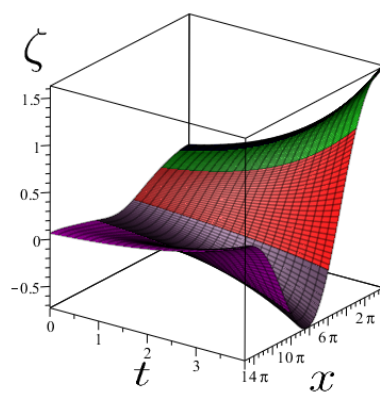
(b) Эксперимент VE12



(c) Эксперимент VE13



(d) Эксперимент VE14



(e) Эксперимент VE15

Рис. 3.10. Результаты вычислительных экспериментов VE11–VE15.

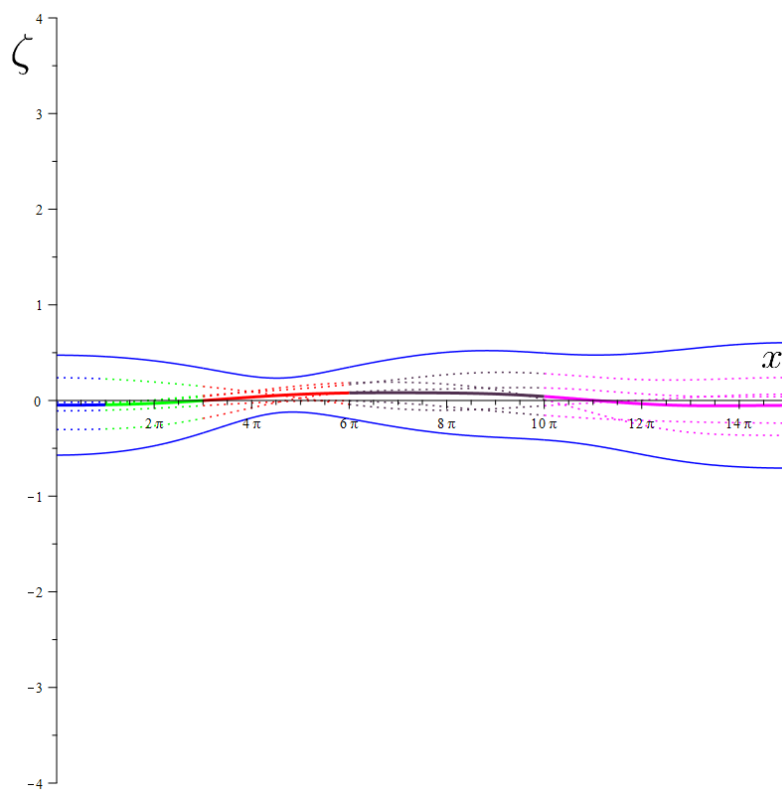
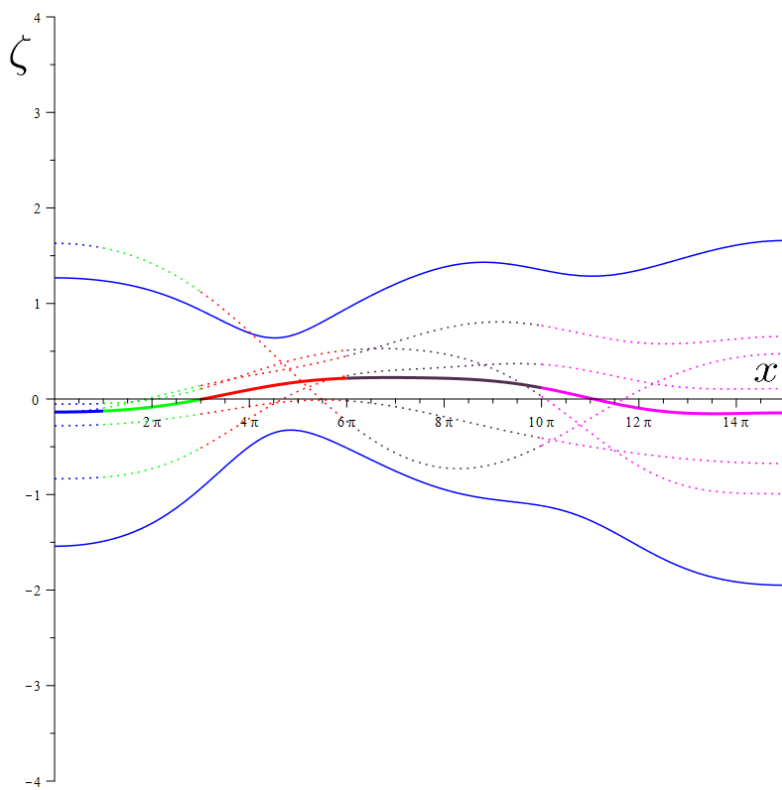
(a) $t^*=0$ c(b) $t^*=2$ c

Рис. 3.11. Обработка результатов вычислительных экспериментов VE11–VE15.

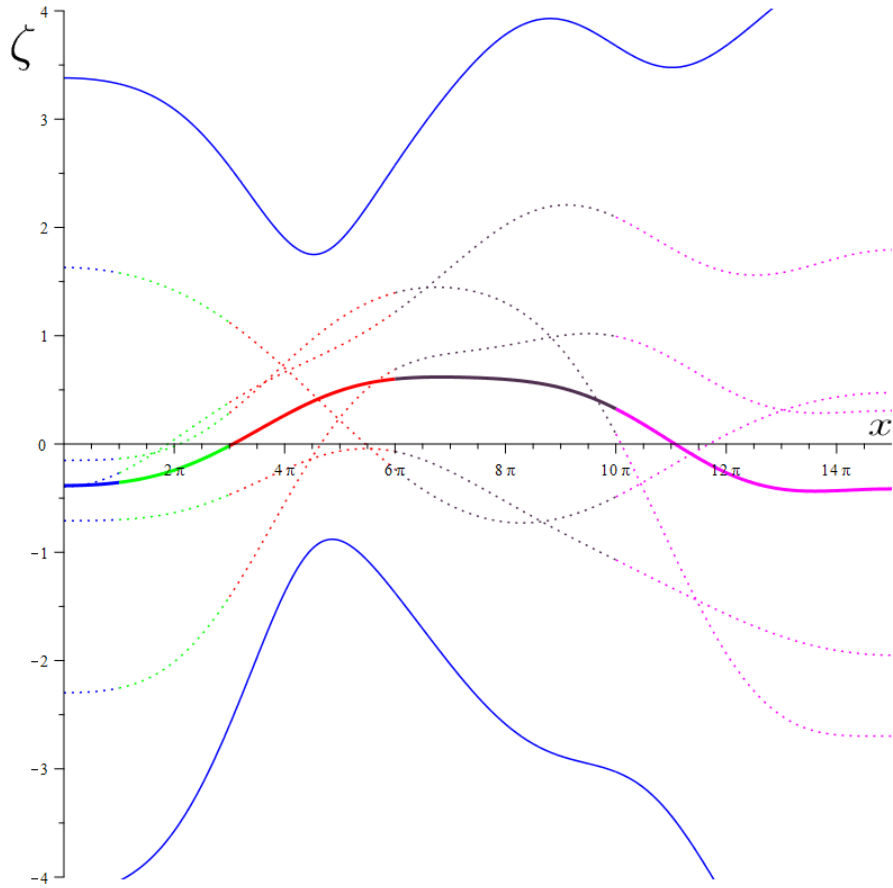


Рис. 3.12. Обработка результатов вычислительных экспериментов VE11–VE15. $t^* = 4c$

Анализ результатов вычислительных экспериментов показывает, что с продолжением действий случайного внешнего воздействия величина средне-квадратического отклонения возрастает при всех x .

В рамках второй группы вычислительных экспериментов при величине случайного внешнего воздействия, относимой к редкому событию, представим следующий результат для модели Хоффа – вычислительный эксперимент VE16.

Рассматривается тот же пятиреберный граф с шестью вершинами, изображенный на рисунке 3.5, взятый для проведения вычислительного эксперимента VE10. Задачи Штурма – Лиувилля уже решена.

Будем полагать, что $A = 15$, а остальные случайные величины являются нормально распределенными гауссовыми величинами $\sim N(0; 0, 4)$, использовать начально-конечные условия (3.4.8), (3.4.9).

Генерация случайных величин, входящих в состав разложения для функций начального условия, дала следующие результаты:

$$\begin{aligned}\xi_{1,0_1} &= 0,510270413624, & \xi_{1,0_2} &= -1,04802168621, & \xi_{1,0_3} &= -0,435600721448, \\ \xi_{2,0_1} &= -0,284905232848, & \xi_{2,0_2} &= 0,512901204648, & \xi_{2,0_3} &= 0,130618929700, \\ \xi_{3,0_1} &= -0,322978217537, & \xi_{3,0_2} &= 0,306731049584, & \xi_{3,0_3} &= 0,0385011368783, \\ \xi_{4,0_1} &= 0,126048253742, & \xi_{4,0_2} &= -0,158318214951, & \xi_{4,0_3} &= 0,00182464187276, \\ \xi_{5,0_1} &= -0,246319791614, & \xi_{5,0_2} &= 0,313702274640, & \xi_{5,0_3} &= 0,333545154302,\end{aligned}$$

Генерация случайных величин, входящих в состав разложения для начальных функций конечного условия, дала следующие результаты:

$$\begin{aligned}\xi_{1,1_4} &= -0,523491667636, & \xi_{1,1_5} &= -0,218926629422; & \xi_{1,1_7} &= 0,545725544716; \\ \xi_{2,1_4} &= -0,0210614388500, & \xi_{2,1_5} &= 0,137389096136; & \xi_{2,1_7} &= -0,912939804416; \\ \xi_{3,1_4} &= -0,604181464272, & \xi_{3,1_5} &= 0,305281426074; & \xi_{3,1_7} &= 0,287772436731; \\ \xi_{4,1_4} &= -0,0778589392812, & \xi_{4,1_5} &= -0,0345035114512; & \xi_{4,1_7} &= 0,170044572522; \\ \xi_{5,1_4} &= -0,463473677228, & \xi_{5,1_5} &= 0,0790996460440; & \xi_{5,1_7} &= 1,16650185023;\end{aligned}$$

Внешнее воздействие на каждом ребре представимо разложением

$$\begin{aligned}NdW &= A \sin(wt) \phi_1 \varphi_1(x) + A \sin(wt) \phi_2 \varphi_2(x) + A \sin(wt) \phi_3 \varphi_3(x) + \\ &\quad - A \sin(wt) \phi_4 \varphi_4(x) + A \sin(wt) \phi_5 \varphi_5(x) + A \sin(wt) \phi_7 \varphi_7(x)\end{aligned}$$

при $A = 0,765405620436$, $w = \frac{1}{6}$, $\phi_k = (\phi_{1_k}, \phi_{2_k}, \phi_{3_k}, \phi_{4_k}, \phi_{5_k})$ в соответствии с количеством ребер $j = 5$.

Генерация случайных величин, входящих в состав разложения для случайного внешнего воздействия дала следующие результаты:

$$\begin{aligned}\phi_{1_1} &= -0,188691771135, & \phi_{1_2} &= 0,149796535550, & \phi_{1_3} &= 0,911316556380, \\ \phi_{1_4} &= -0,0182522442433, & \phi_{1_5} &= 0,566593101056; & \phi_{1_7} &= -0,234590279046; \\ \phi_{2_1} &= 0,0582350902840, & \phi_{2_2} &= -0,620857358652, & \phi_{2_3} &= -0,0678177816560,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{2_4} &= -0,198813124930, & \phi_{2_5} &= -0,356324529883; & \phi_{2_7} &= -0,147514484130; \\
\phi_{3_1} &= 0,526874816464, & \phi_{3_2} &= 0,459183903768, & \phi_{3_3} &= 0,0204544477719, \\
\phi_{3_4} &= -0,469453340580, & \phi_{3_5} &= 0,314851344789; & \phi_{2_7} &= 0,198180115982; \\
\phi_{4_1} &= 0,0285983432555, & \phi_{4_2} &= -0,334143616433, & \phi_{4_3} &= 0,0482765603644, \\
\phi_{4_4} &= 0,0181670815318, & \phi_{4_5} &= 0,165963904810; & \phi_{4_7} &= -0,0331993370780 \\
\phi_{5_1} &= -0,184302541868, & \phi_{5_2} &= -0,0119857447917, & \phi_{5_3} &= -0,518538047424, \\
\phi_{5_4} &= 0,0851025880132, & \phi_{5_5} &= 0,274230948511, & \phi_{5_7} &= 0,327970958538.
\end{aligned}$$

Результаты вычислительного эксперимента 10 представим графически (рис. 3.13 – 3.15.) в виде двумерных графиков в различные моменты времени t^* . Ось абсцисс отражает значения переменной x и отражает длину ребер графа. Ось ординат отражает значения функции $\tilde{\zeta}_j(x, t^*)$ – динамику выпучивания двутавровых балок в конструкции, находящихся под постоянной нагрузкой со случайным внешним воздействием. Цветами показаны решения на различных ребрах графа:

- $\tilde{\zeta}_1(x, t^*)$ – синий,
- $\tilde{\zeta}_2(x, t^*)$ – зеленый,
- $\tilde{\zeta}_3(x, t^*)$ – черный,
- $\tilde{\zeta}_4(x, t^*)$ – красный,
- $\tilde{\zeta}_5(x, t^*)$ – маджента.

Последовательность графиков отражает развитие процесса во времени с учетом структуры графа.

Отметим, что в программе, реализующей алгоритм обработки информации используются процедуры, позволяющей автоматически формировать файлы формата PNG и их заголовки. Для этого применяется цикл **for** i **to** m_1 **do** **for** tn **from** 0 **to** 12 **do** , **for** **end** **do** **end** **do** ; , процедуры **plotsetup(png, plotoutput, plotoptions); display , plotsetup(default)**.

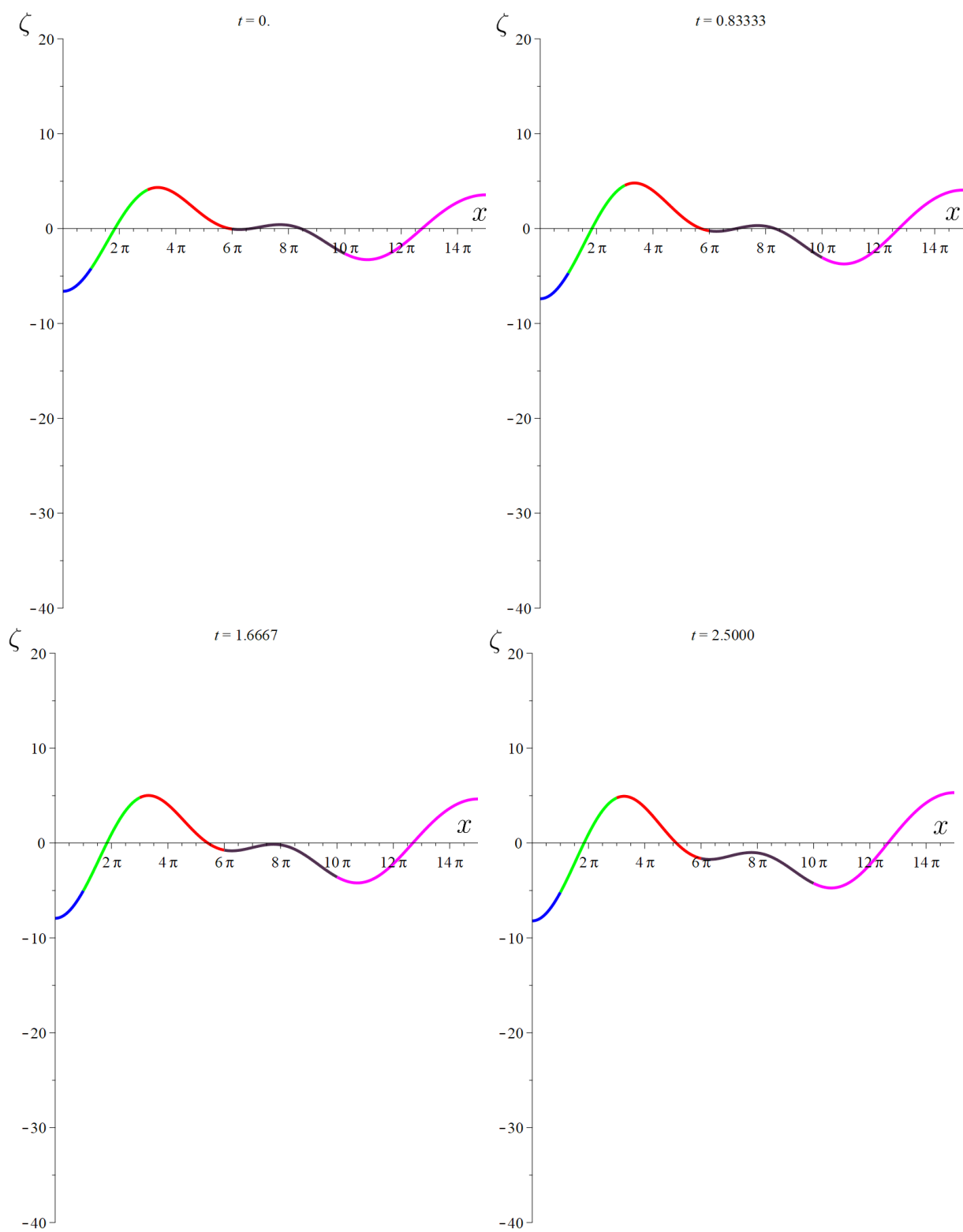


Рис. 3.13. Результаты вычислительного эксперимента VE16. Блок 1

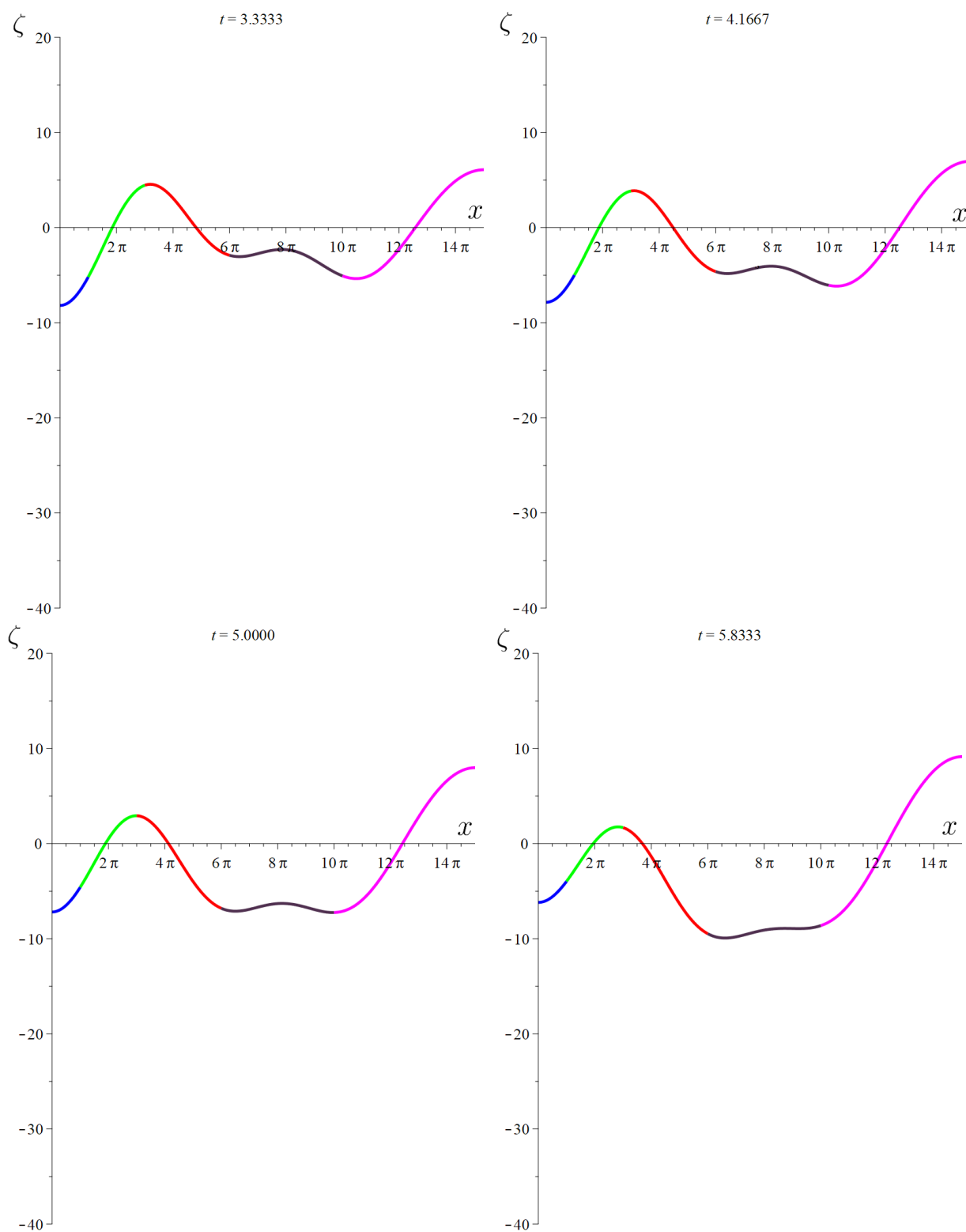


Рис. 3.14. Результаты вычислительного эксперимента VE16. Блок 2

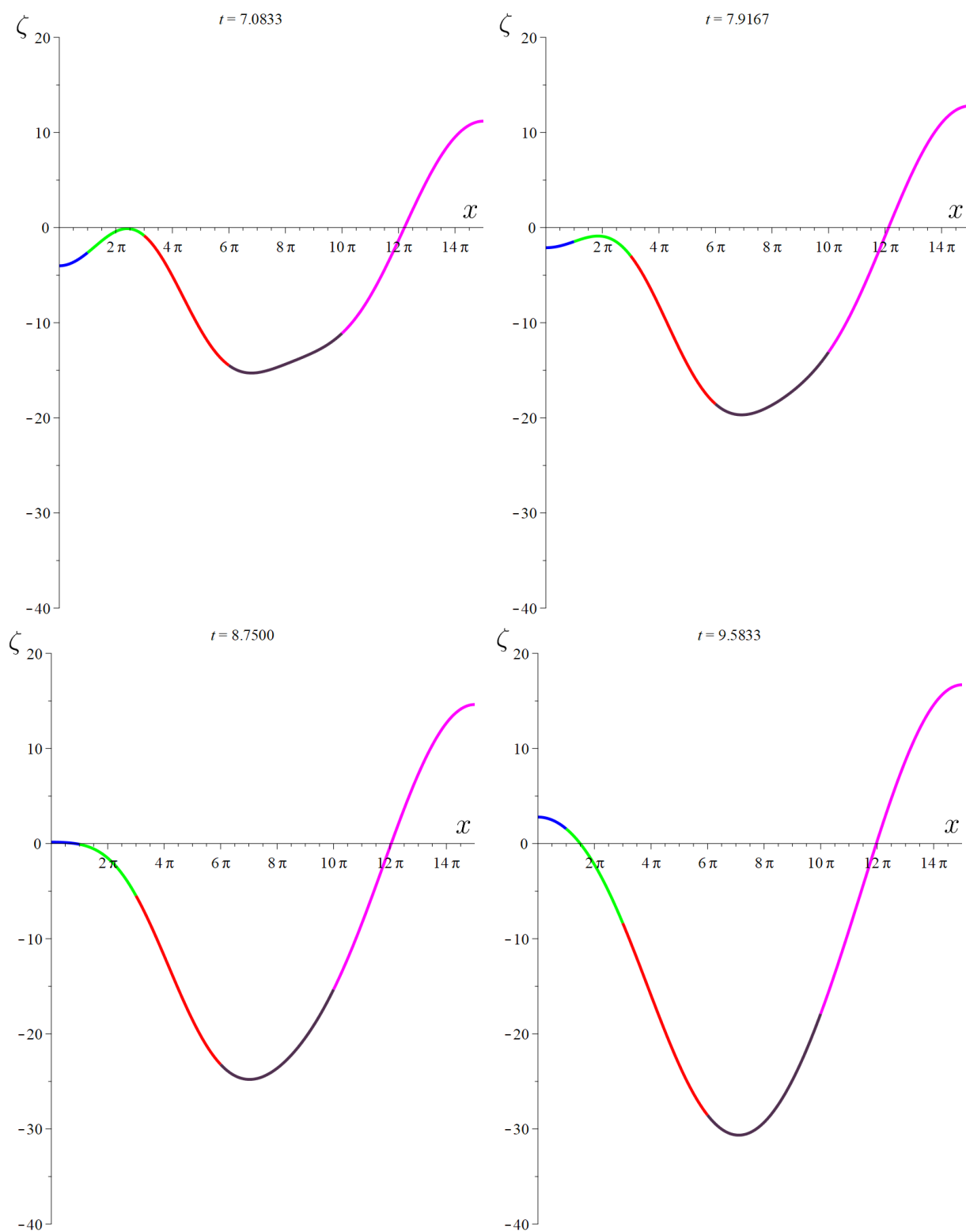


Рис. 3.15. Результаты вычислительного эксперимента VE16. Блок 3

Заключение

Итоги выполненного исследования

В работе проведено качественное и численное исследование неклассических стохастических линейных динамических моделей, описывающих процессы фильтрации жидкости, гидродинамики и упругости:

1. Применен системный анализ предметной области с использованием метода информационно-логического моделирования для проектирования исследования и представления специалистами различных областей знаний о проблематике теории уравнений соболевского типа.

2. Распространены цели и методы теории уравнений соболевского типа с относительно p -ограниченным оператором на случаи стохастических уравнений соболевского типа с различными начальными или начально-конечными условиями.

3. Распространены цели и методы детерминированной теории уравнений соболевского типа с относительно p -ограниченным оператором на случаи стохастических моделей Баренблатта – Желтова – Кочиной с условием Коши, Осколкова с условием Шоултера – Сидорова на графе, Хоффа с начально-конечным условием на графе;

4. Разработаны численные методы и алгоритмы расчета стохастических моделей Баренблатта – Желтова – Кочиной с условием Коши, Осколкова с условием Шоултера – Сидорова и Хоффа с начально-конечным условием.

5. На основе полученных алгоритмов созданы два программных продукта "Численное исследование движения жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде со случайным внешним воздействием" (см. Приложение 1) и "Программный комплекс решения стохастических уравнений

соболевского типа" (см. Приложение 2) и проведены вычислительные эксперименты.

6. Разработаны алгоритмы программ для обработки информации, получаемой на основе вычислительных экспериментов. Приведены примеры реализации работы программы для модели Баренблатта – Желтова – Кочиной и модели Хоффа на графе.

Таким образом, в работе решены все поставленные выше задачи и достигнута цель исследования.

Рекомендации

В качестве рекомендаций по применению результатов диссертации предлагается использовать результаты: в математическом моделировании при решении прикладных задач, которые могут быть описаны с использованием стохастических уравнений соболевского типа; в методах и средствах анализа обработки информации и управления сложными системами.

Перспективы дальнейшей разработки тематики

- Исследование абстрактных уравнений соболевского типа с относительно p -радиальным оператором.
- Исследование неклассических стохастических эволюционных моделей.
- Применение полученных алгоритмов аналитического и численного исследования при рассмотрении новых задач для уравнений соболевского типа.

Список литературы

1. *Александрова, И.Е.* Математическое моделирование, системный анализ и синтез сложных технических объектов : монография / И.Е. Александрова, Т.Е. Александрова. – Красноярск: Изд-во "Научно-инновационный центр", 2016. – 207 с.
2. *Баренблатт, Г.И.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т.24, № 5. – С.58-73.
3. *Баязитова, А.А.* Исследование прямых и обратных задач в моделях Хоффа : дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.А. Баязитова; Челябинск, 2011. – 124 с.
4. *Богатырева, Е.А.* Аналитическое и численное исследования квазилинейных математических моделей квазистационарного процесса в проводящей среде и двухфазной фильтрации : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Е.А. Богатырева; Челябинск, 2015.
5. *Богданов, В.Е.* Комплексная технология обработки пластов и очистки забоев водозаборных скважин районов Нечерноземья глубинными пневмоимпульсными устройствами : дис. ... канд. техн. наук / В.Е. Богданов; Раменское, 1991. – 139 с.
6. *Бреер, В.В.* Стохастические модели управления толпой / В. В. Бреер, Д. А. Новиков, А. Д. Рогаткин // Управление большими системами: сб. трудов. – 2014. – № 52. – С. 85-117.
7. *Бузинов, С.Н.* Исследование нефтяных и газовых скважин и пластов / С.Н. Бузинов, И.Д. Умрихин. – М.: Недра, 1984. – 269 с.

8. *Бычков, Е.В.* Исследование полулинейных математических моделей соболевского типа второго порядка : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Е.В. Бычков; Челябинск, 2013.
9. *Вольницкая, Е.П.* Гидродинамические методы анализа фильтрационных полей и свойств коллекторов сложного строения при импульсно-волновых воздействиях в скважине : дис. ... д-ра техн. наук / Е.П. Вольницкая; Москва, 2005.
10. *Гаврилова, О.В.* Численно-аналитические методы и алгоритмы исследования математических моделей автокаталитической реакции с диффузией и распространения нервного импульса в мембранной оболочке : дис. ... канд. физ.-мат. наук / О.В. Гаврилова; Челябинск, 2021.
11. *Гаевский, Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас; Пер. с нем. В.Г. Задорожного, А.И. Перова ; Под ред. В.И. Соболева. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
12. *Газиев, С.Ю.* Повышение качества крепления скважин посредством импульсно-волнового воздействия / С.Ю. Газиев, Е.В. Серебрякова // Новейшие технологии освоения месторождений углеводородного сырья и обеспечение безопасности экосистем Каспийского шельфа : Материалы IX Международной научно-практической конференции, Астрахань, 07 сентября 2018 года. – Астрахань: Астраханский государственный технический университет, 2018. — С. 112-116.
13. *Голубев, Г.В.* К решению задач фильтрации флюидов в неоднородных трещиновато-пористых средах / Г.В. Голубев // Нефтепромысловое дело. – 2005. – №11. – С. 26-29.

14. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев [и др.] – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.
15. *Загребина, С.А.* Исследование математических моделей фильтрации жидкости : дис. ... канд. физ.-мат. наук / С.А. Загребина; Челябинск, 2002.
16. *Загребина, С.А.* Исследование многоточечных начально-конечных задач для неклассических моделей математической физики : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / С.А. Загребина; Челябинск, 2013.
17. *Загребина, С.А.* Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т.6, № 2. – С.5-24.
18. *Загребина, С.А.* Устойчивые и неустойчивые многообразия решений полулинейных уравнений соболевского типа: монография / С. А. Загребина, М. А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2016. – 121 с.
19. *Замышляева, А.А.* Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка: монография / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.
20. *Замышляева, А.А.* Исследование линейных математических моделей соболевского типа высокого порядка : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.А. Замышляева; Челябинск, 2013.
21. *Замышляева, А.А.* Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера–Сидорова–Дирихле для уравнения Буссинеска–Лява /

- А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 11. – С. 1390-1398.
22. *Замышляева, А.А.* Уравнения соболевского типа на графе / А.А. Замышляева, О.Н.Цыпленкова. – Изд. центр ЮУрГУ: Челябинск, 2016.
 23. Исследование водоносных горизонтов методом колебаний / В.И. Башмаков, Б.В. Боровский, Г.С. Вартанян [и др.] // Водные ресурсы.– 1986.– № 2. – С. 31-39.
 24. *Келлер, А. В.* Алгоритм решения задачи Шоуолтера–Сидорова для моделей леонтьевского типа / А. В. Келлер // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия Математическое моделирование и программирование. – 2011. – № 4(221). – С. 40-46.
 25. *Келлер, А.В.* Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа : дис. . . . д-ра физ.-мат. наук / А.В. Келлер; Челябинск, 2011. – 237 с.
 26. *Кибзун, А.И.* Построение доверительного множества поглощения в задачах анализа статических стохастических систем / А. И. Кибзун, С. В. Иванов, А. С. Степанова // Автоматика и телемеханика. – 2020.– Т.81, № 4. – С. 21-36.
 27. *Кожанов, А.И.* Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка / А.И. Кожанов. – Новосибирск: НГУ, 1990
 28. *Кондюков, А.О.* Математические модели движения несжимаемых вязкоупругих жидкостей в магнитном поле Земли : дис. . . . канд. физ.-мат. наук / А.О. Кондюков. – Челябинск, 2017.
 29. *Корженевский, А.А.* Импульсно-волновые технологии трещинорасчленения продуктивных пластов – реальная основа вывода нефтегазовых скважин на потенциальную продуктивность / А.А. Корженевский,

- А.Г. Корженевский, Т.А. Корженевская // Нефтепромысловое дело. – 2021, № 3 (627). – С. 13-18.
30. *Коршунов, Г.И.* Увеличение газовой проницаемости угля путем импульсно-волнового воздействия через скважины / Г.И. Коршунов, А.В. Шипулин, А.С. Серегин // Газовая промышленность. – 2012. – № S(672). – С. 46-47.
 31. *Курдюков, А.П.* Дескрипторные системы и задачи управления / А.П. Курдюков, А.А. Белов – М.: Физматлит, 2015.
 32. *Куштанова, Г.Г.* Численное моделирование термогидродинамических процессов в подземной гидросфере : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Г.Г. Куштанова; Казань, 2006.
 33. *Лионс, Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс; Пер. с фр. Л. Р. Волевича ; Под ред. [и с предисл.] О.А. Олейник. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
 34. *Манакова, Н.А.* Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа: монография / Н.А. Манакова. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.
 35. *Манакова, Н.А.* Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейной модели Хоффа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Математические заметки. – 2013. – Т. 94, № 2. – С. 225-236.
 36. *Манакова, Н.А.* Аналитическое и численное исследования оптимального управления в полулинейных моделях гидродинамики и упругости : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Н.А. Манакова; Челябинск, 2015.

37. *Матвеева, О.П.* Математические модели вязкоупругих несжимаемых жидкостей ненулевого порядка / О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева. – Челябинск : Изд. центр ЮУрГУ, 2014.
38. *Мельникова, И.В.* Интегрированные полугруппы и C -полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач / И. В. Мельникова, А. И. Филингов // Успехи мат. наук. – 1994. – Т.49, №6. – С. 111-150.
39. *Новиков, А.Е.* Разработка алгоритмов переменной структуры для решения жестких задач: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.Е. Новиков; Красноярск, 2014. – 123 с.
40. *Новиков, Е.А.* Контроль устойчивости метода Фельберга седьмого порядка точности / Е.А. Новиков, Ю.В. Шорников // Вычислительные технологии. – 2006. – Т.11, № 4. – С. 65-72
41. *Пивоварова, П. О.* Исследование устойчивости в моделях Хоффа: дис. ... канд. физ.-мат. наук / П.О. Пивоварова; Челябинск, 2011.
42. *Рикитаке, Т.* Предсказание землетрясений / Т. Рикитаке; пер. с англ. А.Л. Петросяна и Н.И. Фроловой ; Под ред. Е.Ф. Саваренского. – М.: Мир, 1979. – 388 с.
43. *Самарский, А.А.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Приемы : монография / А.А. Самарский, А. П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – Москва : Физматлит, 2001. – 316 с.
44. *Свиридюк, Г.А.* К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47-74.
45. *Свиридюк, Г.А.* Уравнения соболевского типа на графах / Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск, 2002. – С. 221-225.

46. *Свиридюк, Г.А.* О складке фазового пространства одного неклассического уравнения / Г.А. Свиридюк, А.Ф. Гильмутдинова // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 10. – С. 1400-1405.
47. *Свиридюк, Г.А.* Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно p -ограниченными операторами / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т.38, № 12. – С. 1646-1652.
48. *Свиридюк, Г.А.* Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2010. – Т.3, № 1. – С. 51-72.
49. *Свиридюк, Г.А.* Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Математические заметки. – 2002. – Т.71, № 2. – С.292-297.
50. *Свиридюк, Г.А.* Уравнения Хоффа на графах / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 1. – С. 126-131.
51. *Сидоров, Н.А.* Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления / Н.А. Сидоров. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1982.
52. *Соболев, С.Л.* Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Известия АН СССР. Серия математическая. 1954. Т. 18, № 1. С. 3-50.
53. *Сукачева, Т.Г.* Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Т.Г. Сукачева; Великий Новгород, 2004. – 249 с.

54. *Умаров, Х.Г.* Исследование моделей математической физики псевдопараболического типа: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук / Х.Г. Умаров; Грозный, 2015. – 299 с.
55. *Фалалеев, М.В.* О разрешимости в классе распределений вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика.– 2020.– № 34. – С. 77-92.
56. *Флетчер, К.* Численные методы на основе метода Галеркина. – М.: Мир, 1988, 352 с.
57. *Фролов, А.В.* Динамико-стохастическое моделирование многолетних гидрологических процессов : дис. . . . д-ра техн. наук / А. В. Фролов; Москва, 2006. – 250 с.
58. *Чистяков, В. Ф.* О методах численного решения и исследования систем не типа Коши–Ковалевской / В. Ф. Чистяков, О. В. Бормотова // Журн. вычислит. мат. и мат. физики.– 2004.– Т. 44, № 8.– С. 1380-1387.
59. *Шестаков, А.Л.* Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 12.– С. 56-68.
60. *Шутов, М.С.* Совершенствование методов определения параметров пласта на основе прецизионного гидропрослушивания / М.С. Шутов //Разведка, каптаж и охрана подземных вод Тюменской области : Сб. статей; Вып. 204 [Ред. Зенков Н. И.]. – Тюмень : Запсибнигни, 1986. – С. 16-29.
61. *Al'shin, A.B.* Blow-up in nonlinear Sobolev-type equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. — Berlin; N.Y.: Walter GmbH Co.KG, 2011.

62. *Ayoub, J.A.* A New technique speeds interference well tests / J.A. Ayoub, J. Hebert // World Oil. – 1989. – Vol. 209, № 4. – P. 89-90.
63. *Chen, P.J.* On a theory of heat conduction involving two temperatures / P.J. Chen, M.E. Gurtin // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP. – 1968. – Vol. 19, issue 4. – P. 614-627.
64. *Coleman, B.D.* Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xxt}$ on a strip / B.D. Coleman, R.J. Duffin, V.J. Mizel // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1965. – Vol. 19, issue 2. – P. 100-116.
65. *Da Prato, G.* Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. – Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
66. *Demidenko, G.V.* Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest – order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N.-Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.
67. *Favini, A.* Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – N.-Y.: Marcel Dekker, Inc. 1999.
68. *Favini, A.* Multivalued linear operators and degenerate evolution equations / A. Favini, A. Yagi // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1993. – Vol. 163, issue 1. – P. 353-384.
69. *Favini, A.* Linear Sobolev Type Equations with Relatively p -Sectorial Operators in Space of "noises" / A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – Vol. 2015. – Article ID № 697410.
70. *Favini, A.* Linear Sobolev Type equations with relatively p -Radial Operators in Space of "Noises" / A. Favini, G. Sviridyuk, M. Sagadeeva //

- Mediterranean Journal of Mathematics. – 2016. – Vol. 13, issue 6. – P. 4607-4621.
71. *Favini, A.* One class of Sobolev type equations of higher order with additive "white noise" / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamishlyaeva // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2016. – Vol. 15, issue 1. – P. 185-196.
 72. *Fehlberg, E.* Classical fifth- and seventh-order Runge–Kutta formulas with stepsize control [Klassische Runge–Kutta-Formeln fünfter und siebenter Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle] / E. Fehlberg // Computing. – 1969. – Vol. 4, issue 2. – P. 93-106.
 73. *Gliklikh, Yu.E.* Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London; Dordrecht; Heidelberg; N.-Y.: Springer, 2011.
 74. *Hallaire, M.* Hallaire M. Soil water movement in the film and vapor phase under the influence of evapotranspiration. Water and its conduction in soils / M. Hallaire // Highway Research Board Special Report. – 1958. – № 40. – P. 88-105.
 75. *Hoff, N.J.* The Analysis of Structures / N.J. Hoff. – N.-Y.: John Wiley; London : Chapman and Hall, 1956. – 493 pp.
 76. *Khudyakov Yu.V.* On Mathematical Modeling of the Measurement Transducers / Yu.V. Khudyakov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. – Vol. 3, № 3. – P. 68-73.
 77. *Kovács, M.* Introduction to stochastic partial differential equations / M. Kovács, S. Larsson // Proceedings of "New Directions in the Mathematical and Computer Sciences", National Universities Commission,

- Abuja, Nigeria, October 8-12, 2007. Publications of the ICMCS. – Vol. 4. – 2008. – P. 159-232.
78. *Krauss, I.* Die Bestimmung der Transmissivitat van Grundwasserleitern aus den Einschwingverfahren des Brunnens–Grundwasserleitersystems [The determination of the transmissivity of aquifers from the transient behaviour of the well-aquifer system] / I. Krauss // J. Geophys. – 1974. – Vol. 40, № 5. – P. 381-400.
 79. *Levine, H.A.* Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Du_t = -Au + \mathfrak{F}(u)$ // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1973. – Vol. 51, № 5. – P. 371-386.
 80. Lyapunov – Shmidt method in nonlinear analysis and applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
 81. *Melnikova, I.V.* Abstract stochastic equations. I. Classical and distributional solutions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, U.A. Anufrieva // Journal of Mathematical Sciences. – 2002. – Vol. 111, № 2. – P. 3430-3475.
 82. *Morel, E.N.* Numerical modelling of groundwater flow in regional aquifers dissected by dykes / E.N. Morel, R.S. Wikramaratna // Hydrological Sciences Journal. – 1982. – Vol. 27, № 1. – P. 63-67.
 83. *Nelson, E.* Dynamical Theories of Brownian Motion / E. Nelson. – Princeton University Press. 1967.
 84. *Oskolkov, A.P.* Nonlocal problems for one class of nonlinear operator equations that arise in the theory of Sobolev type equations / A. P. Oskolkov // Journal of Soviet Mathematics. – 1993. – Vol. 64, issue 1. – P. 724-735.
 85. *Pyatkov, S.G.* Operator theory. Nonclassical problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2002.

86. *Showalter, R.E.* Monotone operators in Banach Space and and nonlinear partial differential equations / R.E. Showalter. – Providence: AMS, 1997.
87. Showalter R.E. The Sobolev type Equations. I / R.E. Showalter // *Applicable Analysis*. – 1975. – Vol. 5, № 1. – P. 15-22.
88. Showalter R.E. The Sobolev type Equations. II / R.E. Showalter // *Applicable Analysis*. – 1975. – Vol. 5, № 2. – P. 81-99.
89. *Showalter, R.E.* Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations / R.E. Showalter. – London; San Francisco; Melbourne: Pitman, 1977.
90. *Sviridyuk, G.A.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
91. *Sviridyuk, G.A.* The Dynamical Models of Sobolev Type with Showalter–Sidorov Condition and Additive "Noise- / G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*. – 2014. – Vol. 7, issue 1. – P. 90-103.
92. The Optimal Measurements Theory as a New Paradigm in the Metrology / A.L. Shestakov, A.V. Keller, A.A. Zamyshlyayeva, N.A. Manakova, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. – 2020. – Vol. 7, № 1. – P. 3-23.
93. *Ting, T.W.* Parabolic and pseudo-parabolic partial differential equations / T.W. Ting // *Journal of The Mathematical Society of Japan*. – 1969. – Vol. 21, № 3. – P. 440-453.
94. On the theory of nonclassical equations of mathematical physics / V.N. Vragov, A.I. Kozhanov, S.G. Pyatkov, S.N. Glazatov // *Conditionally wellposed problems*. – Moscow, Utrecht: TVP/TSP, 1993. – P. 299-321.

Публикации автора

Основные публикации

95. *Soldatova, E.A.* Information–logical modelling in studies of non-classical linear models of mathematical physics / E.A. Soldatova, A.V. Keller, S.A. Zagrebina // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2021. – Vol. 8 – С. 14-31. (MathSciNet, BAK)
96. *Солдатова, Е.А.* Алгоритмы и обработка информации в численном исследовании стохастической модели Баренблатта – Желтова – Кочинной / Е.А. Солдатова, А.В. Келлер // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия Математика. Механика. Физика. –2021. – Т. 13, № 4. –С. 29-36. – DOI 10.14529/mmph210404. (RSCI, zbMATH, BAK)
97. *Soldatova, E.A.* Numerical Research of the Barenblatt – Zheltov – Kochina Stochastic Model / S. I. Kadchenko, E. A. Soldatova, S. A. Zagrebina // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2016. – Vol. 9, № 2. –P. 117-123. - DOI 10.14529/mmp160211. (WoS, Scopus, BAK)
98. *Soldatova, E.A.* The Stochastic Linear Oskolkov Model of the Oil Transportation by the Pipeline / S.A. Zagrebina E.A. Soldatova, G.A. Sviridyuk // Semigroups of Operators – Theory and Applications : Springer Proceedings in Mathematics and Statistics / [International Conference], Bedlewo, Poland, 06-11 Oktober 2013. – Heidelberg; New York; Dordrecht; London: pringer New York LLC, 2015. – P. 317-325. – DOI 10.1007/978-3-319-12145-1-20. (WoS, Scopus)
99. *Солдатова, Е.А.* Начально-конечная задача для линейной стохастической модели Хоффа / Е.А. Солдатова // Вестник Южно-Уральского

- государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 124-128. – DOI 10.14529/mmp140212. (WoS, Scopus, ВАК)
100. *Солдатова, Е.А.* Линейные уравнения соболевского типа с относительно р-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом / Е.А. Солдатова, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 20-34. (RSCI, ВАК)
101. Численное исследование движения жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде со случайным внешним воздействием: Свидетельство № 2015612400 / Солдатова Е.А, Загребина С.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2014660025; заявл. 07.10.2014; зарегистр. 18.02.2015, реестр программ для ЭВМ.
102. Программный комплекс решения стохастических уравнений соболевского типа: Свидетельство № 2016614622 / Солдатова Е.А., Кадченко С.И., Загребина С.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2016611855; заявл. 09.03.2016; зарегистр. 27.04.2016, реестр программ для ЭВМ.

Другие публикации

103. *Солдатова, Е.А.* Об одной вырожденной модели с белым шумом / С.А. Загребина, Е.А. Солдатова // Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование : Материалы Международного симпозиума, посвященного 100-летию математического образования в Восточной Сибири и 80-летию со дня рождения профессора О.

- В. Васильева, Иркутск, 07-12 октября 2019 года. – Иркутск: Иркутский государственный университет, 2019. – С. 132–135.
104. *Солдатова, Е.А.* Задача Шоултера – Сидорова для линейной стохастической модели Осколкова на графе / Е.А. Солдатова // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2016 : материалы международной конференции, Воронеж, 25-31 января 2016 года / Под редакцией В. А. Костина. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга", 2016. – С. 369-375.
 105. *Солдатова, Е.А.* Уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной с белым шумом на графе / Н.А. Загребина, Е.А. Солдатова // Дифференциальные уравнения и их приложения: сб. материалов междунар. конф. (г. Белгород, 26-31 мая 2013 г.). – 2013. – С. 91-92.
 106. *Солдатова, Е.А.* Стохастические уравнения соболевского типа на графе / Н.А. Загребина, Е.А. Солдатова // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения Сергея Львовича Соболева. Новосибирск, Россия, 18 – 24 августа 2013 г.: тез. докл. / Сиб. отд-ние РАН; Ин-т математики им. С.Л. Соболева; Мин-во образования и науки РФ; Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 2013. – С. 138.
 107. *Солдатова, Е.А.* Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной с белым шумом / С.А. Загребина, Е.А. Солдатова // Обзорные прикладной и промышленной математики. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 252–254.
 108. *Солдатова, Е.А.* Модель Дэвиса с аддитивным белым шумом / С.А. Загребина, Е.А. Солдатова // Измерения: состояние, перспективы развития: тез. докл. междунар. науч.-практ. конф. г. Челябинск, 25-27 сент. 2012 г. в 2 т. – Челябинск, 2012. – Т. 1 – С. 218-220.

Приложение 1. Свидетельство о регистрации программы численного исследования жидкости, фильтрующей в трещиновато-пористой среде со случайным внешним воздействием

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015612400

**Численное исследование движения жидкости,
фильтрующей в трещиновато пористой среде со
случайным внешним воздействием**

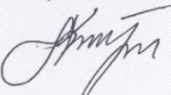
Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ» (НИУ)) (RU)*

Авторы: *Загребина Софья Александровна (RU),
Солдатова Екатерина Александровна (RU)*

Заявка № **2014660025**
Дата поступления **07 октября 2014 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **18 февраля 2015 г.**

Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности



 Л.Л. Кирий

г. 2014-61

Приложение 2. Свидетельство о регистрации программного комплекса решения стохастических уравнений соболевского типа

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2016614622

**Программный комплекс решения стохастических уравнений
соболевского типа**

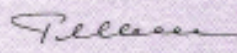
Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего профессионального
образования «Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет) (RU)*

Авторы: *Солдатова Екатерина Александровна (RU), Кадченко
Сергей Иванович (RU), Загребина Софья Александровна (RU)*



Заявка № **2016611855**
Дата поступления **09 марта 2016 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **27 апреля 2016 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

 **Г.П. Итсков**