

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Смирнов Владимир Алексеевич

Повышение эффективности приводных устройств в машинах с параллельными  
кинематическими структурами за счет уменьшения энергопотребления,  
повышения точности и быстродействия

Специальность 05.02.02

Машиноведение, системы приводов и детали машин

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук

Челябинск – 2019

## Оглавление

Введение.....	6
1. Концепция повышения эффективности технологического оборудования с параллельными кинематическими структурами.....	21
1.1. Подходы к повышению эффективности технологического оборудования.....	24
1.2. Классификация механизмов с параллельными кинематическими цепями.....	29
1.3. Направления повышения эффективности технологического оборудования с параллельными кинематическими структурами.....	37
1.4. Выводы по главе.....	44
2. Кинематические модели устройств на основе механизмов с параллельными кинематическими цепями.....	46
2.1. Построение кинематических моделей для плоских механизмов с параллельными кинематическими цепями.....	48
2.1.1. Кинематическая модель плоского механизма с двумя степенями свободы.....	48
2.1.2. Кинематическая модель плоского механизма с тремя степенями свободы.....	51
2.2. Построение кинематических моделей пространственных механизмов с параллельными кинематическими цепями.....	52
2.2.1. Углы Эйлера-Крылова.....	52
2.2.2. Понятие $L$ -координат.....	62
2.2.3. Кинематическая модель механизма типа «гексапод».....	63
2.2.4. Решение прямой задачи кинематики для механизма типа «гексапод».....	66
2.2.5. Уточненная кинематическая модель механизма типа «гексапод» ....	74
2.2.6. Кинематическая модель механизма типа «трипод».....	80
2.2.7. Кинематическая модель механизма типа «трицепт».....	83

2.2.8. Кинематическая модель устройства, имеющего штанги постоянной длины .....	89
2.3. Использование кватернионов при решении задач кинематики механизмов с параллельными кинематическими цепями.....	92
2.3.1. Кватернионы и их свойства .....	92
2.3.2. Использование кватернионов при описании положения твердого тела с неподвижной точкой.....	94
2.3.3. Использование кватернионов при решении задачи о трех шарнирно закрепленных стержнях.....	96
2.3.4. Использование кватернионов при решении задач кинематики для трипода .....	104
2.4. Исследование характера изменения входных координат при реализации типовых траекторий .....	109
2.5. Выводы по главе.....	116
3. Использование фактора избыточности выходных координат для повышения эффективности приводных устройств оборудования с параллельной кинематической структурой .....	119
3.1. Снижение потребляемой приводами энергии в оборудовании с традиционными кинематическими схемами .....	121
3.2. Избыточность координат и повышение эффективности в оборудовании на основе плоского механизма с параллельными кинематическими цепями.....	129
3.3. Особые положения в механизмах с параллельными кинематическими цепями .....	137
3.4. Моделирование законов управления приводными устройствами машины на основе механизма типа «трипод».....	144
3.4.1. Закон, оптимальный по приращениям входных координат .....	144
3.4.2. Закон, оптимальный по усилиям .....	150
3.4.3. Энергоэффективный закон.....	153

3.5. Моделирование оптимальных законов управления приводными устройствами машины на основе механизма типа «гексапод» .....	158
3.5.1. Закон, оптимальный по приращениям входных координат .....	158
3.5.2. Закон, оптимальный по усилиям .....	166
3.5.1. Энергоэффективный закон .....	173
3.6. Методика расчета оптимальных законов управления приводным устройством машины с параллельной кинематической структурой .....	177
3.7. Экспериментальная проверка возможности реализации энергоэффективного закона управления приводными устройствами .....	181
3.8. Возможные области применения энергоэффективного управления приводными устройствами машин с параллельными кинематическими структурами .....	186
3.8.1. Инкрементальная формовка .....	186
3.8.2. Управление движением летательного аппарата в атмосфере .....	191
3.9. Выводы по главе .....	194
4. Динамические модели оборудования с параллельной кинематической структурой .....	197
4.1. Цели динамического моделирования .....	197
4.2. Динамические модели плоского механизма с параллельными кинематическими цепями .....	198
4.3. Динамическая модель пространственного механизма .....	213
4.4. Моделирование закона энергоэффективного управления приводными устройствами .....	231
4.5. Динамическая модель пространственного механизма с упруго-диссипативными связями .....	238
4.6. Выводы по главе .....	250
5. Повышение точности траекторного движения рабочего органа в оборудовании с параллельной кинематической структурой .....	252
5.1. Методы решения задачи интерполяции траектории рабочего органа .....	252

5.2. Многокоординатная интерполяция траекторий в оборудовании с параллельной кинематической структурой .....	261
5.2.1. Метод оценочной функции .....	262
5.2.2. Метод интерполяции на постоянной несущей частоте.....	278
5.2.3. Моделирование метода интерполяции на постоянной несущей частоте .....	308
5.2.4. Уменьшение погрешностей формирования траектории, вызванных неточностью кинематической модели .....	312
5.2.5. Уменьшение погрешностей формирования траектории, вызванных дискретностью приводов.....	324
5.2.6. Сравнение результатов моделирования интерполяции на постоянной несущей частоте .....	336
5.3. Выводы по главе.....	340
Заключение .....	342
Список литературы .....	347
Приложение А .....	378
Приложение Б.....	379
Приложение В.....	380
Приложение Г .....	381
Приложение Д.....	382
Приложение Е.....	383
Приложение Ж.....	384
Приложение И .....	385
Приложение К.....	386

## Введение

К современным технологическим машинам предъявляются все более высокие требования по скорости выполнения технологических операций, качеству формообразования и экономичности. Одним из возможных путей, обеспечивающих выполнение этих требований, является построение технологических машин с использованием нетрадиционных для современного машиностроения компоновочных схем.

Традиционной для многих видов технологических машин является схема, при которой механизмы, обеспечивающие взаимное перемещение рабочего органа (инструмента) и заготовки, с точки зрения кинематики расположены последовательно. Типичным представителем технологической машины с такой компоновкой является 3-х координатный консольный фрезерный станок, кинематическая схема которого показана на рисунке 11, а. Технологическую машину, выполняющую функцию обработки материала (например, фрезерный станок) будем в дальнейшем называть обрабатывающим оборудованием.

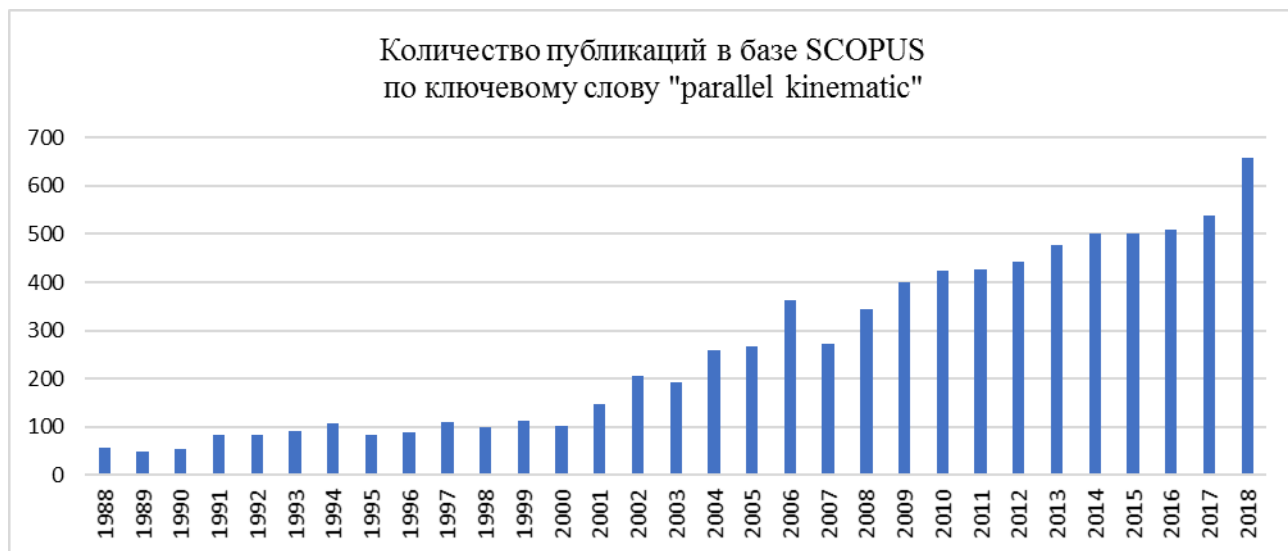
Перспективными для обрабатывающего оборудования являются компоновочные схемы на основе механизмов с параллельными кинематическими цепями [51, 119, 144]. Механизмы с параллельными кинематическими цепями (далее – МПКЦ) представляют собой класс механизмов, в которых выходное звено связано с основанием двумя и более кинематическими цепями. Другое название таких механизмов – механизмы с параллельной кинематикой. Машины/оборудование на основе МПКЦ будем называть машинами с параллельными кинематическими структурами.

Среди МПКЦ наиболее известен механизм, называемый платформой Стюарта [264] (рисунок 13). В этом механизме, называемом также гексаподом, подвижная платформа связана с неподвижным основанием посредством шести штанг. Каждая штанга крепится к платформе при помощи шарового шарнира, а к основанию – при помощи карданного шарнира. За счет изменения длин штанг обеспечивается перемещение платформы по шести координатам. Вне зависимости от ха-

рактера нагружения платформы внешними силами штанги в данном механизме работают только на растяжение-сжатие. Изначально гексаподы использовались при построении имитаторов разного рода объектов, например, кабины самолета при тренировках летчиков [151]. Очевидно, к таким устройствам не предъявлялось высоких требований по точности движения платформы. В качестве штанг использовались силовые гидроцилиндры.

Замкнутость кинематических цепей в МПКЦ обеспечивает этим механизмам высокую жесткость, скорость и точность перемещения выходного звена [119], что предопределило попытки использовать эти механизмы в машиностроении. Разработки технологического оборудования на основе МПКЦ начались в конце 70-х годов XX века. Маккаллион (McCallion) и Трюонг (Truong) использовали МПКЦ для построения автоматического сборочного стола и исследовали задачу синтеза требуемых траекторий движения [193].

Широкие систематические исследования МПКЦ начались в 80-е годы XX века; интерес к исследованию таких механизмов со временем только увеличивается, что отражается в положительной публикационной динамике, показанной на диаграмме.



Одной из первых работ, посвященных МПКЦ, является книга К. Ханта «Кинематическая геометрия механизмов» [154], в которой автор предлагает использовать платформу Стюарта как механизм руки робота. Понимая перспективность МПКЦ, К. Хант продолжил исследования этих механизмов, предложив классифи-

кацию МПКЦ применительно к структурам, в которых количество параллельных кинематических цепей равно количеству координат механизма. Познакомиться с результатами исследований отечественные специалисты могли по статье [105].

Предложенная К. Хантом классификация МПКЦ различными авторами [24, 25, 63, 241] была существенно расширена и распространена на механизмы, в которых количество параллельных кинематических цепей не равно количеству координат.

Значительный вклад в разработку теории и практики МПКЦ и машин с параллельными кинематическими структурами внесен Ж.-П. Мерле (J.-P. Merlet) [195–230]. В работе [224] этот ученый отмечает задачи, решение которых применительно к МПКЦ представляет серьезный интерес: исследование схем, имеющих 4 или 5 степеней свободы; получение эффективных методик решения задач кинематики и динамики МПКЦ; изучение вопросов планирования траектории выходного звена МПКЦ с учетом особенностей этих механизмов; обеспечение наибольшего значения для величины рабочего пространства (workspace); идентификация параметров элементов МПКЦ.

Среди отечественных ученых можно выделить работы В.А. Глазунова, В.В. Бушуева, П.В. Подзорова, В.Л. Афолина, А.Н. Смоленцева и ряда других (см. например, [1, 2, 5–8, 15, 16, 22, 30, 35, 41, 51, 59, 97]).

При построении МПКЦ используются различные кинематические схемы, различающиеся числом степеней свободы. Причем наибольшее внимание уделено конструкциям с 6-ю и 3-мя степенями свободы – до 80 %. Однако для некоторых приложений требуются МПКЦ с 4-мя или 5-ю степенями свободы, изученные в гораздо меньшей степени. Создание МПКЦ с 4-мя или 5-ю степенями свободы осложнено тем, что их реализация невозможна с использованием однотипных кинематических цепей. Примеры исследований таких механизмов приведены в [141, 147, 243]. В работе [216] исследован механизм, имеющий 4 степени свободы, кинематические цепи в котором реализованы гибкими связями – нитями (тросами). Исследования МПКЦ с гибкими связями ведутся как за рубежом [139], так и в нашей стране [98].



Механизмы с 2-мя степенями свободы, несмотря на свойственную им ограниченность формируемых движений, также находят применение и являются объектами исследований [113, 265, 275, 281].

Одной из проблем, возникающих при анализе МПКЦ, является определение кинематических связей между его входными и выходными координатами, т. е. решение задач кинематики. Для МПКЦ особую сложность имеет решение прямой задачи кинематики. Решению этой задачи применительно к платформе Стюарта и другим МПКЦ посвящены многие работы, опубликованные в конце XX – начале XXI века (см. например, [48, 102, 107, 155–159, 162–164, 185, 198, 202, 211, 214, 219, 226, 256–260, 278]).

Решение прямой задачи осуществляется в численном или в замкнутом (closed-form) виде. Численные алгоритмы направлены на поиск единственного решения системы уравнений, описывающих конкретный МПКЦ, чаще всего – платформу Стюарта. Основная проблема данного подхода – относительно невысокая сходимость предложенных алгоритмов, что требует выбора малых перемещений при переходе от одного положения механизма к другому. Однако при использовании современных математических пакетов (MATLAB и т. п.), реализующих качественные вычислительные процедуры [34, 44] отмеченная проблема является легко разрешимой.

Поиск решения прямой задачи в замкнутом виде [116, 129, 155, 157, 198, 202, 246] предполагает реструктуризацию исходного МПКЦ с целью уменьшения количества неизвестных. Идеальный случай – сведение задачи к полиному одной переменной с его последующим решением. Так как реструктуризация МПКЦ редко позволяет получить полином одной переменной, то ее используют для снижения числа уравнений, описывающих механизм, с последующим численным решением этих уравнений [102, 157–159, 259].

Предпринимаются попытки аналитического решения прямой задачи за счет использования информации, поступающей с дополнительных датчиков [266].

Для исследования кинематики МПКЦ используется винтовое исчисление, которое позволяет придать уравнениям более компактную форму [25, 105, 141]. В

работе [137] прямая задача кинематики решалась с использованием нейронных сетей.

Решение задач кинематики представляет интерес как с точки зрения синтеза МПКЦ с заданными свойствами [115, 152, 210, 244], так и с точки зрения управления оборудованием, построенным на основе МПКЦ [234, 250].

Динамический анализ рассмотрен в литературе в гораздо меньшей степени, чем вопросы кинематического анализа [136]. Впервые вопросы динамики применительно к платформе Стюарта рассматривались в работах E. Fichter [142] и J. P. Merlet [196]. Fichter рассматривал динамику платформы в предположении, что инерционные характеристики штанг и трение в шарнирах незначительны. Merlet решал задачи динамики в более общей постановке.

В более поздних исследованиях динамика МПКЦ рассматривалась при введении моделей элементов механизмов, отражающих их инерционные свойства [138, 148, 153, 165, 169, 170, 175, 182, 186, 187, 276, 283]. При исследовании использовались в основном классические методы, основанные на уравнениях Ньютона-Эйлера и Лагранжа.

В работе [123] сформулирована обратная задача динамики для МПКЦ с учетом его схемы и инерционных свойств элементов. Решение задачи сведено к эффективному алгоритму и показана возможность его реализации с использованием параллельных вычислений. Параллельные вычислительные схемы достаточно удобны для численного решения задач динамики МПКЦ из-за имеющего место параллелизма в структуре этих механизмов [149].

Использование для анализа МПКЦ специального математического аппарата – теории винтов позволило получить уравнения динамики в более компактной форме [25].

Современное состояние вопроса исследования динамики машин с параллельными кинематическими структурами рассмотрено в [240], там же приведена обширная библиография по данному вопросу.

При функционировании технологической машины с параллельной кинематической структурой необходимо обеспечить перемещение ее выходного звена по

заданной траектории с заданной скоростью, причем траектория не должна проходить вблизи особых положений (точек сингулярности) используемого МПКЦ, при реализации траектории не должны возникать коллизии – пересечения (касания) штанг механизма. Исследованию этих вопросов посвящены многочисленные работы отечественных и зарубежных авторов [32, 101, 110, 112, 118, 133, 171, 184, 197, 217, 222, 225, 227, 234, 236, 241, 279].

Совокупность реализуемых МПКЦ траекторий составляет его рабочее пространство. Очевидно, что функциональность машины с параллельной кинематической структурой будет тем выше, чем больший размер будет иметь ее рабочее пространство. Кроме того, при проектировании таких машин могут формулироваться специфические требования к рабочему пространству, например, его форме. Исследованиям рабочих пространств МПКЦ и вопросам проектирования МПКЦ с учетом требований к рабочему пространству посвящено большое количество работ, например [20, 100, 106, 122, 123, 132, 143, 199, 205–210, 217, 227–230, 239, 245, 269, 271, 280].

Обеспечение движения рабочего органа технологической машины с параллельной кинематической структурой по заданной траектории с требуемой скоростью невозможно без всеобъемлющего решения задачи управления. При управлении такими машинами используются как классические подходы, основанные на кинематических и динамических моделях [75, 81, 92, 109, 121, 131, 153, 172, 177–181, 186, 240, 247, 251], так и методы робастного [282], нечеткого [262], нейросетевого [127, 242] управления, и управления, использующего генетические алгоритмы [237]. В работах, отражающих исследования в области управления машинами с параллельными кинематическими структурами, отмечается, что подходы к аппаратному построению систем управления такими машинами практически не отличаются от подходов, реализуемых применительно к оборудованию и роботам, построенным с использованием разомкнутых кинематических схем. В то же время особенности машин с параллельными кинематическими структурами требуют иных алгоритмов управления, реализация которых в режиме реального времени

(real-time control) может быть затруднена. Описания систем управления, работающих в реальном времени, приведены в [120, 131, 168, 176, 263, 267].

Помимо обеспечения движения рабочего органа законы управления могут быть направлены на повышение эффективности работы машин с параллельными кинематическими структурами по тому или иному критерию. В работах ряда авторов рассмотрены подходы к управлению, обеспечивающие повышение производительности таких машин [150], снижение усилий, возникающих в ее элементах, а также повышение точности обработки за счет оптимизации жесткости [60]. В работе [195] для повышения эффективности работы такой машины предлагается использовать избыточную степень свободы (*redundant/extra degree of freedom*) – имеющуюся в оборудовании независимую управляемую координату, не используемую в конкретной технологической операции. В этой работе было рассмотрено использование избыточной координаты для снижения усилий в штангах механизма-гексапода. В работе [183] избыточная степень свободы используется при решении задачи повышения точности движения рабочего органа по траектории за счет оптимального изменения жесткости конструкции оборудования. В работе [235] избыточная степень свободы используется для максимизации силы резания при многокоординатном фрезеровании. В перечисленных работах в качестве избыточной рассматривается одна угловая координата, хотя описываемые МПКЦ имеют три независимые угловые координаты. Представляет интерес распространение понятия избыточной на все три независимые угловые координаты.

Повышение энергоэффективности машины с параллельной кинематической структурой при перемещении ее рабочего органа из одной точки траектории в другую за минимальное время рассмотрено в работе [130]. Снижение потребления энергии в этой работе предложено обеспечивать за счет уменьшения возникающих при движении динамических нагрузок. Однако предложенный подход не подразумевает контроль формируемой траектории между начальной и конечной точками, что недопустимо для реального технологического оборудования.

В настоящее время заметен интерес к МПКЦ с избыточными кинематическими связями (*redundant parallel kinematic mechanisms*) [190]. В таких механизмах

количество входных (управляющих) координат превышает количество выходных (управляемых) координат, что позволяет придать оборудованию, построенному на основе таких механизмов, дополнительные качества. Например, за счет избыточности в оборудовании может обеспечиваться обход точек сингулярности [110]. Кроме того, избыточность кинематических связей может быть использована для повышения эффективности оборудования на основе МПКЦ по критериям энергоэффективности оборудования [188], повышения точности движения выходного звена [125], снижения нагрузок на элементы оборудования [126]. В силу того, что избыточные кинематические связи ведут к усложнению МПКЦ и удорожанию оборудования на его основе, такие механизмы практически не используются в реальном оборудовании.

Анализ публикаций показал, что описанные в них подходы к совершенствованию машин с параллельными кинематическими структурами не в полной мере раскрывают потенциальные возможности по повышению их эффективности. Детальное изучение наиболее распространенных МПКЦ позволило разработать относительно простые в реализации законы управления приводами технологического оборудования на основе МПКЦ, обеспечивающие уменьшение энергопотребления, повышение точности и быстродействия такого оборудования. Повышение эффективности обеспечивается за счет использования трех управляемых угловых координат в качестве избыточных, применения оригинальных математических моделей и алгоритмов многокоординатной интерполяции.

#### Цели и задачи работы

Цель работы – совершенствование машин с параллельными кинематическими структурами на основе научно обоснованных законов управления приводными устройствами этих машин.

Объект исследования – процесс управляемого движения рабочих органов машин с параллельными кинематическими структурами при наличии фактора избыточности координат как основы для повышения эффективности таких машин.

Предмет исследования – закономерности движения рабочих органов машин с параллельными кинематическими структурами, в том числе при наличии фактора

избыточности координат, позволяющие формировать законы управления приводными устройствами, обеспечивающие повышение эффективности таких машин.

Здесь и далее под повышением эффективности машин с параллельными кинематическими структурами понимается повышение эффективности их приводных устройств с целью обеспечить:

1. Повышение точности движения выходного звена МПКЦ, лежащего в основе машины с параллельной кинематической структурой;

2. Повышение быстродействия машины с параллельной кинематической структурой за счет:

– повышения скорости движения выходного звена МПКЦ, лежащего в основе машины;

– упрощения вычислительных процедур при решении траекторных задач и, как следствие, сокращения времени вычислений;

3. Повышение надежности машины с параллельной кинематической структурой за счет снижения нагрузок на элементы ее приводного устройства;

4. Уменьшение энергии, потребляемой приводами машины с параллельной кинематической структурой при ее функционировании.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1. Разработка теоретических положений, обеспечивающих использование фактора избыточности координат в машинах с параллельными кинематическими структурами для повышения быстродействия, снижения нагрузок на элементы конструкции и приводы, уменьшения потребляемой приводами энергии. Проверка теоретических положений с помощью компьютерных и физических экспериментов.

2. Разработка методики (алгоритма) расчета законов управления приводным устройством машины с параллельной кинематической структурой, обеспечивающих повышение быстродействия, снижение нагрузок на элементы конструкции и приводы, уменьшение потребляемой приводами энергии.

3. Повышение достоверности кинематической модели механизма-гексапода с целью повышения точности движения выходного звена механизма.

4. Построение математических моделей МПКЦ с использованием гиперкомплексных чисел – кватернионов с целью повышения быстродействия машин с параллельными кинематическими структурами за счет упрощения вычислительных процедур при решении траекторных задач.

5. Построение динамических моделей машин с параллельными кинематическими структурами и исследование влияния массо-инерционных параметров элементов машин на повышение эффективности их функционирования.

6. Получение закономерностей движения выходного звена МПКЦ и разработка на их основе алгоритмов многокоординатной интерполяции, учитывающих особенности МПКЦ, способствующих повышению точности и быстродействия машин с параллельными кинематическими структурами.

#### Методы исследования

Для решения поставленных задач использованы положения высшей математики, теоретической механики, механики роботов и манипуляционных систем, теории автоматического управления, методы математического моделирования. При проведении исследований были использованы программные пакеты C++ Builder, MATLAB, AVR Studio.

Достоверность и обоснованность исследований определяется корректным использованием математического аппарата и подтверждается результатами моделирования и экспериментальных исследований.

#### Научная новизна

1. Впервые использован фактор избыточности координат в машине с параллельной кинематической структурой для повышения ее энергоэффективности.

2. Сформулированы законы оптимального управления приводными устройствами машин с параллельными кинематическими структурами гексаподного типа, обеспечивающие:

- увеличение быстродействия машины за счет повышения скорости перемещения ее рабочего органа;
- повышение надежности машины за счет перераспределения возникающих в ее элементах силовых факторов;

– снижение потребления энергии приводами машины с параллельной кинематической структурой.

3. Разработаны новые математические модели машин с параллельными кинематическими структурами, обеспечивающие сокращение вычислительных операций за счет использования гиперкомплексных чисел.

4. Разработаны оригинальные динамические модели, отличающиеся разделением усилий в элементах машины с параллельной кинематической структурой на статическую и динамическую составляющие и позволившие провести исследование влияния массо-инерционных характеристик элементов машины на повышение эффективности ее приводного устройства.

5. Развита и адаптирована для многокоординатной интерполяции в машинах с параллельными кинематическими структурами метод оценочной функции и метод интерполяции на постоянной несущей частоте, обеспечившие повышение точности при решении траекторных задач.

#### Практическая ценность и реализация результатов работы

Практическая значимость результатов работы заключается в создании:

– методики расчета законов управления приводными устройствами машин с параллельными кинематическими структурами, обеспечивающих повышение быстродействия, снижение нагрузок на элементы конструкции и приводы, уменьшение потребляемой приводами энергии;

– методов многокоординатной интерполяции, учитывающих особенности механизмов с параллельными кинематическими цепями и обеспечивающих уменьшение погрешности перемещения рабочих органов машин с параллельными кинематическими структурами;

– уточненной кинематической модели МПКЦ типа «гексапод», позволяющей учесть погрешности реальных кардановых шарниров, тем самым повысив точность машины с параллельной кинематической структурой;

– динамических моделей механизмов с параллельными кинематическими цепями, позволяющих оценивать эффективность оптимальных законов управления



приводными устройствами; динамические модели использованы при решении задач управления машинами с параллельными кинематическими структурами.

Практическая значимость результатов подтверждена их применением на предприятиях региона.

Разработанная методика расчета оптимальных законов управления приводными устройствами использована при создании программного обеспечения для расчета траекторий движения рабочего органа ОПКС на основе механизма гексапода; программное обеспечение входит в состав программно-аппаратного комплекса для управления оборудованием с параллельной кинематической структурой, созданного в ООО «НПО «ТехноЛайн», г. Челябинск (Приложение А).

Разработанные методы многокоординатной интерполяции, учитывающие особенности МПКЦ, использованы при создании программно-аппаратного комплекса для управления оборудованием с параллельной кинематической структурой (ООО «НПО «ТехноЛайн») и системы управления прецизионного сварочного позиционера с параллельной кинематической структурой, внедренного в ООО «Завод энергоэффективного и емкостного оборудования», г. Челябинск (Приложение Б).

Уточненная кинематическая модель МПКЦ типа «гексапод» использована при создании прецизионного сварочного позиционера с параллельной кинематической структурой (ООО «Завод энергоэффективного и емкостного оборудования»).

Разработанные динамические модели использованы при создании программно-аппаратного комплекса для управления оборудованием с параллельной кинематической структурой (ООО «НПО «ТехноЛайн»), прецизионного сварочного позиционера с параллельной кинематической структурой (ООО «Завод энергоэффективного и емкостного оборудования»), специализированного станка с параллельной кинематической структурой для выполнении технологической операции инкрементальной формовки, внедренного в ООО «Челябинский завод мобильных энергоустановок и конструкций», г. Челябинск (Приложение В), а также исполь-

зованы для повышения эффективности приводов рабочих органов манипуляторов в ФГУП ПО «Октябрь», г. Каменск-Уральский (Приложение Г).

На основе материалов диссертационной работы в ООО «Челябинский завод мобильных энергоустановок и конструкций» создана методика снижения затрат при выполнении технологической операции инкрементальной формовки на специализированном станке с параллельной кинематической структурой.

Материалы диссертации использованы:

– при выполнении проекта «Разработка интегрированного лабораторного комплекса «Мехатронные устройства» в рамках научной программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (ЮУрГУ, 2005 г.);

– при выполнении проекта «Устройство формирования дополнительных технологических координат на базе механизмов с параллельными кинематическими цепями» в рамках программы СТАРТ (ООО «НПО «ТехноЛайн», 2008 г.). Получен патент на полезную модель № 80137 «Устройство формирования дополнительных технологических координат» (Приложение Д);

– при выполнении инновационного проекта «Разработка конструкторской документации малогабаритного многокоординатного обрабатывающего устройства на основе механизма с параллельной кинематикой» в рамках конкурса «Перспективный проект» администрации г. Челябинска (ЮУрГУ, 2010 г.). Получен патент на полезную модель №111044 «Малогабаритное многокоординатное обрабатывающее устройство на основе механизма с параллельной кинематикой» (Приложение Е);

– при выполнении комплексного проекта «Создание серийного высокотехнологичного производства автоматизированного интеллектуального комплекса для энергоэффективного управления режимами работы систем теплоснабжения зданий и сооружений» в рамках реализации постановления Правительства Российской Федерации от 9 апреля 2010 г. № 218 «О мерах государственной поддержки развития кооперации российских высших учебных заведений и организаций, реализующих комплексные проекты по созданию высокотехнологичного производства» (ЮУрГУ, 2010–2012 гг.);

– при выполнении научно-исследовательской работы «Теоретические основы и методология наземной отработки летательных аппаратов с корректируемыми массо-геометрическими характеристиками» в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ (ЮУрГУ, 2012–2013 гг.). Получен патент на полезную модель №140220 «Шестикомпонентный измеритель-позиционер» (Приложение Ж);

– при выполнении научно-исследовательской работы «Исследование и разработка компонентов беспилотных транспортных систем» по заказу ФГУП «ПО «Октябрь» (ЮУрГУ, 2014 г.);

– при выполнении научно-исследовательской работы «Разработка методики и средств определения аэродинамических характеристик малогабаритных изделий массой до 100 кг, имеющих сложную форму наружной поверхности» по заказу АО «ГРЦ Макеева» (ЮУрГУ, 2014 г.);

С использованием материалов диссертации при участии автора были созданы:

- пакет прикладных программ для ЭВМ «WorkSpase РКМ» (Приложение И);
- прикладная программа для ЭВМ «Шестикомпонентный измеритель-позиционер для определения динамических характеристик беспилотного летательного аппарата при наземной отработке» (Приложение К).

Материалы диссертации использованы в учебном процессе в Южно-Уральском государственном университете по направлениям подготовки 15.03.04, 15.04.04, в частности, в дисциплинах «Мехатроника», «Основы оптимального управления», «Управление в технических системах», «Основы проектирования систем управления».

#### Апробация работы

Основные положения и отдельные результаты работы докладывались и обсуждались

- на Международной научно-технической конференции «Оптимизация процессов резания, разработка и эксплуатация мехатронных станочных систем» (Уфа, 2009);

– на 8-й международной научно-практической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности» (Санкт-Петербург, 2009);

– на 3-й Международной научной конференции «Современные проблемы информатизации в системах моделирования, программирования и телекоммуникациях» (URL: <http://www.econf.rae.ru/article/4667>);

– на XV Международной открытой научной конференции «Современные проблемы информатизации в анализе и синтезе программных и телекоммуникационных систем» (Воронеж, 2010);

– на конференции «Технические науки и современное производство» (Париж, Франция, 2013);

– на заочной конференции «Авиакосмические технологии и оборудование» (URL: <http://econf.rae.ru/article/7901>);

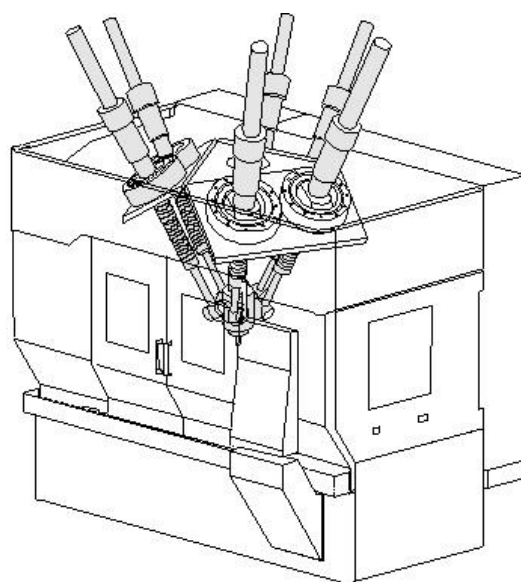
– в рамках ICIT 2013 (2013 IEEE International Conference on Industrial Technology, Cape Town, South Africa, 25-28 February, 2013).

## 1. Концепция повышения эффективности технологического оборудования с параллельными кинематическими структурами

Механизмы с параллельными кинематическими структурами и машины на их основе используются в различных областях техники. На основе МПКЦ строят разнообразные технические устройства: многокоординатное обрабатывающее оборудование (рисунок 1, [66]), координатно-измерительные машины (рисунок 2, [67]), манипуляторы (рисунок 3, [49]), тренажеры (рисунок 4, [33]), измерительные приборы (рисунок 5, [108]) и стенды (рисунок 6, [114]). МПКЦ был применен в стыковочном узле космических кораблей «Союз» и «Аполлон»; такие механизмы используются в андрогинных стыковочных узлах современных космических аппаратов (рисунок 7).



а)



б)

**Рисунок 1 – Многокоординатный обрабатывающий центр на основе МПКЦ:  
а) – внешний вид; б) – схема**

В каждом из представленных на рисунках 2–7 устройств можно выделить элементы, связывающие некоторый подвижный элемент с неподвижным, например, в многокоординатном обрабатывающем центре шпиндельный узел связан со станиной шестью элементами. В координатно-измерительной машине реализована аналогичная схема: измерительная головка связана с основанием шестью элементами.



а)



б)

**Рисунок 2 – Координатно-измерительная машина на основе МПКЦ:  
а) – внешний вид; б) – подвижный измерительный узел**

Схема, в которой подвижный элемент связывается с основанием с использованием шести элементов, является на практике наиболее распространенной: в представленных примерах она реализована в тренажере, измерителе сил и моментов, стыковочном узле.



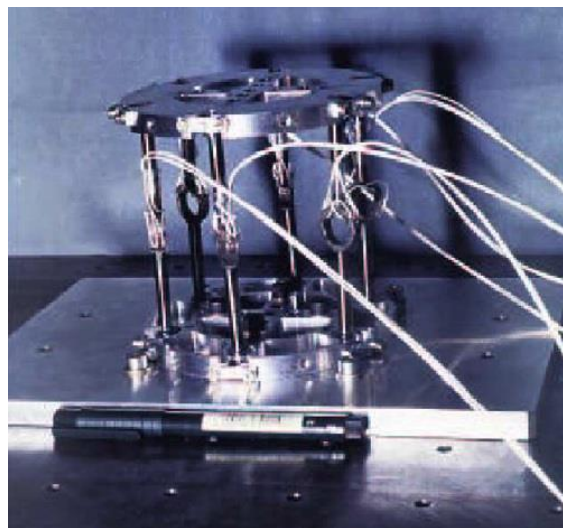
**Рисунок 3 – Манипулятор на основе МПКЦ**



**Рисунок 4 – Тренажер на основе МПКЦ**

При создании манипулятора на основе МКПС, установленного на подвижном шасси (см. рисунок 3), использована три элемента, соединяющих выходной узел с шасси. Такая схема также широко используется при построении разнообразных машин.

Многообразие областей использования машин на основе МКПС определяется их достоинствами: относительной простотой реализации, малой массой подвижных элементов, высокой удельной жесткостью, способностью обеспечивать высокую точность движения выходного звена, способностью суммировать мощности нескольких одновременно работающих приводов.



**Рисунок 5 – Измеритель сил и моментов на основе МПКЦ**



**Рисунок 6 – Стенд для измерения моментов инерции на основе МПКЦ**

Обработывающие машины на основе МПКЦ, например, многокоординатные обрабатывающие центры, являются наиболее широко используемыми машинами такого класса. Для такого оборудования, предназначенного для решения конкретных технологических задач, относительно просто формулируются требования к

характеру траекторных движений рабочего органа, к точности и скорости его перемещения, к быстродействию системы управления и т. п. В связи с этим, вопросы повышения эффективности машин с параллельными кинематическими структурами далее будут рассматриваться применительно к обрабатывающему оборудованию на основе МПКЦ.

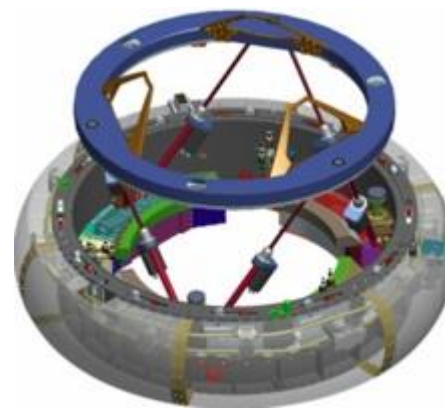


Рисунок 7 – 3D модель фрагмента стыковочного узла, использующего МПКЦ

### 1.1. Подходы к повышению эффективности технологического оборудования

В соответствие с ГОСТ 3.1109–82 под технологическим процессом понимается часть производственного процесса, содержащая целенаправленные действия по изменению и (или) определению состояния предмета труда. К предметам труда относятся заготовки и изделия. Для технологических процессов вводят характеристики и нормы, например:

- технологический режим – совокупность значений параметров технологического процесса в определенном интервале времени. К параметрам технологического процесса относятся: скорость резания, подача, глубина резания, температура нагрева или охлаждения и т. д.;

- штучное время – интервал времени, равный отношению цикла технологической операции к числу одновременно изготавливаемых или ремонтируемых изделий, или равный календарному времени сборочной операции;

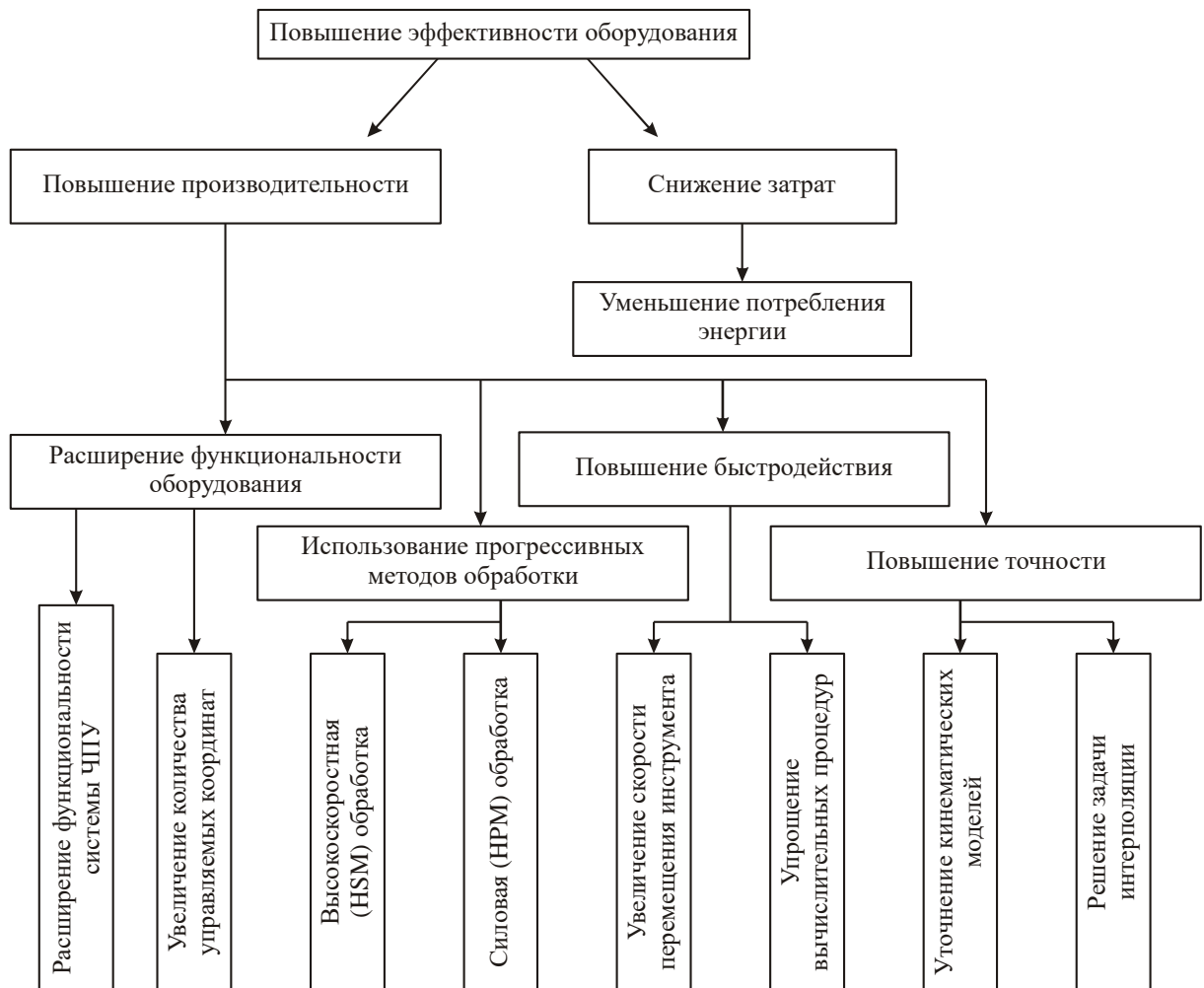
- технологическая норма – регламентированное значение показателя технологического процесса;

- технологическое нормирование – установление технически обоснованных норм расхода производственных ресурсов. Под производственными ресурсами понимают энергию, сырье, материалы, инструмент, рабочее время и т. д.



Снижение норм расхода производственных ресурсов без ущерба для характеристик технологического процесса, т. е. повышение его эффективности, является важной технической задачей.

Повышение эффективности технологического процесса невозможно без использования эффективного технологического оборудования. Некоторые из факторов, способствующих повышению эффективности технологического оборудования, показаны на рисунок 8. Схема на этом рисунке построена применительно к оборудованию, в процессе работы которого с помощью инструмента осуществляется удаления материала, например, реализуется фрезерная операция.



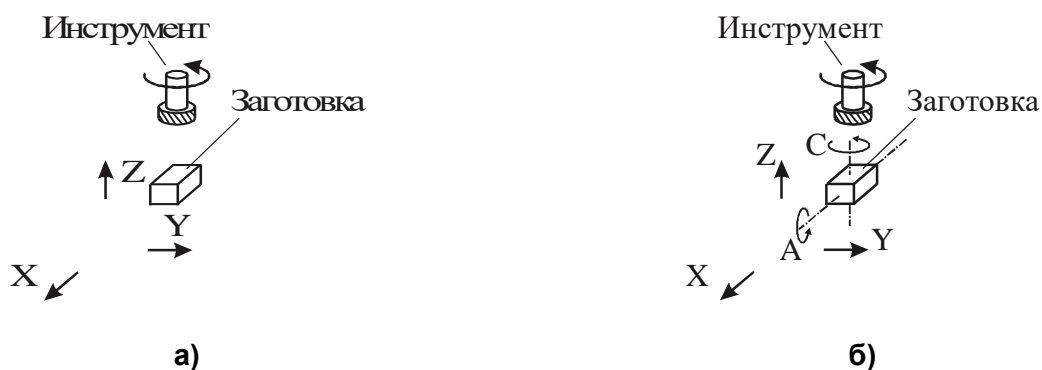
**Рисунок 8 – Факторы, влияющие на эффективность технологического оборудования**

Очевидным способом увеличения количества производимых на оборудовании изделий в единицу времени, т. е. повышения его производительности, является повышение его быстродействия. Под повышением быстродействия можно по-

нимать увеличение скорости перемещения рабочего органа оборудования, которое, в общем случае, требует увеличения мощности приводов этого оборудования. Повышение быстродействия в условиях ограничения мощности является перспективным способом повышения эффективности технологического оборудования.

Увеличение скорости перемещения рабочего органа предполагает снижение времени для проведения необходимых вычислений в системе ЧПУ оборудования. Алгоритмы вычислений не должны являться факторами, ограничивающими быстродействие, поэтому для повышения эффективности оборудования могут потребоваться более простые вычислительные процедуры. Упрощение вычислительных процедур может реализовываться за счет применения нетрадиционного математического аппарата.

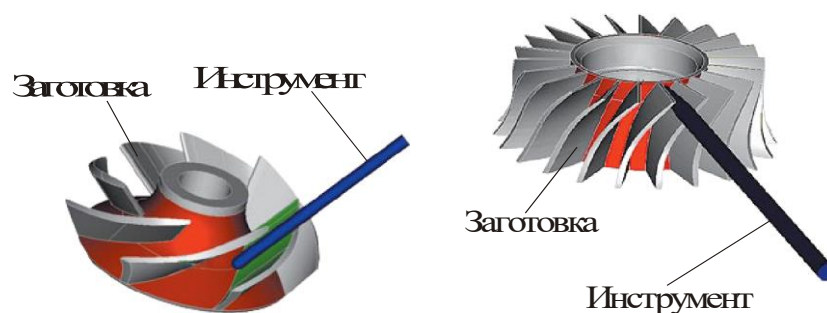
Повышение производительности может достигаться путем расширения функциональности оборудования и/или использованием при работе оборудования прогрессивных методов обработки. Примером оборудования, имеющего расширенный функционал, служат многокоординатные станки с числовым программным управлением. Многокоординатный станок NMV5000 фирмы Mori Seiki согласно информации фирмы-поставщика [65] относится к фрезерному оборудованию. Классическое фрезерование предусматривает [103] взаимное перемещение инструмента и заготовки по трем взаимно перпендикулярным линейным (декартовым) координатам (рисунок 9, а). В станке NMV5000 дополнительно реализован поворот заготовки относительно двух осей по угловым координатам А и С (рисунок 9, б).



**Рисунок 9 – Относительное движение инструмента и заготовки: а) – при классическом фрезеровании; б) – при многокоординатной обработке**

Изменение координаты  $S$  позволяет, в частности, осуществлять расточные операции, реализуемые обычно на станках токарной группы. В общем случае взаимное движение инструмента и заготовки на этом станке может осуществляться при одновременном изменении 5-ти координат, тем самым обеспечивается возможность многокоординатной обработки.

Многокоординатная обработка требуется при изготовлении достаточно большого количества деталей. Типовыми деталями, для которых необходимость многокоординатной обработки очевидна, являются разного рода крыльчатки (рисунок 10). Типовыми инструментами при многокоординатной обработке выступают концевые фрезы, в том числе профилированные: сферические, конические и т. п.



**Рисунок 10 – Многокоординатная обработка при изготовлении крыльчаток**

Реализация многокоординатной обработки предполагает использование многокоординатной интерполяции траектории движения инструмента, обеспечивающих расчет в реальном времени точек траектории и скоростей подач между этими точками. Необходимость в таких расчетах ужесточает требования к алгоритмическому обеспечению системы ЧПУ: алгоритмы многокоординатной интерполяции должны учитывать особенности оборудования, обеспечивать требуемую точность формирования траектории и не являться ограничивающим фактором.

Повышение производительности оборудования может достигаться за счет использования прогрессивных методов обработки, позволяющих при изготовлении детали удалять максимальное количество материала за минимальное время. Увеличение количества удаляемого материала может достигаться:

- увеличением скорости перемещения (подачи) инструмента при сохранении или уменьшении удаляемого за один проход инструмента материала – скоростная (высокоскоростная), HSM (High Speed Machining) обработка;

- увеличением количества удаляемого за один проход инструмента материала при сохранении или уменьшении скорости перемещения (подачи) инструмента – силовая, НРМ (High Performance Machining) обработка.

Реализация таких методов обработки в общем случае требует увеличения мощности приводов, обеспечивающих перемещение инструмента – приводов подач. Рациональное перераспределение мощностей приводов многокоординатного оборудования, позволяющее осуществлять эти методы обработки без увеличения суммарной мощности, является одним из возможных способов повышения эффективности оборудования.

В связи с тем, что приводы подач при работе воспринимают нагрузки, формируемые как силами резания, так и инерционными силами, то альтернативой увеличению мощности приводов подач может являться уменьшение массы перемещаемых приводами частей станка. В этом случае можно говорить об увеличении удельной (отнесенной к массе перемещаемых элементов) мощности приводов.

Снижение энергии, потребляемой оборудованием, является важнейшим фактором, непосредственно определяющим степень эффективности оборудования. Задача снижения энергопотребления может решаться как в совокупности с увеличением удельной мощности приводов, так и независимо от нее.

Таким образом, задача повышения эффективности технологического оборудования может включать в себя следующие подзадачи:

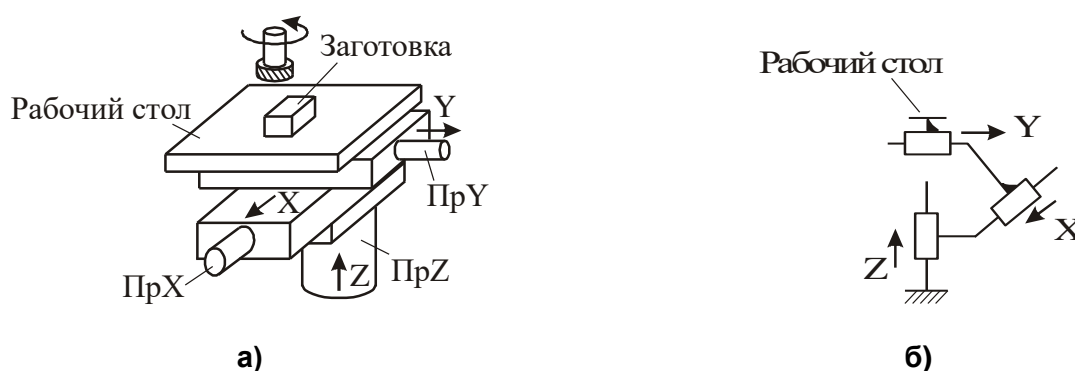
- снижение энергии, потребляемой оборудованием при реализации технологической операции;
- возможность перераспределения мощностей приводов подач;
- увеличение скорости перемещения (подачи) инструмента без увеличения мощностей приводов подач;

- увеличение удельной мощности приводов подач оборудования;
- снижение времени выполнения вычислительных процедур, используемых при управлении приводами оборудования, за счет их упрощения;
- разработка алгоритмов многокоординатной интерполяции, учитывающих особенности оборудования и обеспечивающих высокую точность решения траекторных задач.

В современном машиностроении, в том числе отечественном, заметно усилился интерес к оборудованию, имеющему нетрадиционные компоновочные схемы, в частности, к оборудованию с параллельными кинематическими структурами [14–16, 51, 58, 61, 274]. Особенности этого оборудования позволяют говорить о перспективности использования параллельных кинематических структур при создании высокоэффективного технологического оборудования.

## 1.2. Классификация механизмов с параллельными кинематическими цепями

Иллюстрацией традиционного для современного машиностроения подхода к компоновке технологического оборудования может служить упрощенная схема фрезерного станка, показанная на рисунке 11, а.



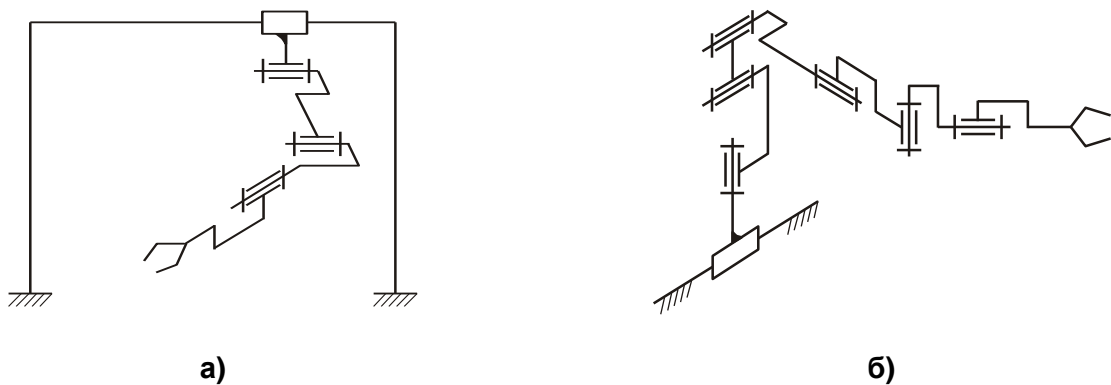
**Рисунок 11 – Схемы станка традиционной компоновки, имеющего последовательную кинематическую цепь**

Как видно из схемы, передача энергии от двигателей приводов на рабочий орган – рабочий стол с закрепленной на нем заготовкой, с целью его перемещения в пространстве осуществляется по последовательной схеме: привод ПрZ, отвечающий за перемещение рабочего органа по координате Z, помимо рабочего органа перемещает приводы ПрX и ПрY; привод ПрX перемещает ПрY; привод ПрY пе-

ремещает рабочий стол с заготовкой. Здесь под приводом понимается совокупность двигателя и некоторого механизма, обеспечивающего поступательное перемещение в требуемом направлении. Такое построение станка требует весьма жестких и материалоемких конструкций базовых деталей.

На рисунке 11, б показана кинематическая схема, соответствующая рассматриваемому станку. Из кинематической схемы видно, что рабочий орган станка соединен с основанием посредством единственной кинематической цепи, включающей в себя три поступательные кинематические пары. Данная кинематическая цепь является незамкнутой.

Аналогичная ситуация наблюдается в робототехнике. Классические в этой отрасли промышленности компоновочные схемы построены на основе незамкнутых кинематических цепей, содержащих поступательные или вращательные кинематические пары. Для примера на рисунке 12, а показана кинематическая схема промышленного робота портального типа СМ40, а на рисунке 12, б – модульного промышленного робота РМП-25 [46].

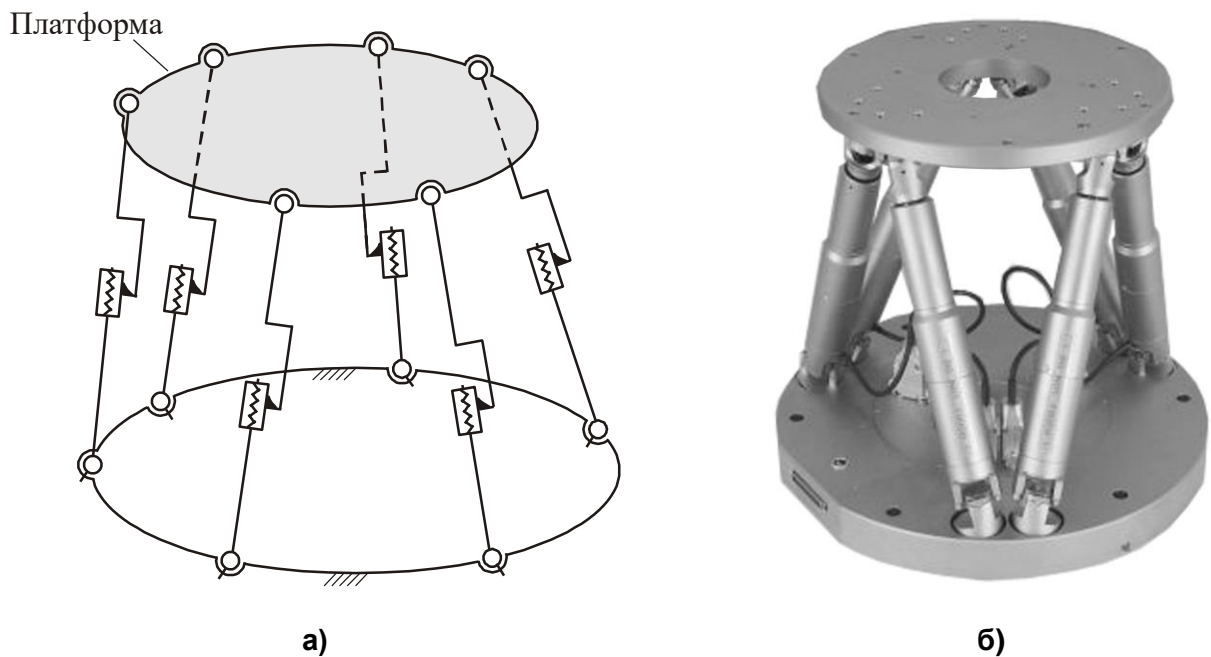


**Рисунок 12 – Незамкнутые кинематические схемы промышленных роботов**

Вариантом нетрадиционной на сегодняшний день компоновки являются схемы, в которых рабочий орган соединяется с основанием посредством нескольких кинематических цепей. В этом случае говорят о механизмах с параллельными кинематическими цепями или с параллельной кинематикой. На рисунке 13, а показана кинематическая схема наиболее известного механизма с такой компоновкой. Этот механизм относится к механизмам «платформенного» типа [45], так как в его структуре имеется многопарное звено – платформа, которое является выходным звеном; на нем может быть расположен рабочий орган. Помимо платформы в

показанный механизм входят 6 штанг, каждая из которых состоит из двух звеньев, образующих винтовую пару. Изменение длин штанг позволяет изменять положение платформы (и рабочего органа) в пространстве.

Анализ схемы на рисунке 13, а показывает, что в механизме имеется 6 кинематических цепей, соединяющих платформу с основанием. В оборудовании, построенном на основе рассматриваемой кинематической схемы, движение рабочего органа обеспечивается в общем случае одновременной согласованной работой шести приводов, изменяющих длины штанг, т. е. передача энергии на рабочий орган осуществляется параллельно по шести цепям. Поэтому оборудование, построенное на основе механизмов рассматриваемого типа, называют оборудованием с параллельными приводами (ОПП), оборудованием с параллельной кинематикой (ОПК) или оборудованием с параллельной кинематической структурой (ОПКС). В дальнейшем будет использоваться последний термин.



**Рисунок 13 – МПКЦ «гексапод» с 6-ю степенями свободы: а) – кинематическая схема; б) – пример реализации: модель М-840 фирмы PI с нагрузкой на платформу до 20 кг**

Кинематическую цепь, которая при реализации ОПКС предполагает наличие привода, назовем активной. В показанном на рисунке 13 механизме все кинематические цепи активные.

Оборудование с параллельной кинематической структурой принято классифицировать по количеству степеней свободы рабочего органа [105]. Приводы при

этом не рассматриваются, оборудование классифицируется из анализа числа степеней свободы механизма, лежащего в его основе.

Для определения числа степеней свободы удобно использовать формулу Сомова–Малышева, которая для пространственных механизмов имеет следующий вид [78]:

$$H = 6(k - 1) - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5, \quad (1)$$

где  $H$  – число степеней свободы механизма;  $k$  – общее число звеньев механизма, включая основание;  $p_i$  – количество кинематических пар с  $i$  степенями свободы.

В таблице 1 представлены обозначения кинематических пар, используемых при построении механизмов с параллельными кинематическими цепями.

**Таблица 1**  
**Кинематические пары, используемые при построении МПКЦ**

№	Вид кинематической пары	Число степеней свободы (подвижности)	Условное обозначение		
			Буквенное		Графическое
			Отч.	Заруб.	
1	Поступательная	1	П	Р	
2	Вращательная	1	В	В	
3	Винтовая	1	Ви	Н	
4	Цилиндрическая	2	Ц	С	
5	Сферическая с пальцем (карданный шарнир)	2	Сп	U	
6	Сферическая	3	С	S	

Применительно к механизму, показанному на рисунке 13, можно записать:  $k = 14$  (включая основание),  $p_1 = 6$  – количество одноподвижных винтовых пар,  $p_2 = 6$  – количество двухподвижных карданных шарниров в соединении штанг с основанием,  $p_3 = 6$  – количество трехподвижных сферических шарниров в соединении штанг и платформы. Тогда

$$H = 6(14 - 1) - 5 \cdot 6 - 4 \cdot 6 - 3 \cdot 6 = 6,$$

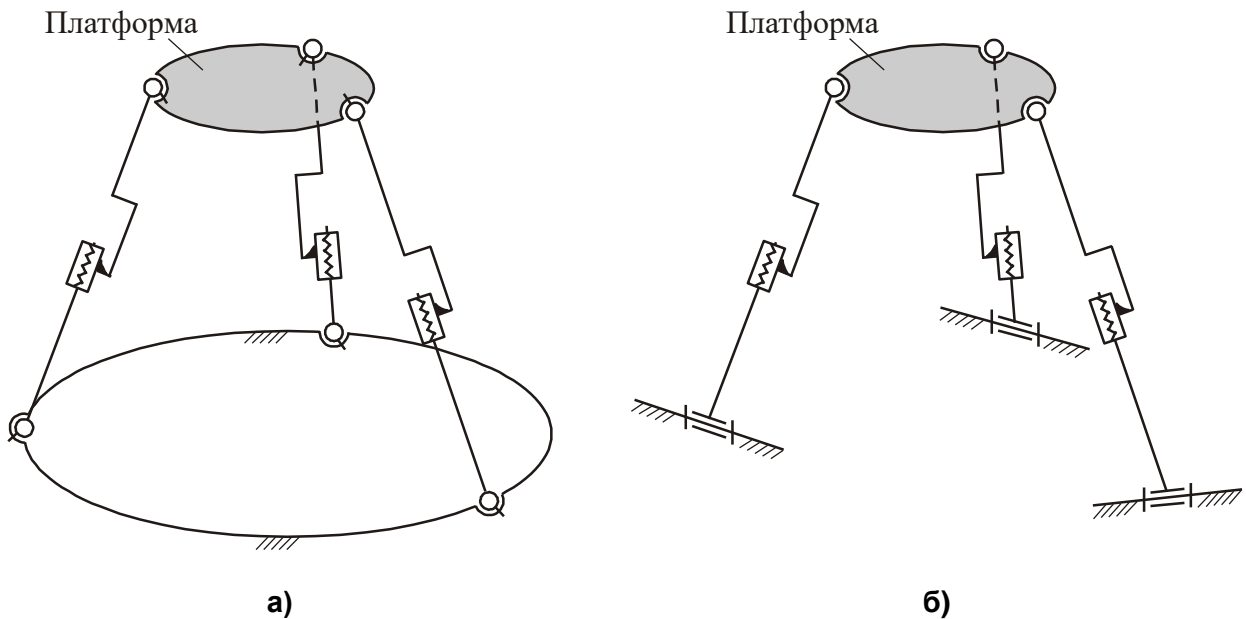
т. е. механизм обладает 6-ю степенями свободы.



Механизм с параллельными кинематическими цепями, обеспечивающий рабочему органу шесть степеней свободы и имеющий структуру, подобную показанной на рисунке 13, называют гексаподом.

Помимо гексаподов, по данной классификации выделяют биподы – механизмы с двумя степенями свободы, триподы, четырех- и пятиподы – механизмы, имеющие соответственно 3, 4 и 5 степеней свободы [58].

На рисунке 14 показаны кинематические схемы триподов, различающихся используемыми при их построении кинематическими парами.



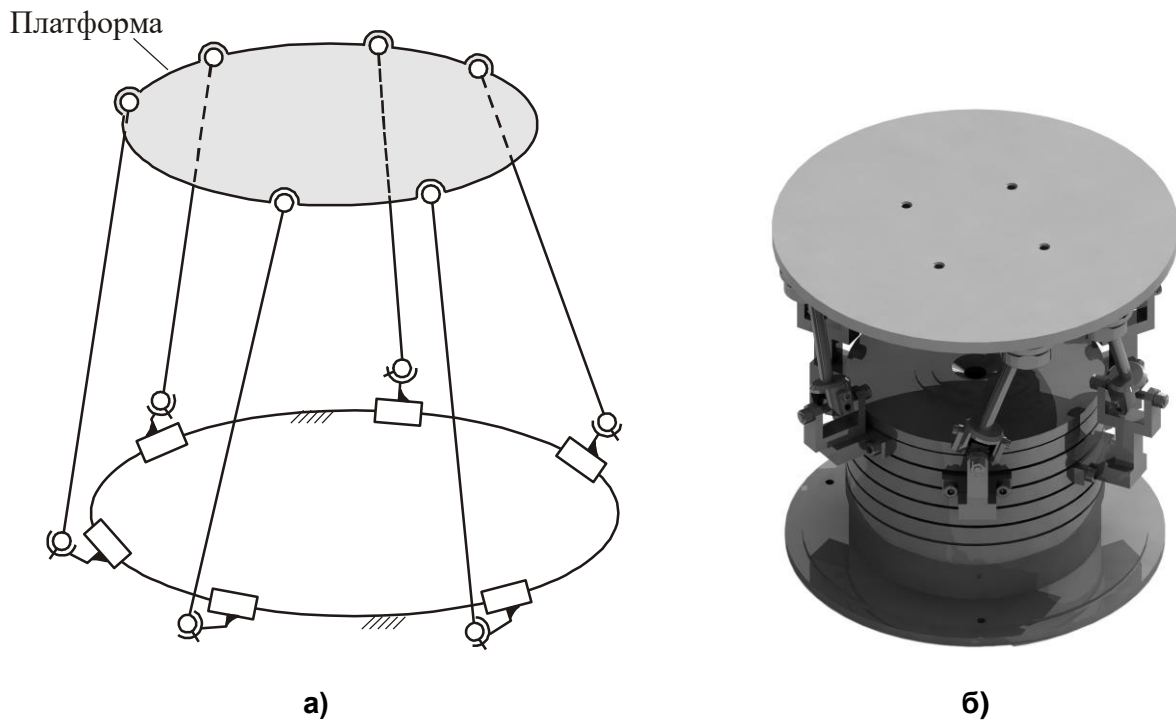
**Рисунок 14 – Кинематические схемы МПКЦ с 3-мя степенями свободы – триподов**

Использование для этих механизмов формулы (1) дает следующий результат:  

$$H = 6(8-1) - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 6 = 3 \quad (\text{рисунок 14, а}) \quad \text{и} \quad H = 6(8-1) - 5 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 3$$
(рисунок 14, б) – механизмы обладают тремя степенями свободы. За счет вращения винтовых пар платформы механизмов будет совершать сложные пространственные движения по 6-ти координатам, однако обеспечить независимость движения по всем этим координатам невозможно.

В работе [231] рассмотрен МПКЦ, имеющий 3 степени свободы, но отличающийся от показанных на рисунке 14. Это показывает, что классификация по степеням свободы не в полной мере отражает конструктивные особенности механизмов с параллельными кинематическими структурами и оборудования, построенного на их основе. По этой причине механизмы, имеющие некоторое общее свой-

ство, выделяют в отдельные группы. Например, механизм, показанный на рисунке 15, а называют ротоподом. В данном механизме перемещение платформы осуществляется за счет изменения угловых положений нижних шарниров штанг. Механизм имеет 6 степеней свободы ( $H = 6(14 - 1) - 6 \cdot 5 - 6 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 6$ ), но в отличие от классического гексапода (см. рисунок 13), длины штанг в нем остаются постоянными. Общее название МПКЦ, имеющих 6 штанг постоянной длины – гексаглайды [190].



**Рисунок 15 – МПКЦ с 6-ю степенями свободы типа «ротопод»: а) – кинематическая схема; б) – пример реализации**

В механизме, схема которого показана на рисунке 16, связь платформы с основанием осуществляется посредством 4-х кинематических цепей. Три из них одинаковы и подобны кинематическим цепям трипода (см. рисунок 14, а). Четвертая цепь реализована в виде жестко связанной с платформой штанги 1, способной перемещаться во втулке 2, но не способной в ней проворачиваться. Втулка соединена с основанием посредством карданного шарнира. Данный механизм имеет  $H = 6(9 - 1) - 5 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 3$  степени свободы и формально должен быть отнесен к триподам. Однако подобные механизмы, имеющие три степени свободы и центральную пассивную кинематическую цепь, называют трицептами [58]. Более подробно кинематика трицепта будет рассмотрена в главе 2.

Механизм, показанный на рисунке 17, имеет три степени свободы, но в отличие от трипода является плоским: оси всех вращательных шарниров перпендикулярны плоскости  $OXY$ , платформа может перемещаться только параллельно этой плоскости, совершая два поступательных перемещения и одно вращательное. Однако из классификации по степеням свободы данная особенность механизма не выявляется.

Для плоских механизмов формула (1) несколько упрощается:

$$H = 3(k - 1) - 2p_1 - p_2. \quad (2)$$

Рассматриваемый плоский механизм имеет 8 звеньев; все кинематические механизмы одноподвижные. Следовательно,  $H = 3(8 - 1) - 2 \cdot 9 = 21 - 18 = 3$  – количество степеней свободы такое же, как у пространственных МПКЦ, показанных на рисунке 14.

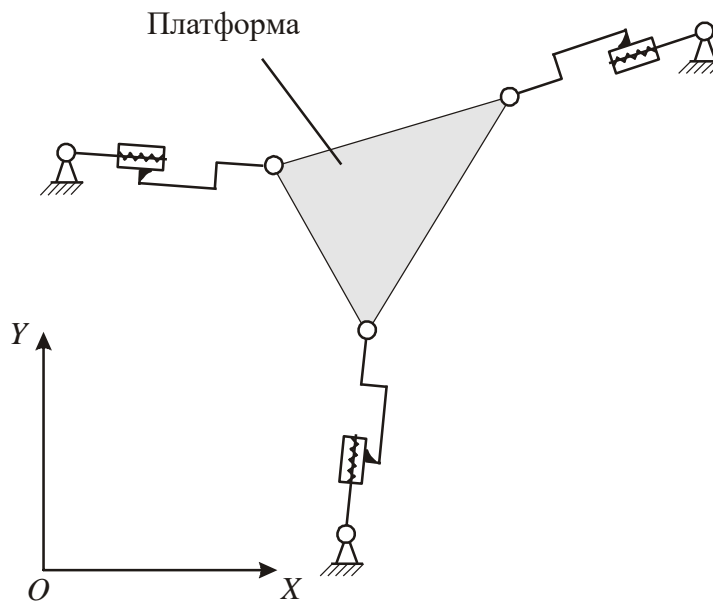


Рисунок 17 – Кинематическая схема плоского МПКЦ с 3-мя степенями свободы

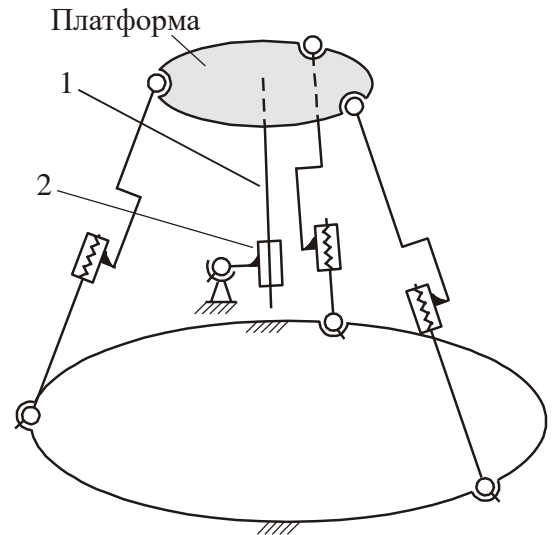
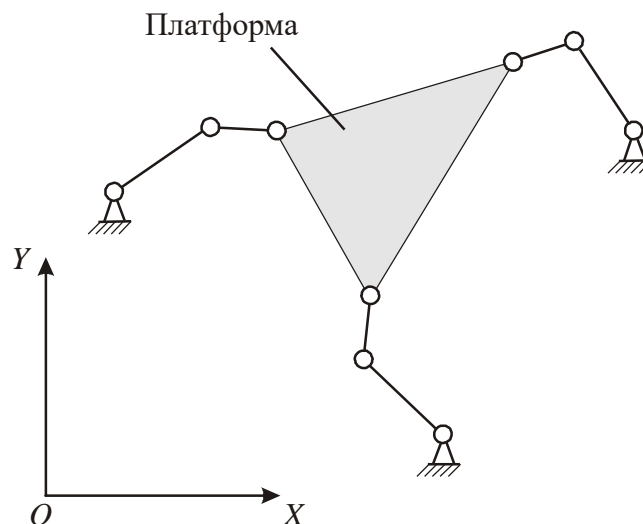


Рисунок 16 – Кинематическая схема МПКЦ с 3-мя степенями свободы – трицепта

Исследованию МПКЦ, показанному на рисунке 17, посвящены работы многих авторов [117, 253, 277]. В частности, такие механизмы предлагается использовать для построения пространственных МПКЦ с большим количеством степеней свободы [254].

Разновидностью плоского механизма, показанного на рисунке 17, является механизм, кинематическая схема которого приведена на рисунке 18. Очевидно, что замена винтовых пар на вращательные шарниры не изменила число степеней свободы механизма при существенном изменении конструкции. Механизм, показанный на рисунке 18, будет плоским только в том случае, если оси вращения всех шарниров будут перпендикулярны плоскости  $OXY$ . В общем случае это условие может не выполняться и механизм будет являться пространственным. Платформа такого механизма способна совершать сложные пространственные перемещения [122].

Классификация по степеням свободы часто дополняется классификацией по типу кинематических пар, используемых при построении параллельных кинематических цепей [25, 105]. Согласно этой классификации гексапод (см. рисунок 14) будет иметь обозначение 6-СВиСп (6-UHS).



**Рисунок 18 – Кинематическая схема плоского МПКЦ с 3-мя степенями свободы, имеющего только вращательные кинематические пары**

В зарубежной литературе карданный шарнир часто обозначают как совокупность двух вращательных пар, поэтому обозначение гексапода может иметь вид 6-(RR)US. Активная кинематическая пара (пара, изменение состояния кото-

рой посредством привода используется для управления механизмом) выделяется подчеркиванием: 6-U $\underline{H}$ S. Если в гексапode каждая пара сферических шарниров сводится в одну точку, то его обозначение несколько меняется: 6-U $\underline{H}$  3-S. Такой механизм показан на рисунке 19.

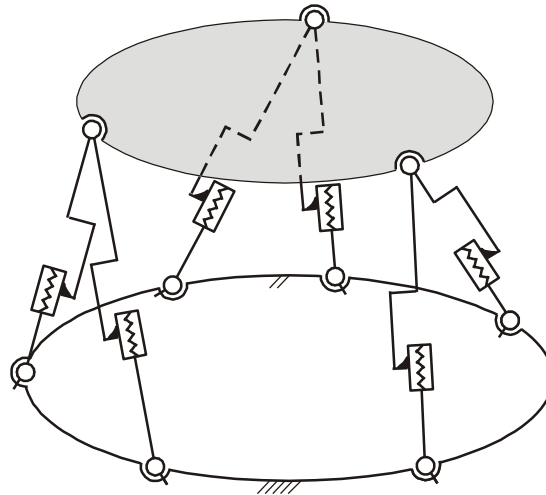


Рисунок 19 – МПКЦ, имеющий структуру 6-U $\underline{H}$  3-S

При построении технологического оборудования наиболее широко используются МПКЦ с тремя (триподы, трицепты) и шестью (гексаподы) степенями свободы [58]. Во многом это связано с тем, что каждая из этих схемы позволяют использовать однотипные кинематические цепи, связывающие платформу с основанием.

### 1.3. Направления повышения эффективности технологического оборудования с параллельными кинематическими структурами

Рассмотренные ранее МПКЦ имеют как минимум две степени свободы; широко используемая на практике гексаподная схема имеет шесть степеней свободы. Следовательно, управление ОПКС должно осуществляться по нескольким (от двух до шести) входным переменным (координатам), в качестве которых могут выступать, например, токи якорей двигателей приводов (от двух до шести соответственно), используемых в оборудовании для изменения длин штанг. Рабочий орган будет совершать либо плоские, либо пространственные перемещения.

Для описания движения элементов станков применяют единую систему обозначений координат, рекомендованную стандартами [29, 160]. Координатами обо-

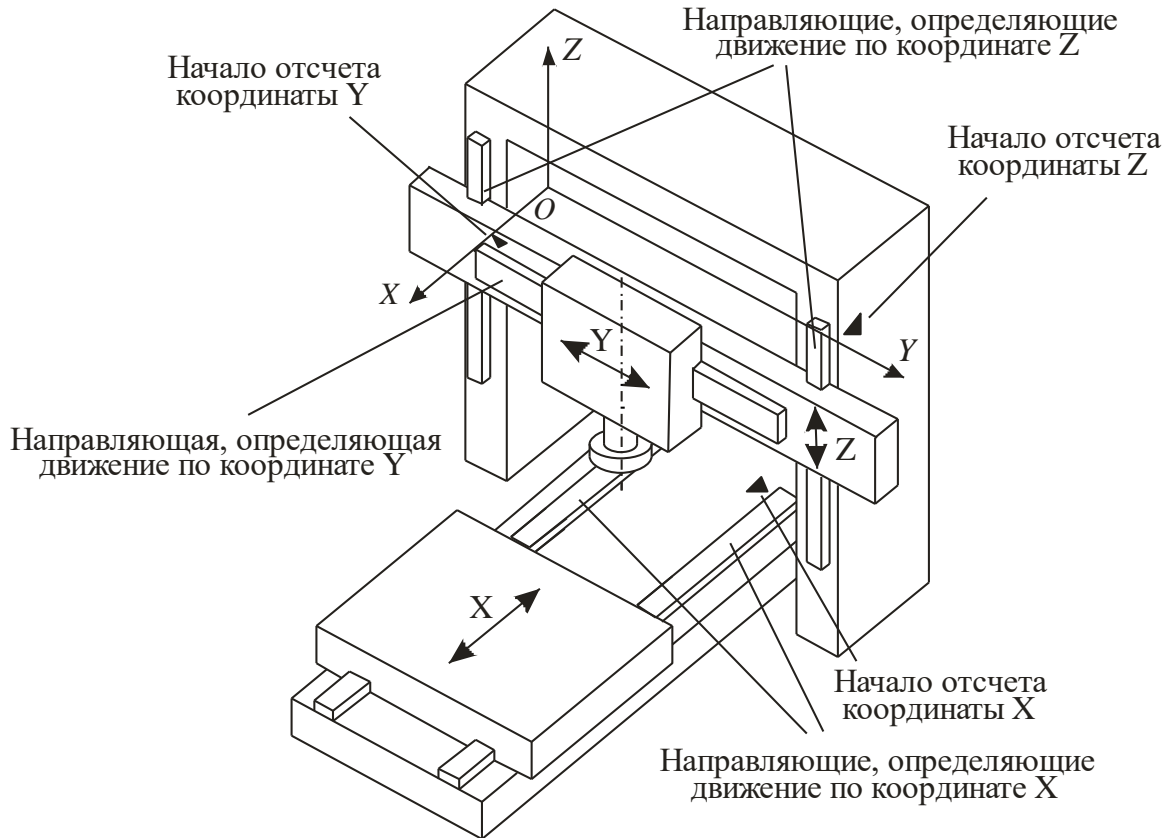
значают положение оси вращения шпинделя станка или заготовки, а также прямолинейные либо круговые движения подачи инструмента или заготовки. При этом обозначение осей координат и направление движений в станках устанавливаются так, чтобы программирование операций обработки не зависело от того, перемещается инструмент либо заготовка или нет. За основу принимается перемещение инструмента относительно системы координат неподвижной заготовки.

Все перемещения удобно рассматривать в прямоугольной системе координат  $OXYZ$ . В оборудовании с традиционными кинематическими схемами направляющие, определяющие взаимные перемещения элементов оборудования, выполняют взаимно перпендикулярными. Требования к линейности и ортогональности направляющих при их физической реализации являются одними из важнейшими с точки зрения геометрической точности станка [103].

Оси системы координат  $OXYZ$  обычно задаются параллельными прямолинейным направляющим станка. Начало данной системы координат реализовано физически и определяется датчиками, контролирующими перемещения вдоль этих направляющих (рисунок 20). Операция перевода элементов станка в положение, при котором эти датчики будут показывать нулевые значения («выход в ноль»), является типовой для любой системы ЧПУ. Систему координат  $OXYZ$  принято называть главной или стандартной [23]. Следует отметить, что в оборудовании, имеющем традиционные кинематические схемы, перемещение вдоль одной из направляющих за счет работы одного привода приводит к изменению только соответствующей линейной координаты; две другие линейные координаты изменяться не будут. Аналогичная ситуация и с угловыми (поворотными) координатами: за поворот вокруг каждой оси отвечает свой привод.

Анализ рассмотренных выше кинематических схем МПКЦ не позволяет выделить в них элементы, способные совершать взаимно перпендикулярные перемещения. В показанном на рисунке 21 станке фирмы «Ingersoll» перемещение элементов, обеспечивающих в итоге перемещение инструмента (рабочего органа), осуществляются вдоль продольных осей штанг. Эти оси могут рассматриваться как виртуальные направляющие, физические взаимно перпендикулярные направ-

ляющие в таком станке отсутствуют. Поэтому в оборудовании, построенном на основе МПКЦ, главная система координат не может задаваться физически (т. е. направляющими), начало и направления осей этой системы координат могут быть заданы произвольно.

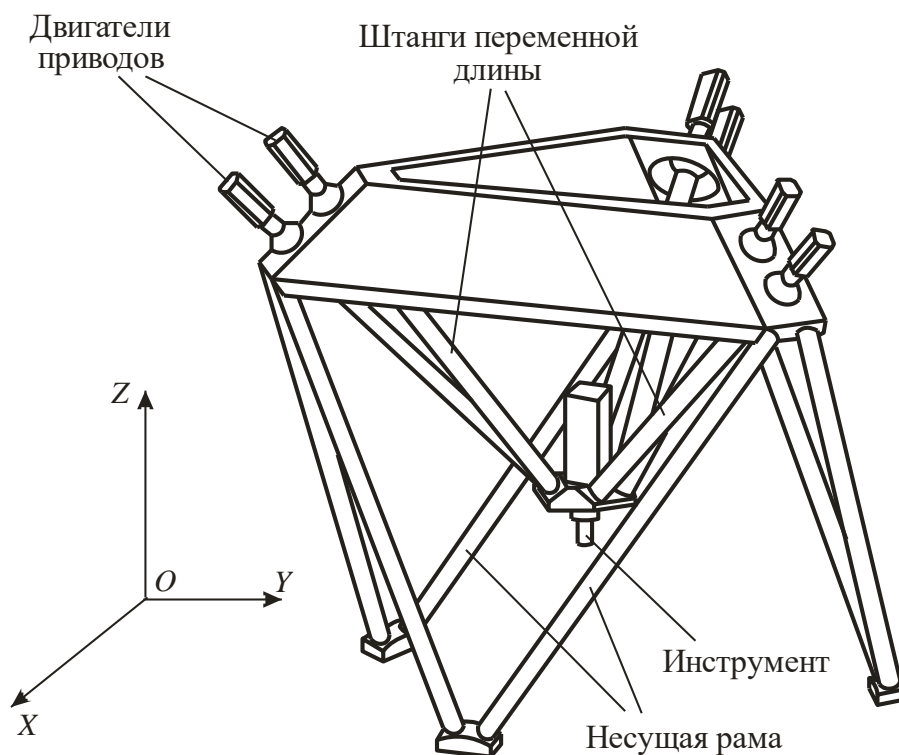


**Рисунок 20 – Направление осей главной расчетной системы координат в станке с традиционной компоновочной схемой**

Отсутствие взаимной ортогональности осей главной системы координат и виртуальных направляющих приводит к тому, что в оборудовании с параллельной кинематикой:

- работа одного из приводов приводит, в общем случае, к перемещению рабочего органа по трем линейным координатам и трем угловым координатам, задаваемым в главной СК;
- для обеспечения линейного перемещения рабочего органа потребуется, в общем случае, согласованная работа всех шести (для гексаподов) приводов;
- требование по геометрической точности для ОПКС может трактоваться как соответствие реального оборудования принятой модели, описывающей, например, положение его виртуальных направляющих.

Для детального изучения характера движения рабочего органа в конкретном оборудовании должна использоваться кинематическая схема механизма, положенная в его основу. Кинематические схемы наиболее распространенных МПКЦ будут рассмотрены в главе 2.



**Рисунок 21 – Схема станка-гексапода фирмы «Ingersoll»**

Следует отметить, что для ОПКС теряет смысл операция выхода в ноль применительно к главной системе координат, что объясняется допускаемой произвольностью задания этой системы координат. Однако при работе ОПКС пространственное положение рабочего органа должно отслеживаться применительно именно к этой системе координат. Поэтому необходимо определить некоторое характерное положение рабочего органа, которое будет принято за начальное (нулевое). Например, для станка-гексапода в качестве «нулевого» можно принять положение, соответствующее минимально возможной длине его штанг. Минимальность длины должна контролироваться соответствующим датчиком. Значение вектора выходных координат для «нулевого» положения будет являться одной из констант конкретного экземпляра ОПКС. Определение этих значений является одной из задач калибровки оборудования.



Целесообразность использования МПКЦ при построении технологического оборудования определяется следующим:

- при заторможенных приводах устройство превращается в пространственную ферму, что обуславливает его высокую жесткость при достаточно невысокой массе; по сравнению с традиционным оборудованием ОПКС, имеющее рассмотренную выше гексаподную схему, имеет в 5...10 раз большую удельную жесткость;

- в основных элементах МПКЦ некоторых кинематических схем (триподы, гексаподы) не возникают изгибающие усилия, что положительно сказывается на жесткости и прочности конструкции;

- перемещение рабочего органа происходит за счет одновременной работы нескольких приводов, при этом мощности приводов складываются;

- невысокая масса движущихся элементов механизма позволяет обеспечить перемещение рабочего органа с высокими ускорениями при незначительных мощностях приводов;

- МПКЦ в зависимости от принятой кинематической схемы могут иметь до 6-ти степеней свободы, следовательно, с их помощью может строиться технологическое оборудование, предназначенное для осуществления многокоординатной обработки;

- МПКЦ, имеющие 3 или 6 входных координат, могут строиться с использованием однотипных кинематических цепей, что упрощает конструкции ОПКС на их основе.

Отметим особенности ОПКС, которые являются сдерживающими для его широкого распространения факторами:

- соотношение пространства для обработки и всего объема, занимаемого станком, несколько хуже по сравнению с традиционными станками;

- приводы, обеспечивающие перемещение рабочего органа, в большинстве случаев располагаются на подвижных штангах, увеличивая тем самым их массу и снижая динамические характеристики оборудования;

– при работе оборудования требуется обеспечивать согласованное управление всеми его приводами даже для реализации простейших линейных перемещений рабочего органа;

– в некоторых положениях, называемых особыми, в механизмах с параллельными кинематическими цепями может наблюдаться потеря управляемости;

– при работе оборудования с параллельной кинематической структурой массо-инерционные характеристики его элементов могут изменяться в широких пределах;

– в оборудовании с параллельной кинематической структурой затруднен непосредственный контроль точности перемещений рабочего органа.

Однако негативное влияние этих факторов может быть существенно снижено за счет грамотных конструкторских решений и использования соответствующих законов управления ОПКС, в том числе, описанных в данной диссертационной работе.

Оборудование с параллельной кинематической структурой имеет предпосылки для повышения эффективности в соответствии с подходами, сформулированными в разделе 1.1 [71, 83, 85, 95]. Исходя из особенностей МПКЦ и выполняемых технологических операций такому оборудованию могут быть приданы следующие дополнительные качества (в дальнейшем – направления повышения эффективности):

1. Снижение потребления энергии приводами подач;
2. Перераспределение энергии приводов подач с целью обеспечения требуемых режимов обработки при ограниченной мощности приводов подач;
3. Уменьшение нагрузок на элементы оборудования с параллельной кинематической структурой, включая его приводы, за счет перераспределения силовых факторов;
4. Увеличение скорости перемещения (подачи) инструмента без увеличения мощности приводов подач;
5. Увеличение удельной мощности приводов подач оборудования.

Перечисленные направления повышения эффективности при их реализации не должны негативно сказываться на таких важных параметрах оборудования, как его точность и быстродействие его системы ЧПУ.

Как и для многих машин, в составе ОПКС можно выделить:

- рабочий орган, непосредственно участвующий в технологической операции, для реализации которой создано оборудование;
- привод, являющийся источником энергии, чаще всего – электродвигатель;
- элементы, связывающие рабочий орган и привод.

В оборудовании на основе механизма-гексапода (см. рисунок 13) рабочий орган устанавливается на подвижной платформе, платформа и шесть штанг переменной длины будут являться элементами, связывающими рабочий орган с приводом. В качестве привода выступают шесть (электро)двигателей, при работе которых изменяются длины штанг. В дальнейшем приводы и элементы, связывающие их с рабочим органом, будем называть приводным устройством оборудования на основе МПКЦ. Сформулированные выше направления повышения эффективности ОПКС затрагивают только его приводное устройство.

Применительно к технологическому оборудованию с ЧПУ принято выделять два уровня управления:

- нижний уровень – уровень работы внутренних алгоритмов системы ЧПУ, например, алгоритмов интерполяции траекторий;
- верхний уровень – уровень управляющих программ пользователя, предназначенных для решения конкретных технологических задач.

Направления повышения эффективности 1–4 могут реализовываться с помощью алгоритмов верхнего уровня, что позволяет использовать их как применительно к существующему ОПКС, так и к вновь создаваемому.

Разработка алгоритмов управления нижнего уровня – алгоритмов многокоординатной интерполяции для ОПКС представляет собой важнейшую задачу, решение которой непосредственно влияет на точность и быстродействие оборудования. Алгоритмы должны создаваться с учетом особенностей кинематики рассматриваемого оборудования; при разработке алгоритмов должны быть приняты

меру к сокращению времени вычисления за счет упрощения вычислительных процедур.

Увеличение удельной мощности приводов подач обычно обеспечивается оптимизацией конструкции оборудования с параллельной кинематической структурой и в данной работе не рассматривается.

#### **1.4. Выводы по главе**

1. Повышение эффективности технологического оборудования может осуществляться как в направлении повышения его производительности, так и в направлении снижения затрат на производство деталей.

2. Задача повышения эффективности технологического оборудования может решаться по следующим направлениям:

- снижение энергии, потребляемой оборудованием при реализации технологической операции;
- обеспечение возможности перераспределения энергии приводов подач;
- увеличение скорости перемещения (подачи) инструмента без увеличения мощности приводов подач;
- увеличение удельной мощности приводов подач оборудования;
- снижение времени выполнения вычислительных процедур, используемых при управлении приводами оборудования, за счет их упрощения;
- повышение точности движения рабочего органа по траектории за счет более совершенных методов интерполяции траектории.

3. Оборудование с параллельной кинематической структурой представляет собой перспективный класс технологических устройств, имеющий ряд преимуществ перед оборудованием, выполненным по традиционным схемам:

- высокая удельная жесткость;
- невысокая масса движущихся элементов механизма, что позволяет перемещать рабочий орган с высокими ускорениями при незначительных мощностях приводов;

– конструктивная простота реализации движения рабочего органа по 6-ти координатам, что требуется при многокоординатной обработке.

4. Управление оборудованием с параллельной кинематической структурой имеет свои особенности. В частности, в таком оборудовании изменение одной входной координаты может приводить к изменению всех выходных координат; для изменения одной выходной координаты необходимо согласованно изменять все входные координаты.

5. Исходя из особенностей оборудования с параллельной кинематической структурой и выполняемых технологических операций такому оборудованию могут быть приданы следующие дополнительные качества:

- снижение потребления энергии приводами подач;
- перераспределение энергии приводов подач с целью обеспечения требуемых режимов обработки при ограниченной мощности приводов подач;
- уменьшение нагрузок на элементы оборудования с параллельной кинематической структурой, включая его приводы, за счет перераспределения силовых факторов;
- увеличение скорости перемещения (подачи) инструмента без увеличения мощности приводов подач.

Эти качества могут быть реализованы за счет соответствующего алгоритмического обеспечения.

6. Алгоритмы должны создаваться с учетом особенностей кинематики рассматриваемого оборудования; при разработке алгоритмов должны быть приняты меры к сокращению времени расчетов за счет упрощения вычислительных процедур.

## **2. Кинематические модели устройств на основе механизмов с параллельными кинематическими цепями**

Для описания оборудования, в том числе с параллельными кинематическими структурами, необходимо построить математическую модель, которая в той или иной степени будет отражать реальные свойства этого оборудования. Применительно к задаче обеспечения функционирования технологического оборудования особый интерес представляют математические модели, устанавливающие зависимость между наборами входных и выходных координат в каждый момент времени. Применительно к ОПКС в качестве выходных будем рассматривать координаты, определяющие пространственное положение инструмента (рабочего органа) в некоторой неподвижной системе координат. Входные координаты будут определяться спецификой ОПКС и его математической модели.

Наиболее общее представление об объекте дает его динамическая модель, построенная с использованием дифференциальных или интегродифференциальных уравнений. Применительно к технологическому оборудованию такая модель позволяет определять требуемые усилия приводов, необходимые для обеспечения движения рабочего органа в заданном направлении и с заданным усилием. Эту задачу называют обратной задачей динамики [21]. В такой модели в качестве входных координат могут выступать, например, усилия или крутящие моменты приводов.

Решение обратной задачи динамики представляет интерес и при проектировании: получаемая в ходе решения этой задачи информация о характере движения элементов оборудования (линейных и угловых скоростях и ускорениях) с учетом их массо-инерционных характеристик и возникающих в них усилиях может использоваться в прочностных расчетах.

Прямая задача динамики – определение параметров движения элементов оборудования и возникающих в них усилий при заданных законах управления приводами (при кинематическом возбуждении) также решается с использованием динамической математической модели. Прямая задача динамики представляет

интерес при проверочных расчетах и при моделировании функционирования оборудования.

Динамическая модель оборудования характеризует (с учетом органичности модели) его как объект управления и является исходной информацией при проектировании системы управления этим оборудованием.

При решении ряда задач проектирования и управления не возникает необходимость учета массо-инерционных характеристик элементов оборудования. В этом случае рассматривается не собственно оборудование, а лежащий в его основе механизм с параллельными кинематическими цепями. Математическая модель в этом случае должна отражать только кинематику механизма, поэтому она существенно проще динамической модели.

Прямая задача кинематики состоит в определении координат и скоростей звеньев механизма при заданных законах изменения входных координат. Входные координаты при кинематическом моделировании чаще всего имеют размерность длины или угла поворота. Прямая задача имеет практический интерес с точки зрения моделирования работы механизма.

При решении обратной задачи кинематики определяются законы изменения входных координат, обеспечивающие перемещение выходного звена в заданном направлении с заданной скоростью. Это является основой для построения кинематических алгоритмов управления: позиционных и алгоритмов управления по вектору скорости [46]. Позиционные алгоритмы обеспечивают движение выходного звена по заданной траектории; алгоритмы управления по вектору скорости обеспечивают требуемую скорость в каждой точке траектории. При управлении технологическим оборудованием обычно требуется обеспечить движение рабочего органа по заданной траектории с требуемой скоростью; в ряде случаев требования по качеству формирования траектории или обеспечению требуемой скорости могут сниматься.

Решение поставленных в работе задач, направленных на повышение эффективности приводных устройств ОПКС, предполагает изучение этого оборудова-

ния с использованием кинематических и динамических моделей. Ниже рассмотрены подходы к созданию кинематических моделей МПКЦ.

## 2.1. Построение кинематических моделей для плоских механизмов с параллельными кинематическими цепями

### 2.1.1. Кинематическая модель плоского механизма с двумя степенями свободы

Простейший МПКЦ включает в себя две кинематические цепи, связывающие выходное звено механизма с основанием. На рисунке 22 показана схема механизма, в котором для связи выходного звена – шарнира с основанием используются штанги  $L_1$  и  $L_2$  переменной длины. В качестве выходного звена выступает шарнир В.

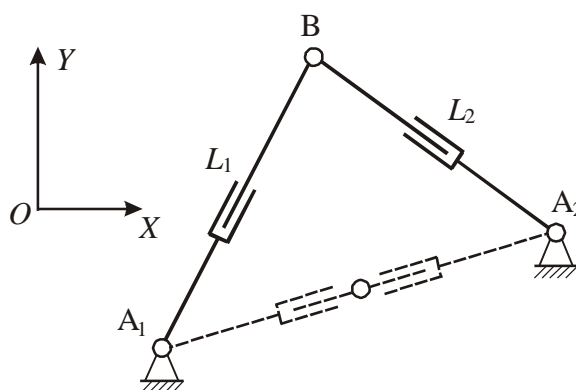


Рисунок 22 – Простейший МПКЦ

В данном механизме за счет изменения двух входных координат – длин штанг  $L_1$  и  $L_2$  изменяются две выходные координаты  $x_B$  и  $y_B$ , определяющие положение шарнира В в системе координат  $OXY$ . Координаты  $x_{A_1}$ ,  $y_{A_1}$ ,  $x_{A_2}$ ,  $y_{A_2}$  шарниров  $A_1$  и  $A_2$  считаются известными. Очевидно, что механизм имеет две степени свободы, что легко проверяется с помощью формулы (2):

$$H = 3(5 - 1) - 2 \cdot 5 = 2.$$

Входные и выходные координаты связаны следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} L_1 &= \sqrt{(x_{A_1} - x_B)^2 + (y_{A_1} - y_B)^2}; \\ L_2 &= \sqrt{(x_{A_2} - x_B)^2 + (y_{A_2} - y_B)^2}, \end{aligned} \quad (3)$$



которые и являются математической записью кинематической модели данного МПКЦ.

При известных значениях выходных координат  $x_B$  и  $y_B$  уравнения (3) позволяют определить значения входных координат  $L_1$  и  $L_2$ , т. е. решить обратную задачу о положениях. Дифференцирование этих уравнений по времени позволяет получить аналитическое решение обратной задачи о скоростях:

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{(x_{A_1} - x_B) \frac{dx_B}{dt} + (y_{A_1} - y_B) \frac{dy_B}{dt}}{\sqrt{(x_{A_1} - x_B)^2 + (y_{A_1} - y_B)^2}}; \quad (4)$$

$$\frac{dL_2}{dt} = \frac{(x_{A_2} - x_B) \frac{dx_B}{dt} + (y_{A_2} - y_B) \frac{dy_B}{dt}}{\sqrt{(x_{A_2} - x_B)^2 + (y_{A_2} - y_B)^2}}.$$

Для решения прямой задачи о положения необходимо разрешить уравнения (3) относительно переменных  $x_B$  и  $y_B$ . Один из возможных вариантов решения этой задачи приведен в [96].

Решение прямой задачи для рассматриваемого механизма упрощается, если один из связанных с основанием шарниров помещен в начало декартовой системы координат. Пусть начало системы координат  $OXY$  перенесено в точку  $A_1$ . В этом случае

$$x_B = \sqrt{L_1^2 - y_B^2}. \quad (5)$$

Подставив выражение (5) во второе уравнение системы (3), получим уравнение относительно  $y_B$ :

$$L_2^2 = \left( x_{A_2} - \sqrt{L_1^2 - y_B^2} \right)^2 + (y_{A_2} - y_B)^2,$$

которое после преобразований сводится к квадратному уравнению

$$k_1 y_B^2 + k_2 y_B + k_3 = 0, \quad (6)$$

где  $k_1 = x_{A_1}^2 + y_{A_1}^2$ ;

$$k_2 = y_{A_2} \left( L_2^2 - L_1^2 - x_{A_2}^2 - y_{A_2}^2 \right);$$

$$k_3 = \frac{1}{4} \left( L_2^2 - y_{A_2}^2 - (L_1 - x_{A_2})^2 \right) \left( L_2^2 - y_{A_2}^2 - (L_1 + x_{A_2})^2 \right).$$

Уравнение (6) дает два значения для координаты  $y_B$ , соответствующей заданным входным координатам  $L_1$  и  $L_2$ . Для каждой из этих координат  $y_B$  уравнение (5) дает еще по две координаты  $x_B$ . Однако только две пары координат  $(x_B, y_B)$  удовлетворяют уравнениям (3). Эти координаты и будут являться решением прямой задачи. Введением дополнительного условия, накладывающего ограничения на положение точки В, можно выделить только одно решение прямой задачи. Для рассматриваемого механизма можно принять, что точка В должна находиться выше линии, соединяющей центры шарниров  $A_1$  и  $A_2$ , как это показано на рисунке 22.

Для решения прямой задачи о скоростях необходимо выразить скорости выходных координат из системы уравнений (4):

$$\frac{dx_B}{dt} = \frac{L_1 \frac{dL_1}{dt} (y_{A_2} - y_B) - L_2 \frac{dL_2}{dt} (y_{A_1} - y_B)}{x_{A_1} y_{A_2} - x_{A_2} y_{A_1} + x_B (y_{A_1} - y_{A_2}) - y_B (x_{A_1} - x_{A_2})};$$

$$\frac{dy_B}{dt} = \frac{L_1 \frac{dL_1}{dt} (x_{A_2} - x_B) - L_2 \frac{dL_2}{dt} (x_{A_1} - x_B)}{x_{A_1} y_{A_2} - x_{A_2} y_{A_1} + x_B (y_{A_1} - y_{A_2}) - y_B (x_{A_1} - x_{A_2})}.$$
(7)

Если в некоторый момент времени известны значений входных координат  $L_1$  и  $L_2$  и их скорости, то с использованием уравнения (6) можно найти значения выходных координат  $x_B$ ,  $y_B$  и, используя (7), определить их скорости.

МПКЦ, имеющие более сложную структуру, имеют и более сложные уравнения, описывающие их кинематику. Для многих МПКЦ прямая и обратная задачи кинематики могут быть решены только в численном виде.

### 2.1.2. Кинематическая модель плоского механизма с тремя степенями свободы

Рассмотрим плоский МПКЦ, показанный на рисунке 23. Механизм содержит семь подвижных звеньев и девять кинематических пар, имеющих одну степень свободы. Использование формулы Сомова-Малышева (2) позволяет определить число степеней свободы этого механизма:  $H = 3(8 - 1) - 2 \cdot 9 = 21 - 18 = 3$ .

Входными координатами для рассматриваемого механизма будем считать длины его штанг  $L_j = \sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2}$ , где координаты шарниров  $A_j$ ,  $B_j$  задаются в произвольной системе координат (СК). Примем, для определенности, что координаты задаются в неподвижной СК  $OXY$ .

В качестве выходных примем линейные (декартовы) координаты  $(x_C, y_C)$  точки  $C$  подвижной платформы в неподвижной СК  $OXY$ , а также угол  $\phi$ , характеризующий разворот платформы относительно точки  $C$ . На рисунке 23 СК  $CX'Y'$  связана с подвижной платформой.

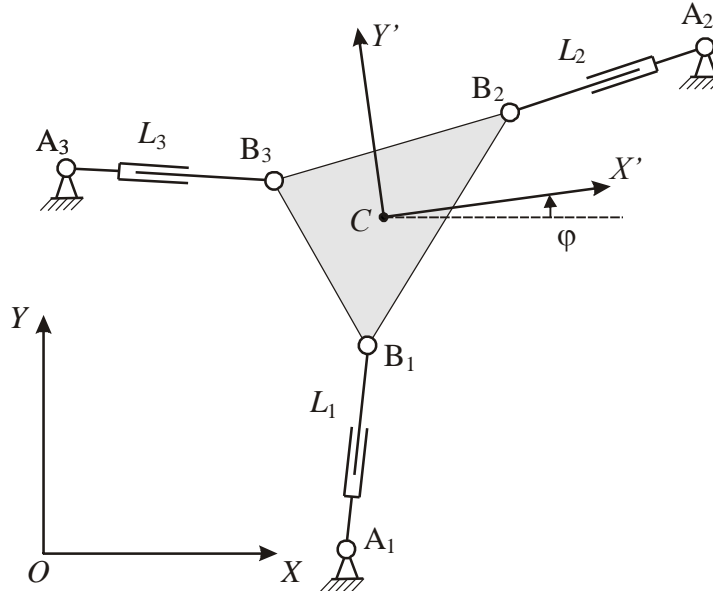


Рисунок 23 – Плоский МПКЦ с 3-мя степенями свободы

Неподвижную систему координат, в которой задаются линейные выходные координаты, в дальнейшем будем называть глобальной.

Если известны координаты  $(x'_{B_j}, y'_{B_j})$  шарниров  $B_j$  платформы в системе координат  $CX'Y'$ , то по заданным значениям выходных координат можно определить координаты этих шарниров в глобальной СК  $OXY$ :

$$x_{B_j} = x'_{B_j} \cos \phi - y'_{B_j} \sin \phi + x_C;$$

$$y_{B_j} = x'_{B_j} \sin \phi + y'_{B_j} \cos \phi + y_C,$$

что позволяет записать уравнения, связывающие между собой входные и выходные координаты рассматриваемого механизма:

$$L_j = \sqrt{(x_{A_j} - x'_{B_j} \cos \phi + y'_{B_j} \sin \phi - x_C)^2 + (y_{A_j} - x'_{B_j} \sin \phi - y'_{B_j} \cos \phi - y_C)^2}. \quad (8)$$

В системе уравнений (8)  $j = 1 \dots 3$ . Данная система уравнений будет являться кинематической моделью рассматриваемого плоского МПКЦ. Модель позволяет аналитически решать обратную задачу о положениях. Прямая задача о положениях может быть решена с использованием численных методов.

## 2.2. Построение кинематических моделей пространственных механизмов с параллельными кинематическими цепями

### 2.2.1. Углы Эйлера-Крылова

Математическая модель, используемая для описания кинематических свойств пространственных МПКЦ, сводится к описанию движения выходного звена (платформы) по шести выходным координатам в зависимости от состояния входных координат механизма.

Движение платформы как абсолютно твердого тела может быть описано тремя величинами, характеризующими координаты точки, принятой за мгновенный полюс (линейные координаты), и тремя величинами, определяющими угловую ориентацию платформы (угловые координаты). Желательно, чтобы точка, выбираемая в качестве полюса, имела физическую реализацию (геометрический центр платформы, вершина сверла и т. п.). В качестве линейных координат полюса используются декартовы координаты в глобальной СК.

Рассмотрим две системы координат, имеющих общее начало (рисунок 24).

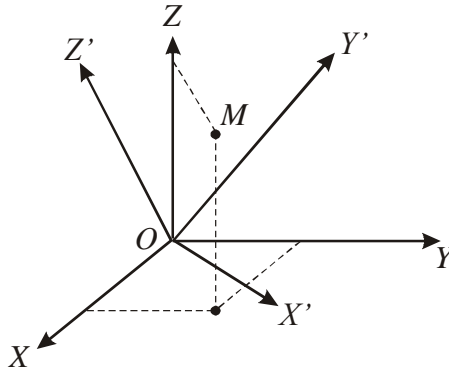


Рисунок 24 – Разворот системы координат

Пусть координаты  $(x, y, z)^T$  некоторой точки  $M$  заданы в исходной системе координат  $OXYZ$ . Координаты этой же точки в развернутой системе координат  $OX'Y'Z'$  можно определить, используя матричное выражение

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}$  – матрица поворота, определяемая через направляющие ко-

синусы осей развернутой системы координат по отношению к осям исходной следующим образом [12]:

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos(\hat{x}'x), & l_2 &= \cos(\hat{y}'x), & l_3 &= \cos(\hat{z}'x), \\ m_1 &= \cos(\hat{x}'y), & m_2 &= \cos(\hat{y}'y), & m_3 &= \cos(\hat{z}'y), \\ n_1 &= \cos(\hat{x}'z), & n_2 &= \cos(\hat{y}'z), & n_3 &= \cos(\hat{z}'z). \end{aligned}$$

Обратное к (9) преобразование

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (10)$$

позволяет определить координаты  $(x, y, z)^T$  точки в исходной системе координат, если известны координаты  $(x', y', z')^T$  этой точки в развернутой системе координат. При этом

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \text{ — одно из важнейших свойств}$$

матриц поворота [104].

Отметим другие свойства матриц поворота [12]:

- определитель матрицы поворота равен  $\pm 1$  (плюс, если левая СК перешла в левую, или правая в правую; минус, если правая СК перешла в левую, или левая в правую);
- сумма квадратов элементов одной строки или столбца равна 1;
- сумма произведений соответствующих элементов двух строк или двух столбцов равна нулю;
- каждый элемент равен своей адьюнкте, умноженной на значение определителя матрицы поворота.

Если принять, что система координат  $OXYZ$  неподвижна (см. рисунок 24), а система координат  $OX'Y'Z'$  связана с телом и в начальный момент эти системы координат совпадали, то матрица  $\mathbf{A}$  (или  $\mathbf{B}$ ) полностью определяет поворот тела вокруг точки  $O$ .

Согласно свойству матрицы поворота девять направляющих косинусов связаны между собой следующими шестью соотношениями:

$$\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1; \quad m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1; \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1; \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1; \quad l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1; \quad l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \end{aligned} \quad (11)$$

поэтому только три направляющих косинуса, не все имеющие одинаковый индекс, могут быть приняты в качестве независимых переменных, описывающих разворот системы координат. В общем случае поворот тела может быть описан тремя независимыми переменными (параметрами) [71], которые могут и не являться направляющими косинусами матрицы поворота.

Пусть переход от исходной СК  $OXYZ$  к развернутой системе координат  $OX'Y'Z'$  (поворот тела) осуществляется последовательным поворотом вокруг осей СК  $OXYZ$ , т. е.:

- производится поворот вокруг оси  $OX$  на угол  $\alpha$ ;
- производится поворот вокруг оси  $OY$  на угол  $\beta$ ;
- производится поворот вокруг оси  $OZ$  на угол  $\gamma$ .

Углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  будут выступать тремя независимыми переменных (параметров), описывающих поворот тела.

Матрица поворота  $\mathbf{A}_\alpha^X$ , определяющая преобразование координат для поворота вокруг оси  $OX$ , будет иметь следующий вид [104]:

$$\mathbf{A}_\alpha^X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Матрицы последующих поворотов соответственно равны:

$$\mathbf{A}_\beta^Y = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_\gamma^Z = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $\mathbf{A}_\alpha^X$ ,  $\mathbf{A}_\beta^Y$ ,  $\mathbf{A}_\gamma^Z$  называют матрицами элементарных поворотов. С их помощью можно получить матрицы любых других конечных поворотов [104]. Рассматриваемый поворот систем координат описывается перемножением матриц элементарных поворотов:

$$\mathbf{A}^{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{A}_\gamma^Z \mathbf{A}_\beta^Y \mathbf{A}_\alpha^X.$$

В этом случае

$$l_1 = \cos \beta \cos \gamma;$$

$$m_1 = \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma;$$

$$n_1 = \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma;$$

$$l_2 = \cos \beta \sin \gamma;$$

$$m_2 = \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma;$$

$$n_2 = \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma;$$

$$l_3 = -\sin \beta;$$

$$m_3 = \sin \alpha \cos \beta;$$

$$n_3 = \cos \alpha \cos \beta.$$

(12)

В общем случае поворот системы координат может осуществляться как вокруг оси неподвижно (исходной) СК, так и вокруг собственной оси. При записи матрицы поворота необходимо следовать следующим правилам [104]:

1. Если подвижная СК совершает поворот вокруг оси неподвижной СК, то матрицу предыдущего поворота необходимо умножать слева на матрицу соответствующего элементарного поворота.

2. Если подвижная СК совершает поворот вокруг одной из своих осей, то матрицу предыдущего поворота необходимо умножать справа на матрицу соответствующего элементарного поворота.

3. Так как в исходном состоянии системы координат совпадают, то первый поворот всегда осуществляется вокруг оси неподвижной СК.

Описание пространственного положения тела через последовательные повороты вокруг неподвижных осей используется в системах числового программного управления технологическим оборудованием:

- поворот вокруг оси  $OX$  осуществляется на угол  $A$ ;
- поворот вокруг оси  $OY$  осуществляется на угол  $B$ ;
- поворот вокруг оси  $OZ$  осуществляется на угол  $C$ .

Углы  $A, B, C$  называют станочными углами. Помимо них в качестве угловых координат твердого тела часто используют углы Эйлера–Крылова.

Л. Эйлером предложено описывать вращение тела с помощью трех углов (рисунок 25): угла прецессии  $\psi$ , угла нутации  $\vartheta$ , угла чистого вращения  $\varphi$  [12, 104]. Эти углы введены Эйлером для описания движения Земли: ось  $OZ'$  – ось собственного вращения планеты медленно прецессирует в пространстве относительно оси  $OZ$ , перпендикулярной плоскости движения планеты, со скоростью  $\dot{\psi}$ , описывая полный конус примерно за 26 тыс. лет.

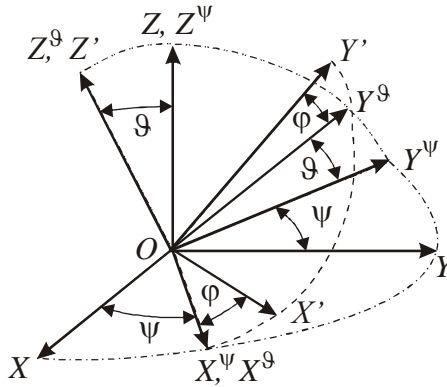
Разворот системы координат на углы Эйлера осуществляется в следующей последовательности:



1. Производится поворот вокруг оси  $OZ$  на угол прецессии  $\psi$  ( $0 \leq \psi < 2\pi$ ), в результате получается новая система координат  $OX^\psi Y^\psi Z^\psi$ , для которой ось  $OZ^\psi$  совпадает с осью  $OZ$ . Ось  $OX^\psi$  называется линией узлов.

2. Производится поворот вокруг линии узлов  $OX^\psi$  на угол нутации  $\vartheta$  ( $0 \leq \vartheta < \pi$ ), в результате получается система координат  $OX^\vartheta Y^\vartheta Z^\vartheta$ , ось  $OX^\vartheta$  которой совпадает с осью  $OX^\psi$ .

3. Производится поворот вокруг оси  $OZ^\vartheta$  на угол чистого вращения  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ), в результате оси принимают конечное положение  $OX'Y'Z'$ .



**Рисунок 25 – Углы Эйлера**

В результате этих трех поворотов исходная система координат  $OXYZ$  переходит в новое положение  $OX'Y'Z'$ . Направляющие косинусы матрицы поворота связаны с углами Эйлера следующими отношениями [12]:

$$l_1 = \cos \psi \cos \varphi - \cos \vartheta \sin \psi \sin \varphi;$$

$$l_2 = \sin \psi \cos \varphi + \cos \vartheta \cos \psi \sin \varphi;$$

$$l_3 = \sin \vartheta \sin \varphi;$$

$$m_1 = -\cos \psi \sin \varphi - \cos \vartheta \sin \psi \cos \varphi;$$

$$m_2 = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \vartheta \cos \psi \cos \varphi;$$

$$m_3 = \sin \vartheta \cos \varphi;$$

$$n_1 = \sin \vartheta \sin \psi;$$

$$n_2 = -\sin \vartheta \cos \psi;$$

$$n_3 = \cos \vartheta.$$

(13)

Выражения (13) получаются в результате перемножения матриц, отвечающих за преобразование координат при трех рассмотренных выше последовательных поворотах:

$$\mathbf{A}^{\mathfrak{E}} = \mathbf{A}_{\psi}^{\mathfrak{E}} \mathbf{A}_{\vartheta}^{\mathfrak{E}} \mathbf{A}_{\varphi}^{\mathfrak{E}},$$

где

$$\mathbf{A}_{\psi}^{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\vartheta}^{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\varphi}^{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Углы Эйлера однозначно определяют пространственную ориентацию твердого тела с одной закрепленной точкой – полюсом  $O$ . Однако для анализа движения тела эти углы могут оказаться малоприспособными. Объясняется это тем, что два из трех поворотов осуществляются вокруг «одноименных» осей  $OZ$  и  $OZ^{\mathfrak{E}}$ . По этой причине направляющие косинусы становятся зависимыми не от абсолютных значений углов  $\psi$  и  $\varphi$ , а от их суммы. Следовательно, малому значению пространственного разворота тела будет соответствовать малое значение угла  $\vartheta$  и малое изменение суммы  $\psi + \varphi$ . Этот факт негативно скажется на попытках линеаризации уравнений, записанных с помощью уравнений Эйлера.

От рассмотренного недостатка свободен набор углов, называемых самолетными углами [28] или углами Крылова: угол рыскания  $\psi$ , угол тангажа  $\vartheta$ , угол крена  $\gamma$  (рисунок 26).

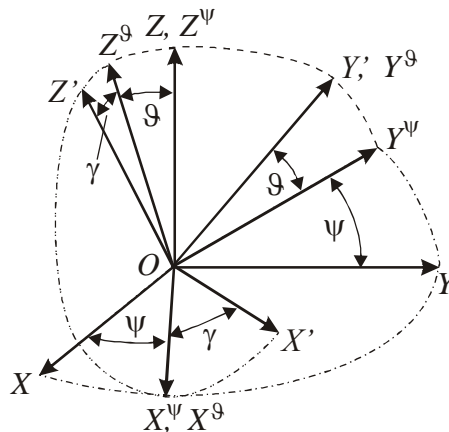


Рисунок 26 – Углы Крылова

При использовании углов Крылова разворот системы координат описывается через последовательные повороты относительно разноименных осей:

1. Производится поворот вокруг оси  $OZ$  на угол рыскания  $\psi$ , в результате которого получается новая система координат  $OX^\psi Y^\psi Z^\psi$ , для которой ось  $OZ^\psi$  совпадает с осью  $OZ$ .

2. Производится поворот вокруг оси  $OX^\psi$  на угол тангажа  $\vartheta$ . Ось  $OX^\vartheta$  получившейся системы координат  $OX^\vartheta Y^\vartheta Z^\vartheta$  совпадает с осью  $OX^\psi$ .

3. Производится поворот вокруг оси  $OY^\vartheta$  на угол крена  $\gamma$ , в результате оси принимают конечное положение  $OX'Y'Z'$ .

Каждому из рассмотренных поворотов соответствует своя матрица разворота:

$$\mathbf{A}_\psi^K = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_\vartheta^K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \mathbf{A}_\gamma^K = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Результирующая матрица поворота получается путем перемножения этих матриц:

$$\mathbf{A}^K = \mathbf{A}_\psi^K \mathbf{A}_\vartheta^K \mathbf{A}_\gamma^K. \quad (14)$$

Направляющие косинусы в этом случае определяются следующим образом:

$$l_1 = \cos \psi \cos \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma;$$

$$m_1 = -\sin \psi \cos \gamma + \sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma;$$

$$n_1 = \cos \vartheta \sin \gamma;$$

$$l_2 = \sin \psi \cos \vartheta;$$

$$m_2 = \cos \psi \cos \vartheta;$$

$$n_2 = -\sin \vartheta;$$

$$l_3 = -\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma;$$

$$m_3 = \sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma;$$

$$n_3 = \cos \vartheta \cos \gamma. \quad (15)$$

При использовании углов Крылова малому развороту тела в пространстве будут соответствовать малые углы рыскания, тангажа и крена, что упростит возможные процедуры линеаризации уравнений. Вырожденность уравнений, записанных с использованием углов Крылова, наблюдается при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ .

Применительно к ОПКС углы Эйлера–Крылова могут использоваться для описания пространственного положения рабочего органа. Так как в реальном технологическом оборудовании, построенном на основе МПКЦ, разворот на угол  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  (для углов Крылова) практически не осуществим, в отличие от вполне возможного случая  $\vartheta = 0$  (для углов Эйлера), то использование углов Крылова является более предпочтительным.

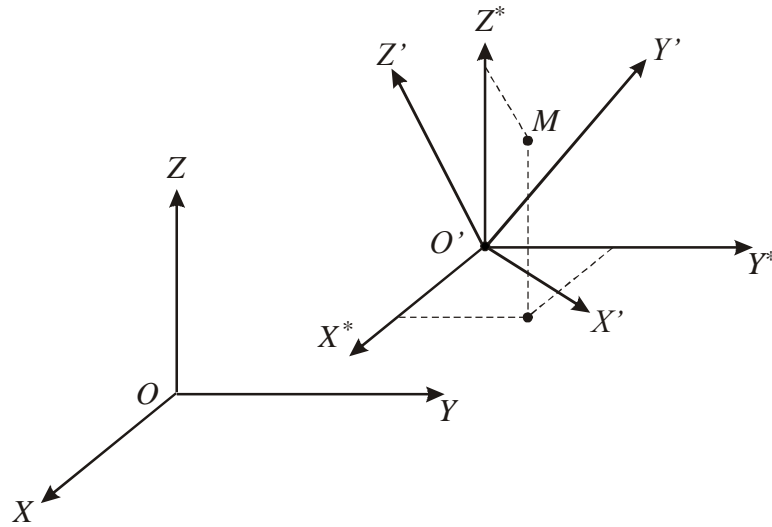
Рассмотренные углы Эйлера и Крылова не исчерпывают всего многообразия троек углов, однозначно описывающих угловую ориентацию твердого тела [104]. Однако для любых троек углов наличие особенностей, ведущих к вырождению записанных с их помощью уравнений, неизбежно [71]. Описание пространственного положения твердого тела, не имеющее особенностей, может быть осуществлено с использованием, например, параметров Кэли–Клейна или кватернионов. Использование кватернионов для описания положения твердого тела и решения задач кинематики применительно к МПКЦ будет рассмотрено в разделе 2.3.

Для описания пространственного положения платформы в СК, начало которой не совпадает с полюсом платформы (рисунок 27) используют матрицы перехода

$$\mathbf{B}^* = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & x_{II} \\ m_1 & m_2 & m_3 & y_{II} \\ n_1 & n_2 & n_3 & z_{II} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где направляющие косинусы осей развернутой системы координат  $O'X'Y'Z'$  заданы относительно осей неподвижной (глобальной) системы координат  $OXYZ$  или, что то же самое, относительно осей подвижной вспомогательной системы

координат  $O'X^*Y^*Z^*$ ;  $(x_{\Pi}, y_{\Pi}, z_{\Pi})^T$  – координаты полюса  $O'$  в неподвижной системе координат.



**Рисунок 27 – Разворот и перенос системы координат**

Оси вспомогательной системы координат параллельны соответствующим осям неподвижной системы координат. Если координаты  $(x', y', z')^T$  некоторой точки заданы в подвижной системе координат, то пересчет их в неподвижную систему координат осуществляется с использованием следующего матричного выражения:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^* \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Матричное преобразование (17) эквивалентно уравнениям

$$x = l_1x' + l_2y' + l_3z' + x_{\Pi}, \quad y = m_1x' + m_2y' + m_3z' + y_{\Pi}, \quad z = n_1x' + n_2y' + n_3z' + z_{\Pi},$$

которые определяют искомые координаты точки через ее координаты во вспомогательной системе координат и смещение вспомогательной системы координат относительно неподвижной. Таким образом, матрица перехода (16) описывает пространственное положение тела полностью, используя шесть величин – три линейные и три угловые координаты.

### 2.2.2. Понятие $L$ -координат

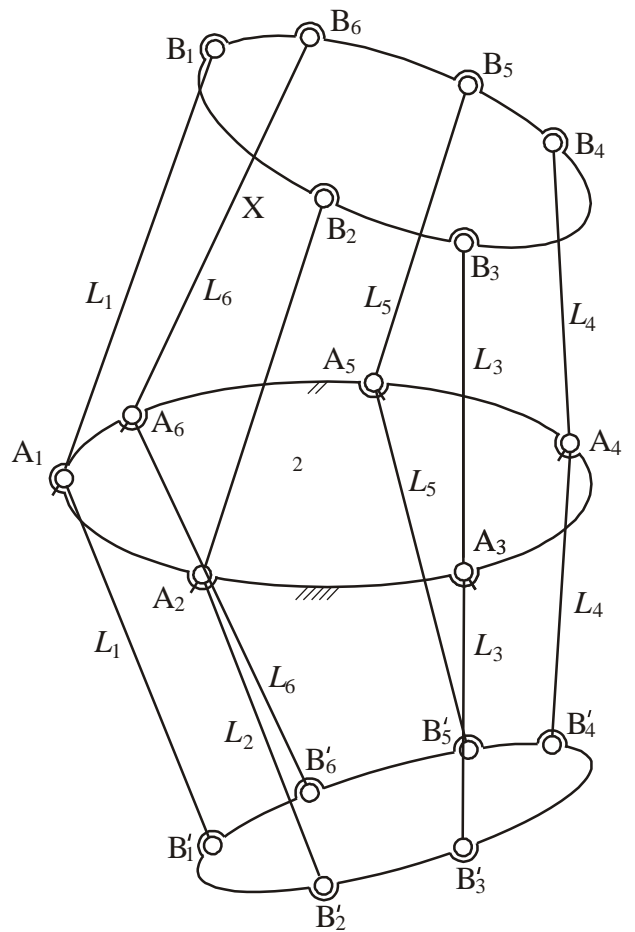
Применительно к оборудованию на основе МПКЦ некоторых типов удобно использовать математический аппарат, позволяющий описывать ориентацию платформы с использованием только шести линейных координат. Например, заданные длины всех шести штанг механизма-гексапода (см. рисунок 13) однозначно определяют ориентацию его платформы в некоторой области пространства.

Под  $L$ -координатами понимают шесть положительных чисел  $L_1, L_2 \dots L_6$ , равных длинам отрезков, соединяющих точки твердого тела с точками основания таким образом, что при заданных значениях  $L_1, L_2 \dots L_6$  образуется геометрически неизменяемая структура [35].

Общее число структур, построенных с использованием  $L$ -координат, равно 59-ти; их схемы и особенности рассмотрены в [42].

Пространственную ориентацию тела не всегда возможно однозначно описать с использованием шести чисел [13]. Например, на рисунке 28 показаны два различных пространственных положения платформы, получаемых при одних и тех же значениях  $L$ -координат.

Для устранения возможных неоднозначностей при описании МПКЦ с помощью  $L$ -координат необходимо ввести дополнительные условия, которые могут быть различными для различных механизмов. Для механизма, показанного на рисунке 28, можно использовать простое условие о том, что все шарниры платформы должна находиться выше плоскости, в которой расположены шарниры,



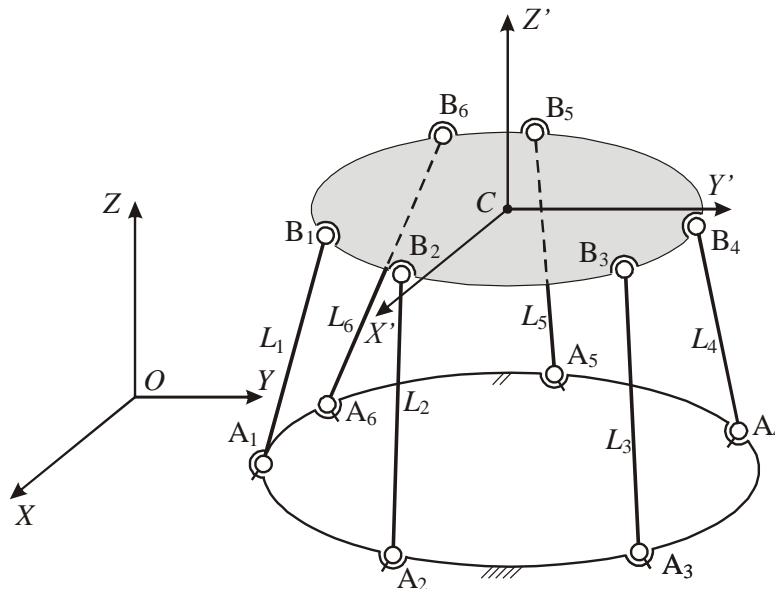
**Рисунок 28 – Неоднозначность задания положения платформы с использованием  $L$ -координат**

связанные с основанием. В ряде случаев для устранения неоднозначности бывает достаточно потребовать, чтобы шарниры, связанные с основанием, не лежали в одной плоскости [42].

### 2.2.3. Кинематическая модель механизма типа «гексапод»

Пусть для платформы МПКЦ с 6-ю степенями свободы определено ее начальное положение: заданы координаты полюса  $C$  в глобальной системе координат  $OXYZ$  и определены направляющие косинусы осей связанной с платформой системы координат  $CX'Y'Z'$  относительно осей системы координат  $OXYZ$ . Примем для простоты, что в начальном положении платформа горизонтальна, а соответствующие оси систем координат  $OXYZ$  и  $CX'Y'Z'$  параллельны (рисунок 29).

Координаты карданных шарниров  $A_j$ , связанных с основанием, необходимо задавать в системе координат  $OXYZ$ . Обозначим координаты  $j$ -го карданового шарнира как  $(x_{A_j}, y_{A_j}, z_{A_j})$  – данные координаты будем считать известными величинами.



**Рисунок 29 – МПКЦ типа «гексапод» – начальное положение платформы; кинематические пары, обеспечивающие изменение длин штанг, условно не показаны**

Если координаты  $(x_{B_j}, y_{B_j}, z_{B_j})$  сферических шарниров  $B_j$  известны в системе координат  $OXYZ$ , то легко получить шесть уравнений, связывающих парамет-

ры, определяющие пространственное положение платформы механизма, со значениями  $L$ -координат:

$$L_j^2 = (x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2 + (z_{A_j} - z_{B_j})^2, j = 1 \dots 6. \quad (18)$$

Таким образом, создание математической модели свелось к записи уравнений, связывающих координаты шарниров, соединенных с одним звеном – штангой, в неподвижной системе координат. Однако математическая модель должна учитывать связи между шарнирами, которые определяются их присоединением к платформе механизма и к основанию.

Координаты сферических шарниров  $B_j$ , расположенных на платформе, проще задавать в связанной с платформой системе координат  $CX'Y'Z'$ . Обозначим эти координаты для  $j$ -го шарнира как  $(x'_{B_j}, y'_{B_j}, z'_{B_j})$ . В этом случае 6 уравнений (18) должны быть дополнены 12-ю уравнениями, связывающими координаты шарниров  $B_j$  в разных системах координат, например, следующим образом [42]:

$$\begin{aligned} & (x_{B_1} - x_{B_2})^2 + (y_{B_1} - y_{B_2})^2 + (z_{B_1} - z_{B_2})^2 = (x'_{B_1} - x'_{B_2})^2 + (y'_{B_1} - y'_{B_2})^2 + (z'_{B_1} - z'_{B_2})^2; \\ & (x_{B_2} - x_{B_3})^2 + (y_{B_2} - y_{B_3})^2 + (z_{B_2} - z_{B_3})^2 = (x'_{B_2} - x'_{B_3})^2 + (y'_{B_2} - y'_{B_3})^2 + (z'_{B_2} - z'_{B_3})^2; \\ & (x_{B_3} - x_{B_4})^2 + (y_{B_3} - y_{B_4})^2 + (z_{B_3} - z_{B_4})^2 = (x'_{B_3} - x'_{B_4})^2 + (y'_{B_3} - y'_{B_4})^2 + (z'_{B_3} - z'_{B_4})^2; \\ & (x_{B_4} - x_{B_5})^2 + (y_{B_4} - y_{B_5})^2 + (z_{B_4} - z_{B_5})^2 = (x'_{B_4} - x'_{B_5})^2 + (y'_{B_4} - y'_{B_5})^2 + (z'_{B_4} - z'_{B_5})^2; \\ & (x_{B_5} - x_{B_6})^2 + (y_{B_5} - y_{B_6})^2 + (z_{B_5} - z_{B_6})^2 = (x'_{B_5} - x'_{B_6})^2 + (y'_{B_5} - y'_{B_6})^2 + (z'_{B_5} - z'_{B_6})^2; \\ & (x_{B_6} - x_{B_1})^2 + (y_{B_6} - y_{B_1})^2 + (z_{B_6} - z_{B_1})^2 = (x'_{B_6} - x'_{B_1})^2 + (y'_{B_6} - y'_{B_1})^2 + (z'_{B_6} - z'_{B_1})^2; \\ & (x_{B_6} - x_{B_1})^2 + (y_{B_6} - y_{B_1})^2 + (z_{B_6} - z_{B_1})^2 = \\ & = (x'_{B_6} - x'_{B_1})^2 + (y'_{B_6} - y'_{B_1})^2 + (z'_{B_6} - z'_{B_1})^2; \\ & (x_{B_1} - x_{B_3})^2 + (y_{B_1} - y_{B_3})^2 + (z_{B_1} - z_{B_3})^2 = (x'_{B_1} - x'_{B_3})^2 + (y'_{B_1} - y'_{B_3})^2 + (z'_{B_1} - z'_{B_3})^2; \\ & (x_{B_1} - x_{B_4})^2 + (y_{B_1} - y_{B_4})^2 + (z_{B_1} - z_{B_4})^2 = (x'_{B_1} - x'_{B_4})^2 + (y'_{B_1} - y'_{B_4})^2 + (z'_{B_1} - z'_{B_4})^2; \\ & (x_{B_2} - x_{B_4})^2 + (y_{B_2} - y_{B_4})^2 + (z_{B_2} - z_{B_4})^2 = (x'_{B_2} - x'_{B_4})^2 + (y'_{B_2} - y'_{B_4})^2 + (z'_{B_2} - z'_{B_4})^2; \\ & (x_{B_1} - x_{B_5})^2 + (y_{B_1} - y_{B_5})^2 + (z_{B_1} - z_{B_5})^2 = (x'_{B_1} - x'_{B_5})^2 + (y'_{B_1} - y'_{B_5})^2 + (z'_{B_1} - z'_{B_5})^2; \\ & (x_{B_2} - x_{B_5})^2 + (y_{B_2} - y_{B_5})^2 + (z_{B_2} - z_{B_5})^2 = (x'_{B_2} - x'_{B_5})^2 + (y'_{B_2} - y'_{B_5})^2 + (z'_{B_2} - z'_{B_5})^2; \\ & (x_{B_2} - x_{B_6})^2 + (y_{B_2} - y_{B_6})^2 + (z_{B_2} - z_{B_6})^2 = (x'_{B_2} - x'_{B_6})^2 + (y'_{B_2} - y'_{B_6})^2 + (z'_{B_2} - z'_{B_6})^2. \end{aligned} \quad (19)$$



Системы уравнений (18) и (19) для дальнейшего использования практически бесполезны из-за их громоздкости.

Математическая модель будет иметь более компактную форму, если координаты  $(x_{B_i}, y_{B_i}, z_{B_i})$  сферических шарниров  $B_i$  выразить через выходные координаты с использованием выражения (17), в котором элементы матрицы  $\mathbf{B}^*$  определяются линейными координатами полюса  $C$  и направляющими косинусами, определяющими поворот платформы относительно полюса:

$$L_j^2 = (x_{A_j} - l_1 x'_{B_j} - l_2 y'_{B_j} - l_3 z'_{B_j} - x_C)^2 + (y_{A_j} - m_1 x'_{B_j} - m_2 y'_{B_j} - m_3 z'_{B_j} - y_C)^2 + (z_{A_j} - n_1 x'_{B_j} - n_2 y'_{B_j} - n_3 z'_{B_j} - z_C)^2, j = 1 \dots 6. \quad (20)$$

Используя свойства матрицы поворота, уравнения (20) можно преобразовать к виду

$$L_j^2 = x_{A_j}^2 + y_{A_j}^2 + z_{A_j}^2 + x_{B_j}^2 + y_{B_j}^2 + z_{B_j}^2 - (x_C^2 + y_C^2 + z_C^2) + 2(l_1 x'_{B_j} + l_2 y'_{B_j} + l_3 z'_{B_j})(x_C - x_{A_j}) + 2(m_1 x'_{B_j} + m_2 y'_{B_j} + m_3 z'_{B_j})(y_C - y_{A_j}) + 2(n_1 x'_{B_j} + n_2 y'_{B_j} + n_3 z'_{B_j})(z_C - z_{A_j}), j = 1 \dots 6. \quad (21)$$

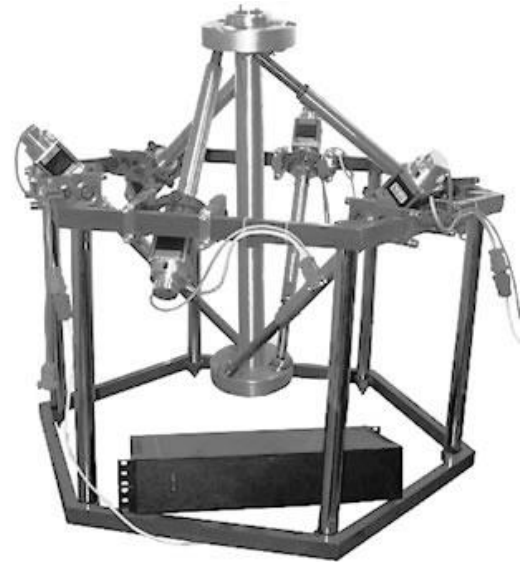
Если в качестве угловых выходных координат использовать углы Крылова, то уравнения (21) можно записать в следующей форме [100]:

$$L_j^2 = x_{B_j}^2 + y_{B_j}^2 + z_{B_j}^2 + (x_C - x_{A_j})^2 + (y_C - y_{A_j})^2 + (z_C - z_{A_j})^2 + 2 \left[ (C\psi C\gamma + S\psi S\vartheta S\gamma) x'_{B_j} + S\psi C\vartheta y'_{B_j} + (S\psi S\vartheta C\gamma - C\psi S\gamma) z'_{B_j} \right] (x_C - x_{A_j}) + 2 \left[ (C\psi S\vartheta S\gamma - S\psi C\gamma) x'_{B_j} + C\psi C\vartheta y'_{B_j} + (S\psi S\gamma + C\psi S\vartheta C\gamma) z'_{B_j} \right] (y_C - y_{A_j}) + 2 \left[ C\vartheta S\gamma x'_{B_j} - S\vartheta y'_{B_j} + C\vartheta C\gamma z'_{B_j} \right] (z_C - z_{A_j}), j = 1 \dots 6, \quad (22)$$

где для сокращения записи введены обозначения:  $S\psi = \sin \psi$ ,  $C\psi = \cos \psi$  и т. д.

Шесть независимых уравнений (22) связывают между собой все шесть выходных и все шесть входных координат рассматриваемого МПКЦ и не требуют каких-либо дополнительных уравнений связи. Данные уравнения представляют собой кинематическую модель МПКЦ типа «гексапод». Аналогичные уравнения можно составить и с использованием в качестве угловых выходных координат углов Эйлера или станочных углов.

Система уравнений (22) справедлива не только для МПКЦ, показанного на рисунке 29. Такие же уравнения были использованы для устройства с параллельной кинематической структурой, показанного на рисунке 30. Устройство было создано на кафедре автоматизации механосборочного производства Южно-Уральского государственного университета. Особенностью устройства является разнонаправленность штанг переменной длины, что позволило придать ему дополнительную жесткость.



**Рисунок 30 – МПКЦ гексапод с разнонаправленными штангами**

Система уравнений (22) позволяет решить как прямую, так и обратную задачу о положениях, причем, обратная задача решается аналитически. Особенности решения прямой задачи кинематики применительно к МПКЦ типа «гексапод» рассмотрены ниже.

#### **2.2.4. Решение прямой задачи кинематики для механизма типа «гексапод»**

Основой для решения задач кинематики являются уравнения кинематической модели, связывающие входные и выходные координаты. Для механизма типа «гексапод» – это уравнения (22). Данные уравнения являются нелинейными, поэтому решение прямой задачи обычно представляет серьезную проблему; аналитическое решение прямой задачи возможно только для некоторых вариантов построения рассматриваемого механизма.

На рисунке 31 представлена кинематическая схема механизма с 6-ю степенями свободы, для которого прямая задача решается аналитически [42, 102]. Примем, что выходными координатами этого механизма являются координаты шарниров  $B_i$ , входными – длины его штанг. Способность штанг менять свои длины на рисунке 31 условно не отражена.

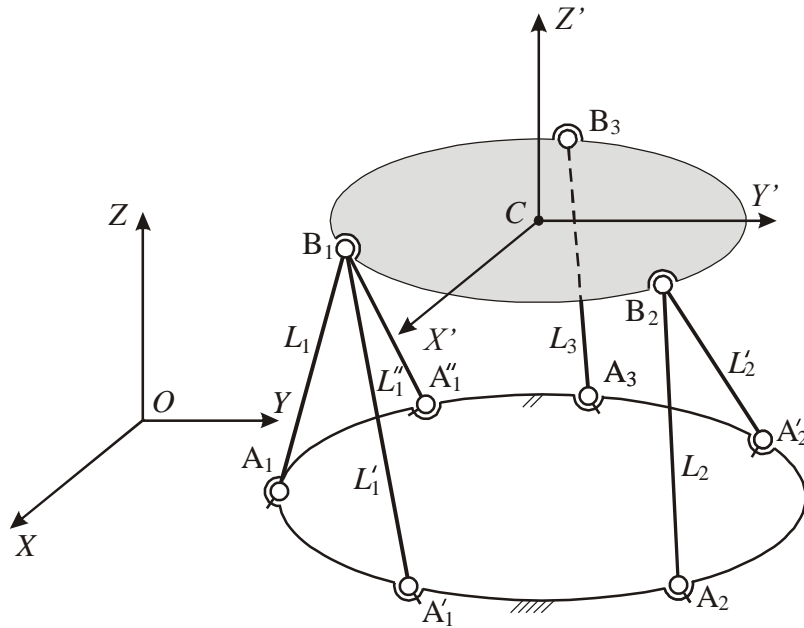
Решение прямой задачи начинается с определения координат шарнира  $B_1$  при известных координатах шарниров  $A_1, A'_1, A''_1$  и длинах штанг  $L_1, L'_1, L''_1$ . Способы определения координат шарнира  $B_1$  рассмотрены в [42, 102]. Ниже представлен еще один способ, использующий векторную алгебру.

Введем в рассмотрение вектора  $\bar{r}_{A_1}, \bar{r}_{A'_1}, \bar{r}_{A''_1}$  (рисунок 32). Угол между векторами  $\bar{r}_{A_1}$  и  $\bar{r}_{A'_1}$

$$\cos \gamma' = \frac{r_{A_1X}r_{A'_1X} + r_{A_1Y}r_{A'_1Y} + r_{A_1Z}r_{A'_1Z}}{|A_1A'_1||A_1B_1|},$$

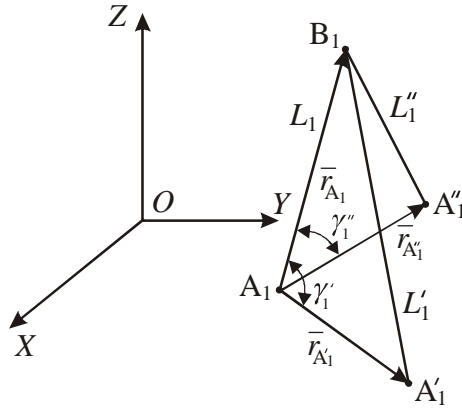
где индексами обозначены проекции соответствующих векторов на оси системы координат  $OXYZ$ . Проекции для вектора  $\bar{r}_{A'_1}$  определяются по известным координатам шарниров  $A_1, A'_1$ :

$$r_{A'_1X} = x_{A'_1} - x_{A_1}, r_{A'_1Y} = y_{A'_1} - y_{A_1}, r_{A'_1Z} = z_{A'_1} - z_{A_1}.$$



**Рисунок 31 – МПКЦ с 6-ю степенями свободы, для которого осуществимо аналитическое решение прямой задачи кинематики**

Проекции вектора  $\bar{r}_{A_1}$  необходимо определить для дальнейшего нахождения координат шарнира  $B_1$ .



**Рисунок 32 – Использование векторов для определения координат шарнира  $B_1$**

С другой стороны, по теореме косинусов для треугольника  $A_1A'_1B_1$  можно записать

$$\cos \gamma' = \frac{|A'_1B_1|^2 - |A_1B_1|^2 - |A_1A'_1|^2}{2|A_1A'_1||A_1B_1|}.$$

Приравняв выражения для косинусов, можно получить выражение относительно неизвестной проекции  $r_{A_1X}$ :

$$r_{A_1X} = \frac{|A'_1B_1|^2 - |A_1B_1|^2 - |A_1A'_1|^2}{2r_{A_1X}} - \frac{r_{A_1Y}r_{A'_1Y} + r_{A_1Z}r_{A'_1Z}}{r_{A_1X}}. \quad (23)$$

Аналогичное выражение можно записать с использованием проекций вектора  $\bar{r}_{A''_1}$ :

$$r_{A_1X} = \frac{|A''_1B_1|^2 - |A_1B_1|^2 - |A_1A''_1|^2}{2r_{A''_1X}} - \frac{r_{A_1Y}r_{A''_1Y} + r_{A_1Z}r_{A''_1Z}}{r_{A''_1X}}. \quad (24)$$

Приравняв выражения для проекции  $r_{A_1X}$ , можем получить выражение для проекции  $r_{A_1Y}$ :

$$r_{A_1Y} = \frac{r_{A_1X}r_{A''_1X}}{r_{A_1Y}r_{A''_1X} - r_{A''_1Y}r_{A_1X}} \left( \frac{|A'_1B_1|^2 - |A_1B_1|^2 - |A_1A'_1|^2 - 2r_{A_1Z}r_{A'_1Z}}{2r_{A_1X}} - \frac{|A''_1B_1|^2 - |A_1B_1|^2 - |A_1A''_1|^2 - 2r_{A_1Z}r_{A''_1Z}}{2r_{A''_1X}} \right). \quad (25)$$

Последовательно подставляя (24) и (25) в выражение

$$r_{A_1X}^2 + r_{A_1Y}^2 + r_{A_1Z}^2 = |A_1B_1|^2,$$

получим квадратное уравнение относительно неизвестной проекции  $r_{A_1Z}$ :

$$a_1 r_{A_1Z}^2 + a_2 r_{A_1Z} + a_3 = 0,$$

где

$$a_1 = (r_{A_1Y} r_{A_1Z} - r_{A_1Z} r_{A_1Y})^2 + (r_{A_1Y} r_{A_1X} - r_{A_1X} r_{A_1Y})^2 + (r_{A_1X} r_{A_1Z} - r_{A_1Z} r_{A_1X})^2;$$

$$a_2 = \left( |A_1A''_1|^2 - |A''_1B_1|^2 \right) b_1 + \left( |A_1A'_1|^2 - |A'_1B_1|^2 \right) b_2 + |A'_1B_1|^2 b_3;$$

$$b_1 = (r_{A_1X}^2 + r_{A_1Y}^2) r_{A_1Z} - (r_{A_1X} r_{A_1X} + r_{A_1Y} r_{A_1Y}) r_{A_1Z};$$

$$b_2 = (r_{A_1X}^2 + r_{A_1Y}^2) r_{A_1Z} - (r_{A_1X} r_{A_1X} + r_{A_1Y} r_{A_1Y}) r_{A_1Z};$$

$$b_3 = (r_{A_1X}^2 + r_{A_1Y}^2) r_{A_1Z} + (r_{A_1X}^2 + r_{A_1Y}^2) r_{A_1Z} - (r_{A_1Z} + r_{A_1Z}) (r_{A_1Y} r_{A_1Y} + r_{A_1X} r_{A_1X});$$

$$a_3 = \frac{|A_1B_1|^4 c_1 + |A_1B_1|^2 c_2 + c_3}{4};$$

$$c_1 = (r_{A_1X} - r_{A_1X})^2 + (r_{A_1Y} - r_{A_1Y})^2;$$

$$c_2 = \left[ |A_1A''_1|^2 - |A''_1B_1|^2 \right] d_1 + \left[ |A_1A'_1|^2 - |A'_1B_1|^2 \right] d_2 + d_3;$$

$$d_1 = 2(r_{A_1X}^2 + r_{A_1Y}^2 - r_{A_1X} r_{A_1X} - r_{A_1Y} r_{A_1Y});$$

$$d_2 = 2(r_{A_1X}^2 + r_{A_1Y}^2 - r_{A_1X} r_{A_1X} - r_{A_1Y} r_{A_1Y});$$

$$d_3 = -4(r_{A_1X} r_{A_1Y} - r_{A_1Y} r_{A_1X})^2;$$

$$c_3 = \left( \left[ |A_1A''_1|^2 - |A''_1B_1|^2 \right] r_{A_1Y} - \left[ |A_1A'_1|^2 - |A'_1B_1|^2 \right] r_{A_1Y} \right)^2 + \left( \left[ |A_1A''_1|^2 - |A''_1B_1|^2 \right] r_{A_1X} - \left[ |A_1A'_1|^2 - |A'_1B_1|^2 \right] r_{A_1X} \right)^2.$$

Решение этого квадратного уравнения позволит найти одну из проекций вектора  $\bar{r}_{A_1}$ ; уравнения (24) и (25) позволят определить две другие. Так как координаты начала вектора  $\bar{r}_{A_1}$  – шарнира  $A_1$  известны, а проекции вектора являются его координатами, то выражение

$$\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_1} \\ z_{B_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{A_1X} \\ r_{A_1Y} \\ r_{A_1Z} \end{pmatrix}$$

позволит определить координаты шарнира  $B_1$ .

Аналогичным образом по известным координатам шарниров  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $A'_2$ , длинам штанг  $L_2$ ,  $L'_2$  и расстоянию между шарнирами  $B_1$  и  $B_2$  определяются координаты шарнира  $B_2$ . Далее, по известным координатам шарниров  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $A_3$ , длине штанги  $L_3$  и расстояниям между шарнирами  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  определяются координаты шарнира  $B_3$ .

Если прямая задача кинематики для механизма с требуемой схемой не может быть решена аналитически, то ее решение должно осуществляться в численном виде. Численное решение прямой задачи возможно с использованием различных методик [102]. Наиболее очевидный подход – численное решение непосредственно системы нелинейных уравнений, составляющих математическую модель механизма [193]. Основной проблемой такого подхода является необходимость выбора достаточно малых приращений обобщенных координат при пошаговом расчете траектории движения выходного звена. То есть, расчет нового положения выходного звена, существенно отличающегося от ранее рассчитанного, требует вычисления большого количества промежуточных положений. Количество этих положений определяется сходимостью используемого для решения системы нелинейных уравнений алгоритма.

Если система уравнений, описывающих МПКЦ, может быть сведена к полиному с одним неизвестным, то решение этого полинома позволяет определить количество возможных решений (сборок) для этого механизма [102]. Эта информация может использоваться при синтезе механизмов.

Для решения прямой задачи может использоваться реструктуризация механизма с целью снижения количества неизвестных переменных. Рассмотрим МПКЦ типа «гексапод», показанный на рисунке 33.

Система уравнений, описывающих этот механизм, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
L_1^2 &= (x_{A_1} - x_{B_1})^2 + (y_{A_1} - y_{B_1})^2 + (z_{A_1} - z_{B_1})^2; \\
L_2^2 &= (x_{A_2} - x_{B_2})^2 + (y_{A_2} - y_{B_2})^2 + (z_{A_2} - z_{B_2})^2; \\
L_3^2 &= (x_{A_3} - x_{B_3})^2 + (y_{A_3} - y_{B_3})^2 + (z_{A_3} - z_{B_3})^2; \\
L'_1{}^2 &= (x_{A'_1} - x_{B_1})^2 + (y_{A'_1} - y_{B_1})^2 + (z_{A'_1} - z_{B_1})^2; \\
L'_2{}^2 &= (x_{A'_2} - x_{B_2})^2 + (y_{A'_2} - y_{B_2})^2 + (z_{A'_2} - z_{B_2})^2; \\
L'_3{}^2 &= (x_{A'_3} - x_{B_3})^2 + (y_{A'_3} - y_{B_3})^2 + (z_{A'_3} - z_{B_3})^2; \\
(x_{B_1} - x_{B_2})^2 + (y_{B_1} - y_{B_2})^2 + (z_{B_1} - z_{B_2})^2 &= \\
&= (x'_{B_1} - x'_{B_2})^2 + (y'_{B_1} - y'_{B_2})^2 + (z'_{B_1} - z'_{B_2})^2; \\
(x_{B_2} - x_{B_3})^2 + (y_{B_2} - y_{B_3})^2 + (z_{B_2} - z_{B_3})^2 &= \\
&= (x'_{B_2} - x'_{B_3})^2 + (y'_{B_2} - y'_{B_3})^2 + (z'_{B_2} - z'_{B_3})^2; \\
(x_{B_1} - x_{B_3})^2 + (y_{B_1} - y_{B_3})^2 + (z_{B_1} - z_{B_3})^2 &= \\
&= (x'_{B_1} - x'_{B_3})^2 + (y'_{B_1} - y'_{B_3})^2 + (z'_{B_1} - z'_{B_3})^2.
\end{aligned} \tag{26}$$

Система уравнений (26) может быть решена численно, при этом в качестве неизвестных будут выступать 9 координат верхних шарниров.

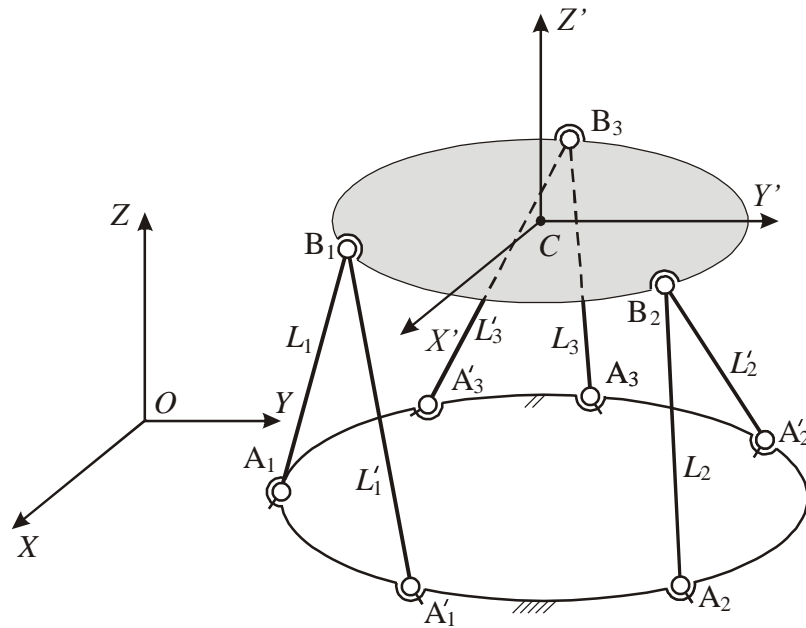
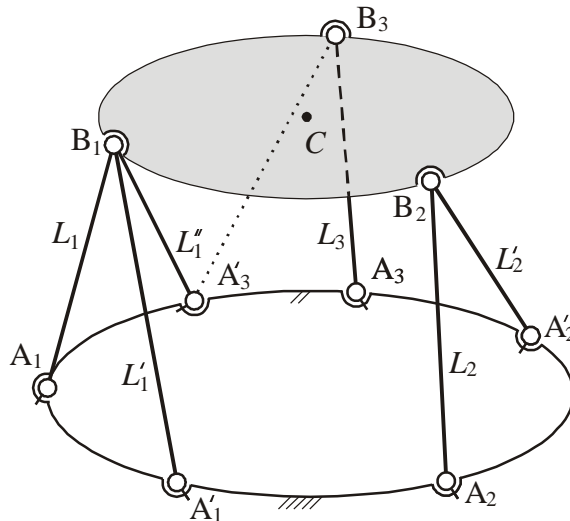


Рисунок 33 – МПКЦ типа «гексапод» до реструктуризации

Количество неизвестных при решении прямой задачи кинематики для рассматриваемого механизма можно существенно уменьшить при использовании методики, описанной в [42, 102]. Изменим структуру механизма следующим образом (рисунок 34):

- уберем из механизма штангу  $L'_3$ ,
- введем в механизм штангу  $L''_1$ .



**Рисунок 34 – МПКЦ типа «гексапод» после реструктуризации**

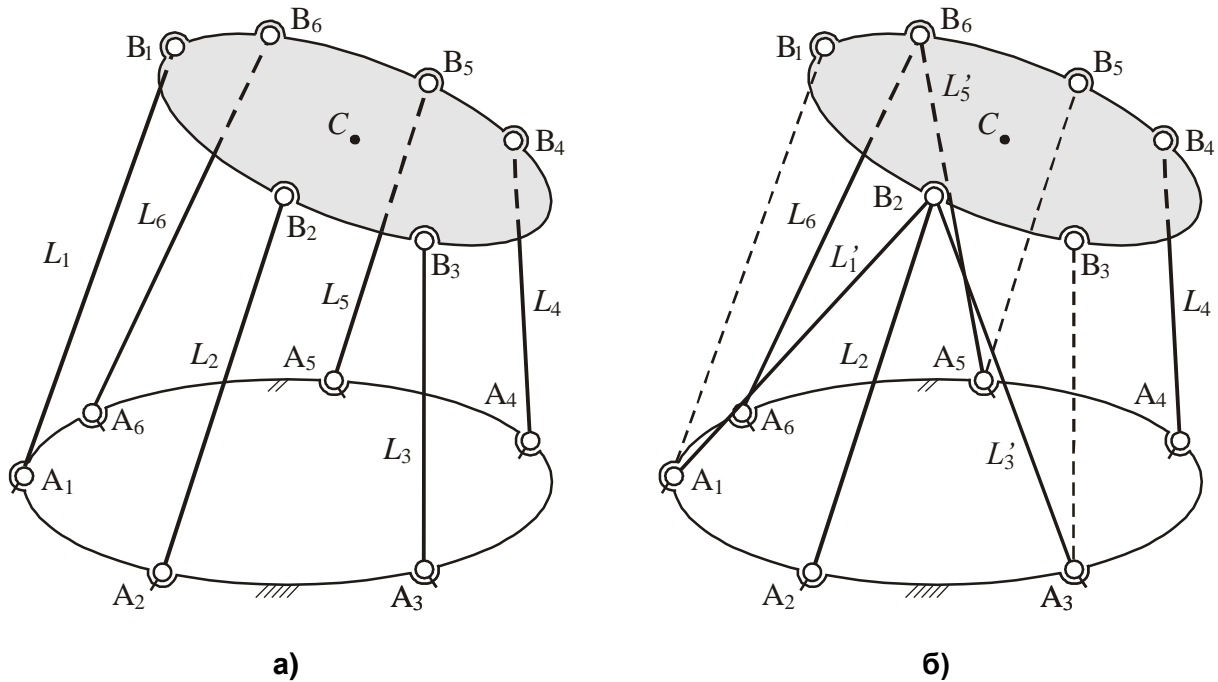
Такое преобразование позволило свести исходный механизм к механизму, для которого прямая задача кинематики решается аналитически (см. рисунок 31). Положение выходных звеньев для этих механизмов будет одинаковым только в том случае, когда длины штанг  $L_1, L'_1, L_2, L'_2, L_3$  обоих механизмов будут соответственно равны, а расстояние  $|A'_3B_3|$  в полученном после преобразования механизме равно заданной длине штанги  $L'_3$  исходного механизма. Решения прямой задачи для исходного механизма сводится к определению такой длины штанги  $L''_1$  преобразованного механизма, которая при заданных длинах штанг  $L_1, L'_1, L_2, L'_2, L_3$  обеспечила бы выполнение условия  $|A'_3B_3| = L'_3$ . Последняя задача имеет одну переменную  $L''_1$ , поэтому относительно легко решается численными методами.

Таким образом, исходная задача с 9-ю переменными свелась к задаче с одной переменной.



Рассмотренная методика может быть применена ко многим МПКЦ, однако эффективность ее применения во многом определяется схемой механизма [102]. Для более распространенного на практике МПКЦ, показанного на рисунке 35, а, реструктуризация сводится к выполнению следующих действий:

- из механизма убираются штанги  $L_1 = |A_1B_1|$ ,  $L_3 = |A_3B_3|$ ,  $L_5 = |A_5B_5|$ ;
- в механизм вводятся штанги  $L'_1 = |A_1B_2|$ ,  $L'_3 = |A_3B_2|$ ,  $L'_5 = |A_5B_6|$ .



**Рисунок 35 – Реструктуризация МПКЦ типа «гексапод» с целью уменьшения размерности прямой задачи кинематики о положениях: а) – исходный механизм – шесть численно определяемых неизвестных; б) – механизм с измененной структурой – три численно определяемых неизвестных**

В результате получается МПКЦ (рисунок 35, б, сравните с рисунком 31), для которого прямая задача имеет аналитическое решение. Однако, длины штанг  $L'_1$ ,  $L'_3$ ,  $L'_5$  являются величинами неизвестными. Поэтому предварительно должна быть решена следующая задача: найти такие длины штанг  $L'_1$ ,  $L'_3$ ,  $L'_5$ , при которых расстояния  $|A_1B_1|$ ,  $|A_3B_3|$ ,  $|A_5B_5|$  будут равны заданным величинам – длинам штанг  $L_1$ ,  $L_3$ ,  $L_5$  исходного МПКЦ. В этом случае подвижная платформы исходного и полученного в результате реструктуризации МПКЦ будут иметь одинаковые положения, т. е. будут равны соответствующие выходные координаты обоих МПКЦ. Следовательно, результат аналитического решения прямой задачи кинематики

матики для второго МПКЦ будет являться результатом решения аналогичной задачи для исходного МПКЦ. Таким образом, размерность прямой задачи снижена с шести до трех.

Для многих МПКЦ решение обратной задачи кинематики представляет существенно более простую процедуру, чем решение прямой задачи. Наиболее наглядно это проявляется применительно к гексаподам. В этом случае, если положение платформы механизма задано, то координаты верхних шарниров могут быть легко рассчитаны. Поэтому уравнения (18) позволяют непосредственно определить длины штанг  $L_j$ , соответствующие заданному положению платформы. Длины штанг  $L_j$  могут быть рассчитаны с использованием уравнений (22).

Кинематическая модель (18) оперирует с идеальными кинематическими параметрами. Реализация этих кинематических пар с помощью реальных устройств потребует учитывать при построении кинематической модели погрешности (неидеальности), свойственные реальным устройствам.

### **2.2.5. Уточненная кинематическая модель механизма типа «гексапод»**

Одним из важных конструктивных элементов МПКЦ типа «гексапод» является двухстепенной (кардановый) шарнир, связывающий штангу переменной длины с основанием. Кинематическая схема идеального карданового шарнира показана на рисунке 36, а: в шарнире возможен поворот вокруг взаимно перпендикулярных осей  $A_x$  и  $A_y$ , пересекающихся в точке  $A$ . Данная точка может считаться центром шарнира; ее координаты используются при построении кинематической модели МПКЦ (18).

Построим кинематическую модель МПКЦ типа «гексапод» [74, 93], которая учитывает неизбежные в реальном кардановом шарнире отклонения от его идеальной схемы.

Реальный кардановый шарнир будет иметь следующие отклонения от идеальности (рисунок 36, б):

1. Реальная ось поворота  $u_p u_p$  не будет совпадать с идеальной осью  $A_y$ ; в общем случае эти оси будут скрещиваться.

2. Реальная ось поворота  $x_p x_p$  не будет совпадать с идеальной осью  $Ax$ ; в общем случае эти оси будут скрещиваться.

3. Для реальных осей  $x_p x_p$  и  $y_p y_p$  требование о взаимной перпендикулярности могут не выполняться.

4. В общем случае оси  $x_p x_p$  и  $y_p y_p$  будут скрещиваться. Понятие «центр» для реального карданового шарнира носит идеализированный характер; в качестве центра может выступать практически любая точка, желательно с известными в глобальной для МПКЦ СК координатами.

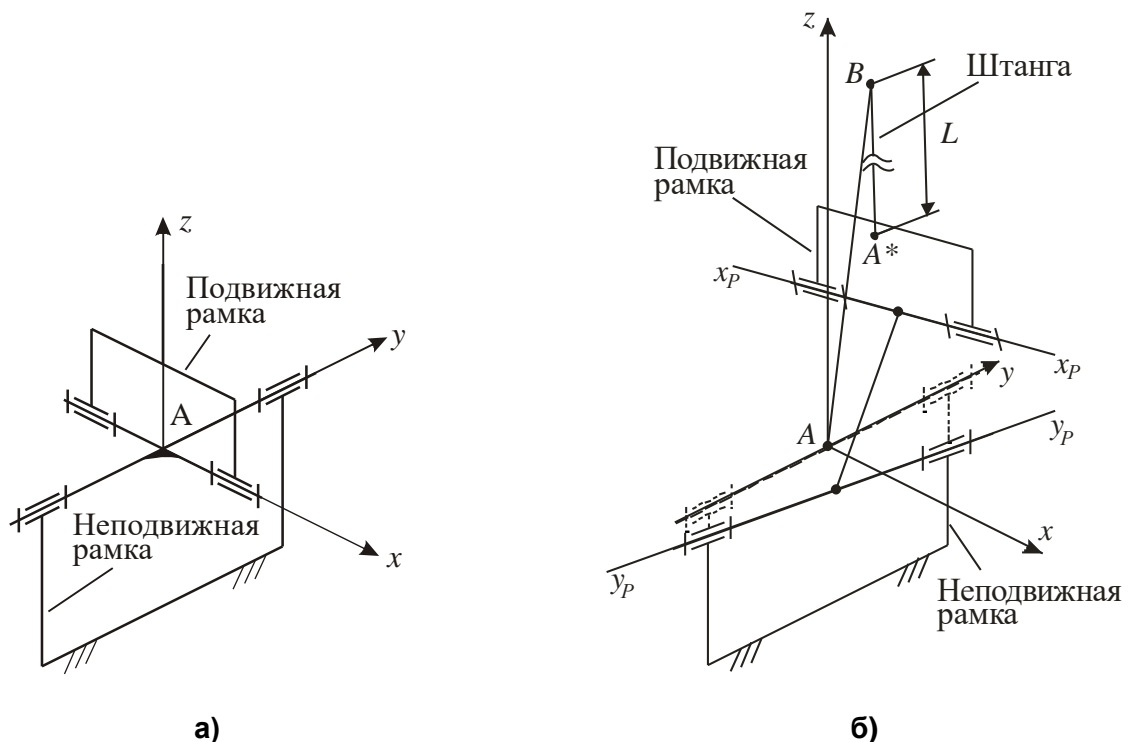


Рисунок 36 – Кинематическая схема карданового шарнира: а) – идеального; б) – реального

Для анализа влияния отмеченных отклонений от идеальности на поведение МПКЦ введем следующим образом несколько систем координат (рисунок 37):

1. Из точки  $A^*$ , лежащей на продольной оси штанги переменной длины, проведем перпендикуляр на ось  $x_p x_p$ ; полученная точка  $A''$  будет являться началом связанной с подвижной рамкой системы координат  $A''x''y''z''$ . Направления осей данной СК показаны на рисунке 37.

2. Оси системы координат  $A^*x^*y^*z^*$  сонаправлены соответствующим осям системы координат  $A''x''y''z''$ .

3. Из точки  $A''$ , лежащей на продольной оси штанги переменной длины, проведем перпендикуляр на ось  $y_p y_p$ ; полученная точка  $A'$  будет являться началом системы координат  $A'x'y'z'$ . Направления осей данной СК также показаны на рисунке 37.

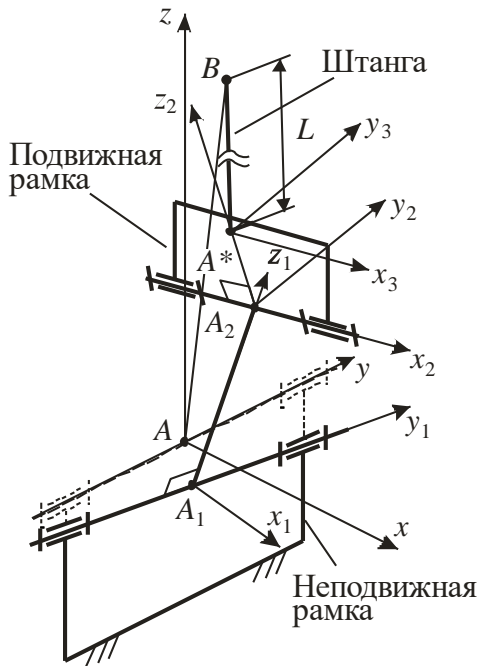


Рисунок 37 – Системы координат, используемые при описании реального карданового шарнира

В качестве длины штанги  $L$  будет выступать расстояние от точки  $B$  до точки  $A^*$ . Используемое при построении кинематических моделей МПКЦ, имеющих штанги переменной длины расстояние  $|AB|$  будет связано с длиной штанги  $L = |BA^*|$  некоторой зависимостью. Для определения этой зависимости необходимо произвести пересчет известных в СК  $A^*x^*y^*z^*$  координат точки  $B$  в СК  $Axyz$ . Данный пересчет может быть осуществлен с использованием матричных преобразований.

Пусть матрица  $A'$  описывает разворот осей СК  $A'x'y'z'$  относительно осей СК  $Axyz$ , а матрица  $A''$  описывает разворот осей СК  $A''x''y''z''$  относительно осей СК  $A'x'y'z'$ . Вектор  $R'$  определяет координаты точки  $A'$  в СК  $Axyz$ ,  $R''$  – координаты точки  $A''$  в СК  $A'x'y'z'$ ,  $R^*$  – координаты точки  $A^*$  в СК  $A''x''y''z''$ . Тогда координаты точки  $B$  в СК  $Axyz$  могут быть определены как

$$\begin{pmatrix} x_B^{Axyz} \\ y_B^{Axyz} \\ z_B^{Axyz} \end{pmatrix} = A'^T \left[ A''^T \left[ \begin{pmatrix} x_B^{A^*x^*y^*z^*} \\ y_B^{A^*x^*y^*z^*} \\ z_B^{A^*x^*y^*z^*} \end{pmatrix} + R^* \right] + R'' \right] + R', \quad (27)$$

где  $(x_B^{A^*x^*y^*z^*} \quad y_B^{A^*x^*y^*z^*} \quad z_B^{A^*x^*y^*z^*})^T$  – координаты точки В в СК  $A^*x^*y^*z^*$ ;

$$\mathbf{R}' = (x_{A'}^{Axyz} \quad y_{A'}^{Axyz} \quad z_{A'}^{Axyz})^T, \quad \mathbf{R}'' = (x_{A''}^{A'x'y'z'} \quad y_{A''}^{A'x'y'z'} \quad z_{A''}^{A'x'y'z'})^T,$$

$$\mathbf{R}^* = (x_{A^*}^{A''x''y''z''} \quad y_{A^*}^{A''x''y''z''} \quad z_{A^*}^{A''x''y''z''})^T.$$

Координаты  $(x_B^{A^*x^*y^*z^*} \quad y_B^{A^*x^*y^*z^*} \quad z_B^{A^*x^*y^*z^*})^T$  необходимо связать с длиной штанги  $L = |BA^*|$ , которая является одной из входных координат для МПКЦ:

$$x_B^{A^*x^*y^*z^*} = l_3 L, \quad y_B^{A^*x^*y^*z^*} = m_3 L, \quad z_B^{A^*x^*y^*z^*} = n_3 L,$$

где направляющие косинусы  $l_3, m_3, n_3$  определяют направление продольной оси штанги в СК  $A^*x^*y^*z^*$ .

Направляющие косинусы, из которых сформированы матрицы  $\mathbf{A}'$  и  $\mathbf{A}''$ , целесообразно выразить через угловые координаты (по три на каждую матрицу), например, через углы Крылова. Применительно к матрице  $\mathbf{A}'$  аналогично (14) можно записать, что

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}_\gamma' \mathbf{A}_\vartheta' \mathbf{A}_\psi',$$

и

$$l'_1 = \cos \psi' \cos \gamma' + \sin \vartheta' \sin \psi' \sin \gamma';$$

$$m'_1 = -\sin \psi' \cos \gamma' + \sin \vartheta' \cos \psi' \sin \gamma';$$

$$n'_1 = \cos \vartheta' \sin \gamma';$$

$$l'_2 = \sin \psi' \cos \vartheta';$$

$$m'_2 = \cos \psi' \cos \vartheta';$$

$$n'_2 = -\sin \vartheta';$$

$$l'_3 = -\cos \psi' \sin \gamma' + \sin \psi' \sin \vartheta' \cos \gamma';$$

$$m'_3 = \sin \psi' \sin \gamma' + \cos \psi' \sin \vartheta' \cos \gamma';$$

$$n'_3 = \cos \vartheta' \cos \gamma'.$$

За начальное при развороте осей следует принять положение, при котором оси поворачиваемой СК были сонаправлены соответствующим осям СК  $Axyz$ .

Углы Крылова  $\psi'$  и  $\vartheta'$  будут описывать пространственную ориентацию оси поворота  $A'y'$ ; величина  $\gamma'$  будет описывать изменение угловой координаты, соответствующей одной из степеней свободы в рассматриваемом шарнире.

Для того, чтобы упростить описание изменения второй угловой координаты шарнира следует несколько изменить последовательность поворота осей СК  $A''x''y''z''$  из начального положение в текущее:

– осуществляется поворот вокруг двух осей (условно,  $A''\tilde{y}''$  и  $A''\tilde{z}''$ ) таким образом, чтобы ось  $A''x''$  заняла требуемое положение;

– осуществляется поворот вокруг оси  $A''x''$  с тем, чтобы оси  $A''y''$  и  $A''z''$  заняли требуемое положение.

В этом случае два угла Крылова  $\psi''$  и  $\gamma''$  будут описывать ориентацию оси поворота  $A''x''$ ; угол поворота по второй степени свободы в шарнире будет соответствовать величине  $\vartheta''$ . Матрица  $A''$  получается как

$$A'' = A_{\psi''} A_{\gamma''} A_{\vartheta''}$$

и

$$l''_1 = \cos \psi'' \cos \vartheta'' + \sin \gamma'' \sin \psi'' \sin \vartheta'';$$

$$m''_1 = -\sin \psi'' \cos \vartheta'' + \sin \gamma'' \cos \psi'' \sin \vartheta'';$$

$$n''_1 = \cos \gamma'' \sin \vartheta'';$$

$$l''_2 = \sin \psi'' \cos \gamma'';$$

$$m''_2 = \cos \psi'' \cos \gamma'';$$

$$n''_2 = -\sin \gamma'';$$

$$l''_3 = -\cos \psi'' \sin \vartheta'' + \sin \psi'' \sin \gamma'' \cos \vartheta'';$$

$$m''_3 = \sin \psi'' \sin \vartheta'' + \cos \psi'' \sin \gamma'' \cos \vartheta'';$$

$$n''_3 = \cos \vartheta'' \cos \gamma''.$$

Пусть для МПКЦ заданы шесть выходных координат: три линейные координаты полюса  $C$  платформы в глобальной системе координат  $OXYZ$  и три угловые координаты, описывающие разворот осей связанной с платформой СК  $CX'Y'Z'$  (см. рисунок 29) относительно осей глобальной СК, а также известны координаты

точек  $B_j$  в системе координат  $CX'Y'Z'$  и координаты точек  $A_j$  в глобальной системе координат. Тогда для  $j$ -й штанги (и карданового шарнира) можно записать:

$$\begin{pmatrix} x_{B_j}^{OXYZ} \\ y_{B_j}^{OXYZ} \\ z_{B_j}^{OXYZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{B_j}^{A_j x_j y_j z_j} \\ y_{B_j}^{A_j x_j y_j z_j} \\ z_{B_j}^{A_j x_j y_j z_j} \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{0j}, \text{ и } \begin{pmatrix} x_{B_j}^{OXYZ} \\ y_{B_j}^{OXYZ} \\ z_{B_j}^{OXYZ} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_C^T \begin{pmatrix} x_{B_j}^{CX'Y'Z'} \\ y_{B_j}^{CX'Y'Z'} \\ z_{B_j}^{CX'Y'Z'} \end{pmatrix} + \mathbf{R}_C,$$

где  $\mathbf{R}_{0j}$  – матрица, определяющая координаты точки  $A_j$  в глобальной системе координат;  $\mathbf{A}_C$  – матрица направляющих косинусов, описывающая разворот осей СК  $CX'Y'Z'$  относительно  $OXYZ$ , определяется угловыми выходными координатами, например, углами Крылова;  $\mathbf{R}_C$  – вектор, содержащий координаты полюса подвижной платформы в глобальной системе координат.

Приравняв записанные матричные выражения, с учетом (27) получим систему уравнений, составляющих уточненную кинематическую модель МПКЦ типа «гексапод», учитывающую неидеальность двухстепенных кардановых шарниров:

$$\mathbf{A}_C^T \begin{pmatrix} x_{B_j}^{CX'Y'Z'} \\ y_{B_j}^{CX'Y'Z'} \\ z_{B_j}^{CX'Y'Z'} \end{pmatrix} + \mathbf{R}_C = \mathbf{A}'_j{}^T \left[ \mathbf{A}''_j{}^T \left[ \begin{pmatrix} x_{B_j}^{A^*x^*y^*z^*} \\ y_{B_j}^{A^*x^*y^*z^*} \\ z_{B_j}^{A^*x^*y^*z^*} \end{pmatrix} + \mathbf{R}^*_j \right] + \mathbf{R}''_j \right] + \mathbf{R}'_j + \mathbf{R}_{0j}, \quad (28)$$

$j = 1 \dots 6$ .

В данную систему входят 18 уравнений. Если для каждого карданового шарнира известны величины  $\psi'_j$ ,  $\vartheta'_j$ ,  $\psi''_j$ ,  $\gamma''_j$ ,  $\mathbf{R}'_j$ ,  $\mathbf{R}''_j$ ,  $\mathbf{R}^*_j$ , то эти уравнения позволяют установить связь между входными (длины  $L_j$  штанг) и выходными координатами МПКЦ с одновременным нахождением углов  $\gamma'_j$  и  $\vartheta''_j$ , определяющих повороты в кардановых шарнирах. Нелинейный характер уравнений (28) не позволяет свести систему к шести уравнениям, исключив двенадцать углов  $\gamma'_j$  и  $\vartheta''_j$ .

При использовании полученной уточненной кинематической модели (28), учитывающей неидеальность кардановых шарниров, решение как прямой, так и обратной задач кинематики для МПКЦ типа «гексапод» можно осуществить только численными методами.

Уточненная кинематическая модель МПКЦ типа «гексапод» использована при создании прецизионного сварочного позиционера с параллельной кинематической структурой в ООО «Завод энергоэффективного и емкостного оборудования» (Приложение Б).

### 2.2.6. Кинематическая модель механизма типа «трипод»

Пусть необходимо составить математическую модель для механизма, показанного на рисунке 38. Данный механизм содержит три трехстепенные кинематические пары (сферические шарниры), а также шесть пар с одной степенью подвижности (3 вращательные и 3 поступательные), поэтому количество степеней свободы этого механизма, определенное с использованием формулы (1), равно  $H = 6(8 - 1) - 3 \cdot 3 - 5(3 + 3) = 3$ . Следовательно, пространственная ориентация платформы должна описываться тремя координатами.

Примем, что входными координатами являются длины штанг  $L_j$ , выходными – координаты шарниров  $B_j$  в неподвижной системе координат  $OXYZ$ . Запишем уравнения, связывающие входные и выходные координаты:

$$L_j^2 = (x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2 + (z_{A_j} - z_{B_j})^2, \quad j = 1 \dots 3. \quad (29)$$

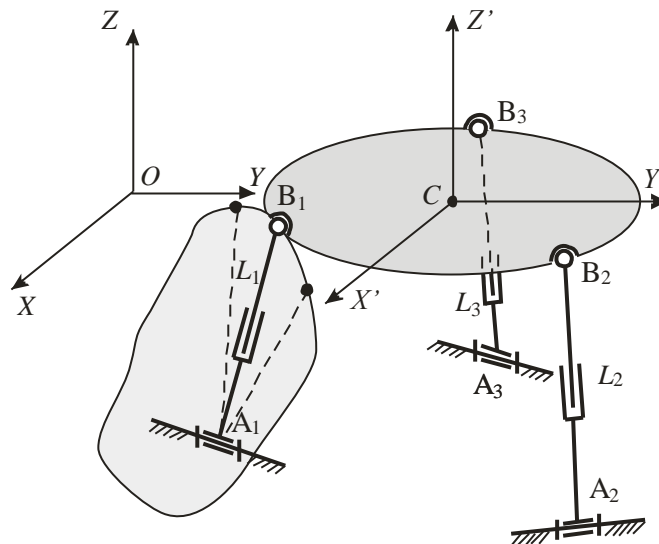


Рисунок 38 – Кинематическая схема МПКЦ типа «трипод»

В три уравнения (29) входят 9 координат сферических шарниров, следовательно, эти уравнения должны быть дополнены шестью уравнениями связи. Од-



нако для рассматриваемого механизма можно записать только три уравнения, аналогичные (19):

$$\begin{aligned}(x_{B_1} - x_{B_2})^2 + (y_{B_1} - y_{B_2})^2 + (z_{B_1} - z_{B_2})^2 &= |B_1 B_2|^2; \\(x_{B_2} - x_{B_3})^2 + (y_{B_2} - y_{B_3})^2 + (z_{B_2} - z_{B_3})^2 &= |B_2 B_3|^2; \\(x_{B_1} - x_{B_3})^2 + (y_{B_1} - y_{B_3})^2 + (z_{B_1} - z_{B_3})^2 &= |B_1 B_3|^2.\end{aligned}\tag{30}$$

Остальные уравнения связи должны быть записаны из каких-то иных условий, например, учитывающих, что точки  $B_j$  – центры соответствующих шарниров, лежат в заданных плоскостях.

На рисунке 38 показана плоскость, в которой лежит точка  $B_1$ . Данная плоскость проходит через штангу  $L_1$  перпендикулярно прямой, являющейся осью вращения шарнира  $A_1$ . Если ось вращения шарнира  $A_1$  задана уравнением

$$\frac{x - x_{A_1}}{l_{A_1}} = \frac{y - y_{A_1}}{m_{A_1}} = \frac{z - z_{A_1}}{n_{A_1}},$$

где  $l_{A_1}$ ,  $m_{A_1}$ ,  $n_{A_1}$  – направляющие косинусы оси вращения в системе координат  $OXYZ$ , то уравнение плоскости, перпендикулярной этой прямой и проходящей через точку  $B_1$ , будет иметь вид [19]

$$l_{A_1}(x - x_{B_1}) + m_{A_1}(y - y_{B_1}) + n_{A_1}(z - z_{B_1}) = 0.$$

Так как эта плоскость проходит через точку пересечения штанги  $L_1$  с осью вращения шарнира  $A_1$  (точку  $A_1$ ), то можно записать дополнительное уравнение связи

$$l_{A_1}(x_{A_1} - x_{B_1}) + m_{A_1}(y_{A_1} - y_{B_1}) + n_{A_1}(z_{A_1} - z_{B_1}) = 0.$$

Аналогично для остальных штанг:

$$l_{A_2}(x_{A_2} - x_{B_2}) + m_{A_2}(y_{A_2} - y_{B_2}) + n_{A_2}(z_{A_2} - z_{B_2}) = 0;$$

$$l_{A_3}(x_{A_3} - x_{B_3}) + m_{A_3}(y_{A_3} - y_{B_3}) + n_{A_3}(z_{A_3} - z_{B_3}) = 0.$$

Оси вращения цилиндрических шарниров обычно лежат в плоскостях, параллельных плоскости  $OXY$ . В этом случае  $n_{A_1} = n_{A_2} = n_{A_3} = 0$  и дополнительные уравнения связи несколько упростятся:

$$\begin{aligned}
l_{A_1}(x_{A_1} - x_{B_1}) + m_{A_1}(y_{A_1} - y_{B_1}) &= 0; \\
l_{A_2}(x_{A_2} - x_{B_2}) + m_{A_2}(y_{A_2} - y_{B_2}) &= 0; \\
l_{A_3}(x_{A_3} - x_{B_3}) + m_{A_3}(y_{A_3} - y_{B_3}) &= 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Уравнения (29)–(31) составляют кинематическую модель данного трипода.

Если при функционировании механизма представляет интерес пространственное положение его платформы, то в качестве выходных координат целесообразно использовать координаты полюса  $C$  в системе координат  $OXYZ$  и три угловые координаты, характеризующие поворот платформы вокруг полюса – углы Крылова. В этом случае математическая модель сводится к шести уравнениям – по числу выходных координат механизма:

$$\begin{aligned}
L_1^2 &= (x_{A_1} - l_1 x'_{B_1} - l_2 y'_{B_1} - l_3 z'_{B_1} - x_C)^2 + \\
&+ (y_{A_1} - m_1 x'_{B_1} - m_2 y'_{B_1} - m_3 z'_{B_1} - y_C)^2 + (z_{A_1} - n_1 x'_{B_1} - n_2 y'_{B_1} - n_3 z'_{B_1} - z_C)^2; \\
L_2^2 &= (x_{A_2} - l_1 x'_{B_2} - l_2 y'_{B_2} - l_3 z'_{B_2} - x_C)^2 + \\
&+ (y_{A_2} - m_1 x'_{B_2} - m_2 y'_{B_2} - m_3 z'_{B_2} - y_C)^2 + (z_{A_2} - n_1 x'_{B_2} - n_2 y'_{B_2} - n_3 z'_{B_2} - z_C)^2; \\
L_3^2 &= (x_{A_3} - l_1 x'_{B_3} - l_2 y'_{B_3} - l_3 z'_{B_3} - x_C)^2 + \\
&+ (y_{A_3} - m_1 x'_{B_3} - m_2 y'_{B_3} - m_3 z'_{B_3} - y_C)^2 + (z_{A_3} - n_1 x'_{B_3} - n_2 y'_{B_3} - n_3 z'_{B_3} - z_C)^2; \\
l_{A_1}(x_{A_1} - l_1 x'_{B_1} - l_2 y'_{B_1} - l_3 z'_{B_1} - x_C) + m_{A_1}(y_{A_1} - m_1 x'_{B_1} - m_2 y'_{B_1} - m_3 z'_{B_1} - y_C) &= 0; \\
l_{A_2}(x_{A_2} - l_1 x'_{B_2} - l_2 y'_{B_2} - l_3 z'_{B_2} - x_C) + m_{A_2}(y_{A_2} - m_1 x'_{B_2} - m_2 y'_{B_2} - m_3 z'_{B_2} - y_C) &= 0; \\
l_{A_3}(x_{A_3} - l_1 x'_{B_3} - l_2 y'_{B_3} - l_3 z'_{B_3} - x_C) + m_{A_3}(y_{A_3} - m_1 x'_{B_3} - m_2 y'_{B_3} - m_3 z'_{B_3} - y_C) &= 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Уравнения (32) получены из (29) и (31) с использованием (17). Уравнения (30) исключены из рассмотрения, так как при подстановке в них координат сферических шарниров, рассчитанных с использованием (17), они превращаются в тождества. Уравнения (32) устанавливают связь между тремя входными и шестью выходными координатами с учетом ограничений на характер движения штанг. Данные уравнения позволяют решить как прямую, так и обратную задачи кинематики применительно к рассмотренному МПКЦ типа «трипод».

### 2.2.7. Кинематическая модель механизма типа «трицепт»

Рассмотрим построение математической модели МПКЦ класса «трицепт», созданного на кафедре автоматизации механосборочного производства Южно-Уральского государственного университета [76]. Основу этого механизма (рисунок 39) составляют три раздвижные штанги 1, 2, 3, способные изменять свою длину при помощи встроенных в них электродвигателей. Каждая штанга соединена с фланцем манипулятора 4 трехстепенным шарниром, при помощи двухстепенных шарниров штанги связаны с неподвижным основанием. На фланце манипулятора расположен шпиндель 7.

Конструкция механизма обеспечивает поворот манипулятора 4 вокруг неподвижной точки  $O$  – центра карданова шарнира 5, 6 на углы  $\varphi_X$  и  $\varphi_Y$ . С помощью направляющей наружной поверхности, имеющей в поперечном сечении квадратную форму, манипулятор образует с внутренним кольцом 5 карданова шарнира поступательную пару, обеспечивающую изменение расстояния от характерной точки  $C$  шпинделя 7 до неподвижной точки  $O$ .

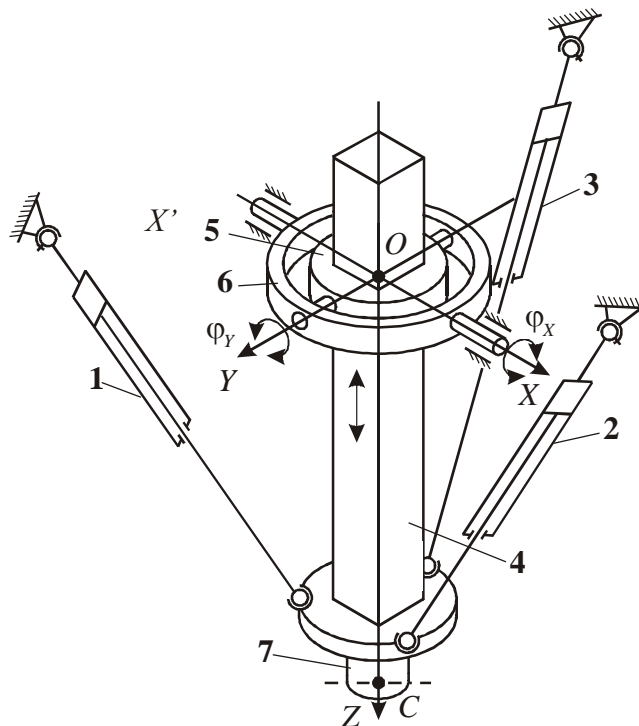


Рисунок 39 – МПКЦ типа «трицепт»

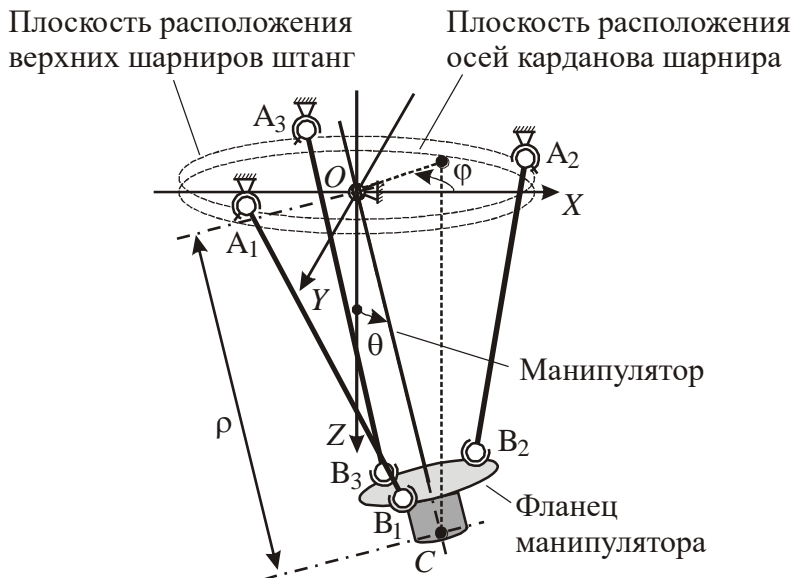
В связи с тем, что рассматриваемый механизм содержит только три штанги, то положение манипулятора должно задаваться тремя координатами, например,

координатами  $x_C$ ,  $y_C$ ,  $z_C$  характерной точки в неподвижной системе координат  $OXYZ$ . Требуемое положение точки  $C$  может задаваться также в сферической системе координат  $\rho = |OC|$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  (рисунок 40). Пересчет сферических координат в декартовые и обратно производится с использованием следующих выражений [12]:

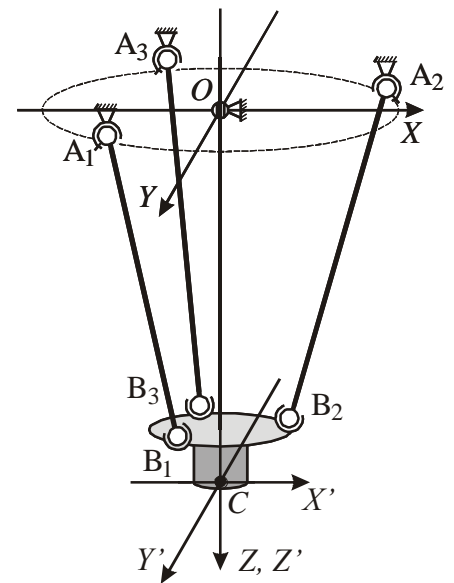
$$x_C = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y_C = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z_C = \rho \cos \theta,$$

$$\rho = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 + z_C^2}, \quad \theta = \arctg \frac{\sqrt{x_C^2 + y_C^2}}{z_C}, \quad \varphi = \arctg \frac{y_C}{x_C}. \quad (33)$$

Предположим, что в начальном состоянии ось манипулятора вертикальна. Длины  $L_j$  всех штанг при этом одинаковы (рисунок 41), ось  $OZ$  проходит через центры окружностей, на которых расположены верхние и нижние шарниры штанг.



**Рисунок 40 – МПКЦ типа «трицепт»: использование сферических координат при описании положения выходного звена**



**Рисунок 41 – МПКЦ типа «трицепт»: начальное состояние МПКЦ при построении кинематической модели**

Конструкция рассматриваемого механизма запрещает поворот вокруг продольной оси манипулятора, но разрешает перемещение вдоль этой оси (в начальном состоянии продольной осью является ось  $OZ$ ). Поэтому переход из начального состояния (см. рисунок 41) в требуемое (см. рисунок 40) опишем следующим образом.

1-й этап – выдвигание манипулятора вдоль оси  $OZ$  до тех пор, пока расстояние от точки  $C$  до точки  $O$  не станет равно требуемому значению  $\rho$ .

2-й этап – разворот вокруг оси  $OX$ . Разворот осуществляется на угол  $\alpha$  таким образом, чтобы продольная ось манипулятора проходила через точку  $M$  с координатами  $(0, y_C, z_C)$ . Введем новую систему координат  $OX_1Y_1Z_1$  (рисунок 42), для которой ось  $OX_1$  совпадает с осью  $OX$ , ось  $OZ_1$  является осью направляющего стержня, ось  $OY_1$  дополняет тройку осей до правой. На рисунке 42 показан вид с положительного конца оси  $OX_1$ .

В результате координаты характерной точки  $C$  станут равными  $(0, -\rho \sin \alpha, \rho \cos \alpha)$  – точка  $C_2$  на рисунке 42. Угол  $\alpha$  может быть определен из следующего выражения:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{y_C}{z_C} = -\frac{\sin \varphi \sin \theta}{\cos \theta} = -\sin \varphi \operatorname{tg} \theta. \quad (34)$$

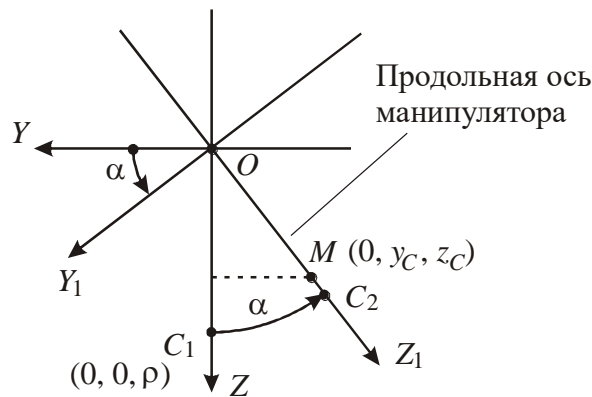


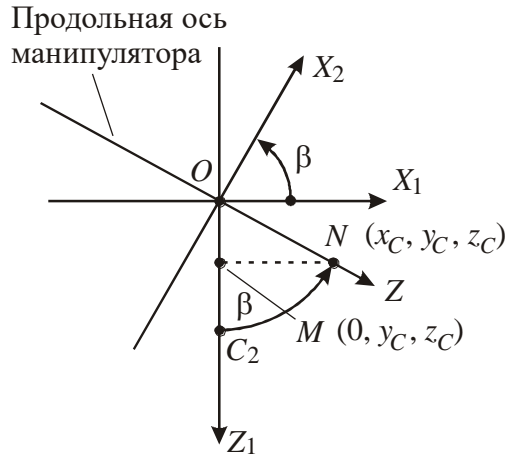
Рисунок 42 – Разворот системы координат на 2-м этапе

Переход от системы координат  $OXYZ$  к системе координат  $OX_1Y_1Z_1$  будет осуществляться при помощи матрицы поворота

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

3-й этап – разворот в точке  $O$  вокруг оси  $OY_1$ . Разворот осуществляется на угол  $\beta$  таким образом, чтобы ось направляющего стержня проходила через точку  $N$  с координатами  $(x_C, y_C, z_C)$ . Введем новую систему координат  $OX_2Y_2Z_2$  (ри-

сунок 43), для которой ось  $OY_2$  совпадает с осью  $OY_1$ , ось  $OZ_2$  является осью направляющего стержня, ось  $OX_2$  дополняет тройку осей до правой. На рисунке 43 показан вид с положительного конца оси  $OY_2$ .



**Рисунок 43 – Разворот системы координат на 3-м этапе**

Так как расстояние от точки  $N$  до точки  $O$  равно  $\sqrt{x_C^2 + y_C^2 + z_C^2} = \rho$ , то в результате поворота характерная точка  $C$  совпадет с точкой  $N$  – осуществится переход в конечное состояние. Угол  $\beta$  может быть определен из следующего выражения:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x_C}{\sqrt{y_C^2 + z_C^2}} = \frac{\cos \varphi \sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}. \quad (35)$$

Переход от СК  $OX_2Y_2Z_2$  к СК  $OX_1Y_1Z_1$  будет осуществляться при помощи матрицы поворота

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Рассмотренный переход центра подвижной платформы из начального состояния в конечное (требуемое) позволяет определить углы  $\alpha$  и  $\beta$ , необходимые для вычисления элементов матриц поворота  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$ .

Введем подвижную систему координат  $CX'Y'Z'$ , такую, что ее оси в начальном состоянии манипулятора (см. рисунок 41) параллельны соответствующим

осям системы координат  $OXYZ$ . Если в этой подвижной системе координат заданы координаты каждого из трех нижних шарниров  $(x'_{B_j}, y'_{B_j}, z'_{B_j})$ , то определить их координаты в системе координат  $OXYZ$  при произвольном положении фланца манипулятора можно с использованием матричного выражения

$$\begin{pmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ z_{B_i} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^* \begin{pmatrix} x'_{B_i} \\ y'_{B_i} \\ z'_{B_i} \\ 1 \end{pmatrix},$$

где компоненты матрицы перехода (16) определяются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

откуда

$$l_1 = \cos \beta;$$

$$l_2 = 0;$$

$$l_3 = \sin \beta;$$

$$m_1 = \sin \alpha \sin \beta;$$

$$m_2 = \cos \alpha;$$

$$m_3 = -\sin \alpha \cos \beta;$$

$$n_1 = -\cos \alpha \sin \beta;$$

$$n_2 = \sin \alpha;$$

$$n_3 = \cos \alpha \cos \beta.$$

(36)

В качестве входных координат рассматриваемого МПКЦ целесообразно выбрать длины  $L_j$  трех его штанг. Уравнения математической модели в этом случае не отличаются от соответствующих уравнений (18) МПКЦ, имеющего шесть степеней свободы:

$$L_1^2 = (x_{A_1} - x_{B_1})^2 + (y_{A_1} - y_{B_1})^2 + (z_{A_1} - z_{B_1})^2;$$

$$L_2^2 = (x_{A_2} - x_{B_2})^2 + (y_{A_2} - y_{B_2})^2 + (z_{A_2} - z_{B_2})^2;$$

$$L_3^2 = (x_{A_3} - x_{B_3})^2 + (y_{A_3} - y_{B_3})^2 + (z_{A_3} - z_{B_3})^2.$$

(37)

Уравнения (37) должны быть дополнены условиями, связывающими координаты нижних шарниров  $B_i$  в системах координат  $OXYZ$  и  $CX'Y'Z'$ :

$$\begin{aligned} & (x_{B_1} - x_{B_2})^2 + (y_{B_1} - y_{B_2})^2 + (z_{B_1} - z_{B_2})^2 = \\ & = (x'_{B_1} - x'_{B_2})^2 + (y'_{B_1} - y'_{B_2})^2 + (z'_{B_1} - z'_{B_2})^2; \\ & (x_{B_2} - x_{B_3})^2 + (y_{B_2} - y_{B_3})^2 + (z_{B_2} - z_{B_3})^2 = \\ & = (x'_{B_2} - x'_{B_3})^2 + (y'_{B_2} - y'_{B_3})^2 + (z'_{B_2} - z'_{B_3})^2; \\ & (x_{B_1} - x_{B_3})^2 + (y_{B_1} - y_{B_3})^2 + (z_{B_1} - z_{B_3})^2 = \\ & = (x'_{B_1} - x'_{B_3})^2 + (y'_{B_1} - y'_{B_3})^2 + (z'_{B_1} - z'_{B_3})^2, \end{aligned}$$

а также уравнениями, учитывающими связи, вводимые кардановым шарниром механизма.

Примем, что выходными координатами механизма являются координаты  $(x_C, y_C, z_C)$  характерной точки  $C$  механизма. С использованием уравнений (21), (34)–(36) математическая модель может быть сведена к трем уравнениям, связывающим выходные и обобщенные координаты:

$$\begin{aligned} L_j^2 &= (x_{A_j} - x_C)^2 + (y_{A_j} - y_C)^2 + (z_{A_j} - z_C)^2 + x'_{B_j}{}^2 + y'_{B_j}{}^2 + z'_{B_j}{}^2 \\ &+ 2 \left[ x'_{B_j} \cos \arctan \left( \frac{x_C}{\sqrt{y_C^2 + z_C^2}} \right) + z'_{B_j} \sin \arctan \left( \frac{x_C}{\sqrt{y_C^2 + z_C^2}} \right) \right] (x_C - x_{A_j}) + \\ &+ 2 \left[ x'_{B_j} \sin \arctan \left( \frac{-y_C}{z_C} \right) \sin \arctan \left( \frac{x_C}{\sqrt{y_C^2 + z_C^2}} \right) + y'_{B_j} \cos \arctan \left( \frac{-y_C}{z_C} \right) - \right. \\ &\quad \left. - z'_{B_j} \sin \arctan \left( \frac{-y_C}{z_C} \right) \cos \arctan \left( \frac{x_C}{\sqrt{y_C^2 + z_C^2}} \right) \right] (y_C - y_{A_j}) + \\ &+ 2 \left[ -x'_{B_j} \cos \arctan \left( \frac{-y_C}{z_C} \right) \sin \arctan \left( \frac{x_C}{\sqrt{y_C^2 + z_C^2}} \right) + y'_{B_j} \sin \arctan \left( \frac{-y_C}{z_C} \right) + \right. \\ &\quad \left. + z'_{B_j} \cos \arctan \left( \frac{-y_C}{z_C} \right) \cos \arctan \left( \frac{x_C}{\sqrt{y_C^2 + z_C^2}} \right) \right] (z_C - z_{A_j}), \quad j = 1 \dots 3. \end{aligned}$$



С учетом соотношений между обратными тригонометрическими функциями

$$[12] \operatorname{arctg} \alpha = \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \text{ полученные уравнения можно пере-}$$

писать несколько в ином виде:

$$\begin{aligned} L_j^2 &= (x_{A_j} - x_C)^2 + (y_{A_j} - y_C)^2 + (z_{A_j} - z_C)^2 + x'_{B_j}{}^2 + y'_{B_j}{}^2 + z'_{B_j}{}^2 \\ &+ 2 \left[ x'_{B_j} \sqrt{\frac{y_C^2 + z_C^2}{x_C^2 + y_C^2 + z_C^2}} + z'_{B_j} \frac{x_C}{\sqrt{x_C^2 + y_C^2 + z_C^2}} \right] (x_C - x_{A_j}) + \\ &+ 2 \left[ x'_{B_j} \frac{-y_C}{\sqrt{y_C^2 + z_C^2}} \frac{x_C}{\sqrt{x_C^2 + y_C^2 + z_C^2}} + y'_{B_j} \frac{z_C}{\sqrt{y_C^2 + z_C^2}} + \right. \\ &\quad \left. + z'_{B_j} \frac{y_C}{\sqrt{x_C^2 + y_C^2 + z_C^2}} \right] (y_C - y_{A_j}) + \\ &+ 2 \left[ -x'_{B_j} \frac{z_C}{\sqrt{y_C^2 + z_C^2}} \frac{x_C}{\sqrt{x_C^2 + y_C^2 + z_C^2}} + y'_{B_j} \frac{-y_C}{\sqrt{y_C^2 + z_C^2}} + \right. \\ &\quad \left. + z'_{B_j} \frac{z_C}{\sqrt{x_C^2 + y_C^2 + z_C^2}} \right] (z_C - z_{A_j}), j = 1 \dots 3. \end{aligned} \quad (38)$$

Уравнения (38) связывают три входных  $L$ -координаты трицепта с тремя его выходными координатами и могут быть использованы для решения прямой и обратной задач кинематики применительно к этому механизму.

### 2.2.8. Кинематическая модель устройства, имеющего штанги постоянной длины

В механизмах с параллельными кинематическими цепями, имеющими штанги постоянной длины, изменение пространственной ориентации выходного звена (платформы) осуществляется за счет изменения пространственного положения шарниров, не связанных с платформой. Для механизма-ротопода, показанного на рисунке 13, б – это нижние шарниры.

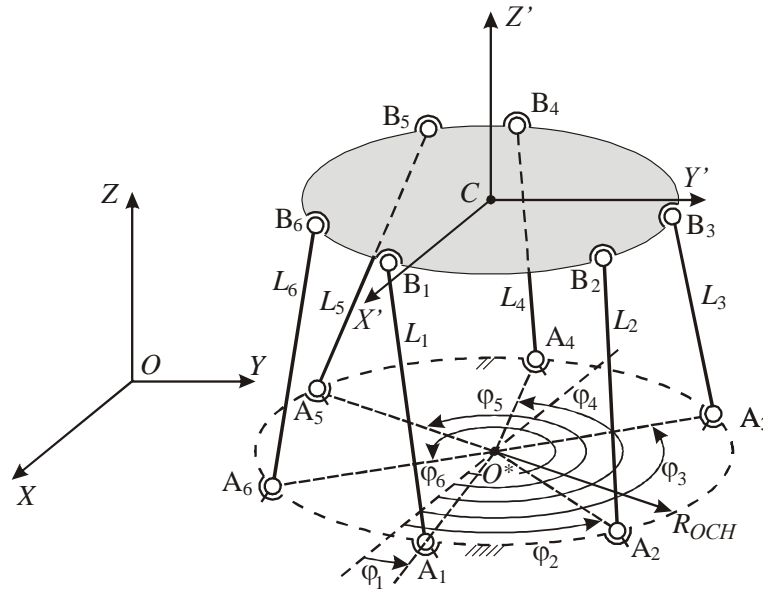
Характер изменения пространственного положения нижних шарниров штанг является особенностью конкретного МПКЦ и во многом определяет выбор его обобщенных координат и особенности управления этим механизмом.

Построение математической модели ротопода, как и для МПКЦ типа «гексапод», сводится к записи уравнений, связывающих координаты верхнего и нижнего шарниров для каждой штанги в глобальной системе координат [57]:

$$L_j^2 = (x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2 + (z_{A_j} - z_{B_j})^2, \quad j = 1 \dots 6.$$

Однако в данном случае величины  $L_j = \text{const}$  не могут использоваться в качестве входных координат.

Выбор обобщенных координат определяется характером изменения пространственного положения нижних шарниров (по прямой, по дуге окружности и т. д.). Рассмотрим МПКЦ, в котором эти шарниры могут совершать движение по дугам окружности радиуса  $R_{OCH}$  (рисунок 44).



**Рисунок 44 – МПКЦ с 6-ю степенями свободы, имеющий штанги постоянной длины**

Для такого механизма целесообразно принять в качестве обобщенной угловую координату нижнего шарнира, отсчитываемую от некоторого начала. На рисунке 44 за начало отсчета угловых обобщенных координат для всех шести шарниров принят диаметр окружности, на которой лежат эти шарниры, параллельный оси  $OX$ . Координаты нижних шарниров будут связаны с обобщенными координатами  $\varphi_i$  следующими зависимостями:

$$x_{A_j} = x_{O^*} + R_{OCH} \cos \varphi_j, \quad y_{A_j} = y_{O^*} + R_{OCH} \sin \varphi_j, \quad j = 1 \dots 6,$$

где  $x_{O^*}$  и  $y_{O^*}$  – координаты центра окружности, на которой лежат шарниры  $A_j$ , в системе координат  $OXYZ$ .

Координаты  $z_{A_j}$  шарниров должны быть заданы.

Если в качестве выходных координат механизма принять три координаты полюса  $C$  и три угловые координаты, определяющие разворот платформы вокруг полюса  $C$ , то уравнения математической модели примут вид

$$\begin{aligned} L_j^2 = & \left(x_{O^*} + R_{OCH} \cos \varphi_j\right)^2 + \left(y_{O^*} + R_{OCH} \sin \varphi_j\right)^2 + z_{A_j}^2 + x'_{B_j}{}^2 + y'_{B_j}{}^2 + z'_{B_j}{}^2 - \\ & -(x_C^2 + y_C^2 + z_C^2) + 2(l_1 x'_{B_j} + l_2 y'_{B_j} + l_3 z'_{B_j})(x_C - x_{O^*} - R_{OCH} \cos \varphi_j) + \\ & + 2(m_1 x'_{B_j} + m_2 y'_{B_j} + m_3 z'_{B_j})(y_C - y_{O^*} - R_{OCH} \sin \varphi_j) + \\ & + 2(n_1 x'_{B_j} + n_2 y'_{B_j} + n_3 z'_{B_j})(z_C - z_{A_j}), j = 1 \dots 6. \end{aligned}$$

Очевидно, что уравнения существенно упростятся, если начало неподвижной системы координат  $OXYZ$  совместить с точкой  $O^*$ . В этом случае  $x_{O^*} = 0$ ,  $y_{O^*} = 0$  и можно записать:

$$\begin{aligned} L_j^2 = & R_{OCH}^2 + z_{A_j}^2 + x'_{B_j}{}^2 + y'_{B_j}{}^2 + z'_{B_j}{}^2 - (x_C^2 + y_C^2 + z_C^2) + \\ & + 2(l_1 x'_{B_j} + l_2 y'_{B_j} + l_3 z'_{B_j})(x_C - R_{OCH} \cos \varphi_j) + \\ & + 2(m_1 x'_{B_j} + m_2 y'_{B_j} + m_3 z'_{B_j})(y_C - R_{OCH} \sin \varphi_j) + \\ & + 2(n_1 x'_{B_j} + n_2 y'_{B_j} + n_3 z'_{B_j})(z_C - z_{A_j}), j = 1 \dots 6. \end{aligned} \quad (39)$$

Если в качестве угловых выходных координат использовать углы Крылова, то уравнения (39) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} L_j^2 = & R_{OCH}^2 + z_{A_j}^2 + x'_{B_j}{}^2 + y'_{B_j}{}^2 + z'_{B_j}{}^2 - (x_C^2 + y_C^2 + z_C^2) + \\ & + 2 \left[ (C\psi C\gamma + S\vartheta S\psi S\gamma) x'_{B_j} + S\psi C\vartheta y'_{B_j} + (S\psi S\vartheta C\gamma - C\psi S\gamma) z'_{B_j} \right] \times \\ & \times (x_C - R_{OCH} \cos \varphi_j) + \\ & + 2 \left[ (S\vartheta C\psi S\gamma - S\psi C\gamma) x'_{B_j} + C\psi C\vartheta y'_{B_j} + (S\psi S\gamma + C\psi S\vartheta C\gamma) z'_{B_j} \right] \times \\ & \times (y_C - R_{OCH} \sin \varphi_j) + \\ & + 2 \left[ C\vartheta S\gamma x'_{B_j} - S\vartheta y'_{B_j} + C\vartheta C\gamma z'_{B_j} \right] (z_C - z_{A_j}), j = 1 \dots 6, \end{aligned}$$

где для сокращения записи использованы обозначения:  $S\psi = \sin \psi$ ,  $C\psi = \cos \psi$  и т. д.

На основе механизма-ротопода создано устройство формирования дополнительных технологических координат [54] (Приложение Д), для которого в дальнейшем решалась задача увеличения рабочего пространства за счет нового закона управления приводами [57, 86]. Для моделирования рабочего пространства использовался авторский программный продукт [52] (Приложение И).

### 2.3. Использование кватернионов при решении задач кинематики механизмов с параллельными кинематическими цепями

Пространственное положение штанги МПКЦ, как твердого тела с одной закрепленной точкой, удобно описывать с использованием кватернионов [72].

#### 2.3.1. Кватернионы и их свойства

Кватернионом называют гиперкомплексное число следующего вида [11]:

$$\Lambda = \lambda_0 + i_1\lambda_1 + i_2\lambda_2 + i_3\lambda_3, \quad (40)$$

где  $i_1, i_2, i_3$  – мнимые единицы,  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – действительные числа, называемые элементами (компонентами) кватернион.

Действия над кватернионами производятся согласно следующим правилам (постулатам).

1. Два кватерниона  $\Lambda$  и  $\mathbf{M}$  равны, если соответственно равны все их элементы:  $\lambda_0 = \mu_0, \lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \lambda_3 = \mu_3$ .

2. Суммой кватернионов является кватернион, элементы которого являются суммами соответствующих элементов складываемых кватернионов:

$$\Lambda + \mathbf{M} = (\lambda_0 + \mu_0) + i_1(\lambda_1 + \mu_1) + i_2(\lambda_2 + \mu_2) + i_3(\lambda_3 + \mu_3).$$

3. Сложение кватернионов коммутативно:  $\Lambda + \mathbf{M} = \mathbf{M} + \Lambda$  и ассоциативно:  $(\Lambda + \mathbf{M}) + \mathbf{N} = \Lambda + (\mathbf{M} + \mathbf{N})$ .

4. При умножении кватерниона на некоторое число  $a$ , на это число умножаются все элементы кватерниона:  $a\Lambda = a\lambda_0 + i_1a\lambda_1 + i_2a\lambda_2 + i_3a\lambda_3$ ; умножение кватерниона на число коммутативно:  $a\Lambda = \Lambda a$  и дистрибутивно:  $(a + b)\Lambda = a\Lambda + b\Lambda$ ,  $a(\Lambda + \mathbf{M}) = a\Lambda + a\mathbf{M}$ .

5. Умножение кватернионов осуществляется с использованием следующих правил:

$$1 \circ i_j = i_j \circ 1 = i_j, \quad i_j \circ i_j = -1, \quad j=1...3;$$

$i_1 \circ i_2 = -i_2 \circ i_1 = i_3, \quad i_3 \circ i_1 = -i_1 \circ i_3 = i_2, \quad i_2 \circ i_3 = -i_3 \circ i_2 = i_1$ , где  $\circ$  – знак кватернионного умножения.

При таких правилах результат перемножения кватернионов также является кватернионом.

6. Если интерпретировать мнимые единицы  $i_1, i_2, i_3$  как орты  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$  трехмерного векторного пространства, то кватернион можно представить в виде суммы скалярной и векторной частей:  $\Lambda = \text{sqal } \Lambda + \text{vect } \Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}$ , где  $\vec{\lambda} = \vec{i}_1 \lambda_1 + \vec{i}_2 \lambda_2 + \vec{i}_3 \lambda_3$ .

7. Результат перемножения кватернионов можно определить с использованием понятий скалярного и векторного произведений векторных частей:

$$\Lambda \circ \mathbf{M} = \lambda_0 \mu_0 - (\vec{\lambda}, \vec{\mu}) + \lambda_0 \vec{\mu} + \mu_0 \vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}, \quad (41)$$

что эквивалентно следующему представлению:

$$\begin{aligned} \Lambda \circ \mathbf{M} = & \lambda_0 \mu_0 - \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 - \lambda_3 \mu_3 + \lambda_0 (i_1 \mu_1 + i_2 \mu_2 + i_3 \mu_3) + \\ & + \mu_0 (i_1 \lambda_1 + i_2 \lambda_2 + i_3 \lambda_3) + \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (42)$$

8. Умножение кватернионов некоммутативно; условие  $\Lambda \circ \mathbf{M} = \mathbf{M} \circ \Lambda$  выполняется только в частных случаях:

- когда один из сомножителей является скалярной величиной;
- когда векторные части кватернионов коллинеарны, т. е.  $\vec{\lambda} = a \vec{\mu}$ .

9. Скалярная часть произведения кватернионов не изменяется при их циклической перестановке:  $\text{sqal}(\Lambda \circ \mathbf{M} \circ \mathbf{N}) = \text{sqal}(\mathbf{M} \circ \mathbf{N} \circ \Lambda)$ .

10. Умножение кватернионов ассоциативно и дистрибутивно по отношению к сложению:

$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{M}) \circ \mathbf{N} = \mathbf{A} \circ (\mathbf{M} \circ \mathbf{N}),$$

$$\mathbf{A} \circ (\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \mathbf{A} \circ \mathbf{M} + \mathbf{A} \circ \mathbf{N}.$$

По аналогии с комплексными числами для кватерниона  $\mathbf{A} = \lambda_0 + \vec{\lambda}$  введено понятие сопряженного с ним кватерниона  $\tilde{\mathbf{A}} = \lambda_0 - \vec{\lambda}$ .

Произведение кватерниона на сопряженный с ним кватернион называется нормой кватерниона:  $\|\mathbf{A}\| = \mathbf{A} \circ \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}} \circ \mathbf{A}$ . Из формулы (42) следует, что

$$\|\mathbf{A}\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

Если  $\|\mathbf{A}\| = 1$ , то кватернион называется нормированным. Перемножение нормированных кватернионов дает также нормированный кватернион.

Операция деления для кватернионов определяется как операция умножения на обратный кватернион. Кватернионом, обратным к кватерниону  $\mathbf{A}$ , называется кватернион  $\mathbf{A}^{-1}$ , для которого выполняется условие  $\mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{A} = 1$ . Выражение для обратного кватерниона имеет следующий вид:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\|\mathbf{A}\|}. \quad (43)$$

Следовательно, для нормированного кватерниона  $\mathbf{A}$  обратным ему будет сопряженный с ним кватернион  $\tilde{\mathbf{A}}$ .

### 2.3.2. Использование кватернионов при описании положения твердого тела с неподвижной точкой

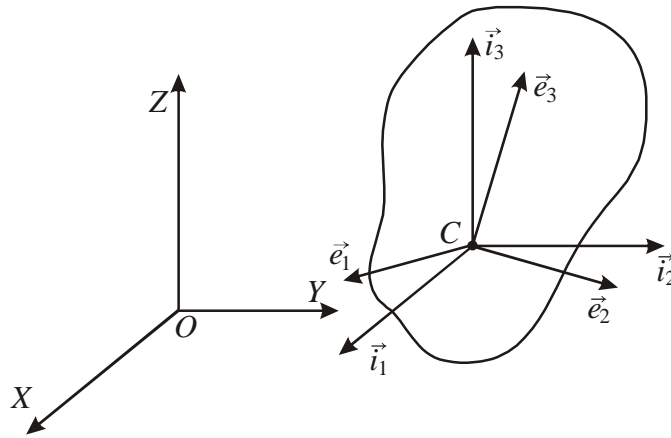
Рассмотрим твердое тело, имеющее одну неподвижную точку  $O$ . Свяжем с телом ортонормированный базис  $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ , такой, что в исходном положении твердого тела он совпадает с неподвижным базисом  $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ . На рисунке 45 показано отличное от начального положение тела, когда эти базисы не совпадают.

Использование кватернионов для описания положения твердого тела с неподвижной точкой основывается на следующей теореме, с доказательством которой можно ознакомиться в [3].

**Теорема.** Произвольное положение твердого тела с неподвижной точкой  $C$  относительно базиса  $C\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$  задается некоторым нормированным кватернионом  $\Lambda$  по формулам

$$\vec{e}_j = \Lambda \circ \vec{i}_j \circ \tilde{\Lambda}, \quad j=1\dots 3. \quad (44)$$

При этом каждому положению твердого тела соответствуют два значения кватерниона  $\Lambda$ , отличающиеся знаком.



**Рисунок 45 – Твердое тело, развернутое относительно начального положения**

Важным практическим следствием данной теоремы является выражение

$$\vec{r}' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}, \quad (45)$$

связывающее между собой радиус-вектор произвольной точки твердого тела, совершающего движение вокруг неподвижной точки, в исходном и текущем его положениях. Радиус-вектор в данном случае выступает как кватернион с нулевой скалярной частью.

Если радиус-вектор  $\vec{r}$  имеет координаты  $(r_X, r_Y, r_Z)$  в некоторой системе координат  $OXYZ$ , а нормированный кватернион задан в форме (40), то координаты радиус-вектора  $\vec{r}'$  можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} r'_X &= (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)r_X + 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3)r_Y + 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2)r_Z; \\ r'_Y &= 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)r_X + (\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2)r_Y + 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1)r_Z; \\ r'_Z &= 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)r_X + 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1)r_Y + (\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)r_Z. \end{aligned} \quad (46)$$

Формула (44) позволяет установить связь между параметрами кватерниона в разных базисах. Пусть положение базиса  $C\vec{i}'_1\vec{i}'_2\vec{i}'_3$  относительно базиса  $C\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$  задано кватернионом  $\Lambda$ . Если в базисе  $C\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$  задан некоторый кватернион  $\mathbf{M} = \mu_0 + \mu_1\vec{i}_1 + \mu_2\vec{i}_2 + \mu_3\vec{i}_3$ , то его параметры в базисе можно определить с использованием выражения

$$\mathbf{M}' = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{M} \circ \Lambda. \quad (47)$$

Соотношение (47) представляет собой формулу преобразования параметров неизменного кватерниона при смене базиса.

Кватернион  $\mathbf{M}'$  называют отображением кватерниона  $\mathbf{M}$  из базиса  $C\vec{i}'_1\vec{i}'_2\vec{i}'_3$  в базис  $C\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ . Отображение  $\mathbf{M}'$  имеет в базисе  $C\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$  такие же параметры, какие имеет исходный кватернион  $\mathbf{M}$  в базисе  $C\vec{i}'_1\vec{i}'_2\vec{i}'_3$ . Заметим, что параметры кватерниона в разных базисах связаны обратным преобразованием по отношению к преобразованию базисов.

При описании положения твердого тела широко используется следующая теорема.

**Теорема** (теорема Эйлера о конечном вращении). Любое положение твердого тела с неподвижной точкой может быть получено из начального положения одним поворотом вокруг некоторой оси  $\vec{e}$  на некоторый угол  $\vartheta$ . Причем, ось конечного поворота коллинеарна векторной части кватерниона  $\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}$ , а угол поворота определяется соотношением  $\lambda_0 = \cos \frac{\vartheta}{2}$ .

Данная теорема объясняет суть преобразования базисов с использованием кватерниона  $\Lambda$ .

### 2.3.3. Использование кватернионов при решении задачи о трех шарнирно закрепленных стержнях

Рассмотрим задачу в следующей постановке: определить координаты точки, в которую сходятся три шарнирно закрепленных стержня заданной длины  $L_j$  (рисунок 46). Вариант решения данной задачи был представлен в разделе 2.2.4 при



рассмотрении МПКЦ типа «гексапод», для которого возможно аналитическое решение прямой задачи кинематики.

Введем систему координат  $OXYZ$ , такую, что плоскость  $XOY$  параллельна плоскости, в которой лежат центры шарниров. Координаты центров шарниров в этой системе координат являются известными величинами.

Введем систему координат  $A_1X_1Y_1Z_1$ , оси которой сонаправлены соответствующим осям системы координат  $OXYZ$ . Рассмотрим вектор  $\vec{r}_1$  (рисунок 47), имеющий в системе координат  $A_1X_1Y_1Z_1$  координаты  $(r_{1X}, r_{1Y}, r_{1Z})$ , причем  $r_{1X} = 0$ ,  $r_{1Y} = 0$ ,  $r_{1Z} = L_1$ . Этот вектор соответствует исходному положению стержня  $L_1$ .

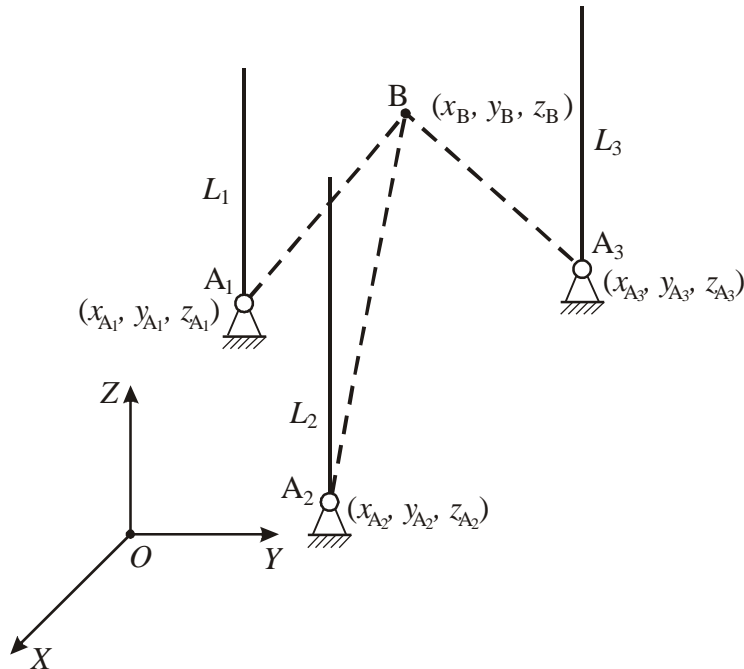


Рисунок 46 – Задача о трех шарнирно закрепленных стержнях, сходящихся в одной точке

Перемещение (разворот) стержня  $L_1$  в конечное положение соответствует преобразованию вектора  $\vec{r}_1$  в вектор  $\vec{r}'_1$  той же длины, имеющему в системе координат  $A_1X_1Y_1Z_1$  координаты  $(r'_{1X}, r'_{1Y}, r'_{1Z})$ . Данное преобразование в соответствии с (45) можно задать в виде

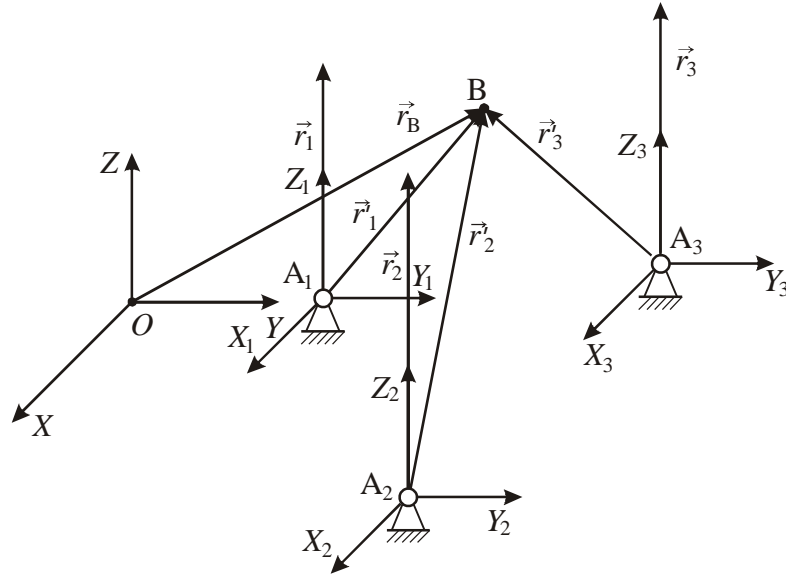
$$\vec{r}'_1 = \Lambda_1 \circ \vec{r}_1 \circ \tilde{\Lambda}_1. \quad (48)$$

В системе координат  $OXYZ$  координаты конца вектора  $\vec{r}'_1$  – точки В можно записать следующим образом:

$$x_B = r'_{1X} + x_{A_1}, \quad y_B = r'_{1Y} + y_{A_1}, \quad z_B = r'_{1Z} + z_{A_1}.$$

Тогда

$$\vec{r}_B = \vec{r}'_1 + \begin{pmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{pmatrix} = \Lambda_{A_1} \circ \vec{r}_1 \circ \tilde{\Lambda}_{A_1} + \begin{pmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{pmatrix}. \quad (49)$$



**Рисунок 47 – Задача о трех шарнирно закрепленных стержнях, сходящихся в одной точке, в кватернионной постановке**

По аналогии с (48) можно записать еще два кватернионных преобразования:

$$\vec{r}'_2 = \Lambda_{A_2} \circ \vec{r}_2 \circ \tilde{\Lambda}_{A_2}, \quad \vec{r}'_3 = \Lambda_{A_3} \circ \vec{r}_3 \circ \tilde{\Lambda}_{A_3}, \quad (50)$$

где вектора задаются в системах координат, связанных с соответствующими шарнирами. Решение задачи сводится к нахождению кватернионов  $\Lambda_{A_1}$ ,  $\Lambda_{A_2}$ ,  $\Lambda_{A_3}$ , с помощью которых описывается требуемый поворот стержней  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ .

С использованием выражений (50) можно выразить вектор  $\vec{r}_B$ :

$$\vec{r}_B = \Lambda_{A_2} \circ \vec{r}_2 \circ \tilde{\Lambda}_{A_2} + \begin{pmatrix} x_{A_2} \\ y_{A_2} \\ z_{A_2} \end{pmatrix} \quad (51)$$

и

$$\vec{r}_B = \Lambda_{A_3} \circ \vec{r}_3 \circ \tilde{\Lambda}_{A_3} + \begin{pmatrix} x_{A_3} \\ y_{A_3} \\ z_{A_3} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Попарно приравнивая выражения (49), (51) и (52), получим систему уравнений следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{A_1} \circ \vec{r}_1 \circ \tilde{\Lambda}_{A_1} = \Lambda_{A_2} \circ \vec{r}_2 \circ \tilde{\Lambda}_{A_2} + \begin{pmatrix} x_{A_2} - x_{A_1} \\ y_{A_2} - y_{A_1} \\ z_{A_2} - z_{A_1} \end{pmatrix}; \\ \Lambda_{A_2} \circ \vec{r}_2 \circ \tilde{\Lambda}_{A_2} = \Lambda_{A_3} \circ \vec{r}_3 \circ \tilde{\Lambda}_{A_3} + \begin{pmatrix} x_{A_3} - x_{A_2} \\ y_{A_3} - y_{A_2} \\ z_{A_3} - z_{A_2} \end{pmatrix}; \\ \Lambda_{A_3} \circ \vec{r}_3 \circ \tilde{\Lambda}_{A_3} = \Lambda_{A_1} \circ \vec{r}_1 \circ \tilde{\Lambda}_{A_1} + \begin{pmatrix} x_{A_1} - x_{A_3} \\ y_{A_1} - y_{A_3} \\ z_{A_1} - z_{A_3} \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad (53)$$

которая может использоваться для нахождения параметров кватернионов.

Распишем преобразования (48) и (50) с использованием (46):

$$\begin{aligned} r'_{1X} &= (\lambda_{0A_1}^2 + \lambda_{1A_1}^2 - \lambda_{2A_1}^2 - \lambda_{3A_1}^2)r_{1X} + 2(\lambda_{1A_1}\lambda_{2A_1} - \lambda_{0A_1}\lambda_{3A_1})r_{1Y} + \\ &+ 2(\lambda_{1A_1}\lambda_{3A_1} + \lambda_{0A_1}\lambda_{2A_1})r_{1Z}; \\ r'_{1Y} &= 2(\lambda_{1A_1}\lambda_{2A_1} + \lambda_{0A_1}\lambda_{3A_1})r_{1X} + (\lambda_{0A_1}^2 + \lambda_{2A_1}^2 - \lambda_{1A_1}^2 - \lambda_{3A_1}^2)r_{1Y} + \\ &+ 2(\lambda_{2A_1}\lambda_{3A_1} - \lambda_{0A_1}\lambda_{1A_1})r_{1Z}; \\ r'_{1Z} &= 2(\lambda_{1A_1}\lambda_{3A_1} - \lambda_{0A_1}\lambda_{2A_1})r_{1X} + 2(\lambda_{2A_1}\lambda_{3A_1} + \lambda_{0A_1}\lambda_{1A_1})r_{1Y} + \\ &+ (\lambda_{0A_1}^2 + \lambda_{3A_1}^2 - \lambda_{1A_1}^2 - \lambda_{2A_1}^2)r_{1Z}; \\ r'_{2X} &= (\lambda_{0A_2}^2 + \lambda_{1A_2}^2 - \lambda_{2A_2}^2 - \lambda_{3A_2}^2)r_{2X} + 2(\lambda_{1A_2}\lambda_{2A_2} - \lambda_{0A_2}\lambda_{3A_2})r_{2Y} + \\ &+ 2(\lambda_{1A_2}\lambda_{3A_2} + \lambda_{0A_2}\lambda_{2A_2})r_{2Z}; \\ r'_{2Y} &= 2(\lambda_{1A_2}\lambda_{2A_2} + \lambda_{0A_2}\lambda_{3A_2})r_{2X} + (\lambda_{0A_2}^2 + \lambda_{2A_2}^2 - \lambda_{1A_2}^2 - \lambda_{3A_2}^2)r_{2Y} + \\ &+ 2(\lambda_{2A_2}\lambda_{3A_2} - \lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2})r_{2Z}; \\ r'_{2Z} &= 2(\lambda_{1A_2}\lambda_{3A_2} - \lambda_{0A_2}\lambda_{2A_2})r_{2X} + 2(\lambda_{2A_2}\lambda_{3A_2} + \lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2})r_{2Y} + \\ &+ (\lambda_{0A_2}^2 + \lambda_{3A_2}^2 - \lambda_{1A_2}^2 - \lambda_{2A_2}^2)r_{2Z}; \\ r'_{3X} &= (\lambda_{0A_3}^2 + \lambda_{1A_3}^2 - \lambda_{2A_3}^2 - \lambda_{3A_3}^2)r_{3X} + 2(\lambda_{1A_3}\lambda_{2A_3} - \lambda_{0A_3}\lambda_{3A_3})r_{3Y} + \\ &+ 2(\lambda_{1A_3}\lambda_{3A_3} + \lambda_{0A_3}\lambda_{2A_3})r_{3Z}; \\ r'_{3Y} &= 2(\lambda_{1A_3}\lambda_{2A_3} + \lambda_{0A_3}\lambda_{3A_3})r_{3X} + (\lambda_{0A_3}^2 + \lambda_{2A_3}^2 - \lambda_{1A_3}^2 - \lambda_{3A_3}^2)r_{3Y} + \\ &+ 2(\lambda_{2A_3}\lambda_{3A_3} - \lambda_{0A_3}\lambda_{1A_3})r_{3Z}; \end{aligned}$$

$$r'_{3Z} = 2(\lambda_{1A_3}\lambda_{3A_3} - \lambda_{0A_3}\lambda_{2A_3})r_{3X} + 2(\lambda_{2A_3}\lambda_{3A_3} + \lambda_{0A_3}\lambda_{1A_3})r_{3Y} +$$

$$+(\lambda_{0A_3}^2 + \lambda_{3A_3}^2 - \lambda_{1A_3}^2 - \lambda_{2A_3}^2)r_{3Z}.$$

С учетом того, что  $r_{jX} = 0$ ,  $r_{jY} = 0$ ,  $r_{jZ} = L_j$ , полученные выражения существенно упростятся:

$$\begin{aligned} r'_{1X} &= 2(\lambda_{1A_1}\lambda_{3A_1} + \lambda_{0A_1}\lambda_{2A_1})L_1; \\ r'_{1Y} &= 2(\lambda_{2A_1}\lambda_{3A_1} - \lambda_{0A_1}\lambda_{1A_1})L_1; \\ r'_{1Z} &= (\lambda_{0A_1}^2 + \lambda_{3A_1}^2 - \lambda_{1A_1}^2 - \lambda_{2A_1}^2)L_1; \\ r'_{2X} &= 2(\lambda_{1A_2}\lambda_{3A_2} + \lambda_{0A_2}\lambda_{2A_2})L_2; \\ r'_{2Y} &= 2(\lambda_{2A_2}\lambda_{3A_2} - \lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2})L_2; \\ r'_{2Z} &= (\lambda_{0A_2}^2 + \lambda_{3A_2}^2 - \lambda_{1A_2}^2 - \lambda_{2A_2}^2)L_2; \\ r'_{3X} &= 2(\lambda_{1A_3}\lambda_{3A_3} + \lambda_{0A_3}\lambda_{2A_3})L_3; \\ r'_{3Y} &= 2(\lambda_{2A_3}\lambda_{3A_3} - \lambda_{0A_3}\lambda_{1A_3})L_3; \\ r'_{3Z} &= (\lambda_{0A_3}^2 + \lambda_{3A_3}^2 - \lambda_{1A_3}^2 - \lambda_{2A_3}^2)L_3. \end{aligned} \tag{54}$$

С учетом (54) уравнения системы (53) можно записать в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned} 2(\lambda_{1A_1}\lambda_{3A_1} + \lambda_{0A_1}\lambda_{2A_1})L_1 &= 2(\lambda_{1A_2}\lambda_{3A_2} + \lambda_{0A_2}\lambda_{2A_2})L_2 + x_{A_2} - x_{A_1}; \\ 2(\lambda_{2A_1}\lambda_{3A_1} - \lambda_{0A_1}\lambda_{1A_1})L_1 &= 2(\lambda_{2A_2}\lambda_{3A_2} - \lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2})L_2 + y_{A_2} - y_{A_1}; \\ (\lambda_{0A_1}^2 + \lambda_{3A_1}^2 - \lambda_{1A_1}^2 - \lambda_{2A_1}^2)L_1 &= (\lambda_{0A_2}^2 + \lambda_{3A_2}^2 - \lambda_{1A_2}^2 - \lambda_{2A_2}^2)L_2 + z_{A_2} - z_{A_1}; \\ 2(\lambda_{1A_2}\lambda_{3A_2} + \lambda_{0A_2}\lambda_{2A_2})L_2 &= 2(\lambda_{1A_3}\lambda_{3A_3} + \lambda_{0A_3}\lambda_{2A_3})L_3 + x_{A_3} - x_{A_2}; \\ 2(\lambda_{2A_2}\lambda_{3A_2} - \lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2})L_2 &= 2(\lambda_{2A_3}\lambda_{3A_3} - \lambda_{0A_3}\lambda_{1A_3})L_3 + y_{A_3} - y_{A_2}; \\ (\lambda_{0A_2}^2 + \lambda_{3A_2}^2 - \lambda_{1A_2}^2 - \lambda_{2A_2}^2)L_2 &= (\lambda_{0A_3}^2 + \lambda_{3A_3}^2 - \lambda_{1A_3}^2 - \lambda_{2A_3}^2)L_3 + z_{A_3} - z_{A_2}; \\ 2(\lambda_{1A_3}\lambda_{3A_3} + \lambda_{0A_3}\lambda_{2A_3})L_3 &= 2(\lambda_{1A_1}\lambda_{3A_1} + \lambda_{0A_1}\lambda_{2A_1})L_1 + x_{A_1} - x_{A_3}; \\ 2(\lambda_{2A_3}\lambda_{3A_3} - \lambda_{0A_3}\lambda_{1A_3})L_3 &= 2(\lambda_{2A_1}\lambda_{3A_1} - \lambda_{0A_1}\lambda_{1A_1})L_1 + y_{A_1} - y_{A_3}; \\ 2(\lambda_{2A_3}\lambda_{3A_3} - \lambda_{0A_3}\lambda_{1A_3})L_3 &= (\lambda_{0A_1}^2 + \lambda_{3A_1}^2 - \lambda_{1A_1}^2 - \lambda_{2A_1}^2)L_1 + z_{A_1} - z_{A_3}. \end{aligned} \right.$$

В последней системе уравнений только шесть являются независимыми – последние три, например, могут быть получены из первых шести. Поэтому исключим из этой системы три последние уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(\lambda_{1A_1}\lambda_{3A_1} + \lambda_{0A_1}\lambda_{2A_1})L_1 = 2(\lambda_{1A_2}\lambda_{3A_2} + \lambda_{0A_2}\lambda_{2A_2})L_2 + x_{A_2} - x_{A_1}; \\ 2(\lambda_{2A_1}\lambda_{3A_1} - \lambda_{0A_1}\lambda_{1A_1})L_1 = 2(\lambda_{2A_2}\lambda_{3A_2} - \lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2})L_2 + y_{A_2} - y_{A_1}; \\ (\lambda_{0A_1}^2 + \lambda_{3A_1}^2 - \lambda_{1A_1}^2 - \lambda_{2A_1}^2)L_1 = (\lambda_{0A_2}^2 + \lambda_{3A_2}^2 - \lambda_{1A_2}^2 - \lambda_{2A_2}^2)L_2 + z_{A_2} - z_{A_1}; \\ 2(\lambda_{1A_2}\lambda_{3A_2} + \lambda_{0A_2}\lambda_{2A_2})L_2 = 2(\lambda_{1A_3}\lambda_{3A_3} + \lambda_{0A_3}\lambda_{2A_3})L_3 + x_{A_3} - x_{A_2}; \\ 2(\lambda_{2A_2}\lambda_{3A_2} - \lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2})L_2 = 2(\lambda_{2A_3}\lambda_{3A_3} - \lambda_{0A_3}\lambda_{1A_3})L_3 + y_{A_3} - y_{A_2}; \\ (\lambda_{0A_2}^2 + \lambda_{3A_2}^2 - \lambda_{1A_2}^2 - \lambda_{2A_2}^2)L_2 = (\lambda_{0A_3}^2 + \lambda_{3A_3}^2 - \lambda_{1A_3}^2 - \lambda_{2A_3}^2)L_3 + z_{A_3} - z_{A_2}. \end{array} \right.$$

Полученная система содержит 6 уравнений и 12 неизвестных параметров кватернионов. Для уменьшения количества переменных условимся, что ось, вокруг которой производится поворот стержня  $L_1$  из исходного состояния в конечное, лежит в плоскости, задаваемой осями  $X_1$  и  $Y_1$  СК  $A_1X_1Y_1Z_1$ . В этом случае  $\lambda_{3A_1} = 0$ . Аналогичным образом можно задать, что  $\lambda_{3A_2} = 0$  и  $\lambda_{3A_3} = 0$ . Таким образом количество неизвестных уменьшено до девяти.

Для определения девяти неизвестных система уравнений может быть дополнена условиями нормирования кватернионов:

$$\lambda_{0A_1}^2 + \lambda_{1A_1}^2 + \lambda_{2A_1}^2 + \lambda_{3A_1}^2 = 1, \quad \lambda_{0A_2}^2 + \lambda_{1A_2}^2 + \lambda_{2A_2}^2 + \lambda_{3A_2}^2 = 1, \quad \lambda_{0A_3}^2 + \lambda_{1A_3}^2 + \lambda_{2A_3}^2 + \lambda_{3A_3}^2 = 1,$$

и окончательно система уравнений, позволяющая определить параметры кватернионов, примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\lambda_{0A_1}\lambda_{2A_1}L_1 = 2\lambda_{0A_2}\lambda_{2A_2}L_2 + x_{A_2} - x_{A_1}; \\ -2\lambda_{0A_1}\lambda_{1A_1}L_1 = -2\lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2}L_2 + y_{A_2} - y_{A_1}; \\ (\lambda_{0A_1}^2 - \lambda_{1A_1}^2 - \lambda_{2A_1}^2)L_1 = (\lambda_{0A_2}^2 - \lambda_{1A_2}^2 - \lambda_{2A_2}^2)L_2 + z_{A_2} - z_{A_1}; \\ 2\lambda_{0A_2}\lambda_{2A_2}L_2 = 2\lambda_{0A_3}\lambda_{2A_3}L_3 + x_{A_3} - x_{A_2}; \\ -2\lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2}L_2 = -2\lambda_{0A_3}\lambda_{1A_3}L_3 + y_{A_3} - y_{A_2}; \\ (\lambda_{0A_2}^2 - \lambda_{1A_2}^2 - \lambda_{2A_2}^2)L_2 = (\lambda_{0A_3}^2 - \lambda_{1A_3}^2 - \lambda_{2A_3}^2)L_3 + z_{A_3} - z_{A_2}; \\ \lambda_{0A_1}^2 + \lambda_{1A_1}^2 + \lambda_{2A_1}^2 = 1; \\ \lambda_{0A_2}^2 + \lambda_{1A_2}^2 + \lambda_{2A_2}^2 = 1; \\ \lambda_{0A_3}^2 + \lambda_{1A_3}^2 + \lambda_{2A_3}^2 = 1. \end{array} \right. \quad (55)$$

Возведем в квадрат каждое из первых трех уравнений системы (55) и сложим результаты:

$$\begin{aligned} & (2\lambda_{0A_1}\lambda_{2A_1}L_1)^2 + (-2\lambda_{0A_1}\lambda_{1A_1}L_1)^2 + (\lambda_{0A_1}^2 - \lambda_{1A_1}^2 - \lambda_{2A_1}^2)L_1^2 = \\ & = (2\lambda_{0A_2}\lambda_{2A_2}L_2 + x_{A_2} - x_{A_1})^2 + (-2\lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2}L_2 + y_{A_2} - y_{A_1})^2 + \\ & + \left[ (\lambda_{0A_2}^2 - \lambda_{1A_2}^2 - \lambda_{2A_2}^2)L_2 + z_{A_2} - z_{A_1} \right]^2. \end{aligned}$$

После преобразований последнее выражение примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & 2L_2 \left[ (\lambda_{0A_2}^2 - \lambda_{1A_2}^2 - \lambda_{2A_2}^2)(z_{A_2} - z_{A_1}) + 2\lambda_{0A_2}\lambda_{2A_2}(x_{A_2} - x_{A_1}) - \right. \\ & \left. - 2\lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2}(y_{A_2} - y_{A_1}) \right] = L_1^2 - L_2^2 + (z_{A_2} - z_{A_1})^2 - (y_{A_2} - y_{A_1})^2 - (x_{A_2} - x_{A_1})^2. \end{aligned}$$

Из четвертого, пятого и шестого уравнений системы (55) можно получить аналогичное выражение:

$$\begin{aligned} & 2L_2 \left[ (\lambda_{0A_2}^2 - \lambda_{1A_2}^2 - \lambda_{2A_2}^2)(z_{A_2} - z_{A_3}) + 2\lambda_{0A_2}\lambda_{2A_2}(x_{A_2} - x_{A_3}) - \right. \\ & \left. - 2\lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2}(y_{A_2} - y_{A_3}) \right] = L_3^2 - L_2^2 + (z_{A_2} - z_{A_3})^2 - (y_{A_2} - y_{A_3})^2 - (x_{A_2} - x_{A_3})^2. \end{aligned}$$

Так как центры шарниров лежат в плоскости, перпендикулярной оси  $Z$  системы координат  $OXYZ$ , то  $z_{A_2} - z_{A_1} = 0$  и  $z_{A_2} - z_{A_3} = 0$ . Следовательно, можно записать следующую систему линейных уравнений относительно двух переменных  $\lambda_{01A_2} = \lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2}$  и  $\lambda_{02A_2} = \lambda_{0A_2}\lambda_{2A_2}$ :

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_{01A_2} + a_{12}\lambda_{02A_2} = b_1; \\ a_{21}\lambda_{01A_2} + a_{22}\lambda_{02A_2} = b_2, \end{cases} \quad (56)$$

где  $a_{11} = y_{A_1} - y_{A_2}$ ;  $a_{12} = x_{A_2} - x_{A_1}$ ;  $a_{21} = y_{A_3} - y_{A_2}$ ;  $a_{22} = x_{A_2} - x_{A_3}$ ;

$$b_1 = \frac{L_1^2 - L_2^2 - (y_{A_2} - y_{A_1})^2 - (x_{A_2} - x_{A_1})^2}{4L_2};$$

$$b_2 = \frac{L_3^2 - L_2^2 - (y_{A_2} - y_{A_3})^2 - (x_{A_2} - x_{A_3})^2}{4L_2}.$$

С использованием условия нормирования кватерниона  $\Lambda_{A_2}$  можно записать следующее уравнение:

$$\lambda_{0A_2}^4 - \lambda_{0A_2}^2 + \lambda_{01A_2}^2 + \lambda_{02A_2}^2 = 0, \quad (57)$$

из которого при известных значениях  $\lambda_{01A_2}$  и  $\lambda_{02A_2}$  можно определить параметр  $\lambda_{0A_2}$ . Далее, можно определить остальные параметры кватерниона  $\Lambda_{A_2}$ :

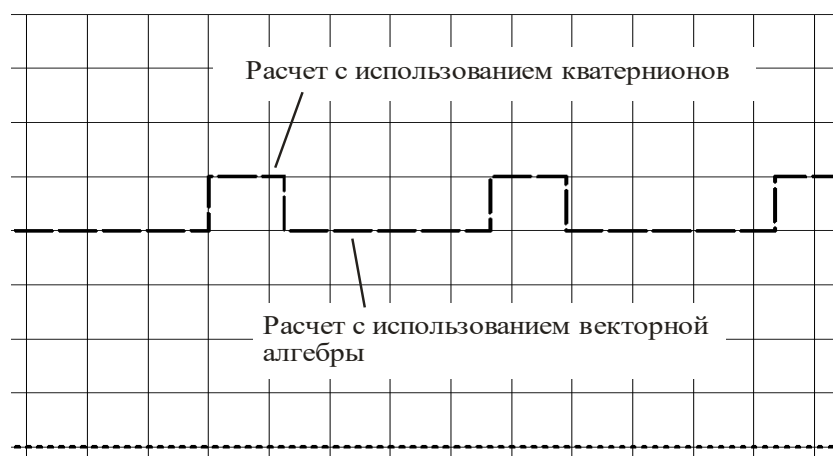
$$\lambda_{1A_2} = \frac{\lambda_{01A_2}}{\lambda_{0A_2}}, \lambda_{2A_2} = \frac{\lambda_{02A_2}}{\lambda_{0A_2}}. \quad (58)$$

Найденные параметры кватерниона позволяют определить искомые координаты точки В:

$$\begin{aligned} x_B &= r'_{2X} + x_{A_2} = 2\lambda_{0A_2}\lambda_{2A_2}L_2 + x_{A_2}; \\ y_B &= r'_{2Y} + y_{A_2} = -2\lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2}L_2 + y_{A_2}; \\ z_B &= r'_{2Z} + z_{A_2} = (\lambda_{0A_2}^2 - \lambda_{1A_2}^2 - \lambda_{2A_2}^2)L_2 + z_{A_2}. \end{aligned} \quad (59)$$

Зависимости (56)–(59), используемые для определения координаты точки В, существенно проще зависимостей (23)–(25), представленных в разделе 2.2.4.

Использование при вычислениях зависимостей (56)–(59) обеспечивает значительное уменьшение времени вычислений в сравнении с использованием зависимостей (23)–(25). Для иллюстрации этого обе вычислительные процедуры были реализованы в программе на языке С для 16-ти разрядного микроконтроллера. На рисунке 48 в виде осциллограммы показан результат работы этой программы: высокое значение сигнала на одном из портов микроконтроллера присутствует в течение времени работы фрагмента программы, реализующего расчёт с использованием кватернионов, низкий уровень – в течение времени работы фрагмента программы, реализующего расчёт с использованием формул (23)–(25).



**Рисунок 48 – Осциллограмма, иллюстрирующая длительность вычислительных процедур**

Из рисунка 48 видно, что использование кватернионов обеспечивает более чем двукратное уменьшение времени расчетов для рассмотренной задачи. Поэтому кватернионы могут быть рекомендованы для решения прямой задачи о положениях для механизма типа «гексапод» с использованием метода реконфигурации (см. раздел 2.3.4.) с целью сокращения времени вычислений. Такой подход использован при создании программно-аппаратного комплекса для управления оборудованием с параллельной кинематической структурой, созданного в ООО «НПО «ТехноЛайн», г. Челябинск (Приложение А).

### 2.3.4. Использование кватернионов при решении задач кинематики для трипода

Используя аппарат алгебры кватернионов, составим уравнения математической модели для трипода, показанного на рисунке 38. Расчетная схема показан на рисунке 49.

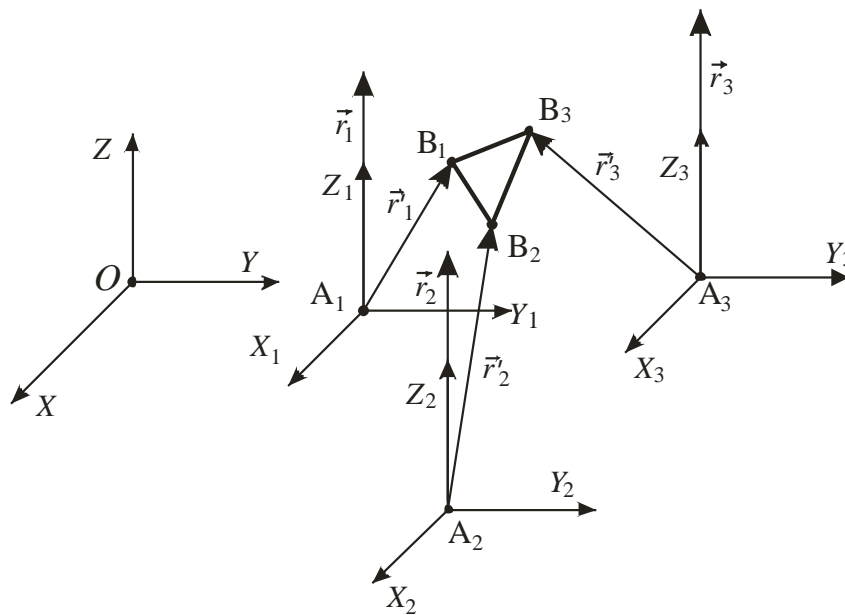


Рисунок 49 – Расчетная схема для решения задач кинематики для трипода с использованием кватернионов

Для координат точки  $B_1$  в системе координат  $OXYZ$  можно записать следующие выражения:

$$x_{B_1} = (\lambda_{0A_1}^2 + \lambda_{1A_1}^2 - \lambda_{2A_1}^2 - \lambda_{3A_1}^2) \cdot r_{1X} + 2(\lambda_{1A_1} \lambda_{2A_1} - \lambda_{0A_1} \lambda_{3A_1}) \cdot r_{1Y} + \\ + 2(\lambda_{1A_1} \lambda_{3A_1} + \lambda_{0A_1} \lambda_{2A_1}) \cdot r_{1Z} + x_{A_1};$$



$$y_{B_1} = 2(\lambda_{1A_1}\lambda_{2A_1} + \lambda_{0A_1}\lambda_{3A_1}) \cdot r_{1X} + (\lambda_{0A_1}^2 + \lambda_{2A_1}^2 - \lambda_{1A_1}^2 - \lambda_{3A_1}^2) \cdot r_{1Y} + \\ + 2(\lambda_{2A_1}\lambda_{3A_1} - \lambda_{0A_1}\lambda_{1A_1}) \cdot r_{1Z} + y_{A_1};$$

$$z_{B_1} = 2(\lambda_{1A_1}\lambda_{3A_1} - \lambda_{0A_1}\lambda_{2A_1}) \cdot r_{1X} + 2(\lambda_{2A_1}\lambda_{3A_1} + \lambda_{0A_1}\lambda_{1A_1}) \cdot r_{1Y} + \\ + (\lambda_{0A_1}^2 + \lambda_{3A_1}^2 - \lambda_{1A_1}^2 - \lambda_{2A_1}^2) \cdot r_{1Z} + z_{A_1},$$

где обозначения для параметров кватернионов аналогичны использованным в предыдущем разделе.

С учетом того, что  $r_{1X} = 0$ ,  $r_{1Y} = 0$ ,  $r_{1Z} = L_1$ ,  $\lambda_{3A_1} = 0$ , полученные выражения существенно упростятся:

$$\begin{aligned} x_{B_1} &= 2\lambda_{0A_1}\lambda_{2A_1}L_1 + x_{A_1}; \\ y_{B_1} &= -2\lambda_{0A_1}\lambda_{1A_1}L_1 + y_{A_1}; \\ z_{B_1} &= (\lambda_{0A_1}^2 - \lambda_{1A_1}^2 - \lambda_{2A_1}^2)L_1 + z_{A_1}. \end{aligned} \quad (60)$$

Условие  $\lambda_{3A_1} = 0$  следует из того, что, как и в предыдущем разделе, любое положение штанги рассматривается как поворот в шарнире  $A_1$  из исходного положения вокруг оси, лежащей в плоскости  $X_1A_1Y_1$ . Причем в данном триподе ориентация этой оси в плоскости задана, что устанавливает связь между компонентами кватерниона:  $\lambda_{2A_1} = k_1\lambda_{1A_1}$ ,  $k_1 = m_{A_1}/l_{A_1}$ , где  $l_{A_1}$ ,  $m_{A_1}$  – направляющие косинусы оси вращения шарнира  $A_1$  в системе координат  $A_1X_1Y_1Z_1$ .

Для составления математической модели запишем три уравнения, связывающие координаты верхних шарниров:

$$\begin{aligned} (x_{B_1} - x_{B_2})^2 + (y_{B_1} - y_{B_2})^2 + (z_{B_1} - z_{B_2})^2 &= |\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1|^2; \\ (x_{B_2} - x_{B_3})^2 + (y_{B_2} - y_{B_3})^2 + (z_{B_2} - z_{B_3})^2 &= |\mathbf{B}_3\mathbf{B}_2|^2; \\ (x_{B_3} - x_{B_1})^2 + (y_{B_3} - y_{B_1})^2 + (z_{B_3} - z_{B_1})^2 &= |\mathbf{B}_1\mathbf{B}_3|^2, \end{aligned}$$

где расстояния  $|\mathbf{B}_j\mathbf{B}_i|$  между шарнирами известны и при работе механизма не меняются, и распишем их с использованием выражений (60) и аналогичных им, записанных для других шарниров:

$$\begin{aligned}
& \left(2k_2\lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2}L_2 + x_{A_2} - 2k_1\lambda_{0A_1}\lambda_{1A_1}L_1 - x_{A_1}\right)^2 + \left(2\lambda_{0A_1}\lambda_{1A_1}L_1 - y_{A_1} - \right. \\
& \left. - 2\lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2}L_2 + y_{A_2}\right)^2 + \left(\left[2\lambda_{0A_2}^2 - 1\right]L_2 + z_{A_2} - \left[2\lambda_{0A_1}^2 - 1\right]L_1 - z_{A_1}\right)^2 = |\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1|^2; \\
& \left(2k_3\lambda_{0A_3}\lambda_{1A_3}L_3 + x_{A_3} - 2k_1\lambda_{0A_1}\lambda_{1A_1}L_1 - x_{A_1}\right)^2 + \left(2\lambda_{0A_1}\lambda_{1A_1}L_1 - y_{A_1} - \right. \\
& \left. - 2\lambda_{03}\lambda_{13}L_3 + y_{A_3}\right)^2 + \left(\left[2\lambda_{0A_3}^2 - 1\right]L_3 + z_{A_3} - \left[2\lambda_{0A_1}^2 - 1\right]L_1 - z_{A_1}\right)^2 = |\mathbf{B}_3\mathbf{B}_1|^2; \\
& \left(2k_2\lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2}L_2 + x_{A_2} - 2k_3\lambda_{0A_3}\lambda_{1A_3}L_3 - x_{A_3}\right)^2 + \left(2\lambda_{0A_3}\lambda_{1A_3}L_3 - y_{A_3} - \right. \\
& \left. - 2\lambda_{0A_2}\lambda_{1A_2}L_2 + y_{A_2}\right)^2 + \left(\left[2\lambda_{0A_2}^2 - 1\right]L_2 + z_{A_2} - \left[2\lambda_{0A_3}^2 - 1\right]L_3 - z_{A_3}\right)^2 = |\mathbf{B}_2\mathbf{B}_3|^2.
\end{aligned} \tag{61}$$

Для определения величин  $\lambda_{0A_1}$ ,  $\lambda_{1A_1}$ ,  $\lambda_{0A_2}$ ,  $\lambda_{1A_2}$ ,  $\lambda_{0A_3}$ ,  $\lambda_{1A_3}$  уравнения (61)

должны быть дополнены уравнениями

$$\lambda_{0A_1}^2 + \lambda_{1A_1}^2(1+k_1^2) = 1; \lambda_{0A_2}^2 + \lambda_{1A_2}^2(1+k_2^2) = 1; \lambda_{0A_3}^2 + \lambda_{1A_3}^2(1+k_3^2) = 1, \tag{62}$$

следующими из условия нормирования кватернионов. Из уравнений (62) можно записать:

$$\lambda_{1A_1} = \pm \sqrt{\frac{1-\lambda_{0A_1}^2}{1+k_1^2}}; \lambda_{1A_2} = \pm \sqrt{\frac{1-\lambda_{0A_2}^2}{1+k_2^2}}; \lambda_{1A_3} = \pm \sqrt{\frac{1-\lambda_{0A_3}^2}{1+k_3^2}},$$

что позволит уменьшить количество параметров кватернионов в (61) до трех:

$$\begin{aligned}
& \left(2k_2\lambda_{0A_2}\sqrt{\frac{1-\lambda_{0A_2}^2}{1+k_2^2}}L_2 + x_{A_2} + 2k_1\lambda_{0A_1}\sqrt{\frac{1-\lambda_{0A_1}^2}{1+k_1^2}}L_1 - x_{A_1}\right)^2 + \\
& + \left(-2\lambda_{0A_1}\sqrt{\frac{1-\lambda_{0A_1}^2}{1+k_1^2}}L_1 - y_{A_1} - 2\lambda_{0A_2}\sqrt{\frac{1-\lambda_{0A_2}^2}{1+k_2^2}}L_2 + y_{A_2}\right)^2 + \\
& + \left(\left[2\lambda_{0A_2}^2 - 1\right]L_2 + z_{A_2} - \left[2\lambda_{0A_1}^2 - 1\right]L_1 - z_{A_1}\right)^2 = |\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1|^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( 2k_3\lambda_{0A_3}\sqrt{\frac{1-\lambda_{0A_3}^2}{1+k_3^2}}L_3 + x_{A_3} + 2k_1\lambda_{0A_1}\sqrt{\frac{1-\lambda_{0A_1}^2}{1+k_1^2}}L_1 - x_{A_1} \right)^2 + \\
& + \left( -2\lambda_{0A_1}\sqrt{\frac{1-\lambda_{0A_1}^2}{1+k_1^2}}L_1 - y_{A_1} - 2\lambda_{0A_3}\sqrt{\frac{1-\lambda_{0A_3}^2}{1+k_3^2}}L_3 + y_{A_3} \right)^2 + \\
& + \left( [2\lambda_{0A_3}^2 - 1]L_3 + z_{A_3} - [2\lambda_{0A_1}^2 - 1]L_1 - z_{A_1} \right)^2 = |\mathbf{B}_3\mathbf{B}_1|^2; \\
& \left( 2k_2\lambda_{0A_2}\sqrt{\frac{1-\lambda_{0A_2}^2}{1+k_2^2}}L_2 + x_{A_2} - 2k_3\lambda_{0A_3}\sqrt{\frac{1-\lambda_{0A_3}^2}{1+k_3^2}}L_3 - x_{A_3} \right)^2 + \\
& + \left( 2\lambda_{0A_3}\sqrt{\frac{1-\lambda_{0A_3}^2}{1+k_3^2}}L_3 - y_{A_3} - 2\lambda_{0A_2}\sqrt{\frac{1-\lambda_{0A_2}^2}{1+k_2^2}}L_2 + y_{A_2} \right)^2 + \\
& + \left( [2\lambda_{0A_2}^2 - 1]L_2 + z_{A_2} - [2\lambda_{0A_3}^2 - 1]L_3 - z_{A_3} \right)^2 = |\mathbf{B}_2\mathbf{B}_3|^2.
\end{aligned} \tag{63}$$

Решение уравнений (63) позволяет при заданных входных координатах  $L_j$  определить параметры кватернионов и, далее, с помощью зависимостей (60) и аналогичных им, записанных для других сферических шарниров, определить координаты этих шарниров, т. е. решить прямую задачу о положениях. Знаки перед радикалами в системе уравнений (63) расставляются из анализа знаков координат сферических шарниров.

При решении прямой задачи о положениях использование кватернионов позволило снизить количество совместно решаемых уравнений с девяти (см. (29)–(31)) до трех.

Технологическое оборудование, построенное с использованием рассматриваемого трипода, можно использовать для перемещения заготовки, установленной на его платформе, в вертикальной плоскости с поворотом ее относительно двух горизонтальных осей. Требуемые для этого перемещения платформы можно описать с помощью трех выходных координат: координаты  $z_C$  полюса и двух углов Крылова (тангажа  $\vartheta$ , крена  $\gamma$ ). Поэтому при решении обратной задачи целесооб-

разно выбрать в качестве трех известных выходных координат механизма величины  $Z_C$ ,  $\vartheta$  и  $\gamma$ . Назовем данные координаты условно независимыми.

Составим уравнения, позволяющие решить обратную задачу при принятых условно независимых выходных координатах. С использованием третьего уравнения из (60) и аналогичных ему можно записать следующие выражения:

$$\begin{aligned}(2\lambda_{0A_1}^2 - 1)L_1 + z_{A_1} &= n_1x'_{B_1} + n_2y'_{B_1} + n_3z'_{B_1} + z_C; \\ (2\lambda_{0A_2}^2 - 1)L_2 + z_{A_2} &= n_1x'_{B_2} + n_2y'_{B_2} + n_3z'_{B_2} + z_C; \\ (2\lambda_{0A_3}^2 - 1)L_3 + z_{A_3} &= n_1x'_{B_3} + n_2y'_{B_3} + n_3z'_{B_3} + z_C.\end{aligned}\tag{64}$$

Направляющие косинусы, входящие в (64), определяются только углами  $\vartheta$  и  $\gamma$ , см. формулы (15).

Из выражений (64) можно выразить длины штанг  $L_j$ :

$$L_j = \frac{n_1x'_{B_j} + n_2y'_{B_j} + n_3z'_{B_j} + z_C - z_{A_j}}{2\lambda_{0A_j}^2 - 1}, \quad j = 1 \dots 3.\tag{65}$$

Подстановка (65) в (63) позволяет получить систему трех нелинейных уравнений, которая связывает три принятых условно независимых выходных координаты механизма с тремя неизвестными параметрами кватернионов  $\lambda_{0A_1}$ ,  $\lambda_{0A_2}$ ,  $\lambda_{0A_3}$ . Численное решение этой системы позволит, с последующим использованием выражений (65), определить обобщенные координаты  $L_j$  при заданных выходных координатах  $Z_C$ ,  $\vartheta$  и  $\gamma$ , т. е. решить для рассматриваемого трипода обратную задачу о положениях. Как и в случае для прямой задачи, при использовании кватернионов количество совместно решаемых уравнений снижено до трех.

Уравнения, полученные для решения задач о положениях, служат основой для численного решения задач о скоростях и ускорениях. Следовательно, гиперкомплексные числа кватернионы могут быть успешно использованы при моделировании механизмов с параллельными кинематическими цепями, предполагающем решение прямой и обратной задач кинематики.

## 2.4. Исследование характера изменения входных координат при реализации типовых траекторий

Применительно к технологическому оборудованию под траекторной задачей в общем случае понимается обеспечение перемещения рабочего органа (инструмента) по заданной траектории с требуемой скоростью. Отслеживание траектории и поддержание скорости необходимо при реализации рабочей подачи как основного формообразующего движения инструмента. В частных случаях могут сниматься требования по отслеживанию траектории (отвод инструмента) или по поддержанию требуемой скорости (быстрая подача).

При выполнении технологических операций могут изменяться все 6 координат, описывающих пространственное положение инструмента как твердого тела: три декартовы координаты некоторой характерной точки (полюса) инструмента и три угловые, характеризующие его разворот вокруг характерной точки. Количество координат, необходимых для описания положения инструмента в процессе решения траекторной задачи, зависит от форм поверхностей обрабатываемой детали. На рисунке 50 показан контур детали, который необходимо получить в процессе ее обработки. Он может быть представлен как совокупность следующих геометрических элементов:

- отрезок, соединяющий точки 1 и 2;
- дуга, соединяющая точки 2 и 3;
- отрезок, соединяющий точки 3 и 4;
- дуга, соединяющая точки 4 и 5;
- отрезок, соединяющий точки 5 и 6;
- дуга, соединяющая точки 6 и 7;
- отрезок, соединяющий точки 7 и 8;
- дуга, соединяющая точки 8 и 1.

Данное представление контура как совокупности отрезков и дуг характерно

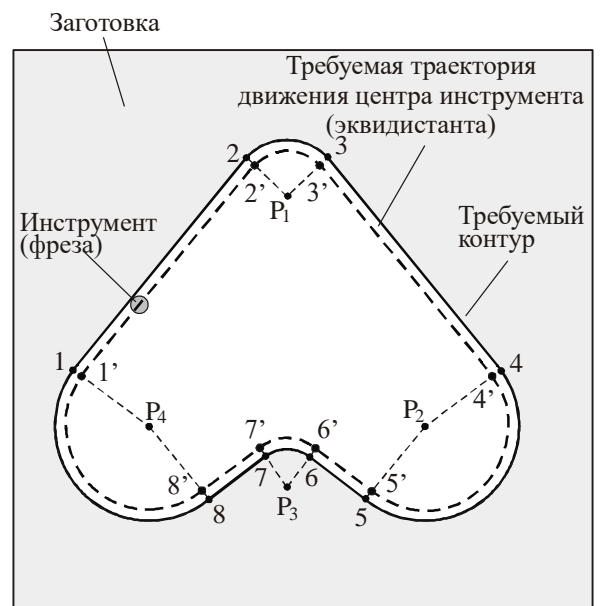


Рисунок 50 – Пример контура, получаемого в процессе обработки

для большинства деталей – до 80% контуров деталей, обрабатываемых на станках с ЧПУ, сформированы отрезками и дугами окружностей [37].

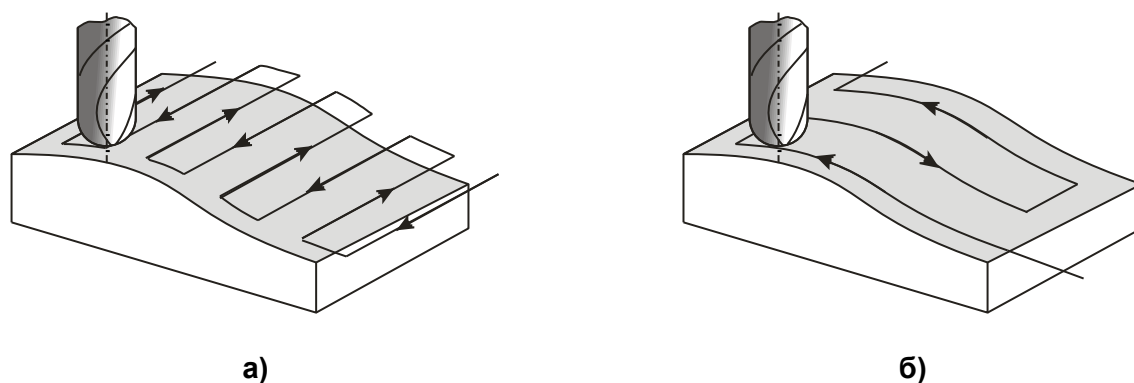
Траектория движения инструмента при рабочей подаче разрабатывается для так называемого центра инструмента – некоторой его характерной точки. У резцов центр располагается обычно на их вершинах либо в центре скругления вершины, а у цилиндрических фрез – в точке пересечения оси инструмента с его торцевой плоскостью. Поэтому требуемая траектория движения инструмента обычно не совпадает с требуемым контуром: центр инструмента должен двигаться по эквидистанте (равноотстоящей кривой) к требуемому контуру. Так как эквидистантой к прямой является прямая, а к дуге окружности – дуга окружности другого радиуса, то в большинстве случаев требуется обеспечить движение центра инструмента также либо по отрезку прямой линии, либо по дуге окружности. Очевидно, что в рассмотренном примере существует необходимость в изменении только двух линейных координат центра инструмента. В более сложных случаях, когда требуется изменение и угловых координат инструмента, траекторию его движения представляют как совокупность участков с постоянными угловыми координатами; центр инструмента на этих участках движется по отрезку прямой, или по дуге окружности. Последний вариант реализуется реже, так как в случае решения пространственных задач он гораздо сложнее в реализации.

Различные геометрические элементы, определяющие положение характерной точки инструмента, соединяются в точках пересечения. Точки соединения называются опорными точками (точки 1'–8' на рисунке 50). Кроме того, на траектории выделяют точки, в которых требуется изменение технологических параметров (скорость резания, подача инструмента и т. д.). Эти точки называются технологическими опорными точками. Информация о перемещении инструмента от одной опорной точки траектории к другой записывается в одном кадре управляющей программы.

При многокоординатной обработке в качестве опорных точек будут выступать точки, определяющие границы участков постоянства угловых координат инструмента. При разработке технологии многокоординатной обработки одной из

наиболее сложных проблем является рациональный выбор траекторий перемещения инструмента. Например, при обработке некоторой криволинейной поверхности (рисунок 51) рациональной с точки зрения упрощения программных процедур является траектория, при которой на большей части своего пути инструмент совершает прямолинейные перемещения (см. рисунок 51, а). В случае обработки по схеме, приведенной на рисунке 51, б, инструмент движется в основном по криволинейным траекториям, что сложнее для программирования.

Правильный выбор траекторий движения режущих инструментов позволяет сократить основное время обработки и количество инструментов. Современные САМ системы позволяют задавать желаемый характер движения инструмента при обработке. В дальнейшем будем считать, что траектория движения инструмента является известной (заданной).



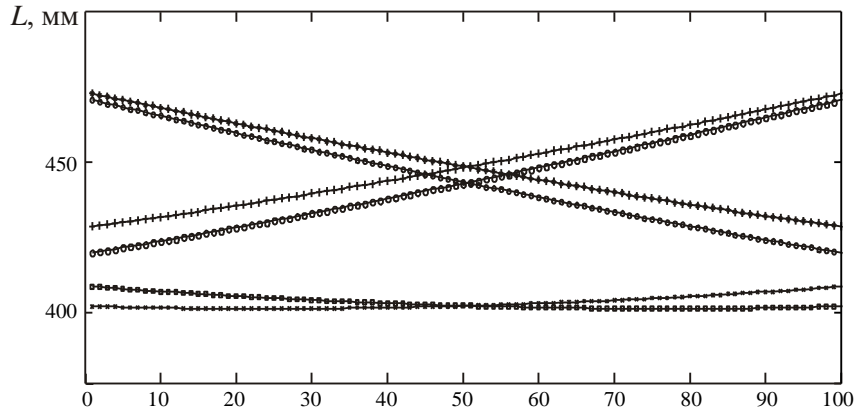
**Рисунок 51 – Возможные траектории движения инструмента при обработке**

В работе [94] выявлены особенности формирования траекторий применительно к простейшему МПКЦ с 2-мя степенями свободы. Полученные выше кинематические модели позволяют исследовать механизмы с большим числом степеней свободы.

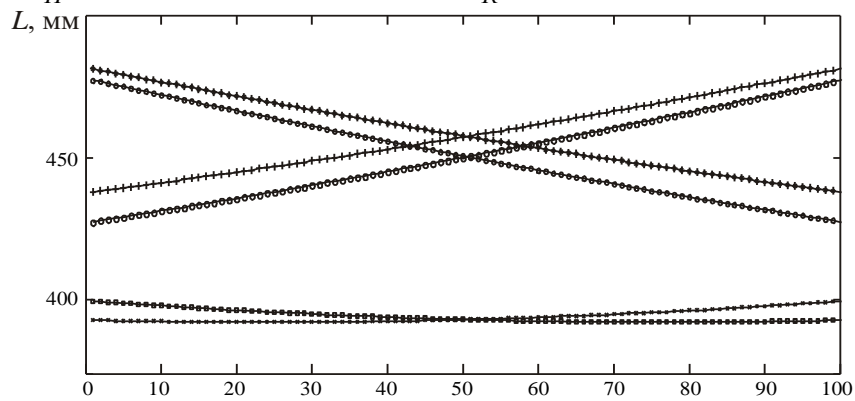
Рассмотрим МПКЦ типа «гексапод», у которого шарниры основания расположены на окружности радиусом  $R_A = 400$  мм с шагом  $60^\circ$ , шарниры платформы расположены на окружности радиусом  $R_B = 200$  мм и попарно сведены (схема, показанная на рисунке 33). Под выходными координатами  $Y$  будем понимать три координаты центра  $C$  окружности, на которой расположены шарниры платформы, в глобальной системе координат  $OXYZ$  и три угла Крылова, определяющие

разворот связанной с платформой системы координат  $O'X'Y'Z'$  относительно  $OXYZ$ .

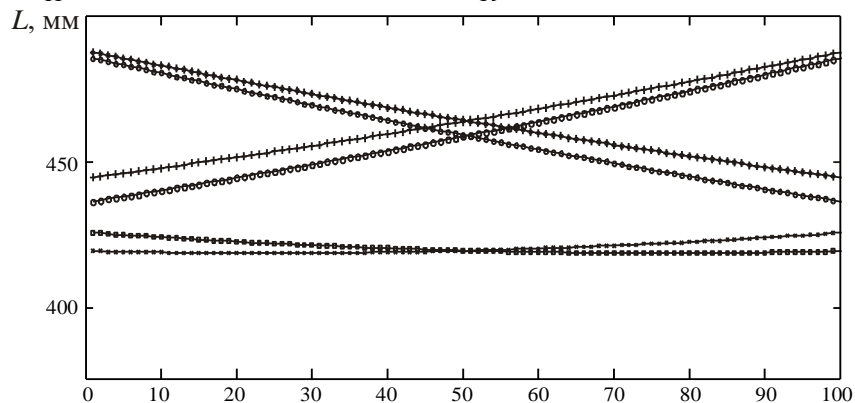
На рисунке 52 показан характер изменения длин штанг рассматриваемого механизма, обеспечивающий изменение его выходных координат  $\mathbf{Y} = (x_C, y_C, z_C, \psi, \vartheta, \gamma)^T$  из начального состояния  $\mathbf{Y}_H$  в конечное состояние  $\mathbf{Y}_K$ .



$$\mathbf{Y}_H = (-50, 50, 500, 0, 0, 0)^T, \mathbf{Y}_K = (50, 50, 500, 0, 0, 0)^T$$



$$\mathbf{Y}_H = (-50, 70, 500, 0, 0, 0)^T, \mathbf{Y}_K = (50, 70, 500, 0, 0, 0)^T$$



$$\mathbf{Y}_H = (-50, 70, 520, 0, 0, 0)^T, \mathbf{Y}_K = (50, 70, 520, 0, 0, 0)^T$$

**Рисунок 52 – Характер изменения длин штанг МПКЦ типа «гексапод» при движении характерной точки выходного звена по прямой:**

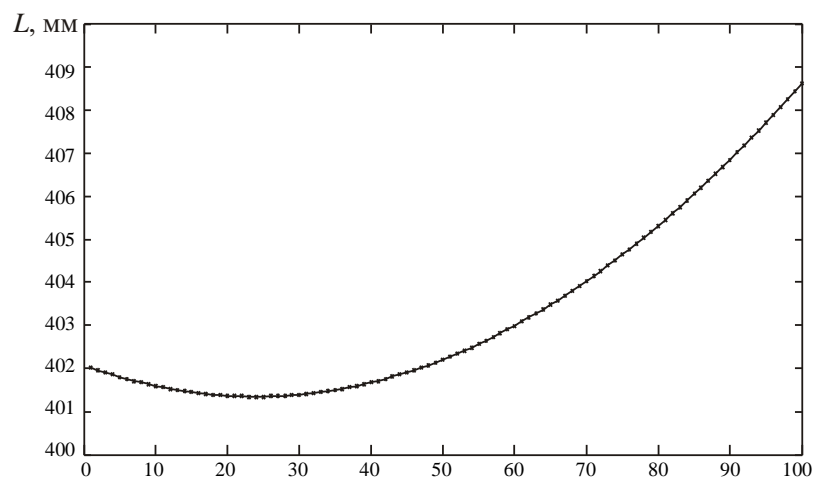
oooooooooooo –  $L_1$ , pppppppppppppp –  $L_2$ , xxxxxxxxxxxxxx –  $L_3$ , oooooooooooooo –  $L_4$ , ++++++ –  $L_5$ , ++++++ –  $L_6$



По оси абсцисс на графиках отложены условные величины, которые могут носить смысл времени. Во всех трех показанных на рисунке 52 случаях происходит изменение только одной выходной координаты: подвижная платформа механизма совершает плоско-параллельное движение, перемещаясь вдоль оси  $OX$  на одну и ту же величину; точка  $C$  перемещается по прямой. Очевидно, что характерная точка закрепленного на подвижной платформе рабочего органа (инструмента) также будет перемещаться по прямой; угловые координаты инструмента будут постоянны.

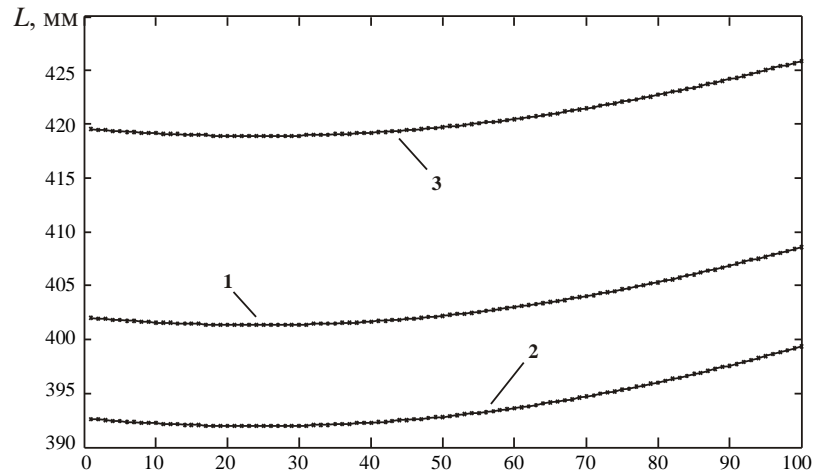
Анализ показанных графиков позволяет сделать следующие выводы:

1. Даже при формировании простейшей траектории, представляющей собой отрезок прямой, характер изменения длин штанг является нелинейным. На рисунке 53 показан характер изменения длины одной из штанг для 1-го случая в более крупном масштабе.



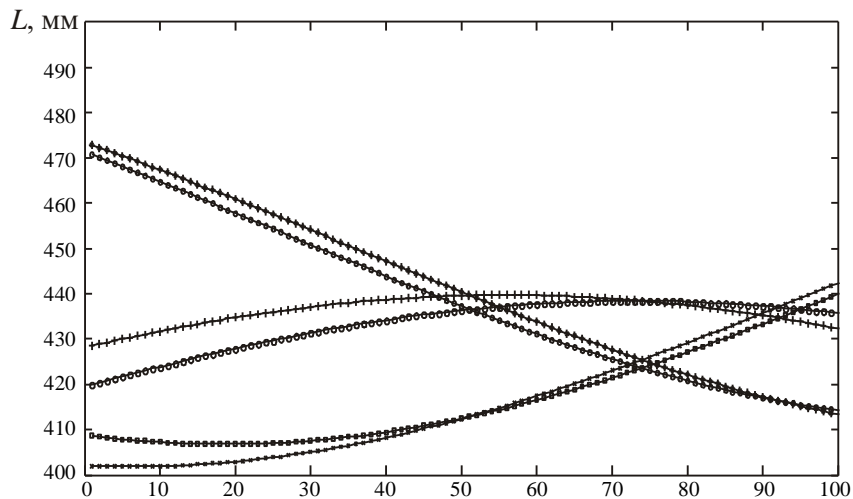
**Рисунок 53 – Характер изменения длины штанги МПКЦ типа «гексапод» при движении характерной точки инструмента по прямой**

2. Один и тот же закон изменения выходных координат при движении из различных начальных точек требует различных законов изменения длин штанг. Это иллюстрирует рисунок 54, на котором представлен характер изменения одной из штанг для всех трех случаев изменения выходной координаты  $x_C$  на 100 мм.



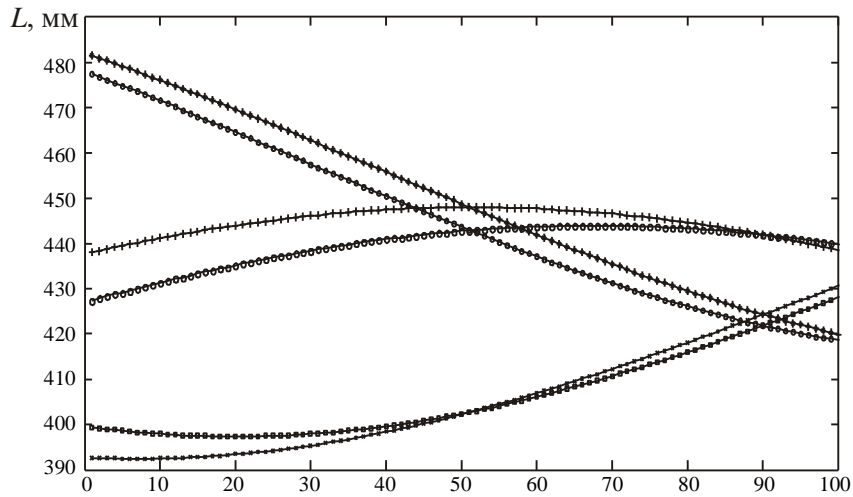
**Рисунок 54 – Характер изменения длины штанги МПКЦ типа «гексапод» при движении характерной точки инструмента по отрезкам параллельных прямых**

Изменим требуемый закон изменения выходных координат. Пусть требуется выполнить движение таким образом, чтобы характерная точка инструмента перемещалась по дуге окружности, лежащей в плоскости, параллельной  $OXY$ ; угловые координаты инструмента меняться не должны. Характер изменения длин штанг при таком движении показан на рисунке 55. Точка  $C$  при моделировании описывает дугу в  $90^\circ$  радиусом 70 мм.

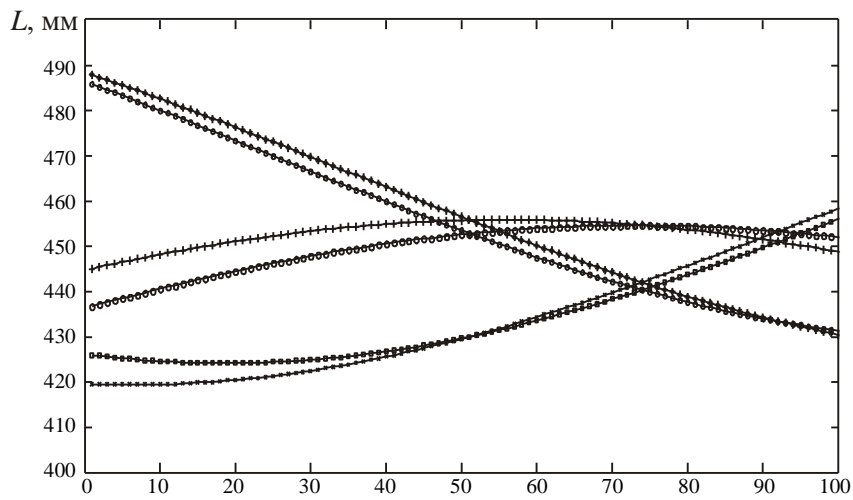


$$\mathbf{Y}_H = (-50, 50, 500, 0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{Y}_K = (20, -20, 500, 0, 0, 0)^T$$

**Рисунок 55 – Характер изменения длин штанг МПКЦ типа «гексапод» при движении характерной точки выходного звена по дуге окружности**



$$\mathbf{Y}_H = (-50, 70, 500, 0, 0, 0)^T, \mathbf{Y}_K = (20, 0, 500, 0, 0, 0)^T$$



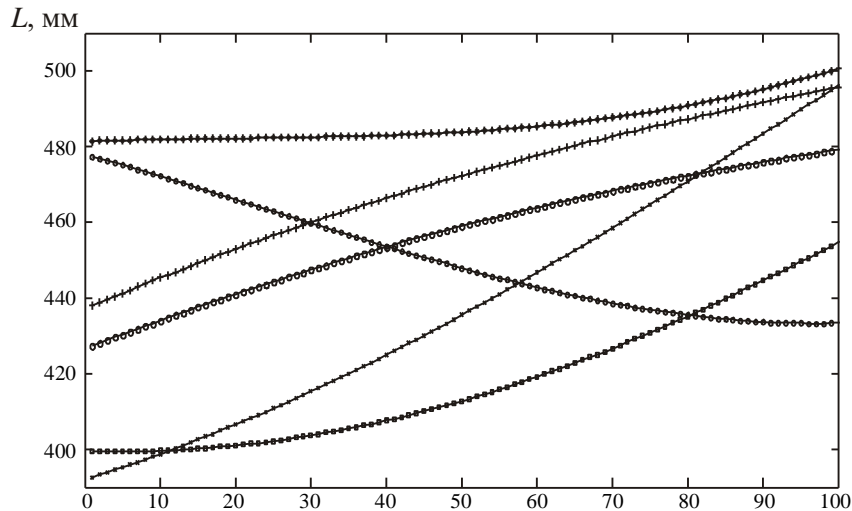
$$\mathbf{Y}_H = (-50, 50, 520, 0, 0, 0)^T, \mathbf{Y}_K = (20, -20, 520, 0, 0, 0)^T$$

#### Окончание рисунка 55

В общем случае может возникнуть потребность в более сложном движении инструмента. На рисунке 56 показан характер изменения длин штанг МПКЦ при достаточно произвольном движении его выходного звена: точка  $C$  движется по винтовой линии при одновременном изменении углов  $\vartheta$  и  $\gamma$ .

При управлении технологическим оборудованием, построенным по традиционным компоновочным схемам, существует линейная связь между требуемым законом перемещения рабочего органа (изменения выходных координат) и характером изменения входных координат: при движении рабочего органа по прямой линии входные координаты изменяются линейно, при движении рабочего органа по дуге окружности входные координаты изменяются в функции синуса (косинуса). Как видно из рисунков 52–56, существенные различия в характере движения вы-

ходного звена МПКЦ не приводят к существенной разнице в характере изменения длин штанг: во всех случаях изменения входных координат представляют собой нелинейные функции.



**Рисунок 56 – Характер изменения длин штанг МПКЦ типа «гексапод» при сложном движении выходного звена**

Отмеченные особенности должны учитываться при построении законов управления приводным устройством ОПКС, обеспечивающих реализацию требуемых траекторий движения его рабочего органа.

## 2.5. Выводы по главе

1. Для исследования закономерностей движения выходного звена МПКЦ должны использоваться кинематические модели, устанавливающие связь между его входными и выходными координатами без учета массо-инерционных характеристик элементов механизма.

2. Для плоского механизма в качестве выходных координат выступают две линейные координаты некоторой характерной точки (полюса) выходного звена МПКЦ и одна угловая координата, определяющая поворот этого звена.

3. Для пространственного механизма в качестве выходных координат выступают три линейные координаты некоторой характерной точки (полюса) выходного звена МПКЦ и три угловые координаты, определяющие разворот этого звена. В качестве угловых координат могут выступать станочные углы, углы Эйлера или углы Крылова. В качестве входных координат для МПКЦ, имеющих штанги пе-

ременной длины, целесообразно использовать длины этих штанг, называемые  $L$ -координатами. В общем случае количество входных и выходных координат в МПКЦ не совпадает.

4. Уравнения кинематической модели МПКЦ позволяют решать для него прямую и обратную задачи кинематики о положениях. Для МПКЦ типа «гексапод» возможно аналитическое решение обратной задачи кинематики о положениях. Аналитическое решение прямой задачи возможно только при определенной структуре такого МПКЦ. Для большинства МПКЦ, не относящихся к гексаподам, решение как прямой, так и обратной задач кинематики требует использования численных методов.

5. Сократить количество уравнений, требующихся для решения задач кинематики, обеспечив, тем самым, упрощение вычислительных процедур, можно за счет использования гиперкомплексных чисел – кватернионов.

Для пространственного трипода кинематическая модель, исходная включавшая шесть уравнений, с помощью кватернионов сведена к трем уравнениям.

Использование кватернионов позволило существенно упростить решение задачи о трех шарнирно закрепленных стержнях, сведенных в одну точку. Так как такая задача возникает при использовании метода реструктуризации для упрощения решения прямой задачи кинематики МПКЦ типа «гексапод», то использование кватернионов позволяет снизить время вычислений при численном решении этой прямой задачи кинематики. Такой подход использован при создании программно-аппаратного комплекса для управления оборудованием с параллельной кинематической структурой, созданного в ООО «НПО «ТехноЛайн», г. Челябинск (Приложение А).

6. Для карданового шарнира создана модель, учитывающая его неидеальность; такая модель карданового шарнира позволила создать уточненную кинематическую модель механизма типа «гексапод». При использовании уточненной кинематической модели решение как прямой, так и обратной задач кинематики для МПКЦ типа «гексапод» можно осуществить только численными методами.

Уточненная кинематическая модель МПКЦ типа «гексапод» использована при создании прецизионного сварочного позиционера с параллельной кинематической структурой в ООО «Завод энергоэффективного и емкостного оборудования» (Приложение Б).

7. Исследования с использованием кинематических моделей закономерностей движения выходного звена МПКЦ типа «гексапод» показали, что:

– характер изменения длин штанг является нелинейным, в том числе и при формировании простейшей линейной траектории;

– один и тот же закон изменения выходных координат при движении из различных начальных точек требует различных законов изменения длин штанг.

Эти особенности должны учитываться при построении законов управления приводным устройством ОПКС, обеспечивающих реализацию требуемых траекторий движения его рабочего органа.

### **3. Использование фактора избыточности выходных координат для повышения эффективности приводных устройств оборудования с параллельной кинематической структурой**

Повышению эффективности ОПКС посвящены работы ряда авторов [125, 126, 130, 189]. Анализ публикаций показывает, что принятые в этих работах направления повышения эффективности:

- снижение потребления энергии приводами подач;
- уменьшение нагрузок на элементы оборудования с параллельной кинематической структурой,
- увеличение скорости перемещения инструмента;
- повышение точности перемещения инструмента

фактически аналогичны сформулированным в разделе 1.3. Повышение эффективности оборудования с параллельной кинематической структурой по этим направлениям предполагается осуществлять следующим образом:

- за счет использования избыточных кинематических цепей (при их наличии в механизме) [125, 126, 189];
- за счет уменьшения инерционных силовых факторов, возникающих при работе оборудования [130];

Такие подходы имеют ряд недостатков:

1. Использование избыточных кинематических цепей, например, 7-й в оборудовании для 6-ти координатной обработки, приводит к усложнению конструкции оборудования.

2. В существующее оборудование ввести избыточную кинематическую связь практически невозможно.

3. Уменьшением инерционных силовых факторов требует использования качественных динамических моделей оборудования и процессов, реализуемых на этом оборудовании, что не всегда осуществимо.

4. Инерционные факторы пропорциональны ускорениям, возникающим при функционировании оборудования; ускорения могут ограничиваться технологиче-

скими требованиями к движению инструмента, тем самым ограничивая возможность повышения эффективности.

Ниже рассмотрены подходы к повышению эффективности ОПКС, не предполагающие использования избыточных кинематических цепей и использующие кинематические модели МПКЦ. Подходы реализуются при наличии фактора избыточности выходной координаты (координат), выявленного на основе анализа выполняемой на оборудовании технологической операции. При этом повышение эффективности ОПКС рассматривается как повышение эффективности его приводного устройства.

Избыточной назовем выходную координату, присутствующую в оборудовании, но не используемую при реализации технологического процесса (операции). Термин «избыточная выходная координата» фактически эквивалентен термину «extra degree of freedom (DOF)» – дополнительная степень свободы, введенному в работе [195]. Авторы этой работы предлагают использовать дополнительную степень свободы для расчета траекторий движения рабочего органа ОПКС, не содержащих точек сингулярности, а также оптимальных по какому-либо произвольному критерию. В качестве одного из критериев авторы рассматривают минимизацию сил, возникающих в штангах МПКЦ типа «гексапод». Расчет оптимальных траекторий проводился с использованием элементов интервального анализа и занимал существенное время – от нескольких часов до нескольких дней. В качестве дополнительной рассматривалась степень свободы по одной из угловых координат, которая при реализации траектории менялась более чем на 300 градусов (Figure 6 в [195]). Очевидно, что такой подход к организации расчетов оптимальных траекторий не пригоден для использования применительно к реальному технологическому ОПКС.

Подходы к повышению эффективности приводных устройств ОПКС с использованием фактора избыточности выходной координаты (координат), предлагаемые в диссертационной работе, сформулированы и реализованы независимо от положений работы [195]. Разработанные методики, обеспечивающие повышение



эффективности ОПКС, учитывают существующие в оборудовании кинематические ограничения и имеют существенно меньшее время выполнения.

### 3.1. Снижение потребляемой приводами энергии в оборудовании с традиционными кинематическими схемами

Рассмотрим плоский механизм (рисунок 57), имеющий незамкнутую кинематическую схему. За счет изменения входных координат  $x$  и  $y$  его выходное звено – платформа – может совершать плоско-параллельное движение. Так как поворот платформы в данном механизме невозможен, то ее движение можно описать через изменение координат полюса  $C$  платформы в неподвижной СК  $OXY$ . Следовательно, механизм имеет две степени свободы, что легко проверяется с использованием формулы (2):  $H = 3(3 - 1) - 2 \cdot 2 = 2$ .

Пусть на основе данного механизма построено устройство, в котором входные координаты изменяются посредством приводов, а на платформу действует внешняя сила  $\vec{P}_{ВНЕШ}$ . Рассмотрим элементарное перемещение  $dL$  полюса  $C$ , при котором его координаты  $x_C$  и  $y_C$  изменятся на величины  $dx$  и  $dy$  соответственно. Если направления входных координат  $x$  и  $y$  параллельны осям СК  $OXY$ , то они изменятся на эти же величины. На элементарном перемещении будем считать внешнюю силу  $\vec{P}_{ВНЕШ}$  неизменной и представим ее в виде составляющих  $\vec{P}_\tau$  и  $\vec{P}_n$ , направленных соответственно параллельно и перпендикулярно элементарной линейной траектории полюса (рисунок 58). Если  $\vec{P}_{ВНЕШ}$  приложена не в полюсе  $C$ , то при ее переносе в полюс возникает необходимость во введении момента  $M_p$ .

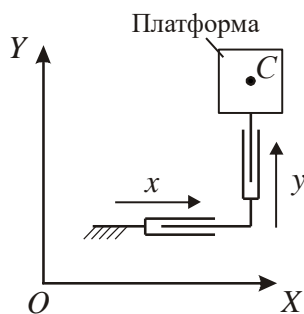


Рисунок 57 – Плоский механизм, построенный по незамкнутой кинематической схеме

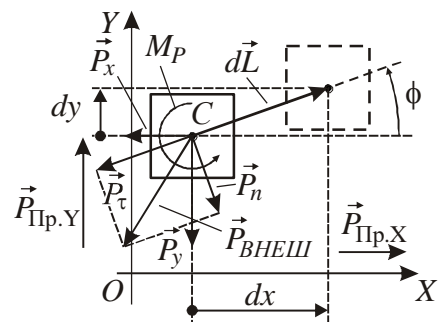


Рисунок 58 – Элементарное перемещение полюса

Элементарная работа, совершаемая приводами на рассматриваемом элементарном перемещении полюса  $C$ , будет равна

$$dA_{\text{Прив}} = dA_x + dA_y = P_{\text{Пр.Х}} dx + P_{\text{Пр.У}} dy,$$

где  $P_{\text{Пр.Х}}$  и  $P_{\text{Пр.У}}$  – усилия, формируемые приводами:

$$P_{\text{Пр.Х}} = P_\tau \cos \phi - P_n \sin \phi; \quad P_{\text{Пр.У}} = P_\tau \sin \phi + P_n \cos \phi. \quad (66)$$

Здесь угол  $\phi$  определяет направление элементарного перемещения полюса в системе координат  $OXY$  (см. рисунок 58):  $dx = dL \cos \phi$ ,  $dy = dL \sin \phi$ . Тогда

$$\begin{aligned} dA_{\text{Прив}} &= (P_\tau \cos \phi - P_n \sin \phi) dL \cos \phi + (P_\tau \sin \phi + P_n \cos \phi) dL \sin \phi = \\ &= P_\tau (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) dL = P_\tau dL. \end{aligned} \quad (67)$$

Следовательно, элементарная работа  $dA_{\text{Прив}}$ , совершаемая приводами, определяется только составляющей  $\vec{P}_\tau$  внешней силы.

Аналогичный результат можно получить из условия равенства  $dA_{\text{Прив}}$  элементарной работе внешней силы  $\vec{P}_{\text{ВНЕШ}}$ . Последняя может быть представлена как совокупность следующих работ:

$$dA_{\text{Внеш}} = dA_{P_\tau} + dA_{P_n} + dA_{M_P}.$$

Работа момента  $M_P$  равна нулю в силу отсутствия при функционировании устройства разворота платформы. Так как сила  $\vec{P}_n$  перпендикулярна элементарному перемещению полюса  $C$ , работа данной силы так же равна нулю.

В соответствие с (66) каждый из приводов преодолевает усилия, формируемые составляющей  $\vec{P}_n$  внешней силы, соответствующие составляющие будут присутствовать в выражениях для элементарных работ каждого из приводов:

$$dA_x = dL(P_\tau \cos^2 \phi - P_n \sin \phi \cos \phi), \quad dA_y = dL(P_\tau \sin^2 \phi + P_n \sin \phi \cos \phi).$$

Отсутствие этих составляющих в выражении (67) для суммарной работы приводов с физической точки зрения соответствует процессу рекуперации: положительная работа « $+dLP_n \sin \phi \cos \phi$ » одного из приводов требует потребления энергии из некоторого источника, отрицательная работа « $-dLP_n \sin \phi \cos \phi$ » друго-

го привода соответствует возврату такого же количества энергии в источник. Однако, приводы, используемые в реальном технологическом оборудовании, способны только потреблять энергию от внешнего источника, следовательно рекуперация энергии в реальном оборудовании наблюдаться не будет.

Введем понятие полезной составляющей энергии, потребляемой приводом. Данная энергия  $dW_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}}$  является частью полной потребляемой приводом энергии и используется для совершения работы по элементарному перемещению полюса платформы при действии внешней силы. В связи с отсутствием рекуперации, будем считать полезную энергию положительной величиной:

$$dW_{\text{Прив.Х}}^{\text{Полезн}} = |dA_x| = |(P_\tau \cos \phi - P_n \sin \phi)dL \cos \phi|;$$

$$dW_{\text{Прив.У}}^{\text{Полезн}} = |dA_y| = |(P_\tau \sin \phi + P_n \cos \phi)dL \sin \phi|.$$

Суммарная полезная энергия, потребляемая приводами, равна

$$dW_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}} = dW_{\text{Прив.Х}}^{\text{Полезн}} + dW_{\text{Прив.У}}^{\text{Полезн}} = |(P_\tau \cos \phi - P_n \sin \phi)dL \cos \phi| + |(P_\tau \sin \phi + P_n \cos \phi)dL \sin \phi|. \quad (68)$$

Так как сумма модулей двух чисел не меньше модуля суммы этих чисел, то

$$dW_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}} \geq |dA_{\text{Прив}}|,$$

или, с учетом равенства  $dA_{\text{Прив}}$  и  $dA_{\text{Внеш}}$ ,

$$dW_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}} \geq |dA_{\text{Внеш}}|.$$

Положительно определенную величину  $|dA_{\text{Внеш}}|$  назовем требуемой работой  $dA_{\text{Треб}}$ . Тогда

$$dW_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}} \geq dA_{\text{Треб}}, \quad (69)$$

т. е. требуемая работа определяет минимум энергии, которая будет затрачена приводами на совершение заданного элементарного перемещения при известном внешнем воздействии.

Пусть угол между направлениями силы  $\vec{P}_{\text{Внеш}}$  и элементарного перемещения  $d\vec{L}$  постоянен, т. е.  $P_\tau = \text{const}$  и  $P_n = \text{const}$  при любом значении угла  $\phi$ . Рассмотр-

рим характер зависимости суммарной полезной энергии (68) от угла  $\phi$ , изменяющегося от 0 до 90 градусов. Очевидно, что для рассматриваемого диапазона изменения угла  $\phi$  работа  $dA_x$ , будет положительным. Знак работы  $dA_y$  определяется следующим образом:

$$dA_y \geq 0, \text{ если } \operatorname{tg}\phi \leq \frac{P_\tau}{P_n}.$$

Таким образом, для угла  $\phi$ , изменяющегося от 0 до  $\phi = \operatorname{arctg} \frac{P_\tau}{P_n}$ , можно записать, что

$$\begin{aligned} dW_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}} &= |dA_x| + |dA_y| = |dA_x + dA_y| = |(P_\tau \cos \phi - P_n \sin \phi)dL \cos \phi + \\ &+ (P_\tau \sin \phi + P_n \cos \phi)dL \sin \phi| = |P_\tau dL| = |dA_{\text{Внеш}}| = dA_{\text{Треб}} = \text{const}. \end{aligned}$$

То есть на данном интервале полезная энергия (68) принимает минимально возможное значение. Ширина интервала, на котором  $dW_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}} = dA_{\text{Треб}}$ , определяется соотношением  $P_\tau$  и  $P_n$ .

Для  $\operatorname{arctg} \frac{P_\tau}{P_n} < \phi \leq 90^\circ$  выражение (68) примет вид

$$\begin{aligned} dW_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}} &= |dA_x| + |dA_y| = |-dA_x + dA_y| = |-(P_\tau \cos \phi - P_n \sin \phi)dL \cos \phi + \\ &+ (P_\tau \sin \phi + P_n \cos \phi)dL \sin \phi| = |(P_n \sin 2\phi - P_\tau \cos 2\phi)dL|. \end{aligned} \quad (70)$$

Как видно из (70), на интервале  $\operatorname{arctg} \frac{P_\tau}{P_n} < \phi \leq 90^\circ$  энергия  $dW_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}}$  не является величиной постоянной. Приравняв к нулю производную  $\frac{d(dW_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}})}{d\phi}$ , можно опре-

делить экстремальное значение энергии на этом интервале:

$$dW_{\text{Прив}}^{\text{Полезн. Экстр}} = \left| -dL \sqrt{P_\tau^2 + P_n^2} \right| = P_{\text{ВНЕШ}} dL. \quad (71)$$

Экстремум достигается при  $\phi_{\text{Экстр}} = -0,5 \operatorname{arctg} \frac{P_n}{P_\tau}$ . Значение  $\phi_{\text{Экстр}}$  должно рассчитываться с учетом границ интервала изменения угла  $\phi$  и периодичности

функции тангенса. Так как период этой функции составляет  $180^\circ$ , то на рассматриваемом интервале экстремум будет единственным.

Так как на границах интервала  $\operatorname{arctg} \frac{P_\tau}{P_n} < \phi \leq 90^\circ$  энергия (68) равна:

$$\begin{aligned} dW_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}} \Big|_{\phi \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{P_\tau}{P_n} + 0} &= \lim_{\phi \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{P_\tau}{P_n}} \left| -(P_\tau \cos \phi - P_n \sin \phi) dL \cos \phi + \right. \\ &\quad \left. + (P_\tau \sin \phi + P_n \cos \phi) dL \sin \phi \right| = \\ &= \lim_{\phi \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{P_\tau}{P_n}} \frac{P_n \operatorname{tg} \phi - P_\tau}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} \frac{dL}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} + \frac{P_n + P_\tau \operatorname{tg} \phi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} \frac{dL \operatorname{tg} \phi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} = \\ &= \frac{P_n \frac{P_\tau}{P_n} - P_\tau}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} dL + \frac{(P_n + P_\tau \frac{P_\tau}{P_n}) \frac{P_\tau}{P_n}}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} dL = 0 + \frac{(P_n + P_\tau \frac{P_\tau}{P_n}) \frac{P_\tau}{P_n} P_n^2}{P_n^2 + P_\tau^2} dL = \\ &= \frac{(P_n^2 + P_\tau^2) P_\tau}{P_n^2 + P_\tau^2} dL = P_\tau dL; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dW_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}} \Big|_{\phi=90^\circ} &= \left| -(P_\tau \cos 90^\circ - P_n \sin 90^\circ) dL \cos 90^\circ + \right. \\ &\quad \left. + (P_\tau \sin 90^\circ + P_n \cos 90^\circ) dL \sin 90^\circ \right| = P_\tau dL, \end{aligned}$$

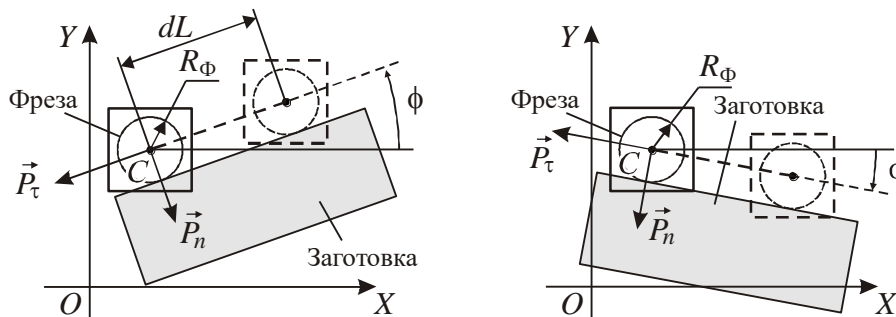
и  $P_{\text{ВНЕШ}} \geq P_\tau$ , то экстремальное значение (71) полезной энергии является максимумом.

Таким образом, на интервале  $\operatorname{arctg} \frac{P_\tau}{P_n} < \phi \leq 90^\circ$  полезная энергия (68) будет не меньше требуемой работы. Степень превышения  $dW_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}}$  над  $dA_{\text{Треб}}$  определяется соотношением величин  $P_\tau$  и  $P_n$ , а также углом  $\phi$ . При постоянных  $P_\tau$  и  $P_n$  за счет изменения угла  $\phi$  может обеспечиваться уменьшение  $dW_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}}$  вплоть до  $dA_{\text{Треб}}$ .

Рассмотрим, как может быть использован полученный результат применительно к операции плоского фрезерования. Пусть на платформе рассматриваемого механизма расположен шпиндель с установленной фрезой радиусом  $R_\phi$ , причем продольная ось фрезы перпендикулярна плоскости  $OXY$  и проходит через полюс

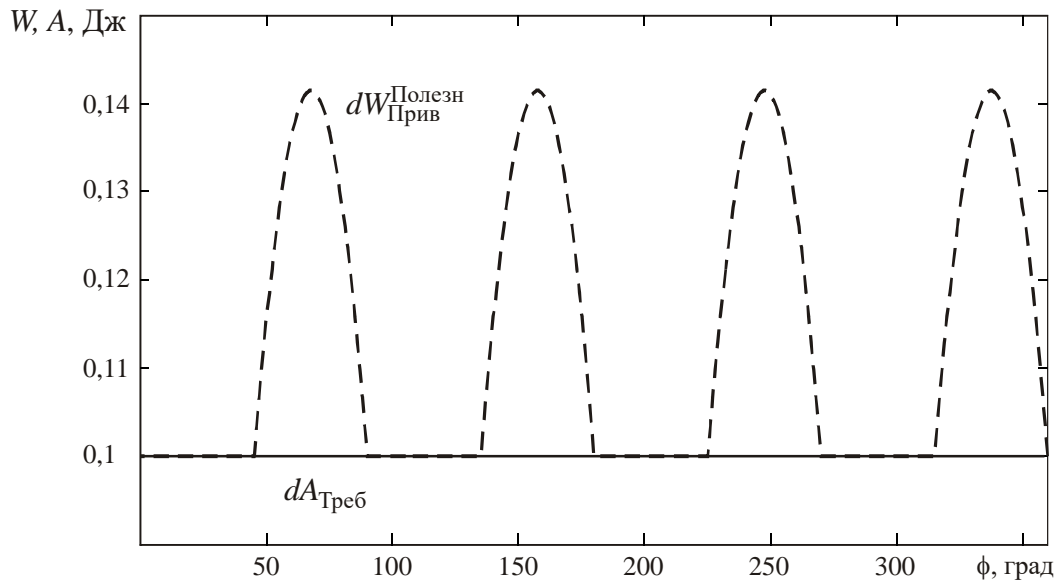
С. Внешняя сила в этом случае будет являться силой резания, возникающей при обработке фрезой некоторой заготовки.

На рисунке 59 показаны два из множества возможных положений заготовки на неподвижном столе фрезерного станка и перемещений фрезы, при которых обеспечивается выполнение одной и той же операции фрезерования на участке длиной  $dL$ . Положение заготовки и, следовательно, направление перемещения фрезы при фрезеровании определяется углом  $\phi$ . Принятое ранее условие о постоянстве угла между направлением действия внешней силы и перемещения  $d\vec{L}$  выполняется.



**Рисунок 59 – Варианты реализации технологической операции**

На рисунке 60 показаны результаты расчетов полезной энергии (68), которая будет потребляться приводами при различных направлениях движения фрезы, определяемых углом  $\phi$ , для случая  $P_\tau = 100\text{Н}$ ,  $P_n = 100\text{Н}$ ,  $dL = 1\text{мм}$ . Как видно из графика, за счет изменения направления движения фрезы эта энергия может быть снижена вплоть до величины требуемой работы. Так как направление движения фрезы определяется положением заготовки, то можно говорить, что расположение заготовки является фактором, влияющим на затраты энергии при фрезеровании. В работе [87] даны рекомендации по рациональному, с точки зрения снижения затрат энергии, размещению заготовки. В частности, рекомендуется располагать заготовку таким образом, чтобы движение фрезы при обработке обеспечивалось работой одного из приводов, что соответствует  $\phi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ . В этом случае полезная энергия будет равна требуемой работе.



**Рисунок 60 – Зависимость энергии, потребляемой приводами, от направления перемещения фрезы**

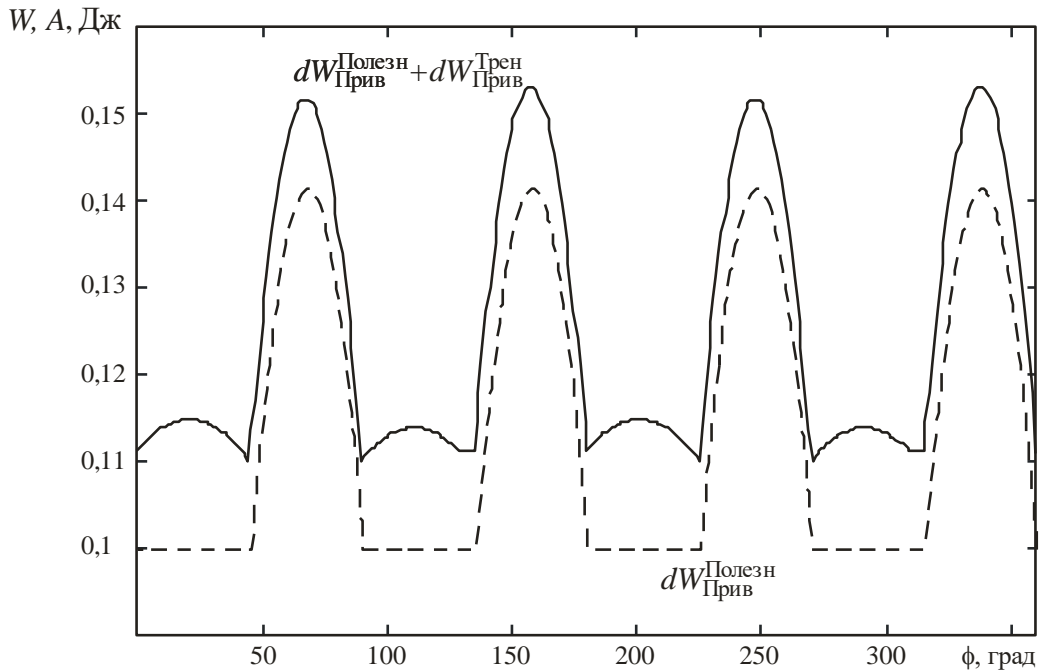
В реальном оборудовании часть потребляемой приводами энергии будет тратиться на преодоление сил трения, возникающих при его функционировании. Особенностью оборудования, построенного по рассматриваемой последовательной кинематической схеме (см. рисунок 57), является возникновение сил трения, обусловленных действующей на элементы каждой из передач поперечной нагрузкой. Для привода Y поперечной силой является составляющая  $P_x$  внешней силы, которая вызовет появление силы трения  $f_{Тр}P_x$ , направленной против приращения  $dy$ . Здесь  $f_{Тр}$  – коэффициент трения. Так как привод X помимо шпинделя, расположенного на платформе, осуществляет перемещение и элементов привода Y, то поперечной силой него будет являться сумма  $f_{Тр}P_x + P_y$ . Сила трения, преодолеваемая приводом X, будет равна  $f_{Тр}(f_{Тр}P_x + P_y)$ . Затрачиваемая на преодоления этих сил трения энергия равна

$$dW_{Прив}^{Трен} = \left| f_{Тр}(P_\tau \cos \phi - P_n \sin \phi) dL \sin \phi \right| + \\ + \left| f_{Тр}((P_\tau \sin \phi + P_n \cos \phi) + f_{Тр}(P_\tau \cos \phi - P_n \sin \phi)) dL \cos \phi \right|.$$

Данная энергия зависит от величин  $P_\tau$ ,  $P_n$ , и  $\phi$ , следовательно, можно ставить и решать задачу ее уменьшения за счет изменения угла  $\phi$ . На рисунке 61 показан график изменения суммарной работы  $dW_{Прив}^{Полезн} + dW_{Прив}^{Трен}$  в зависимости от

угла  $\phi$ , построенный для принятых выше значений  $P_\tau$ ,  $P_n$ , и  $dL$  при  $f_{\text{Гр}} = 0,1$ .

Характер изменения суммарной работы  $dW_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}} + dW_{\text{Прив}}^{\text{Трен}}$  при изменении угла  $\phi$  мало отличается от показанного на рисунке 60 характера изменения полезной работы: имеются участки, на которых энергия близка к минимальному значению, максимум суммарной энергии достигается при том же значении угла  $\phi$ , что и максимум полезной работы.



**Рисунок 61 – Зависимость энергии, потребляемой приводами, от направления перемещения фрезы (с учетом сил трения)**

Обработка криволинейных поверхностей может рассматриваться как последовательная обработка элементарных линейных участков. Однако, для снижения потребляемой приводами энергии потребуется осуществлять поворот заготовки на столе станка при переходе к обработке каждого из этих участков, т. е. возникает необходимость введения дополнительных конструктивных элементов, в том числе дополнительного привода, обеспечивающего поворот заготовки. Последнее ведет к увеличению количества степеней свободы (выходных координат) оборудования до трех: двух линейных и одной поворотной. Причем поворотная степень свободы для выполнения операции фрезерования является избыточной. Наличие избыточной степени свободы позволяет придать оборудованию новое качество –



возможность реализации на нем технологической операции фрезерования с более высокой энергоэффективностью.

Приведенный выше набор степеней свободы (две линейные и одна поворотная) соответствует плоскому МПКЦ, рассмотренному в разделе 2.1.2. Целесообразно провести анализ возможности придания ОПКС, выполненному на основе этого и других МПКЦ, дополнительных качеств за счет избыточности степеней свободы.

### 3.2. Избыточность координат и повышение эффективности в оборудовании на основе плоского механизма с параллельными кинематическими цепями

Рассмотрим плоский МПКЦ, показанный на рисунке 62. Как было отмечено в разделе 2.1.2, этот механизм имеет три степени свободы. Входными координатами для него будем считать длины его штанг  $L_j = \sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2}$ , где координаты шарниров  $A_j$ ,  $B_j$  задаются в произвольной СК, например, в неподвижной СК  $OXY$ .

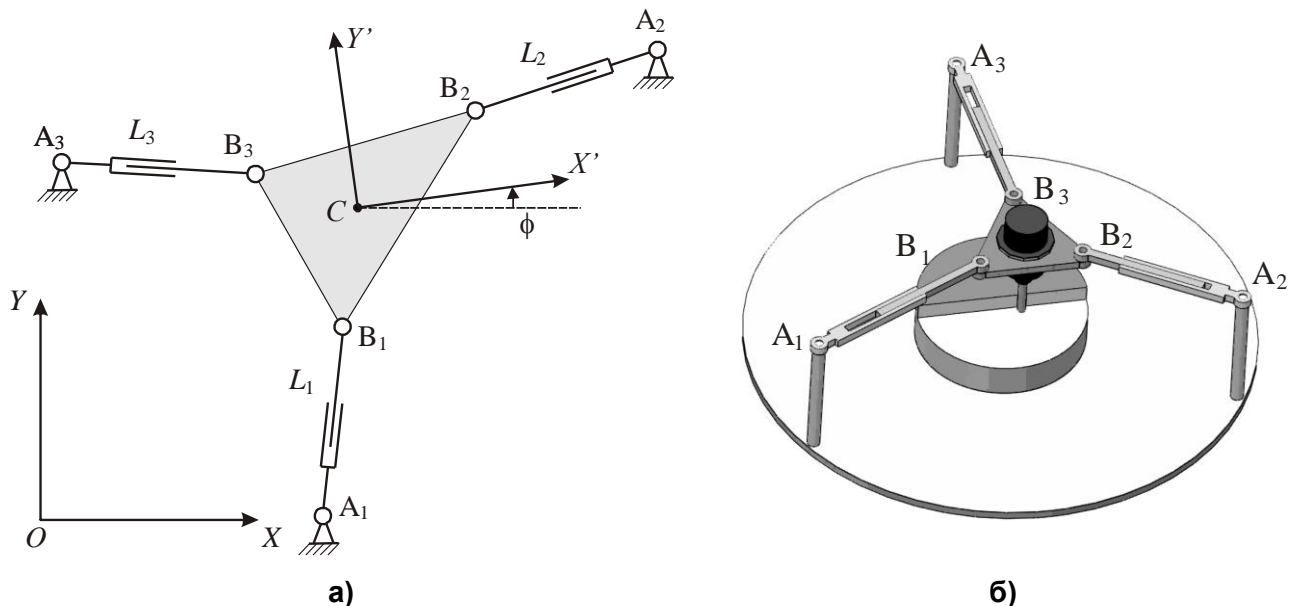


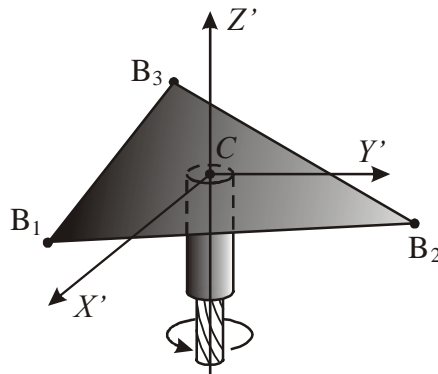
Рисунок 62 – Плоский МПКЦ с 3-мя степенями свободы:  
а) – кинематическая схема; б) – упрощенная 3D модель

В качестве выходных примем линейные (декартовы) координаты  $(x_C, y_C)$  точки  $C$  подвижной платформы в неподвижной СК  $OXY$ , а также угол  $\phi$ , харак-

теризующий разворот платформы относительно точки  $C$ . СК  $CX'Y'$  связана с подвижной платформой.

В технологическом оборудовании, построенном на основе рассматриваемого механизма, рабочий орган может перемещаться по трем координатам: двум линейным и одной угловой. Однако при выполнении некоторых технологических операций реализация управляемого движения по трем координатам может не требоваться [90].

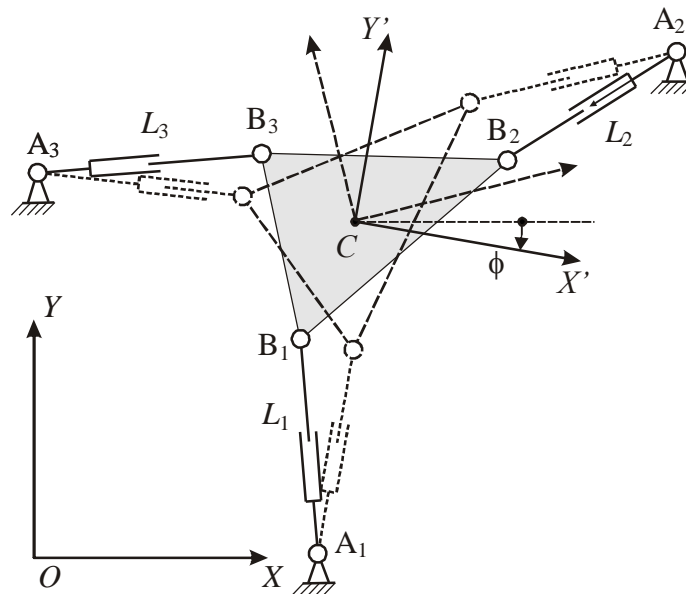
Пусть на подвижной платформе механизма установлен шпиндельный узел с вращающимся инструментом, например, фрезой (рисунок 63). Примем, что ось  $CZ'$ , дополняющая связанную с платформой СК до правой, является продольной осью вращения инструмента, установленного на подвижной платформе.



**Рисунок 63 – Вращающийся инструмент, установленный на подвижной платформе**

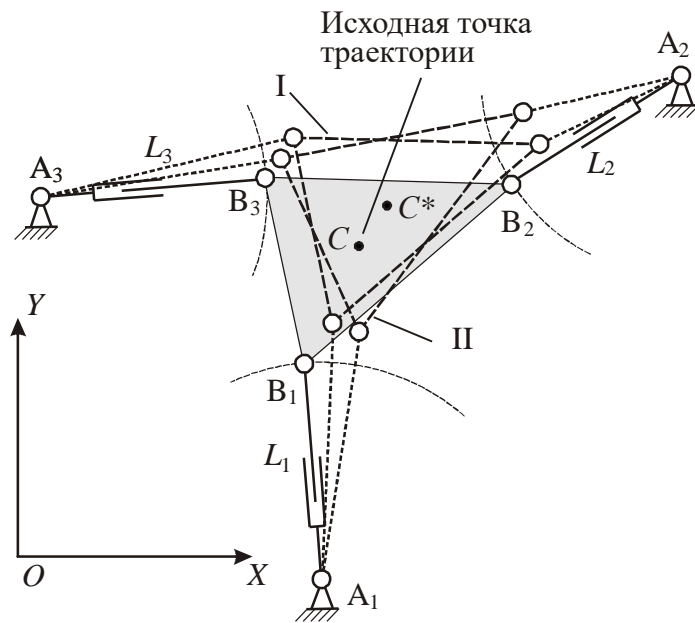
Очевидно, что при реализации фрезерных операций требуется перемещение шпинделя по двум линейным координатам; изменение выходной координаты  $\phi$  при неизменных координатах  $x_C$  и  $y_C$  не нарушит выполнение оборудованием своих функций. Состояния механизма, показанные на рисунке 64, для выполнения фрезерных операций равнозначны, так как координаты продольной оси инструмента определяются только величинами  $x_C$ ,  $y_C$  и в обоих случаях равны. Следовательно, угловая координата  $\phi$  является избыточной: при выполнении операции фрезерования она не используется и рассматриваемый МПКЦ может быть заменен механизмом, имеющим две степени свободы, например, показанным на рисунке 22. По аналогии с рассмотренным выше плоским механизмом, имеющим незамкнутую кинематическую схему, наличие избыточной координаты может

быть использовано для снижения энергии, потребляемой приводами, а также для придания оборудованию иных качеств, повышающих эффективность выполнения технологических операций [71].



**Рисунок 64 – Примеры различных конфигураций МПКЦ, обеспечивающих выполнение одинаковых функций**

Рассмотрим переход МПКЦ из некоторого исходного состояния, характеризуемого набором выходных координат  $x_C^I$ ,  $y_C^I$ ,  $\phi^I$ , в показанные на рисунке 65 состояния I и II. Значения выходных координат для этих состояний можно определить как  $x_C^I = x_C^II$ ,  $y_C^I = y_C^II$ ,  $\phi^I = \phi^II \neq \phi^II$ , т. е. состояния I и II отличаются только значениями угловой выходной координаты  $\phi$  и при выполнении технологической операции фрезерования равнозначны. Однако, переход из исходного в состояние II потребует меньшего, по сравнению с переходом в состояние I изменения  $\Delta L_j$  длин штанг  $L_j$ . Следовательно, при прочих равных условиях, переход в состояние II может быть выполнен за меньшее время, т. е. за счет рационального изменения выходной координаты  $\phi$  может быть обеспечено повышение производительности оборудования, построенного на основе рассматриваемого МПКЦ.



**Рисунок 65 – Переход МПКЦ в равнозначные для выполнения фрезерных операций состояния**

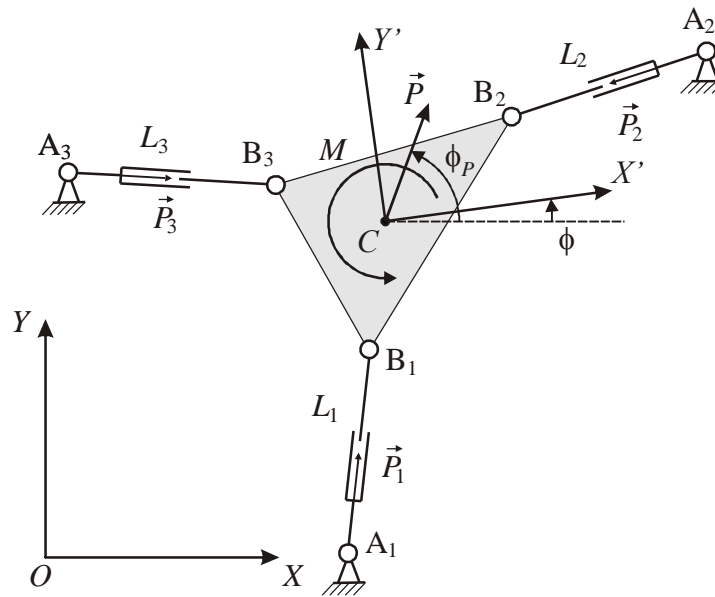
Закон изменения  $L$ -координат, реализующий критерий

$$\max(\Delta L_j(\phi)) \rightarrow \min, \quad (72)$$

при котором за счет изменения избыточной выходной координаты  $\phi$  минимизируется максимальное из изменений длин штанг, обеспечивающих переход МПКЦ из одного состояния в другое, назовем оптимальным по приращению входных координат [83].

Так как расчет изменения длин штанг механизма производится при решении обратной задачи кинематики, то для реализации оптимального по приращению входных координат закона (72) достаточно иметь информацию о требуемой траектории движения инструмента и учитывать кинематические ограничения МПКЦ на величину выходной координаты  $\phi$ .

При выполнении технологических операций на подвижную платформу механизма будет оказываться внешнее силовое воздействие. Источником данного воздействия могут быть, например, силы, возникающие при фрезеровании. Примем, что к платформе приложено внешнее воздействие, которое можно привести к силе  $\vec{P}$ , приложенной в полюсе  $C$  платформы, и моменту  $\vec{M}$  (рисунок 66).



**Рисунок 66 – Внешнее силовое воздействие в плоском МПКЦ с 3-мя степенями свободы**

Данное воздействие вызовет появление сил реакций  $\vec{P}_j$ , которые будут растягивать или сжимать штанги данного механизма. Усилия приводов в ОПКС, построенном на основе МПКЦ, можно принять равными силам  $\vec{P}_j$ , если не учитываются силы трения и динамические нагрузки, возникающие при движении элементов ОПКС. В этом случае связь между усилиями приводов в рассматриваемом механизме и внешним воздействием устанавливается следующей системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + a_{13}P_3 = -P \cos \phi_P; \\ a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + a_{23}P_3 = -P \sin \phi_P; \\ a_{31}P_1 + a_{32}P_2 + a_{33}P_3 = -M, \end{cases} \quad (73)$$

$$\text{где } a_{1j} = \frac{x_{B_j} - x_{A_j}}{\sqrt{(x_{B_j} - x_{A_j})^2 + (y_{B_j} - y_{A_j})^2}}; \quad a_{2j} = \frac{y_{B_j} - y_{A_j}}{\sqrt{(x_{B_j} - x_{A_j})^2 + (y_{B_j} - y_{A_j})^2}};$$

$$a_{3j} = \frac{(x_{B_j} - x_{A_j})y_C - (y_{B_j} - y_{A_j})x_C + x_{A_j}y_{B_j} - x_{B_j}y_{A_j}}{\sqrt{(x_{B_j} - x_{A_j})^2 + (y_{B_j} - y_{A_j})^2}}.$$

Уравнения (73) представляют собой суммы проекций сил на оси СК  $OXY$  и сумму моментов сил относительно точки  $C$ ; данные уравнения составляют статическую модель рассматриваемого плоского МПКЦ. Уравнения статической модели (уравнения статики) позволяют по заданному внешнему силовому воздействию

определить усилия в штангах механизма, т. е. определить усилия приводов, которые необходимы для преодоления заданного внешнего воздействия.

Координаты шарниров  $B_j$  в неподвижной СК определяются с использованием выходных координат:

$$x_{B_j} = x'_{B_j} \cos \phi - y'_{B_j} \sin \phi + x_C, \quad y_{B_j} = x'_{B_j} \sin \phi + y'_{B_j} \cos \phi + y_C,$$

следовательно

$$\begin{aligned} a_{1j} &= \frac{x'_{B_j} \cos \phi - y'_{B_j} \sin \phi + x_C - x_{A_j}}{\sqrt{(x'_{B_j} \cos \phi - y'_{B_j} \sin \phi + x_C - x_{A_j})^2 + (x'_{B_j} \sin \phi + y'_{B_j} \cos \phi + y_C - y_{A_j})^2}}; \\ a_{2j} &= \frac{x'_{B_j} \sin \phi + y'_{B_j} \cos \phi + y_C - y_{A_j}}{\sqrt{(x'_{B_j} \cos \phi - y'_{B_j} \sin \phi + x_C - x_{A_j})^2 + (x'_{B_j} \sin \phi + y'_{B_j} \cos \phi + y_C - y_{A_j})^2}}; \\ a_{3j} &= \frac{(x'_{B_j} \cos \phi - y'_{B_j} \sin \phi + x_C - x_{A_j})y_C - (x'_{B_j} \sin \phi + y'_{B_j} \cos \phi + y_C - y_{A_j})x_C}{\sqrt{(x'_{B_j} \cos \phi - y'_{B_j} \sin \phi + x_C - x_{A_j})^2 + (x'_{B_j} \sin \phi + y'_{B_j} \cos \phi + y_C - y_{A_j})^2}} + \\ &+ \frac{(x'_{B_j} \sin \phi + y'_{B_j} \cos \phi + y_C)x_{A_j} - (x'_{B_j} \cos \phi - y'_{B_j} \sin \phi + x_C)y_{A_j}}{\sqrt{(x'_{B_j} \cos \phi - y'_{B_j} \sin \phi + x_C - x_{A_j})^2 + (x'_{B_j} \sin \phi + y'_{B_j} \cos \phi + y_C - y_{A_j})^2}} = \\ &= \frac{(x'_{B_j} \cos \phi - y'_{B_j} \sin \phi)(y_C - y_{A_j}) - (x'_{B_j} \sin \phi + y'_{B_j} \cos \phi)(x_C - x_{A_j})}{\sqrt{(x'_{B_j} \cos \phi - y'_{B_j} \sin \phi + x_C - x_{A_j})^2 + (x'_{B_j} \sin \phi + y'_{B_j} \cos \phi + y_C - y_{A_j})^2}}. \end{aligned} \quad (74)$$

Здесь координаты  $(x'_{B_j}, y'_{B_j})$  шарниров  $B_j$  заданы в связанной с подвижной платформой СК  $CX'Y'$  и являются константами.

Анализ выражений для  $a_{ij}$  показывает, что усилия приводов при заданных силе  $\vec{P}$  и моменте  $\vec{M}$  зависят от значений выходных координат. Таким образом, изменение выходной координаты  $\phi$  при неизменных значениях  $x_C$ ,  $y_C$  может привести к изменению (перераспределению) усилий в штангах механизма, что позволяет ставить и решать задачу минимизации этих усилий. При наличии ограничений на усилия, создаваемые приводами, целесообразно реализовывать закон изменения длин штанг, при котором обеспечивается выполнение критерия

$$\max |P_j(\phi)| \rightarrow \min. \quad (75)$$

Данный закон изменения  $L$ -координат назовем оптимальным по усилию.

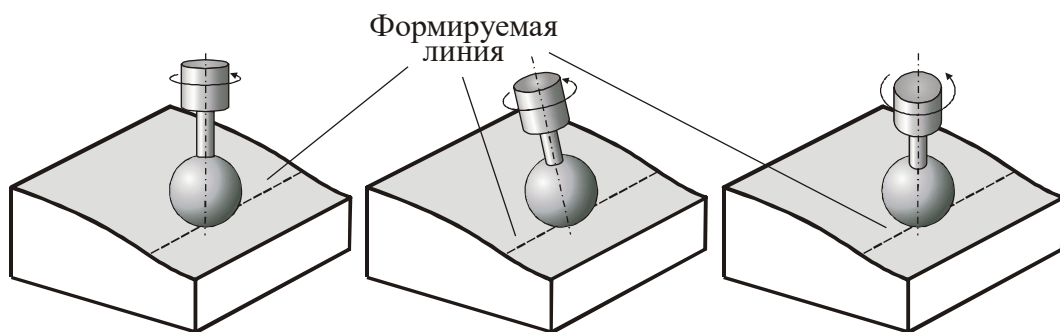
В общем случае можно говорить об энергоэффективном законе изменения  $L$ -координат [85]:

$$W(\phi) = \sum |\Delta L_j(\phi) P_j(\phi)| \rightarrow \min, \quad (76)$$

при котором решается задача минимизации энергии, необходимой для перемещения платформы, на которую осуществляется внешнее силовое воздействие:

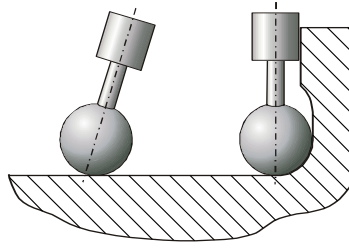
Для реализации законов изменения  $L$ -координат (75) и (76) необходима информация о внешних силовых факторах, действующих на выходное звено механизма. Эта информация может быть получена, например, при моделировании предполагаемой к выполнению технологической операции.

Так как избыточность выходных координат является не только особенностью конкретного МПКЦ, но определяется и реализуемой с его помощью технологической операцией, то она характерна не только для рассматриваемого плоского МПКЦ. При многокоординатной обработке материалов часто используются фрезы, имеющие режущую поверхность в виде части сферы [27]. На рисунке 67 показано формирование с помощью такой фрезы одной и той же линейчатой поверхности детали. Сферичность режущей кромки позволяет изменять в некоторых пределах угловые координаты, определяющие ориентацию инструмента. Пределы изменения углов наклона фрезы определяются кинематическими возможностями оборудования, а также особенностями детали (рисунок 68).



**Рисунок 67 – Формирование одной и той же линейчатой поверхности (в пределе – линии) при различных ориентациях сферического инструмента**

Если для построения оборудования использованы пространственные МПКЦ, например, гексапод, то при выполнении фрезерования в качестве избыточных могут рассматриваться от одной до трех угловых выходных координат.



**Рисунок 68 – Ограничение угла наклона фрезы, вызванное особенностью детали**

Законы изменения  $L$ -координат, обеспечивающие выполнение критериев (72), (75) и (76), направлены на решение следующих задач по повышению эффективности ОПКС, сформулированных в разделе 1.3:

- увеличение скорости перемещения (подачи) инструмента без увеличения мощности приводов подач;
- перераспределение энергии приводов подач с целью обеспечения требуемых режимов обработки при ограниченной мощности приводов подач и уменьшения нагрузок на элементы оборудования с параллельной кинематической структурой, включая его приводы;
- снижение потребления энергии приводами подач.

Как отмечено ранее, эти задачи могут решаться с помощью алгоритмов управления верхнего уровня. При управлении верхнего уровня обычно не рассматриваются входные координаты для используемой математической модели оборудования, а ставятся задачи для приводов, обеспечивающих формирование этих координат. В связи с этим в дальнейшем законы изменения  $L$ -координат, обеспечивающие выполнение критериев (72), (75) и (76), а так же аналогичные, сформированные для других МПКЦ, будем называть законами управления приводными устройствами.

Практическая реализация любого из описанных выше оптимальных законов управления приводными устройствами должна учитывать особенность МПКЦ, связанную с возможностью его попадания в особое положение.



### 3.3. Особые положения в механизмах с параллельными кинематическими цепями

Под особым положением механизма понимают такое положение его звеньев, при котором количество независимых уравнений в кинематической модели механизма становится меньше количества его степеней свободы [26, 78, 101], рассчитанного, например, с помощью формулы Сомова–Малышева. Так как количество независимых уравнений в кинематической модели механизма должно совпадать с количеством его независимых входных (управляемых) координат, то в особом положении будет возможно только зависимое изменение входных координат. Это иллюстрирует рисунок 69, на котором показано одно из возможных особых положений простейшего МПКЦ, рассмотренного в разделе 2.1.1: в случае, когда штанги механизма лежат на одной прямой, изменение положения точки В возможно только при одинаковом изменении длин обеих штанг. Обоснование характера данного положения звеньев простейшего МПКЦ как «особого» будет приведено ниже.

Исследование МПКЦ на особые положения сводится к исследованию уравнений его кинематической модели на независимость. Так как особое положение характеризуется зависимостью изменения входных координат, уравнения кинематической модели целесообразно представить в виде функций, определяющих входные координаты через выходные.

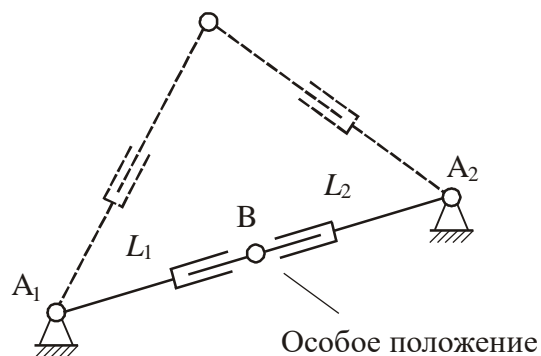


Рисунок 69 – Особое положение в простейшем МПКЦ

Исследование функций  $u_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $j = 1 \dots m$  от  $n$  переменных на независимость проводится с использованием матрицы Якоби вида [12]

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \dots & \frac{df_2}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{df_m}{dx_1} & \frac{df_m}{dx_2} & \dots & \frac{df_m}{dx_n} \end{bmatrix}. \quad (77)$$

Если количество  $m$  функций  $u_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $j = 1 \dots m$  меньше, чем число переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , эти функции будут независимы в случае, если хотя бы один определитель  $m$ -го порядка матрицы (77) отличен от нуля. В общем случае число независимых функций будет равно рангу матрицы Якоби.

В частном, но достаточно широко распространенном на практике случае равенства количества функций и количества переменных, матрица Якоби становится квадратной; при этом аналитическим признаком независимости функций будет неравенство нулю определителя матрицы Якоби, называемого Якобианом или функциональным определителем [12].

Кинематическая модель простейшего МПКЦ, показанного на рисунке 69, имеет следующий вид:

$$L_1 = \sqrt{(x_{A_1} - x_B)^2 + (y_{A_1} - y_B)^2};$$

$$L_2 = \sqrt{(x_{A_2} - x_B)^2 + (y_{A_2} - y_B)^2},$$

где  $L_1 = |A_1B|$ ,  $L_2 = |A_2B|$  – входные координаты МПКЦ;  $x_B, y_B$  – его выходные координаты. В этом случае матрица Якоби будет равна:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{dL_1}{dx_B} & \frac{dL_1}{dy_B} \\ \frac{dL_2}{dx_B} & \frac{dL_2}{dy_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_{A_1} - x_B}{\sqrt{(x_{A_1} - x_B)^2 + (y_{A_1} - y_B)^2}} & \frac{y_{A_1} - y_B}{\sqrt{(x_{A_1} - x_B)^2 + (y_{A_1} - y_B)^2}} \\ \frac{x_{A_2} - x_B}{\sqrt{(x_{A_2} - x_B)^2 + (y_{A_2} - y_B)^2}} & \frac{y_{A_2} - y_B}{\sqrt{(x_{A_2} - x_B)^2 + (y_{A_2} - y_B)^2}} \end{bmatrix}.$$

Так как данный механизм имеет две степени свободы, то критерием особого положения будет снижение ранга матрицы Якоби до 1, что, в силу квадратного вида матрицы Якоби возможно при равенстве нулю определителя этой матрицы:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{J}| &= \begin{vmatrix} \frac{dL_1}{dx_B} & \frac{dL_1}{dy_B} \\ \frac{dL_2}{dx_B} & \frac{dL_2}{dy_B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_{A_1} - x_B}{\sqrt{(x_{A_1} - x_B)^2 + (y_{A_1} - y_B)^2}} & \frac{y_{A_1} - y_B}{\sqrt{(x_{A_1} - x_B)^2 + (y_{A_1} - y_B)^2}} \\ \frac{x_{A_2} - x_B}{\sqrt{(x_{A_2} - x_B)^2 + (y_{A_2} - y_B)^2}} & \frac{y_{A_2} - y_B}{\sqrt{(x_{A_2} - x_B)^2 + (y_{A_2} - y_B)^2}} \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{(x_{A_1} - x_B)(y_{A_2} - y_B) - (x_{A_2} - x_B)(y_{A_1} - y_B)}{\sqrt{(x_{A_2} - x_B)^2 + (y_{A_2} - y_B)^2} \cdot \sqrt{(x_{A_1} - x_B)^2 + (y_{A_1} - y_B)^2}} = 0.
 \end{aligned}$$

Равенство якобиана нулю будет наблюдаться в случае, когда

$$(x_{A_1} - x_B)(y_{A_2} - y_B) - (x_{A_2} - x_B)(y_{A_1} - y_B) = 0. \quad (78)$$

Уравнение (78) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x_{A_1} - x_B & x_{A_2} - x_B \\ y_{A_1} - y_B & y_{A_2} - y_B \end{vmatrix} = 0,$$

который является одной из форм задания прямой, проходящей через три точки  $(x_{A_1}, y_{A_1})$ ,  $(x_{A_2}, y_{A_2})$ ,  $(x_B, y_B)$  [19]. Следовательно, особое положение будет возникать в случае, когда шарнир В лежит на прямой, проходящей через шарниры  $A_1$  и  $A_2$ . Рисунок 69 соответствует случаю, когда шарнир В лежит между шарнирами  $A_1$  и  $A_2$ .

Очевидно, что в особом положении шарнир В может перемещаться только вдоль прямой  $A_2A_1$ , что достигается за счет взаимозависимого изменения длин штанг  $L_1$  и  $L_2$  в соответствии с условием

$$L_1 + L_2 = \sqrt{(x_{A_2} - x_{A_1})^2 + (y_{A_2} - y_{A_1})^2}.$$

Изменение только одной входной координаты невозможно – механизм находится в конфигурации застопоривания.

За счет изменения входных координат  $L_1$  и  $L_2$  выход из особого положения невозможен, следовательно, попадание механизма в особое положение является крайне нежелательным. Поэтому, при управлении механизмом требуется контролировать степень его приближения к особому положению: либо контролируя геометрическое положение шарнира В, либо оценивая приближение значения якобиана к нулю.

Запишем уравнения кинематической модели, связывающие входные и выходные координаты рассмотренного выше (см. рисунок 23) плоского МПКЦ с тремя степенями свободы:

$$L_j = \sqrt{(x_{A_j} - x'_{B_j} \cos \phi + y'_{B_j} \sin \phi - x_C)^2 + (y_{A_j} - x'_{B_j} \sin \phi - y'_{B_j} \cos \phi - y_C)^2}, \quad (79)$$

где  $L_j = |A_j B_j|$ ,  $j = 1 \dots 3$  – входные координаты МПКЦ;  $x_C$ ,  $y_C$ ,  $\phi$  – его выходные координаты. Получение из выражений (79) производных по выходным координатам, требующихся для формирования матрицы Якоби, труда не представляет, однако приводит к достаточно громоздким результатам вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_j}{\partial x_C} &= \frac{x_C - x_{A_j} + x'_{B_j} \cos \phi - y'_{B_j} \sin \phi}{\sqrt{(x_{A_j} - x'_{B_j} \cos \phi + y'_{B_j} \sin \phi - x_C)^2 + (y_{A_j} - x'_{B_j} \sin \phi - y'_{B_j} \cos \phi - y_C)^2}}; \\ \frac{\partial L_j}{\partial y_C} &= \frac{y_C - y_{A_j} + x'_{B_j} \sin \phi + y'_{B_j} \cos \phi}{\sqrt{(x_{A_j} - x'_{B_j} \cos \phi + y'_{B_j} \sin \phi - x_C)^2 + (y_{A_j} - x'_{B_j} \sin \phi - y'_{B_j} \cos \phi - y_C)^2}}; \\ \frac{\partial L_j}{\partial \phi} &= \frac{(x_{A_j} - x_C)(x'_{B_j} \sin \phi + y'_{B_j} \cos \phi) + (y_{A_j} - y_C)(y'_{B_j} \sin \phi - x'_{B_j} \cos \phi)}{\sqrt{(x_{A_j} - x'_{B_j} \cos \phi + y'_{B_j} \sin \phi - x_C)^2 + (y_{A_j} - x'_{B_j} \sin \phi - y'_{B_j} \cos \phi - y_C)^2}}. \end{aligned} \quad (80)$$

Учитывая, что  $L_j > 0$ , введем в рассмотрение новый набор входных для данного МПКЦ переменных

$$L_j^* = L_j^2, \quad j = 1 \dots 3.$$

Уравнения кинематической модели в этом случае существенно упростятся:

$$L_j^* = (x_{A_j} - x'_{B_j} \cos \phi + y'_{B_j} \sin \phi - x_C)^2 + (y_{A_j} - x'_{B_j} \sin \phi - y'_{B_j} \cos \phi - y_C)^2, \quad (81)$$

что приведет к упрощению выражений для частных производных:

$$\frac{\partial L_j^*}{\partial x_C} = 2(x_C - x_{A_j} + x'_{B_j} \cos \phi - y'_{B_j} \sin \phi);$$

$$\frac{\partial L_j^*}{\partial y_C} = 2(y_C - y_{A_j} + x'_{B_j} \sin \phi + y'_{B_j} \cos \phi);$$

$$\frac{\partial L_j^*}{\partial \phi} = 2(x_{A_j} - x_C)(x'_{B_j} \sin \phi + y'_{B_j} \cos \phi) + 2(y_{A_j} - y_C)(y'_{B_j} \sin \phi - x'_{B_j} \cos \phi).$$

Якобиан

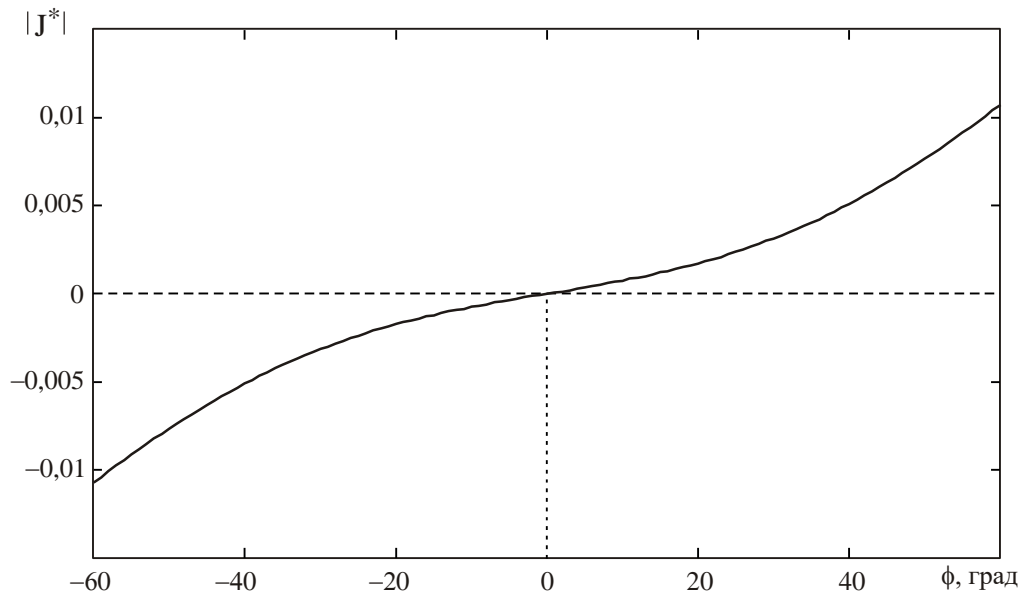
$$|\mathbf{J}^*| = \begin{vmatrix} \frac{\partial L_1^*}{\partial x_C} & \frac{\partial L_2^*}{\partial x_C} & \frac{\partial L_3^*}{\partial x_C} \\ \frac{\partial L_1^*}{\partial y_C} & \frac{\partial L_2^*}{\partial y_C} & \frac{\partial L_3^*}{\partial y_C} \\ \frac{\partial L_1^*}{\partial \phi} & \frac{\partial L_2^*}{\partial \phi} & \frac{\partial L_3^*}{\partial \phi} \end{vmatrix}, \quad (82)$$

позволит определить наступление особого положения: в случае  $|\mathbf{J}^*| = 0$  ранг матрицы Якоби станет меньше трех и будет наблюдаться зависимость уравнений (81) друг от друга. Моделирование показало, что для плоского трипода, у которого шарниры  $A_j$  равномерно расположены на окружности радиусом 200 мм, шарниры  $B_j$  – на окружности радиусом 100 мм, начало неподвижной СК совпадает с центром окружности, на которой расположены шарниры  $A_j$ , и  $x_C = -10$  мм,  $y_C = 10$  мм при изменении выходной угловой координаты  $\phi$  в пределах  $\pm 60^\circ$  наблюдается смена знака Якобиана (82) при  $\phi = 0^\circ$  (рисунок 70).

Следовательно, при данном угле поворота платформы наблюдается особое положение. Так как переход механизма через особое положение без изменения структуры этого механизма невозможен [45], то для рассматриваемого МПКЦ всегда должно выполняться условие  $\phi > 0$  или  $\phi < 0$ . Целесообразно ввести еще более жесткие условия вида:

$$|\phi| > \phi_{\text{Доп}},$$

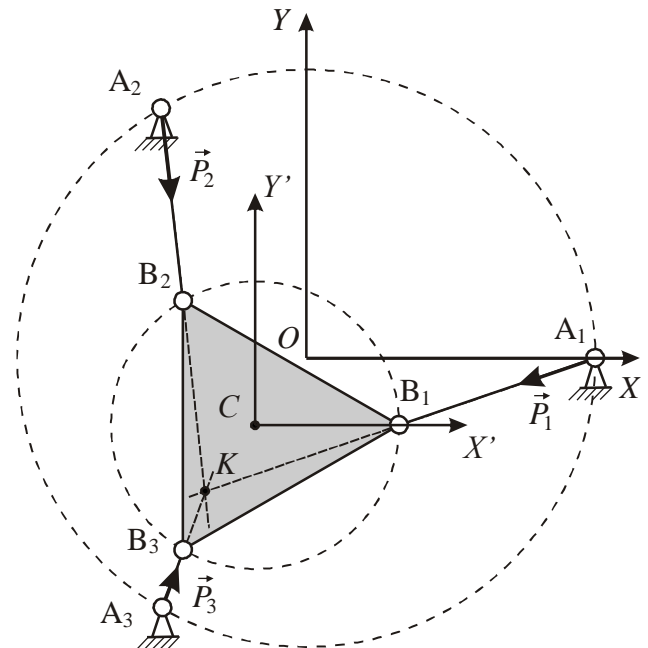
где допустимое значение  $\phi_{\text{Доп}}$  задается с учетом свойств конкретного МПКЦ. Это позволит гарантированно избежать попадания механизма в особое положение.



**Рисунок 70 – Значения Якобиана в зависимости от угла поворота платформы плоского МПКЦ**

Использование статического моделирования позволяет придать особому положению при  $\phi = 0$  следующую физическую трактовку: для рассматриваемого «равномерного» расположения шарниров  $A_j$  и  $B_j$  при любых значениях выходных координат  $x_C$  и  $y_C$  линии действия сил, возникающих в штангах, пересекаются в одной точке, если выходная координата  $\phi = 0$  (рисунок 71). Следовательно, за счет работы приводов штанг невозможно обеспечить поворот платформы по координате  $\phi$  и подвижная платформа сможет совершать только плоскопараллельные перемещения, что не позволяет вывести МПКЦ из особого положения.

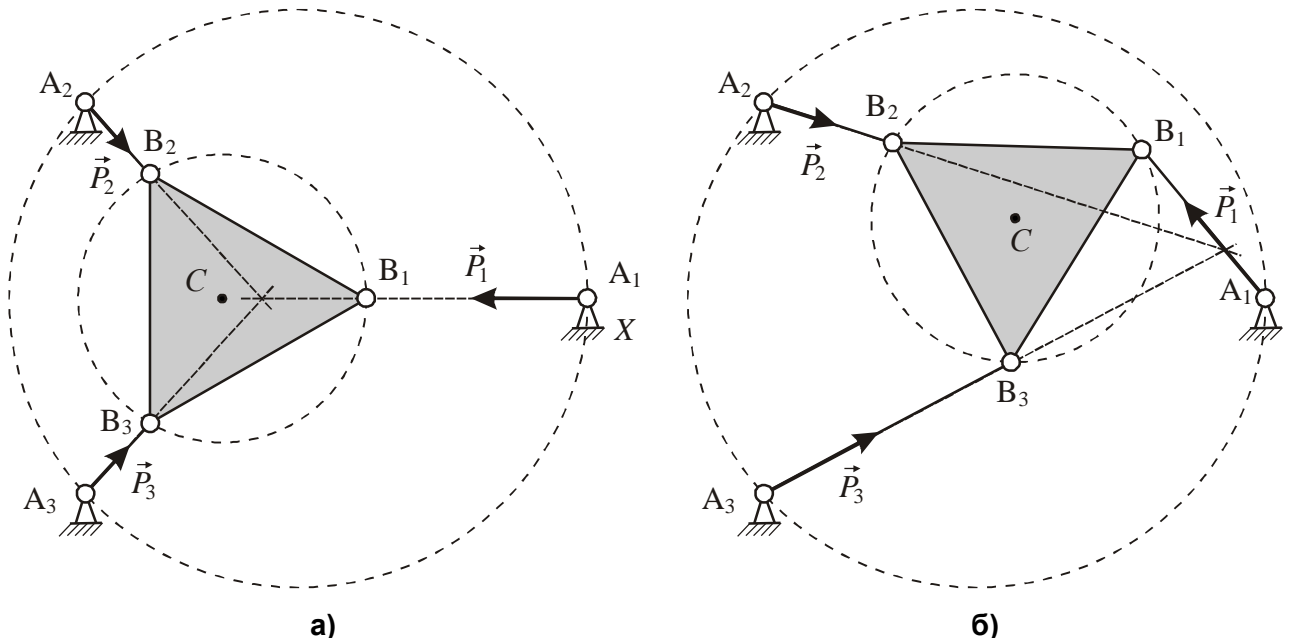
Из анализа уравнений (73) можно сформулировать признак попадания МПКЦ в особое положение. Выражения для коэффициентов  $a_{3j}$  получены исходя из



**Рисунок 71 – Пересечение линий действия сил, возникающих в штангах, в одной точке при  $\phi=0$  и «равномерном» расположении шарниров**

уравнения моментов, записанного относительно точки  $C$ . Однако, не нарушая общности, уравнение моментов можно записать относительно произвольной точки. Если в качестве этой точки выступает точка пересечения линий действия сил, возникающих в штангах (точка  $K$  на рисунке 71), то коэффициенты  $a_{3j}$  будут равны нулю. Следовательно, нулю будет равен и определитель, составленный из коэффициентов  $a_{ij}$  системы уравнений (73). Так как значение этого определителя не должно зависеть от выбора точки, относительно которой составляется уравнение моментов, то равенство его нулю может служить признаком попадания рассматриваемого МПКЦ в особое положение. Этот результат непосредственно следует из сравнения коэффициентов (74) уравнений статической модели и составляющих (80) матрицы Якоби.

При «неравномерном» расположении шарниров  $A_j$  и  $B_j$  плоского МПКЦ также возможны ситуации, когда линии действия сил реакций в штангах механизма будут пересекаться в одной точке (рисунок 72), т. е. возможны попадания механизма в особые положения.



**Рисунок 72 – Пересечение линий действия сил, возникающих в штангах, в одной точке при «неравномерном» расположении шарниров: а) – при  $\phi=0$ ; б) – при  $\phi \neq 0$**

В общем случае значение выходной угловой координаты  $\phi$ , при котором возникает особое положение, будет зависеть от выходных линейных координат

$x_C$  и  $y_C$ . Следовательно, при реализации оптимальных управлений в каждой точке траектории необходимо оценивать степень приближения Якобиана к нулю.

Применительно к пространственным МПКЦ анализ на приближение к особым положениям также осуществляется с использованием матрицы Якоби (77) или (82). Однако за счет рационального конструирования МПКЦ возможность попадания его в особое положение может быть существенно уменьшена.

### 3.4. Моделирование законов управления приводными устройствами машины на основе механизма типа «трипод»

#### 3.4.1. Закон, оптимальный по приращениям входных координат

Для оценки возможного повышения эффективности выполнения технологических операций за счет изменения  $L$ -координат ОПКС по оптимальному закону рассмотрим следующую технологическую операцию. Пусть на платформе плоского МПКЦ с тремя степенями свободы установлен шпиндельный узел, в котором закреплена цилиндрическая фреза радиусом  $R_\Phi$  (рисунок 73 и рисунок 62,б).

За счет движения центра платформы по окружности радиусом  $R$  в заготовке формируется отверстие заданного радиуса  $R_{\text{отв}} = R + R_\Phi$ . Формообразующее движение может быть описано изменением угла  $\phi_1$ . Для сравнения помимо моделирования оптимального закона управления приводными устройствами будет рассматриваться закон, при котором выходная угловая координата  $\phi$  постоянна. На рисунке 74 показан график изменения выходной угловой координаты  $\phi$ , полученный в ходе моделирования оптимального по приращению входных координат закона (72) применительно к рассматриваемой техноло-

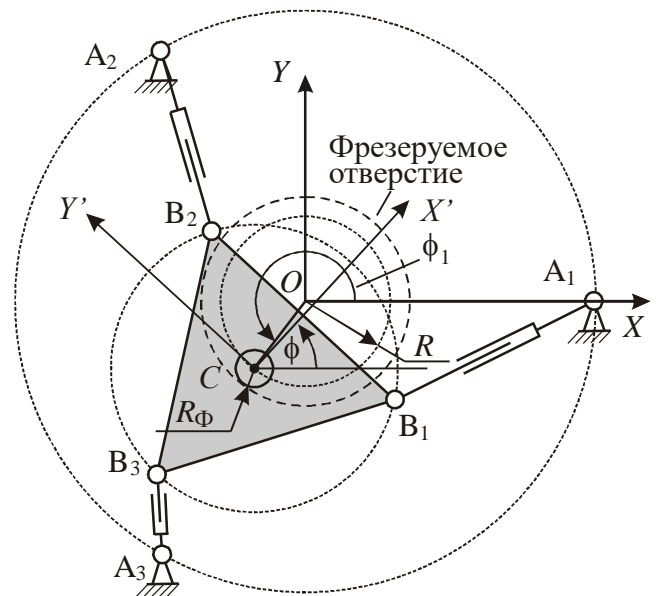
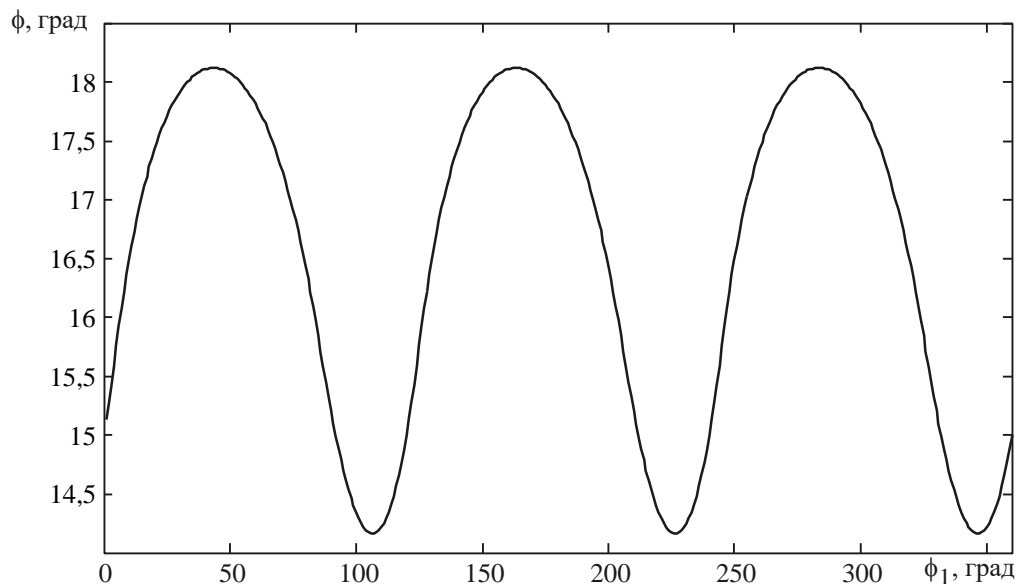


Рисунок 73 – Формирование отверстия заданного радиуса



гической операции. При моделировании принято, что шарниры основания и платформы равномерно (с шагом в  $120^\circ$ ) размещены на окружностях радиусами 200 мм и 100 мм соответственно (см. рисунок 73),  $R = 40$  мм.

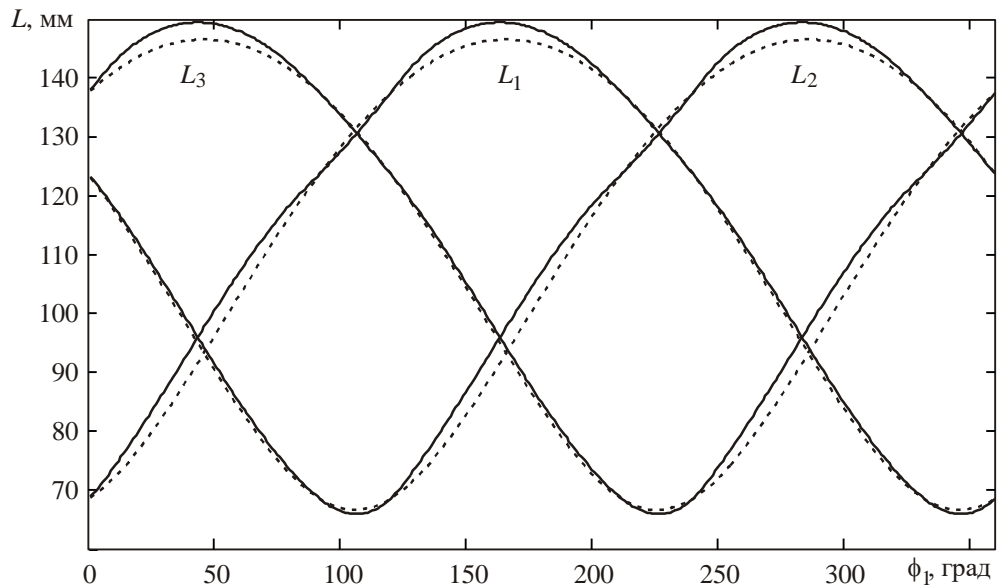
Рисунок 75 показывает характер изменения длин штанг при формировании движения инструмента по окружности радиусом  $R$  для двух случаев: для случая постоянного значения выходной угловой координаты  $\phi = 15^\circ$  и для случая изменения этой координаты с целью выполнения критерия оптимальности (72). Рисунок 75 показывает, что одна и та же траектория движения инструмента (полюса  $C$  подвижной платформы рассматриваемого плоского МПКЦ) может быть получена при различных законах изменения длин штанг. Данная особенность определяется наличием избыточной управляемой координаты.



**Рисунок 74 – Изменение выходной угловой координаты  $\phi$  при оптимальном по приращению входных координат законе управления приводными устройствами**

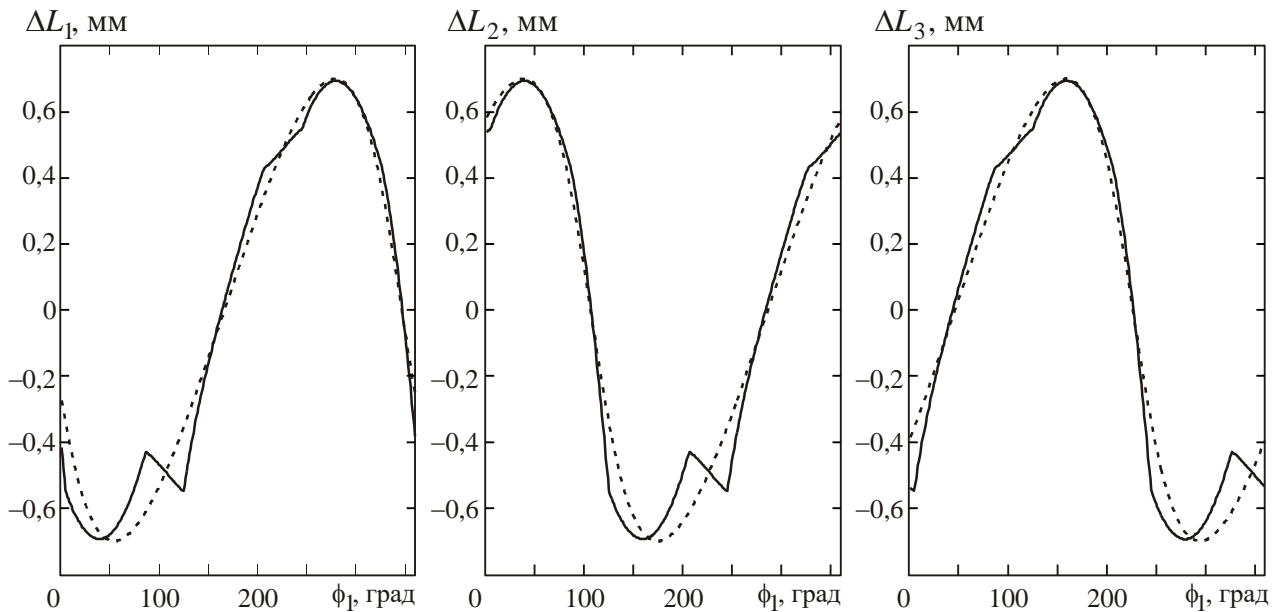
В некоторых МПКЦ получение одной и той же траектории при различных законах изменения входных координат не требует избыточности управляющих координат, а является следствием особенностей этих МПКЦ [57].

Рисунок 76 иллюстрирует изменения  $\Delta L_j$  длин штанг МПКЦ в рассматриваемом случае формирования движения инструмента по окружности.



**Рисунок 75 – Законы изменения штанг при формировании движения инструмента по окружности: ---- –  $\phi = \text{const}$ , — –  $\phi$  изменяется с целью выполнения критерия (72)**

При реализации закона управления приводными устройствами, оптимального по приращению входных координат, происходит минимизация максимального из изменений длин штанг. Рисунок 77 показывает эти значения для рассматриваемого оптимального закона, а также для закона, при котором выходная угловая координата остается постоянной. Из рисунка видно, что для каждой точки траектории, определяемой значением угла  $\phi_1$ , за счет изменения выходной координаты  $\phi$  можно обеспечить уменьшение требуемого изменения длин штанг.

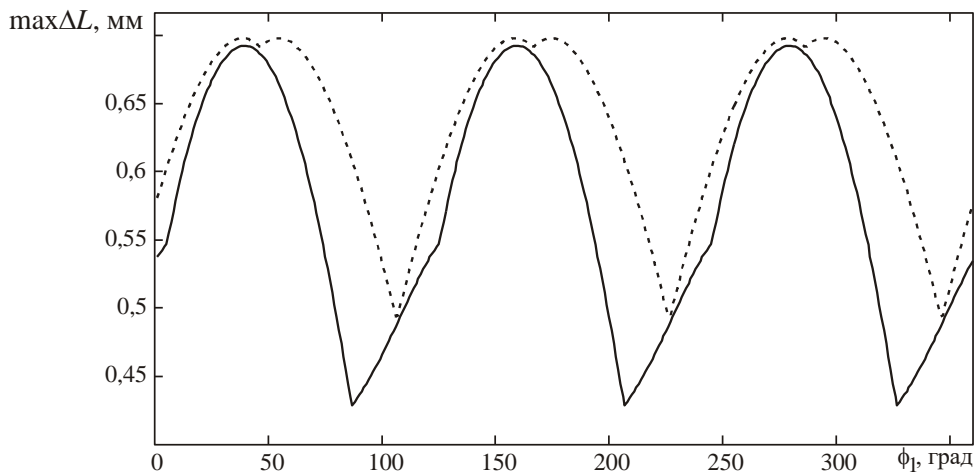


**Рисунок 76 – Изменения длин штанг при формировании движения инструмента по окружности: ---- –  $\phi = \text{const}$ , — –  $\phi$  изменяется с целью выполнения критерия (72)**

Численно возможность уменьшения необходимых для формирования траектории изменений длин штанг иллюстрируют интегральные параметры

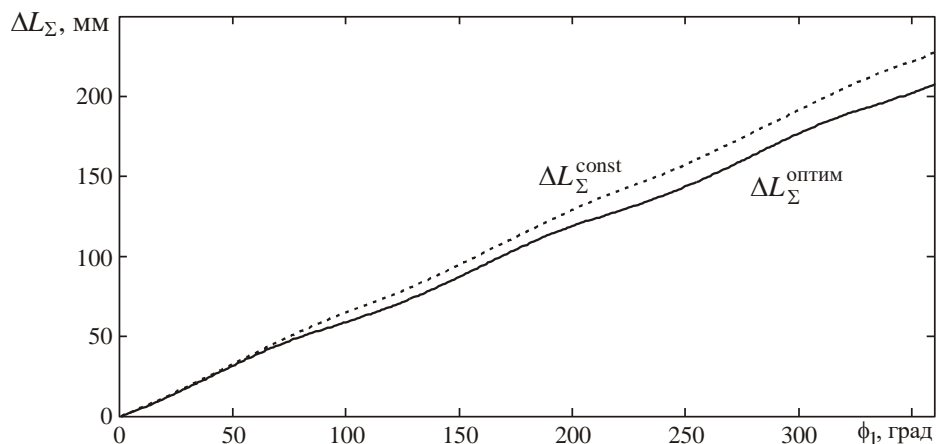
$$\Delta L_{\Sigma}^{\text{const}} = \sum_k \max(|\Delta L_{jk}^{\text{const}}|), \quad \Delta L_{\Sigma}^{\text{оптим}} = \sum_k \max(|\Delta L_{jk}^{\text{оптим}}|), \quad j=1\dots 3, \quad (83)$$

где  $\Delta L_{jk}^{\text{const}}$  и  $\Delta L_{jk}^{\text{оптим}}$  – изменения длины  $j$ -й штанги при переходе от  $k$ -й точки траектории к следующей для случаев управления при  $\phi = \text{const}$  и оптимального по приращению входных координат соответственно. Суммирование ведется по всем точкам траектории, определяемым через дискретные изменения угла  $\phi_1$ .



**Рисунок 77 – Максимальные изменения длин штанг при формировании движения инструмента по окружности: --- –  $\phi = \text{const}$ , — –  $\phi$  изменяется с целью выполнения критерия оптимальности (72)**

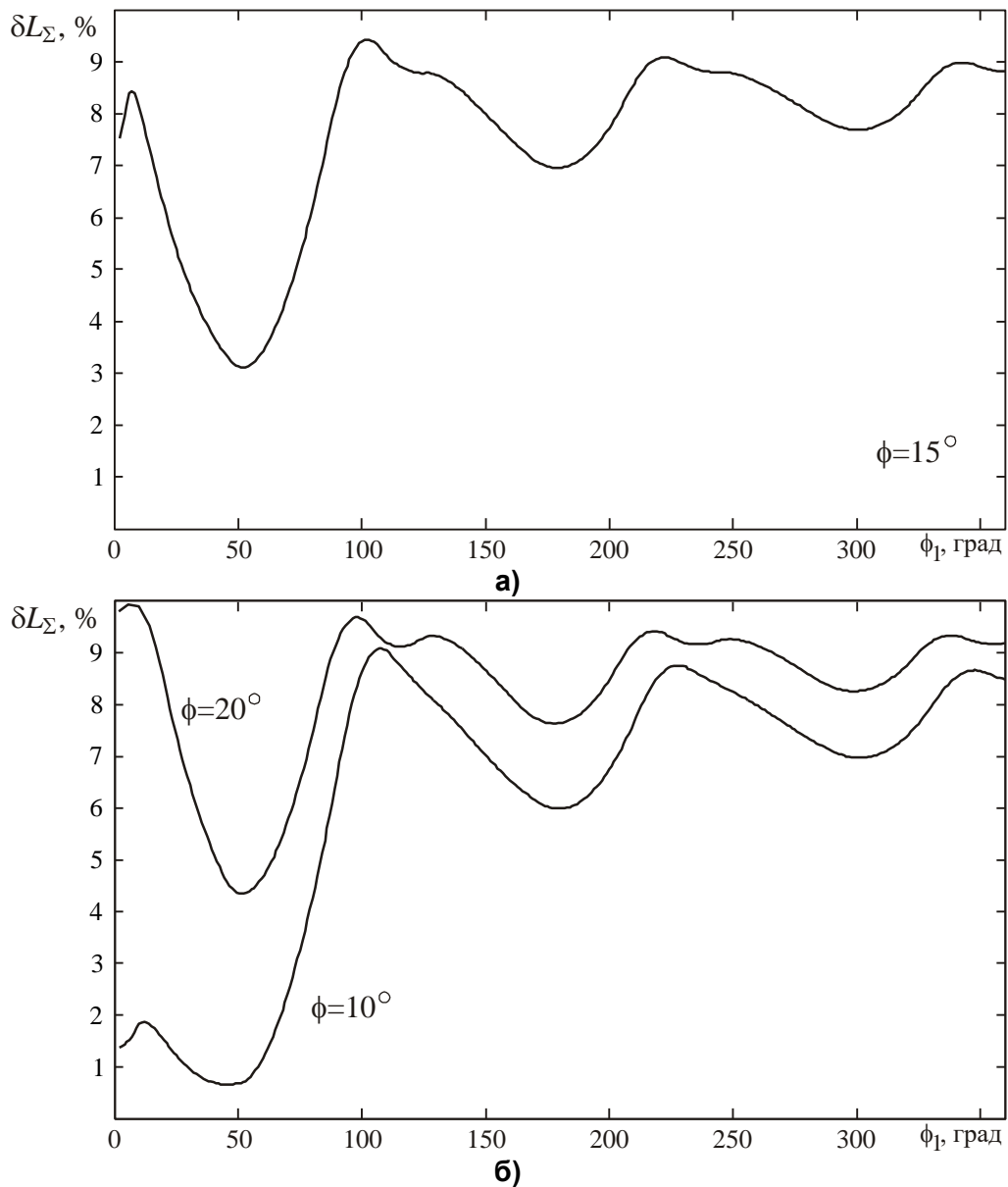
На рисунке 78 представлены графики параметров (83) в функции угла  $\phi_1$ , отражающие увеличение сумм максимальных приращений длин штанг в процессе движения инструмента по траектории.



**Рисунок 78 – Интегральные параметры, характеризующие изменения длин штанг**

Из графиков видно, что за счет реализации оптимального закона управления приводными устройствами обеспечивается уменьшение суммарного изменения длин штанг. Количественно это уменьшение иллюстрирует рисунок 79, а.

На рисунке 79, а показано уменьшение интегрального параметра  $\Delta L_{\Sigma}^{\text{опт}} \text{ относительно } \Delta L_{\Sigma}^{\text{const}}$ . Согласно этому графику, реализация оптимального закона управления приводным устройством обеспечивает уменьшение значения параметра  $\Delta L_{\Sigma}^{\text{опт}}$  примерно на 9%.



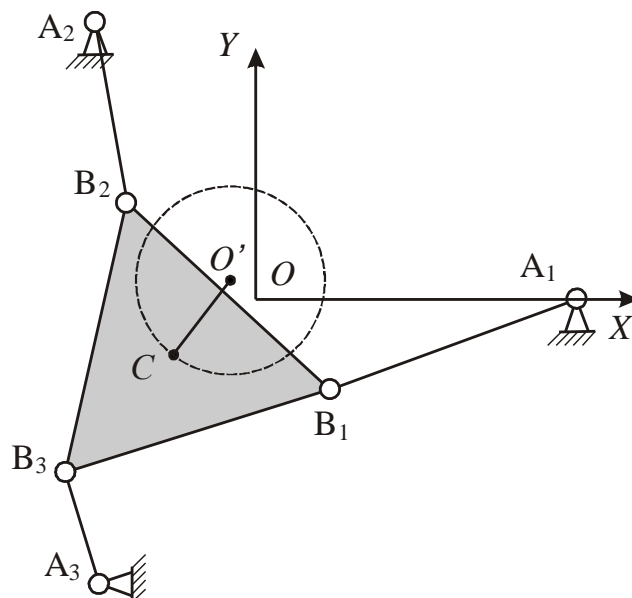
**Рисунок 79 – Относительное уменьшение интегрального параметра**

Если скорость изменения длин штанг имеет ограничение по максимуму и максимальное на шаге изменение длины штанги обрабатывается с максимальной

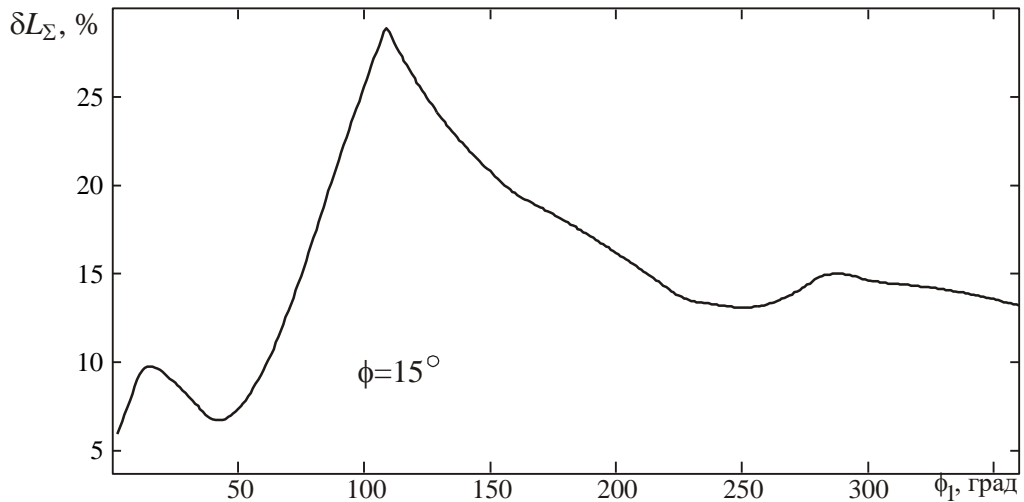
скоростью, то за счет оптимального закона управления приводными устройствами будет обеспечено снижение (примерно на 9%) машинного времени, необходимого на выполнение рассматриваемой технологической операции.

На рисунке 79, б показаны относительные уменьшения интегрального параметра  $L_{\Sigma}^{\text{оптим}}$  для случаев, когда формирование траекторий движения инструмента при постоянном значении выходной угловой координаты моделируется при  $\phi = 10^\circ$  и  $\phi = 20^\circ$ . Анализ рисунка 79 показывает практически одинаковое снижение машинного времени выполнения рассматриваемой технологической операции за счет реализации оптимального закон управления приводными устройствами.

Величина уменьшения машинного времени выполнения технологической операции за счет оптимального закона управления приводными устройствами во многом зависит от реализуемой на операции траектории. Например, смещение окружности, по которой должен перемещаться центр фрезы, относительно окружности, на которой расположены шарниры основания (разнесение точек  $O$  и  $O'$  на рисунке 80) приводит к результату (рисунок 81), отличающемуся от показанного на рисунке 79, а.



**Рисунок 80 – Формирование траектории при несовпадении центров окружностей  $O$  и  $O'$**



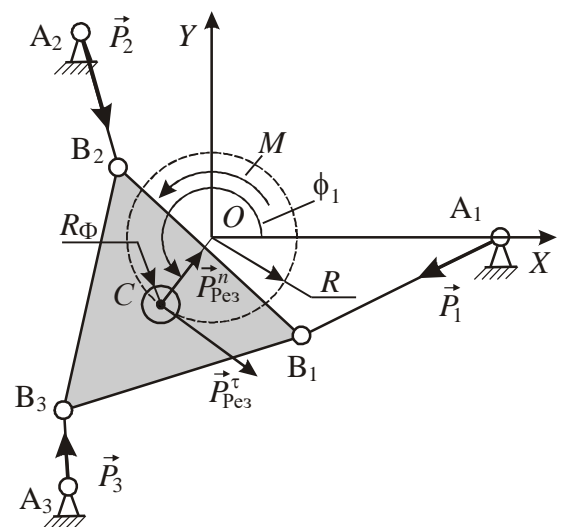
**Рисунок 81 – Относительное уменьшение интегрального параметра при несовпадении центров окружностей  $O$  и  $O'$**

Применительно к ОПКС это позволяет ставить и решать задачу создания оптимальных с точки зрения производительности технологических процессов. В данной диссертационной работе эта задача не рассматривается.

### 3.4.2. Закон, оптимальный по усилиям

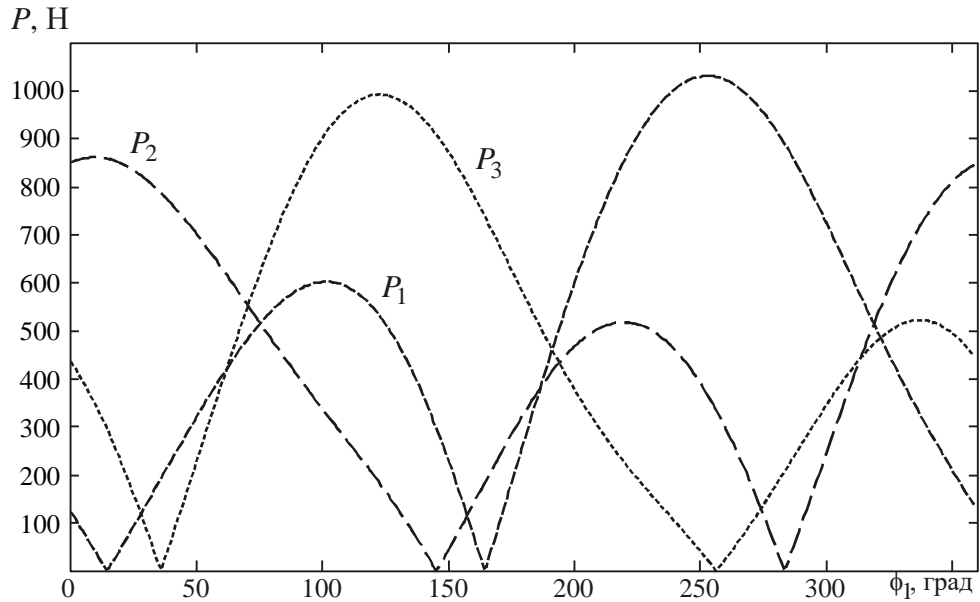
При моделировании закона управления приводными устройствами, оптимального по усилиям, необходимо ввести в рассмотрение внешние силовые факторы, воздействующие на механизм. В процессе фрезерования возникает сила резания  $P_{\text{рез}}$ , которую можно разложить на две составляющие: тангенциальную  $P_{\text{рез}}^{\tau}$  и нормальную  $P_{\text{рез}}^n$  и привести к точке  $C$ , введя момент  $\vec{M} = \vec{P}_{\text{рез}}^{\tau} R_{\Phi}$  (рисунок 82).

Возникающая сила резания вызовет появление в штангах механизма усилий реакции, для определения которых необходимо использовать систему уравнений (73). На рисунке 83 показаны графики усилий, возникающие в штангах плоского МПКЦ при фрезеровании отверстия радиусом  $R_{\text{отв}} = R + R_{\Phi}$ . При определении усилий (статическом моделировании) приня-



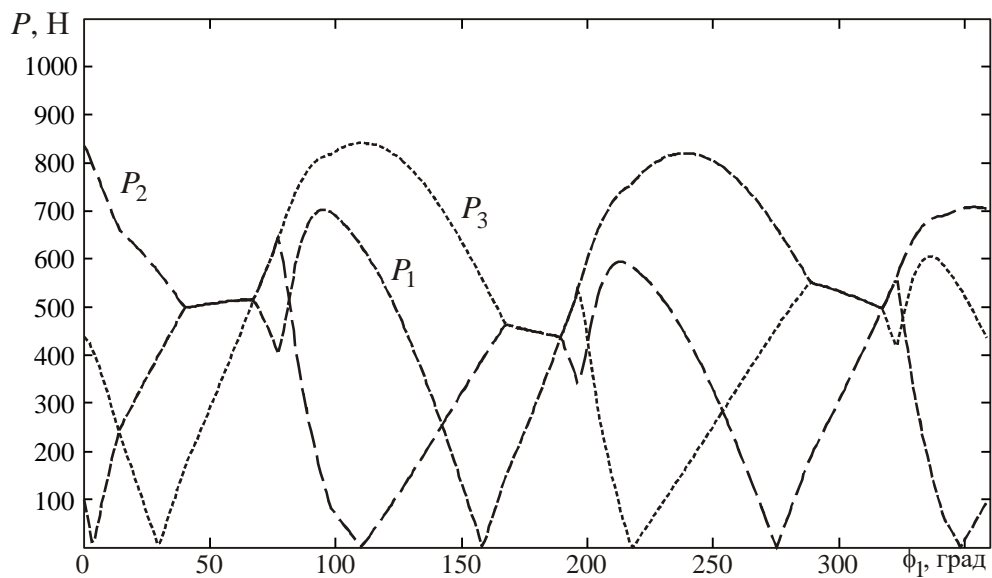
**Рисунок 82 – Силовые факторы, возникающие в МПКЦ при выполнении операции фрезерования**

то:  $P_{\text{Рез}}^c = 1000\text{Н}$ ,  $P_{\text{Рез}}^n = 100\text{Н}$ ,  $R_{\Phi} = 5\text{мм}$ ,  $R = 40\text{мм}$ . Значение выходной угловой координаты оставалось постоянным  $\phi = 15^\circ$ , т. е. оптимальный по усилиям закон управления приводными устройствами не реализовывался.



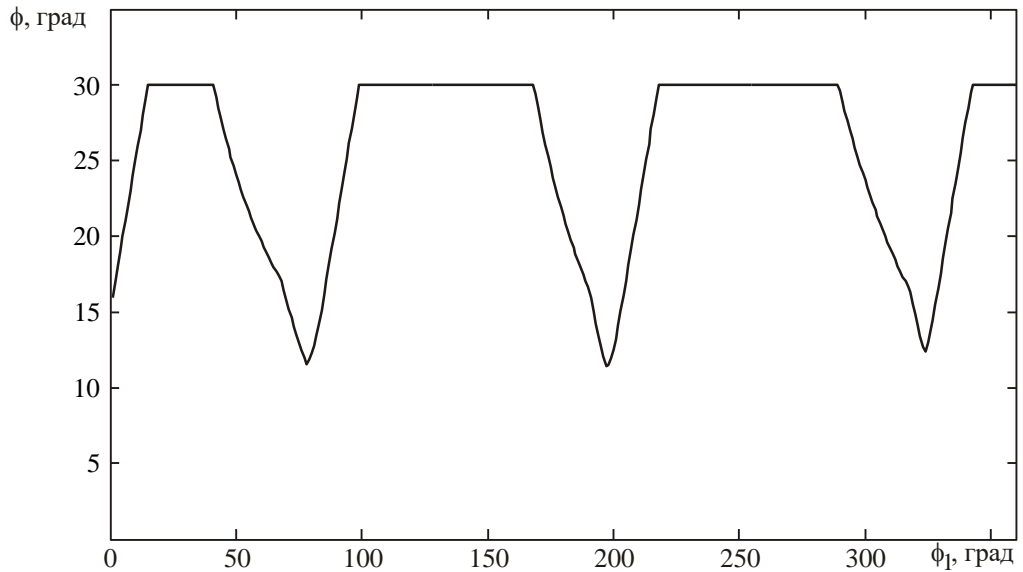
**Рисунок 83 – Усилия в штангах МПКЦ при  $\phi = \text{const}$**

Если оптимальный по усилиям закон управления приводными устройствами строится с использованием критерия (75), то возникает необходимость на каждом шаге траектории минимизировать максимальное из усилий, присутствующих в каждой из трех штанг МПКЦ. Результаты моделирования этих усилий приведены на рисунке 84.



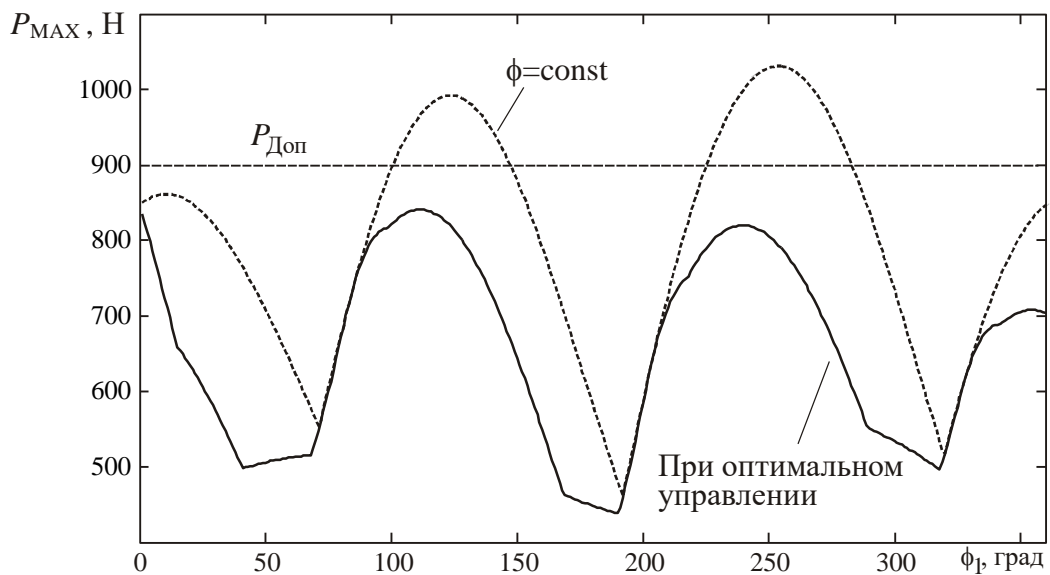
**Рисунок 84 – Усилий в штангах МПКЦ при реализации закона, оптимального по усилиям**

На рисунке 85 показан характер изменения выходной угловой координаты  $\phi$ , при котором обеспечивается выполнение критерия (75). При моделировании принято, что должно выполняться условие  $5^\circ \leq \phi \leq 30^\circ$ . Нижняя граница определена из недопустимости попадания МПКЦ в особое положение (см. раздел 3.3); верхняя граница отражает факт ограниченности поворота платформы в реальном МПКЦ.



**Рисунок 85 – Закон изменения выходной угловой координаты  $\phi$ , обеспечивающий выполнение оптимальности по усилиям**

Сравнение графиков для максимальных усилий, возникающих в штангах МПКЦ (рисунок 86) показывает существенное их уменьшение при реализации оптимального по усилиям закона управления приводными устройствами.

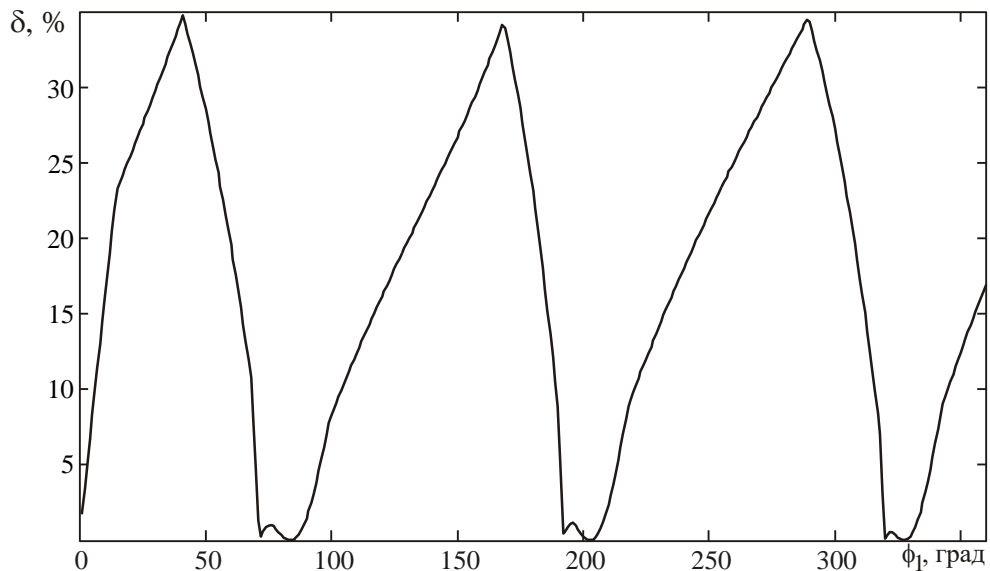


**Рисунок 86 – Суммарные усилия в штангах МПКЦ**



Снижение усилий приводов наиболее эффективно в случае их работы вблизи границы допустимых усилий. Например, если используются приводы с допустимым усилием 900 Н, то без использования оптимального по усилиям управления рассматриваемая технологическая операция выполнена быть не сможет, так как максимальные требуемые усилия превышают 1000 Н. Реализация оптимального по усилиям закона управления приводным устройством позволяет снизить эти усилия до приемлемых величин.

В целом для рассматриваемого плоского МПКЦ, выполняющего операцию фрезерования, в некоторые моменты наблюдается снижение требуемого усилия наиболее нагруженного привода более чем на 30% (рисунок 87). Очевидно, что это ведет к уменьшению нагрузок, действующих на элементы оборудования.



**Рисунок 87 – Относительное снижение максимальных усилий в штангах МПКЦ за счет реализации закона управления, оптимального по усилиям**

Таким образом, можно сделать вывод о целесообразности использования оптимального по усилиям закона управления приводными устройствами с целью снижения максимальных усилий, возникающих в штангах, что приведет к повышению надежности ОПКС и снижению требований к мощности приводов.

### **3.4.3. Энергоэффективный закон**

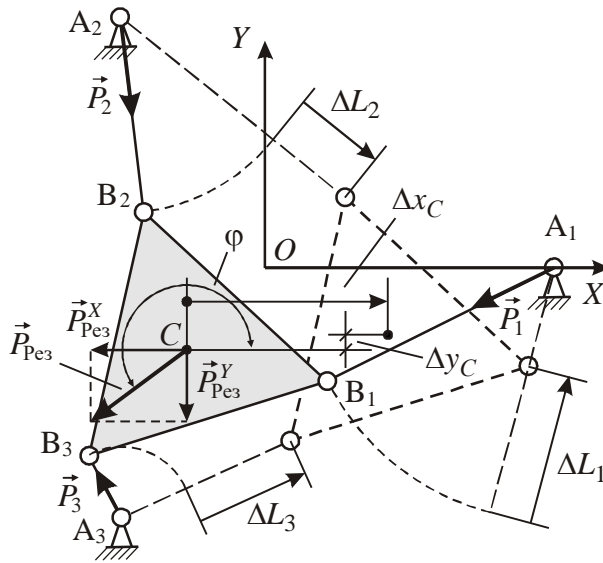
Для анализа возможности повышения энергоэффективности выполнения технологических операций с использованием ОПКС рассмотрим элементарное перемещение полюса  $C$  подвижной платформы плоского трипода на величину

$\Delta_C = \sqrt{\Delta x_C^2 + \Delta y_C^2}$ , где  $\Delta x_C$ ,  $\Delta y_C$  – элементарные перемещения по направлениям осей  $OX$  и  $OY$  СК  $OXY$  соответственно, рисунок 88.

Если сила резания представлена через проекции на оси СК  $OXY$ , то момент, создаваемый ей относительно точки  $O$ , равен

$$M_{\text{Рез}} = x_C P_{\text{Рез}}^Y - y_C P_{\text{Рез}}^X.$$

Уравнения (73) позволяют определить силы реакций  $\vec{P}_j$ , возникающие в штангах МПКЦ при приложении внешней силовой нагрузки в виде силы резания.



**Рисунок 88 – Изменение длин штанг МПКЦ при элементарном перемещении полюса подвижной платформы**

При элементарном перемещении полюса подвижной платформы на величину  $\Delta_C$  штанги изменят свои длины на величины  $\Delta L_j$ , характеризуемые направлением. Так как силы реакций  $\vec{P}_j$  всегда направлены вдоль продольных осей соответствующих штанг, то элементарная работа этих сил будет равна

$$A_p = \sum_{j=1}^3 \left( \pm |\Delta L_j P_j| \right), \quad (84)$$

где знак «+» соответствует случаю, когда сила реакции в  $j$ -й штанге сонаправлена удлинению этой штанги. Очевидно, что элементарная работа (84) реакций в штангах будет равна элементарной работе внешних силовых факторов, определяемой для рассматриваемой задачи как

$$A_{\text{Внеш}} = P_{\text{Рез}}^X \Delta x_C + P_{\text{Рез}}^Y \Delta y_C. \quad (85)$$

Полезная энергия, потребленная приводом  $j$ -й штанги при перемещении платформы, является величиной положительной, поэтому выражение для суммарной потребленной приводами полезной энергии будет иметь следующий вид:

$$W_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}} = \sum_{j=1}^3 |\Delta L_j P_j|. \quad (86)$$

В общем случае полезная энергия  $W_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}}$  будет не меньше модуля работы внешних силовых факторов. Введем положительно определенную величину

$$A_{\text{Треб}} = |A_{\text{Внеш}}|, \quad (87)$$

которая определит минимальное значение полезной потребленной энергии:

$$W_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}} \geq A_{\text{Треб}}.$$

Уменьшение энергии, потребляемой приводами, обеспечивается за счет оптимального изменения избыточной угловой координаты  $\phi$  с целью обеспечения выполнения условия

$$W_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}}(\phi) = \sum_{j=1}^3 |\Delta L_j(\phi) P_j(\phi)| \rightarrow \min \quad (88)$$

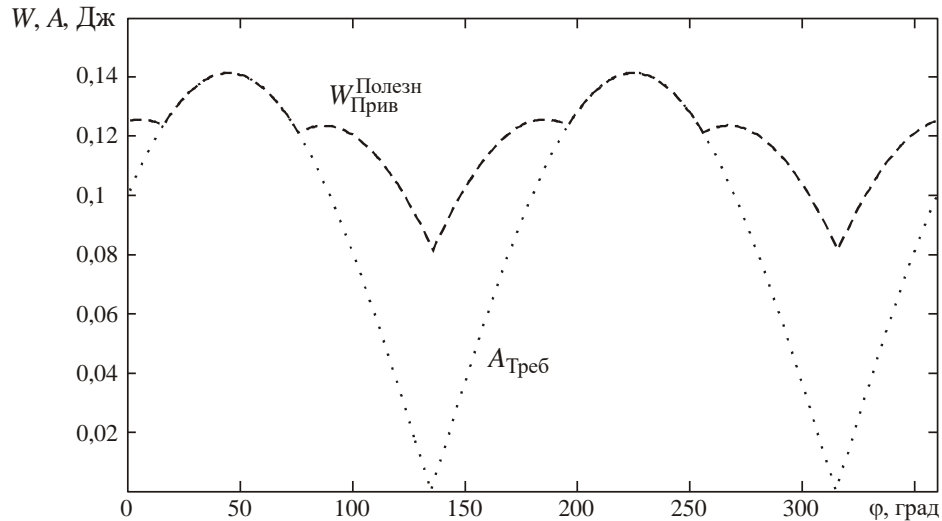
на каждом элементарном перемещении полюса подвижной платформы. Выражение (88) является другой формой записи критерия (76). Так как требуемая работа  $A_{\text{Треб}}$  является минимумом работы, которая может совершаться приводами при перемещении подвижной платформы при заданном внешнем нагружении, то условие (88) можно записать как

$$W_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}}(\phi) = \sum_{j=1}^3 |\Delta L_j(\phi) P_j(\phi)| \rightarrow A_{\text{Треб}}.$$

Пусть на подвижную платформу плоского трипода действует внешняя сила  $\vec{P}_{\text{Внеш}} = 1000$  Н, направление которой задается углом  $\phi$ , см. рисунок 88. Определим требуемую работу и потребляемую приводами энергию для элементарного перемещения  $\Delta_C$  ( $\Delta x_C = \Delta y_C = 0,1$  мм) при различных направлениях внешней силы. Рисунок 89 иллюстрирует соотношения между величинами  $A_{\text{Треб}}$  и  $W_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}}$ ; угол  $\phi$  меняется от нуля до  $359^\circ$  с шагом в  $1^\circ$ . Если в качестве внешней силы вы-

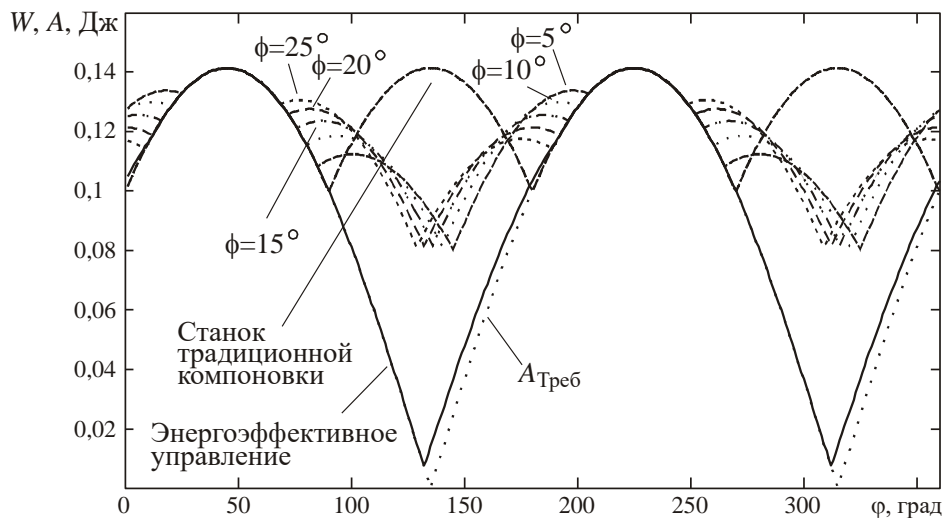
стует сила резания, то изменение угла  $\varphi$  можно ограничить диапазоном  $135^\circ \dots 315^\circ$ , что соответствует реальным направлениям силы резания при назначенном элементарном перемещении.

Анализ графиков на рисунке 88 показывает, что потребляемая энергия может существенно превосходить требуемую работу.



**Рисунок 89 – Требуемая работа и энергия, потребляемая на элементарных перемещениях**

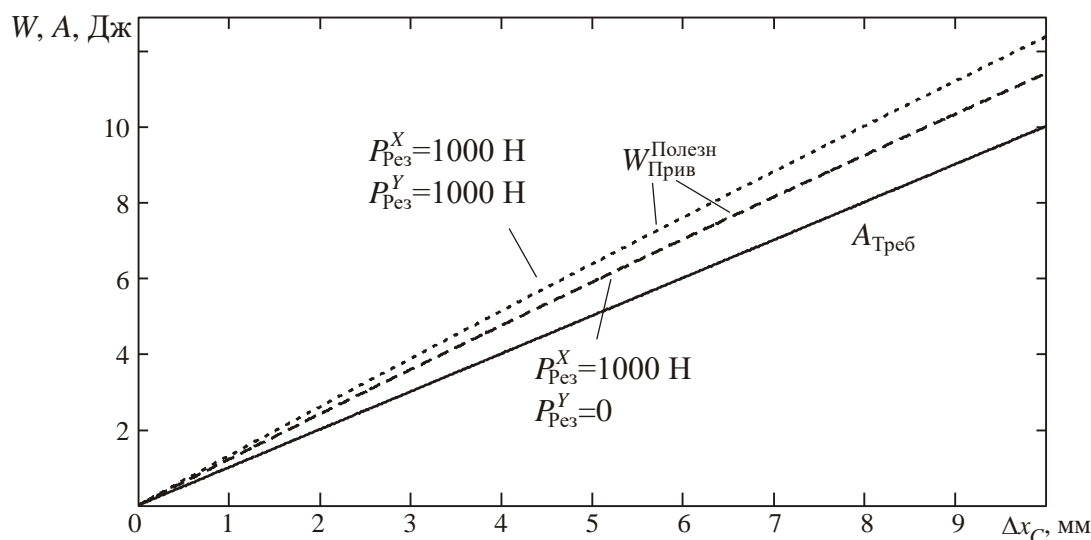
При моделировании принято, что угол разворота платформы  $\varphi = 15^\circ$  и при совершении элементарных перемещений остается неизменным. Представляет интерес величина потребленной энергии при других значениях угла  $\varphi$ . На рисунке 90 показаны графики, характеризующие потребление энергии при  $\varphi = 5, 10, 15, 20, 25$  градусов.



**Рисунок 90 – Работа приводов в зависимости от направления внешней силы для различных значений координаты  $\varphi$**

Анализ графиков показывает, что для существенной части задаваемых при моделировании направлений внешней силы за счет разворота платформы можно обеспечить уменьшение потребления энергии, т. е. реализовать выполнение критерия (88). Кроме того, в ряде случаев станок, построенный на основе плоского трипода, будет эффективнее (с точки зрения затрат энергии на перемещение рабочего органа) станка, построенного с использованием традиционных компоновочных схем.

На рисунке 91 показаны результаты моделирования движения инструмента по отрезку прямолинейной траектории: полюс подвижной платформы перемещается на 10 мм вдоль оси  $OX$ .



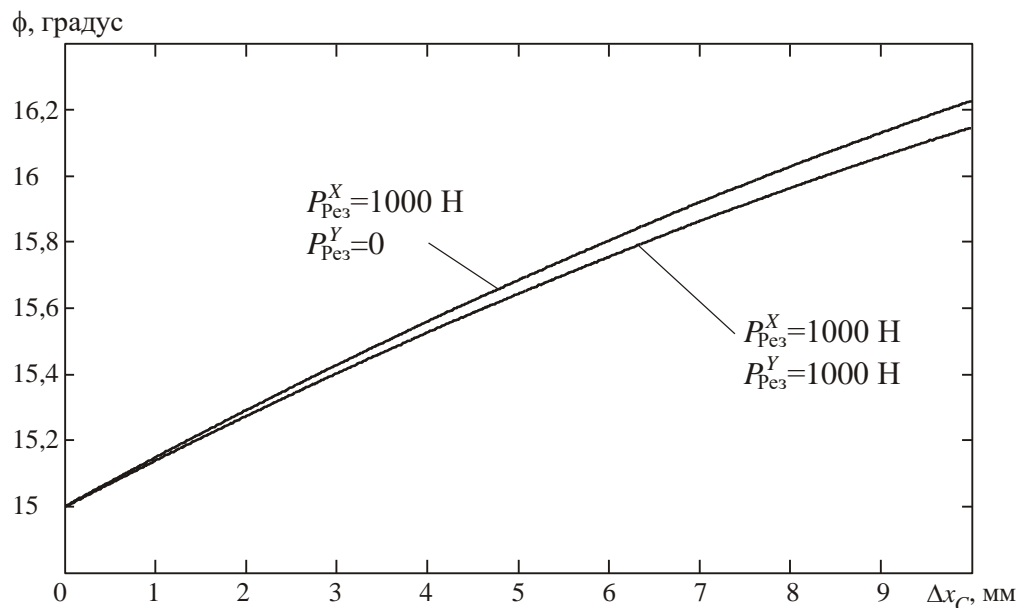
**Рисунок 91 – Работа, совершаемая силой резания, и энергия, потребляемая при перемещении полюса подвижной платформы**

Графики на рисунке отражают процесс увеличения работы, совершаемой силой резания (требуемая работа), и потребляемой приводами энергии. Рассмотрены два варианта, различающиеся значениями составляющих силы резания. Угловая координата  $\phi$  в обоих случаях постоянна и равна 15 градусов.

Как видно из графиков, энергия, потребляемая приводами, превосходит требуемую работу почти на 18% в случае, когда  $P_{Рез}^Y = 0$ , и более чем на 20% в случае, когда  $P_{Рез}^Y = 1000 Н$ .

Если в процессе перемещения полюса по заданной траектории угловая координата  $\phi$  меняется по законам, показанным на рисунке 92, то обеспечивается снижение потребляемой приводами энергии практически до уровня требуемой

работы (превышение составляет не более 2%). При моделировании для обоих вариантов составляющих силы резания предполагался одинаковый начальный угол  $\phi = 15^\circ$ .



**Рисунок 92 – Изменение выходной угловой координаты  $\phi$  при реализации энергоэффективного управления**

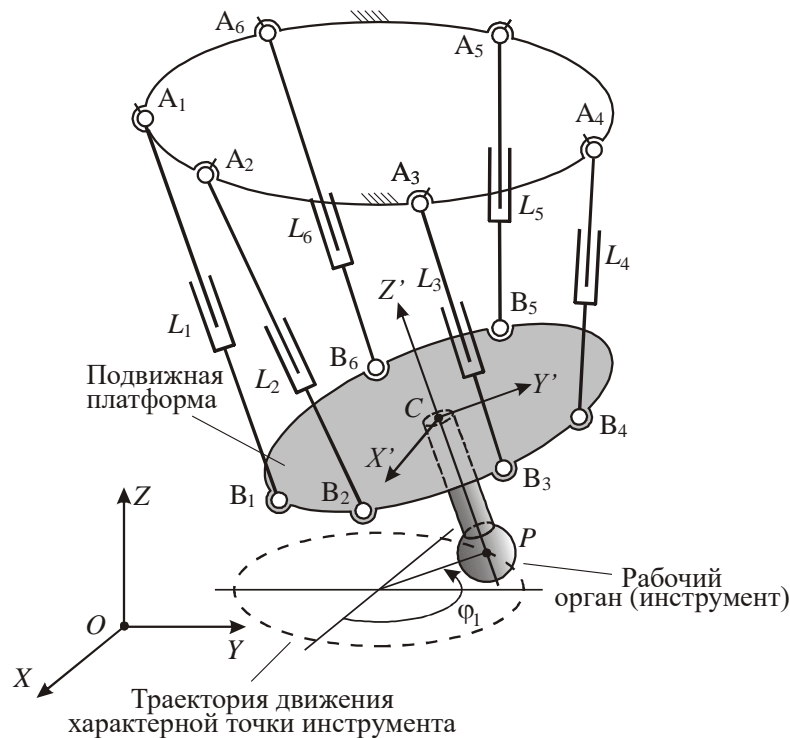
Таким образом, имеется реальная возможность повышения энергоэффективности технологических операций, выполняемых на ОПКС, за счет уменьшения энергии, потребляемой приводами.

### **3.5. Моделирование оптимальных законов управления приводными устройствами машины на основе механизма типа «гексапод»**

#### **3.5.1. Закон, оптимальный по приращениям входных координат**

Моделирование закона управления приводными устройствами, оптимального по приращениям входных координат, применительно к МПКЦ типа «гексапод» будем проводить для механизма (рисунок 93), имеющего следующие геометрические размеры: диаметр окружности, на которой расположены кардановые шарниры  $A_j$  – 1000 мм; диаметр окружности, на которой расположены сферические шарниры  $B_j$  – 600 мм. Продольная ось обрабатывающего инструмента проходит через полюс  $C$  подвижной платформы; полюс является центром окружности, на

которой расположены сферические шарниры  $B_j$ . Инструмент имеет вылет  $|CP| = 200 \text{ мм}$ ;  $P$  – характерная точка инструмента – центр сферы.



**Рисунок 93 – Механизм типа «гексапод», для которого выполнялось моделирование**

Примем, что карданные шарниры  $A_j$  расположены на окружности равномерно, с шагом в  $60^\circ$ , а сферические шарниры  $B_j$  попарно сведены, аналогично МПКЦ, показанному на рисунке 33. Рассмотрим технологическую операцию, при которой точка  $P$  должна описать окружность радиусом 50 мм, лежащую в плоскости, параллельной плоскости расположения карданных шарниров  $A_j$  и отстоящей от нее на 700 мм.

Как отмечалось выше, в зависимости от особенностей выполняемой технологической операции применительно к МПКЦ типа «гексапод» в качестве избыточных координат могут выступать от одной до трех выходных угловых координат. Пусть в качестве избыточной координаты выступает только одна выходная угловая координата, определяющая разворот подвижной платформы относительно оси  $CZ'$  (см. рисунок 93) – угол рыскания  $\psi$ , если в качестве выходных угловых координат выступают углы Крылова. В этом случае оптимальный по приращению

входных координат закон управления приводными устройствами должен обеспечивать выполнение условия

$$\max(\Delta L_j(\psi)) \rightarrow \min, \quad (89)$$

аналогичного условию (72) для плоского МПКЦ.

Рассчитанные для данного случая интегральные параметры (83) имеют следующие значения:  $\Delta L_{\Sigma}^{\text{const}} = 148$  мм,  $\Delta L_{\Sigma}^{\text{оптим}} = 147$  мм, т. е. выигрыш от реализации оптимального управления крайне незначителен.

При использовании в качестве избыточных всех трех выходных угловых координат следует использовать условие

$$\max(\Delta L_j(\psi, \vartheta, \gamma)) \rightarrow \min. \quad (90)$$

Использование закона управления приводными устройствами, выполняющего критерий (90) применительно к рассматриваемому МПКЦ к уменьшению интегрального параметра практически не привело:  $\Delta L_{\Sigma}^{\text{оптим}} = 145$  мм.

Изменим характер расположения сферических шарниров: начнем «разводить» шарниры  $B_1$  и  $B_2$ ,  $B_3$  и  $B_4$ ,  $B_5$  и  $B_6$  соответственно. В таблице 2 показаны результаты моделирования при разведении шарниров в каждой из пар на различные углы.

Таблица 2

**Зависимость интегрального параметра от положения шарниров МПКЦ**

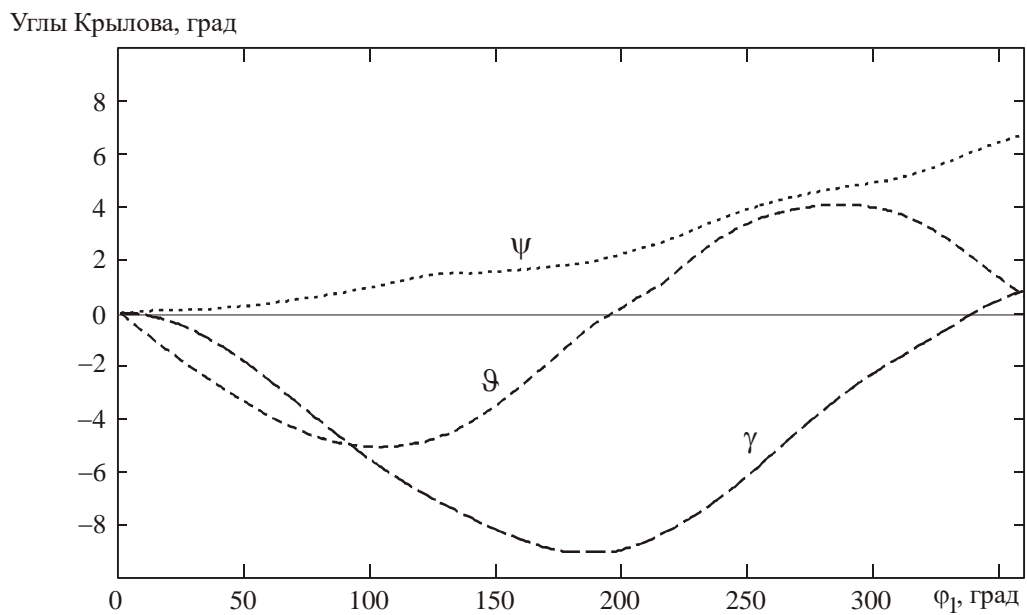
Угол разведения шарниров платформы	10°	20°	30°	40°	50°
$\Delta L_{\Sigma}^{\text{const}}$ , мм	139	132	126	120	115
$\Delta L_{\Sigma}^{\text{оптим}}$ , мм	130	107	85	66	41
$\Delta L_{\Sigma}^{\text{const}} / \Delta L_{\Sigma}^{\text{оптим}}$	1,07	1,23	1,48	1,82	2,80

Из таблицы 2 видно, что разведение шарниров позволяет получить существенный выигрыш от реализации закона управления приводными устройствами, оптимального по приращениям входных координат: при разведении шарниров в парах на 50° время выполнения рассматриваемой технологической операции может быть уменьшено в 2,8 раза. Следовательно, разведение шарниров платформы может рассматриваться как положительный фактор с точки зрения возможного



повышения производительности ОПКС. Однако следует учитывать, что такое конструктивное решение снижает показатели жесткости оборудования на основе МПКЦ [69].

Для МПКЦ, шарниры платформы которого попарно разведены на  $50^\circ$ , на рисунке 94 показан характер изменения выходных угловых координат при реализации закона, оптимального по приращениям входных координат; на рисунке 95 приведены графики изменения длин штанг этого МПКЦ.



**Рисунок 94 – Изменение выходных угловых координат при реализации оптимального закона управления приводными устройствами**

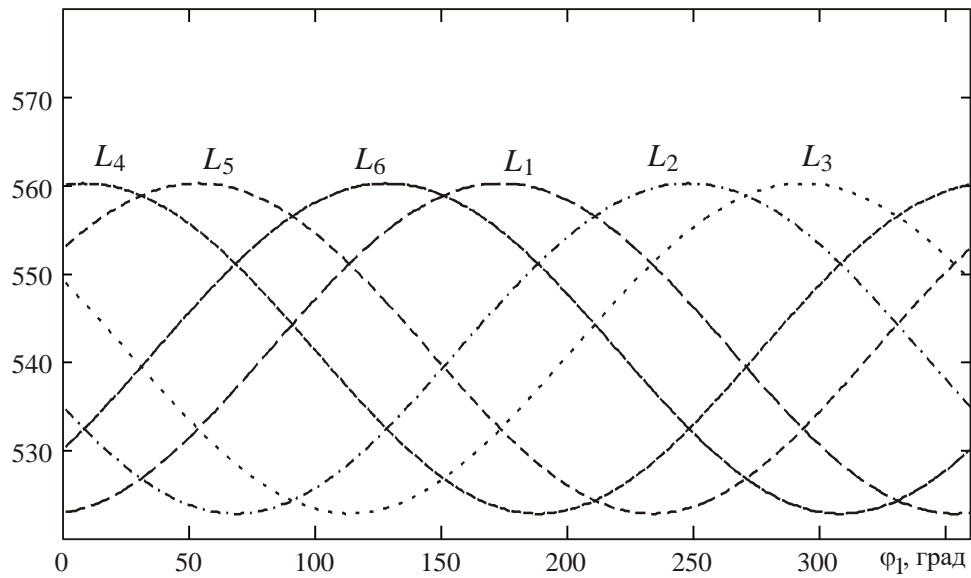
Анализ рисунка 94 показывает, что выполнение критерия (90) осуществлено за счет изменения всех трех выходных угловых координат; диапазоне изменения этих координат не превышает  $\pm 10^\circ$ .

При сравнении графиков изменения длин соответствующих штанг (см. рисунок 95) можно видеть, что управление, оптимальное по приращениям входных координат, обеспечивает заметное уменьшение изменений длин штанг в процессе выполнения технологической операции, что и отражено в соответствующей строке таблицы 2.

Рассмотренная технологическая операция, при которой характерная точка  $P$  инструмента движется по окружности, носит иллюстративный характер, так как не характерна для многокоординатной обработки; моделирование этой операции

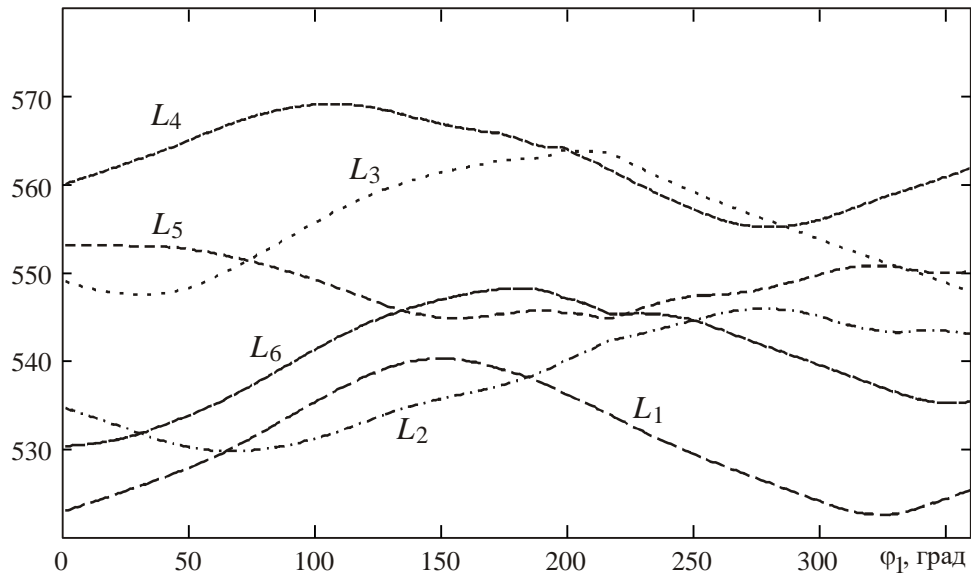
показало принципиальную возможность уменьшения времени обработки за счет оптимального управления. Проведем моделирование для более сложной технологической операции, при которой точка  $P$  инструмента должна перемещаться по линиям, лежащим на некоторой криволинейной поверхности (рисунок 96). В качестве инструмента выступает сферическая фреза; все три выходные угловые координаты будем считать избыточными и будем использовать их при реализации оптимального управления.

$L$ , мм



а)

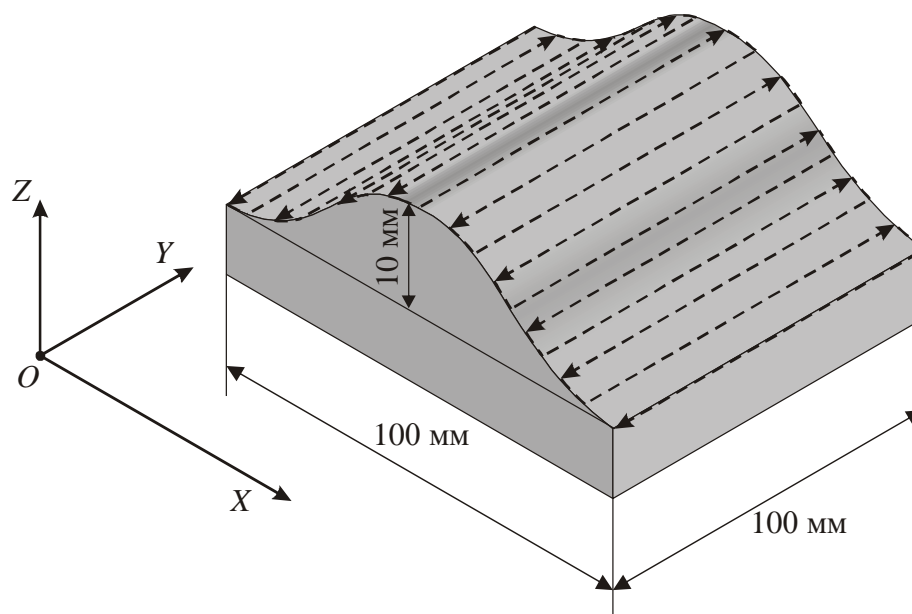
$L$ , мм



б)

**Рисунок 95 – Изменения длин штанг МПКЦ: а) – движение при неизменных значениях выходных угловых координат; б) – реализация закона, оптимального по приращениям входных координат**

Вычисление интегральных параметров (83) для данной технологической операции дает следующие результаты:  $\Delta L_{\Sigma}^{\text{const}} = 3826 \text{ мм}$ ,  $\Delta L_{\Sigma}^{\text{оптим}} = 1910 \text{ мм}$ , т. е. реализация оптимального управления может обеспечить двукратное снижение времени выполнения этой операции. Результаты получены для случая, когда смещение линий движения характерной точки вдоль оси  $OX$  составляло 1 мм; сферические шарниры попарно разведены на  $50^\circ$ .

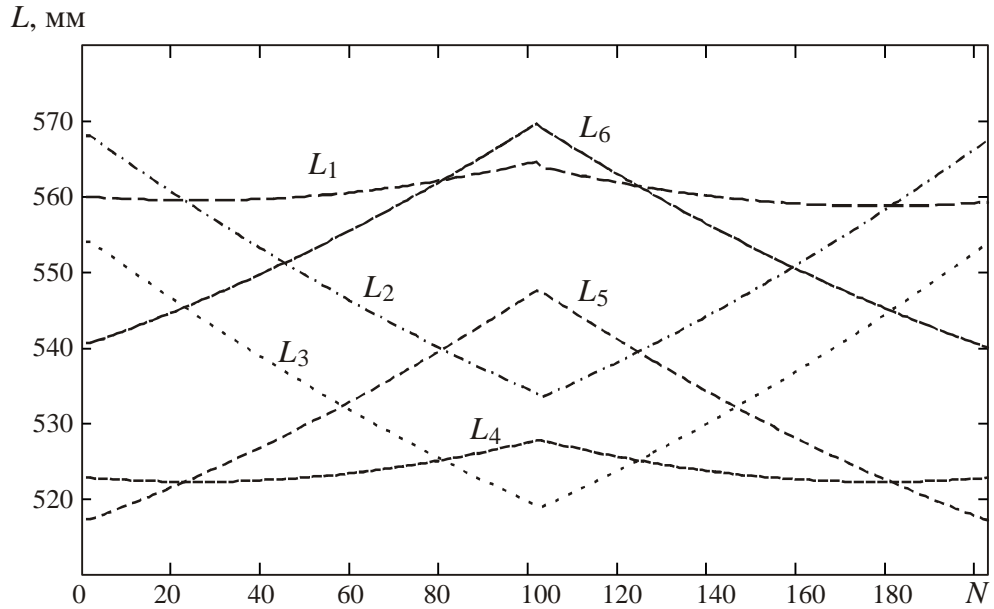


**Рисунок 96 – Движения характерной точки при обработке пространственной поверхности**

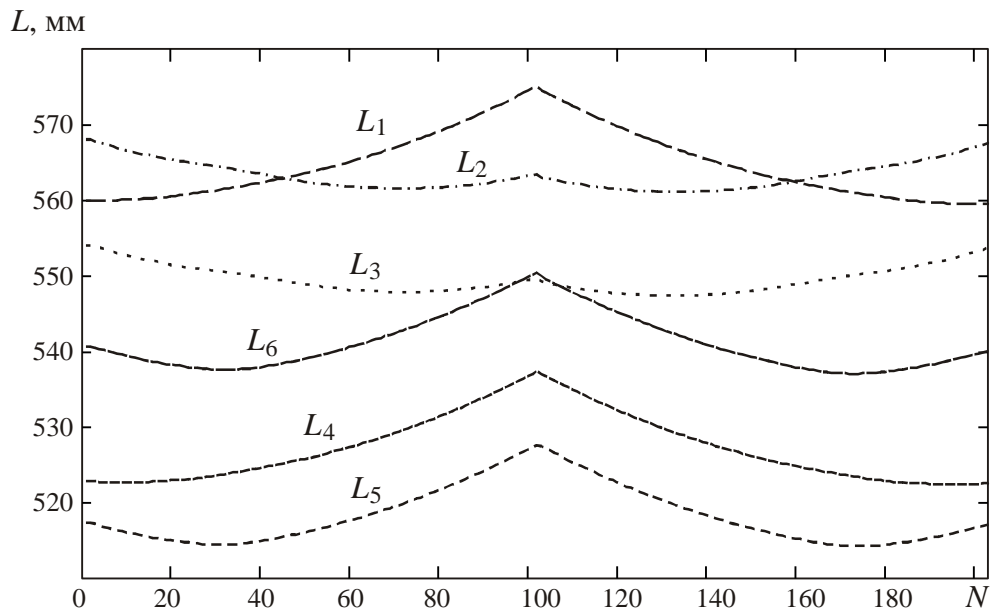
На рисунке 97 показаны графики изменения штанг МПКЦ при формировании первых двух линий рассматриваемой траектории при реализации закона управления приводными устройствами, обеспечивающего постоянные значения выходных угловых координат и оптимального закона, обеспечивающего выполнение критерия управления (90). Число  $N$ , отложенное по оси абсцисс – количество точек траектории, для которых выполнялось моделирование.

Анализ графиков показывает, что при реализации оптимального закона управления приводными устройствами изменение длин некоторых штанг (например,  $L_1$ ) превышает изменение длин этих же штанг при моделировании с неизменными выходными угловыми координатами. Однако максимальное из изменений для случая реализации оптимального закона (изменение длины штанги  $L_4$ ), меньше максимального из изменений для моделирования с неизменными выход-

ными угловыми координатами (изменение длины штанги  $L_5$ ). Следовательно, изменение трех выходных координат с целью выполнения условия (90) позволяет снижать время выполнения технологических операций.



а)



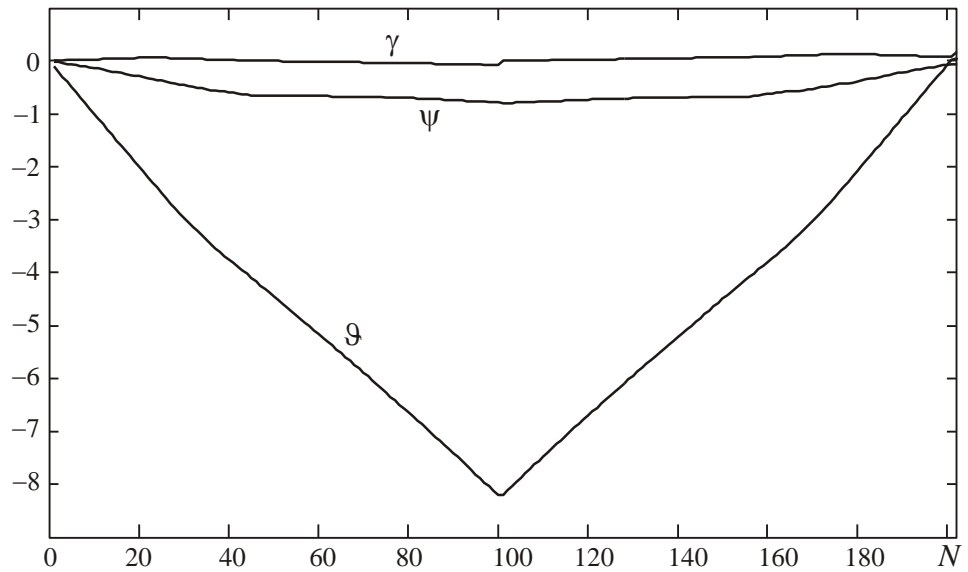
б)

**Рисунок 97 – Изменения длин штанг МПКЦ: а) – моделирование при неизменных значениях выходных угловых координат; б) – реализация закона, оптимального по приращением входных координат**

На рисунке 98 показан характер изменения выходных угловых координат, обеспечивающих выполнение критерия (90) на начальном участке (фрагменте)

траектории. Как видно из графиков, значения этих углов не выходят за диапазон  $\pm 10^\circ$ .

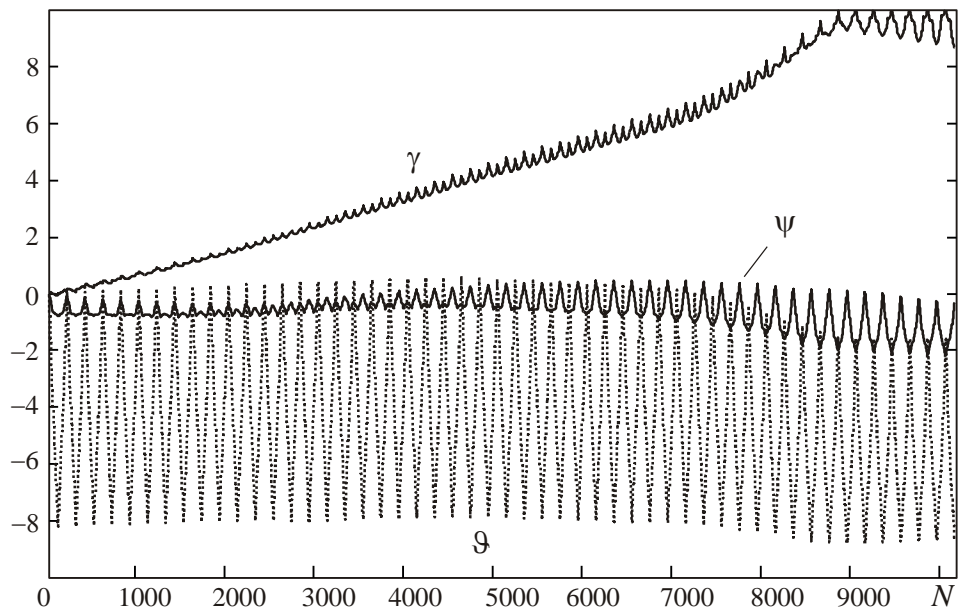
Углы Крылова, град



**Рисунок 98 – Изменение выходных угловых координат при реализации оптимального закона (начальный участок траектории)**

Общую картину, отражающую изменение выходных угловых координат при моделировании всей траектории, показывает рисунок 99.

Углы Крылова, град



**Рисунок 99 – Изменение выходных угловых координат при реализации оптимального закона (для всей траектории)**

### 3.5.2. Закон, оптимальный по усилиям

Для моделирования возможности снижения усилий в штангах МПКЦ типа «гексапод» за счет использования избыточных выходных координат получим уравнения, устанавливающие связь между внешним воздействием на подвижную платформу и усилиями, возникающими в штангах. Как и для случая плоского МПКЦ, не будем учитывать силы трения и динамические нагрузки. Расчетная схема для рассматриваемого пространственного МПКЦ приведена на рисунке 100.

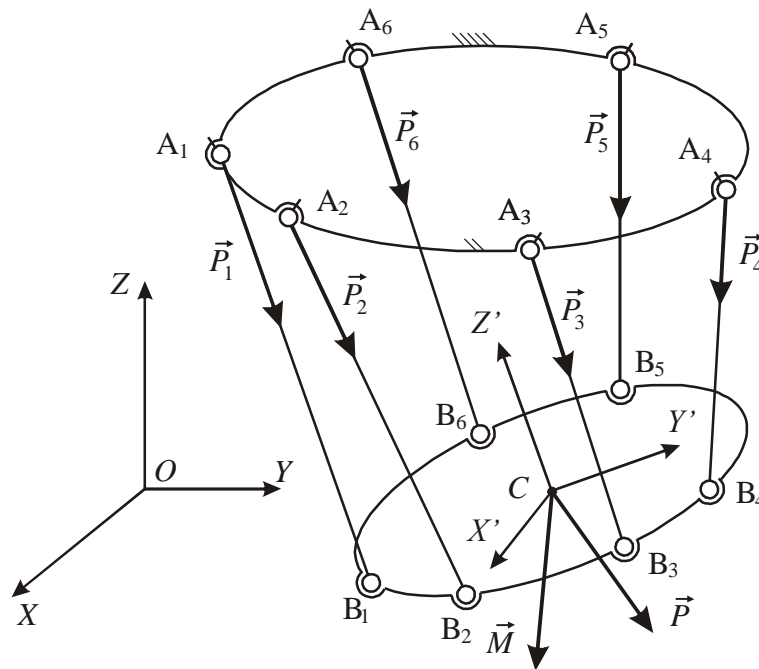


Рисунок 100 – Расчетная схема для определения усилий в штангах МПКЦ типа «гексапод»

Искомые уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + a_{13}P_3 + a_{14}P_4 + a_{15}P_5 + a_{16}P_6 = -P_X; \\ a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + a_{23}P_3 + a_{24}P_4 + a_{25}P_5 + a_{26}P_6 = -P_Y; \\ a_{31}P_1 + a_{32}P_2 + a_{33}P_3 + a_{34}P_4 + a_{35}P_5 + a_{36}P_6 = -P_Z; \\ a_{41}P_1 + a_{42}P_2 + a_{43}P_3 + a_{44}P_4 + a_{45}P_5 + a_{46}P_6 = -M_X; \\ a_{51}P_1 + a_{52}P_2 + a_{53}P_3 + a_{54}P_4 + a_{55}P_5 + a_{56}P_6 = -M_Y; \\ a_{61}P_1 + a_{62}P_2 + a_{63}P_3 + a_{64}P_4 + a_{65}P_5 + a_{66}P_6 = -M_Z, \end{cases} \quad (91)$$

представляющий собой уравнения проекций имеющихся в системе сил на оси некоторой системы координат и уравнения моментов, записанные относительно осей этой же системы координат – уравнения статики. Так как при решении задач

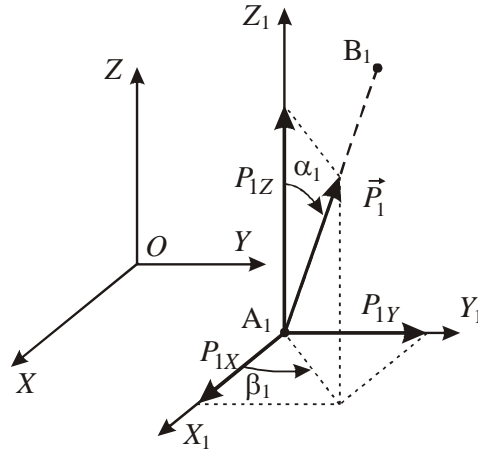
кинематики определяются координаты шарниров в глобальной системе координат  $OXYZ$  и в ней же задаются выходные координаты МПКЦ, то уравнения (91) целесообразно составить для этой СК.

Проекции силы на оси системы координат  $OXYZ$  (рисунок 101) можно записать следующим образом [50]:

$$P_{jX} = |\vec{P}_j| \sin \alpha_j \cos \beta_j; \quad P_{jY} = |\vec{P}_j| \sin \alpha_j \sin \beta_j; \quad P_{jZ} = |\vec{P}_j| \cos \alpha_j,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \arccos \frac{z_{B_j} - z_{A_j}}{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2 + (z_{A_j} - z_{B_j})^2}} = \\ &= \arcsin \frac{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2}}{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2 + (z_{A_j} - z_{B_j})^2}}; \\ \beta_j &= \arccos \frac{x_{B_j} - x_{A_j}}{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2}} = \arcsin \frac{y_{B_j} - y_{A_j}}{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2}}. \end{aligned}$$



**Рисунок 101 – Определение проекций силы на оси системы координат**

Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} a_{1j} &= \frac{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2}}{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2 + (z_{A_j} - z_{B_j})^2}} \frac{x_{B_j} - x_{A_j}}{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2}} = \\ &= \frac{x_{B_j} - x_{A_j}}{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2 + (z_{A_j} - z_{B_j})^2}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{2j} &= \frac{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2}}{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2 + (z_{A_j} - z_{B_j})^2}} \frac{y_{B_j} - y_{A_j}}{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2}} = \\
&= \frac{y_{B_j} - y_{A_j}}{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2 + (z_{A_j} - z_{B_j})^2}}; \\
a_{3j} &= \frac{z_{B_j} - z_{A_j}}{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2 + (z_{A_j} - z_{B_j})^2}}.
\end{aligned}$$

Моменты силы  $P_j$  относительно осей СК  $OXYZ$  равны [50]:

$$M_{jX} = y_{A_j} P_{jZ} - z_{A_j} P_{jY}, \quad M_{jY} = z_{A_j} P_{jX} - x_{A_j} P_{jZ}, \quad M_{jZ} = x_{A_j} P_{jY} - y_{A_j} P_{jX},$$

следовательно, можно записать

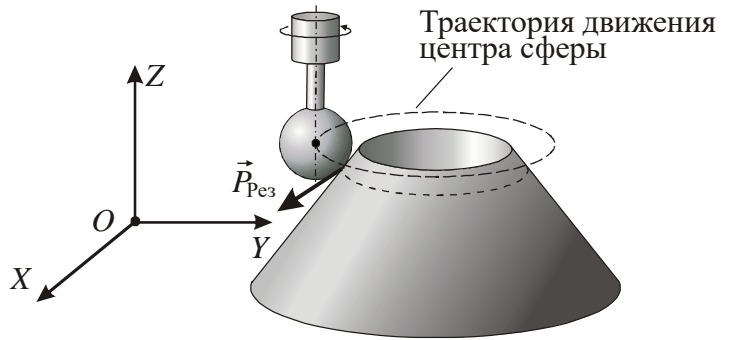
$$\begin{aligned}
a_{4j} &= \frac{y_{A_j} (z_{B_j} - z_{A_j}) - z_{A_j} (y_{B_j} - y_{A_j})}{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2 + (z_{A_j} - z_{B_j})^2}}; \\
a_{5j} &= \frac{z_{A_j} (x_{B_j} - x_{A_j}) - x_{A_j} (z_{B_j} - z_{A_j})}{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2 + (z_{A_j} - z_{B_j})^2}}; \\
a_{6j} &= \frac{x_{A_j} (y_{B_j} - y_{A_j}) - y_{A_j} (x_{B_j} - x_{A_j})}{\sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2 + (z_{A_j} - z_{B_j})^2}}.
\end{aligned}$$

Правые части в уравнениях системы (91) представляют собой проекции на оси координат  $OXYZ$  составляющих внешнего воздействия, представленного через силу  $\vec{P}$  и момент  $\vec{M}$  (см. рисунок 100). Решение данной системы уравнений позволит определить усилия, которые должны быть сформированы приводами для преодоления внешнего воздействия.

Применительно к МПКЦ типа «гексапод» вновь рассмотрим обработку с использованием сферического инструмента. Так как моделирование силовых факторов при многокоординатной обработке представляет собой отдельную достаточно сложную задачу, ограничимся примером упрощенной технологической операции (рисунок 102). Пусть с помощью сферической фрезы обрабатывается часть некоторой конусной поверхности, центр сферы фрезы при этом движется по окружности, лежащей в плоскости, параллельной  $XOY$ . Возникающая сила резания также лежит в плоскости, параллельной  $XOY$ .



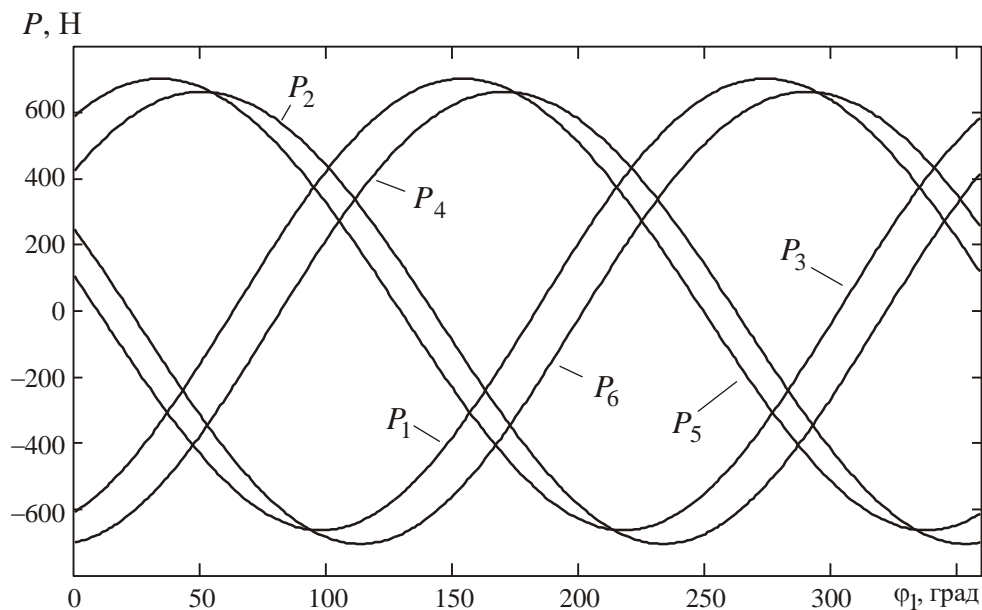
Пусть  $P_{\text{Рез}} = 1000\text{Н}$  и траектория движения центра сферической поверхности инструмента представляет собой окружность радиусом 50 мм, лежащую в плоскости, параллельной плоскости расположения кардановых шарниров  $A_j$  и



**Рисунок 102 – Упрощенная технологическая операция многокоординатной обработки**

отстоящей от нее на 700 мм. Примем, что сферические шарниры  $B_j$  МПКЦ парно сведены.

Если при формировании траектории выходные угловые координаты остаются постоянными (при моделировании принято, что все выходные угловые координаты равны нулю), то усилия в штангах МПКЦ будут изменяться по законам, показанным на рисунке 103.

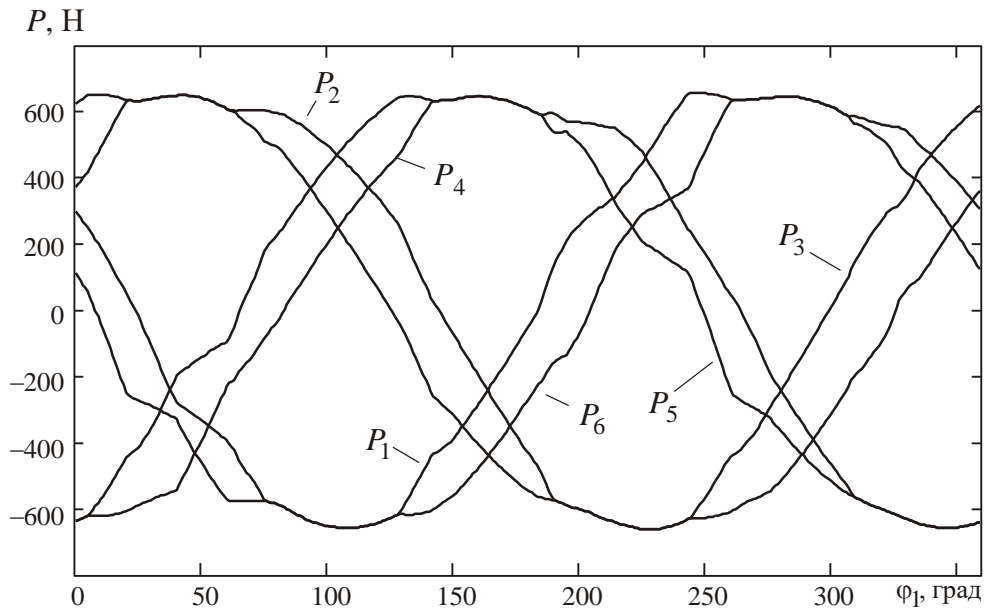


**Рисунок 103 – Изменения усилий в штангах МПКЦ при формировании траектории для случая постоянства выходных угловых координат**

Реализация оптимального по усилиям закона управления приводными устройствами, который, по аналогии с (75), для случая МПКЦ типа «гексапод» должен обеспечивать выполнение критерия

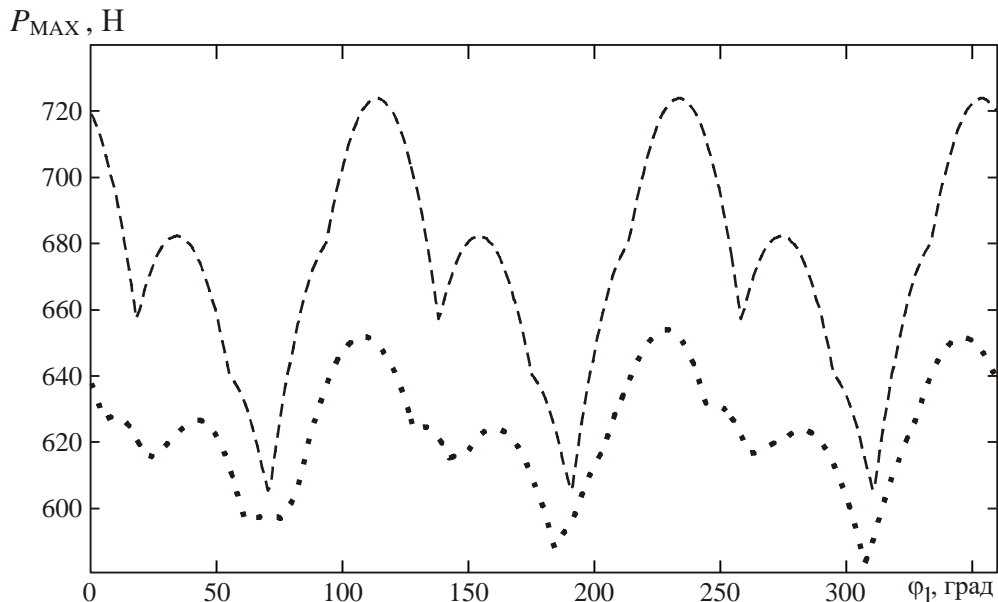
$$\max(P_j(\psi, \vartheta, \gamma)) \rightarrow \min, \quad (92)$$

приведет к результатам, показанным на рисунке 104.



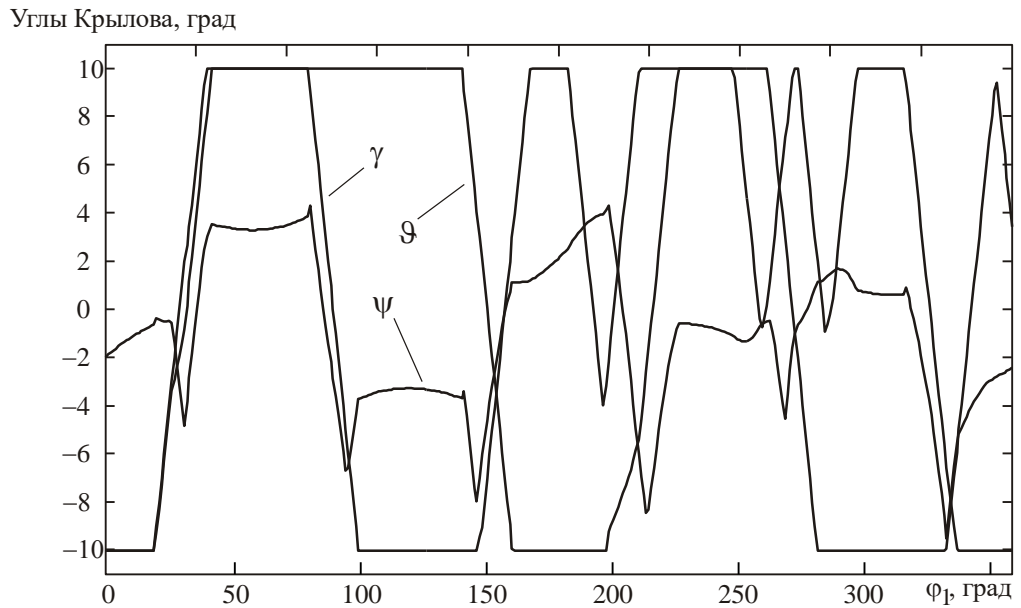
**Рисунок 104 – Изменения усилий в штангах МПКЦ при формировании траектории для случая реализации закона, оптимального по усилиям**

Анализ графиков на рисунке 103 и 104 показывает, что реализация оптимального закона управления приводными устройствами позволила уменьшить максимальные усилия в штангах МПКЦ на 10,2% (рисунок 105), давая возможность повысить надежность оборудования и снизить требования к силовым характеристикам используемых в оборудовании приводов.



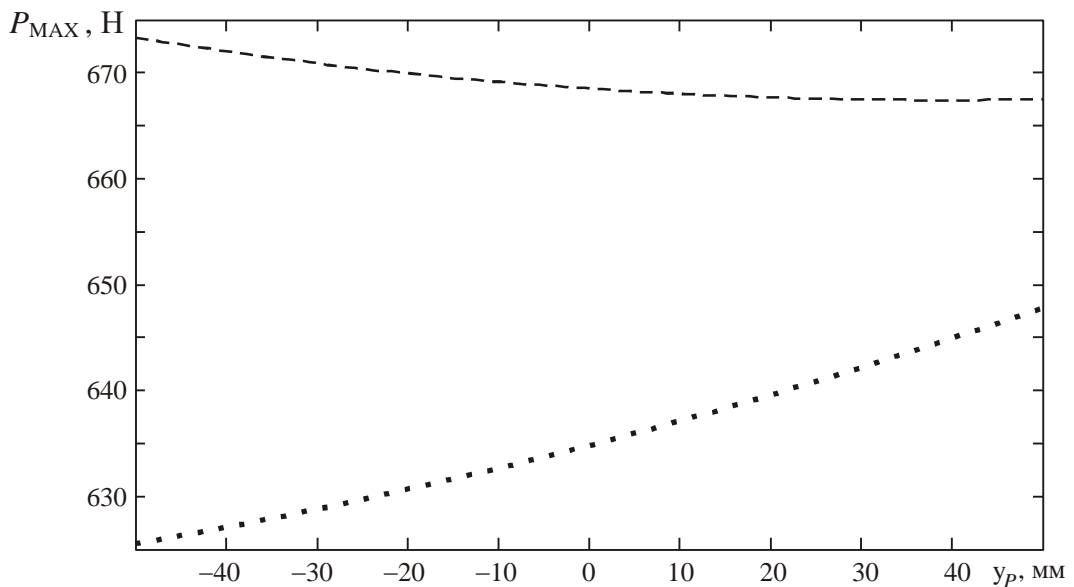
**Рисунок 105 – Максимальные усилия в штангах МПКЦ при формировании траектории: --- при постоянстве выходных угловых координат; ••• при реализации закона, оптимального по усилиям**

Уменьшение усилий достигнуто за счет изменения выходных угловых координат по законам, показанным на рисунке 106. При моделировании было введено ограничение на значения выходных угловых координат.



**Рисунок 106 – Изменение выходных угловых координат при реализации закона, оптимального по усилиям, для круговой траектории**

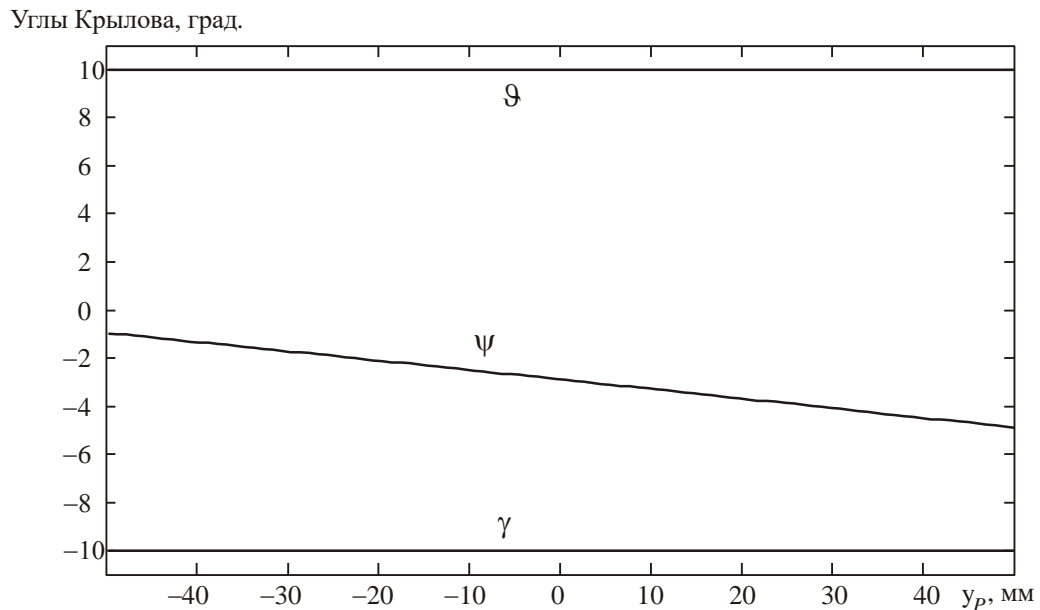
При движении характерной точки инструмента по прямой линии выполнение критерия (92) также обеспечивает снижение усилий в штангах МПКЦ (рисунок 107), достигаемое за счет изменения выходных угловых координат так, как показано на рисунке 108.



**Рисунок 107 – Максимальные усилия в штангах МПКЦ при формировании линейной траектории: — — — при постоянстве выходных угловых координат; ••• при реализации закона, оптимального по усилиям**

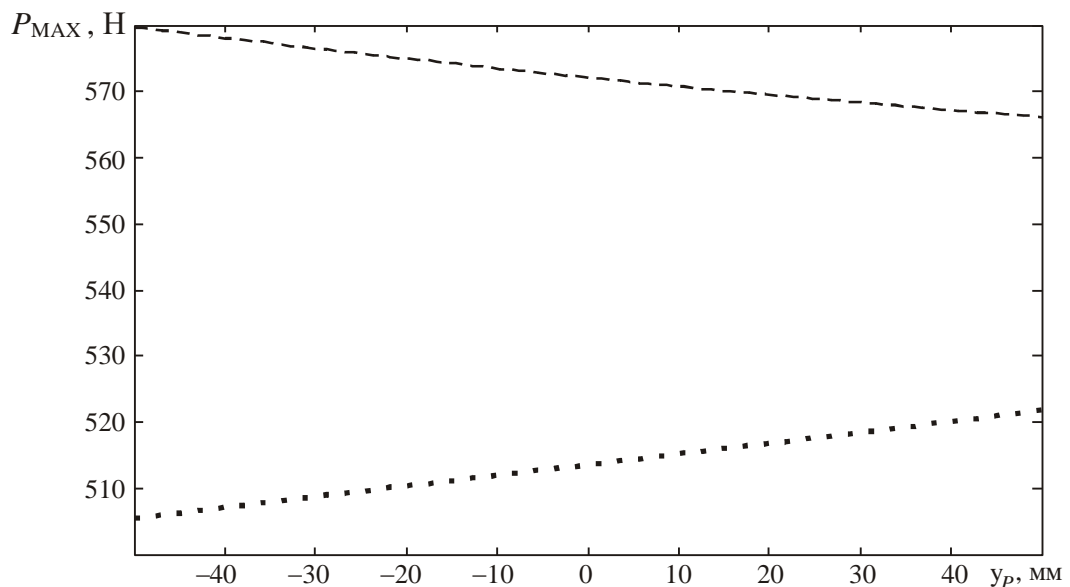
Моделирование проводилось для прямолинейного участка траектории, на котором координата  $u_p$  точки  $P$  инструмента менялась в диапазоне  $(-50...50)$  мм, внешнее воздействие на платформу определялось силой в 1000 Н, лежащей в

плоскости, параллельной  $XOY$  и направленной под углом  $45^\circ$  к направлению движения инструмента.



**Рисунок 108 – Изменение выходных угловых координат при реализации закона, оптимального по усилиям для линейной траектории**

Усилия в штангах МПКЦ и эффективность использования оптимального закона управления приводными устройствами, реализующего критерий (92), определяются внешними силовыми факторами, действующими на его подвижную платформу, что иллюстрирует рисунок 109.



**Рисунок 109 – Максимальные усилия в штангах МПКЦ при формировании линейной траектории: --- при постоянстве выходных угловых координат; ••• при реализации закона, оптимального по усилиям**

На этом рисунке показаны результаты моделирования для случая направления внешней силы, отличного от принятого при моделировании, результаты кото-

рого показаны на рисунке 107. В сравнении с рисунком 107 можно отметить как уменьшение максимального значения усилий в штангах, так и повышение эффективности оптимального управления, проявляющееся в большем относительном уменьшении максимальных усилий.

В силу того, что усилия в штангах МПКЦ определяются внешними силовыми факторами, действующими на его подвижную платформу, затруднительно на этапе проектирования оборудования количественно задать возможное снижение требований к силовым характеристикам приводов, определяемое реализацией критерия (92). Поэтому закон управления приводными устройствами, оптимальный по усилиям, может в большей степени использоваться как фактор, позволяющий снизить силовые нагрузки на элементы ОПКС (штанги, привода) в процессе его работы, тем самым увеличивая ресурс оборудования.

Система уравнений (91) использована при создании шестикомпонентного измерителя-позиционера (Приложение Ж) и прикладной программы для работы с ним (Приложение К).

### 3.5.1. Энергоэффективный закон

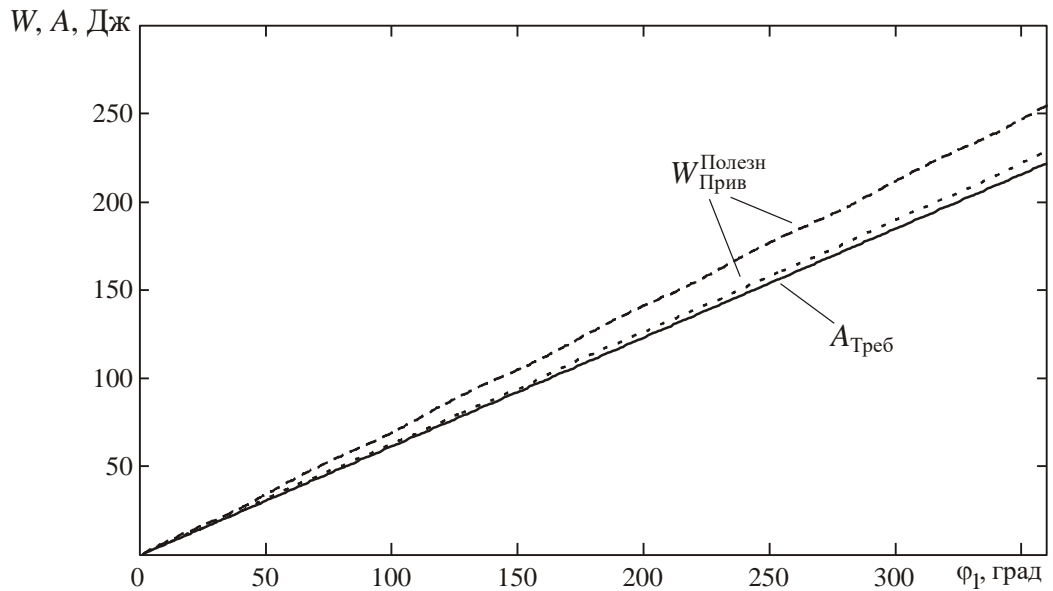
Моделирование энергоэффективного закона управления приводными устройствами применительно к МПКЦ типа «гексапод» будем проводить с использованием критерия

$$W_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}}(\psi, \vartheta, \gamma) = \sum_{j=1}^6 |\Delta L_j(\psi, \vartheta, \gamma) P_j(\psi, \vartheta, \gamma)| \rightarrow \min, \quad (93)$$

аналогичного критерию (88) для рассмотренного ранее плоского МПКЦ.

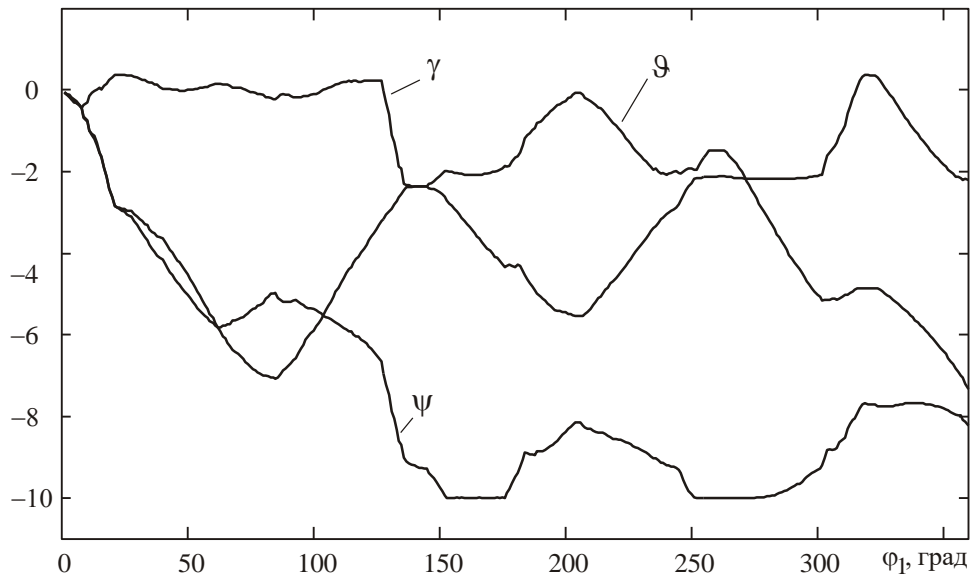
Рассмотрим задачу формирования движения характерной точки инструмента по окружности (см. рисунок 102), геометрические и силовые параметры соответствуют моделированию оптимального по усилиям закона управления приводными устройствами. Результаты моделирования движения характерной точки инструмента по окружности показаны на рисунке 110.

Анализ графиков показывает, что за счет выполнения критерия (93) получено снижение энергии, потребляемой приводами, более чем на 10%. Это обеспечено изменением угловых координат по законам, показанным на рисунке 111.



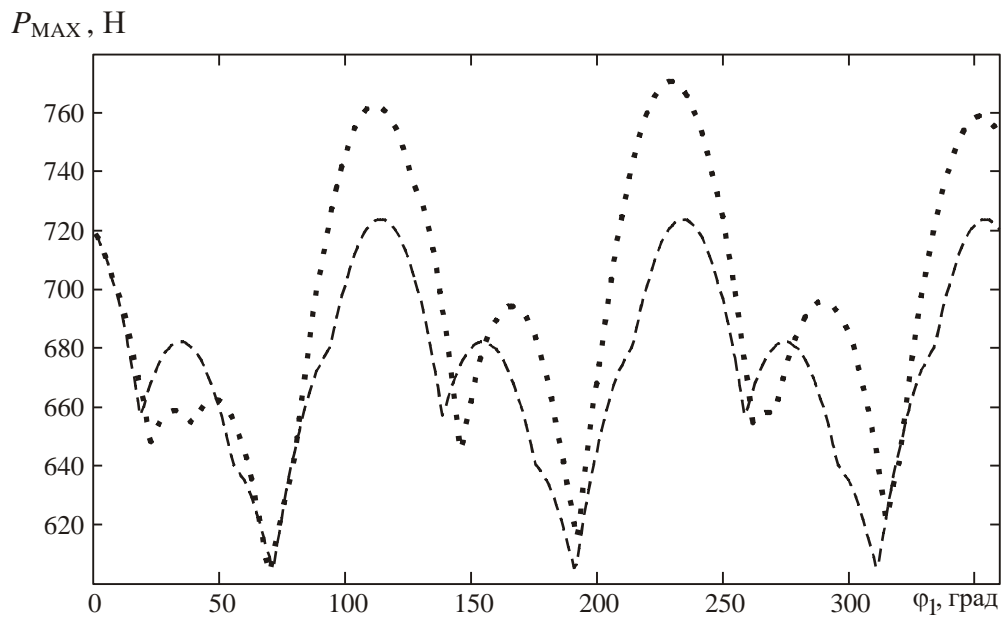
**Рисунок 110 – Энергия, потребляемая приводами при формировании движения характерной точки инструмента по окружности:**  
 --- при постоянстве выходных угловых координат;  
 ... при энергоэффективном законе управления приводными устройствами

Углы Крылова, град.



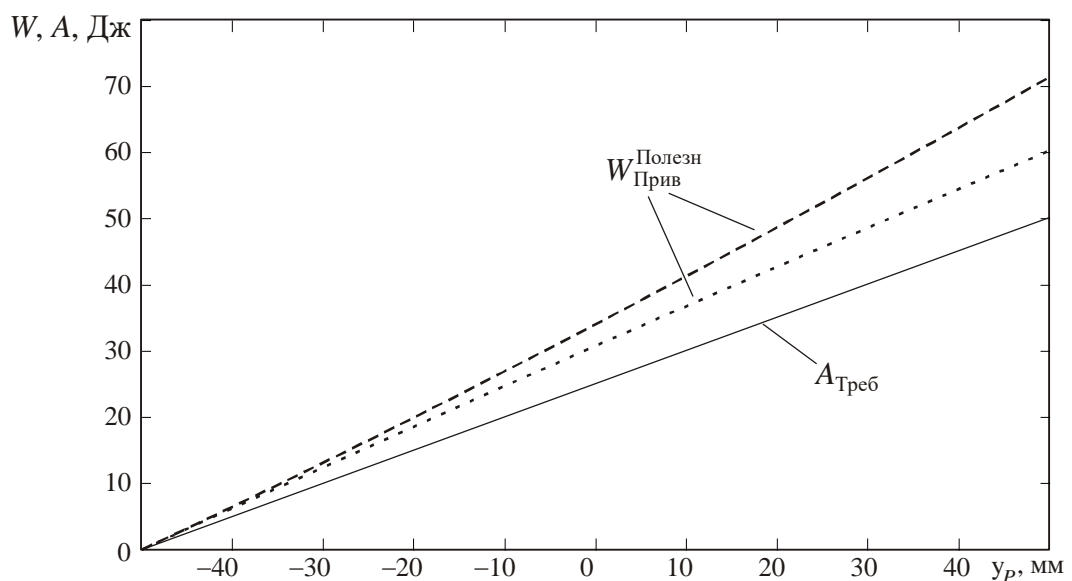
**Рисунок 111 – Изменение выходных угловых координат при формировании движения характерной точки инструмента по окружности**

Реализация энергоэффективного закона управления приводными устройствами может приводить к увеличению усилий в штангах МПКЦ по сравнению с движением, при котором выходные угловые координаты остаются неизменными (рисунок 112). Следовательно, при реализации энергоэффективного закона необходимо учитывать имеющиеся ограничения на усилия, развиваемые используемыми в ОПКС приводами.



**Рисунок 112 – Максимальные усилия в штангах МПКЦ при формировании движения характерной точки инструмента по окружности:**  
 – – – при постоянстве выходных угловых координат;  
 ••• при энергоэффективном законе управления приводными устройствами

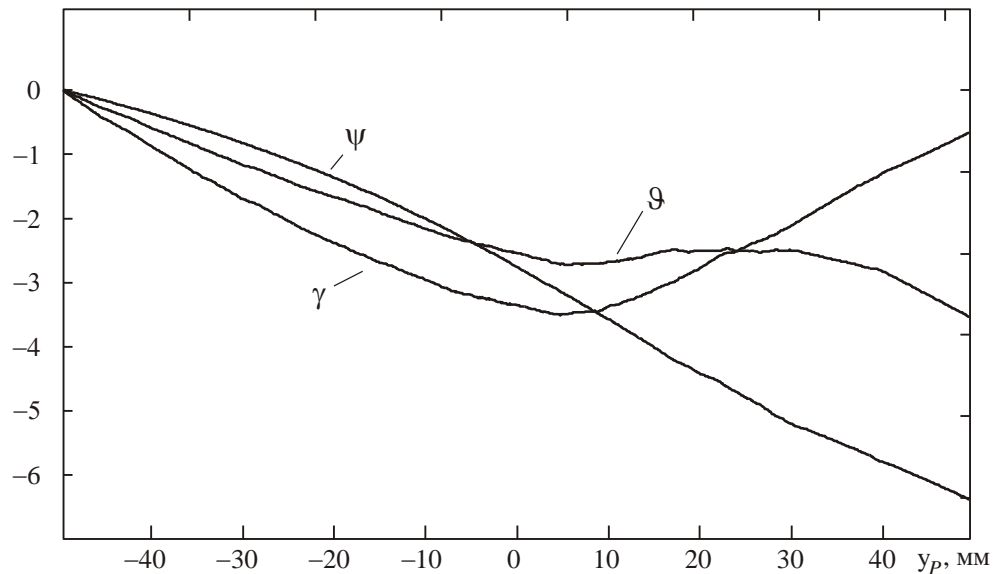
Моделирование движения характерной точки инструмента по линейной траектории также показало возможность снижения энергии, потребляемой приводами (рисунок 113). Вид траектории и внешние силовые факторы принимались аналогичными рассмотренным при моделировании управления, оптимального по усилиям.



**Рисунок 113 – Энергия, потребляемая приводами при формировании линейной траектории:** – – – при постоянстве выходных угловых координат; ••• при энергоэффективном законе управления приводными устройствами

Уменьшение потребляемой энергии составило  $\approx 16\%$  и достигнуто за счет изменения выходных угловых координат по законам, показанным на рисунке 114.

Углы Крылова, град.



**Рисунок 114 – Изменение выходных угловых координат при реализации энергоэффективного управления приводными устройствами для линейной траектории**

Таким образом, энергоэффективный закон управления приводными устройствами, обеспечивающий выполнение критерия (93), позволяет снизить энергию, потребляемую приводами для реализации движения инструмента при выполнении требуемой технологической операции. Эффективность реализации энергоэффективного закона во многом будет определяться точностью определения внешних силовых факторов, действующих на подвижную платформу. Как отмечалось выше, внешние силовые факторы могут быть рассчитаны при моделировании технологической операции.

Так как при работе ОПКС возникают силовые факторы, определяемые инерционными характеристиками элементов оборудования, целесообразно провести исследование энергоэффективного закона управления приводным устройством ОПКС с использованием динамических моделей. Это вопрос рассмотрен в следующей главе.



### **3.6. Методика расчета оптимальных законов управления приводным устройством машины с параллельной кинематической структурой**

Рассмотренные в разделе 3.5 оптимальные законы управления приводными устройствами машин с параллельными кинематическими структурами, обеспечивающие выполнение критериев (90), (92) и (93), в иерархии управления современным технологическим оборудованием с ЧПУ можно в отношении к алгоритмам управления верхнего уровня. Алгоритм верхнего уровня реализуется в виде программы пользователя, загружаемой в систему ЧПУ, и обычно представляет собой совокупность кодов по ГОСТ 20999-83.

Как описано в разделе 2.4, при описании требуемых перемещений рабочего органа наиболее часто используются элементарное перемещение по прямой и элементарное перемещение по дуге. В соответствии с ГОСТ 20999-83, линейное перемещение задается подготовительной функцией G01 «Линейная интерполяция», после которой в кадре программы указывают координаты конечной точки элементарного перемещения. Для оборудования, имеющего управляемые поворотные координаты A, B и C, значения углов поворота также указывается в кадре программы. Перемещение по дуге задается подготовительной функцией G02 или G03 «Круговая интерполяция», после которой в кадре программы указывают координаты конечной точки элементарного перемещения и характеристики дуги. Выбор функции G02 или G03 определяется требуемым направлением движения – по или против часовой стрелки.

Представляет практический интерес программное обеспечение (ПО), позволяющая формировать управляющую программу в G-кодах для системы ЧПУ оборудования с параллельной кинематической структурой, которая реализует перемещение рабочего органа по требуемой траектории с использованием линейных координат X, Y и Z и выполнение одного из критериев (90), (92) или (93) за счет изменения поворотных (угловых) координат A, B и C. Исходной информацией для этого ПО расчетов должна являться программа в G-кодах, формирующая перемещение рабочего органа по требуемой траектории с использованием только

линейных координат  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . Программное обеспечение должно учитывать кинематические характеристики оборудования и, для реализации критериев (92), (93), силовые факторы, возникающие при реализации технологической операции. Учет характеристик реального оборудования позволяет отнести это ПО к классу постпроцессоров.

В основе ПО для формирования управляющей программы, реализующей одно из оптимальных управлений приводным устройством должна лежать соответствующая методика. Методика расчета оптимальных законов управления приводным устройством разработана для технологической машины на основе МПКЦ типа «гексапод». Методика обеспечивает формирование команд на движение рабочего органа по требуемой элементарной траектории исходя из задачи выполнения требуемого критерия (90), (92) или (93).

Требуемая траектория движения рабочего органа оборудования должна быть описана в исходной программе для системы ЧПУ, использующей функции G01, G02 и G03 для линейных координат. Угловые координаты определяются в процессе расчета оптимальных законов управления. Для всех угловых координат должны быть заданы ограничения на их величины. При использовании методики должна быть известна информация о кинематической модели оборудования в формате уравнений (22) или аналогичных.

Методика предполагает выполнение следующих действий:

1. Из анализа исходной программы определяются координаты начальной и конечной точек требуемой элементарной траектории движения характерной точки рабочего органа. Под элементарной траекторией понимается часть траектории, формируемая присутствующей в исходной программе функцией G01, G02 или G03.

2. Для начальной точки элементарной требуемой траектории движения решается обратная задача кинематики о положениях: с использованием уравнений кинематической модели рассчитываются значения  $L$ -координат. Угловые координаты для начальной точки должны быть известными из предшествующих расчетов, в противном случае все они принимаются равными нулю. Вид уравнений кинема-

тической модели определяется используемыми для описания положения рабочего органа угловыми координатами:

- в случае использования углов Крылова используются уравнения (22);
- в случае использования станочных углов (см. 2.2.1) используются уравнения

$$\begin{aligned}
 L_j^2 = & x_{B_j}^2 + y_{B_j}^2 + z_{B_j}^2 + (x_C - x_{A_j})^2 + (y_C - y_{A_j})^2 + (z_C - z_{A_j})^2 + \\
 & + 2 \left[ cBcC x'_{B_j} + cBsC y'_{B_j} - sB z'_{B_j} \right] (x_C - x_{A_j}) + \\
 & + 2 \left[ (sAsBcC - cAsC) x'_{B_j} + (cAcC - cAsC) y'_{B_j} + sAcB z'_{B_j} \right] (y_C - y_{A_j}) + \\
 & + 2 \left[ (sAsC + cAsBcC) x'_{B_j} + (cAsBsC - sAcC) y'_{B_j} + cAcB z'_{B_j} \right] (z_C - z_{A_j}), \quad j = 1 \dots 6,
 \end{aligned}$$

где для сокращения записи введены обозначения:  $sA = \sin A$ ,  $cA = \cos A$  и т. д.

3. Решается задача разбиения элементарной требуемой траектории на участки и минимизации выбранного критерия.

а. Элементарная требуемая траектория разбивается на  $N_{уч} = 2$  участка – по ее «середине» задается промежуточная точка. Координаты промежуточной точки рассчитывается из условия разбиения требуемой траектории на две составные части такого же типа: траектория в виде отрезка делится на отрезки, траектория в виде дуги окружности делится на дуги аналогичного радиуса.

б. Для перемещения из начальной точки в промежуточную решается задача минимизации критерия, соответствующего формируемому оптимальному закону. Если минимизируется критерий (92) или (93), то используются известные для начальной точки внешние силовые факторы; эти факторы при решении задачи минимизации принимаются неизменными. При минимизации критерия обеспечивается нахождение значений угловых координат в допустимых диапазонах; кроме того, может проверяться кинематическая реализуемость движений из условия допустимых углов поворота в шарнирах оборудования [79], а также условие обхода особых положений (см. раздел 3.3). Полученные в результате значения угловых выходных координат в совокупности с известными линейными выходными координатами промежуточной точки используются в дальнейших расчетах.

с. Для перемещения из промежуточной точки в конечную решается задача минимизации критерия, соответствующего формируемому оптимальному закону. Если минимизируется критерий (92) или (93), то используются известные для промежуточной точки внешние силовые факторы.

d. Определяется значение общего критерия как суммы минимизированных значений критерия для каждого из участков.

e. Количество участков  $N_{yч}$  увеличивается на единицу.

f. Для нового количества участков определяются координаты промежуточных точек, минимизируется критерий, соответствующий формируемому оптимальному закону, рассчитывается общий критерий и его уменьшение по сравнению с предшествующим разбиением траектории на участки.

g. Если уменьшение общего критерия не превысило заданный порог или величина участка, на который разбивается траектория, стала меньше заданного предельного значения, то задача разбиения элементарной требуемой траектории на участки и минимизации требуемого критерия считается решенной. В противном случае решение продолжается с пункта «e».

4. Для каждого из участков записывается соответствующая G-функция с полученными в результате расчетов значениями линейных и угловых координат. Значения контурных скоростей на участках должно быть равно контурной скорости, заданной в исходной программе для требуемой элементарной траектории.

5. Для следующей требуемой элементарной траектории осуществляются процедуры 3 и 4.

В результате формируется выходная программа для системы ЧПУ оборудования с параллельной кинематической структурой, которая позволяет реализовать выбранный оптимальный закон управления приводным устройством этого оборудования.

Методика формирования оптимальных законов управления приводными устройствами в части вычисления общих критериев оптимальности была реализована в виде программного обеспечения для среды MATLAB и использована при выполнении моделирования в разделе 3.5.

Описанная методика расчета оптимальных законов управления приводными устройствами использована как основа для создания программного обеспечения для расчета траекторий движения рабочего органа технологической машины с параллельной кинематической структурой на основе механизма-гексапода, отвечающих требованиям по увеличению скорости перемещения рабочего органа, по повышению надежности машины за счет перераспределения возникающих в ее элементах силовых факторов, по снижению потребления энергии ее приводами. Программное обеспечение входит в состав программно-аппаратного комплекса для управления ОПКС, созданного в ООО «НПО «ТехноЛайн» (Приложение А).

### **3.7. Экспериментальная проверка возможности реализации энергоэффективного закона управления приводными устройствами**

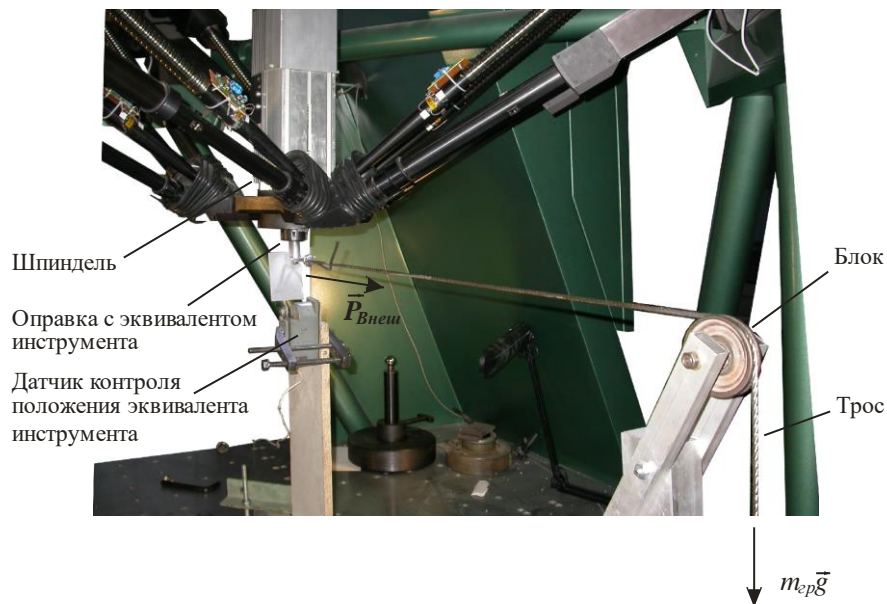
Для экспериментальной проверки возможности реализации энергоэффективного закона управления приводными устройствами применительно к пространственным МПКЦ была создана экспериментальная установка на базе координатно-измерительной машины КИМ-1000 фирмы «Лапик» (г. Саратов, Россия), показанная на рисунке 115 [255].

Данная координатно-измерительная машина построена на основе механизма с 6-ю степенями свободы – гексапода. Особенностью машины является возможность использования ее для обработки материалов методом фрезерования. С этой целью машина оснащена высокооборотным шпинделем мощностью 5,5 кВт.

В экспериментальной установке обеспечивается нагружение шпинделя, закрепленного на подвижной платформе МПКЦ, внешней силой  $P_{Внеш}$ . Внешняя сила формируется грузом массой  $m_{гр}$ , висющим на тросе.

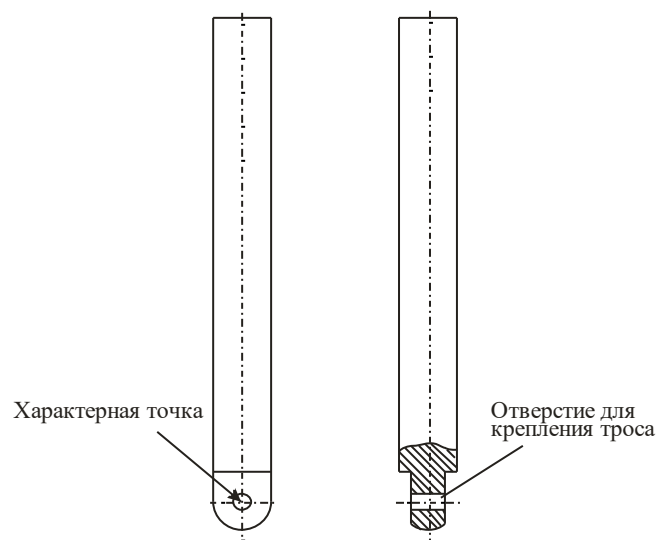
На рисунке 116 показан эскиз эквивалента инструмента, закрепляемого в шпинделе КИМ. Наличие сферичности на нижнем конце эквивалента обеспечивает однозначность срабатывания датчика контроля начального положения при различных углах разворота подвижной платформы МПКЦ. Центр этой сферической поверхности принят за характерную точку; разворот платформы осуществлялся

относительно этой точки. Ось отверстия для крепления троса проходит через характерную точку, тем самым обеспечивается прохождение через характерную точку линии действия внешней силы.



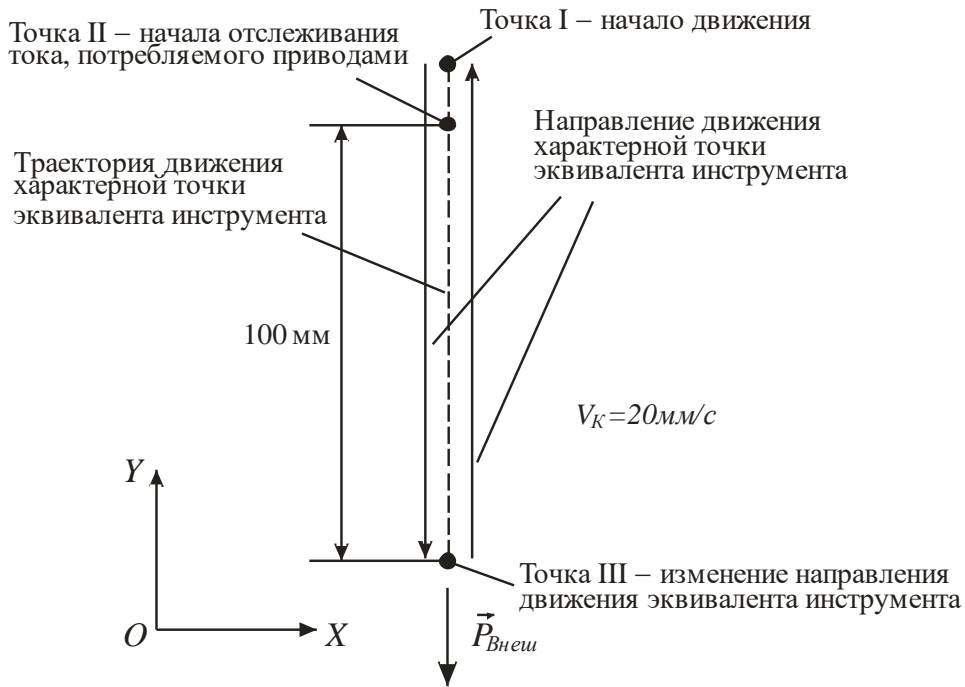
**Рисунок 115 – Экспериментальная установка на базе координатно-измерительной машины КИМ-1000**

В ходе экспериментов реализовывалось движение характерной точки по линейной траектории (рисунок 117): при неизменных координатах  $X$  и  $Z$  координата  $Y$  изменялась на 100 мм. Движение начиналось с заданной контурной скоростью  $V_K = 20 \text{ мм/с}$  из некоторой начальной точки I по направлению действия внешней силы. В процессе движения происходило срабатывание датчика (точка II), которое запускало процесс измерения и записи в персональный компьютер значений тока, потребляемого приводами установки при перемещении характерной точки, а также напряжения питания приводов. Эта информация использована для определения энергии, потребляемой приводами.



**Рисунок 116 – Эквивалент инструмента**

После прохождения характерной точкой расстояния в 100 мм направление движения менялось на противоположное (точка III). Так как именно такое соотношение между перемещением инструмента и направлением составляющей  $\vec{P}_\tau$  силы резания характерно при выполнении фрезерных операций, только этот участок траектории рассматривается в дальнейшем при анализе потребления приводами энергии.



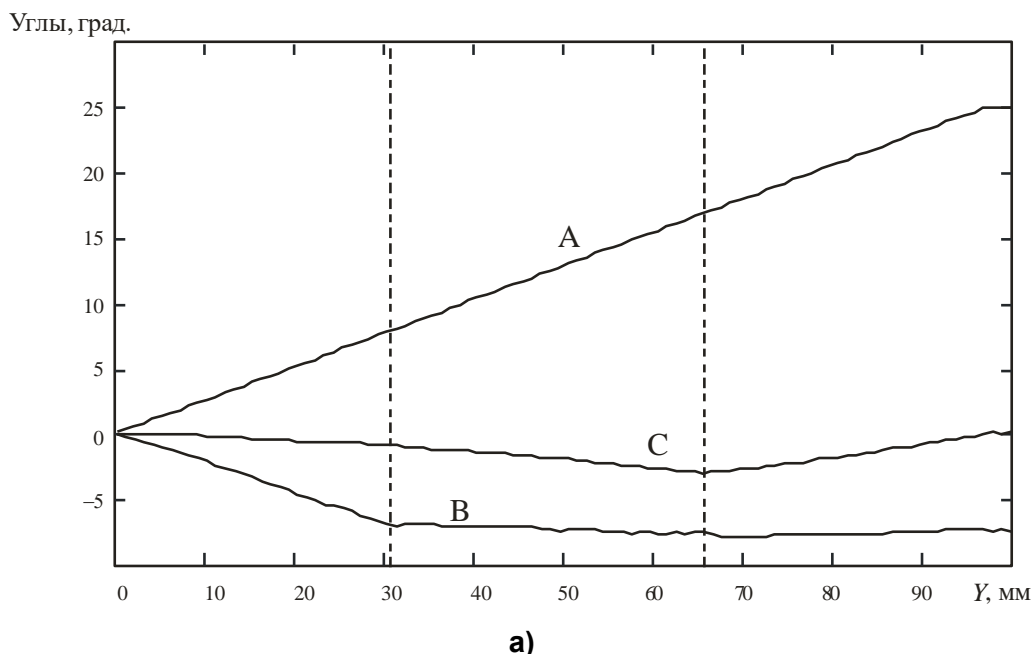
**Рисунок 117 – Движение характерной точки при экспериментах**

Измерительная система координатно-измерительной машины КИМ-1000 оперирует с выходными угловыми координатами, представленными в традиционном для технологического оборудования виде А, В, С (см. 2.2.1). В серии экспериментов была определена энергия, потребленная приводами на перемещение характерной точки эквивалента инструмента из положения III в положение II для случая  $A=B=C=0$ , т. е. неразвернутой платформы. Средняя на серии из 25 экспериментов полная потребленная энергия составила  $W_{\text{эсп}} = 296,7 \text{ Дж}$ . Очевидно, что полная энергия включает в себя полезную энергию и неизбежные потери. Рассчитанное с использованием построенных для КИМ-1000 кинематической и статической моделей потребление приводами полезной энергии для случая  $A=B=C=0$

составило  $W_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}} = 224,7$  Дж, что свидетельствует о достаточно высокой эффективности этой технологической машины.

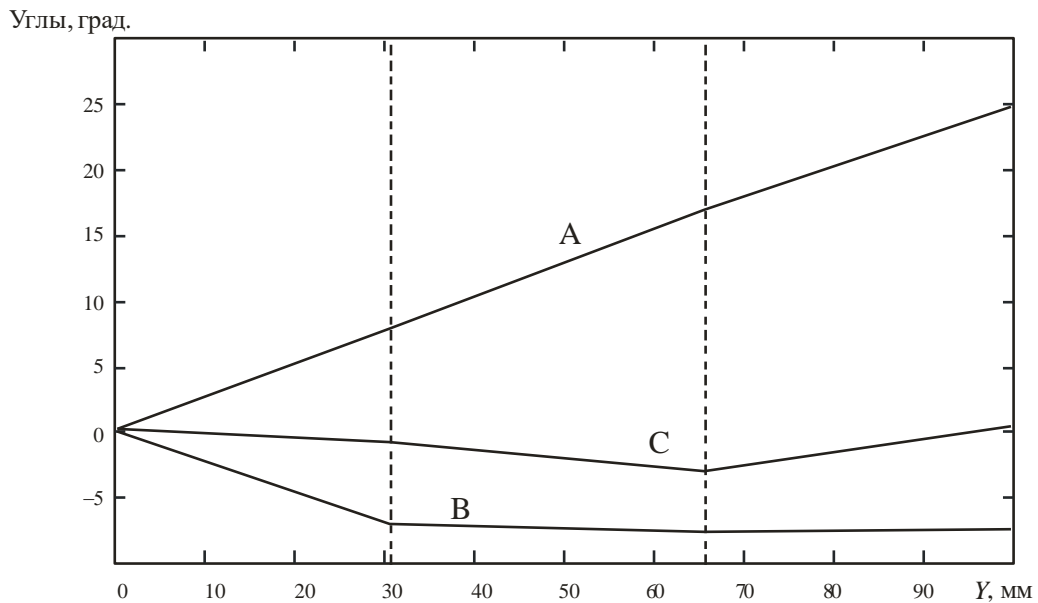
Теоретический минимум полезной энергии будет равен  $A_{\text{Треб}} = |\Delta Y m_{cp} g|$ . С учетом того, что  $m_{cp} = 203$  кг, то  $A_{\text{Треб}} = |-0,1 \cdot 203 \cdot 9,81| = 199,1$  Дж. Следовательно, при реализации энергоэффективного управления можно ожидать снижения потребления энергии на 25,6 Дж или  $\frac{224,7 - 199,1}{224,7} 100 = 11,4\%$ .

С использованием методики, описанной в разделе 3.6, для траектории движения характерной точки из положения III в положение II были рассчитаны значения углов А, В, С, обеспечивающие снижение потребляемой приводами энергии. Графики изменения углов для энергоэффективного закона управления приводными устройствами показаны на рисунке 118, а. При экспериментальной реализации энергоэффективного закона управления приводными устройствами показанные на рисунке 118, а графики были заменены отрезками прямых (рисунок 118, б).



**а)**  
**Рисунок 118 – Изменения выходных угловых координат, обеспечивающие снижение потребляемой приводами энергии: а) – рассчитанные значения; б) – аппроксимация отрезками прямых**





б)  
Окончание рисунка 118

Экспериментальное исследование движения характерной точки по заданной траектории при изменении угловых выходных координат по законам, изображенным на рисунке 118, б, показало, что средняя на серии из 25 экспериментов потребленная приводами полная энергия составила  $W_{\text{Эксп}}^{\text{Эфф}} = 272,7 \text{ Дж}$ . Снижение потребления энергии на 24 Дж хорошо согласуется с результатами расчетов для полезной энергии и подтверждает возможность практической реализации энергоэффективного управления применительно к ОПКС. В относительных единицах снижение потребления приводами энергии составило 8,1 %.

Помимо энергоэффективного закона управления приводными устройствами, в нескольких сериях экспериментов реализовывалось движение характерной точки по заданной траектории при произвольных значениях углов A, B, C. Ни в одной из этих серий средняя потребленная приводами энергия не опустилась ниже значения  $W_{\text{Эксп}}^{\text{Эфф}} = 272,7 \text{ Дж}$ , что свидетельствует об оптимальности закона управления, при котором угловые выходные координаты изменяются так, как показано на рисунке 118.

### **3.8. Возможные области применения энергоэффективного управления приводными устройствами машин с параллельными кинематическими структурами**

#### **3.8.1. Инкрементальная формовка**

Помимо рассмотренной выше технологической операции многокоординатного фрезерования фасонными фрезами существуют и другие, для которых использование оборудования с параллельной кинематической структурой и предложенных законов управления приводными устройствами является целесообразным. Ниже рассмотрено использование ОПКС для реализации технологической операции инкрементальной формовки.

Инкрементальная формовка (SPIF – single point incremental forming) – относительно новая технология обработки листовых материалов [140], при которой заготовка локально деформируется инструментом – пуансоном. Технология активно изучается в различных странах [39, 166, 192, 268], что объясняется рядом ее особенностей. Во-первых, технология достаточно проста в реализации – при наличии простейшей крепежной оснастки она может быть реализована на трехкоординатном фрезерном станке с ЧПУ [167]. Во-вторых, она идеально подходит для изготовления небольших партий деталей из листового материала, так как не требует изготовления штамповочной оснастки.

Основные потенциальные области применения SPIF – это аэрокосмическая и автомобильная промышленности, испытывающие потребности в изготовлении сложнопрофильных корпусных деталей из листовых материалов, часто в единичных экземплярах. Помимо того, эта технология востребована в задачах прототипирования, а также при изготовлении индивидуальных протезов.

Исследования в области SPIF осуществляются по следующим основным направлениям:

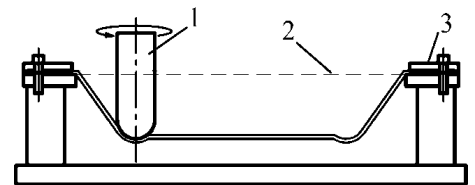
– исследование процессов, происходящих при взаимодействии листовой заготовки и пуансона, с целью получения изделий с заданными свойствами [40, 161, 194];

– моделирование процессов, происходящих при взаимодействии листовой заготовки и пуансона [145, 173, 233, 238], с целью определения возникающих при формовке силовых факторов.

Кроме того, исследуются вопросы создания специализированного оборудования для реализации SPIF [144, 179, 261]. В работах [144, 261] отмечено, что перспективным для этого является использование механизмов с параллельными кинематическими цепями.

Инкрементальная формовка предполагает взаимодействие листовой заготовки и пуансона, в результате которого происходит пластическое деформирование заготовки (рисунок 119), закрепленной в оснастке.

Собственно формообразование осуществляется за счет перемещения пуансона, в общем случае по трем линейным координатам. Поверхность пуансона, взаимодействующая с материалом заготовки, должна иметь сферическую форму. Пуансону придают вращение относительно его продольной оси, что формирует область локального нагрева заготовки и снижает усилия, необходимые для ее деформирования.



**Рисунок 119 – Схема реализации инкрементальной формовки:  
1 – пуансон; 2 – заготовка;  
3 – оснастка**

Необходимость в трех ортогональных перемещениях пуансона и в его вращении определяет требования к оборудованию, используемому при SPIF формовке. Этим требованиям удовлетворяют фрезерные станки, в которые пуансон может устанавливаться вместо фрезы. Такой подход широко реализуется на практике.

В работе [144] отмечено, что силовые факторы, возникающие при фрезерной обработке, обычно существенно выше силовых факторов, возникающих при SPIF. Кроме того, фрезерный станок зачастую имеет функции, не востребованные при SPIF, например, сбор стружки. Поэтому промышленный фрезерный станок является не самым эффективным оборудованием для реализации SPIF. Более эффективным будет оборудование, специально разработанное для выполнения этой

технологической операции. Такое оборудование может быть создано на основе МПКЦ типа «гексапод», как это рекомендовано в [111, 191].

При реализации SPIF работа, совершаемая приводами подач, является основной работой по формообразованию в отличие от операции фрезерования, при которой существенно потребление энергии привода главного движения. Следовательно, уменьшение потребления энергии приводами подач ОПКС может существенно улучшить эффективность выполнения SPIF.

Уменьшение потребления энергии приводами подач при выполнении инкрементальной формовки может происходить за счет [84]:

- рационального выбора положения заготовки;
- реализации энергоэффективного закона управления приводными устройствами.

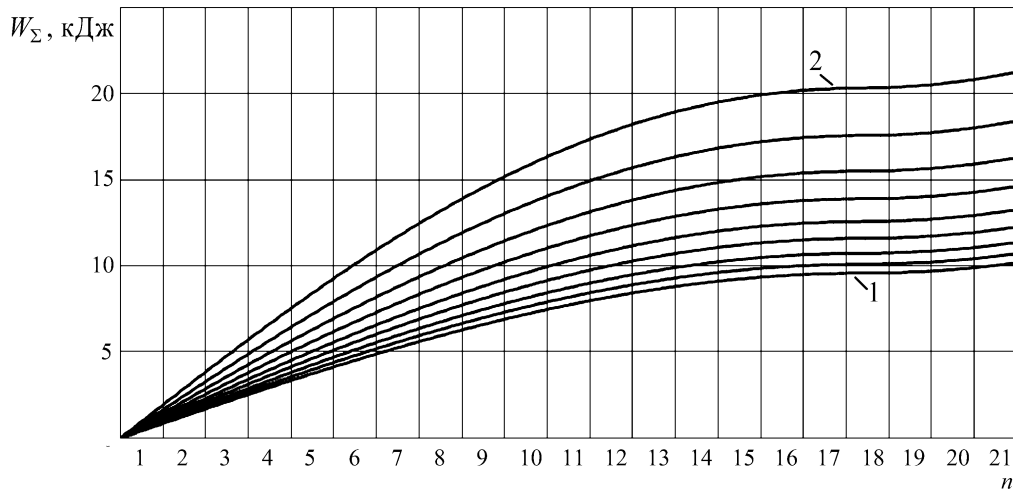
Влияние положение заготовки на потребление энергии приводами ОПП объясняется нелинейными связями между входными и выходными координатами, см. например систему (22) для механизма типа «гексапод». Эта особенность МПКЦ позволяет сделать предположение о том, что при реализации одинаковых траекторий движения инструмента, испытывающего одинаковые нагрузки, но начинающихся в разных точках, будут наблюдаться различия в потребляемой приводами оборудования энергии.

На рисунке 120 показаны результаты моделирования потребляемой приводами ОПП энергии в зависимости от месторасположения заготовки.

Геометрические параметры оборудования, необходимые для моделирования, приняты соответствующими параметрам координатно-измерительной машины КИМ-1000 фирмы Лапик (Россия). Машина построена по гексаподной схеме и может оснащаться обрабатывающей фрезерной головкой. Следовательно, ее конструкция позволяет формировать силовые воздействия, требуемые для SPIF.

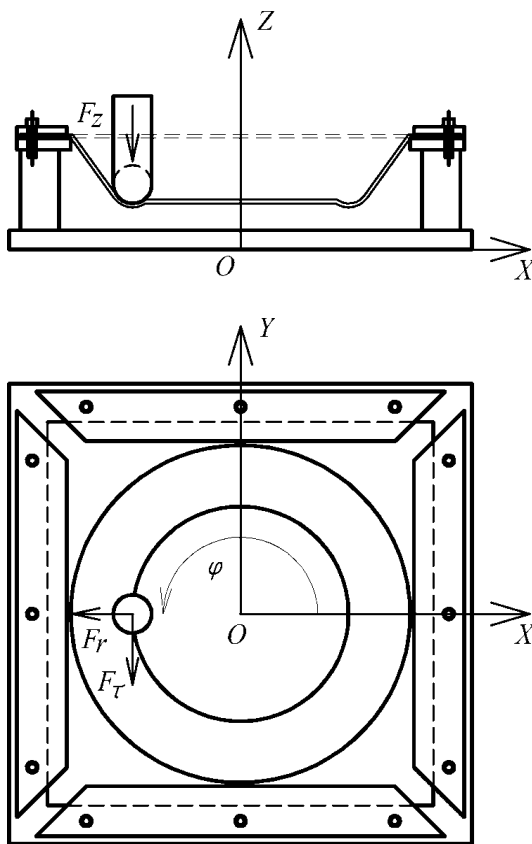
Внешние силовые факторы, параметры инструмента и его траектории движения при моделировании приняты с учетом результатов работы [145]. В этой работе авторы провели экспериментальную оценку сил  $F_r$ ,  $F_\tau$ ,  $F_z$  (рисунок 121), воз-

никающих при деформировании пуансоном заготовки из низкоуглеродистой стали DC01 толщиной 1,15 мм.



**Рисунок 120 – Потребление энергии приводами ОПКС при моделировании инкрементальной формовки: 1 – при  $z_1=300$  мм; 2 – при  $z_1=700$  мм;  $n = 1, \dots, 21$  – номер плоскости**

Пуансон имеет на своем рабочем конце полусферу диаметром 25 мм. Глубина формования – 1,06 мм. Движение инструмента осуществляется по окружности



радиусом  $R = 75$  мм в плоскости  $OXY$  в направлении положительного изменения угла  $\varphi$ . При моделировании силовые факторы рассчитывались с учетом того, что пуансон имеет длину 150 мм, а проекции силы  $F_z = 2500$  Н,  $F_t = 1400$  Н,  $F_r = 350$  Н в соответствии с результатами работы [145].

Траектория движения инструмента при моделировании соответствует последовательному движению точки  $K$  по окружностям, лежащим в 21 плоскости, параллельной плоскости  $OXY$ . Плоскости отстоят друг от друга на величину глубины формования

**Рисунок 121 – Силовые факторы, возникающие при инкрементальной формовке**

1,06 мм, радиусы окружностей последовательно уменьшаются на 0,5 мм. Положение инструмента при его движении в первой плоскости и координата  $z_1$  этой плоскости показаны на рисунке 122.

С точки зрения требований к перемещениям пуансона при SPIF механизм-гексапод имеет избыточность – все выходные угловые координаты в этой технологической операции не используются. При моделировании всем этим координатам назначены нулевые значения.

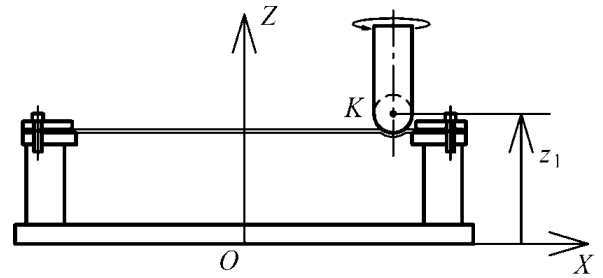


Рисунок 122 – Координата первой плоскости движения инструмента

Как видно из рисунка 120, проведено моделирование девяти вариантов расположения заготовки в системе координат  $OXYZ$ , отличающихся координатой  $z_1$  первой плоскости: от 300 мм до 700 мм с шагом 50 мм. Анализ графиков показывает существенную зависимость потребляемой приводами энергии от расположения заготовки: суммарное потребление энергии при  $z_1 = 700$  мм более чем в два раза превышает аналогичный показатель для  $z_1 = 300$  мм.

Для того же оборудования и технологической операции выполнено моделирование энергоэффективного управления (93). Результаты моделирования для случая  $z_1 = 300$  мм показаны на рисунке 123.

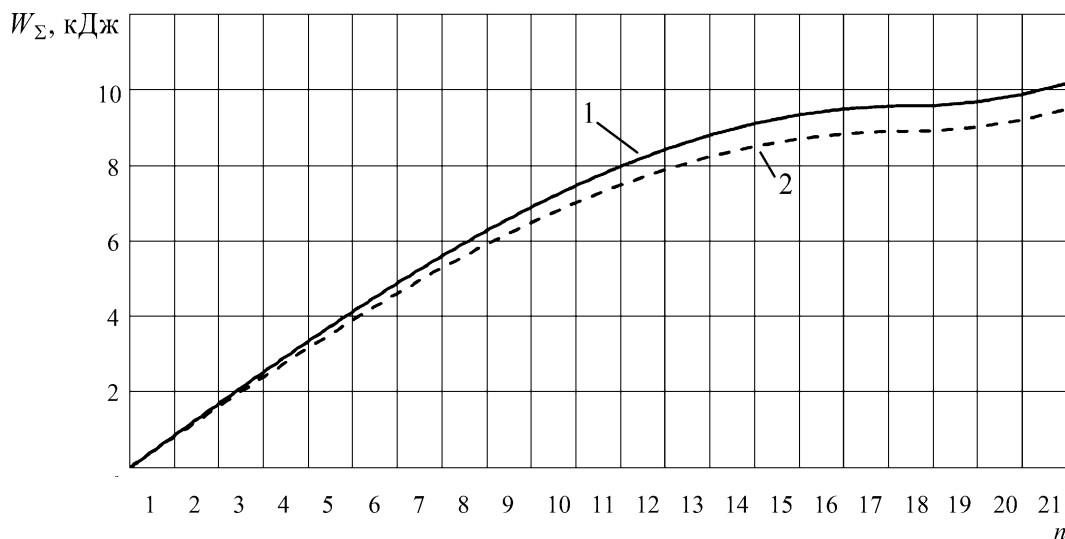
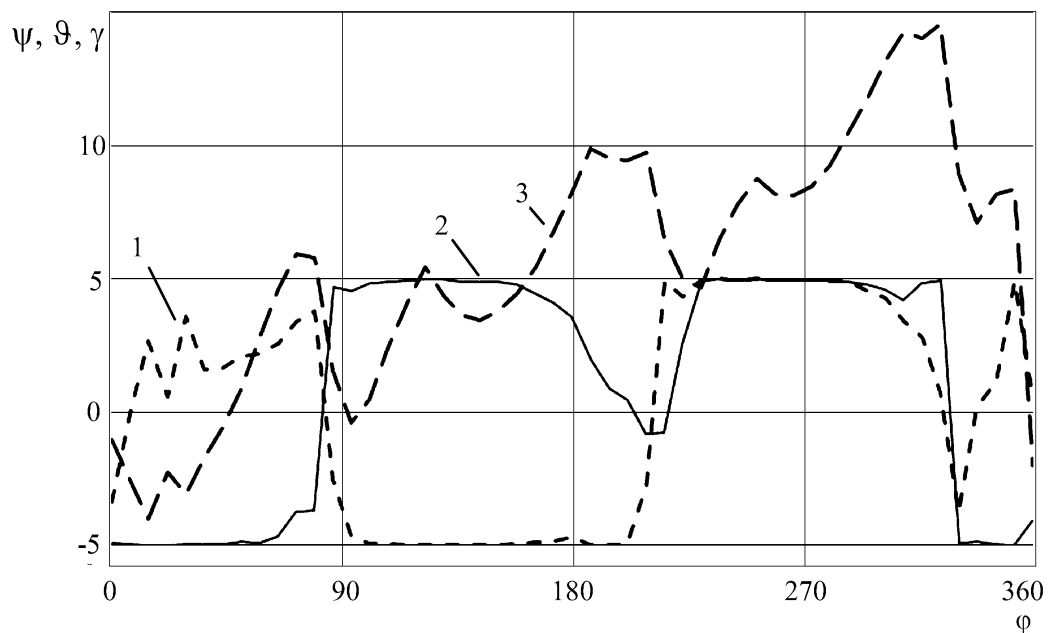


Рисунок 123 – Потребление энергии приводами ОПКС при моделировании инкрементальной формовки при  $z_1=300$  мм: 1 – равенство нулю выходных угловых координат, 2 – энергоэффективное управление

При моделировании было принято, что угловые координаты  $\psi$  и  $\vartheta$  могут находиться в диапазоне  $\pm 5^\circ$ , угловая координата  $\gamma$  может находиться в диапазоне  $\pm 20^\circ$ , что допускается кинематикой моделируемого станка-гексапода. На рисунке 124 показан характер изменения этих углов при моделировании энергоэффективного управления применительно к движению инструмента в первой плоскости. При переходе к каждой последующей плоскости угловые координаты переводились в нулевые значения.



**Рисунок 124 – Изменения угловых выходных координат при моделировании энергоэффективного управления: 1 – изменение угла  $\psi$ ; 2 – изменение угла  $\vartheta$ ; 3 – изменение угла  $\gamma$**

Возможность уменьшения энергии при реализации инкрементальной формовки на оборудовании с параллельной кинематической структурой с использованием описанных подходов была подтверждена при эксплуатации специализированного станка-гексапода в ООО «Челябинский завод мобильных энергоустановок и конструкций» (Приложение В).

### **3.8.2. Управление движением летательного аппарата в атмосфере**

В работе [64] описан способ управления летательным аппаратом (ЛА), совершающим движение в атмосфере. Сущность способа заключается в изменении положения центра масс ЛА: возникающие при этом моменты аэродинамических сил используются в качестве управляющих моментов.

Рассмотрим в упрощенной постановке задачу формирования управляющего воздействия на ЛА за счет изменения положения его центра масс, и возможность использования МПКЦ для ее решения [73].

Пусть на объект, находящийся в гравитационном поле, действует некоторая внешняя сила. Направление и точку приложения этой силы будем считать известными. Примером такого объекта может быть, например, спускаемый аппарат, движущийся в атмосфере планеты: на объект действует внешняя аэродинамическая сила  $\vec{P}_A$ , приложенная в центре давления, а также сила тяжести  $m\vec{g}$ , приложенная в его центре масс (рисунок 125).

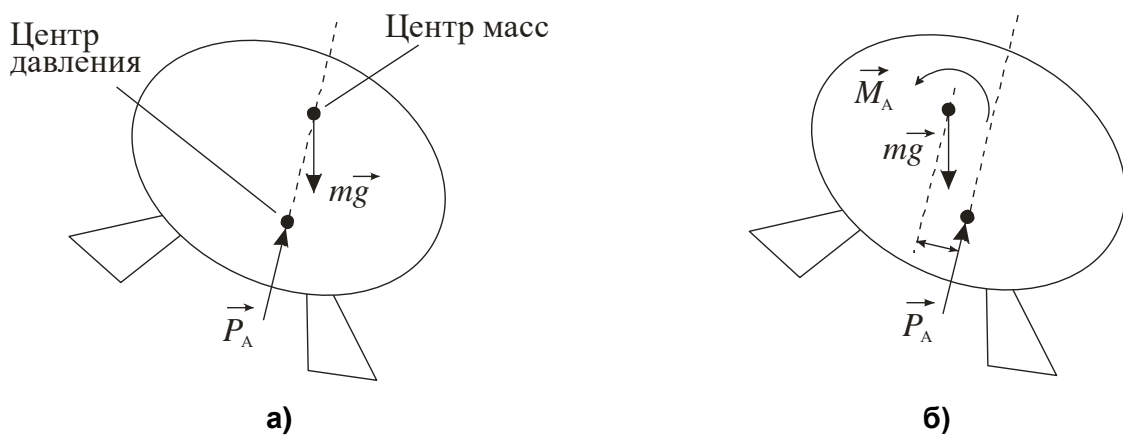


Рисунок 125 – Управление спускаемым аппаратом

Если, как показано на рисунке, линия действия силы  $\vec{P}_A$  проходит через центр масс объекта, то эта сила не создает аэродинамический момент  $\vec{M}_A$ , который может использоваться для управления движением. Для формирования аэродинамического момента необходимо разнести центр масс и линию действия силы  $\vec{P}_A$ . Выполнить это можно двумя способами:

- изменением направления и/или точки приложения внешней силы  $\vec{P}_A$ ;
- изменением положения центра масс объекта.

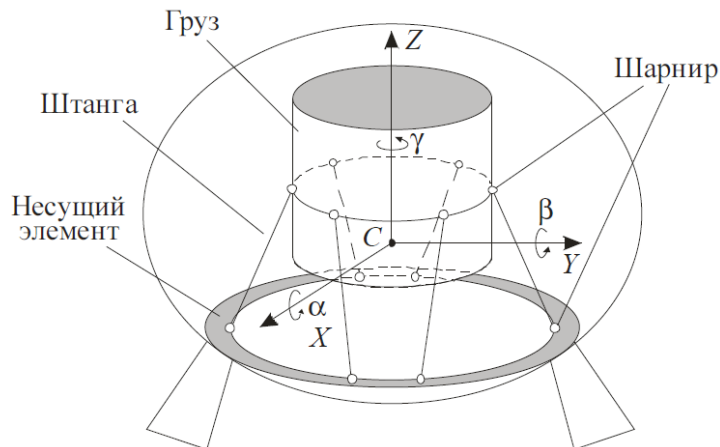
Изменение положения центра масс объекта (в общем случае – по трем независимым координатам) может быть реализовано за счет перемещения массивного тела – груза, расположенного внутри объекта. В качестве груза могут выступать элементы конструкции объекта: аккумуляторы, измерительное оборудование и



т. п. Для показанного на рисунке 125, б смещения центра масс с линии действия силы  $\vec{P}_A$  на величину  $h$  создаст аэродинамический момент  $M_A = P_A h$ .

При управлении движением объекта помимо изменения взаимного расположения его центра масс и линии действия внешней силы может потребоваться коррекция его тензора инерции [38], что требует возможности поворота груза вокруг трех осей. Таким образом, возникает задача перемещения груза по шести координатам: трем линейным и трем угловым. При этом все координаты должны быть независимы.

Перемещение груза по 6-ти независимым координатам потребует введения в конструкцию объекта 6-ти приводов; при решении этой задачи необходимо учитывать возможные весовые и энергетические ограничения, характерные для летательных аппаратов. С учетом этих ограничений будет являться целесообразным использования для перемещения груза устройства, построенного на базе механизма-гексапода, рисунок 126. В качестве выходного звена будет выступать груз, движение которого по 6-ти координатам необходимо обеспечить. Штанги гексапода связаны с несущими элементами объекта.



**Рисунок 126 – Использование механизма-гексапода для перемещения груза; элементы, обеспечивающие изменение длин штанг, условно не показаны**

Если с помощью механизма-помощью гексапода решается только задача обеспечения требуемого взаимного положения центра масс и линии действия внешней силы, что достигается за счет смещения центра масс груза по трех координатам, то все три угловые координаты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (см. рисунок 126) могут рассмат-

риваться как избыточные. Следовательно, в этом случае могут ставиться и решаться все сформулированные в главе 3 задачи управления приводными устройствами, обеспечивающие повышение эффективности машин с параллельными кинематическими структурами. Для объекта с автономным источником энергии, каковым является спускаемый аппарат, наиболее актуален закон (93), позволяющий снижать потребления энергии приводами устройства, перемещающего груз.

Задача коррекции тензора инерции дополнительно требует поворачивать груз. Однако в случае, если распределение массы груза симметрично относительно некоторой оси, поворот вокруг этой оси может рассматриваться как избыточная координата, так как этот поворот не влияет на тензор инерции груза. Если тензор инерции груза – шар, то в качестве избыточных координат могут рассматриваться все три угла поворота  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , что позволит реализовать для управления приводными устройствами закон (93).

Таким образом, использование для перемещения груза механизма с параллельными кинематическими цепями – гексапода в совокупности с соответствующими алгоритмами управления позволит снизить затраты энергии, необходимой для реализации управляемого спуска.

### **3.9. Выводы по главе**

1. При реализации с помощью ОПКС некоторых технологических операций может возникнуть ситуация, когда часть выходных координат МПКЦ становится избыточными. Например, при фрезеровании сферической фрезой положение режущей части определяется только линейными координатами центра сферической части фрезы, наклон оси фрезы (в некоторых пределах) на процесс фрезерования не влияет, поэтому три выходные угловые координаты могут рассматриваться как избыточные.

2. Избыточность координат может быть использована для совершенствования оборудования на основе МПКЦ при использовании оптимальных законов управления приводными устройствами оборудования, реализующих следующие критерии:

- критерий оптимальности по приращениям входных координат;
- критерий оптимальности по усилиям;
- критерий оптимальности по потребляемой приводами энергии.

3. Закон управления приводными устройствами, реализующий критерий оптимальности по приращениям входных координат, позволяет снижать время выполнения технологических операций за счет минимизации изменений длин штанг при наличии ограничений на скорость этих изменений; моделирование для типовой технологической операции показало возможность снижения времени в 2 и более раза.

4. Закон управления приводными устройствами, реализующий критерий оптимальности по усилиям, позволяет уменьшить силы, возникающие в штангах МПКЦ при выполнении заданной технологической операции, тем самым снижая нагрузки на элементы конструкции, включая приводы; моделирование для типовой технологической операции показало возможность снижения силовых факторов более чем на 10%.

5. Закон управления приводными устройствами, реализующий критерий оптимальности по потребляемой приводами энергии (закон энергоэффективного управления), позволяет уменьшать энергию, потребляемую приводами ОПС; теоретический минимум потребляемой энергии определяется работой внешних сил, например, силы резания. Моделирование для типовой технологической операции показало возможность снижения потребления энергии более чем на 15%.

6. Практическая реализация любого из описанных оптимальных законов управления приводными устройствами должна учитывать особенность МПКЦ, связанную с возможностью его попадания в особое положение.

7. Возможность снижения энергопотребления при реализации закона энергоэффективного управления подтверждена экспериментально. В серии экспериментов обеспечено снижение потребляемой приводами экспериментальной установки энергии на 8,1%.

8. Использование фактора избыточности координат для повышения эффективности приводных устройств машин с параллельными кинематическими струк-

турами не ограничивается рассмотренной операцией многокоординатного фрезерования и оборудованием для ее реализации. Возможность уменьшения энергии при реализации технологической операции инкрементальной формовки подтверждена при эксплуатации специализированного станка-гексапода в ООО «Челябинский завод мобильных энергоустановок и конструкций» (Приложение В).

9. Разработана методика расчета оптимальных законов управления приводными устройствами; методика использована как основа для создания программного обеспечения для расчета траекторий движения рабочего органа технологической машины с параллельной кинематической структурой на основе механизма гексапода, отвечающих требованиям по увеличению скорости перемещения рабочего органа, по повышению надежности машины за счет перераспределения возникающих в ее элементах силовых факторов, по снижению потребления энергии ее приводами. Программное обеспечение входит в состав программно-аппаратного комплекса для управления ОПКС, созданного в ООО «НПО «Техно-Лайн» (Приложение А).

## 4. Динамические модели оборудования с параллельной кинематической структурой

### 4.1. Цели динамического моделирования

Полученные в предыдущих главах уравнения кинематических моделей МПКЦ устанавливают зависимости между входными и выходными координатами и позволяют решать задачи кинематического анализа и синтеза для конкретного механизма. При решении этих задач используется идеализированное представление механизма, не учитывающее такие факторы, как масса и моменты инерции его элементов, а также различные силовые нагрузки, возникающие при движении механизма. Учет этих факторов обеспечивается при динамическом анализе, который должен являться непременной составляющей работ по проектированию технологического оборудования на основе МПКЦ.

В общем случае при динамическом анализе какого-либо объекта решают две основные задачи:

- по известным силам, действующим на объект, определить закон движение объекта (прямая задача);
- по известному движению определить силы, действующие на объект (обратная задача).

Очевидно, что данные задачи должны решаться с использованием аппарата дифференциальных уравнений. Получение системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение объекта, можно считать основным этапом динамического анализа. Собственно решение двух основных задач динамики осуществляется при интегрировании (аналитическом или, чаще, численном) этих уравнений.

Получаемые при динамическом анализе дифференциальные уравнения движения объекта являются основой для построения законов управления этим объектом, а также позволяют провести качественный и количественный анализ поведения объекта при различных возмущающих воздействиях.

Частным случаем динамического анализа является силовой анализ, позволяющий определить усилия, возникающие в элементах рассматриваемого объекта при его функционировании. Эта информация необходима при проектировании реального оборудования на основе кинематических схем.

#### 4.2. Динамические модели плоского механизма с параллельными кинематическими цепями

Дифференциальные уравнения, описывающие поведение объекта, могут быть записаны с использованием методов аналитической механики.

Будем считать все звенья некоторого МПКЦ жесткими, а связи между ними – идеальными. При рассмотрении звена механизма введем связанную с ним систему координат  $Oxyz$  (рисунок 127). Для произвольной  $i$ -й точки имеем

$$\delta r_i = \delta r_O + \delta \phi \times \delta r_i,$$

где  $\delta r_i$  – возможное перемещение этой точки, т. е. любое бесконечно малое перемещение, допускаемое наложенными на звено связями в данный момент времени;  $\delta r_O$  – возможное перемещение начала координат;  $\delta \phi$  – вектор бесконечно малого поворота;  $\delta r_i$  – радиус-вектор  $i$ -й точки.

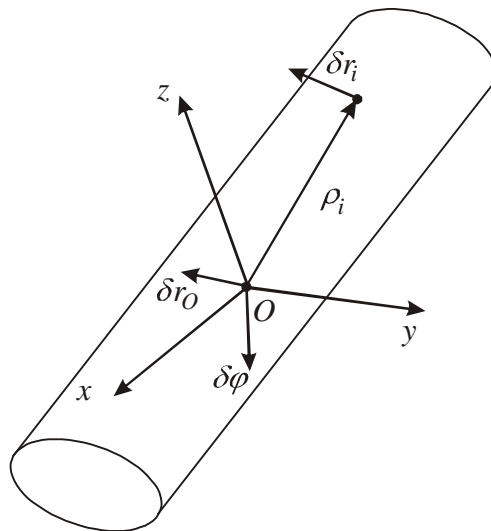


Рисунок 127 – Звено МПКЦ как абсолютно твердое тело

На  $i$ -ю точку действуют активная сила  $P'_i$  и сила инерции  $\Phi'_i$ . Так как сумма работ всех активных сил (действующих на все точки звена) и всех сил инерции на

любом возможном перемещении в любой фиксированный момент времени равна нулю, то для  $M$  точек звена можно записать

$$\sum_{i=1}^M (P'_i + \Phi'_i)(\delta r_{O_i} + \delta \phi \times \delta \rho_i) = (P + \Phi)\delta r_O + (M_O^{(P)} + M_O^{(\Phi)})\delta \phi, \quad (94)$$

где  $P$  и  $\Phi$  – главные векторы активных сил и сил инерции звена;  $M_O^{(P)}$  и  $M_O^{(\Phi)}$  – главные моменты этих сил.

Уравнение (94) является одной из форм записи общего уравнения динамики – уравнения Даламбера–Лагранжа.

Для механизма, имеющего  $N$  подвижных звеньев, уравнение (94) запишется в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^N \left[ (P_j + \Phi_j)\delta r_{O_j} + (M_{O_j}^{(P)} + M_{O_j}^{(\Phi)})\delta \phi_j \right] = 0. \quad (95)$$

Работа сил инерции на возможных перемещениях может быть выражена через кинетическую энергию, что с учетом связи между возможными перемещениями механизма и заданными  $n$  его обобщенными координатами  $q_1, \dots, q_n$

$$\delta r_{O_j} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial r_{O_j}}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \delta \phi_j = \sum_{s=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial q_s} \delta q_s \quad (96)$$

позволяет записать следующее выражение:

$$\sum_{j=1}^N \left[ \Phi_j \delta r_{O_j} + M_{O_j}^{(\Phi)} \delta \phi_j \right] = \sum_{s=1}^n \left[ \frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right] \delta q_s, \quad (97)$$

где кинетическая энергия  $T = T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  является функцией обобщенных координат и их производных по времени.

С учетом (96) и (97) при условии независимости обобщенных координат уравнение (95) можно представить в виде следующей системы:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s, \quad s = 1 \dots n, \quad (98)$$

где  $Q_s$  – обобщенные силы. Очевидно, что

$$Q_s = \sum_{j=1}^N P_j \frac{\partial r_{O_j}}{\partial q_s} + M_{O_j}^{(P)} \frac{\partial \phi_j}{\partial q_s}. \quad (99)$$

Уравнения (98) называются уравнениями Лагранжа второго рода. Эти уравнения широко используются при динамическом анализе разнообразных систем [36, 45].

Рассмотрим применение уравнений (98) для создания динамической модели МПКЦ, показанного на рисунке 128. Механизм состоит из четырех подвижных звеньев 1...4, соединенных между собой и с основанием при помощи кинематических пар 5-го класса. Кинематические пары будем считать идеальными.

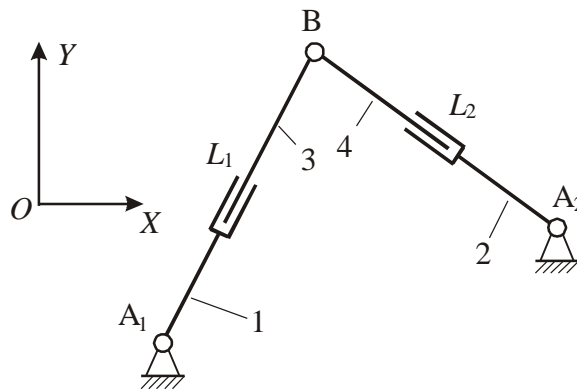


Рисунок 128 – Плоский МПКЦ типа «бипод»

Обозначим через  $m_i$ ,  $i = 1...4$  массы звеньев,  $C_i$  – центры масс звеньев.

Звенья 1 и 2 механизма могут совершать только вращения относительно соответствующих шарниров, поэтому выражения для их кинетических энергий будут иметь следующий вид:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{A_1} \omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} J_{A_2} \omega_2^2, \quad (100)$$

где  $J_{A_i}$  – момент инерции  $i$ -го звена относительно оси, проходящей через соответствующий шарнир перпендикулярно плоскости движения;  $\omega_i$  – угловая скорость  $i$ -го звена.

Так как звенья 3 и 4 рассматриваемого механизма могут совершать сложные плоские движения, то кинетическая энергия звеньев определяется с использованием теоремы Кёнига [43, 50]:



$$T_i = \frac{1}{2}(m_i v_{C_i}^2 + J_{C_i} \omega_i^2), \quad i = 3, 4, \quad (101)$$

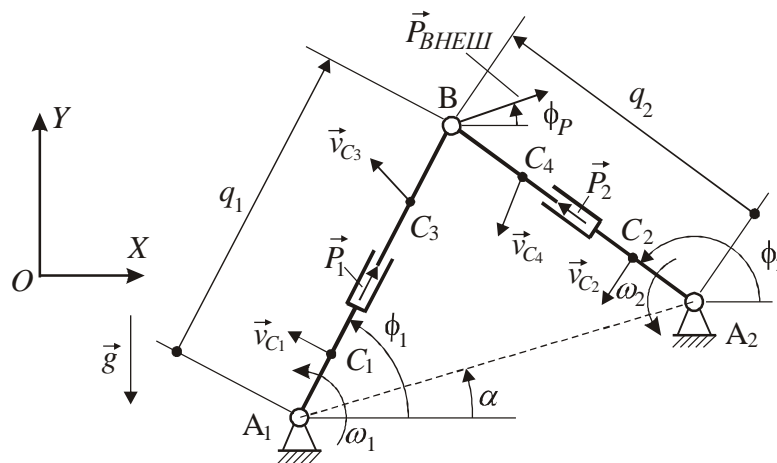
где  $J_{C_i}$  – момент инерции  $i$ -го звена относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения. Причем  $\omega_3 = \omega_1$ ,  $\omega_4 = \omega_2$ .

Примем, что шарнир В имеет массу  $m_B$ , которую в дальнейшем будем рассматривать как точечную. Кинетическая энергия данной точечной массы может быть определена как

$$T_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2,$$

где  $v_B$  – модуль скорости шарнира В.

В соответствии с ранее рассмотренными математическими моделями в качестве обобщенных координат следует выбрать расстояния от шарнира В до шарниров  $A_1$  и  $A_2$ , которые обозначим соответственно  $q_1$  и  $q_2$  (рисунок 129). Необходимо выразить угловые и линейные скорости, входящие в выражения для кинетических энергий звеньев, через обобщенные координаты.



**Рисунок 129 – Обобщенные координаты модели МПКЦ типа «бипод»**

Радиус-вектор точки  $C_i$  является функцией обобщенных координат:

$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2)$ . Скорость точки  $C_i$  можно представить следующим образом:

$$\vec{v}_{C_i} = \frac{d\vec{r}_{C_i}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q_2} \dot{q}_2 = H_{i1} \dot{q}_1 \vec{e}_1 + H_{i2} \dot{q}_2 \vec{e}_2, \quad (102)$$

где  $H_{is} = \left| \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q_s} \right|$  – коэффициенты Ламе;  $\dot{q}_s = \frac{dq_s}{dt}$  – обобщенные скорости;  $\vec{e}_s$  – единичный вектор, направленный в сторону возрастания координаты  $q_s$ . В общем случае коэффициенты Ламе не являются константами и зависят от соответствующих обобщенных координат.

Аналогично можно записать выражение для скорости шарнира В :

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_B}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_B}{\partial q_2} \dot{q}_2 = H_{B1} \dot{q}_1 \vec{e}_1 + H_{B2} \dot{q}_2 \vec{e}_2,$$

где  $H_{Bs} = \left| \frac{\partial \vec{r}_B}{\partial q_s} \right|$ .

Для скалярных квадратов скоростей, присутствующих в выражениях для кинетических энергий элементов МПКЦ, справедливы зависимости

$$v_{C_i}^2 = \left| \vec{v}_{C_i} \right|^2 = H_{i1}^2 \dot{q}_1^2 + H_{i2}^2 \dot{q}_2^2 + 2H_{i1}H_{i2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2; \quad (103)$$

$$v_B^2 = \left| \vec{v}_B \right|^2 = H_{B1}^2 \dot{q}_1^2 + H_{B2}^2 \dot{q}_2^2 + 2H_{B1}H_{B2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2.$$

Модули угловых скоростей  $\omega_i = \frac{\left| \vec{v}_{C_i} \right|}{|A_i C_i|}$ ,  $i = 1, 2$ , следовательно квадраты угловых скоростей можно выразить через обобщенные скорости с использованием

(103):

$$\omega_i^2 = \frac{H_{i1}^2 \dot{q}_1^2 + H_{i2}^2 \dot{q}_2^2 + 2H_{i1}H_{i2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2}{|A_i C_i|^2}, \quad i = 1, 2. \quad (104)$$

Полная кинетическая энергия рассматриваемого механизма может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_{A_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_{A_2} \omega_2^2 + \frac{1}{2} (m_3 v_{C_3}^2 + J_{C_3} \omega_3^2) + \frac{1}{2} (m_4 v_{C_4}^2 + J_{C_4} \omega_4^2) + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[ J_{A_1} \omega_1^2 + J_{A_2} \omega_2^2 + (m_3 v_{C_3}^2 + J_{C_3} \omega_3^2) + (m_4 v_{C_4}^2 + J_{C_4} \omega_4^2) + m_B v_B^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (J_{A_1} + J_{C_3}) \omega_1^2 + (J_{A_2} + J_{C_4}) \omega_2^2 + m_3 v_{C_3}^2 + m_4 v_{C_4}^2 + m_B v_B^2 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[ (J_{A_1} + J_{C_3}) \frac{H_{11}^2 \dot{q}_1^2 + H_{12}^2 \dot{q}_2^2 + 2H_{11}H_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2}{|A_1 C_1|^2} + \right. \\
&+ (J_{A_2} + J_{C_4}) \frac{H_{21}^2 \dot{q}_1^2 + H_{22}^2 \dot{q}_2^2 + 2H_{21}H_{22} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2}{|A_2 C_2|^2} + \\
&+ m_3 (H_{31}^2 \dot{q}_1^2 + H_{32}^2 \dot{q}_2^2 + 2H_{31}H_{32} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2) + \\
&+ m_4 (H_{41}^2 \dot{q}_1^2 + H_{42}^2 \dot{q}_2^2 + 2H_{41}H_{42} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2) + \\
&+ m_B (H_{B1}^2 \dot{q}_1^2 + H_{B2}^2 \dot{q}_2^2 + 2H_{B1}H_{B2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2) \left. \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[ \dot{q}_1^2 \left( H_{11}^2 \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21}^2 \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31}^2 + m_4 H_{41}^2 + m_B H_{B1}^2 \right) + \right. \\
&+ \dot{q}_2^2 \left( H_{12}^2 \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{22}^2 \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{32}^2 + m_4 H_{42}^2 + m_B H_{B2}^2 \right) \left. \right] + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \times \\
&\times \vec{e}_1 \vec{e}_2 \left( H_{11}H_{12} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21}H_{22} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31}H_{32} + m_4 H_{41}H_{42} + m_B H_{B1}H_{B2} \right).
\end{aligned}$$

Найдем выражения, входящие в левые части уравнений Лагранжа (98):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= \ddot{q}_1 \left( H_{11}^2 \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21}^2 \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31}^2 + m_4 H_{41}^2 + m_B H_{B1}^2 \right) + \\
&+ \ddot{q}_2 \left( H_{11}H_{12} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21}H_{22} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31}H_{32} + m_4 H_{41}H_{42} + m_B H_{B1}H_{B2} \right) \vec{e}_1 \vec{e}_2; \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= \ddot{q}_2 \left( H_{12}^2 \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{22}^2 \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{32}^2 + m_4 H_{42}^2 + m_B H_{B2}^2 \right) + \\
&+ \ddot{q}_1 \left( H_{11}H_{12} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21}H_{22} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31}H_{32} + m_4 H_{41}H_{42} + m_B H_{B1}H_{B2} \right) \vec{e}_1 \vec{e}_2; \\
\frac{\partial T}{\partial q_1} &= \dot{q}_1^2 \left( H_{11} \frac{\partial H_{11}}{\partial q_1} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21} \frac{\partial H_{21}}{\partial q_1} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31} \frac{\partial H_{31}}{\partial q_1} + m_4 H_{41} \frac{\partial H_{41}}{\partial q_1} + \right. \\
&+ m_B H_{B1} \frac{\partial H_{B1}}{\partial q_1} \left. \right) + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \left( H_{12} \frac{\partial H_{11}}{\partial q_1} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{22} \frac{\partial H_{21}}{\partial q_1} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{32} \frac{\partial H_{31}}{\partial q_1} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m_4 H_{42} \frac{\partial H_{41}}{\partial q_1} + m_B H_{B2} \frac{\partial H_{B1}}{\partial q_1} \Big) \vec{e}_1 \vec{e}_2; \\
\frac{\partial T}{\partial q_2} = & \dot{q}_2^2 \left( H_{12} \frac{\partial H_{12}}{\partial q_2} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{22} \frac{\partial H_{22}}{\partial q_2} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{32} \frac{\partial H_{32}}{\partial q_2} + m_4 H_{42} \frac{\partial H_{42}}{\partial q_2} + \right. \\
& \left. + m_B H_{B2} \frac{\partial H_{B2}}{\partial q_2} \right) + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \left( H_{11} \frac{\partial H_{12}}{\partial q_2} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21} \frac{\partial H_{22}}{\partial q_2} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31} \frac{\partial H_{32}}{\partial q_2} + \right. \\
& \left. + m_4 H_{41} \frac{\partial H_{42}}{\partial q_2} + m_B H_{41} \frac{\partial H_{B2}}{\partial q_2} \right) \vec{e}_1 \vec{e}_2.
\end{aligned}$$

В правой части уравнений (98) записаны обобщенные силы. В рассматриваемом механизме присутствуют две активные силы  $P_1$  и  $P_2$  – силы, задающие движение механизма, внешняя сила сопротивления  $P_{ВНЕШ}$ , приложенная к шарниру В (см. рисунок 129), а также силы веса элементов механизма. С учетом выражения (99) и того, что элементарная работа силы равна скалярному произведению этой силы на изменение радиус-вектора точки ее приложения, можно записать, что

$$\begin{aligned}
Q_1 = & P_1 + \frac{\vec{P}_{ВНЕШ} \cdot \delta \vec{r}_{Bq_1}}{\delta q_1} + \frac{m_B \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_{Bq_1}}{\delta q_1} + \frac{m_{C_1} \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_{C_1q_1}}{\delta q_1} + \frac{m_{C_2} \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_{C_2q_1}}{\delta q_1} + \frac{m_{C_3} \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_{C_3q_1}}{\delta q_1} + \\
& + \frac{m_{C_4} \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_{C_4q_1}}{\delta q_1} = P_1 + P_{ВНЕШ} \cos(\phi_P - \phi_1) + \left( m_B + m_{C_1} + m_{C_2} \frac{|A_2 C_2|}{q_2} + m_{C_3} + m_{C_4} \frac{|A_2 C_4|}{q_2} \right) \times \\
& \times g \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi_1\right); \\
Q_2 = & P_2 + \frac{\vec{P}_{ВНЕШ} \cdot \delta \vec{r}_{Bq_2}}{\delta q_2} + \frac{m_B \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_{Bq_2}}{\delta q_2} + \frac{m_{C_1} \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_{C_1q_2}}{\delta q_2} + \frac{m_{C_2} \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_{C_2q_2}}{\delta q_2} + \frac{m_{C_3} \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_{C_3q_2}}{\delta q_2} + \\
& + \frac{m_{C_4} \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_{C_4q_2}}{\delta q_2} = P_2 + P_{ВНЕШ} \cos(\phi_P - \phi_2) + \left( m_B + m_{C_1} + m_{C_1} \frac{|A_1 C_1|}{q_1} + m_{C_3} + m_{C_4} \frac{|A_1 C_2|}{q_1} \right) \times \\
& \times g \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi_2\right).
\end{aligned}$$

Углы  $\phi_1$  и  $\phi_2$  являются функциями обобщенных координат, для их определения можно использовать следующие уравнения:

$$x_{A_1} + q_1 \cos \phi_1 = x_{A_2} + q_2 \cos \phi_2, \quad y_{A_1} + q_1 \sin \phi_1 = y_{A_2} + q_2 \sin \phi_2,$$

где  $x_{A_1}$ ,  $x_{A_2}$ ,  $y_{A_1}$ ,  $y_{A_2}$  – координаты неподвижных шарниров. Разрешим эти уравнения относительно угла  $\phi_1$ :

$$\cos^2 \phi_1 = \left( \frac{x_{A_2} + q_2 \cos \phi_2 - x_{A_1}}{q_1} \right)^2, \quad \sin^2 \phi_1 = \left( \frac{y_{A_2} + q_2 \sin \phi_2 - y_{A_1}}{q_1} \right)^2.$$

Так как  $\cos^2 \phi_1 + \sin^2 \phi_1 = 1$ , то

$$\left( x_{A_2} + q_2 \cos \phi_2 - x_{A_1} \right)^2 + \left( y_{A_2} + q_2 \sin \phi_2 - y_{A_1} \right)^2 = q_1^2,$$

откуда

$$\left( x_{A_2} - x_{A_1} \right) \cos \phi_2 + \left( y_{A_2} - y_{A_1} \right) \sin \phi_2 = \frac{q_1^2 - q_2^2 - \left( x_{A_2} - x_{A_1} \right)^2 - \left( y_{A_2} - y_{A_1} \right)^2}{2q_2}.$$

Введем обозначение

$$\left( x_{A_2} - x_{A_1} \right)^2 + \left( y_{A_2} - y_{A_1} \right)^2 = R^2,$$

тогда

$$x_{A_2} - x_{A_1} = R \cos \alpha, \quad y_{A_2} - y_{A_1} = R \sin \alpha \quad (\text{см. рисунок 129})$$

и

$$\cos \alpha \cos \phi_2 + \sin \alpha \sin \phi_2 = \frac{q_1^2 - q_2^2 - R^2}{2q_2 R}.$$

Следовательно,

$$\cos(\phi_2 - \alpha) = \frac{q_1^2 - q_2^2 - R^2}{2q_2 R};$$

$$\phi_2 = \arccos \left( \frac{q_1^2 - q_2^2 - R^2}{2q_2 R} \right) + \operatorname{arctg} \frac{y_{A_2} - y_{A_1}}{x_{A_2} - x_{A_1}}. \quad (105)$$

Аналогично можно получить

$$\phi_1 = \arccos \left( \frac{q_1^2 - q_2^2 + R^2}{2q_1 R} \right) + \operatorname{arctg} \frac{y_{A_2} - y_{A_1}}{x_{A_2} - x_{A_1}}. \quad (106)$$

Величина и направление силы  $P_{ВНЕШ}$  определяются внешними факторами, также они могут зависеть от обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Система дифференциальных уравнений, описывающая поведение механизма, будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 K_{11} + \ddot{q}_2 K_{12} + \dot{q}_1^2 K_{13} + \dot{q}_1 \dot{q}_2 K_{14} = Q_1; \\ \ddot{q}_2 K_{21} + \ddot{q}_1 K_{22} + \dot{q}_2^2 K_{23} + \dot{q}_1 \dot{q}_2 K_{24} = Q_2, \end{cases} \quad (107)$$

$$\text{где } K_{11} = H_{11}^2 \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21}^2 \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31}^2 + m_4 H_{41}^2 + m_B H_{B1}^2;$$

$$K_{12} = \left( H_{11} H_{12} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21} H_{22} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31} H_{32} + m_4 H_{41} H_{42} + m_B H_{B1} H_{B2} \right) \vec{e}_1 \vec{e}_2;$$

$$K_{13} = H_{11} \frac{\partial H_{11}}{\partial q_1} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21} \frac{\partial H_{21}}{\partial q_1} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31} \frac{\partial H_{31}}{\partial q_1} + m_4 H_{41} \frac{\partial H_{41}}{\partial q_1} + m_B H_{B1} \frac{\partial H_{B1}}{\partial q_1};$$

$$K_{14} = \left( H_{12} \frac{\partial H_{11}}{\partial q_1} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{22} \frac{\partial H_{21}}{\partial q_1} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{32} \frac{\partial H_{31}}{\partial q_1} + m_4 H_{42} \frac{\partial H_{41}}{\partial q_1} + m_B H_{B2} \frac{\partial H_{B1}}{\partial q_1} \right) \vec{e}_1 \vec{e}_2;$$

$$K_{21} = H_{12}^2 \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{22}^2 \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{32}^2 + m_4 H_{42}^2 + m_B H_{B2}^2;$$

$$K_{22} = \left( H_{11} H_{12} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21} H_{22} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31} H_{32} + m_4 H_{41} H_{42} + m_B H_{B1} H_{B2} \right) \vec{e}_1 \vec{e}_2;$$

$$K_{23} = H_{12} \frac{\partial H_{12}}{\partial q_2} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{22} \frac{\partial H_{22}}{\partial q_2} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{32} \frac{\partial H_{32}}{\partial q_2} + m_4 H_{42} \frac{\partial H_{42}}{\partial q_2} + m_B H_{B2} \frac{\partial H_{B2}}{\partial q_2};$$

$$K_{24} = \left( H_{11} \frac{\partial H_{12}}{\partial q_2} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21} \frac{\partial H_{22}}{\partial q_2} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31} \frac{\partial H_{32}}{\partial q_2} + m_4 H_{41} \frac{\partial H_{42}}{\partial q_2} + m_B H_{41} \frac{\partial H_{B2}}{\partial q_2} \right) \vec{e}_1 \vec{e}_2.$$

Данные уравнения относятся к классу дифференциальных уравнений с переменными параметрами, общих методов решения для которых не существует [31].

Скалярное произведение  $\vec{e}_1 \vec{e}_2$ , входящее в дифференциальные уравнения, целесообразно представить в виде  $\vec{e}_1 \vec{e}_2 = \cos(\phi_2 - \phi_1)$ .

Для определения коэффициентов Ламе, а также производных этих коэффициентов по обобщенным координатам необходимо получить выражения для модулей радиус-векторов центров масс  $C_i$  звеньев механизма. Очевидно, что

$$|\vec{r}_{C_i}| = \sqrt{x_{C_i}^2 + y_{C_i}^2},$$

$$x_{C_1} = x_{A_1} + |A_1 C_1| \cos \phi_1, \quad y_{C_1} = y_{A_1} + |A_1 C_1| \sin \phi_1;$$

$$x_{C_2} = x_{A_2} + |A_2 C_2| \cos \phi_2, \quad y_{C_2} = y_{A_2} + |A_2 C_2| \sin \phi_2;$$

$$x_{C_3} = x_{A_1} + (q_1 - |C_3 B|) \cos \phi_1, \quad y_{C_3} = y_{A_1} + (q_1 - |C_3 B|) \sin \phi_1;$$

$$x_{C_4} = x_{A_2} + (q_2 - |C_4 B|) \cos \phi_2, \quad y_{C_4} = y_{A_2} + (q_2 - |C_4 B|) \sin \phi_2.$$

С использованием выражений (105) и (106) можно получить искомые зависимости в аналитическом виде. Однако из-за чрезмерной громоздкости результатов целесообразно использовать численные способы расчета коэффициентов Ламе и производных по обобщенным координатам.

Дифференциальные уравнения (107) содержат в правых частях две активные силы  $P_1$  и  $P_2$  – силы, задающие движение механизма. В идеальном случае можно считать, что эти силы зависят только от некоторых управляющих воздействий  $u_i$ :  $P_i = f(u_i)$ . Более соответствует реальности зависимость активной силы от обобщенной координаты, а также от ее скорости, называемая статической характеристикой:

$$P_i = P_{CTi}(u_i, q_i, \dot{q}_i).$$

Если при анализе требуется учитывать динамические свойства привода, формирующего силу  $P_i$ , то следует использовать так называемую динамическую характеристику, записанную, например, в следующем виде [36]:

$$\tau_i \dot{P}_i + P_i = P_{CTi}(u_i, q_i, \dot{q}_i),$$

где  $\tau_i$  – постоянная времени привода.

Полученная динамическая модель не учитывает имеющуюся на практике податливость элементов МПКЦ, поэтому не применима для решения ряда задач. В частности, данная модель не применима для исследования динамики механизма при его кинематическом возбуждении, когда требуется определить характер изменения выходных для механизма координат при условии, что его входные координаты меняются по заданным во времени законам. При этом использование активных сил не рассматривается [17, 18].

Очевидно, что в случае отсутствия активных сил, равно как и в случае идеального характера этих сил, решение системы (107) сводится к решению кинематических уравнений, связывающих выходные координаты МПКЦ с его входными координатами. Вызвано это чрезмерным упрощением динамической модели, в которой элементы МПКЦ приняты абсолютно жесткими.

Модель МПКЦ, учитывающая податливость составляющих его частей, показана на рисунке 130. В модель дополнительно введены элементы, отражающие упруго-диссипативные свойства каждой штанги механизма.

Введем в рассмотрение следующие обобщенные координаты:

$q_1$  – длина абсолютно жесткого участка 1-й штанги (входная координата МПКЦ);

$q_2$  – длина абсолютно жесткого участка 2-й штанги (входная координата МПКЦ);

$q_3$  – координата  $x$  точки В в системе координат  $OXY$  (выходная координата МПКЦ);



$q_4$  – координата  $y$  точки  $B$  в системе координат  $OXY$  (выходная координата МПКЦ).

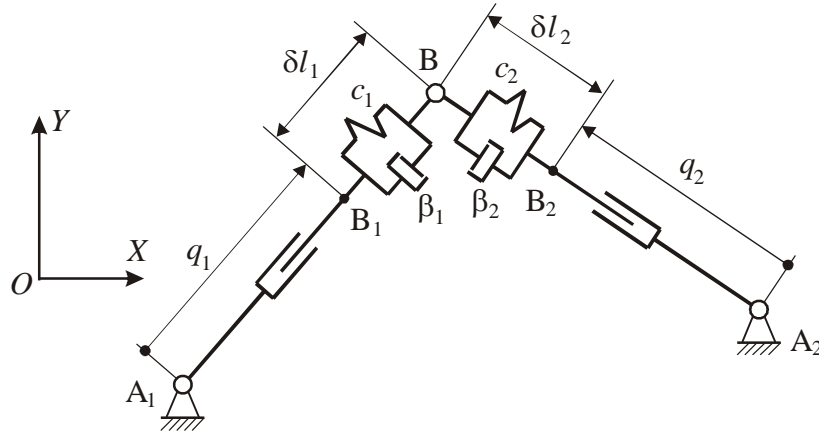


Рисунок 130 – МПКЦ типа «бипод» с упругими связями

При составлении выражения для полной кинетической энергии следует учитывать, что в рассматриваемом случае:

$$|\vec{v}_B| = \sqrt{v_{B_x}^2 + v_{B_y}^2} = \sqrt{\dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2}, \quad (108)$$

где  $v_{B_x} = \dot{q}_3$ ,  $v_{B_y} = \dot{q}_4$  – проекции скорости точки  $B$  на оси системы координат  $OXY$ .

Выражение для полной кинетической энергии применительно к рассматриваемой модели с упругими связями будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_{A_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_{A_2} \omega_2^2 + \frac{1}{2} (m_3 v_{C_3}^2 + J_{C_3} \omega_3^2) + \frac{1}{2} (m_4 v_{C_4}^2 + J_{C_4} \omega_4^2) + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \dot{q}_1^2 \left( H_{11}^2 \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21}^2 \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31}^2 + m_4 H_{41}^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \dot{q}_2^2 \left( H_{12}^2 \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{22}^2 \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{32}^2 + m_4 H_{42}^2 \right) \right] + \\ &\quad + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 \left( H_{11} H_{12} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21} H_{22} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31} H_{32} \right) + \frac{1}{2} m_B (\dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2). \end{aligned}$$

Запишем частные производные кинетической энергии, которые необходимы для составления системы уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \ddot{q}_1 \left( H_{11}^2 \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21}^2 \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31}^2 + m_4 H_{41}^2 \right) +$$

$$+ \ddot{q}_2 \left( H_{11} H_{12} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21} H_{22} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31} H_{32} + m_4 H_{41} H_{42} \right) \vec{e}_1 \vec{e}_2;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \ddot{q}_2 \left( H_{12}^2 \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{22}^2 \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{32}^2 + m_4 H_{42}^2 \right) +$$

$$+ \ddot{q}_1 \left( H_{11} H_{12} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21} H_{22} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31} H_{32} + m_4 H_{41} H_{42} \right) \vec{e}_1 \vec{e}_2;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = m_B \ddot{q}_3;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_4} = m_B \ddot{q}_4;$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \dot{q}_1^2 \left( H_{11} \frac{\partial H_{11}}{\partial q_1} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21} \frac{\partial H_{21}}{\partial q_1} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31} \frac{\partial H_{31}}{\partial q_1} + m_4 H_{41} \frac{\partial H_{41}}{\partial q_1} \right) +$$

$$+ \dot{q}_1 \dot{q}_2 \left( H_{12} \frac{\partial H_{11}}{\partial q_1} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{22} \frac{\partial H_{21}}{\partial q_1} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{32} \frac{\partial H_{31}}{\partial q_1} + m_4 H_{42} \frac{\partial H_{41}}{\partial q_1} \right) \vec{e}_1 \vec{e}_2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \dot{q}_2^2 \left( H_{12} \frac{\partial H_{12}}{\partial q_2} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{22} \frac{\partial H_{22}}{\partial q_2} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{32} \frac{\partial H_{32}}{\partial q_2} + m_4 H_{42} \frac{\partial H_{42}}{\partial q_2} \right) +$$

$$+ \dot{q}_1 \dot{q}_2 \left( H_{11} \frac{\partial H_{12}}{\partial q_2} \frac{J_{A_1} + J_{C_3}}{|A_1 C_1|^2} + H_{21} \frac{\partial H_{22}}{\partial q_2} \frac{J_{A_2} + J_{C_4}}{|A_2 C_2|^2} + m_3 H_{31} \frac{\partial H_{32}}{\partial q_2} + m_4 H_{41} \frac{\partial H_{42}}{\partial q_2} \right) \vec{e}_1 \vec{e}_2.$$

Введение в модель элементов с упругими свойствами ведет к появлению в рассматриваемом механизме потенциальных сил. Уравнение Лагранжа, учитывающее наличие потенциальных сил, имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = Q_s, \quad s = 1 \dots n, \quad (109)$$

где  $\Pi$  – потенциальная энергия упругих элементов механизма. Примем, что в модели рассматриваются упругие элементы, для которых

$$P_i = \frac{1}{2} c_i \delta l_i^2,$$

где  $c_i = \text{const}$  – коэффициент жесткости соответствующего элемента МПКЦ; принята линейная модель упругой характеристики элемента.

Очевидно, что

$$\delta l_i = \sqrt{(X_{A_i} - X_B)^2 + (Y_{A_i} - Y_B)^2} - l_i = \sqrt{(X_{A_i} - q_3)^2 + (Y_{A_i} - q_4)^2} - q_i,$$

следовательно

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{2} c_i \left( \sqrt{(X_{A_i} - q_3)^2 + (Y_{A_i} - q_4)^2} - q_i \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} c_i \left( (X_{A_i} - q_3)^2 + (Y_{A_i} - q_4)^2 - 2q_i \sqrt{(X_{A_i} - q_3)^2 + (Y_{A_i} - q_4)^2} + q_i^2 \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $P = P_1 + P_2$ , найдем значения частных производных, используемых при записи уравнений (108):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial q_1} &= c_1 \left( q_1 - \sqrt{(X_{A_1} - q_3)^2 + (Y_{A_1} - q_4)^2} \right); \\ \frac{\partial P}{\partial q_2} &= c_2 \left( q_2 - \sqrt{(X_{A_2} - q_3)^2 + (Y_{A_2} - q_4)^2} \right); \\ \frac{\partial P}{\partial q_3} &= \frac{c_1 (X_{A_1} - q_3) c_1 \left( q_1 - \sqrt{(X_{A_1} - q_3)^2 + (Y_{A_1} - q_4)^2} \right)}{\sqrt{(X_{A_1} - q_3)^2 + (Y_{A_1} - q_4)^2}} + \\ &+ \frac{c_2 (X_{A_2} - q_3) \left( q_2 - \sqrt{(X_{A_1} - q_3)^2 + (Y_{A_1} - q_4)^2} \right)}{\sqrt{(X_{A_1} - q_3)^2 + (Y_{A_1} - q_4)^2}}; \\ \frac{\partial P}{\partial q_4} &= \frac{c_1 (Y_{A_1} - q_4) c_1 \left( q_1 - \sqrt{(X_{A_1} - q_3)^2 + (Y_{A_1} - q_4)^2} \right)}{\sqrt{(X_{A_1} - q_3)^2 + (Y_{A_1} - q_4)^2}} + \\ &+ \frac{c_2 (Y_{A_2} - q_4) \left( q_2 - \sqrt{(X_{A_1} - q_3)^2 + (Y_{A_1} - q_4)^2} \right)}{\sqrt{(X_{A_1} - q_3)^2 + (Y_{A_1} - q_4)^2}}. \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений, описывающая рассматриваемую модель с упругими связями, может быть сведена к следующему виду:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = f_1(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, q_1, q_2, q_3, q_4); \\ \ddot{q}_2 = f_2(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, q_1, q_2, q_3, q_4); \\ \ddot{q}_3 = f_3(q_1, q_2, q_3, q_4); \\ \ddot{q}_4 = f_4(q_1, q_2, q_3, q_4). \end{cases} \quad (110)$$

При кинематическом возбуждении значения обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$ , а также их скорости рассматриваются как известные функции времени. Из системы уравнений (110) для определения выходных координат МПКЦ можно использовать только два последних уравнения.

Обобщенные силы для уравнений, входящих в систему (110), определяются следующим образом. Пусть в механизме совершается возможное перемещение  $\delta q_1$ , остальные обобщенные координаты не меняются. В этом случае изменяется пространственное положение только точек приложения сил веса  $m_{C_1}\vec{g}$  и  $m_{C_2}\vec{g}$  и

$$Q_1 = \frac{m_{C_1}\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_{C_1q_1}}{\delta q_1} + \frac{m_{C_2}\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_{C_2q_1}}{\delta q_1} = g(m_{C_1} + m_{C_2})\cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi_1\right).$$

Аналогично,

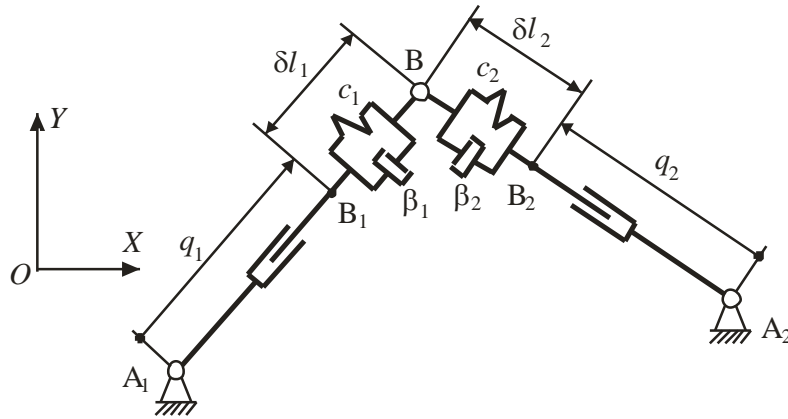
$$Q_2 = \frac{m_{C_3}\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_{C_3q_2}}{\delta q_2} + \frac{m_{C_4}\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_{C_4q_2}}{\delta q_2} = g(m_{C_3} + m_{C_4})\cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi_2\right).$$

Возможные перемещения по обобщенным координатам  $q_3$  и  $q_4$  приведут к изменению положения точки В, а также точек приложения сил веса  $m_{C_1}\vec{g}$ ,  $m_{C_2}\vec{g}$ , и  $m_{C_3}\vec{g}$  и  $m_{C_4}\vec{g}$  (рисунок 131). К точке В приложены внешняя сила  $\vec{P}_{ВНЕШ}$  и сила веса  $m_B\vec{g}$  точечной массы, размещенной в В, поэтому

$$\begin{aligned} Q_3 &= \frac{\vec{P}_{ВНЕШ} \cdot \delta\vec{r}_{Bq_3}}{\delta q_3} + \frac{m_B\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_{Bq_3}}{\delta q_3} + \sum_{i=1}^4 \frac{m_{C_i}\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_{C_iq_3}}{\delta q_3} = \\ &= P_{ВНЕШ} \cos\phi_P + m_B g \cos\frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial y_{C_i}}{\partial q_3} m_{C_i} g = P_{ВНЕШ} \cos\phi_P + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial y_{C_i}}{\partial q_3} m_{C_i} g; \end{aligned}$$

$$Q_4 = \frac{\vec{P}_{BHEIII} \cdot \delta \vec{r}_{Bq_4}}{\delta q_4} + \frac{m_B \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_{Bq_4}}{\delta q_4} + \sum_{i=1}^4 \frac{m_{C_i} \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_{C_i q_4}}{\delta q_4} =$$

$$= P_{BHEIII} \sin \phi_P - m_B g + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial y_{C_i}}{\partial q_4} m_{C_i} g.$$



**Рисунок 131 – Изменение пространственного положения элементов МПКЦ типа «бипод» при изменении только обобщенной координаты  $q_3$**

Вклад диссипативных элементов в процессы, протекающие в рассматриваемой системе, требует введения в выражения для обобщенных сил дополнительных слагаемых вида:

$$Q_{Ds} = -\frac{\partial(\delta l_1)}{\partial q_s} \beta_s \left[ \frac{d(\delta l_1)}{dt} \right]^2 \text{sign} \frac{d(\delta l_1)}{dt}.$$

Данная модель соответствует наличию в системе «настоящего» трения [4];  $\beta_s \geq 0$  – коэффициенты трения. Модели для учета диссипативных сил могут иметь иной вид.

Если в обобщенные силы  $Q_1$  и  $Q_2$  включить активные силы  $P_1$  и  $P_2$  соответственно, то уравнения (110) позволят анализировать поведение механизма, имеющего упругие связи, с учетом динамики приводов.

### 4.3. Динамическая модель пространственного механизма

Методика формирования системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение МПКЦ, рассмотренная для простого плоского механизма, может быть применена при исследовании более сложных МПКЦ [70].

Рассмотрим элемент, присутствующий в том или ином виде практически в любом МПКЦ – штангу, один из концов которой шарнирно закреплен. Тип шарнира определяется кинематической схемой конкретного МПКЦ. Штанга, показанная на рисунке 132, является элементом МПКЦ типа «гексапод»: нижний конец штанги связан с основанием с помощью двухстепенного шарнира, длина штанги может меняться. Составим выражение для кинетической энергии данной штанги.

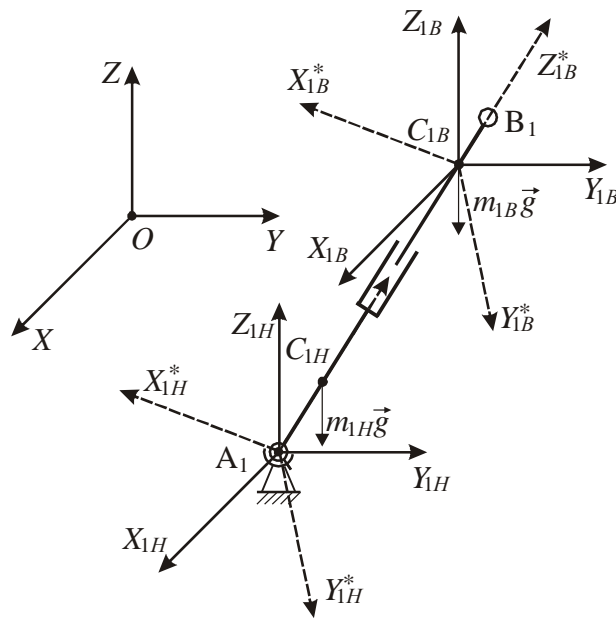


Рисунок 132 – Модель штанги переменной длины

Штанга состоит из двух частей: нижней с массой  $m_{1H}$  и верхней с массой  $m_{1B}$ . Нижняя часть может рассматриваться как твердое тело с одной закрепленной точкой  $A_1$ , поэтому ее кинетическая энергия может быть записана в следующем виде [50]:

$$T_{1H} = \frac{1}{2} \left[ J_{X_{1H}} \omega_{X_{1H}}^2 + J_{Y_{1H}} \omega_{Y_{1H}}^2 + J_{Z_{1H}} \omega_{Z_{1H}}^2 - 2J_{X_{1H}Y_{1H}} \omega_{X_{1H}} \omega_{Y_{1H}} - \right. \\ \left. - 2J_{Y_{1H}Z_{1H}} \omega_{Y_{1H}} \omega_{Z_{1H}} - 2J_{Z_{1H}X_{1H}} \omega_{Z_{1H}} \omega_{X_{1H}} \right], \quad (111)$$

где компоненты тензора инерции нижней части штанги

$$J_{1H} = \begin{bmatrix} J_{X_{1H}} & -J_{X_{1H}Y_{1H}} & J_{Z_{1H}X_{1H}} \\ J_{X_{1H}Y_{1H}} & J_{Y_{1H}} & -J_{Y_{1H}Z_{1H}} \\ -J_{Z_{1H}X_{1H}} & J_{Y_{1H}Z_{1H}} & J_{Z_{1H}} \end{bmatrix}$$

и проекции угловой скорости записаны для осей неподвижной системы координат  $A_1X_{1H}Y_{1H}Z_{1H}$ . Выбор направления осей данной системы координат достаточно произволен; целесообразно принять, что ее оси сонаправлены осям некоторой «глобальной» системы координат  $OXYZ$ . Очевидно, что при этом компоненты тензора инерции не будут постоянными величинами.

Аналогично (111) можно записать выражение для кинетической энергии, в котором будут использованы компоненты тензора инерции в точке  $A_1$  относительно осей  $A_1X_{1H}^*Y_{1H}^*Z_{1H}^*$ , связанных с телом [43], а также проекции угловой скорости на оси этой системы координат:

$$T_{1H} = \frac{1}{2} \left[ J_{X_{1H}^*} \omega_{X_{1H}^*}^2 + J_{Y_{1H}^*} \omega_{Y_{1H}^*}^2 + J_{Z_{1H}^*} \omega_{Z_{1H}^*}^2 - 2J_{X_{1H}^*Y_{1H}^*} \omega_{X_{1H}^*} \omega_{Y_{1H}^*} - \right. \\ \left. - 2J_{Y_{1H}^*Z_{1H}^*} \omega_{Y_{1H}^*} \omega_{Z_{1H}^*} - 2J_{Z_{1H}^*X_{1H}^*} \omega_{Z_{1H}^*} \omega_{X_{1H}^*} \right]. \quad (112)$$

В этом случае компоненты тензора инерции будут постоянными величинами, что существенно упростит расчеты.

Если оси системы координат  $A_1X_{1H}^*Y_{1H}^*Z_{1H}^*$  являются главными осями инерции для нижней части штанги в точке  $A_1$ , то выражение для кинетической энергии примет следующий более простой вид:

$$T_{1H} = \frac{1}{2} \left[ J_{X_{1H}^*} \omega_{X_{1H}^*}^2 + J_{Y_{1H}^*} \omega_{Y_{1H}^*}^2 + J_{Z_{1H}^*} \omega_{Z_{1H}^*}^2 \right]. \quad (113)$$

Верхний элемент штанги совершает сложное пространственное движение. Кинетическая энергия этого элемента, в соответствии с теоремой Кёнига, будет складываться из двух составляющих: кинетической энергии движения центра масс в предположении, что в этой точке сосредоточена вся масса элемента, и кинетической энергии вращения элемента вокруг центра масс:

$$T_{1B} = T_{1B}^{Ц.М.} + T_{1B}^{Bp}. \quad (114)$$

Первое слагаемое в (114) можно записать следующим образом:

$$T_{1B}^{Ц.М.} = \frac{1}{2} m_{1B} \left| \vec{v}_{C_{1B}} \right|^2. \quad (115)$$

Скорость  $\vec{v}_{C_{1B}}$  движения точки  $C_{1B}$  определяется как  $\vec{v}_{C_{1B}} = |A_1 C_{1B}| \vec{\omega}_1 + \vec{q}_1$ , следовательно,  $|\vec{v}_{C_{1B}}|^2 = |A_1 C_{1B}|^2 \omega_1^2 + \dot{q}_1^2$  (в силу перпендикулярности  $\vec{\omega}_1$  и  $\vec{q}_1$ ) и

$$T_{1B}^{Ц.М.} = \frac{1}{2} m_{1B} \left[ |A_1 C_{1B}|^2 (\omega_{X_{1H}}^{*2} + \omega_{Y_{1H}}^{*2} + \omega_{Z_{1H}}^{*2}) + \dot{q}_1^2 \right],$$

где  $\dot{q}_1$  – производная по времени обобщенной координаты, в качестве которой принята длина штанги  $|A_1 B_1|$ . Так как  $|C_{1B} B_1| = \text{const}$ , то можно записать

$$T_{1B}^{Ц.М.} = \frac{1}{2} m_{1B} \left[ (q_1 - |C_{1B} B_1|)^2 (\omega_{X_{1H}}^{*2} + \omega_{Y_{1H}}^{*2} + \omega_{Z_{1H}}^{*2}) + \dot{q}_1^2 \right]. \quad (116)$$

Второе слагаемое в (114) можно записать аналогично (111):

$$T_{1B}^{Bp} = \frac{1}{2} \left[ J_{X_{1B}}^* \omega_{X_{1B}}^{*2} + J_{Y_{1B}}^* \omega_{Y_{1B}}^{*2} + J_{Z_{1B}}^* \omega_{Z_{1B}}^{*2} - 2J_{X_{1B}Y_{1B}}^* \omega_{X_{1B}}^* \omega_{Y_{1B}}^* - \right. \\ \left. - 2J_{Y_{1B}Z_{1B}}^* \omega_{Y_{1B}}^* \omega_{Z_{1B}}^* - 2J_{Z_{1B}X_{1B}}^* \omega_{Z_{1B}}^* \omega_{X_{1B}}^* \right],$$

где система координат  $C_{1B} X_{1B}^* Y_{1B}^* Z_{1B}^*$  связана с верхним элементом. Так как проекции вектора на сонаправленные оси равны, то последнее выражение можно переписать в виде

$$T_{1B}^{Bp} = \frac{1}{2} \left[ J_{X_{1B}}^* \omega_{X_{1H}}^{*2} + J_{Y_{1B}}^* \omega_{Y_{1H}}^{*2} + J_{Z_{1B}}^* \omega_{Z_{1H}}^{*2} - 2J_{X_{1B}Y_{1B}}^* \omega_{X_{1H}}^* \omega_{Y_{1H}}^* - \right. \\ \left. - 2J_{Y_{1B}Z_{1B}}^* \omega_{Y_{1H}}^* \omega_{Z_{1H}}^* - 2J_{Z_{1B}X_{1B}}^* \omega_{Z_{1H}}^* \omega_{X_{1H}}^* \right], \quad (117)$$

если принять, что соответствующие оси систем координат  $C_{1B} X_{1B}^* Y_{1B}^* Z_{1B}^*$  и  $A_1 X_{1H}^* Y_{1H}^* Z_{1H}^*$  сонаправлены.

С учетом (116) и (117) выражение для кинетической энергии верхнего элемента штанги можно записать как

$$T_{1B} = \frac{1}{2} \left[ m_{1B} \dot{q}_1^2 + \omega_{X_{1H}}^{*2} (m_{1B} (q_1 - |C_{1B} B_1|)^2 + J_{X_{1B}}^*) + \right. \\ \left. + \omega_{Y_{1H}}^{*2} (m_{1B} (q_1 - |C_{1B} B_1|)^2 + J_{Y_{1B}}^*) + \omega_{Z_{1H}}^{*2} (m_{1B} (q_1 - |C_{1B} B_1|)^2 + J_{Z_{1B}}^*) \right] - \\ - J_{X_{1B}Y_{1B}}^* \omega_{X_{1H}}^* \omega_{Y_{1H}}^* - J_{Y_{1B}Z_{1B}}^* \omega_{Y_{1H}}^* \omega_{Z_{1H}}^* - J_{Z_{1B}X_{1B}}^* \omega_{Z_{1H}}^* \omega_{X_{1H}}^* .$$

Полная кинетическая энергия штанги равна



$$T_1 = \frac{1}{2} \left[ \omega_{X_{1H}}^2 (m_{1B}(q_1 - |C_{1B} \mathbf{B}_1|)^2 + J_{X_{1B}}^* + J_{X_{1H}}^*) + \omega_{Y_{1H}}^2 (m_{1B}(q_1 - |C_{1B} \mathbf{B}_1|)^2 + J_{Y_{1B}}^* + J_{Y_{1H}}^*) + \omega_{Z_{1H}}^2 (m_{1B}(q_1 - |C_{1B} \mathbf{B}_1|)^2 + J_{Z_{1B}}^* + J_{Z_{1H}}^*) \right] + \frac{m_{1B} \dot{q}_1^2}{2} - \omega_{X_{1H}}^* \omega_{Y_{1H}}^* (J_{X_{1B}Y_{1B}}^* + J_{X_{1H}Y_{1H}}^*) - \omega_{Y_{1H}}^* \omega_{Z_{1H}}^* (J_{Y_{1B}Z_{1B}}^* + J_{Y_{1H}Z_{1H}}^*) - \omega_{Z_{1H}}^* \omega_{X_{1H}}^* (J_{Z_{1B}X_{1B}}^* + J_{Z_{1H}X_{1H}}^*).$$

Для  $j$ -й штанги выражение для полной кинетической энергии можно записать в виде

$$T_j = \dot{q}_j^2 K_{j0} + \omega_{X_{jH}}^2 K_{j1} + \omega_{Y_{jH}}^2 K_{j2} + \omega_{Z_{jH}}^2 K_{j3} + K_{j0} (q_j - |C_{jB} \mathbf{B}_j|)^2 \times \\ \times \left( \omega_{X_{jH}}^2 + \omega_{Y_{jH}}^2 + \omega_{Z_{jH}}^2 \right) - \omega_{X_{jH}}^* \omega_{Y_{jH}}^* K_{j4} - \omega_{Y_{jH}}^* \omega_{Z_{jH}}^* K_{j5} - \omega_{Z_{jH}}^* \omega_{X_{jH}}^* K_{j6}, \quad (118)$$

где  $K_{j0} = \frac{m_{jB}}{2}$ ;  $K_{j1} = \frac{1}{2} (J_{X_{jB}}^* + J_{X_{jH}}^*)$ ;  $K_{j2} = \frac{1}{2} (J_{Y_{jB}}^* + J_{Y_{jH}}^*)$ ;  $K_{j3} = \frac{1}{2} (J_{Z_{jB}}^* + J_{Z_{jH}}^*)$ ;  
 $K_{j4} = J_{X_{jB}Y_{jB}}^* + J_{X_{jH}Y_{jH}}^*$ ;  $K_{j5} = J_{Y_{jB}Z_{jB}}^* + J_{Y_{jH}Z_{jH}}^*$ ;  $K_{j6} = J_{Z_{jB}X_{jB}}^* + J_{Z_{jH}X_{jH}}^*$ .

Для определения проекций угловой скорости на оси системы координат  $A_1 X_{1H}^* Y_{1H}^* Z_{1H}^*$  можно использовать кинематические уравнения Эйлера [50]:

$$\omega_{X_{1H}}^* = \dot{\psi}_{1H} \sin \vartheta_{1H} \sin \phi_{1H} + \dot{\vartheta}_{1H} \cos \phi_{1H}; \\ \omega_{Y_{1H}}^* = \dot{\psi}_{1H} \sin \vartheta_{1H} \cos \phi_{1H} - \dot{\vartheta}_{1H} \sin \phi_{1H}; \\ \omega_{Z_{1H}}^* = \dot{\psi}_{1H} \cos \vartheta_{1H} + \dot{\phi}_{1H}, \quad (119)$$

где  $\psi_{1H}$ ,  $\vartheta_{1H}$ ,  $\phi_{1H}$  – углы Эйлера, определяющие пространственную ориентацию системы координат  $A_1 X_{1H}^* Y_{1H}^* Z_{1H}^*$  относительно осей некоторой неподвижной системы координат.

Пусть в качестве неподвижной выступает система координат  $A_1 X_{1H} Y_{1H} Z_{1H}$ . При решении задач кинематики для заданных значений  $q_i$  могут быть определены координаты  $(x_{C_{1H}}^{НП}, y_{C_{1H}}^{НП}, z_{C_{1H}}^{НП})$  точки  $C_{1H}$  (или любой другой точки, принадлежащей нижнему элементу штанги и лежащей на оси  $A_1 Z_{1H}^*$ ) в этой неподвижной си-

стеме координат. Координаты  $(x_{C_{1H}}^{HP}, y_{C_{1H}}^{HP}, z_{C_{1H}}^{HP})$  точки  $C_{1H}$  можно пересчитать в систему координат  $A_1 X_{1H}^* Y_{1H}^* Z_{1H}^*$ :

$$\begin{aligned}
 x_{C_{1H}}^* &= (\cos \psi_{1H} \cos \phi_{1H} - \cos \vartheta_{1H} \sin \psi_{1H} \sin \phi_{1H}) x_{C_{1H}}^{HP} + \\
 &+ (\sin \psi_{1H} \cos \phi_{1H} + \cos \vartheta_{1H} \cos \psi_{1H} \sin \phi_{1H}) y_{C_{1H}}^{HP} + \sin \vartheta_{1H} \sin \phi_{1H} z_{C_{1H}}^{HP} = 0; \\
 y_{C_{1H}}^* &= (-\cos \psi_{1H} \sin \phi_{1H} - \cos \vartheta_{1H} \sin \psi_{1H} \cos \phi_{1H}) x_{C_{1H}}^{HP} + \\
 &- (\sin \psi_{1H} \sin \phi_{1H} - \cos \vartheta_{1H} \cos \psi_{1H} \cos \phi_{1H}) y_{C_{1H}}^{HP} + \sin \vartheta_{1H} \cos \phi_{1H} z_{C_{1H}}^{HP} = 0; \\
 z_{C_{1H}}^* &= \sin \vartheta_{1H} \sin \psi_{1H} x_{C_{1H}}^{HP} - \sin \vartheta_{1H} \cos \psi_{1H} y_{C_{1H}}^{HP} + \cos \vartheta_{1H} z_{C_{1H}}^{HP} = |A_1 C_{1H}|.
 \end{aligned} \tag{120}$$

Так как существует условие  $(x_{C_{1H}}^*)^2 + (y_{C_{1H}}^*)^2 + (z_{C_{1H}}^*)^2 = |A_1 C_{1H}|^2$ , то из уравнений (120) невозможно определить все три угла Эйлера. Этот вывод можно сделать и из анализа последовательностей разворотов, осуществляемых (описываемых) с использованием углов Эйлера (раздел 2.3.1): для того, чтобы поместить точку  $C_{1H}$  из некоторого исходного положения в положение с координатами  $(x_{C_{1H}}^{HP}, y_{C_{1H}}^{HP}, z_{C_{1H}}^{HP})$  достаточно выполнить последовательные повороты штанги относительно точки  $A_1$  на углы прецессии  $\psi_{1H}$  и нутации  $\vartheta_{1H}$ . Для определения угла чистого вращения  $\phi_{1H}$  необходимо использовать какое-либо дополнительное условие, отражающее особенности механизма. Если в качестве нижнего шарнира рассматриваемой штанги выступает двухстепенной шарнир, то штанга не имеет возможности поворачиваться относительно своей продольной оси. То есть чистое вращение в данном случае отсутствует и  $\phi_{1H} = 0$ .

Равенство нулю угла чистого вращения существенно упрощает выражения (119) для проекций угловой скорости:

$$\omega_{X_{1H}^*} = \dot{\vartheta}_{1H}; \quad \omega_{Y_{1H}^*} = \dot{\psi}_{1H} \sin \vartheta_{1H}; \quad \omega_{Z_{1H}^*} = \dot{\psi}_{1H} \cos \vartheta_{1H}, \tag{121}$$

а также уравнения (120):

$$\begin{aligned}
 \cos \psi_{1H} x_{C_{1H}}^{HP} + \sin \psi_{1H} y_{C_{1H}}^{HP} &= 0; \\
 -\cos \vartheta_{1H} \sin \psi_{1H} x_{C_{1H}}^{HP} + \cos \vartheta_{1H} \cos \psi_{1H} y_{C_{1H}}^{HP} + \sin \vartheta_{1H} z_{C_{1H}}^{HP} &= 0;
 \end{aligned} \tag{122}$$

$$\sin \vartheta_{1H} \sin \psi_{1H} x_{C_{1H}}^{HP} - \sin \vartheta_{1H} \cos \psi_{1H} y_{C_{1H}}^{HP} + \cos \vartheta_{1H} z_{C_{1H}}^{HP} = |A_1 C_{1H}|.$$

Два последних уравнения в (122) можно преобразовать к виду

$$-\cos \vartheta_{1H} (\sin \psi_{1H} x_{C_{1H}}^{HP} - \cos \psi_{1H} y_{C_{1H}}^{HP}) + \sin \vartheta_{1H} z_{C_{1H}}^{HP} = 0;$$

$$\sin \vartheta_{1H} (\sin \psi_{1H} x_{C_{1H}}^{HP} - \cos \psi_{1H} y_{C_{1H}}^{HP}) + \cos \vartheta_{1H} z_{C_{1H}}^{HP} = |A_1 C_{1H}|,$$

который позволяет исключить из этих уравнений угол прецессии  $\psi_{1H}$ :

$$\sin \vartheta_{1H} \frac{\sin \vartheta_{1H}}{\cos \vartheta_{1H}} z_{C_{1H}}^{HP} + \cos \vartheta_{1H} z_{C_{1H}}^{HP} = |A_1 C_{1H}|,$$

откуда  $z_{C_{1H}}^{HP} = |A_1 C_{1H}| \cos \vartheta_{1H}$ . С учетом первого уравнения в (122) получим два простых выражения для определения углов Эйлера по заданным координатам точки  $C_{1H}$ :

$$\vartheta_{1H} = \arccos \frac{z_{C_{1H}}^{HP}}{|A_1 C_{1H}|}; \quad \psi_{1H} = \operatorname{arctg} \frac{x_{C_{1H}}^{HP}}{y_{C_{1H}}^{HP}}. \quad (123)$$

Продифференцировав (123) по времени:

$$\dot{\vartheta}_{1H} = \frac{-\dot{z}_{C_{1H}}^{HP}}{\sqrt{|A_1 C_{1H}|^2 - z_{C_{1H}}^{HP 2}}}, \quad \dot{\psi}_{1H} = \frac{\dot{x}_{C_{1H}}^{HP} y_{C_{1H}}^{HP} - \dot{y}_{C_{1H}}^{HP} x_{C_{1H}}^{HP}}{x_{C_{1H}}^{HP 2} + y_{C_{1H}}^{HP 2}}$$

можно записать выражения (121) для проекций угловой скорости как функций от координат точки  $C_{1H}$ :

$$\begin{aligned} \omega_{x_{1H}}^* &= \frac{-\dot{z}_{C_{1H}}^{HP}}{\sqrt{|A_1 C_{1H}|^2 - z_{C_{1H}}^{HP 2}}}; \\ \omega_{y_{1H}}^* &= \frac{\dot{x}_{C_{1H}}^{HP} y_{C_{1H}}^{HP} - \dot{y}_{C_{1H}}^{HP} x_{C_{1H}}^{HP}}{x_{C_{1H}}^{HP 2} + y_{C_{1H}}^{HP 2}} \sqrt{1 - \left( \frac{z_{C_{1H}}^{HP}}{|A_1 C_{1H}|} \right)^2}; \\ \omega_{z_{1H}}^* &= \frac{\dot{x}_{C_{1H}}^{HP} y_{C_{1H}}^{HP} - \dot{y}_{C_{1H}}^{HP} x_{C_{1H}}^{HP}}{x_{C_{1H}}^{HP 2} + y_{C_{1H}}^{HP 2}} \frac{z_{C_{1H}}^{HP}}{|A_1 C_{1H}|}. \end{aligned} \quad (124)$$

Аналогично (124) можно выразить проекции угловой скорости через координаты верхнего шарнира  $B_1$ :

$$\begin{aligned}\omega_{X_{1H}}^* &= \frac{-\dot{z}_{B_1}^{H\Pi}}{\sqrt{q_1^2 - z_{B_1}^{H\Pi 2}}}; \\ \omega_{Y_{1H}}^* &= \frac{\dot{x}_{B_1}^{H\Pi} y_{B_1}^{H\Pi} - \dot{y}_{B_1}^{H\Pi} x_{B_1}^{H\Pi}}{x_{B_1}^{H\Pi 2} + y_{B_1}^{H\Pi 2}} \sqrt{1 - \left(\frac{z_{B_1}^{H\Pi}}{q_1}\right)^2}; \\ \omega_{Z_{1H}}^* &= \frac{\dot{x}_{B_1}^{H\Pi} y_{B_1}^{H\Pi} - \dot{y}_{B_1}^{H\Pi} x_{B_1}^{H\Pi}}{x_{B_1}^{H\Pi 2} + y_{B_1}^{H\Pi 2}} \frac{z_{B_1}^{H\Pi}}{q_1}.\end{aligned}\quad (125)$$

В выражениях (125) используются координаты верхнего шарнира  $B_1$  в неподвижной системе координат  $A_1 X_{1H} Y_{1H} Z_{1H}$ . Однако, при решении задач кинематики координаты  $(x_{B_1}, y_{B_1}, z_{B_1})$  этого шарнира будут определены в глобальной системе координат  $OXYZ$ , поэтому необходимо записать

$$x_{B_1}^{H\Pi} = x_{B_1} - x_{A_1}, \quad y_{B_1}^{H\Pi} = y_{B_1} - y_{A_1}, \quad z_{B_1}^{H\Pi} = z_{B_1} - z_{A_1}, \quad (126)$$

где  $(x_{A_1}, y_{A_1}, z_{A_1})$  – координаты шарнира  $A_1$  в системе координат  $OXYZ$ .

При записи уравнений Лагранжа (98) потребуется дифференцирование выражения для кинетической энергии. Так как, согласно (118) кинетическая энергия является функцией проекций угловых скоростей, то возникнет необходимость дифференцирования зависимостей (125). Выполнить аналитическое дифференцирование этих зависимостей затруднительно в силу того, что координаты и скорости точек  $B_j$ ,  $j=1\dots 6$  определяются при численном решении прямых задач кинематики для положений и скоростей.

Представим выражения для проекций угловой скорости в виде разложения в ряд Тейлора (с использованием производных только первого порядка) в окрестности положения механизма, определяемого значениями обобщенных координат  $q_j^0$ ,  $j=1\dots 6$ :

$$\begin{aligned}\omega_{X_{1H}^*} &= \omega_{X_{1H}^*}^0 + \sum_j \frac{\partial \omega_{X_{1H}^*}}{\partial q_j} (q_j - q_j^0); \\ \omega_{Y_{1H}^*} &= \omega_{Y_{1H}^*}^0 + \sum_j \frac{\partial \omega_{Y_{1H}^*}}{\partial q_j} (q_j - q_j^0); \\ \omega_{Z_{1H}^*} &= \omega_{Z_{1H}^*}^0 + \sum_j \frac{\partial \omega_{Z_{1H}^*}}{\partial q_j} (q_j - q_j^0).\end{aligned}\tag{127}$$

Выражения (127) могут быть дифференцированы по обобщенным координатам и использованы при записи уравнений Лагранжа. Для определения входящих в (127) частных производных необходимо использовать зависимости (125).

Кинетическая энергия  $T_{III}$  подвижной платформы как абсолютно твердого тела будет определяться как

$$T_{III} = T_{III}^{Ц.М.} + T_{III}^{Bp},$$

где  $T_{III}^{Ц.М.}$  – кинетическая энергия движения центра масс подвижной платформы в предположении, что в этой точке сосредоточена вся масса платформы;  $T_{III}^{Bp}$  – кинетическая энергия вращения платформы вокруг центра масс. Аналогично (115) можно записать:

$$T_{III}^{Ц.М.} = \frac{1}{2} m_{III} |\vec{v}_{C_{III}}|^2,$$

где  $m_{III}$  – масса платформы;  $\vec{v}_{C_{III}}$  – скорость центра масс платформы. Величину  $|\vec{v}_{C_{III}}|$  целесообразно выразить через обобщенные координаты  $q_i$  следующим образом:

$$|\vec{v}_{C_{III}}| = \sum_i \frac{\partial |\vec{v}_{C_{III}}|}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial |\vec{r}_{C_{III}}|}{\partial q_i} \dot{q}_i,\tag{128}$$

где модуль радиус-вектора центра масс подвижной платформы  $|\vec{r}_{C_{III}}|$  определяется через координаты центра масс  $(x_{C_{III}}, y_{C_{III}}, z_{C_{III}})$  в некоторой неподвижной системе координат, например,  $OXYZ$ :  $|\vec{r}_{C_{III}}| = \sqrt{x_{C_{III}}^2 + y_{C_{III}}^2 + z_{C_{III}}^2}$ . Входящие в (128) частные производные находятся из решения задач кинематики. При моделирова-

нии координаты  $(x_{C_{III}}, y_{C_{III}}, z_{C_{III}})$  можно принять в качестве выходных координат механизма.

Свяжем с подвижной платформой систему координат  $C_{III}X'Y'Z'$ . Если известны компоненты тензора инерции подвижной платформы в точке  $C_{III}$  относительно осей этой системы координат, то аналогично (112) можно записать, что

$$T_{III}^{Br} = \frac{1}{2} \left[ J_{X'_{III}} \omega_{X'_{III}}^2 + J_{Y'_{III}} \omega_{Y'_{III}}^2 + J_{Z'_{III}} \omega_{Z'_{III}}^2 - 2J_{X'_{III}Y'_{III}} \omega_{X'_{III}} \omega_{Y'_{III}} - \right. \\ \left. - 2J_{Y'_{III}Z'_{III}} \omega_{Y'_{III}} \omega_{Z'_{III}} - 2J_{Z'_{III}X'_{III}} \omega_{Z'_{III}} \omega_{X'_{III}} \right], \quad (129)$$

где проекции вектора угловой скорости могут быть определены с использованием кинематических уравнений Эйлера, аналогичных (119):

$$\begin{aligned} \omega_{X'_{III}} &= \dot{\psi}_{III} \sin \vartheta_{III} \sin \phi_{III} + \dot{\vartheta}_{III} \cos \phi_{III}; \\ \omega_{Y'_{III}} &= \dot{\psi}_{III} \sin \vartheta_{III} \cos \phi_{III} - \dot{\vartheta}_{III} \sin \phi_{III}; \\ \omega_{Z'_{III}} &= \dot{\psi}_{III} \cos \vartheta_{III} + \dot{\phi}_{III}. \end{aligned} \quad (130)$$

Здесь углы прецессии  $\psi_{III}$ , нутации  $\vartheta_{III}$  и чистого вращения  $\phi_{III}$ , определяют разворот системы координат  $C_{III}X'Y'Z'$  (соответственно, разворот платформы) относительно осей некоторой неподвижной системы координат, например,  $OXYZ$ . При моделировании целесообразно принять эти углы в качестве выходных координат механизма.

Если в качестве выходных угловых координат механизма используются углы Крылова  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\gamma$ , то проекции вектора угловой скорости в (129) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega_{X'_{III}} &= \dot{\vartheta}_{III} \cos \gamma_{III} - \dot{\psi}_{III} \cos \vartheta_{III} \sin \gamma_{III}; \\ \omega_{Y'_{III}} &= \dot{\gamma}_{III} + \dot{\psi}_{III} \sin \vartheta_{III}; \\ \omega_{Z'_{III}} &= \dot{\vartheta}_{III} \sin \gamma_{III} + \dot{\psi}_{III} \cos \vartheta_{III} \cos \gamma_{III}. \end{aligned} \quad (131)$$

По аналогии с (127) целесообразно представить выражения для проекций угловых скоростей в виде разложения по первым производным обобщенных координат:

$$\begin{aligned}\omega_{X'_{III}} &= \omega_{X'_{III}}^{<0>} + \sum_j \frac{\omega_{X'_{III}}}{\partial q_j} (q_j - q_j^{<0>}); \\ \omega_{Y'_{III}} &= \omega_{Y'_{III}}^{<0>} + \sum_j \frac{\omega_{Y'_{III}}}{\partial q_j} (q_j - q_j^{<0>}); \\ \omega_{Z'_{III}} &= \omega_{Z'_{III}}^{<0>} + \sum_j \frac{\omega_{Z'_{III}}}{\partial q_j} (q_j - q_j^{<0>}).\end{aligned}\tag{132}$$

Выражение (129) существенно упростится, если оси системы координат  $C_{III}X'Y'Z'$  будут являться главными центральными осями инерции подвижной платформы, для которых  $J_{X'_{III}Y'_{III}} = 0$ ,  $J_{Y'_{III}Z'_{III}} = 0$ ,  $J_{Z'_{III}X'_{III}} = 0$ .

Полная кинетическая энергия механизма равна:

$$\begin{aligned}T_{\Sigma} &= \sum_j T_j + T_{III} = \sum_j \left[ \dot{q}_j^2 K_{j0} + \omega_{X'_{jH}}^2 K_{j1} + \omega_{Y'_{jH}}^2 K_{j2} + \omega_{Z'_{jH}}^2 K_{j3} + \right. \\ &+ K_{j0} (q_j - |C_{jB} \mathbf{B}_j|)^2 \left( \omega_{X'_{jH}}^2 + \omega_{Y'_{jH}}^2 + \omega_{Z'_{jH}}^2 \right) - \\ &\left. - \omega_{X'_{jH}} \omega_{Y'_{jH}} K_{j4} - \omega_{Y'_{jH}} \omega_{Z'_{jH}} K_{j5} - \omega_{Z'_{jH}} \omega_{X'_{jH}} K_{j6} \right] + \frac{1}{2} m_{III} |\vec{v}_{C_{III}}|^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ J_{X'_{III}} \omega_{X'_{III}}^2 + J_{Y'_{III}} \omega_{Y'_{III}}^2 + J_{Z'_{III}} \omega_{Z'_{III}}^2 - 2J_{X'_{III}Y'_{III}} \omega_{X'_{III}} \omega_{Y'_{III}} - \right. \\ &\left. - 2J_{Y'_{III}Z'_{III}} \omega_{Y'_{III}} \omega_{Z'_{III}} - 2J_{Z'_{III}X'_{III}} \omega_{Z'_{III}} \omega_{X'_{III}} \right].\end{aligned}\tag{133}$$

В уравнения Лагранжа (98) входят производные полной кинетической энергии вида  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$  и  $\frac{\partial T}{\partial q_s}$ . Определим эти производные для выражения (133) с учетом формул (127), (128), (132):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s^2 = \frac{d}{dt} 2\dot{q}_s = 2\ddot{q}_s;$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} |\vec{v}_{CIII}|^2 &= \frac{d}{dt} \left( 2 |\vec{v}_{CIII}| \frac{\partial |\vec{v}_{CIII}|}{\partial \dot{q}_s} \right) = \frac{d}{dt} \left( 2 \sum_i \frac{\partial |\vec{r}_{CIII}|}{\partial q_i} \dot{q}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \sum_i \frac{\partial |\vec{r}_{CIII}|}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( 2 \sum_i \frac{\partial |\vec{r}_{CIII}|}{\partial q_i} \dot{q}_i \cdot \frac{\partial |\vec{r}_{CIII}|}{\partial q_s} \right) = 2 \frac{\partial |\vec{r}_{CIII}|}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial |\vec{r}_{CIII}|}{\partial q_i} \ddot{q}_i; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \omega_X^2}{\partial q_s} = \frac{\partial}{\partial q_s} \left( \omega_X^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_X}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right)^2 = 2 \frac{\partial \omega_X}{\partial q_s} \left[ \omega_X^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_X}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right];$$

$$\frac{\partial \omega_Y^2}{\partial q_s} = 2 \frac{\partial \omega_Y}{\partial q_s} \left[ \omega_Y^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_Y}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right];$$

$$\frac{\partial \omega_Z^2}{\partial q_s} = 2 \frac{\partial \omega_Z}{\partial q_s} \left[ \omega_Z^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_Z}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right];$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_s} \sum_j (q_j - |C_{jB} \mathbf{B}_j|)^2 \omega_{X_j}^2 &= \sum_j \left( \omega_{X_j}^2 \frac{\partial}{\partial q_s} (q_j - |C_{jB} \mathbf{B}_j|)^2 + \frac{\partial \omega_{X_j}^2}{\partial q_s} (q_j - |C_{jB} \mathbf{B}_j|)^2 \right) = \\ &= 2 \left[ \omega_{X_s}^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_{X_s}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right]^2 (q_s - |C_{sB} \mathbf{B}_s|) + \\ &+ 2 \frac{\partial \omega_{X_s}}{\partial q_s} \sum_j \left[ \omega_{X_j}^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_{X_j}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right] (q_j - |C_{jB} \mathbf{B}_j|)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_s} \sum_j (q_j - |C_{jB} \mathbf{B}_j|)^2 \omega_{Y_j}^2 &= 2 \left[ \omega_{Y_s}^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_{Y_s}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right]^2 (q_s - |C_{sB} \mathbf{B}_s|) + \\ &+ 2 \frac{\partial \omega_{Y_s}}{\partial q_s} \sum_j \left[ \omega_{Y_j}^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_{Y_j}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right] (q_j - |C_{jB} \mathbf{B}_j|)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_s} \sum_j (q_j - |C_{jB} \mathbf{B}_j|)^2 \omega_{Z_j}^2 &= 2 \left[ \omega_{Z_s}^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_{Z_s}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right]^2 (q_s - |C_{sB} \mathbf{B}_s|) + \\ &+ 2 \frac{\partial \omega_{Z_s}}{\partial q_s} \sum_j \left[ \omega_{Z_j}^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_{Z_j}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right] (q_j - |C_{jB} \mathbf{B}_j|)^2; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q_s} [\omega_X \omega_Y] &= \frac{\partial \left( \omega_X^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_X}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right) \left( \omega_Y^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_Y}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right)}{\partial q_s} = \\
&= \omega_Y^{<0>} \frac{\partial \omega_X}{\partial q_s} + \omega_X^{<0>} \frac{\partial \omega_Y}{\partial q_s} + \frac{\partial \omega_X}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_Y}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) + \frac{\partial \omega_Y}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_X}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}); \\
\frac{\partial}{\partial q_s} [\omega_Y \omega_Z] &= \frac{\partial \left( \omega_Y^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_Y}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right) \left( \omega_Z^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_Z}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right)}{\partial q_s} = \\
&= \omega_Z^{<0>} \frac{\partial \omega_Y}{\partial q_s} + \omega_Y^{<0>} \frac{\partial \omega_Z}{\partial q_s} + \frac{\partial \omega_Y}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_Z}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) + \frac{\partial \omega_Z}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_Y}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}); \\
\frac{\partial}{\partial q_s} [\omega_Z \omega_X] &= \frac{\partial \left( \omega_Z^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_Z}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right) \left( \omega_X^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_X}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right)}{\partial q_s} = \\
&= \omega_X^{<0>} \frac{\partial \omega_Z}{\partial q_s} + \omega_Z^{<0>} \frac{\partial \omega_X}{\partial q_s} + \frac{\partial \omega_Z}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_X}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) + \frac{\partial \omega_X}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_Z}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_\Sigma}{\partial \dot{q}_s} = 2\ddot{q}_s K_{s0} + m_{III} \frac{\partial |\vec{r}_{C_{III}}|}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial |\vec{r}_{C_{III}}|}{\partial q_i} \ddot{q}_i.$$

и

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_\Sigma}{\partial q_s} &= 2 \left[ \omega_{X_{sH}^*}^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_{X_{sH}^*}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right]^2 (q_s - |C_{sB} \mathbf{B}_s|) + \\
&+ 2 \left[ \omega_{Y_{sH}^*}^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_{Y_{sH}^*}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right]^2 (q_s - |C_{sB} \mathbf{B}_s|) + \\
&+ 2 \left[ \omega_{Z_{sH}^*}^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_{Z_{sH}^*}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right]^2 (q_s - |C_{sB} \mathbf{B}_s|) + \\
&+ \sum_j \left\{ 2K_{j1} \left( \frac{\partial \omega_{X_{jH}^*}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{X_{jH}^*}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) + \omega_{X_{jH}^*}^{<0>} \frac{\partial \omega_{X_{jH}^*}}{\partial q_s} \right) + \right. \\
&+ 2K_{j2} \left( \frac{\partial \omega_{Y_{jH}^*}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{Y_{jH}^*}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) + \omega_{Y_{jH}^*}^{<0>} \frac{\partial \omega_{Y_{jH}^*}}{\partial q_s} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2K_{j3} \left( \frac{\partial \omega_{Z_{jH}^*}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{Z_{jH}^*}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) + \omega_{Z_{jH}^*}^{<0>} \frac{\partial \omega_{Z_{jH}^*}}{\partial q_s} \right) + \\
& + 2K_{j0} \left[ \frac{\partial \omega_{X_{jH}^*}}{\partial q_s} \left( \omega_{X_{jH}^*}^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_{X_{jH}^*}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right) (q_s - |C_{sB} \mathbf{B}_s|)^2 + \right. \\
& \quad + \frac{\partial \omega_{Y_{jH}^*}}{\partial q_s} \left( \omega_{Y_{jH}^*}^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_{Y_{jH}^*}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right) (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}_i|)^2 + \\
& \quad \left. + \frac{\partial \omega_{Z_{jH}^*}}{\partial q_s} \left( \omega_{Z_{jH}^*}^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \omega_{Z_{jH}^*}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right) (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}_i|)^2 \right] - \\
& - K_{j4} \left( \omega_{Y_{jH}^*}^{<0>} \frac{\partial \omega_{X_{jH}^*}}{\partial q_s} + \omega_{X_{jH}^*}^{<0>} \frac{\partial \omega_{Y_{jH}^*}}{\partial q_s} + \frac{\partial \omega_{X_{jH}^*}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{Y_{jH}^*}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial \omega_{Y_{jH}^*}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{X_{jH}^*}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right) - \\
& - K_{j5} \left( \omega_{Z_{jH}^*}^{<0>} \frac{\partial \omega_{Y_{jH}^*}}{\partial q_s} + \omega_{Y_{jH}^*}^{<0>} \frac{\partial \omega_{Z_{jH}^*}}{\partial q_s} + \frac{\partial \omega_{Y_{jH}^*}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{Z_{jH}^*}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial \omega_{Z_{jH}^*}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{Y_{jH}^*}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right) - \\
& - K_{j6} \left( \omega_{X_{jH}^*}^{<0>} \frac{\partial \omega_{Z_{jH}^*}}{\partial q_s} + \omega_{Z_{jH}^*}^{<0>} \frac{\partial \omega_{X_{jH}^*}}{\partial q_s} + \frac{\partial \omega_{Z_{jH}^*}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{X_{jH}^*}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial \omega_{X_{jH}^*}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{Z_{jH}^*}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right) \Bigg\} + \\
& + J_{X'_{III}} \left( \frac{\partial \omega_{X'_{III}}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{X'_{III}}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) + \omega_{X'_{III}}^{<0>} \frac{\partial \omega_{X'_{III}}}{\partial q_s} \right) + \\
& + J_{Y'_{III}} \left( \frac{\partial \omega_{Y'_{III}}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{Y'_{III}}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) + \omega_{Y'_{III}}^{<0>} \frac{\partial \omega_{Y'_{III}}}{\partial q_s} \right) + \\
& + J_{Z'_{III}} \left( \frac{\partial \omega_{Z'_{III}}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{Z'_{III}}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) + \omega_{Z'_{III}}^{<0>} \frac{\partial \omega_{Z'_{III}}}{\partial q_s} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -J_{X'III Y'III} \left( \omega_{Y'III}^{<0>} \frac{\partial \omega_{X'III}}{\partial q_s} + \omega_{X'III}^{<0>} \frac{\partial \omega_{Y'III}}{\partial q_s} + \frac{\partial \omega_{X'III}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{Y'III}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial \omega_{Y'III}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{X'III}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right) - \\
& -J_{Y'III Z'III} \left( \omega_{Z'III}^{<0>} \frac{\partial \omega_{Y'III}}{\partial q_s} + \omega_{Y'III}^{<0>} \frac{\partial \omega_{Z'III}}{\partial q_s} + \frac{\partial \omega_{Y'III}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{Z'III}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial \omega_{Z'III}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{Y'III}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right) - \\
& -J_{Z'III X'III} \left( \omega_{X'III}^{<0>} \frac{\partial \omega_{Z'III}}{\partial q_s} + \omega_{Z'III}^{<0>} \frac{\partial \omega_{X'III}}{\partial q_s} + \frac{\partial \omega_{Z'III}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{X'III}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial \omega_{X'III}}{\partial q_s} \sum_i \frac{\partial \omega_{Z'III}}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \right).
\end{aligned}$$

Полученные выражения позволяют записать дифференциальные уравнения в форме Лагранжа.

Если принять, что оси систем координат  $A_j X_{jH}^* Y_{jH}^* Z_{jH}^*$ ,  $C_{1B} X_{1B}^* Y_{1B}^* Z_{1B}^*$ ,  $C_{III} X'III Y'III Z'III$  являются главными осями инерции для соответствующих координат, то входящие в (133) центробежные моменты инерции будут равны нулю и выражение для полной кинетической энергии существенно упростится:

$$\begin{aligned}
T_\Sigma = & \sum_j \left[ \dot{q}_j^2 K_{j0} + \omega_{X_{jH}^*}^2 K_{j1} + \omega_{Y_{jH}^*}^2 K_{j2} + \omega_{Z_{jH}^*}^2 K_{j3} + \right. \\
& \left. + K_{j0} (q_j - |C_{jB} \mathbf{B}_j|)^2 \left( \omega_{X_{jH}^*}^2 + \omega_{Y_{jH}^*}^2 + \omega_{Z_{jH}^*}^2 \right) \right] + \\
& + \frac{1}{2} m_{III} |\vec{v}_{C_{III}}|^2 + \frac{1}{2} \left[ J_{X'III} \omega_{X'III}^2 + J_{Y'III} \omega_{Y'III}^2 + J_{Z'III} \omega_{Z'III}^2 \right].
\end{aligned} \tag{134}$$

В (134) входят только квадраты угловых скоростей. Введем переменные вида  $\Omega = \omega^2$  и перепишем выражение для полной кинетической энергии следующим образом:

$$\begin{aligned}
T_{\Sigma} = & \sum_j \left[ \dot{q}_j^2 K_{j0} + \Omega_{X_{jH}}^* K_{j1} + \Omega_{Y_{jH}}^* K_{j2} + \Omega_{Z_{jH}}^* K_{j3} + \right. \\
& \left. + K_{j0} (q_j - |C_{jB} \mathbf{B}_j|)^2 \left( \Omega_{X_{jH}}^* + \Omega_{Y_{jH}}^* + \Omega_{Z_{jH}}^* \right) \right] + \\
& + \frac{1}{2} m_{III} |\vec{v}_{C_{III}}|^2 + \frac{1}{2} \left[ J_{X'_{III}} \Omega_{X'_{III}} + J_{Y'_{III}} \Omega_{Y'_{III}} + J_{Z'_{III}} \Omega_{Z'_{III}} \right].
\end{aligned}$$

Величина  $\Omega_{X_{jH}}^*$  может быть представлена как

$$\Omega_{X_{jH}}^* = \Omega_{X_{jH}}^{<0>} + \sum_i \frac{\partial \Omega_{X_{jH}}^*}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}),$$

аналогичные разложения можно записать и для остальных квадратов проекций угловых скоростей. Частная производная кинетической энергии по обобщенной координате примет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial q_s} = & \left( \Omega_{X_{sH}}^{<0>} + \Omega_{Y_{sH}}^{<0>} + \Omega_{Z_{sH}}^{<0>} + \sum_i \left( \frac{\partial \Omega_{X_{sH}}^*}{\partial q_i} + \frac{\partial \Omega_{Y_{sH}}^*}{\partial q_i} + \frac{\partial \Omega_{Z_{sH}}^*}{\partial q_i} \right) (q_i - q_i^{<0>}) \right) \times \\
& \times 2(q_s - |C_{sB} \mathbf{B}_s|) K_{s0} + \sum_i \left\{ K_{i1} \frac{\partial \Omega_{X_{jH}}^*}{\partial q_s} + K_{i2} \frac{\partial \Omega_{Y_{jH}}^*}{\partial q_s} + K_{i3} \frac{\partial \Omega_{Z_{jH}}^*}{\partial q_s} + \right. \\
& \left. + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}_i|)^2 \left( \frac{\partial \Omega_{X_{iH}}^*}{\partial q_s} + \frac{\partial \Omega_{Y_{iH}}^*}{\partial q_s} + \frac{\partial \Omega_{Z_{iH}}^*}{\partial q_s} \right) \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \left( J_{X'_{III}} \frac{\partial \Omega_{X'_{III}}}{\partial q_s} + J_{Y'_{III}} \frac{\partial \Omega_{Y'_{III}}}{\partial q_s} + J_{Z'_{III}} \frac{\partial \Omega_{Z'_{III}}}{\partial q_s} \right).
\end{aligned}$$

С использованием последних зависимостей можно записать следующую систему из  $s=6$  дифференциальных уравнений, описывающих поведение рассматриваемого МПКЦ при введенных упрощениях:

$$\begin{aligned}
2\ddot{q}_s K_{s0} + m_{III} \frac{\partial |\vec{r}_{C_{III}}|}{\partial q_s} \sum_{i=1}^n \frac{\partial |\vec{r}_{C_{III}}|}{\partial q_i} \ddot{q}_i - \\
- \left( \Omega_{X_{sH}}^{<0>} + \Omega_{Y_{sH}}^{<0>} + \Omega_{Z_{sH}}^{<0>} + \sum_i \left( \frac{\partial \Omega_{X_{sH}}^*}{\partial q_i} + \frac{\partial \Omega_{Y_{sH}}^*}{\partial q_i} + \frac{\partial \Omega_{Z_{sH}}^*}{\partial q_i} \right) (q_i - q_i^{<0>}) \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times 2(q_s - |C_{sB} \mathbf{B}_s|) K_{s0} - \sum_i \left\{ K_{i1} \frac{\partial \Omega_{X_{iH}^*}}{\partial q_s} + K_{i2} \frac{\partial \Omega_{Y_{iH}^*}}{\partial q_s} + K_{i3} \frac{\partial \Omega_{Z_{iH}^*}}{\partial q_s} + \right. \\
& \left. + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}_i|)^2 \left( \frac{\partial \Omega_{X_{iH}^*}}{\partial q_s} + \frac{\partial \Omega_{Y_{iH}^*}}{\partial q_s} + \frac{\partial \Omega_{Z_{iH}^*}}{\partial q_s} \right) \right\} - \\
& - \frac{1}{2} \left( J_{X'_{III}} \frac{\partial \Omega_{X'_{III}}}{\partial q_s} + J_{Y'_{III}} \frac{\partial \Omega_{Y'_{III}}}{\partial q_s} + J_{Z'_{III}} \frac{\partial \Omega_{Z'_{III}}}{\partial q_s} \right) = Q_s.
\end{aligned} \tag{135}$$

Обобщенные силы  $Q_s$  определяются активными силами в приводах, силами веса элементов штанг и подвижной платформы, а также некоторой внешней силой.

Пусть внешняя сила  $\vec{P}_{ВНЕШ}$  приложена в точке  $C_{ВНЕШ}$  с координатами  $(x'_{ВНЕШ}, y'_{ВНЕШ}, z'_{ВНЕШ})$  в связанной с подвижной платформой системе координат  $C_{III} X' Y' Z'$ ; направление действия этой силы определяется направляющими косинусами  $l_{ВНЕШ}, m_{ВНЕШ}, n_{ВНЕШ}$ . Элементарная работа этой силы будет равна скалярному произведению вектора силы на изменение радиус-вектора точки  $C_{ВНЕШ}$  ее приложения в глобальной системе координат  $OXYZ$ :  $\delta A_{ВНЕШ} = \vec{P}_{ВНЕШ} \cdot \delta \vec{r}_{C_{ВНЕШ}}$ . Если изменение радиус-вектора точки  $C_{ВНЕШ}$  вызвано изменением обобщенной координаты  $q_1$ , то можно записать:

$$\delta \vec{r}_{C_{ВНЕШ}} = \delta \vec{x}_{C_{ВНЕШ}} + \delta \vec{y}_{C_{ВНЕШ}} + \delta \vec{z}_{C_{ВНЕШ}} = \left( \frac{\partial x_{ВНЕШ}}{\partial q_1} \vec{i} + \frac{\partial y_{ВНЕШ}}{\partial q_1} \vec{j} + \frac{\partial z_{ВНЕШ}}{\partial q_1} \vec{k} \right) \delta q_1,$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы системы координат  $OXYZ$ ; частные производные по обобщенной координате рассчитываются с использованием уравнений кинематики. Элементарная работа в этом случае равна:

$$\delta A_{ВНЕШ} = \left( l_{ВНЕШ} \frac{\partial x_{ВНЕШ}}{\partial q_1} + m_{ВНЕШ} \frac{\partial y_{ВНЕШ}}{\partial q_1} + n_{ВНЕШ} \frac{\partial z_{ВНЕШ}}{\partial q_1} \right) \vec{P}_{ВНЕШ} \delta q_1,$$

что позволяет записать составляющую обобщенной силы  $Q_1$ , определяемую внешней силой, в виде

$$Q_{1\_P_{ВНЕШ}} = \frac{\delta A_{ВНЕШ}}{\delta q_1} = \left( l_{ВНЕШ} \frac{\partial x_{ВНЕШ}}{\partial q_1} + m_{ВНЕШ} \frac{\partial y_{ВНЕШ}}{\partial q_1} + n_{ВНЕШ} \frac{\partial z_{ВНЕШ}}{\partial q_1} \right) \left| \vec{P}_{ВНЕШ} \right|.$$

Составляющая обобщенной силы  $Q_1$ , определяемая силой веса подвижной платформы, запишется следующим образом:

$$Q_{1\_P_{Пл}} = -\frac{\partial z_{Пл}}{\partial q_1} m_{Пл} g,$$

где  $z_{C_{Пл}}$  – соответствующая координата центра масс подвижной платформы в неподвижной системе координат  $OXYZ$ ;  $g$  – модуль ускорения свободного падения.

Составляющие, определяемые силами веса элементов раздвижных штанг, имеют следующий вид:

$$Q_{1\_C_{iH}} = -\frac{\partial z_{C_{iH}}^{HP}}{\partial q_1} m_{iH} g, \quad Q_{1\_C_{iB}} = -\frac{\partial z_{C_{iB}}^{HP}}{\partial q_1} m_{iB} g, \quad i = 1 \dots 6,$$

где частные производные рассчитываются для координат соответствующих центров масс в любой неподвижной системе координат, оси которой сонаправлены осям системы координат  $OXYZ$ .

Выражение для  $j$ -й обобщенной силы примет следующий вид:

$$Q_j = \left( l_{ВНЕШ} \frac{\partial x_{ВНЕШ}}{\partial q_j} + m_{ВНЕШ} \frac{\partial y_{ВНЕШ}}{\partial q_j} + n_{ВНЕШ} \frac{\partial z_{ВНЕШ}}{\partial q_j} \right) \left| \vec{P}_{ВНЕШ} \right| - \frac{\partial z_{Пл}}{\partial q_j} m_{Пл} g - \sum_i \frac{\partial z_{C_{iH}}^{HP}}{\partial q_j} m_{iH} g - \sum_i \frac{\partial z_{C_{iB}}^{HP}}{\partial q_j} m_{iB} g + P_j, \quad (136)$$

где  $P_j$  – активная сила, соответствующая  $j$ -й обобщенной координате. Как и для рассмотренного ранее случая плоского механизма, активные силы могут задаваться через статические  $P_j = P_{CTj}(u_j, q_j, \dot{q}_j)$  или динамические  $\tau_j \dot{P}_j + P_j = P_{CTj}(u_j, q_j, \dot{q}_j)$  характеристики приводов [36], где  $u_j$  – управляющее воздействие,  $\tau_j$  – постоянная времени привода.

Система дифференциальных уравнений (135) соответствует механизму, имеющему абсолютно жесткие элементы. Данная система может быть использована

для моделирования поведения оборудования, построенного на основе МПКЦ типа «гексапод», под действием активных сил  $P_j$ , анализа его конструкции и для управления таким оборудованием.

Если законы изменения входных координат  $q_j$  известны, то система уравнений (135) может использоваться для определения усилий приводов, необходимых для реализации этих законов. Следовательно, полученная система дифференциальных уравнений может использоваться для оценки эффективности рассмотренных в главе 3 оптимальных законов управления приводными устройствами с учетом массо-инерционных характеристик элементов МПКЦ. Так как наибольший практический интерес представляет закон энергоэффективного управления, целесообразно использовать полученную динамическую модель для оценки его степени применимости в реальном оборудовании.

Разработанная динамическая модель была использована:

- в ООО «ТехноЛайн» (г. Челябинск) при создании программно-аппаратного комплекса для управления оборудованием с параллельной кинематикой (Приложение А);
- в ООО «Завод энергоэффективного и емкостного оборудования» (г. Челябинск) при создании 6-ти степенного сварочного позиционера (Приложение Б);
- в ООО «Челябинский завод мобильных энергоустановок и конструкций» при создании станка для получения изделий методом инкрементальной формовки (Приложение В).

Подходы к созданию динамической модели МПКЦ были использованы при разработке модели перераспределения энергии в многоколесном транспортном средстве [174].

#### **4.4. Моделирование закона энергоэффективного управления приводными устройствами**

Моделирование, проведенное в главе 3 с использованием статических моделей, показало, что закон энергоэффективного управления приводными устрой-

ствами ОПКС позволяет снижать уменьшать потребление приводами энергии при выполнении технологической операции, приближая величину потребленной энергии к величине работы, совершаемой внешними силовыми факторами. Уменьшение потребления энергии осуществляется как за счет перераспределения усилий в штангах МПКЦ, так и за счет уменьшения изменений длин штанг в процессе перемещения рабочего органа по заданной траектории.

В процессе работы реального оборудования усилия в его штангах будут определяться как внешними силовыми факторами (статическая составляющая), так и силами инерции (динамическая составляющая). Из уравнений (135) и (136) следует, что статическую и динамическую составляющие можно определить в явном виде как

$$\begin{aligned}
 P_{j\text{Стат}} &= \frac{\partial z_{\text{III}}}{\partial q_j} m_{\text{III}} g + \sum_i \frac{\partial z_{C_{iH}}^{\text{HP}}}{\partial q_j} m_{iH} g + \sum_i \frac{\partial z_{C_{iB}}^{\text{HP}}}{\partial q_j} m_{iB} g - \\
 &\quad - \left( l_{\text{ВНЕШ}} \frac{\partial x_{\text{ВНЕШ}}}{\partial q_j} + m_{\text{ВНЕШ}} \frac{\partial y_{\text{ВНЕШ}}}{\partial q_j} + n_{\text{ВНЕШ}} \frac{\partial z_{\text{ВНЕШ}}}{\partial q_j} \right) \left| \vec{P}_{\text{ВНЕШ}} \right|; \\
 P_{j\text{Дина}} &= 2\ddot{q}_j K_{j0} + m_{\text{III}} \frac{\partial |\vec{r}_{C_{\text{III}}}|}{\partial q_j} \sum_{i=1}^n \frac{\partial |\vec{r}_{C_{\text{III}}}|}{\partial q_i} \ddot{q}_i - \\
 &\quad - \left( \Omega_{X_{sH}^*}^{<0>} + \Omega_{Y_{sH}^*}^{<0>} + \Omega_{Z_{sH}^*}^{<0>} + \sum_i \left( \frac{\partial \Omega_{X_{sH}^*}}{\partial q_i} + \frac{\partial \Omega_{Y_{sH}^*}}{\partial q_i} + \frac{\partial \Omega_{Z_{sH}^*}}{\partial q_i} \right) (q_i - q_i^{<0>}) \right) \times \\
 &\quad \times 2(q_j - |C_{jB} \mathbf{B}_j|) K_{j0} - \sum_i \left\{ K_{i1} \frac{\partial \Omega_{X_{iH}^*}}{\partial q_j} + K_{i2} \frac{\partial \Omega_{Y_{iH}^*}}{\partial q_j} + K_{i3} \frac{\partial \Omega_{Z_{iH}^*}}{\partial q_j} + \right. \\
 &\quad \left. + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}_i|)^2 \left( \frac{\partial \Omega_{X_{iH}^*}}{\partial q_j} + \frac{\partial \Omega_{Y_{iH}^*}}{\partial q_j} + \frac{\partial \Omega_{Z_{iH}^*}}{\partial q_j} \right) \right\} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left( J_{X'_{\text{III}}} \frac{\partial \Omega_{X'_{\text{III}}}}{\partial q_j} + J_{Y'_{\text{III}}} \frac{\partial \Omega_{Y'_{\text{III}}}}{\partial q_j} + J_{Z'_{\text{III}}} \frac{\partial \Omega_{Z'_{\text{III}}}}{\partial q_j} \right), j = 1 \dots 6.
 \end{aligned}$$

Зависимости для определения статических составляющих  $P_{j\text{Стат}}$  являются одной из форм представления уравнений статики, связывающих усилия в штангах неподвижного механизма с внешними силовыми факторами. В данной модели силы веса, как внешние силовые факторы, представлены в явной форме.



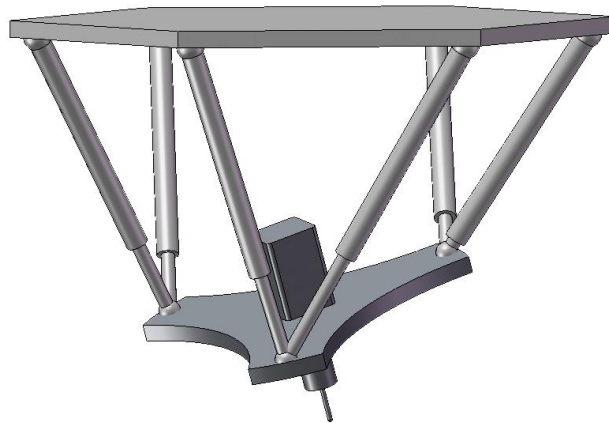
Динамические составляющие  $P_{j_{\text{Дин}}}$  определяются вторыми производными обобщенных координат по времени, а также квадратами угловых скоростей штанг и подвижной платформы МПКЦ. В главе 2 показано, что в МПКЦ типа «гексапод» характер изменения обобщенных координат (длин штанг) является нелинейным, в том числе и при формировании простейшей линейной траектории выходного звена (см. рисунок 52). Следовательно, даже в случае формирования траектории, при которой характерная точка рабочего органа движется с постоянной скоростью, а выходные угловые координаты постоянны, элементы штанг будут двигаться с ускорениями и в усилиях в штангах будет присутствовать динамические составляющие  $P_{j_{\text{Дин}}}$ . С увеличением скорости движения рабочего органа элементы оборудования (штанги) будут двигаться с большими ускорениями, следовательно, по мере увеличения скорости рабочего органа все большая часть энергии, потребляемой приводами, будет направлена не на преодоление внешних силовых факторов, а на ускоренное (замедленное) перемещение элементов оборудования. Минимизация этой части потребляемой энергии за счет изменения выходных угловых координат представляется затруднительной, так как само изменение этих координат потребует дополнительных энергозатрат, тем больших, чем с большей скоростью осуществляются данные изменения. Таким образом, можно предполагать, что с увеличением скорости движения рабочего органа эффективность рассматриваемого закона управления приводными устройствами будет снижаться.

Для оценки эффективности этого закона управления выполнено математическое моделирование движения характерной точки рабочего органа МПКЦ типа «гексапод» по линейной траектории с учетом реализации критерия оптимальности (93). Геометрические параметры МПКЦ и траектория приняты аналогичными случаю статического моделирования, результаты которого представлены на рисунке 113. Кроме того, в модели использованы следующие значения для массоинерционных характеристик:  $m_{III} = 60 \text{ кг}$ ,  $m_H = 15 \text{ кг}$ ,  $m_B = 10 \text{ кг}$ ,  $J_{X'_{III}} = J_{Y'_{III}} = J_{Z'_{III}} = 0,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_{X_B^*} = J_{Y_B^*} = J_{X_H^*} = J_{Y_H^*} = 0,4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_{Z_B^*} = J_{Z_H^*} = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Напомним, что при статическом моделировании в качестве одной из составляющих внешних силовых факторов учитывалась сила веса подвижной платформы МПКЦ.

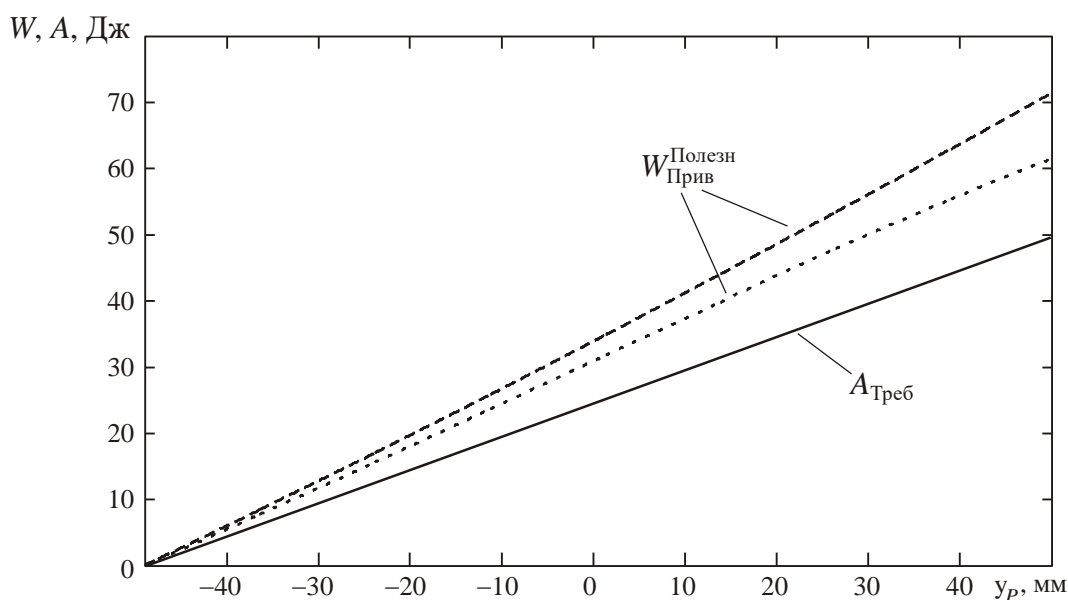
Массо-инерционные характеристики получены с использованием пакета SolidWorks применительно к показанной на рисунке 133 упрощенной твердотельной модели.

Моделирование проводилось при различных скоростях  $V_p$  движения характерной рабочей точки  $P$  рабочего органа. С целью упрощения сравнения результатов моделирования принято, что внешние силовые факторы не зависят от скорости движения инструмента.



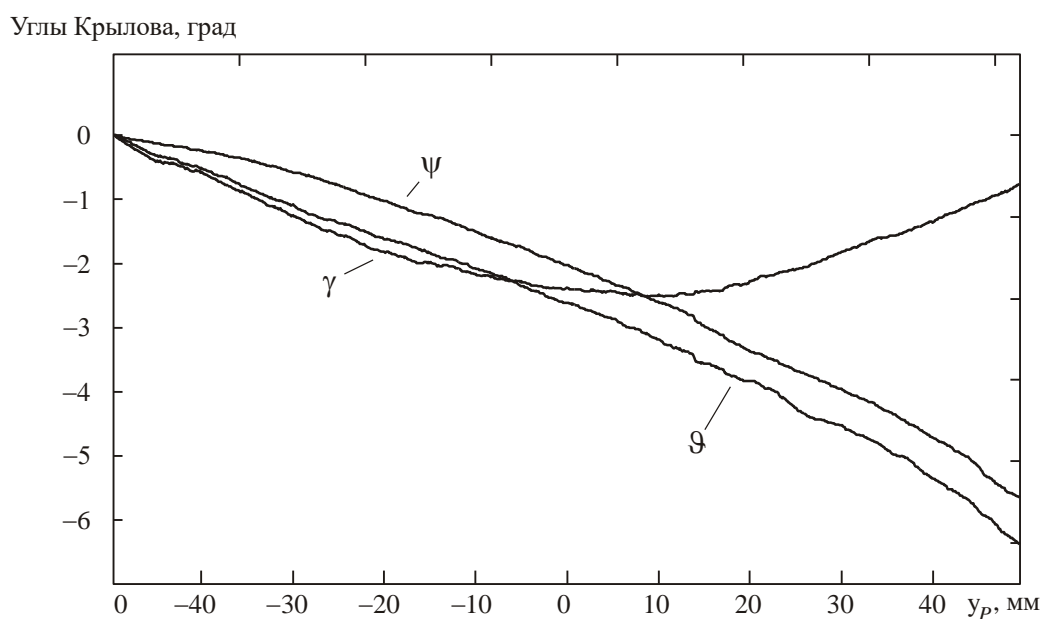
**Рисунок 133 – Упрощенная твердотельная модель МПКЦ типа «гексапод»**

Результаты моделирования для случая  $V_p = 10 \text{ мм/с}$  в виде графиков, характеризующих потребление приводами энергии, показаны на рисунке 134. Уменьшение энергопотребления при реализации энергоэффективного закона управления приводными устройствами составило  $\approx 14\%$ , что несколько хуже результатов статического моделирования, показанных на рисунке 113. Это связано с влиянием дополнительных составляющих, присутствующих в реальном оборудовании и отраженных в динамической модели.



**Рисунок 134 – Энергия, потребляемая приводами при формировании линейной траектории ( $V_p=10$  мм/с): – – – при постоянстве выходных угловых координат; ••• при энергоэффективном управлении**

Характер изменения выходных угловых координат, обеспечивающих снижение работы приводов (рисунок 135), также несколько отличается от показанного на рисунке 114.



**Рисунок 135 – Изменение выходных угловых координат для реализации энергоэффективного управления для линейной траектории при  $V_p=10$  мм/с**

Характер влияния массо-инерционных факторов на эффективность рассматриваемого оптимального закона управления иллюстрирует таблица 3: снижение скорости движения характерной точки рабочего органа ведет к увеличению эффективности, повышение скорости – снижает эффективность.

Таблица 3

## Влияние скорости на эффективность управления по динамической модели

$V_p, \text{мм/с}$	$W_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}}, \text{Дж}$		Эффективность, %
	Постоянство выходных угловых координат	Энергоэффективное управление	
0,1	71,4	60,5	15,2
1,0	71,4	60,8	14,8
10	71,8	61,5	14,3
20	72,3	65,7	9,1
50	73,8	70,2	4,9

На рисунке 136 показаны законы изменения выходных угловых координат, обеспечивающих реализацию энергоэффективного управления при различных значениях скорости движения характерной точки. Анализ законов изменения выходных координат, представленных на рисунке 135 и 136, показывает, что при относительно невысоких скоростях движения характерной точки законы близки полученным при статическом моделировании (см. рисунок 114).

В таблице 4 представлены результаты моделирования поведения механизма типа «гексапод» с использованием динамической модели для случаев, когда выходные угловые координаты изменяются по законам, полученным при статическом моделировании энергоэффективного управления (см. рисунок 114).

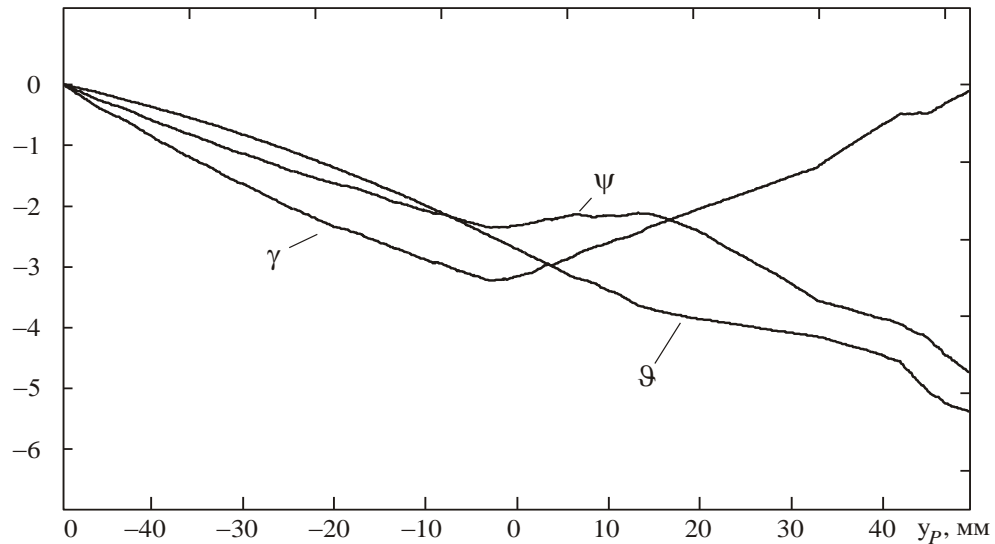
Таблица 4

## Влияние скорости на эффективность управления по статической модели

$V_p, \text{мм/с}$	$W_{\text{Прив}}^{\text{Полезн}}, \text{Дж}$		Эффективность, %
	Постоянство выходных угловых координат	Энергоэффективное управление, рассчитанное с использованием динамической модели	
0,1	71,4	60,8	14,8
1,0	71,4	61,8	13,4
5,0	71,5	64,1	10,3
7,5	71,6	68,1	4,9
9,0	71,7	69,5	3,1
10,0	71,8	70,0	2,5

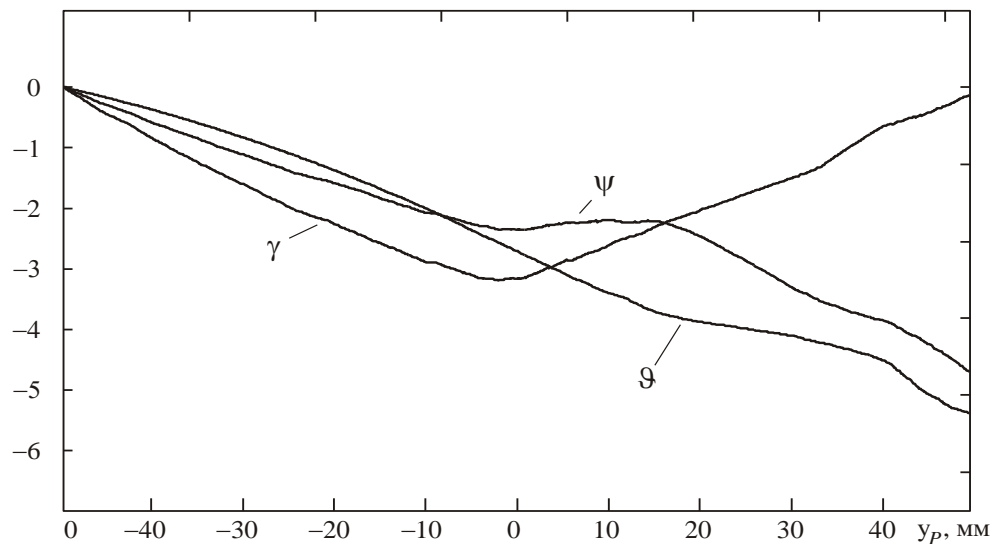
Следовательно, в некотором диапазоне скоростей при построении энергоэффективного оборудования можно отказаться от использования динамической модели, что существенно упростит расчеты. Однако диапазон скоростей должен уточняться для конкретного экземпляра ОПКС.

Углы Крылова, град



а)

Углы Крылова, град



б)

**Рисунок 136 – Изменение выходных угловых координат при реализации энергоэффективного управления для линейной траектории:  
а) – при  $V_F=0,1$  мм/с; б) – при  $V_F=1$  мм/с**

Принятые при динамическом моделировании массо-инерционные параметры элементов ОПКС получены с использованием объемного твердотельного моделирования и, несмотря на упрощенность твердотельной модели, адекватны соответствующим характеристикам реального оборудования. Скорости характерной точки рабочего органа соответствуют реальным скоростям, используемым при механической обработке. Следовательно, рассмотренный оптимальный закон управления приводными устройствами может служить фактором, обеспечивающим повышение энергоэффективности реального оборудования.

#### 4.5. Динамическая модель пространственного механизма с упруго-диссипативными связями

Введем в динамическую модель упругие элементы аналогично тому, как это было сделано для плоского механизма (рисунок 137). Нижний элемент каждой штанги в данной модели представляется как абсолютно жесткое тело. Верхний элемент каждой штанги представляется как совокупность абсолютно жесткого тела и упругого элемента. При отсутствии сил, воздействующих на элементы штанги, в том числе со стороны шарнира  $B$ ,  $\delta l = 0$  т. е. точки  $B'$  и  $B$  совпадают.

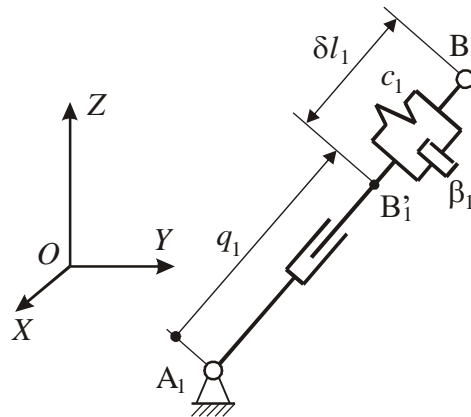


Рисунок 137 – Модель штанги переменной длины, учитывающая ее упруго-диссипативные свойства

Для данной модели с упруго-диссипативными связями введем следующие обобщенные координаты:

$q_j$ ,  $j=1...6$  – длины  $L_j = |A_j B'_j|$  абсолютно жестких частей соответствующих штанг – входные координаты МПКЦ;

$q_7... q_{12}$  – выходные координаты МПКЦ  $x_C, y_C, z_C, \psi, \vartheta, \gamma$  соответственно.

Применительно к данной динамической модели выражения для кинетических энергий раздвижных штанг не будут отличаться от выражений (118), полученных для модели с абсолютно жесткими элементами:

$$T_j = \dot{q}_j^2 K_{j0} + \omega_{X_{jH}}^2 K_{j1} + \omega_{Y_{jH}}^2 K_{j2} + \omega_{Z_{jH}}^2 K_{j3} + K_{j0} (q_j - |C_{jB} B'_j|)^2 \times \\ \times \left( \omega_{X_{jH}}^2 + \omega_{Y_{jH}}^2 + \omega_{Z_{jH}}^2 \right) - \omega_{X_{jH}}^* \omega_{Y_{jH}}^* K_{j4} - \omega_{Y_{jH}}^* \omega_{Z_{jH}}^* K_{j5} - \omega_{Z_{jH}}^* \omega_{X_{jH}}^* K_{j6},$$

однако изменится методика определения проекций угловых скоростей.

Согласно (125), для определения проекций угловой скорости  $j$ -й штанги требуется определение координат  $(x_{B_j}^{HP}, y_{B_j}^{HP}, z_{B_j}^{HP})$  верхнего шарнира в системе координат  $A_j X_{jH} Y_{jH} Z_{jH}$ . Координаты  $(x'_{B_j}, y'_{B_j}, z'_{B_j})$  верхнего шарнира в связанной с подвижной платформой системе координат  $CX'Y'Z'$  являются величинами известными. С использованием матрицы перехода, использующей выходные координаты МПКЦ (обобщенные координаты  $q_7 \dots q_{12}$ ), координаты верхнего шарнира могут быть пересчитаны в глобальную систему координат, а затем – в систему координат  $A_j X_{jH} Y_{jH} Z_{jH}$ .

Таким образом, проекции угловых скоростей штанг в рассматриваемом случае будут являться функциями обобщенных координат  $q_7 \dots q_{12}$ . Эти функции могут быть найдены аналитически, однако операции дифференцирования, выполняемые при составлении дифференциальных уравнений в форме Лагранжа, приведут к очень громоздким выражениям. По этой причине более предпочтительно использовать разложения в ряд Тейлора (127), а аналитические зависимости для проекций угловых скоростей штанг использовать при определении появляющихся при разложении частных производных.

Кинетическая энергия подвижной платформы может быть определена как

$$T_{III} = T_{III}^{Ц.М.} + T_{III}^{Bp},$$

причем выражения для ее составляющих будут отличаться от полученных выше. Кинетическая энергия, определяемая поступательной составляющей пространственного движения подвижной платформы, равна

$$T_{III}^{Ц.М.} = \frac{1}{2} m_{III} |\vec{v}_{C_{III}}|^2 = \frac{1}{2} m_{III} (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2 + \dot{q}_9^2).$$

Кинетическая энергия, определяемая вращательной составляющей пространственного движения подвижной платформы, равна

$$T_{III}^{Bp} = \frac{1}{2} \left[ J_{X'_{III}} \omega_{X'_{III}}^2 + J_{Y'_{III}} \omega_{Y'_{III}}^2 + J_{Z'_{III}} \omega_{Z'_{III}}^2 - 2J_{X'_{III}Y'_{III}} \omega_{X'_{III}} \omega_{Y'_{III}} - \right. \\ \left. - 2J_{Y'_{III}Z'_{III}} \omega_{Y'_{III}} \omega_{Z'_{III}} - 2J_{Z'_{III}X'_{III}} \omega_{Z'_{III}} \omega_{X'_{III}} \right],$$

где проекции вектора угловой скорости могут быть определены с использованием кинематических уравнений, аналогичных (131) и записанных через обобщенные координаты:

$$\begin{aligned}\omega_{X'_{III}} &= \dot{q}_{11} \cos q_{12} - \dot{q}_{10} \cos q_{11} \sin q_{12}; \\ \omega_{Y'_{III}} &= \dot{q}_{12} + \dot{q}_{10} \sin q_{11}; \\ \omega_{Z'_{III}} &= \dot{q}_{11} \sin q_{12} + \dot{q}_{10} \cos q_{11} \cos q_{12}.\end{aligned}\quad (137)$$

Если принять, что в процессе моделирования не будут рассматриваться положения платформы, при которых любая из выходных угловых координат превышает 10 градусов, то с погрешностью менее 5% можно принять, что  $\cos q = 1$  и  $\sin q = q$ . Это соответствует использованию только первого члена ряда Тейлора, в который можно разложить эти тригонометрические функции [12].

С учетом принятого допущения кинематические уравнения (137) существенно упростятся:

$$\omega_{X'_{III}} = \dot{q}_{11} - \dot{q}_{10} q_{12}, \quad \omega_{Y'_{III}} = \dot{q}_{12} + \dot{q}_{10} q_{11}, \quad \omega_{Z'_{III}} = \dot{q}_{10} + \dot{q}_{11} q_{12}.\quad (138)$$

Полная кинетическая энергия будет равна

$$\begin{aligned}T_{\Sigma} &= \sum_{j=1}^6 \left[ \dot{q}_j^2 K_{j0} + \omega_{X'_{jH}}^2 K_{j1} + \omega_{Y'_{jH}}^2 K_{j2} + \omega_{Z'_{jH}}^2 K_{j3} + \right. \\ &+ K_{j0} (q_j - |C_{jB} \mathbf{B}'_j|)^2 \left( \omega_{X'_{jH}}^2 + \omega_{Y'_{jH}}^2 + \omega_{Z'_{jH}}^2 \right) - \\ &\left. - \omega_{X'_{jH}} \omega_{Y'_{jH}} K_{j4} - \omega_{Y'_{jH}} \omega_{Z'_{jH}} K_{j5} - \omega_{Z'_{jH}} \omega_{X'_{jH}} K_{j6} \right] + \frac{1}{2} m_{III} |\vec{v}_{C_{III}}|^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ J_{X'_{III}} \omega_{X'_{III}}^2 + J_{Y'_{III}} \omega_{Y'_{III}}^2 + J_{Z'_{III}} \omega_{Z'_{III}}^2 - 2J_{X'_{III}Y'_{III}} \omega_{X'_{III}} \omega_{Y'_{III}} - \right. \\ &\left. - 2J_{Y'_{III}Z'_{III}} \omega_{Y'_{III}} \omega_{Z'_{III}} - 2J_{Z'_{III}X'_{III}} \omega_{Z'_{III}} \omega_{X'_{III}} \right].\end{aligned}$$

Упростим выражение для кинетической энергии, приняв, как это было сделано ранее, все входящие в выражение центробежные моменты инерции равными нулю:



$$\begin{aligned}
T_{\Sigma} = & \sum_{j=1}^6 \left[ \dot{q}_j^2 K_{j0} + \omega_{X_{jH}}^2 K_{j1} + \omega_{Y_{jH}}^2 K_{j2} + \omega_{Z_{jH}}^2 K_{j3} + K_{j0} (q_j - |C_{jB} \mathbf{B}'_j|)^2 \times \right. \\
& \times \left( \omega_{X_{jH}}^2 + \omega_{Y_{jH}}^2 + \omega_{Z_{jH}}^2 \right) \left. \right] + \frac{1}{2} m_{III} (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2 + \dot{q}_9^2) + \\
& + \frac{1}{2} \left[ J_{X'_{III}} \omega_{X'_{III}}^2 + J_{Y'_{III}} \omega_{Y'_{III}}^2 + J_{Z'_{III}} \omega_{Z'_{III}}^2 \right].
\end{aligned}$$

Данное упрощение правомерно, если соответствующие оси являются главными осями инерции.

Введем переменные вида  $\Omega_{X_{jH}}^* = \omega_{X_{jH}}^2$ , тогда

$$\begin{aligned}
T_{\Sigma} = & \sum_{j=1}^6 \left[ \dot{q}_j^2 K_{j0} + \Omega_{X_{jH}}^* K_{j1} + \Omega_{Y_{jH}}^* K_{j2} + \Omega_{Z_{jH}}^* K_{j3} + K_{j0} (q_j - |C_{jB} \mathbf{B}'_j|)^2 \times \right. \\
& \times \left( \Omega_{X_{jH}}^* + \Omega_{Y_{jH}}^* + \Omega_{Z_{jH}}^* \right) \left. \right] + \frac{1}{2} m_{III} (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2 + \dot{q}_9^2) + \\
& + \frac{1}{2} \left[ J_{X'_{III}} \Omega_{X'_{III}} + J_{Y'_{III}} \Omega_{Y'_{III}} + J_{Z'_{III}} \Omega_{Z'_{III}} \right].
\end{aligned} \tag{139}$$

Каждая из величин  $\Omega$  может быть представлена в следующем виде:

$$\Omega = \Omega^{<0>} + \sum_i \frac{\Omega}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}),$$

однако для проекций угловой скорости подвижной платформы данное разложение можно не реализовывать в силу относительной простоты выражений (138), связывающих эти проекции с обобщенными координатами.

Как отмечалось выше, проекции угловых скоростей штанг являются функциями обобщенных координат  $q_7 \dots q_{12}$ , поэтому можно записать:

$$\Omega_{X_{jH}}^* = \Omega_{X_{jH}}^{<0>} + \sum_{i=7}^{12} \frac{\Omega_{X_{jH}}^*}{\partial q_i} (q_i - q_i^{<0>}) \text{ и т. п.} \tag{140}$$

С учетом (138) и (140) запишем частные производные кинетической энергии (139), необходимые для составления дифференциальных уравнений в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial \dot{q}_s} = m_{sB} \ddot{q}_s, \quad s = 1 \dots 6;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial \dot{q}_s} = m_{III} \ddot{q}_s, \quad s = 7 \dots 9;$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial \dot{q}_{10}} &= \ddot{q}_{10} (J_{X'III} q_{12}^2 + J_{Y'III} q_{11}^2 + J_{Z'III}) + \ddot{q}_{11} (J_{Z'III} q_{12} - J_{X'III} q_{12}) + \ddot{q}_{12} J_{Y'III} q_{11} + \\ &+ J_{X'III} (2\dot{q}_{10} \dot{q}_{12} q_{12} - \dot{q}_{11} \dot{q}_{12}) + J_{Y'III} (\dot{q}_{11} \dot{q}_{12} + 2\dot{q}_{10} \dot{q}_{11} q_{11}) + J_{Z'III} \dot{q}_{11} \dot{q}_{12}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial \dot{q}_{11}} &= \ddot{q}_{10} (J_{Z'III} - J_{X'III}) q_{12} + \ddot{q}_{11} (J_{X'III} + J_{Z'III} q_{12}^2) - J_{X'III} \dot{q}_{10} \dot{q}_{12} + \\ &+ J_{Z'III} (\dot{q}_{10} + 2\dot{q}_{11} q_{12}) \dot{q}_{12}; \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial \dot{q}_{12}} = \ddot{q}_{10} J_{Y'III} q_{11} + \ddot{q}_{12} J_{Y'III} + J_{Y'III} \dot{q}_{10} \dot{q}_{11};$$

$$\frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial q_s} = 2K_{s0} \left( \Omega_{X_{sH}}^* + \Omega_{Y_{sH}}^* + \Omega_{Z_{sH}}^* \right) (q_s - |C_{sB} \mathbf{B}'_s|), \quad s = 1 \dots 6;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial q_s} &= \sum_{i=1}^6 \left[ \frac{\partial \Omega_{X_{iH}}^*}{\partial q_s} \left[ K_{i1} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2 \right] + \frac{\partial \Omega_{Y_{iH}}^*}{\partial q_s} \left[ K_{i2} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2 \right] + \right. \\ &\left. + \frac{\partial \Omega_{Z_{iH}}^*}{\partial q_s} \left[ K_{i3} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2 \right] \right], \quad s = 7 \dots 9; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial q_{10}} &= \sum_{i=1}^6 \left[ \frac{\partial \Omega_{X_{iH}}^*}{\partial q_{10}} \left[ K_{i1} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2 \right] + \frac{\partial \Omega_{Y_{iH}}^*}{\partial q_{10}} \left[ K_{i2} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2 \right] + \right. \\ &\left. + \frac{\partial \Omega_{Z_{iH}}^*}{\partial q_{10}} \left[ K_{i3} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2 \right] \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial q_{11}} &= \sum_{i=1}^6 \left[ \frac{\partial \Omega_{X_{iH}}^*}{\partial q_{11}} \left[ K_{i1} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2 \right] + \frac{\partial \Omega_{Y_{iH}}^*}{\partial q_{11}} \left[ K_{i2} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2 \right] + \right. \\ &\left. + \frac{\partial \Omega_{Z_{iH}}^*}{\partial q_{11}} \left[ K_{i3} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2 \right] \right] + J_{Y'III} (\dot{q}_{10} \dot{q}_{12} + \dot{q}_{10}^2 q_{11}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial q_{12}} &= \sum_{i=1}^6 \left[ \frac{\partial \Omega_{X_{iH}}^*}{\partial q_{12}} \left[ K_{i1} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2 \right] + \frac{\partial \Omega_{Y_{iH}}^*}{\partial q_{12}} \left[ K_{i2} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2 \right] + \right. \\ &\left. + \frac{\partial \Omega_{Z_{iH}}^*}{\partial q_{12}} \left[ K_{i3} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2 \right] \right] + J_{X'III} (\dot{q}_{10}^2 q_{12} - \dot{q}_{10} \dot{q}_{11}) + J_{Z'III} (\dot{q}_{11}^2 q_{12} + \dot{q}_{10} \dot{q}_{11}). \end{aligned}$$

Потенциальная энергия каждого из упругих элементов, представленных в модели, определяется как

$$\Pi_j = \frac{1}{2} c_j \delta l_j^2, \quad j=1...6,$$

где коэффициент жесткости  $c_j$  принят постоянным и

$$\begin{aligned} \delta l_j &= \sqrt{(x_{A_j} - x_{B_j})^2 + (y_{A_j} - y_{B_j})^2 + (z_{A_j} - z_{B_j})^2} - L_j = L_j^*(q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}) - q_j, \\ L_j^*(q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}) &= \left( x_{B_j}'^2 + y_{B_j}'^2 + z_{B_j}'^2 + (q_7 - x_{A_j})^2 + (q_8 - y_{A_j})^2 + (q_9 - z_{A_j})^2 + \right. \\ &+ 2 \left[ (Cq_{10}Cq_{12} + Sq_{10}Sq_{11}Sq_{12})x_{B_j}' + Sq_{10}Cq_{11}y_{B_j}' + (Sq_{10}Sq_{11}Cq_{12} - Cq_{10}Sq_{12})z_{B_j}' \right] \times \\ &\times (q_7 - x_{A_j}) + \\ &+ 2 \left[ (Cq_{10}Sq_{11}Sq_{12} - Sq_{10}Cq_{12})x_{B_j}' + Cq_{10}Cq_{11}y_{B_j}' + (Sq_{10}Sq_{12} + Cq_{10}Sq_{11}Cq_{12})z_{B_j}' \right] \times \\ &\times (q_8 - y_{A_j}) + 2 \left[ Cq_{11}Sq_{12}x_{B_j}' - Sq_{11}y_{B_j}' + Cq_{11}Cq_{12}z_{B_j}' \right] (q_9 - z_{A_j}) \Big)^{0,5}. \end{aligned}$$

С учетом принятого выше допущения о малости выходных угловых координат можно записать:

$$\begin{aligned} L_j^*(q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}) &= \left( x_{B_j}'^2 + y_{B_j}'^2 + z_{B_j}'^2 + (q_7 - x_{A_j})^2 + (q_8 - y_{A_j})^2 + (q_9 - z_{A_j})^2 + \right. \\ &+ 2 \left[ (1 + q_{10}q_{11}q_{12})x_{B_j}' + q_{10}y_{B_j}' + (q_{10}q_{11} - q_{12})z_{B_j}' \right] (q_7 - x_{A_j}) + \\ &+ 2 \left[ (q_{11}q_{12} - q_{10})x_{B_j}' + y_{B_j}' + (q_{10}q_{12} + q_{11})z_{B_j}' \right] (q_8 - y_{A_j}) + \\ &+ 2 \left[ q_{12}x_{B_j}' - q_{11}y_{B_j}' + z_{B_j}' \right] (q_9 - z_{A_j}) \Big)^{0,5}. \end{aligned}$$

Полная потенциальная энергия системы

$$\Pi = \sum_{j=1}^6 \Pi_j.$$

Частные производные полной потенциальной энергии по обобщенным координатам, необходимые для записи уравнений Лагранжа в виде (109), будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = c_j (q_j - L_j^*), \quad j=1...6;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^6 c_k (L_k^* - q_k) \frac{\partial L_k^*}{\partial q_j}, \quad j=7...12,$$

где

$$\frac{\partial L_k^*}{\partial q_7} = \frac{q_7 - x_{A_k} + (1 + q_{10}q_{11}q_{12})x'_{B_k} + q_{10}y'_{B_k} + (q_{10}q_{11} - q_{12})z'_{B_k}}{L_k^*(q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12})};$$

$$\frac{\partial L_k^*}{\partial q_8} = \frac{q_8 - y_{A_k} + (q_{11}q_{12} - q_{10})x'_{B_k} + y'_{B_k} + (q_{10}q_{12} + q_{11})z'_{B_k}}{L_k^*(q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12})};$$

$$\frac{\partial L_k^*}{\partial q_9} = \frac{q_9 - z_{A_k} + q_{12}x'_{B_k} - q_{11}y'_{B_k} + z'_{B_k}}{L_k^*(q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12})};$$

$$\frac{\partial L_k^*}{\partial q_{10}} = \frac{(q_{11}q_{12}x'_{B_k} + y'_{B_k} + q_{11}z'_{B_k})(q_7 - x_{A_k}) + (q_{12}z'_{B_k} - x'_{B_k})(q_8 - y_{A_k})}{L_k^*(q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12})};$$

$$\frac{\partial L_k^*}{\partial q_{11}} = \frac{(q_{10}q_{12}x'_{B_k} + q_{10}z'_{B_k})(q_7 - x_{A_k}) + (q_{12}x'_{B_k} + z'_{B_k})(q_8 - y_{A_k}) - y'_{B_k}(q_9 - z_{A_k})}{L_k^*(q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12})};$$

$$\frac{\partial L_k^*}{\partial q_{12}} = \frac{(q_{10}q_{11}x'_{B_k} - z'_{B_k})(q_7 - x_{A_k}) + (q_{11}x'_{B_k} + q_{10}z'_{B_k})(q_8 - y_{A_k}) + x'_{B_k}(q_9 - z_{A_k})}{L_k^*(q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12})}.$$

Обобщенные силы для рассматриваемой динамической модели механизма с упруго-диссипативными связями можно записать следующим образом:

$$Q_j = P_j - \frac{\partial z_{C_{jB}}^{HP}}{\partial q_j} m_{jB} g + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(\delta l_i)}{\partial q_j} \beta_i \left[ \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right]^2 \text{sign} \frac{d(\delta l_i)}{dt}, \quad j=1...6;$$

$$Q_7 = l_{BHEШ} |\vec{P}_{BHEШ}| - \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial z_{C_{iH}}^{HP}}{\partial q_7} m_{iH} + \frac{\partial z_{C_{iB}}^{HP}}{\partial q_7} m_{iB} \right) g + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(\delta l_i)}{\partial q_7} \beta_i \left[ \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right]^2 \text{sign} \frac{d(\delta l_i)}{dt};$$

$$Q_8 = m_{BHEШ} |\vec{P}_{BHEШ}| - \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial z_{C_{iH}}^{HP}}{\partial q_8} m_{iH} + \frac{\partial z_{C_{iB}}^{HP}}{\partial q_8} m_{iB} \right) g + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(\delta l_i)}{\partial q_8} \beta_i \left[ \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right]^2 \text{sign} \frac{d(\delta l_i)}{dt};$$

$$Q_9 = n_{BHEШ} |\vec{P}_{BHEШ}| - m_{ПП} g - \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial z_{C_{iH}}^{HP}}{\partial q_9} m_{iH} + \frac{\partial z_{C_{iB}}^{HP}}{\partial q_9} m_{iB} \right) g + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(\delta l_i)}{\partial q_9} \beta_i \left[ \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right]^2 \text{sign} \frac{d(\delta l_i)}{dt};$$

$$\begin{aligned}
Q_{10} &= -\sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial z_{C_{iH}}^{HP}}{\partial q_{10}} m_{iH} + \frac{\partial z_{C_{iB}}^{HP}}{\partial q_{10}} m_{iB} \right) g + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(\delta l_i)}{\partial q_{10}} \beta_i \left[ \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right]^2 \operatorname{sign} \frac{d(\delta l_i)}{dt}; \\
Q_{11} &= -\sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial z_{C_{iH}}^{HP}}{\partial q_{11}} m_{iH} + \frac{\partial z_{C_{iB}}^{HP}}{\partial q_{11}} m_{iB} \right) g + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(\delta l_i)}{\partial q_{11}} \beta_i \left[ \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right]^2 \operatorname{sign} \frac{d(\delta l_i)}{dt}; \\
Q_{12} &= -\sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial z_{C_{iH}}^{HP}}{\partial q_{12}} m_{iH} + \frac{\partial z_{C_{iB}}^{HP}}{\partial q_{12}} m_{iB} \right) g + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(\delta l_i)}{\partial q_{12}} \beta_i \left[ \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right]^2 \operatorname{sign} \frac{d(\delta l_i)}{dt}.
\end{aligned}$$

При записи выражений для обобщенных сил предполагалось, что:

- вектор ускорения свободного падения  $\vec{g}$  направлен противоположно положительному направлению оси  $OZ$  глобальной системы координат;
- внешняя сила приложена к подвижной платформе в точке  $C$ ;
- в системе присутствует «настоящее» трение [17].

С использованием полученных выражений для частных производных потенциальной и кинетической энергий, а также выражений для обобщенных сил можно составить систему дифференциальных уравнений Лагранжа, которая может быть аналитически разрешена относительно обобщенных ускорений:

$$\begin{cases}
\ddot{q}_1 = f_1(q_1, \dots, q_{12}); \\
\dots \\
\ddot{q}_9 = f_9(q_1, \dots, q_{12}); \\
\ddot{q}_{10} = f_{10}(q_1, \dots, q_{12}, \dot{q}_{10}, \dot{q}_{11}, \dot{q}_{12}); \\
\ddot{q}_{11} = f_{11}(q_1, \dots, q_{12}, \dot{q}_{10}, \dot{q}_{11}, \dot{q}_{12}); \\
\ddot{q}_{12} = f_{12}(q_1, \dots, q_{12}, \dot{q}_{10}, \dot{q}_{11}, \dot{q}_{12}).
\end{cases} \quad (141)$$

Выражения для функций  $f_j$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
f_j &= \frac{1}{m_{jB}} \left( c_j (q_j - L_j^*) - 2K_{j0} \left( \Omega_{X_{jH}}^* + \Omega_{Y_{jH}}^* + \Omega_{Z_{jH}}^* \right) (q_j - |C_{jB} \mathbf{B}'_j|) + \right. \\
&\quad \left. + P_j - \frac{\partial z_{C_{jB}}^{HP}}{\partial q_j} m_{jB} g + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(\delta l_i)}{\partial q_j} \beta_i \left[ \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right]^2 \operatorname{sign} \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right), j = 1 \dots 6;
\end{aligned}$$

$$f_7 = \frac{1}{m_{III}} \left\{ \sum_{i=1}^6 \left[ c_i (L_i^* - q_i) \frac{\partial L_i^*}{\partial q_7} - \frac{\partial \Omega_{X_{iH}^*}}{\partial q_7} [K_{i1} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \Omega_{Y_{iH}^*}}{\partial q_7} [K_{i2} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] + \frac{\partial \Omega_{Z_{iH}^*}}{\partial q_7} [K_{i3} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] \right] + \right. \\ \left. + l_{BHEIII} |\vec{P}_{BHEIII}| - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial z_{C_{iH}}^{HP}}{\partial q_7} m_{iH} + \frac{\partial z_{C_{iB}}^{HP}}{\partial q_7} m_{iB} \right) + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(\delta l_i)}{\partial q_7} \beta_i \left[ \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right]^2 \text{sign} \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right\};$$

$$f_8 = \frac{1}{m_{III}} \left\{ \sum_{i=1}^6 \left[ c_i (L_i^* - q_i) \frac{\partial L_i^*}{\partial q_8} - \frac{\partial \Omega_{X_{iH}^*}}{\partial q_8} [K_{i1} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \Omega_{Y_{iH}^*}}{\partial q_8} [K_{i2} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] + \frac{\partial \Omega_{Z_{iH}^*}}{\partial q_8} [K_{i3} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] \right] + \right. \\ \left. + m_{BHEIII} |\vec{P}_{BHEIII}| - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial z_{C_{iH}}^{HP}}{\partial q_8} m_{iH} + \frac{\partial z_{C_{iB}}^{HP}}{\partial q_8} m_{iB} \right) + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(\delta l_i)}{\partial q_8} \beta_i \left[ \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right]^2 \text{sign} \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right\};$$

$$f_9 = \frac{1}{m_{III}} \left\{ \sum_{i=1}^6 \left[ c_i (L_i^* - q_i) \frac{\partial L_i^*}{\partial q_9} - \frac{\partial \Omega_{X_{iH}^*}}{\partial q_9} [K_{i1} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \Omega_{Y_{iH}^*}}{\partial q_9} [K_{i2} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] + \frac{\partial \Omega_{Z_{iH}^*}}{\partial q_9} [K_{i3} + K_{i0} (q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] \right] + \right. \\ \left. + n_{BHEIII} |\vec{P}_{BHEIII}| - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial z_{C_{iH}}^{HP}}{\partial q_9} m_{iH} + \frac{\partial z_{C_{iB}}^{HP}}{\partial q_9} m_{iB} \right) + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(\delta l_i)}{\partial q_9} \beta_i \left[ \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right]^2 \text{sign} \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right\};$$

$$f_{10} = \frac{\begin{vmatrix} b_{10} & a_{10\_2} & a_{10\_3} \\ b_{11} & a_{11\_2} & a_{11\_3} \\ b_{12} & a_{12\_2} & a_{12\_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{10\_1} & a_{10\_2} & a_{10\_3} \\ a_{11\_1} & a_{11\_2} & a_{11\_3} \\ a_{12\_1} & a_{12\_2} & a_{12\_3} \end{vmatrix}}; f_{11} = \frac{\begin{vmatrix} a_{10\_1} & b_{10} & a_{10\_3} \\ a_{11\_1} & b_{11} & a_{11\_3} \\ a_{12\_1} & b_{12} & a_{12\_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{10\_1} & a_{10\_2} & a_{10\_3} \\ a_{11\_1} & a_{11\_2} & a_{11\_3} \\ a_{12\_1} & a_{12\_2} & a_{12\_3} \end{vmatrix}}; f_{12} = \frac{\begin{vmatrix} a_{10\_1} & a_{10\_2} & b_{10} \\ a_{11\_1} & a_{11\_2} & b_{11} \\ a_{12\_1} & a_{12\_2} & b_{12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{10\_1} & a_{10\_2} & a_{10\_3} \\ a_{11\_1} & a_{11\_2} & a_{11\_3} \\ a_{12\_1} & a_{12\_2} & a_{12\_3} \end{vmatrix}},$$

где

$$a_{10\_1} = J_{X'_{III}} q_{12}^2 + J_{Y'_{III}} q_{11}^2 + J_{Z'_{III}};$$

$$a_{10\_2} = J_{Z'_{III}} q_{12} - J_{X'_{III}} q_{12};$$

$$a_{10\_3} = J_{Y'_{III}} q_{11};$$

$$a_{11-1} = (J_{Z'III} - J_{X'III})q_{12};$$

$$a_{11-2} = J_{X'III} + J_{Z'III} q_{12}^2;$$

$$a_{11-3} = 0;$$

$$a_{12-1} = J_{Y'III} q_{11};$$

$$a_{12-2} = 0;$$

$$a_{12-3} = J_{Y'III};$$

$$b_{10} = \sum_{i=1}^6 \left[ \frac{\partial \Omega_{X_{iH}}^*}{\partial q_{10}} [K_{i1} + K_{i0}(q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] + \frac{\partial \Omega_{Y_{iH}}^*}{\partial q_{10}} [K_{i2} + K_{i0}(q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Omega_{Z_{iH}}^*}{\partial q_{10}} [K_{i3} + K_{i0}(q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] - c_i(L_i^* - q_i) \frac{\partial L_i^*}{\partial q_{10}} - \left( \frac{\partial z_{C_{iH}}^{HP}}{\partial q_{10}} m_{iH} + \frac{\partial z_{C_{iB}}^{HP}}{\partial q_{10}} m_{iB} \right) g + \right. \\ \left. + \frac{\partial(\delta l_i)}{\partial q_{10}} \beta_i \left[ \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right]^2 \text{sign} \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right] - \\ - J_{X'III} (2\dot{q}_{10}\dot{q}_{12}q_{12} - \dot{q}_{11}\dot{q}_{12}) - J_{Y'III} (\dot{q}_{11}\dot{q}_{12} + 2\dot{q}_{10}\dot{q}_{11}q_{11}) - J_{Z'III} \dot{q}_{11}\dot{q}_{12};$$

$$b_{11} = \sum_{i=1}^6 \left[ \frac{\partial \Omega_{X_{iH}}^*}{\partial q_{11}} [K_{i1} + K_{i0}(q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] + \frac{\partial \Omega_{Y_{iH}}^*}{\partial q_{11}} [K_{i2} + K_{i0}(q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Omega_{Z_{iH}}^*}{\partial q_{11}} [K_{i3} + K_{i0}(q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] - c_i(L_i^* - q_i) \frac{\partial L_i^*}{\partial q_j} - \left( \frac{\partial z_{C_{iH}}^{HP}}{\partial q_{10}} m_{iH} + \frac{\partial z_{C_{iB}}^{HP}}{\partial q_{10}} m_{iB} \right) g + \right. \\ \left. \frac{\partial(\delta l_i)}{\partial q_{11}} \beta_i \left[ \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right]^2 \text{sign} \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right] + \\ + J_{Y'III} (\dot{q}_{10}\dot{q}_{12} + \dot{q}_{10}^2 q_{11}) - J_{Z'III} (\dot{q}_{10} + 2\dot{q}_{11}q_{12})\dot{q}_{12} + J_{X'III} \dot{q}_{10}\dot{q}_{12};$$

$$b_{12} = \sum_{i=1}^6 \left[ \frac{\partial \Omega_{X_{iH}}^*}{\partial q_{12}} [K_{i1} + K_{i0}(q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] + \frac{\partial \Omega_{Y_{iH}}^*}{\partial q_{12}} [K_{i2} + K_{i0}(q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Omega_{Z_{iH}}^*}{\partial q_{12}} [K_{i3} + K_{i0}(q_i - |C_{iB} \mathbf{B}'_i|)^2] - c_i(L_i^* - q_i) \frac{\partial L_i^*}{\partial q_{12}} - \left( \frac{\partial z_{C_{iH}}^{HP}}{\partial q_{12}} m_{iH} + \frac{\partial z_{C_{iB}}^{HP}}{\partial q_{12}} m_{iB} \right) g + \right. \\ \left. + \frac{\partial(\delta l_i)}{\partial q_{12}} \beta_i \left[ \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right]^2 \text{sign} \frac{d(\delta l_i)}{dt} \right] - \\ - J_{Y'III} \dot{q}_{10}\dot{q}_{11} + J_{X'III} (\dot{q}_{10}^2 q_{12} - \dot{q}_{10}\dot{q}_{11}) + J_{Z'III} (\dot{q}_{11}^2 q_{12} + \dot{q}_{10}\dot{q}_{11}).$$

Система уравнений (141) может быть использована для решения как прямой, так и обратной задач динамики применительно к рассмотренной динамической модели, учитывающей наличие в МПКЦ упруго-диссипативных связей. Кроме того, полученные уравнения позволяют исследовать поведение МПКЦ при кинематическом возбуждении, что может потребоваться при осуществлении траекторного моделирования. В этом случае значения обобщенных координат  $q_j$ ,  $j=1...6$  являются заданными функциями времени, для которых с использованием шести последних уравнений системы (141) определяется характер изменения выходных для МПКЦ координат.

Система уравнений (141) получена с учетом малости угловых выходных координат; при недопустимости такого упрощения получение уравнений возможно с использованием разложения гармонических функций в ряд Тейлора с большим количеством членов.

Моделирование поведения МПКЦ типа «гексапод» с использованием системы дифференциальных уравнений (141) при реализации кинематического возбуждения проводилось в программной среде MATLAB. На рисунке 138 показан результат моделирования применительно к некоторому МПКЦ: цель моделирования – проверка функциональности уравнений (141) на качественном уровне.

На рисунке 138 показан характер изменения двух выходных координат: одной линейной и одной угловой для заданного ступенчатого изменения одной входной координаты, причем:

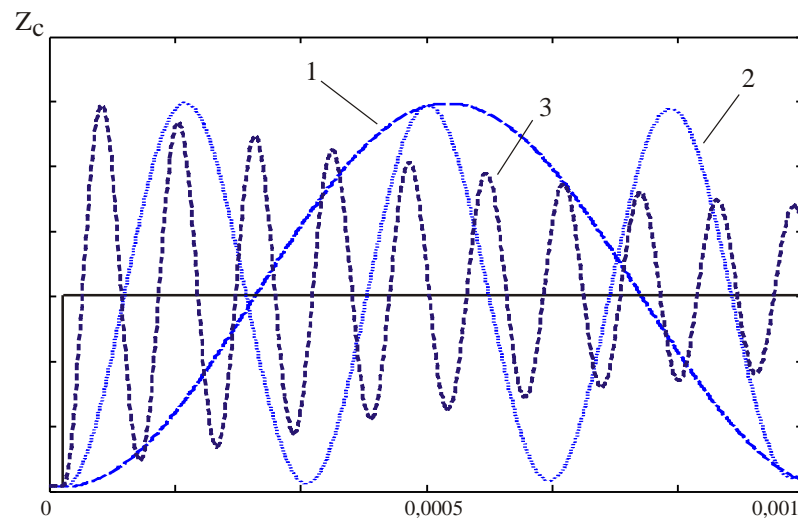
– в 1-м случае рассматриваются только упругие свойства при некотором значении коэффициентов упругости  $c_j^{<1>}$ ;

– во 2-м случае рассматриваются только упругие свойства при некотором значении коэффициентов упругости  $c_j^{<2>} > c_j^{<1>}$ ;

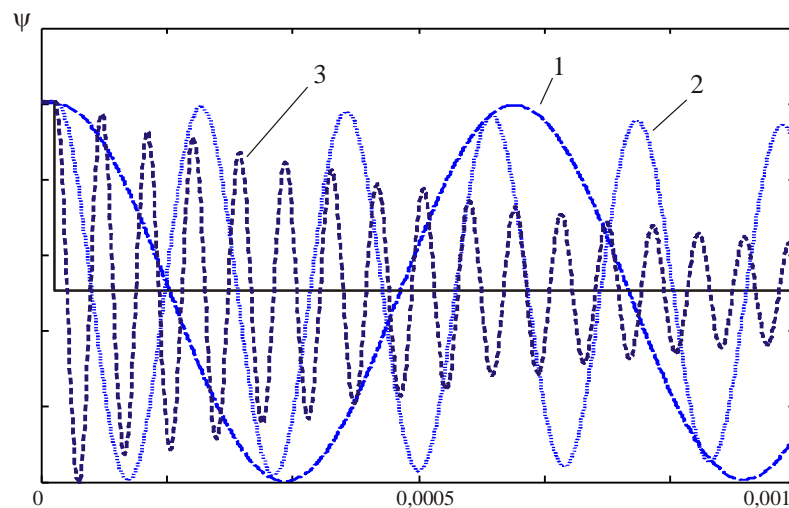
– в 3-м случае рассматриваются как упругие, так и диссипативные свойства;  $c_j^{<3>} > c_j^{<2>}$ .



Сплошной линией показаны значения выходных координат, полученные из решения прямой задачи кинематики. По оси абсцисс отложено время, измеряемое в секундах.



а)



б)

**Рисунок 138 – Моделирование динамики МПКЦ:**  
 а) – характер изменения выходной линейной координаты;  
 б) – характер изменения выходной угловой координаты

Графики на рисунке 138 подтверждают (на качественном уровне) правильность функционирования программы, использующей для динамического моделирования уравнения (141). Использование этих уравнений для исследования конкретного МПКЦ, в том числе для моделирования возникающих при движении инструмента динамических ошибок, возможно только после определения соответствующих этому механизму значений массо-инерционных параметров и коэффи-

циентов  $c_j$ ,  $\beta_j$ , т. е. решения задачи параметрической идентификации динамической модели.

Вопросам экспериментального определения параметров моделей посвящено большое количество публикаций [68], поэтому эти вопросы в данной работе не рассматриваются. Однако следует отметить перспективность использования методов конечно-элементного анализ, например, с использованием пакета Ansys [10], позволяющих решать задачу параметрической идентификации на «виртуальном» уровне.

Динамическая модель пространственного механизма с упруго-диссипативными связями использована в ФГУП ПО «Октябрь» (г. Каменск-Уральский) при выполнении работ по повышению эффективности рабочих органов манипуляторов (Приложение Г).

#### 4.6. Выводы по главе

1. С использованием уравнений Даламбера–Лагранжа получены динамические модели для двух МПКЦ, имеющих штанги переменной длины: плоского механизма типа «бипод» и пространственного механизма типа «гексапод». Для каждого из механизмов получены динамические модели двух типов:

– динамическая модель, рассматривающая элементы МПКЦ (штанги) как абсолютно жесткие тела;

– динамическая модель, учитывающая наличие упруго-диссипативных связей в элементах МПКЦ.

Полученные модели содержат дифференциальные уравнения с переменными параметрами, для которых не существует общих методов анализа.

2. С использованием динамической модели, рассматривающей элементы МПКЦ (штанги) как абсолютно жесткие тела, выполнен анализ применимости энергоэффективного закона управления приводными устройствами ОПКС. Показано, что усилия в штангах ОПКС определяются как внешними силовыми факторами (статическая составляющая), так и силами инерции (динамическая состав-

ляющая), возникающими при движении элементов ОПКС. Наличие этих составляющих определяет подтвержденный моделированием факт, что возможность уменьшения потребляемой приводами ОПКС энергии за счет реализации энергоэффективного закона управления приводными устройствами по мере увеличения скорости движения характерной точки рабочего органа снижается. При относительно невысоких скоростях движения характерной точки работа сил инерции может не учитываться и для реализации энергоэффективного закона управления приводными устройствами могут использоваться существенно более простые уравнения статической модели.

3. Динамическая модель, рассматривающая элементы МПКЦ (штанги) как абсолютно жесткие тела, была использована:

– в ООО «ТехноЛайн» (г. Челябинск) при создании программно-аппаратного комплекса для управления оборудованием с параллельной кинематикой (Приложение А);

– в ООО «Завод энергоэффективного и емкостного оборудования» (г. Челябинск) при создании 6-ти степенного сварочного позиционера (Приложение Б);

– в ООО «Челябинский завод мобильных энергоустановок и конструкций» при создании станка для получения изделий методом инкрементальной формовки (Приложение В).

4. Динамическая модель, учитывающая наличие упруго-диссипативных связей, позволяет решать широкий класс задач. В частности, она может использоваться при динамическом траекторном моделировании для определения возникающих при движении рабочего органа по заданной траектории динамических ошибок. Однако для использования этой модели требует провести идентификацию ее параметров применительно к конкретному экземпляру ОПКС.

5. Динамическая модель, учитывающая наличие упруго-диссипативных связей, использована в ФГУП ПО «Октябрь» (г. Каменск-Уральский) при выполнении работ по повышению эффективности рабочих органов манипуляторов (Приложение Г).

## **5. Повышение точности траекторного движения рабочего органа в оборудовании с параллельной кинематической структурой**

### **5.1. Методы решения задачи интерполяции траектории рабочего органа**

Несмотря на многообразие математически описываемых кривых, на практике интерес представляют две траекторные задачи:

- обеспечение движения характерной точки рабочего органа по отрезку прямой линии;
- обеспечение движения характерной точки рабочего органа по дуге окружности.

Объясняется это тем, что до 80% контуров деталей, обрабатываемых на станках с ЧПУ, ограничены отрезками и дугами окружностей [37]. Кроме того, эквидистантами для отрезка и дуги являются также отрезок и дуга, в то время как эквидистанты к другим кривым второго порядка имеют более высокий порядок.

Система ЧПУ получает информацию о требуемом характере движения рабочего органа через:

- заданные координаты начального и конечного положения характерной точки;
- заданную требуемую контурную скорость;
- описание движения характерной точки: по отрезку прямой или по дуге окружности.

Обеспечение требуемого перемещения характерной точки рабочего органа из начального положения в конечное с требуемой контурной скоростью возлагается на систему ЧПУ.

Формирование перемещения характерной точки по траектории, представляющей собой отрезок прямой, называется линейной интерполяцией траектории; формирование перемещения характерной точки по траектории, представляющей собой дугу окружности, называется круговой интерполяцией траектории.

Рассмотрим, как решаются задачи интерполяции для оборудования, выполненного по традиционным компоновочным схемам. Рассмотрим случай перемещения рабочего органа, при котором изменяются две линейные координаты  $(x_C, y_C)$  его характерной точки  $C$ . Изменение этих координат производится с использованием двух приводов подач, каждый из которых отвечает за изменение одной координаты.

Пусть требуется переместить точку  $C$  из положения  $(x_C^{нач}, y_C^{нач})$  в положение  $(x_C^{кон}, y_C^{кон})$  по прямой линии, обеспечив контурную скорость  $V_K$ . Данная информация позволяет рассчитать время, за которое осуществится данное перемещение:

$$T = \frac{\sqrt{(x_C^{нач} - x_C^{кон})^2 + (y_C^{нач} - y_C^{кон})^2}}{V_K},$$

а также составляющие контурной скорости:

$$V_{Kx} = \frac{V_K (x_C^{кон} - x_C^{нач})}{\sqrt{(x_C^{нач} - x_C^{кон})^2 + (y_C^{нач} - y_C^{кон})^2}}, \quad V_{Ky} = \frac{V_K (y_C^{кон} - y_C^{нач})}{\sqrt{(x_C^{нач} - x_C^{кон})^2 + (y_C^{нач} - y_C^{кон})^2}}.$$

Наиболее очевидный способ формирования требуемой прямолинейной траектории – обеспечить изменение координаты  $x_C$  в течении времени  $T$  со скоростью  $V_{Kx}$ , а координаты  $y_C$  в течение этого же времени со скоростью  $V_{Ky}$ . Принципиальная возможность этого в современных микропроцессорных системах ЧПУ имеется. Ограничивает использование такого подхода использование при построении оборудования следящих приводов.

Следящий электропривод имеет контур обратной связи по перемещению [47], чем отличается от регулируемого электропривода. В качестве управляющего для следящего электропривода выступает сигнал, который несет в себе информацию о требуемом положении исполнительного вала привода  $\phi_{Tp}$ ; привод стремится уменьшить рассогласование  $\varepsilon$  между требуемым  $\phi_{Tp}$  и фактическим  $\phi_\phi$  положение исполнительного вала. Скорость электродвигателя в следящем приводе пропорциональна рассогласованию, следовательно, не является постоянной.

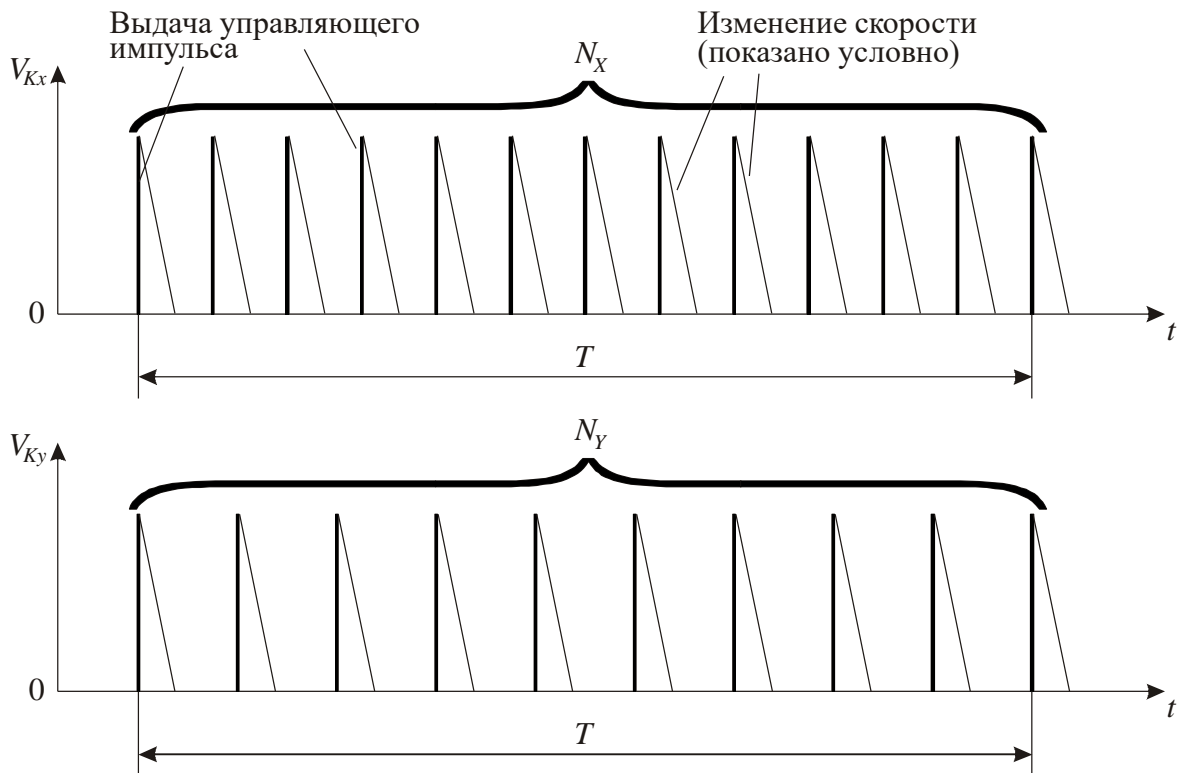
Элементом контура обратной связи по перемещению является датчик положения. В настоящее время в этом качестве используются фотоимпульсные (растровые) датчики, дискретность которых определяет дискретность следящего электропривода в целом [99]. Примем, что перемещение по координатам осуществляется дискретно с шагом  $\Delta_{\text{ПР}}$ . Шаг  $\Delta_{\text{ПР}}$  назовем дискретой привода.

При дискретном управлении следящим электроприводом обеспечивается изменение соответствующей координаты рабочего органа на величину  $\Delta_{\text{ПР}}$  в ответ на поступление каждого управляющего импульса. При кодовом управлении требуемое перемещение поступает на управляющий вход привода в виде цифрового кода. Дискретное управление более наглядно иллюстрирует особенности решения траекторных задач. Такой способ управления является основным при управлении приводами на основе шаговых двигателей.

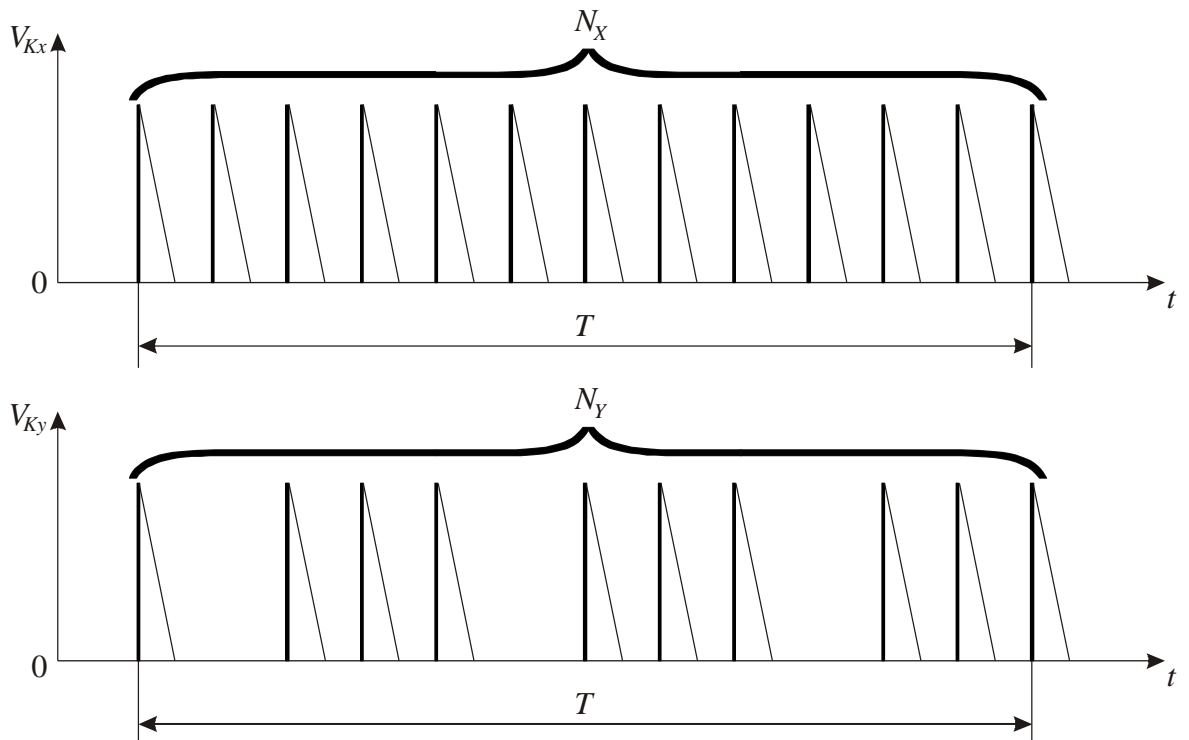
Если требуется, чтобы за время  $T$  рабочий орган переместился по координате  $X$  на  $N_X = \frac{x_C^{\text{кон}} - x_C^{\text{нач}}}{\Delta_{\text{ПР}}}$  дискрет, а по координате  $Y$  – на  $N_Y = \frac{y_C^{\text{кон}} - y_C^{\text{нач}}}{\Delta_{\text{ПР}}}$ , то для реализации линейной интерполяции можно использовать способ равномерной выдачи управляющих импульсов (рисунок 139).

Из рисунка 139 видно, что выдача управляющих импульсов в приводы разных координат может происходить в несовпадающие моменты времени, что не совсем удобно с точки зрения аппаратной или программной реализации процесса управления. Способ, при котором управление строится в привязке к ведущей координате, с этих позиций более предпочтителен.

Ведущей называется координата, требуемое перемещение по которой больше. На рисунке 139 в качестве ведущей выступает координата  $X$ . Выдача управляющих импульсов в приводы остальных (ведомых) координат осуществляется синхронно с выдачей импульсов в привод ведущей координаты (рисунок 140).



**Рисунок 139 – Реализация линейной интерполяции: способ равномерной выдачи управляющих импульсов**



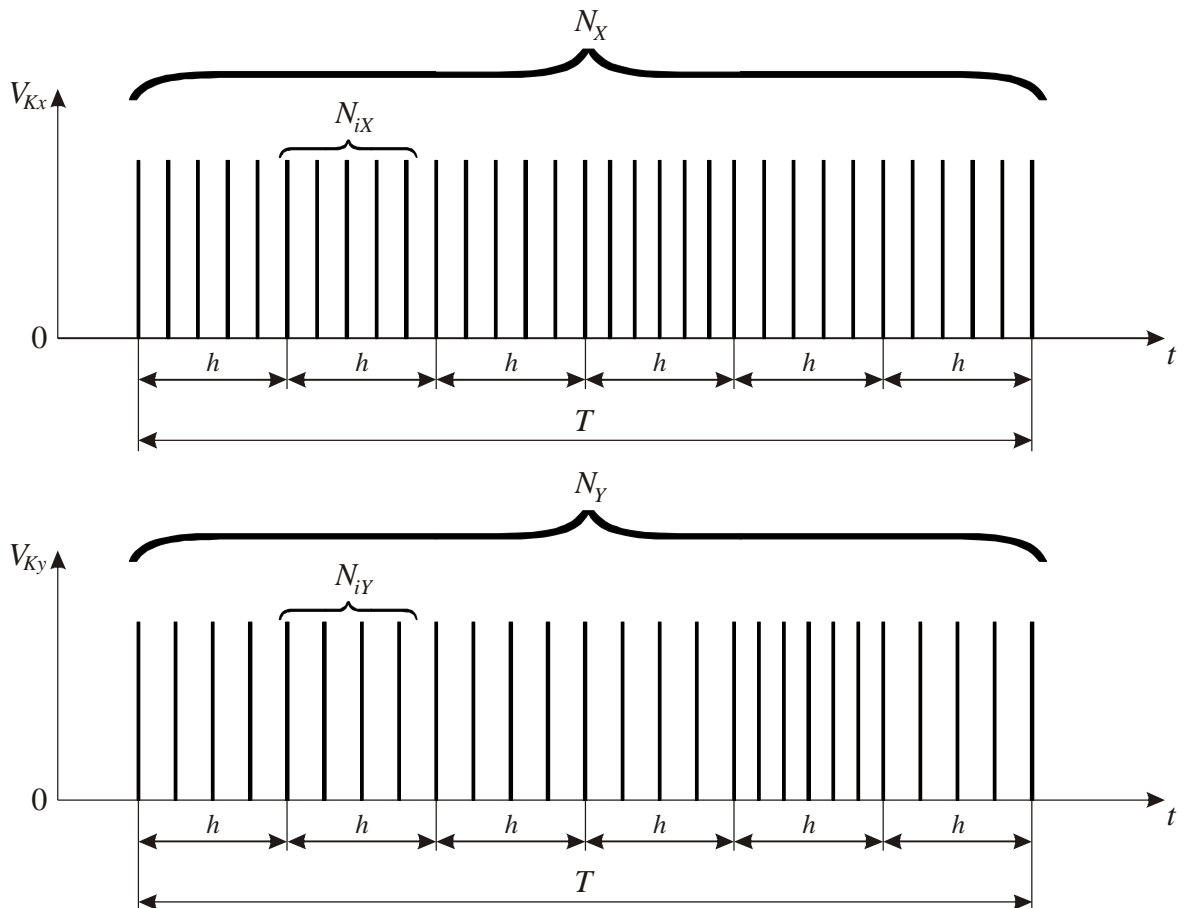
**Рисунок 140 – Реализация линейной интерполяции: способ выдачи управляющих импульсов с привязкой к ведущей координате**

Способ интерполяции с использованием постоянной несущей частоты отличается от описанных выше тем, что в нем используется временной интервал  $h$  заданной длительности, называемой периодом несущей частоты (рисунок 141).

Требуемая контурная скорость позволяет определить количество управляющих импульсов, которые должны поступить на каждый привод подачи за время  $h$   $i$ -го периода:

$$N_{iX} = \frac{V_{Kx}h}{\Delta_{ПП}}, \quad N_{iY} = \frac{V_{Ky}h}{\Delta_{ПП}}.$$

Значения  $N_{iX}$ ,  $N_{iY}$  получаются дробными, в алгоритмы управления вводятся специальные процедуры накопления ошибок округления (дробное количество импульсов управления смысла не имеет) и коррекции. Поэтому даже при реализации линейной интерполяции количество импульсов, выдаваемых в привод за время  $h$ , будет непостоянным.

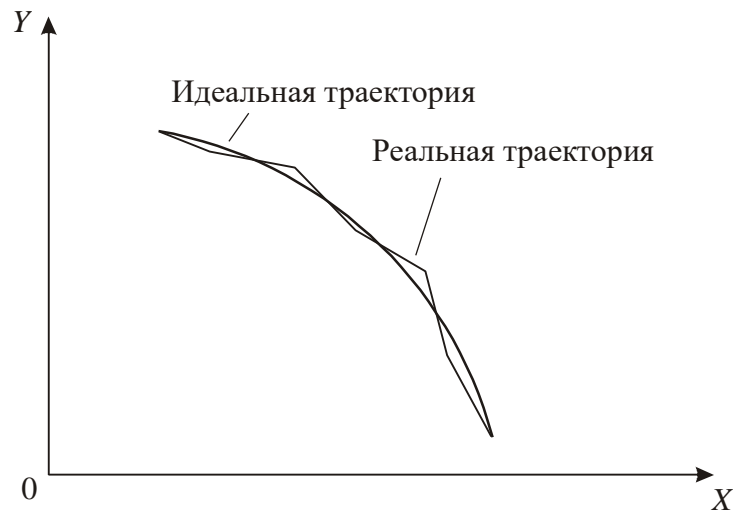


**Рисунок 141 – Реализация линейной интерполяции: способ управления на постоянной несущей частоте**

При управлении на несущей частоте характер работы привода может рассматриваться как работа со скоростью  $\tilde{V}_{iX(Y)} = \frac{N_{iX(Y)}\Delta_{ПП}}{h}$ , остающейся постоянной в течение периода  $h$  и изменяющейся на границах этих временных интервалов.



Для обеспечения требуемой контурной скорости должно выполняться условие  $\tilde{V}_{iX}^2 + \tilde{V}_{iY}^2 \approx V_K^2$ . Таким образом, в течение  $i$ -го периода несущей частоты рабочий орган движется по линейной траектории, направление которой определяется соотношением скоростей  $\tilde{V}_{iX}$  и  $\tilde{V}_{iY}$ . При формировании соответствующих законов изменения этих скоростей (количества импульсов от периода к периоду несущей частоты) могут быть получены линейные приближения к любым траекториям движения рабочего органа. Для обеспечения движения рабочего органа по дуге окружности скорости должны меняться по гармоническим законам и приближение может иметь вид, показанный на рисунке 142.



**Рисунок 142 – Приближение дуги окружности отрезками**

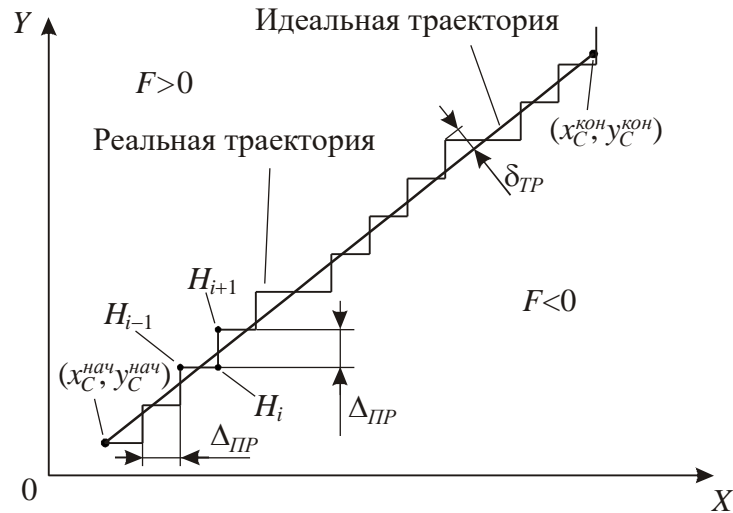
Кодовое управление на постоянной несущей частоте сводится к выдаче в приводы подач в начале каждого периода информации (в цифровой форме) о перемещениях по соответствующим координатам за время  $h$ .

Управление на несущей частоте является наиболее широко используемым в современных системах ЧПУ. Величина несущей частоты составляет обычно 100 Гц...10 кГц.

Одним из самых простых и распространенных методов формирования требуемой траектории является метод оценочной функции [9]. В этом случае моделируется алгебраическое уравнение воспроизводимой при движении рабочего органа кривой. Сущность метода заключается в следующем: при формировании перемещения по одной из координат вычисляется вспомогательная оценочная функ-

ция, которая характеризует приближение реальной траектории к идеальной (требуемой). Из анализа приближения определяется координата, по которой будет осуществляться следующее перемещение.

Проиллюстрируем метод оценочной функции в простейшем случае плоского движения по прямой линии (рисунок 143).



**Рисунок 143 – Реализация метода оценочной функции при линейной интерполяции**

Примем, что оценочная функция  $F = 0$  при совпадении реальной траектории с идеальной;  $F > 0$  – если точка реальной траектории находится над идеальной траекторией;  $F < 0$  – если точка реальной траектории находится под идеальной траекторией (см. рисунок 143). В начальной точке  $(x_C^{нач}, y_C^{нач})$   $F = 0$  и выполним перемещение по координате  $X$ . Новая точка  $(x_C^{нач} + \Delta_{IP}, y_C^{нач})$  попадает в область  $F < 0$  и для приближения к идеальной траектории следует выполнить перемещение по координате  $Y$ . Третья точка попадает в область  $F > 0$  и для приближения к идеальной траектории следует выполнить перемещение по координате  $X$ .

Таким образом, знак оценочной функции определяет координату, по которой следует осуществлять перемещение из текущей точки  $H_i(x_{Ci}, y_{Ci})$ . Шаг, с которым производится перемещение, в простейшем случае равен дискрете привода  $\Delta_{IP}$ .

При линейной интерполяции уравнение воспроизводимого отрезка имеет вид

$$y = \frac{y_C^{\text{кон}} - y_C^{\text{нач}}}{x_C^{\text{кон}} - x_C^{\text{нач}}} x.$$

Если принять, что оценочная функция для  $i$ -й точки

$$F_i = y_i - y,$$

что соответствует рисунок 143, то можно записать следующее выражение:

$$F_i = y_i - \frac{y_C^{\text{кон}} - y_C^{\text{нач}}}{x_C^{\text{кон}} - x_C^{\text{нач}}} x_i, \quad (142)$$

которое позволяет определить знак оценочной функции и координату, по которой будет производиться дальнейшее перемещение.

При круговой интерполяции (рисунок 144) уравнение воспроизводимой дуги окружности радиусом  $R$  имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

где  $x_0, y_0$  – координаты центра окружности.

Если принять, что оценочная функция  $F < 0$  соответствует нахождению текущей точки реальной траектории внутри окружности радиуса  $R$ , то можно записать следующее выражение:

$$F_i = (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2.$$

В показанном на рисунке 144 случае при движении по дуге координата  $X$  возрастает, а  $Y$  – убывает. Поэтому, если  $F_i < 0$ , то перемещение следует осуществлять по координате  $X$ ; если  $F_i > 0$  – по координате  $Y$ .

Рассмотренные варианты интерполяции с использованием оценочных функций при практической реализации могут накладывать ограничения на быстродействие станка в целом [99]. Поэтому нашли применение модифицированные алгоритмы метода оценочной функции, в которых реализуется управление на несущей частоте.

При использовании для решения задач интерполяции метода цифровых дифференциальных анализаторов [9, 99] моделируется дифференциальное уравнение воспроизводимой кривой. К методу цифровых дифференциальных анализаторов относят алгоритмические структуры, которые позволяют

осуществлять управление приводами станка на основе выделения целых частей очень точно рассчитанных координат или их приращений с накоплением и последующим использованием остатков. Методы цифровых дифференциальных анализаторов обычно реализуют с использованием управления на несущей частоте.

При интерполяции по методу прогноза и коррекции, которые также реализуются с использованием управления на несущей частоте расчеты делятся на 2 этапа: на этапе прогноза производится грубая оценка координат следующей точки, на этапе коррекции эти координаты корректируются с целью повышения точности формирования требуемой траектории. Общую идею этого метода иллюстрирует рисунок 145. На этапе прогноза может быть использован метод цифровых дифференциальных анализаторов, коррекция может осуществляться с использованием метода оценочной функции.

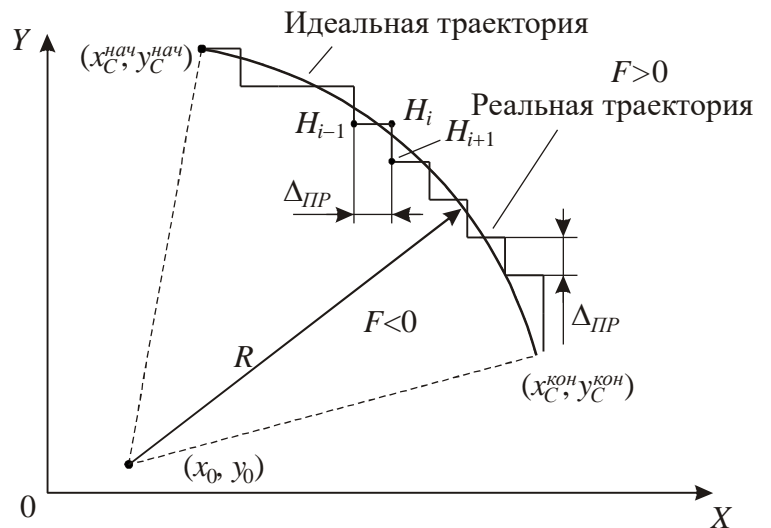


Рисунок 144 – Реализация метода оценочной функции при круговой интерполяции

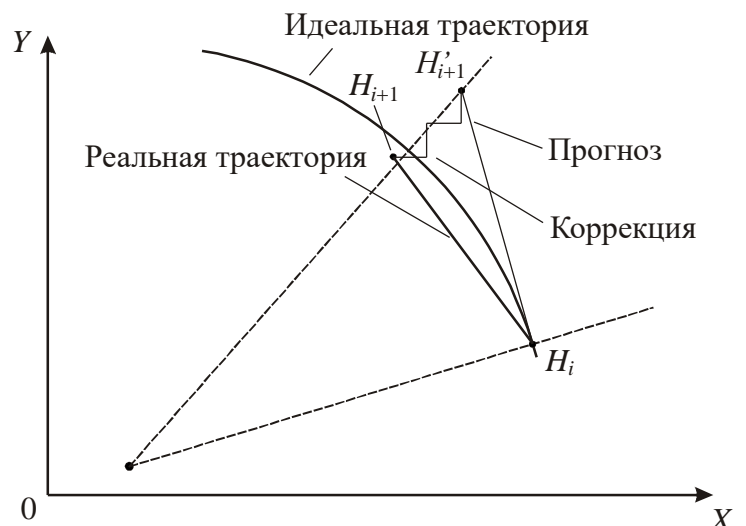


Рисунок 145 – Реализация метода оценочной функции при круговой интерполяции

## **5.2. Многокоординатная интерполяция траекторий в оборудовании с параллельной кинематической структурой**

Решение траекторных задач применительно к оборудованию с параллельной кинематической структурой имеет свои особенности, что связано с необходимостью учета особенностей формирования траекторий рабочего органа в этом оборудовании [94, 272]. В оборудовании, построенном с использованием классических кинематических схем, изменение входных координат по линейным законам приводит к изменению выходных координат так же по линейным законам. В оборудовании с параллельной кинематической структурой при изменении входных координат по линейным законам характер изменения выходных координат будет нелинейным.

Задача интерполяции траектории в оборудовании с параллельной кинематической структурой рассматривается многими авторами [128, 183, 232, 252, 272, 273]. Вопросы формирования элементарных линейного и кругового перемещений рабочего органа применительно к оборудованию с параллельной кинематической структурой детально рассмотрены в работе [249]. В этой работе представлена возможная реализация метода интерполяции на постоянной несущей частоте, которая предполагает:

- формирование промежуточных точек траектории движения инструмента, привязанных к моментам времени, определяемых периодом несущей частоты;
- расчет законов изменения длин штанг для каждого из участков между промежуточными точками;
- аппроксимация законов изменения длин штанг для каждого из участков между промежуточными точками;
- формирование аппроксимированных законов изменения длин штанг.

Так как первые два пункта выполняются с использованием кинематической модели МПКЦ, лежащего в основе оборудования; отличия в реализации метода интерполяции на постоянной несущей частоте проявляются в методике аппроксимации и, самое существенное, в методике формирования аппроксимированных

законов изменения длин штанг. Ниже будет описан подход к реализации метода интерполяции на постоянной несущей частоте, представленный автором в работах [79, 80, 88], а так же метод, аналогичный методу оценочной функции, представленный автором в работах [79, 89]. Исходные данные и результаты моделирования точности отработки линейной траектории, представленные в работе [249], будут использованы при оценке аналогичных параметров для предложенного метода решения задачи интерполяции на постоянной несущей частоте.

### 5.2.1. Метод оценочной функции

Для МПКЦ можно реализовать метод, аналогичный рассмотренному выше методу оценочной функции [79, 89].

Рассмотрим МПКЦ типа «гексапод», имеющий 6 входных координат и, соответственно, 6 управляемых приводов. В качестве характерного элемента примем точку  $C$  его подвижной платформы. Особенностью МПКЦ является нелинейная связь между входными и выходными координатами, вследствие чего изменение любой из входных координат может влиять на несколько выходных. Поэтому для выбора входной координаты, используемой для перемещения из текущей точки, потребуется оценочная функция более сложного вида, чем в рассмотренном выше примере для станка традиционной компоновки.

Пусть требуется переместить характерный элемент МПКЦ из точки  $O_H$  с координатами  $(x_H, y_H, z_H)$  в точку  $O_K$  с координатами  $(x_K, y_K, z_K)$  по прямой линии. Характер изменения координат  $(\psi, \vartheta, \gamma)$ , определяющих пространственный разворот подвижной платформы вокруг точки  $C$ , пока принимать во внимание не будем.

Переход точки  $C$  из состояния  $(x_{C_i}, y_{C_i}, z_{C_i})$  в состояние  $(x_{C_{i+1}}, y_{C_{i+1}}, z_{C_{i+1}})$  назовем тактом движения. Примем, что для перемещения выходного звена механизма в течении такта задействован привод только одной из штанг (изменяется только одна входная координата).

Если точка  $C$  имеет текущие координаты  $(x_{C_i}, y_{C_i}, z_{C_i})$ , то изменение первой входной координаты на величину  $\Delta_{IP}$  приведет к тому, что координаты точки  $C$

изменяться, и станут равны  $(x_{C_{i+1}}^{<1>}, y_{C_{i+1}}^{<1>}, z_{C_{i+1}}^{<1>})$ . При этом изменятся и угловые координаты: из состояния  $(\psi_i, \vartheta_i, \gamma_i)$  в состояние  $(\psi_{i+1}^{<1>}, \vartheta_{i+1}^{<1>}, \gamma_{i+1}^{<1>})$ . Таким образом, изменение первой обобщенной координаты переведет вектор выходных координат  $\mathbf{Y}_{BLY_i}$  в состояние  $\mathbf{Y}_{BLY_{i+1}}^{<1>} = (x_{C_{i+1}}^{<1>}, y_{C_{i+1}}^{<1>}, z_{C_{i+1}}^{<1>}, \psi_{i+1}^{<1>}, \vartheta_{i+1}^{<1>}, \gamma_{i+1}^{<1>})^T$ . Если первая входная координата изменится на величину  $-\Delta_{\Gamma P}$ , то вектор выходных координат перейдет в состояние  $\mathbf{Y}_{BLY_{i+1}}^{<-1>} = (x_{C_{i+1}}^{<-1>}, y_{C_{i+1}}^{<-1>}, z_{C_{i+1}}^{<-1>}, \psi_{i+1}^{<-1>}, \vartheta_{i+1}^{<-1>}, \gamma_{i+1}^{<-1>})^T$ .

Независимое изменение каждой из входных координат на величины  $\Delta_{\Gamma P}$  и  $-\Delta_{\Gamma P}$  позволит сформировать массив возможных значений вектора выходных координат  $\mathbf{Y}_{BLY_{i+1}}^{<j>}$ ,  $j = -6, -5, \dots, -1, 1, 2, \dots, 6$  (рисунок 146), анализ которого позволит выбрать ту обобщенную координату, которая будет использоваться для формирования перемещения из текущей точки  $\mathbf{Y}_{BLY_i}$ .

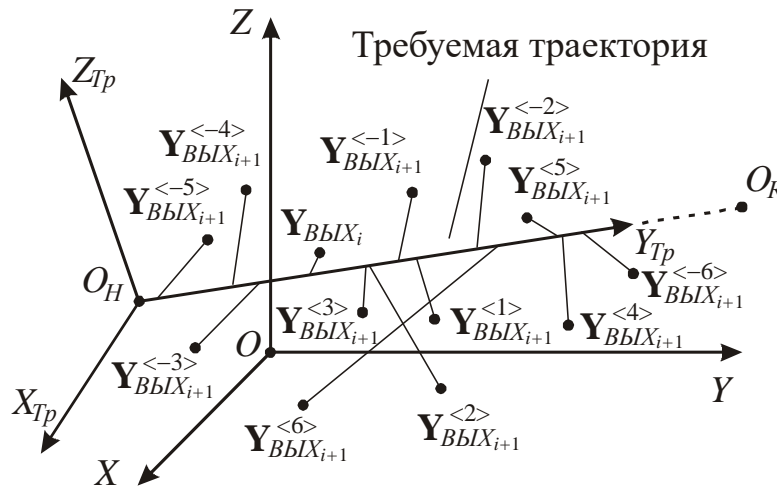
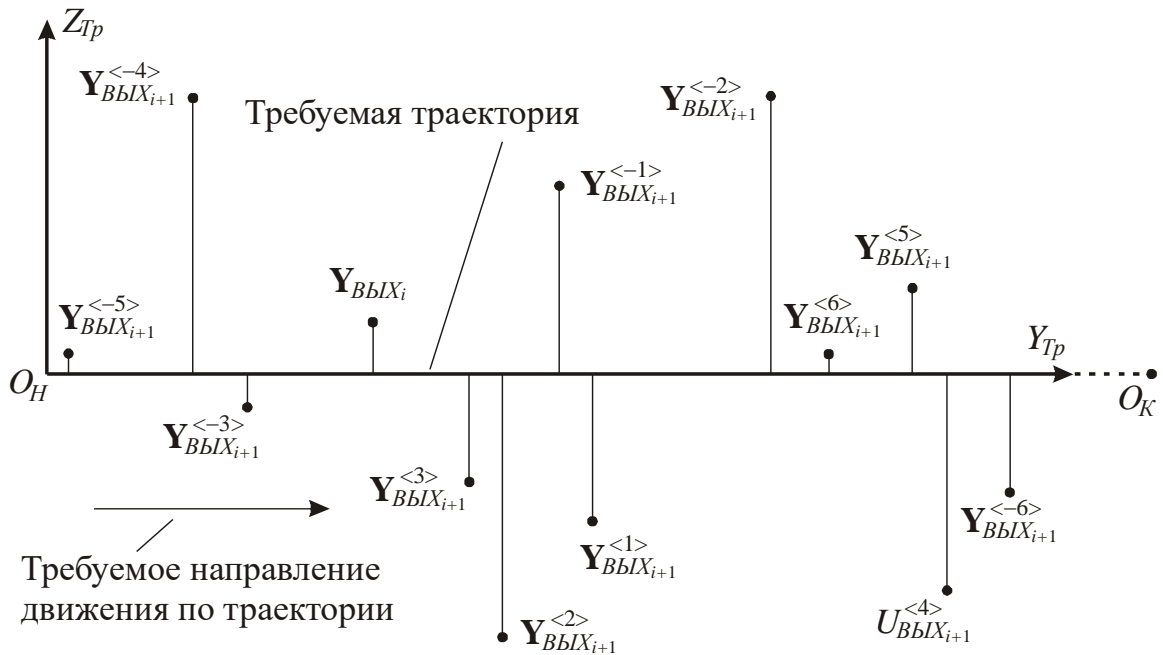


Рисунок 146 – Получение массива возможных значений вектора выходных координат

Свяжем с точкой  $O_H$  прямоугольную систему координат  $O_H X_{Tp} Y_{Tp} Z_{Tp}$ : ось  $O_H Y_{Tp}$  направлена по требуемой траектории движения, ось  $O_H X_{Tp}$  лежит в плоскости, параллельной  $XOY$ , ось  $O_H Z_{Tp}$  дополняет тройку осей до правой. На рисунке 147 показаны проекции точек, образующих массив возможных значений вектора выходных координат  $\mathbf{Y}_{BLY_{i+1}}^{<j>}$  (отражены только три линейные координаты), на плоскость  $Y_{Tp} O_H Z_{Tp}$ .



**Рисунок 147 – Перемещение точек массива возможных значений вектора выходных координат по направлению траектории**

Из рисунка видно, что некоторые точки ( $\mathbf{Y}_{BbIX_{i+1}}^{<-5>}$ ,  $\mathbf{Y}_{BbIX_{i+1}}^{<-4>}$ ,  $\mathbf{Y}_{BbIX_{i+1}}^{<-3>}$ ) расположены ближе к начальной точке траектории, чем текущая точка  $\mathbf{Y}_{BbIX_i}$ . Следовательно, приращения некоторых обобщенных координат заставляют характерный элемент механизма перемещаться в «неправильном» направлении. Очевидно, что такие варианты приращений должны исключаться из рассмотрения.

На рисунке 148 показаны проекции точек, образующих массив возможных значений вектора выходных координат  $\mathbf{Y}_{BbIX_{i+1}}^{<j>}$ , на плоскость  $X_{Tp}O_H Z_{Tp}$ . Данный рисунок позволяет оценить величину отклонения каждой из точек от требуемой траектории. Отклонение  $\delta$  рассчитывается следующим образом:

$$\delta^{<j>} = \sqrt{\frac{\left| \begin{matrix} x_{C_{i+1}}^{<j>} - x_H & y_{C_{i+1}}^{<j>} - y_H \\ x_K - x_H & y_K - y_H \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} y_{C_{i+1}}^{<j>} - y_H & z_{C_{i+1}}^{<j>} - z_H \\ y_K - y_H & z_K - z_H \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} z_{C_{i+1}}^{<j>} - z_H & x_{C_{i+1}}^{<j>} - x_H \\ z_K - z_H & x_K - x_H \end{matrix} \right|^2}{(x_K - x_H)^2 + (y_K - y_H)^2 + (z_K - z_H)^2}}$$

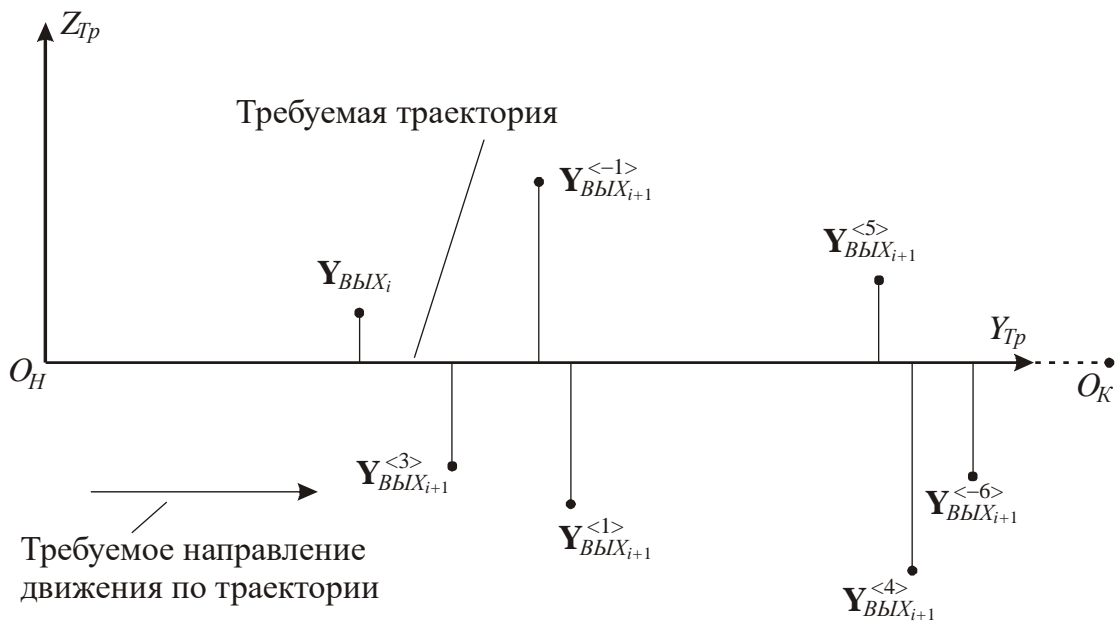
Если задано некоторое допустимое отклонение  $\delta_{don}$ , то можно исключить из рассмотрения точки (следовательно, соответствующие приращения входных координат), для которых  $\delta^{<j>} > \delta_{don}$ . На рисунке 148 это точки  $\mathbf{Y}_{BbIX_{i+1}}^{<-4>}$ ,  $\mathbf{Y}_{BbIX_{i+1}}^{<-2>}$ ,  $\mathbf{Y}_{BbIX_{i+1}}^{<2>}$ ,  $\mathbf{Y}_{BbIX_{i+1}}^{<6>}$ .





**Рисунок 148 – Отклонение точек массива возможных значений вектора выходных координат от траектории**

На рисунке 149 показаны точки, удовлетворяющие рассмотренным выше критериям по направлению перемещения и по отклонению от требуемой траектории. Именно из этих точек необходимо выбрать реализуемую точку, которая определит, для какой обобщенной координаты и с каким знаком будет осуществлено приращение, обеспечивающее перемещение из текущей точки  $Y_{BbLX_i}$  в направлении точки  $O_K$  на рассматриваемом такте.



**Рисунок 149 – Точки массива возможных значений вектора выходных координат, удовлетворяющие критериям по направлению перемещения и отклонению**

Если изменения угловых выходных координат в процессе движения характерного элемента в силу каких-либо причин не рассматриваются, то в качестве реализуемой целесообразно выбрать точку, наиболее близкую к  $O_K$  (точка  $Y_{BbIX_{i+1}}^{<6>}$  на рисунке 149). Это позволит осуществить полный переход по траектории за меньшее количество тактов.

Рассмотренный алгоритм позволяет определить входную переменную, приращение по которой будет сформировано при движении из текущей точки траектории. Алгоритм может быть отнесен к методам оценочной функции, хотя сама функция в явном виде не сформирована.

Если условие минимального изменения угловых координат выходного звена механизма должно учитываться, то критерий выбора реализуемой точки несколько усложняется. Например, в качестве реализуемой может выступать точка, для которой сумма квадратов отклонений угловых координат от требуемых значений минимальна:

$$(\psi^{<j>} - \psi_{mpeб})^2 + (\vartheta^{<j>} - \vartheta_{mpeб})^2 + (\gamma^{<j>} - \gamma_{mpeб})^2 \rightarrow \min . \quad (143)$$

Необходимость учета изменения угловых координат при движении характерного элемента по заданной траектории может потребоваться, например, при реализации оптимальных управлений, рассмотренных в главе 3.

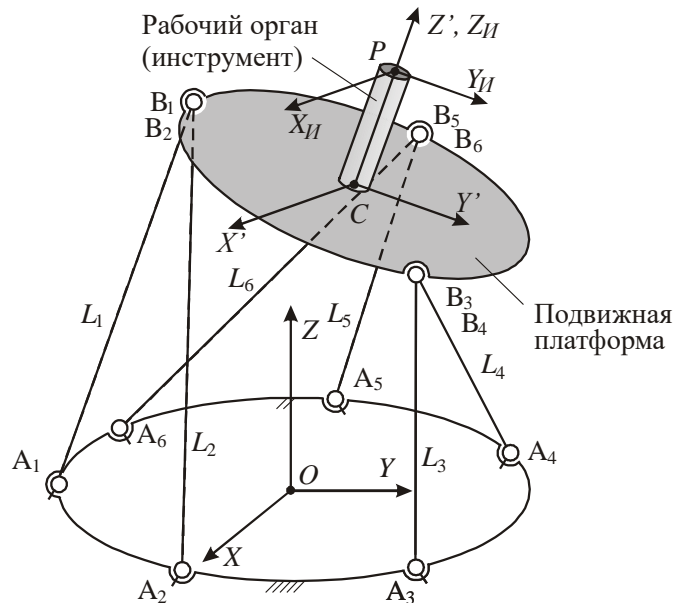
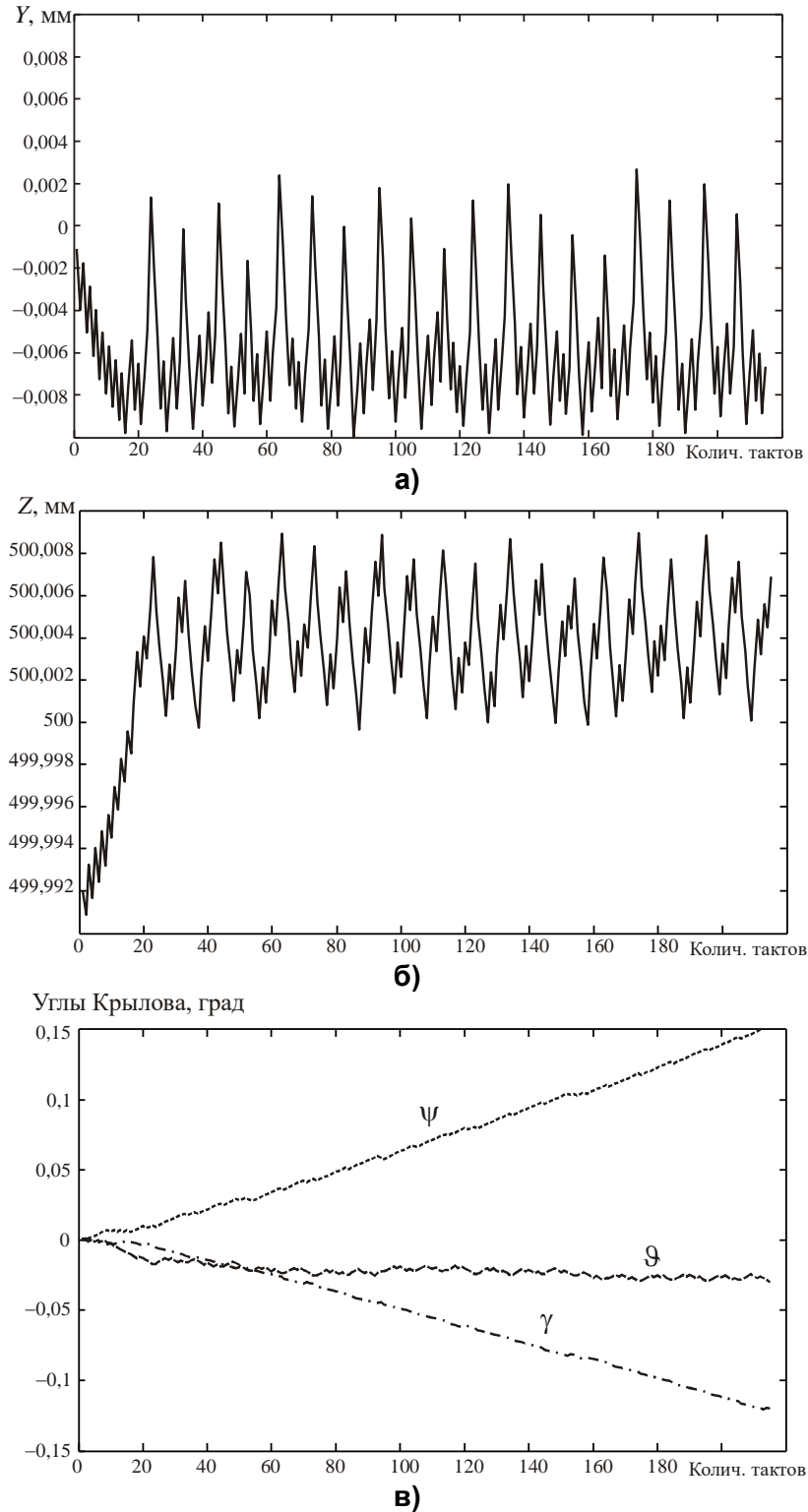


Рисунок 150 – МПКЦ, для которого выполнено моделирование с использованием метода оценочной функции

На рисунке 151 показаны результаты моделирования движения по прямой характерного элемента для МПКЦ, показанного на рисунке 150, имеющего следующие размеры: радиус расположения нижних шарниров 400 мм, радиус расположения верхних шарниров 200 мм, шарниры платформы попарно сведены.



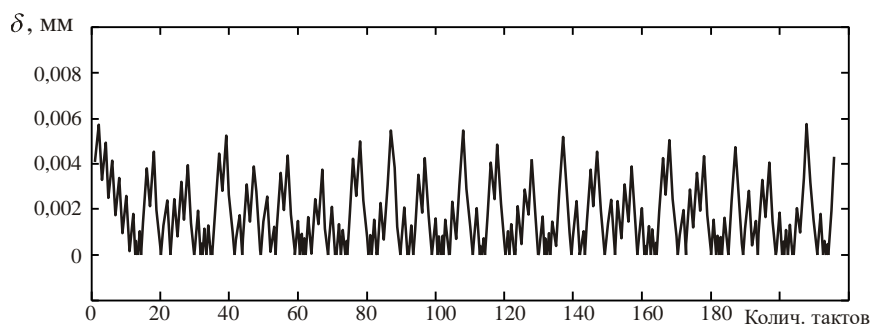
**Рисунок 151 – Результаты моделирования перемещения рабочего органа при реализации метода оценочной функции**

В качестве характерного элемента выступает инструмент, точка  $P$  которого отстоит от подвижной платформы (плоскости расположения шарниров  $B_i$  на величину 150 мм. В качестве выходных координат выступают координаты этой точки, а также углы Крылова, описывающие разворот связанной с инструментом системы координат  $PX_{II}Y_{II}Z_{II}$  относительно глобальной системы координат  $OXYZ$ .

Принято, что начальной точки траектории соответствуют выходные координаты  $(-50, 0, 700, 0, 0, 0)$ , конечной –  $(50, 0, 700, 0, 0, 0)$ ; дискретность приводов  $\Delta_{\text{ПР}} = 0,01$  мм, отклонение от заданной траектории не должно превышать величины  $\delta_{\text{дон}} = 0,01$  мм.

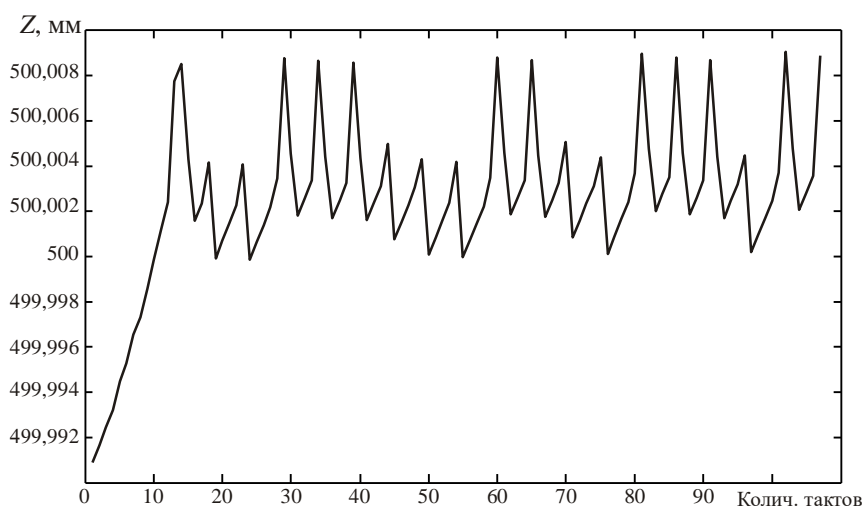
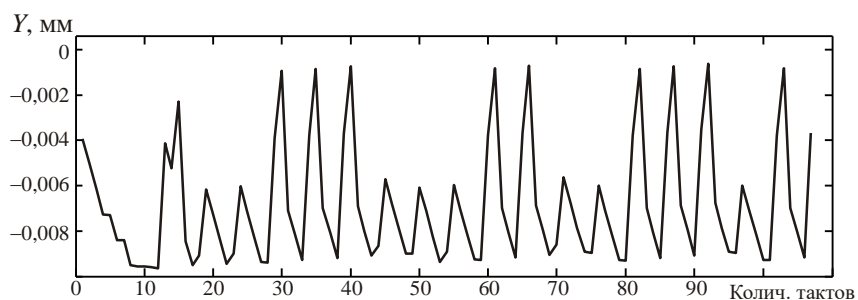
Рисунки 151, а, б отражают соответственно изменения выходных координат  $u_P$  и  $z_P$  при смещении характерного элемента на 1 мм по заданной траектории. Данное смещение реализовано за 215 тактов. На каждом такте осуществлялось изменение длины только одной штанги, что соответствует рассмотренному выше методу управления оборудованием традиционных компоновочных схем (см. рисунок 143). Характер изменения выходных угловых координат имеет вид, показанный на рисунке 151, в; изменение угловых координат при формировании траектории не учитывалось.

Моделирование управления МПКЦ, при котором в каждом такте меняется длина только одной штанги показывает, что возможно обеспечение отклонения точки  $P$  от требуемой траектории, не превышающее дискретности привода  $\Delta_{\text{ПР}}$ . Важной особенностью МПКЦ можно считать возможность обеспечения отклонения точки  $P$  от требуемой траектории, меньшего, чем  $\Delta_{\text{ПР}}$ . Это иллюстрируют рисунок 152, отражающий результаты моделирования для случая  $\delta_{\text{ТР}} = 0,06$  мм и  $\Delta_{\text{ПР}} = 0,01$  мм без учета характера изменения выходных угловых координат. Данная особенность объясняется нелинейностью связей между входными и выходными координатами.



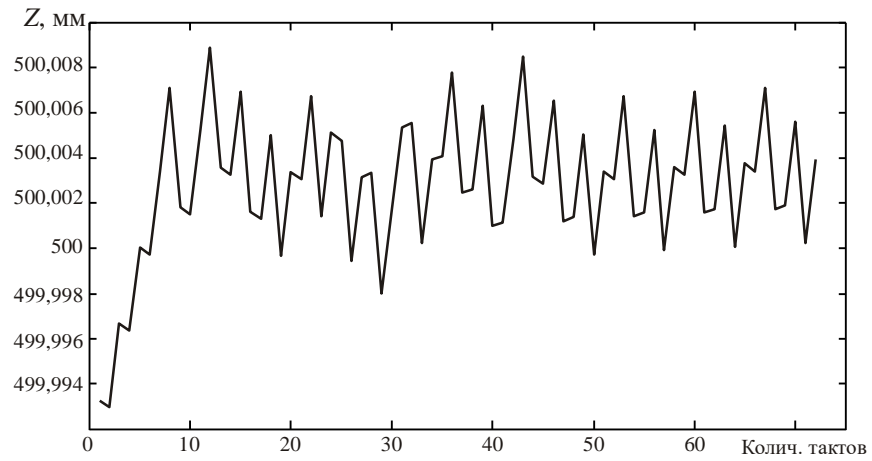
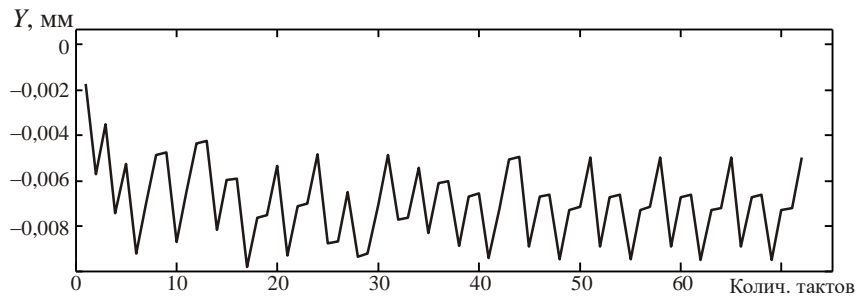
**Рисунок 152 – Обеспечение отклонения по линейным выходным координатам, меньшего дискретности приводов**

Как развитие метода оценочной функции возможно управление, при котором реализуется одновременное изменение нескольких входных координат. Применительно к МПКЦ это соответствует случаю, когда на каждом такте изменяется длина более чем одной штанги. На рисунке 153 показаны результаты моделирования для следующих вариантов: а – изменение в такте длин двух штанг; б – трех штанг; в – четырех штанг; г – пяти штанг; д – длин шести штанг.

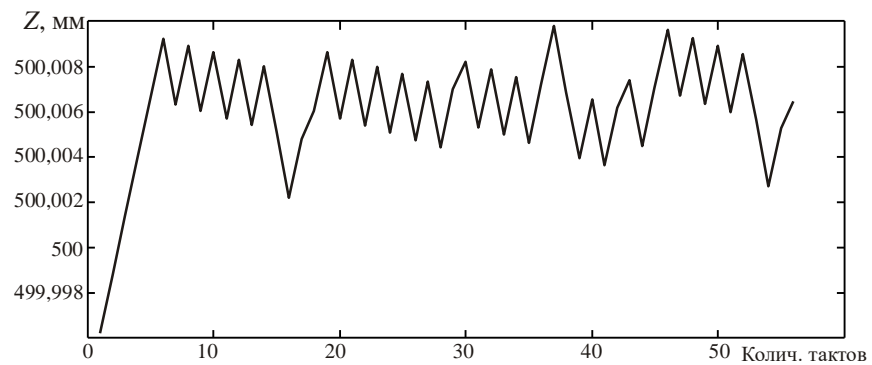
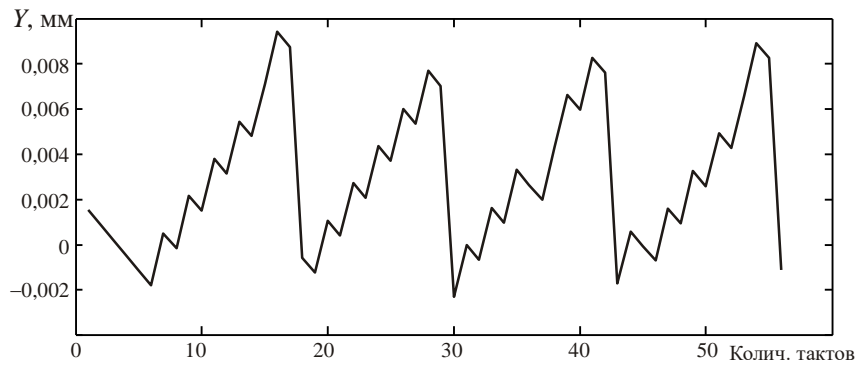


а)

**Рисунок 153 – Изменение выходных линейных координат при задействовании в каждом такте нескольких штанг: а) – изменение в такте длин двух штанг; б) – трех штанг; в) – четырех штанг; г) – пяти штанг; д) – шести штанг**

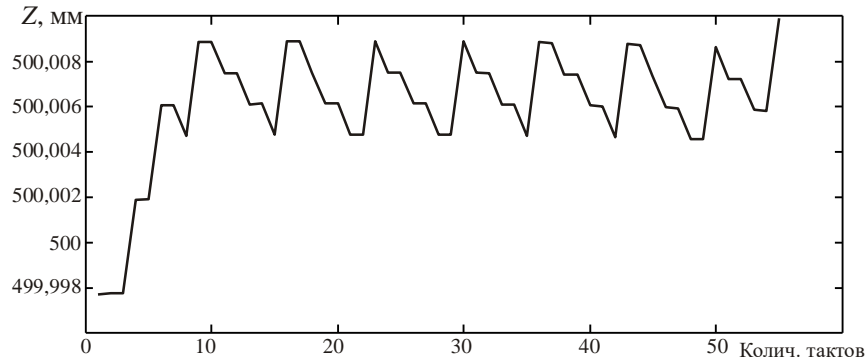
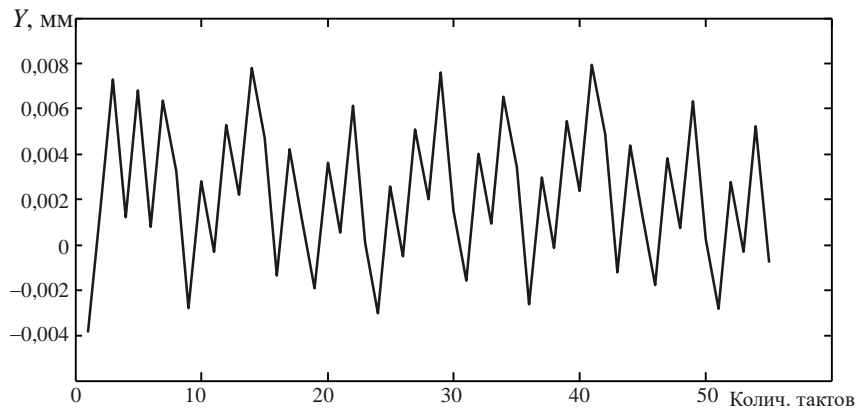


б)

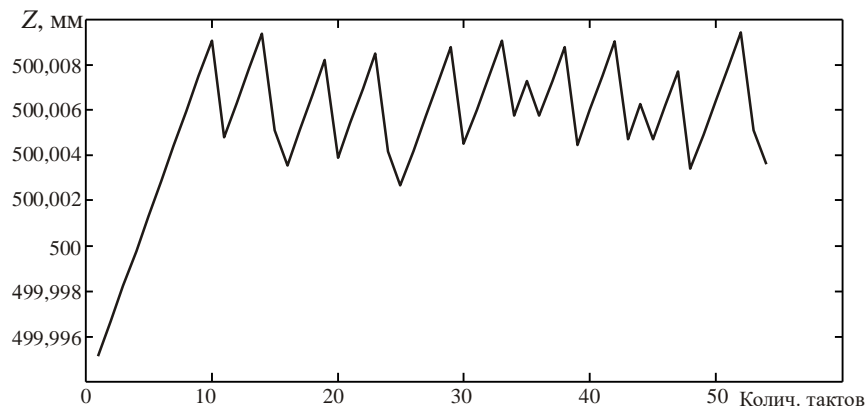
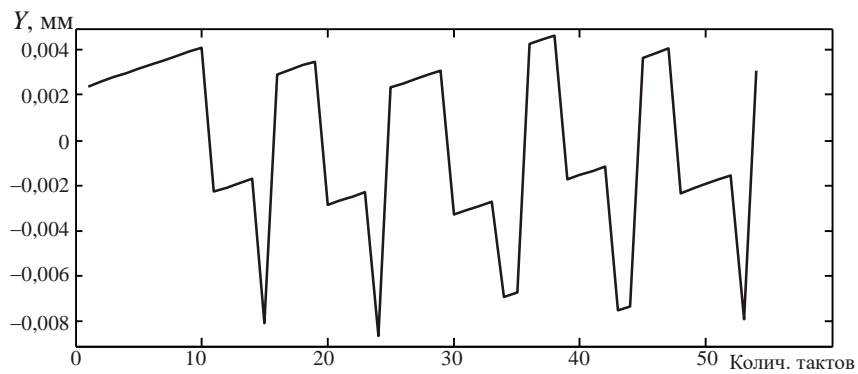


в)

Продолжение рисунка 153



г)



д)

Окончание рисунка 153

Таблица 5 показывает, за сколько тактов произведено перемещение рабочего органа на 1 мм по вдоль требуемой траектории, а также общее количество воз-

можных положений точки  $P$  при построении траектории. Последний параметр косвенно характеризует время, затраченное на расчет траектории.

Таблица 5

**Количество тактов для перемещения рабочего органа на 1 мм**

№	Количество штанг, длина которых изменяется в такте	Количество тактов	Количество возможных положений точки $P$	
			на такт	всего
1	1	215	12	2592
2	2	107	60	6420
3	3	72	160	11520
4	4	56	240	13440
5	5	55	192	10560
6	6	54	64	3456
7	от 1 до 6	54	728	39312

Анализ данных рисунка 153 и таблицы 5 показывает, что увеличение количества штанг, длина которых изменяется в каждом такте, ведет к уменьшению количества тактов, требующихся для отработки траектории. Изменение в каждом такте длины всех шести штанг обеспечивает минимальное количество тактов при относительно малом объеме вычислений.

Очевидно, что изменение в такте длин у определенного количества штанг не позволяет рассмотреть все возможные положения точки  $P$  в конце такта. Однако рассмотрение всех положений не имеет смысла, так как в этом случае (строка 7 в таблице 5) требуется существенный объем вычислений, не ведущий к уменьшению количества тактов, требуемых для отработки траектории.

В таблице 6 приведены данные о количестве штанг, длины которых изменялись на различных тактах формирования траектории при условии анализа всех возможных положений точки  $P$ <sup>1</sup>: в процессе отработки траектории изменялись длины либо 5-ти, либо 6-ти штанг. Однако анализ возможности изменения длин у 5-ти штанг более чем в три раза увеличивает время расчетов (см. таблицу 5), не внося существенного уменьшения количества тактов и не увеличивая точность отработки траектории. Поэтому при практической реализации целесообразно ограничиться анализом изменения в каждом такте длин всех 6-ти штанг.

<sup>1</sup>: В таблице принято: «-1» – смещение на  $-\Delta_{ПП}$ ; «0» – штанга не задействована; «1» – смещение на  $\Delta_{ПП}$



## Характер изменения длин штанг

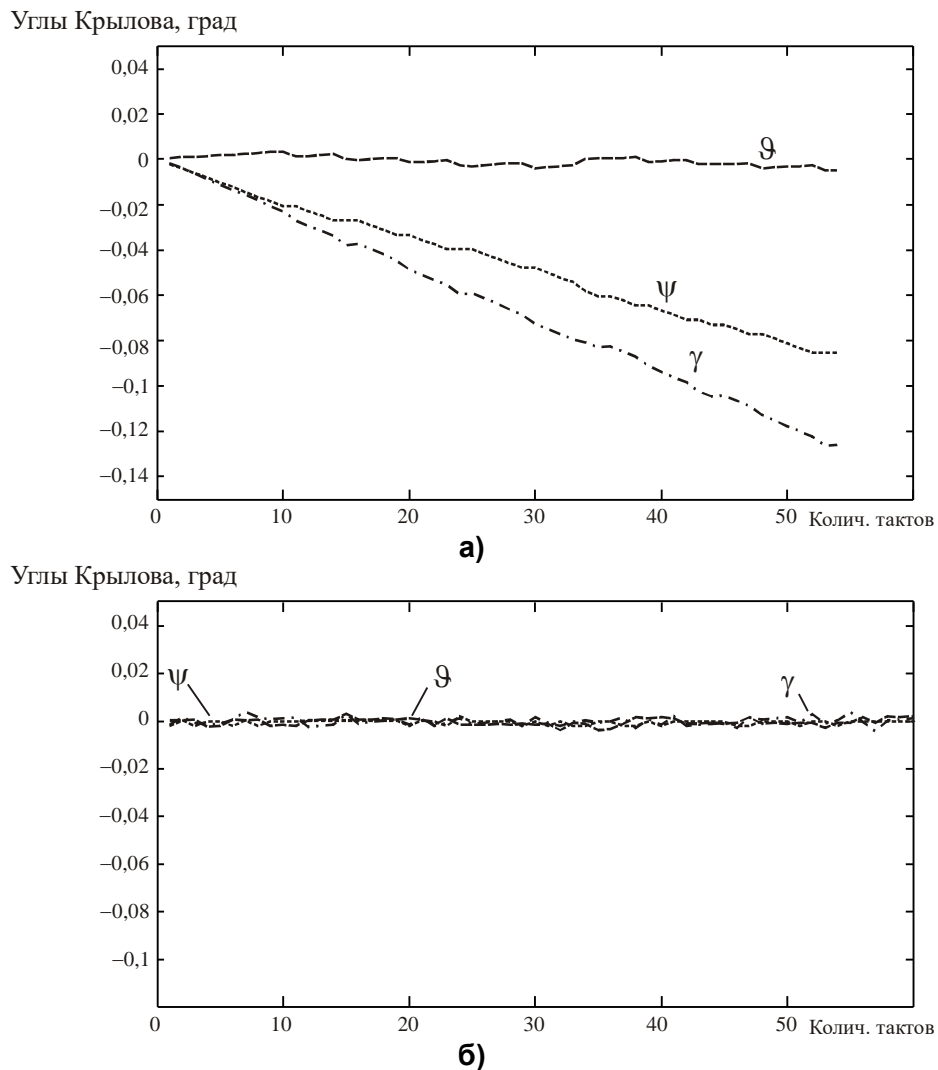
№ такта	Изменение длины штанги					
	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$L_6$
1	-1	-1	1	1	1	-1
2	-1	-1	1	1	1	-1
3	-1	-1	1	1	1	-1
4	-1	-1	1	1	1	-1
5	-1	-1	1	1	1	-1
6	-1	-1	1	1	1	-1
7	-1	-1	1	1	1	-1
8	-1	-1	1	1	1	-1
9	-1	-1	1	1	1	-1
10	-1	-1	1	1	1	-1
11	-1	-1	1	1	0	-1
12	-1	-1	1	1	1	-1
13	-1	-1	1	1	0	-1
14	-1	-1	1	1	1	-1
15	-1	-1	1	1	0	-1
16	-1	-1	0	1	1	-1
17	-1	-1	1	1	1	-1
18	-1	-1	1	1	0	-1
19	-1	-1	1	1	1	-1
20	-1	-1	1	1	0	-1
21	-1	-1	0	1	1	-1
22	-1	-1	1	1	1	-1
23	-1	-1	1	1	0	-1
24	-1	-1	0	1	1	-1
25	-1	-1	1	1	0	-1
26	-1	-1	1	1	1	-1
27	-1	-1	1	1	0	-1
28	-1	-1	1	1	1	-1
29	-1	-1	0	1	1	-1
30	-1	-1	1	1	0	-1
31	-1	-1	1	1	1	-1
32	-1	-1	1	1	0	-1
33	-1	-1	1	1	1	-1
34	-1	-1	0	1	1	-1
35	-1	-1	1	1	0	-1
36	-1	-1	1	1	1	-1
37	-1	-1	1	1	0	-1
38	-1	-1	1	1	1	-1
39	-1	-1	0	1	1	-1
40	-1	-1	1	1	0	-1
41	-1	-1	1	1	1	-1
42	-1	-1	1	1	0	-1
43	-1	-1	0	1	1	-1
44	-1	-1	1	1	1	-1
45	-1	-1	1	1	0	-1
46	-1	-1	1	1	1	-1
47	-1	-1	1	1	0	-1
48	-1	-1	0	1	1	-1
49	-1	-1	1	1	1	-1
50	-1	-1	1	1	0	-1
51	-1	-1	1	1	1	-1
52	-1	-1	1	1	0	-1
53	-1	-1	0	1	1	-1
54	-1	-1	1	1	0	-1

Следует отметить еще одну особенность МПКЦ, также определяемую нелинейными связями между входными и выходными координатами, которая появляется при одновременном задействовании в работе приводов нескольких штанг. Результаты, приведенные в таблице 5, получены для отработки участка линейной траектории длиной  $L_{\text{уч}} = 1$  мм при дискретности изменения входных координат  $\Delta_{\text{ПР}} = 0,01$  мм. В случае реализации такой траектории на станке с традиционной кинематической схемой, с учетом того, что требовалось изменение одной выходной координаты, привод должен будет отработать  $\frac{L_{\text{уч}}}{\Delta_{\text{ПР}}} = 100$  тактов. Для рассматриваемого МПКЦ штанг количество тактов, необходимое для отработки этого участка траектории меньше этой величины (см. строки 3–7 в таблице 5). Следовательно, перемещение по траектории за такт может превышать величину  $\Delta_{\text{ПР}}$ .

Если определить минимально допустимое перемещение (по направлению требуемой траектории) за такт на уровне  $\Delta_{\text{ПР}}$ , то среди точек, для которых перемещение за такт не меньше  $\Delta_{\text{ПР}}$  можно найти такую, которая обеспечит выполнение дополнительных оценочных условий. В качестве такого условия может выступать, например, минимизация отклонения угловых выходных координат в процессе отработки такта от требуемых значений.

На рисунке 154 показаны изменения угловых выходных координат для случая изменения на каждом такте длин всех шести штанг: на рисунке 154, а – без дополнительного условия минимизации отклонения угловых выходных координат от заданных нулевых значений; на рисунке 154, б – с этим условием.

Как видно из сравнения графиков, отработка условия минимизации отклонения угловых выходных координат не привела к существенному увеличению количества тактов, необходимых для отработки траектории.

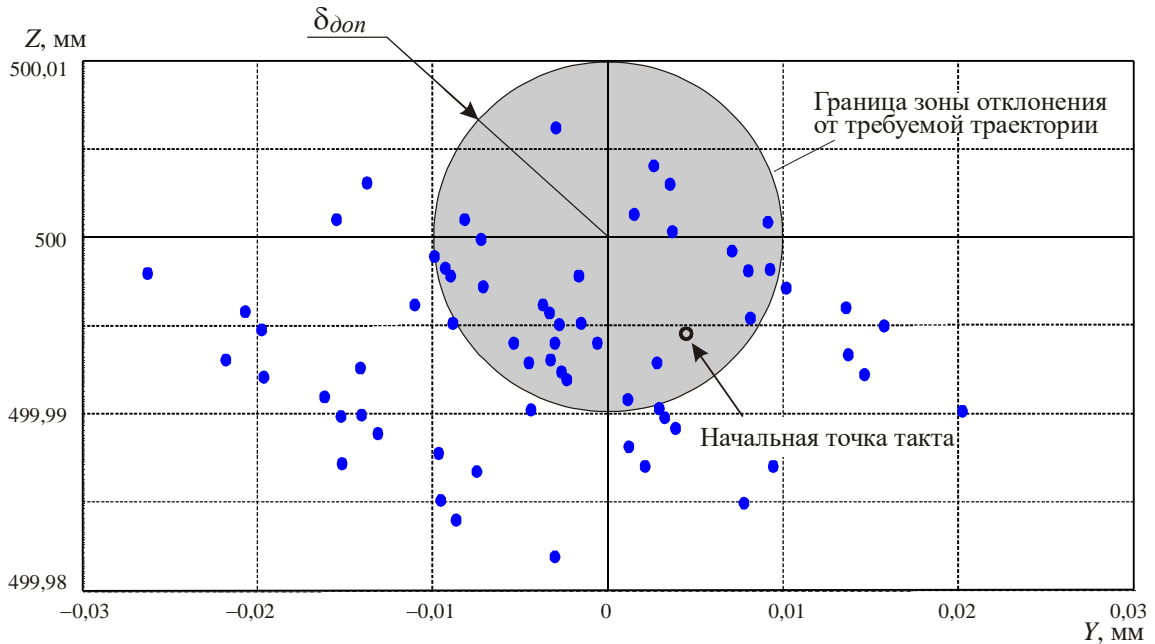


**Рисунок 154 – Характер изменения выходных угловых координат при отработке участка линейной траектории: а) – без использования условия минимизации отклонений выходных угловых координат, б) – с учетом этого условия**

Предлагаемая методика (алгоритм) применения метода оценочной функции применительно к МПКЦ выглядит следующим образом.

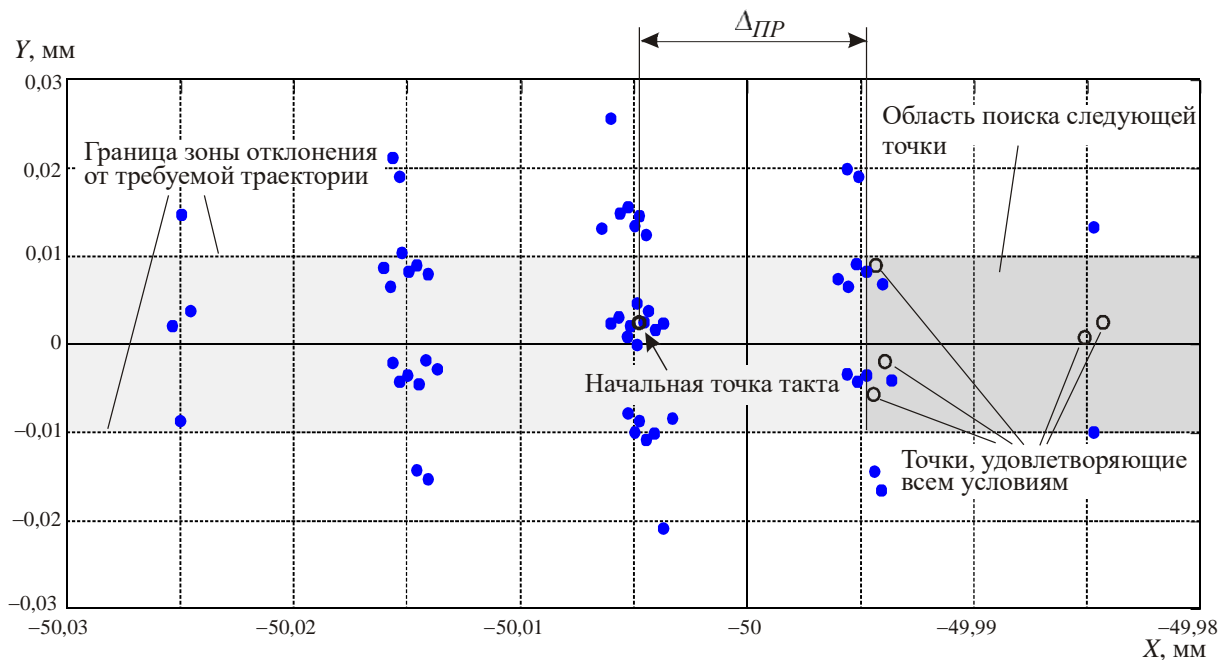
1. Для текущей точки реальной траектории необходимо сформировать массив возможных следующих положений. При формировании массива предполагается изменение длин всех шести штанг на величину дискретности привода  $\Delta_{ДР}$  как в сторону увеличения соответствующих входных координат, так и в сторону уменьшения. Общее количество точек в массиве возможных положений – 64, по числу комбинаций изменений длин штанг. Для нахождения каждой точки массива требуется решить прямую задачу кинематики для рассматриваемого МПКЦ.

2. В полученном массиве отбрасываются точки, удаленные от требуемой траектории на величину, большую заданной. На рисунке 155 это точки, не попадающие в круг радиусом  $\delta_{don}$ .



**Рисунок 155 – Реализация условия по отклонению: нахождение точек, отстоящих от требуемой траектории на допустимую величину**

3. Среди оставшихся точек выбираются те, которые обеспечивают смещение по направлению требуемой траектории на величину, не меньшую дискретности привода  $\Delta_{ПР}$  (рисунок 156).



**Рисунок 156 – Реализация условия по перемещению: нахождение точек, отстоящих от начальной на допустимое расстояние в нужном направлении**

4. Если дополнительных условий не задано, то среди полученных точек выбирается та, которая обеспечивает максимальное смещение по направлению требуемой траектории. Этим обеспечивается минимизация количества тактов, требующихся для отработки траектории.

5. Если заданы дополнительные оценочные условия, то среди полученных точек находят ту, которая обеспечит наилучшее выполнение этих условий. В качестве дополнительного условия может выступать требование минимизации изменения угловых выходных координат при отработке такта.

Найденная точка будет являться (после отработки текущего такта) начальной точкой следующего такта.

Аналогичным образом может строиться управление, обеспечивающее перемещение рабочего органа (его характерной точки) по произвольной пространственной траектории.

Рассмотренная реализация метода оценочной функции применительно к ОПКС показала, что

1. В данном оборудовании возможно формирование линейных траекторий движения характерной точки рабочего органа.

2. При формировании траектории целесообразно изменение всех входных координат (изменение длин всех штанг) в каждом такте.

3. Точность формирования линейной траектории может превышать величину дискретности изменения входных координат (дискретности приводов).

4. Изменение выходных линейных координат в такте может превышать величину дискретности изменения входных координат.

5. При необходимости может быть обеспечена минимизация изменения угловых выходных координат в процессе формирования линейной траектории движения характерной точки рабочего органа.

6. На каждом такте требуется анализировать 64 возможных положения характерной точки рабочего органа. Так как в ходе анализа требуется решать прямую задачу кинематики, то это потребует достаточно больших вычислительных мощностей.

В силу большого объема вычислений на каждом такте рассмотренный метод не может быть рекомендован к использованию в реальном времени, так как его использование может являться фактором, снижающим быстродействие оборудования. Если время анализа для одной точки из массива возможных положений составляет величину  $t_T$ , то общее время анализа на каждом такте составит  $64t_T$ . При условии, что среднее перемещение по траектории составляет  $1,5\Delta_{\text{ПР}}$  мм/такт, контурная скорость может быть определена как  $V_K = \frac{1,5\Delta_{\text{ПР}}}{64t_T}$ .

Если  $t_T = 0,001$  с и  $\Delta_{\text{ПР}} = 0,01$  мм, то контурная скорость не превысит величину  $V_K = \frac{1,5 \cdot 0,01}{64 \cdot 0,001} \approx 0,23$  мм/с = 13,8 мм/мин. При увеличении времени анализа контурная скорость соответствующим образом снизится.

Для увеличения возможной контурной скорости при управлении в реальном времени необходимо увеличивать интервалы между вычислительными процедурами. Алгоритмы, реализующие такие подходы к управлению МПКЦ, описаны в [76, 96]. Развитием этих алгоритмов является описанное ниже управление на постоянной несущей частоте [80, 88].

### 5.2.2. Метод интерполяции на постоянной несущей частоте

Как было показано в главе 2, длины штанг МПКЦ при формировании как линейных, так и нелинейных законов движения выходного звена изменяются по нелинейным законам. В связи с этим, задачу управления на постоянной несущей частоте для ОПКС будем решать применительно к произвольному характеру траектории движения рабочего органа.

Задача управления состоит в обеспечении такого изменения входных координат (длин штанг), при котором выходные координаты изменяются во времени по заданному закону  $\mathbf{Y}_{\text{ВЫХ}} = \mathbf{Y}_{\text{ВЫХ}}(t)$ . Пусть из решения обратной задачи кинематики получены законы изменения длин штанг  $L_j = L_j(t)$ , обеспечивающие изменение выходных координат по требуемому закону  $\mathbf{Y}_{\text{ВЫХ}} = \mathbf{Y}_{\text{ВЫХ}}(t)$ . Управление на постоянной несущей частоте предполагает для интервалов времени, равных пери-

оду  $h$  несущей, неизменность скоростей изменения длин штанг. При этом осуществляется замена нелинейных функций, описывающих законы изменения длин штанг МПКЦ, кусочно-линейными функциями (рисунок 157) с неизбежными отклонениями  $\Delta L_j$ .

Из решения прямой задачи кинематики может быть получена функция  $x_C = x_C(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6)$ , а также аналогичные для остальных выходных координат. Используя разложение этой функции в ряд Тейлора и ограничиваясь членами при первых производных, запишем следующее выражение:

$$\Delta x_C = \sum_j \frac{\partial x_C(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6)}{\partial L_j} \Delta L_j,$$

связывающее погрешность в формировании выходной координаты  $x_C$  с отклонениями  $\Delta L_j$ . Максимальная погрешность будет возникать в случае, когда все слагаемые будут иметь одинаковые знаки, поэтому для оценки величины максимальной погрешности можно записать

$$\Delta x_C = \sum_j \left| \frac{\partial x_C(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6)}{\partial L_j} \Delta L_j \right|. \quad (144)$$

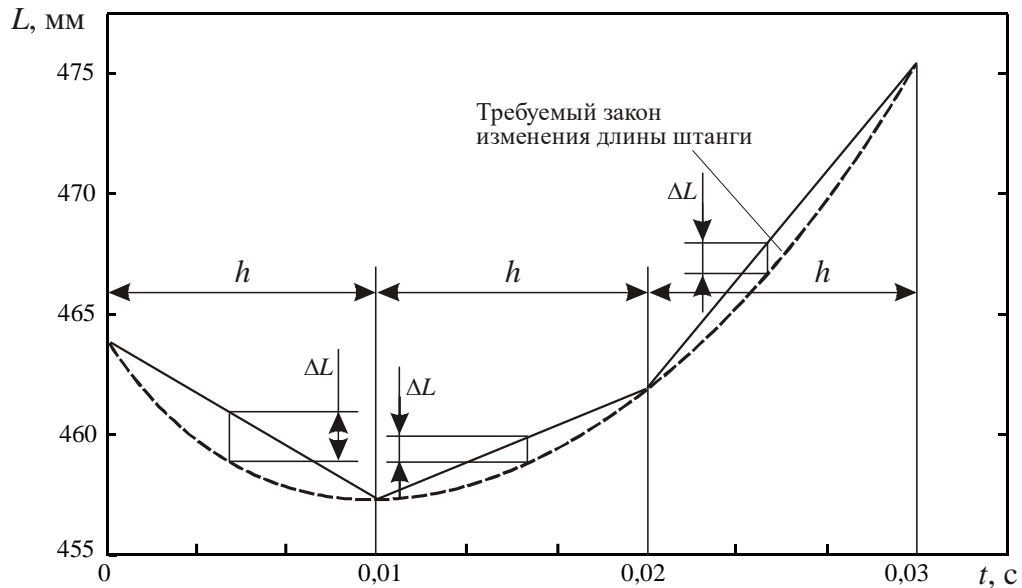
Примем, что погрешность в формировании точки траектории (по линейным координатам) определяется величиной  $\rho$ :

$$\rho^2 = \Delta x_C^2 + \Delta y_C^2 + \Delta z_C^2 \quad (145)$$

и она не должна превышать некоторого значения  $\rho_{\text{МАХ}}$ .

Очевидно, что частные производные, входящие в (144), будут определяться конструктивными параметрами (геометрическими размерами) конкретного МПКЦ, аналитическое их получение весьма затруднительно. На рисунке 158 показаны поля значений частных производных  $\frac{\partial x_C}{\partial L_j}$  для МПКЦ, конструктивные параметры которого приведены ранее. Принято, что угловые выходные координаты в процессе анализа постоянны и равны нулю; третья линейная выходная координата  $z_C = 500$  мм. На график для  $\frac{\partial x_C}{\partial L_1}$  наложена проекция кинематической схемы

на плоскость  $XOY$ . На график для  $\frac{\partial x_C}{\partial L_1}$  наложена проекция кинематической схемы на плоскость  $XOY$ .



**Рисунок 157 Кусочно-линейная аппроксимация требуемого закона изменения длины штанги при управлении на постоянной несущей частоте**

Из рисунка 158 видно, что для каждой частной производной ее зависимость от выходных координат носит нелинейный характер и меняется в достаточно широких пределах. Значения  $\frac{\partial x_C}{\partial L_j} < 1$ , присутствующие на графиках, подтверждают сделанный в предыдущем разделе вывод о возможности обеспечения дискретности изменения выходных координат МПКЦ, меньшей дискретности изменения входных координат.

Для дальнейшего анализа примем, что все отклонения  $\Delta L_j$  в (144) равны между собой. Тогда

$$\Delta x_C = \Delta L \sum_j \left| \frac{\partial x_C(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6)}{\partial L_j} \right|,$$

поле распределения суммы модулей частных производных  $\frac{\partial x_C}{\partial L_j}$  показано на рисунке 159.



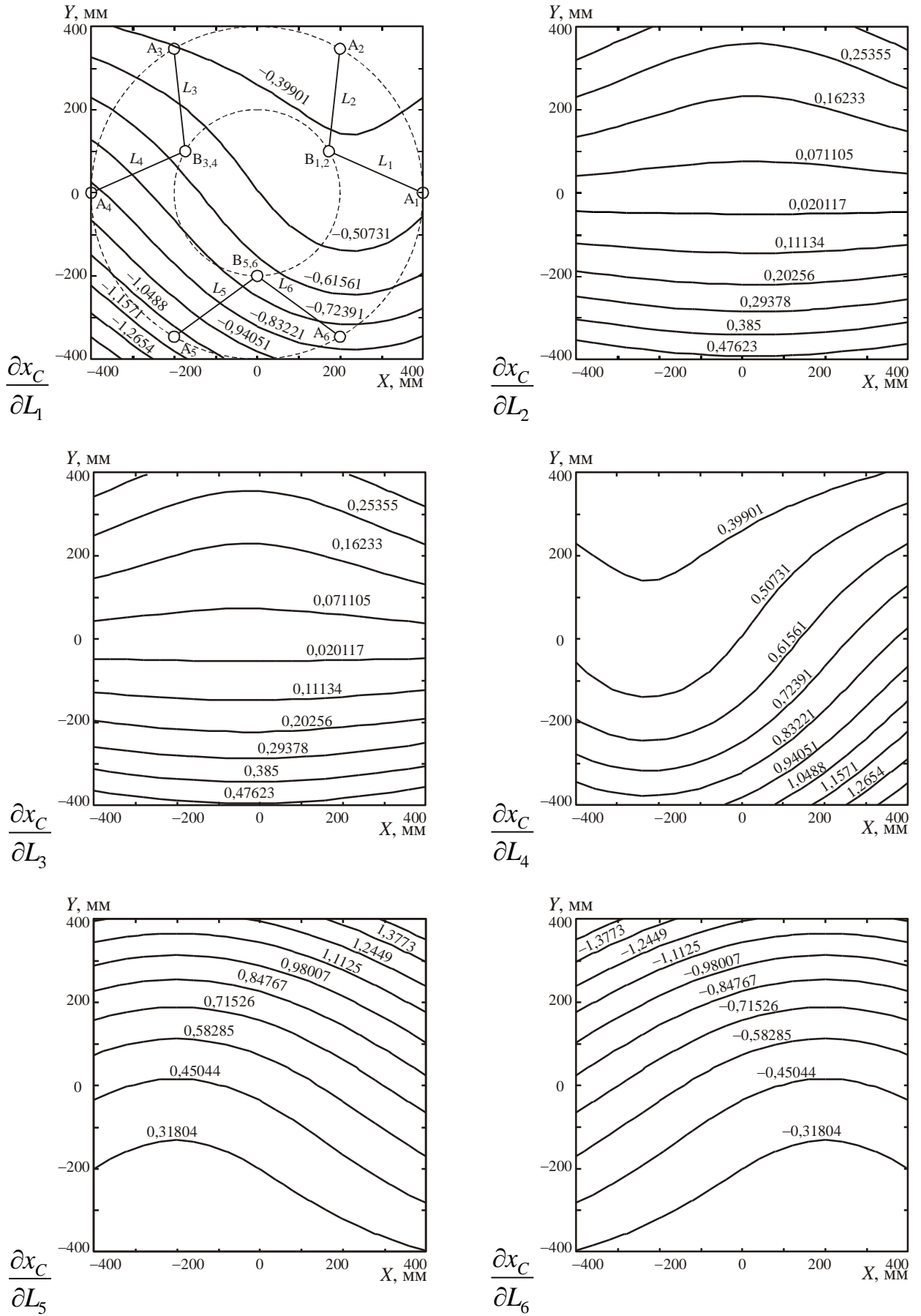
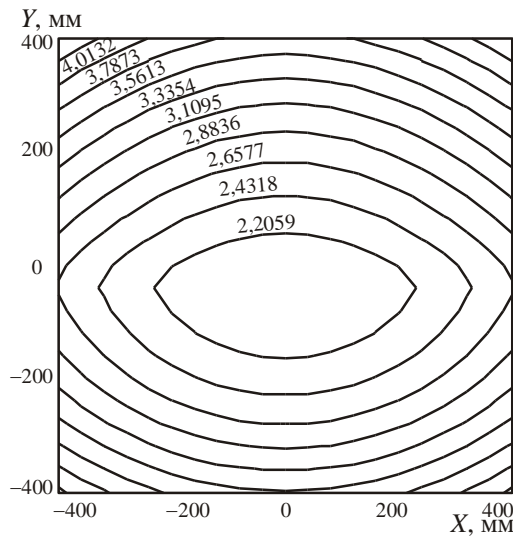


Рисунок 158 – Поля распределения частных производных

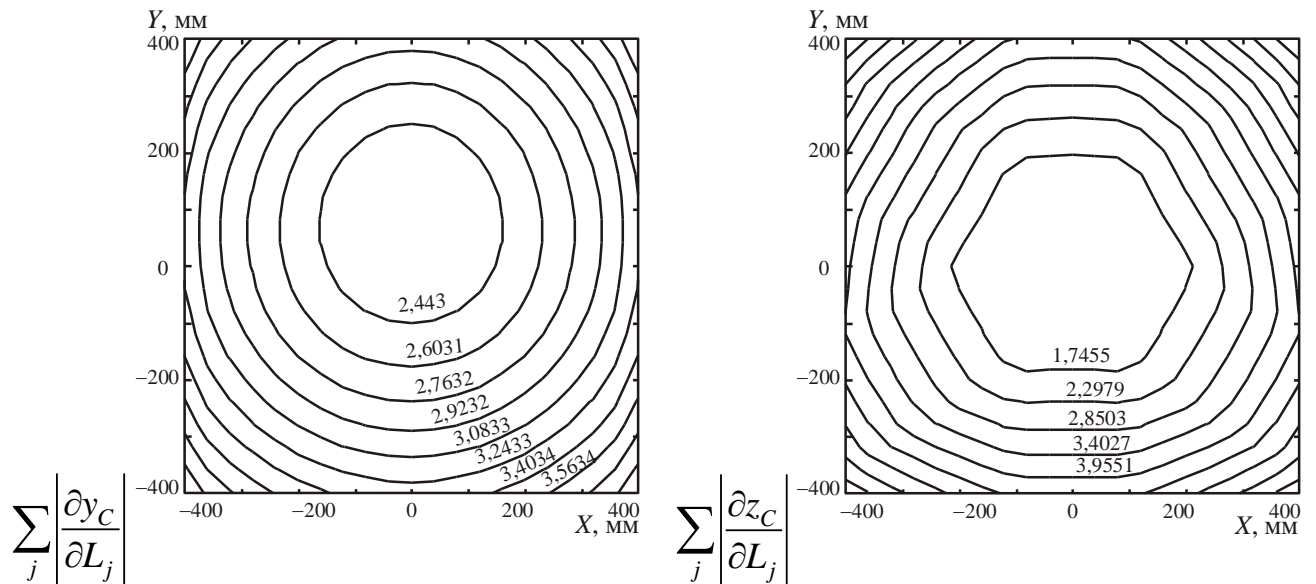


**Рисунок 159 – Поле распределения суммы модулей частных производных координаты  $x_c$**

Аналогичные графики можно получить для  $\sum_j \left| \frac{\partial y_c(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6)}{\partial L_j} \right|$  и

$\sum_j \left| \frac{\partial z_c(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6)}{\partial L_j} \right|$  (рисунок 160), что позволит построить показанное на

рисунке 161 поле относительной погрешности  $\delta\rho = \frac{\rho}{\Delta L}$ .



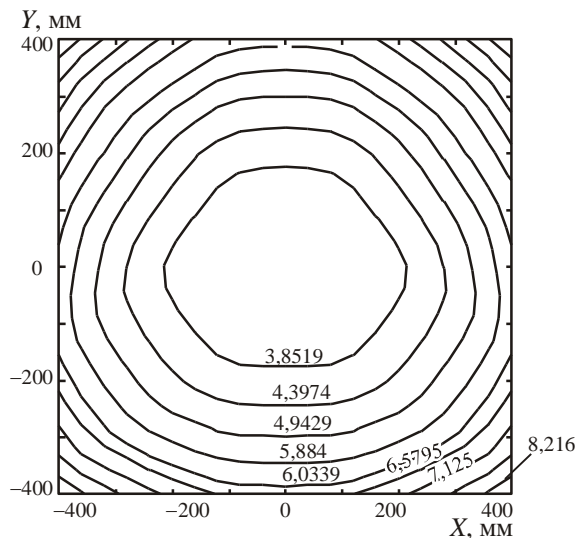
**Рисунок 160 – Поля распределения сумм модулей частных производных координат  $y_c$  и  $z_c$**

Относительная погрешность  $\delta\rho$  связывает погрешности  $\Delta L_j$  в формировании требуемых законов изменения длин штанг с погрешностью  $\rho$  формирования тра-

ектории движения рабочего органа. Погрешность формирования траектории гарантированно не будет превышать заданного значения  $\rho_{\text{MAX}}$ , если погрешности  $\Delta L_j$  не превышают величину  $\frac{\rho_{\text{MAX}}}{\delta\rho}$ .

Для гарантированного выполнения требований по точности формирования траектории величина  $\delta\rho$  может приниматься максимальной для некоторой пространственной области, называемой рабочим пространством, следовательно, должно выполняться неравенство

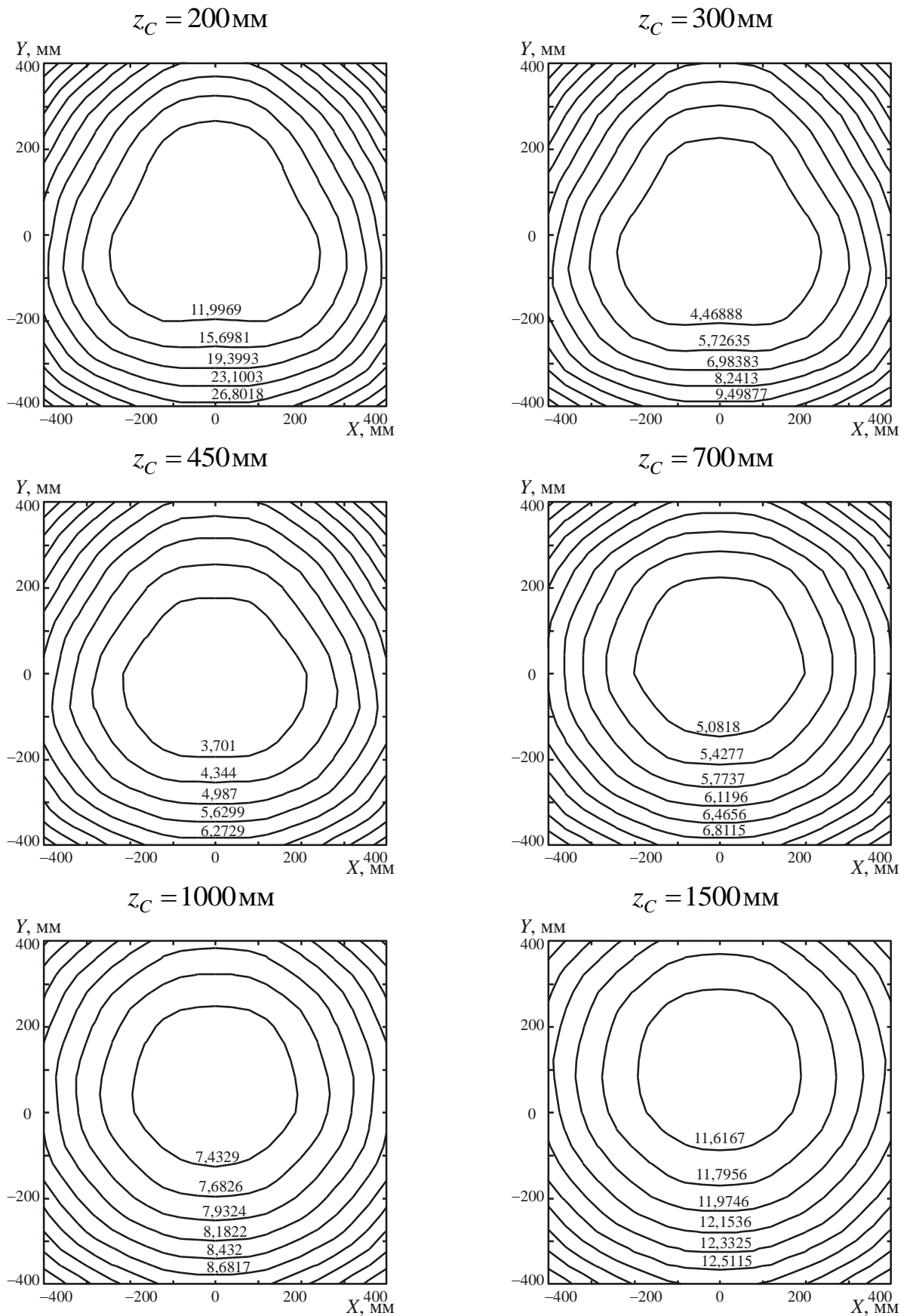
$$\Delta L_j \leq \frac{\rho_{\text{MAX}}}{\delta\rho_{\text{MAX}}}. \quad (146)$$



**Рисунок 161 – Поле распределения относительной погрешности  $\delta\rho$  при  $z_c = 500$  мм**

На рисунке 162 показаны поля распределения значений  $\delta\rho$  по сечениям некоторого рабочего пространства, задаваемых выходной координатой  $z_c$ . Форма рабочего пространства, обычно определяемая из ограничений на длины штанг и углы поворота в шарнирах [100], в данном случае не учитывается. Как и в рассмотренном ранее случае, все угловые выходные координаты равны нулю.

Анализ графиков на рисунке 162 показывает, что в достаточно большой пространственной области  $\delta\rho < 10$ . Поэтому для МПКЦ, имеющего приведенные выше геометрические размеры, можно принять  $\delta\rho_{\text{MAX}} = 10$ . Для МКПЦ с иными геометрическими размерами величина  $\delta\rho_{\text{MAX}}$  может иметь иное значение.



**Рисунок 162 – Поля распределения относительной погрешности  $\delta_r$  по сечениям рабочего пространства МПКЦ**

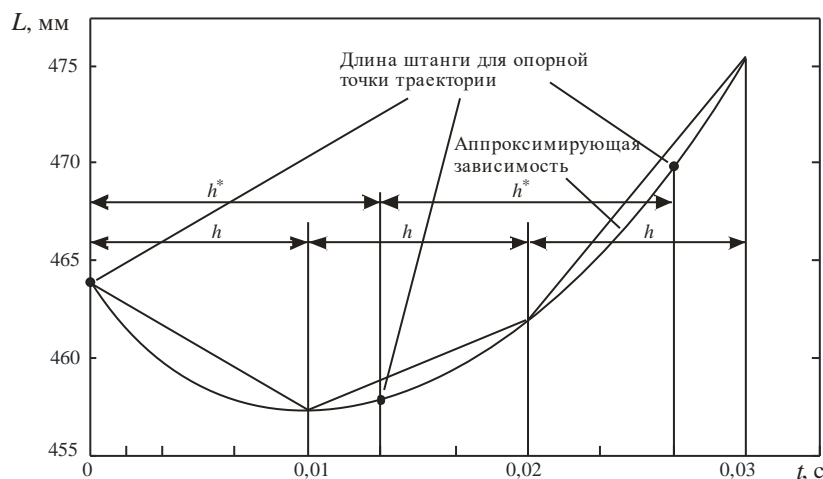
Относительное отклонение  $\delta\rho$  может использоваться для комплексной оценки оптимальности МПКЦ при его проектировании.

Для дальнейшего анализа примем  $\rho_{\text{MAX}} = 0,001\text{мм}$  и  $\delta\rho_{\text{MAX}} = 10$ . В соответствии с (146) отклонения в формировании закона изменения длин каждой из штанг должны удовлетворять следующему неравенству:

$$\Delta L_j \leq \frac{0,001}{10}\text{мм}, \text{ или } \Delta L_j \leq 0,1\text{мкм}.$$

Исходя из требуемого характера движения рабочего органа ОПКС, могут быть получены законы изменения длин штанг  $L_j = L_j(t)$ , обеспечивающие формирование требуемой траектории. Так как при расчетах траектория задается как набор опорных точек, представляющих собой значения шести переменных (трех координат характерной точки инструмента и трех углов, определяющих его пространственную ориентацию), то данный закон применительно к каждой штанге задается в виде решетчатой функции вида  $L_{jk} = L_j(t_k)$  с шагом  $h^* = t_{k+1} - t_k$ . Моменты времени  $t_k$  соответствуют опорным точкам траектории движения рабочего органа.

В общем случае шаг  $h^*$  может превышать период  $h$  несущей частоты (рисунок 163), следовательно значения длин штанг в моменты времени, пропорциональные  $h$ , должны определяться дополнительно. Для упрощения этой процедуры целесообразно получить аналитическое описание законов изменения длин штанг. Выше было показано, что данные законы могут быть аппроксимированы степенной функцией. Полученные оценки для  $\delta\rho_{\text{MAX}}$  и  $\Delta L_j$  позволяют определить требуемую степень аппроксимирующей функции. Примем, что погрешность аппроксимации не должна превышать 10% от требуемой величины  $\Delta L_j$ , т. е., для принятых значениях  $\delta\rho_{\text{MAX}}$  и  $\Delta L_j$ , должна быть менее 0,01 мкм.



**Рисунок 163 – Соотнесение шага  $h^*$  решетчатой функции, определяющей траекторию, и периода  $h$  несущей частоты**

При аппроксимации законов изменения длин штанг следует учесть следующее. Связь между выходными координатами МПКЦ типа «гексапод» и длинами его штанг устанавливаются выражениями (21). Анализ этих выражений показывает, что в случае, когда выходные координаты  $x_C$ ,  $y_C$ ,  $z_C$  изменяются во времени по линейным законам (характерная точка рабочего органа ОПКС движется по прямой) вида

$$x_C(t) = x_{C1}t + x_{C0}, \quad y_C(t) = y_{C1}t + y_{C0}, \quad z_C(t) = z_{C1}t + z_{C0},$$

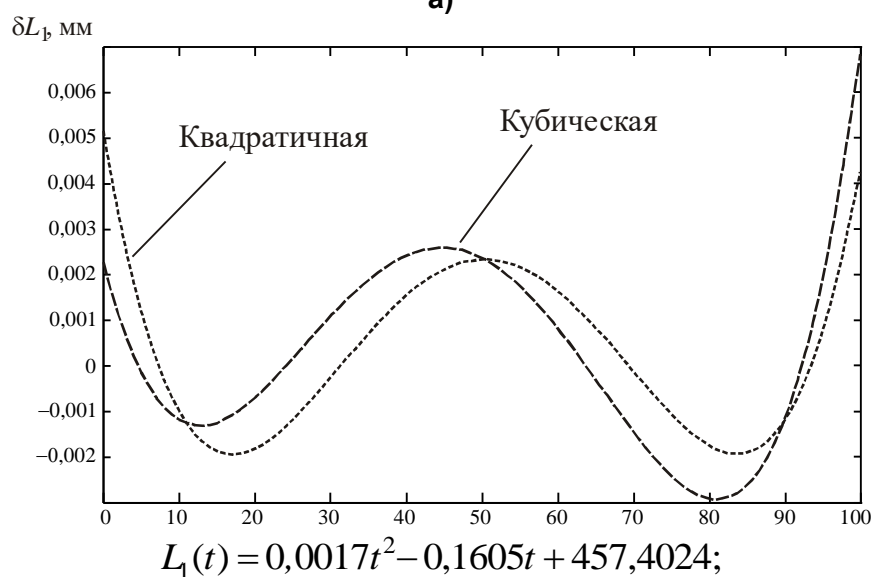
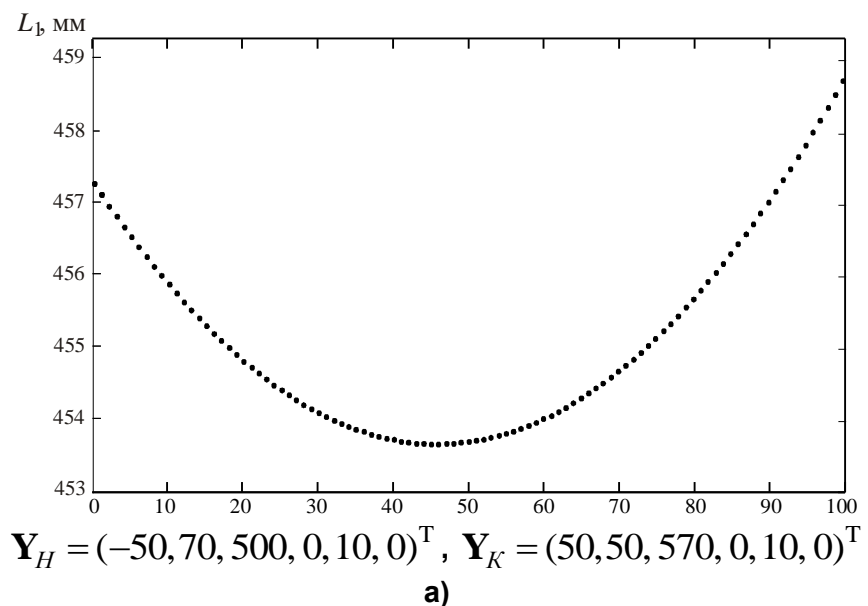
где коэффициенты  $x_{C1}$ ,  $y_{C1}$ ,  $z_{C1}$  имеют размерность скорости, коэффициенты  $x_{C0}$ ,  $y_{C0}$ ,  $z_{C0}$  имеют размерность перемещения, а угловые выходные координаты при этом не меняются, зависимость длины штанги от времени имеет вид

$$L(t) = \sqrt{T_2 t^2 + T_1 t + T_0},$$

где  $T_2 = x_{C1}^2 + y_{C1}^2 + z_{C1}^2$ ;  $T_1 = 2x_{C1}x_{C0} + 2y_{C1}y_{C0} + 2z_{C1}z_{C0} + 2(l_1x'_B + l_2y'_B + l_3z'_B)x_{C1} + 2(m_1x'_B + m_2y'_B + m_3z'_B)y_{C1} + 2(n_1x'_B + n_2y'_B + n_3z'_B)z_{C1}$ ;  $T_0 = x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 + x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 + (x_{C0}^2 + y_{C0}^2 + z_{C0}^2) + 2(l_1x'_B + l_2y'_B + l_3z'_B)(x_{C0} - x_A) + 2(m_1x'_B + m_2y'_B + m_3z'_B) \times (y_{C0} - y_A) + 2(n_1x'_B + n_2y'_B + n_3z'_B)(z_{C0} - z_A)$ .

Несмотря на то, что время  $t$  в последней зависимости присутствует во 2-й степени, использование аппроксимации квадратичной функцией может привести к существенным погрешностям. Это иллюстрирует рисунок 164. На рисунке 164, а показана решетчатая функция, задающая закон изменения длины 1-й

штанги МПКЦ типа «гексапод», геометрические размеры которого описаны ранее, при линейном изменении выходных координат из состояния  $\mathbf{Y}_H$  в состояние  $\mathbf{Y}_K$ . По оси абсцисс отложены условны единицы – номера характерных точек траектории. Им могут соответствовать заданные значения  $t_k$ .



**б)**

**Рисунок 164 – Решетчатая функция (а), задающая закон изменения длины штанги МПКЦ, и погрешность (б) ее аппроксимации степенными функциями**

На рисунке 164, б приведены погрешности в аппроксимации квадратичной и кубической функциями. Как видно, погрешность остается значительной и при использовании в качестве аппроксимирующей кубической степенной функции.

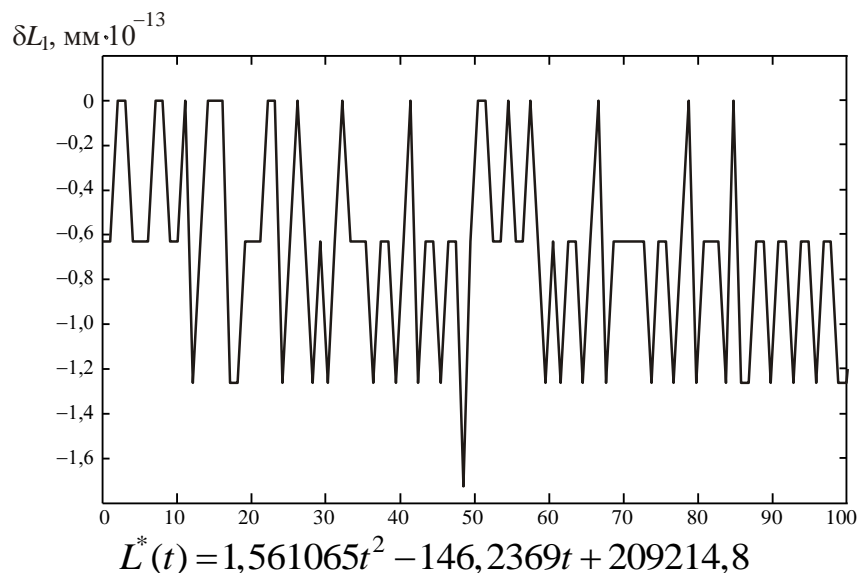
Если в качестве модели для аппроксимации использовать выражение

$$L^*(t) = L(t)^2 = T_2 t^2 + T_1 t + T_0,$$

непосредственно следующее из (21), то можно ожидать существенное снижение погрешности аппроксимации при использовании квадратичной функции. Рисунок 165 показывает погрешность аппроксимации, определенную следующим образом:

$$\delta L = \sqrt{L^*(t_k) - L(t_k)}, \quad (147)$$

где функция  $L^*(t)$  получена при аппроксимации с использованием квадратичной функции. Полученная погрешность имеет значения, сопоставимые с вычислительной точностью многих современных устройств.



**Рисунок 165 – Погрешность аппроксимации функции  $L(t)^2$**

Таким образом, при формировании линейной траектории движения характерной точки рабочего органа ОПКС с неменяющимися угловыми выходными координатами для аппроксимации законов изменения длин штанг может использоваться квадратичная функция.

Если характер движения характерной точки рабочего органа ОПКС отличен от прямолинейного или не выполняется условие неизменности выходных угловых координат, то для аппроксимации законов изменения длин штанг с необходимой точностью потребуется степенная функция более высокого порядка, или другая функции.



Пусть две из трех линейных выходных координат, например,  $x_C$  и  $y_C$  изменяются по гармоническим законам вида  $x_C = x_{C0} + R \cos \omega t$  и  $y_C = y_{C0} + R \sin \omega t$  соответственно, т. е. рассматривается движение характерной точки рабочего органа по дуге окружности радиусом  $R$ , лежащей в плоскости, параллельной  $XOY$ . Если выходные угловые координаты в процессе движения рабочего органа по траектории не меняются, то в выражениях (21) будут присутствовать члены, пропорциональные  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ . Следовательно, квадрат длины штанги может быть представлен как

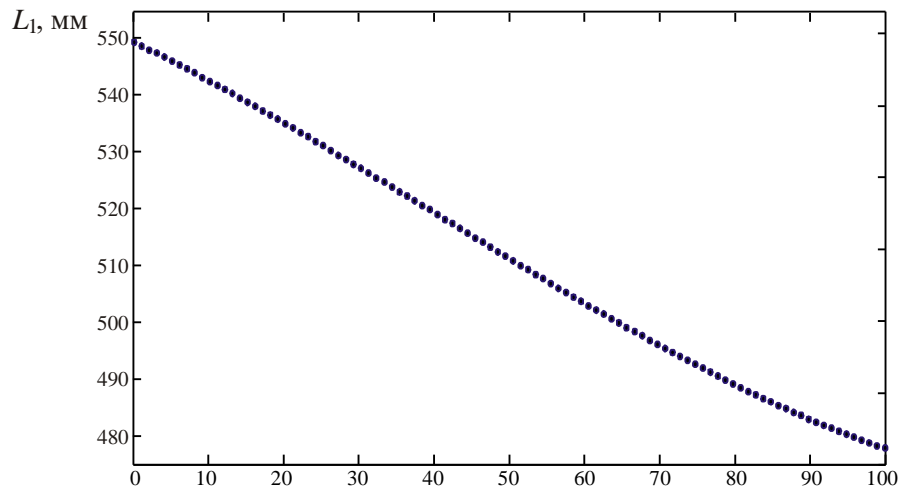
$$L^*(t) = L(t)^2 = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, \quad (148)$$

и в рассматриваемом случае целесообразно использовать аппроксимацию, основанную на применении ряда Фурье. Рисунок 166 иллюстрирует данный подход.

На рисунке 166, а показана решетчатая функция, задающая требуемый закон изменения длины 1-й штанги МПКЦ типа «гексапод» для случая движения характерной точки рабочего органа по дуге, представляющей собой четверть окружности радиусом  $R = 70$  мм. Данная функция имеет перегиб, поэтому квадратичную функцию для ее аппроксимации использовать нецелесообразно. На рисунке 166, б показаны погрешности аппроксимации данной решетчатой функции с использованием степенных функций 3-го и 4-го порядков.

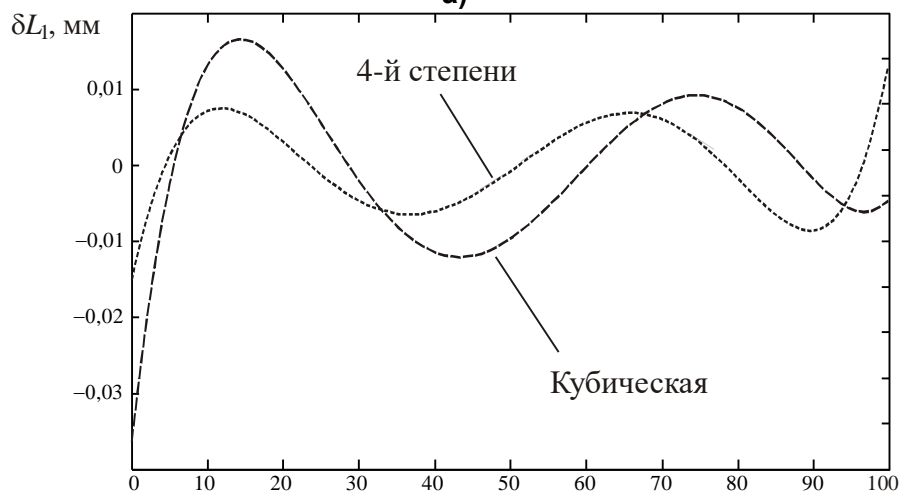
На рис 166, в показана погрешность (147) аппроксимации закона изменения длины 1-й штанги, при которой используется функция  $L^*(t)$  в представлении (148). Как видно, погрешность аппроксимации в данном пример находится на уровне  $10^{-12}$  мм.

Таким образом, при формировании движения характерной точки рабочего органа ОПКС по дуге окружности с неменяющимися одной линейной и всеми угловыми выходными координатами для аппроксимации законов изменения длин штанг могут использоваться тригонометрические функции.



$$\mathbf{Y}_H = (-100, 100, 500, 0, 10, 0)^T$$

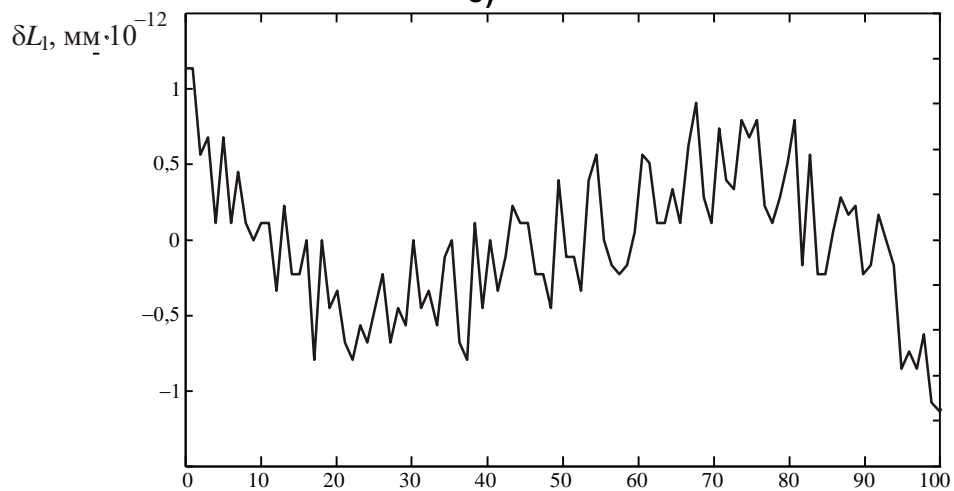
а)



$$L_1(t) = 3,4110 \cdot 10^{-5} t^4 - 0,0042 t^2 - 0,6428 t + 550,331,$$

$$L_1(t) = 1,5945 \cdot 10^{-8} t^4 + 3,0857 \cdot 10^{-5} t^3 - 0,0040 t^2 - 0,6477 t + 550,359;$$

б)



в)

$$a_0 = 2,742 \cdot 10^5; a_1 = 2,872 \cdot 10^4; b_1 = -4,530 \cdot 10^4; \omega = 0,01587;$$

**Рисунок 166 – Имеющая перегиб решетчатая функция (а), задающая закон изменения длины штанги МПКЦ, погрешность ее аппроксимации степенными функциями (б) и погрешность аппроксимации функции  $L(t)^2$  при использовании начальных членов ряда Фурье**

Определим величину угла  $\phi = \omega t$ , при которой зависимость (148) может быть заменена квадратичной с заданной точностью. Разложение зависимости (148) в степенной ряд производится следующим образом [12]:

$$L^*(\phi) = a_0 + a_1 \cos \phi + b_1 \sin \phi = a_0 + a_1 \left( 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots \right) + b_1 \left( \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \dots \right).$$

Разложение может быть сведено к квадратичной функции, если  $\phi \gg \frac{\phi^3}{3!} - \frac{\phi^5}{5!} + \dots$  и  $1 - \frac{\phi^2}{2!} \gg \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots$ . Требование  $|\phi| > 100|\phi^3|$  удовлетворяет данным условиям, следовательно, можно принять, что при  $|\phi| < 0,1$  рад. аппроксимация тригонометрическими функциями (148) может быть заменена аппроксимацией, использующей квадратичную функцию.

При формировании более сложных траектории движения рабочего органа, при которых изменяются, например, все три линейные выходные координаты, из анализа выражений (21) затруднительно выявить вид аппроксимирующей законы изменения длин штанг МПКЦ функции. Численное моделирование применительно к рассматриваемому МПКЦ типа «гексапод» показало, что погрешность аппроксимации менее  $10^{-5}$  мм достигается при использовании степенной функции 6-го порядка.

Пусть задана требуемая траектория движения рабочего органа ОПКС; задание осуществлено через решетчатую функцию, имеющую шаг  $h_{\text{НОМ}}$ . Примем, что количество значений решетчатой функции  $N$  является величиной заданной, тогда

$$h_{\text{НОМ}} = \frac{t_{\text{Тр}}}{N},$$

где  $t_{\text{Тр}}$  – требуемое время отработки траектории. В случае изменения в процессе отработки траектории линейных выходных координат требуемое время может быть рассчитано как

$$t_{\text{Тр}} = \frac{s_{\text{Тр}}}{V_{\text{К}}},$$

где  $s_{\text{Тр}}$  – путь, проходимый характерной точкой рабочего органа;  $V_{\text{К}}$  – заданная контурная скорость.

Если предполагается изменение только угловых выходных координат, то требуемое время отработки траектории должно задаваться непосредственно.

Из решения обратной задачи кинематики могут быть найдены решетчатые функции  $L_j = L_j(t_k)$ , где  $t_k = t_0 + kh_{\text{НОМ}}$ . Каждая из этих функций может быть с требуемой точностью аппроксимирована некоторой аналитической зависимостью  $L_j^A = L_j^A(t)$  (рисунок 167, численные значения показаны условно). Вид зависимости определяется решаемой траекторной задачей:

– при формировании линейной траектории движения характерной точки рабочего органа ОПКС с неменяющимися угловыми выходными координатами используется квадратичная функция:

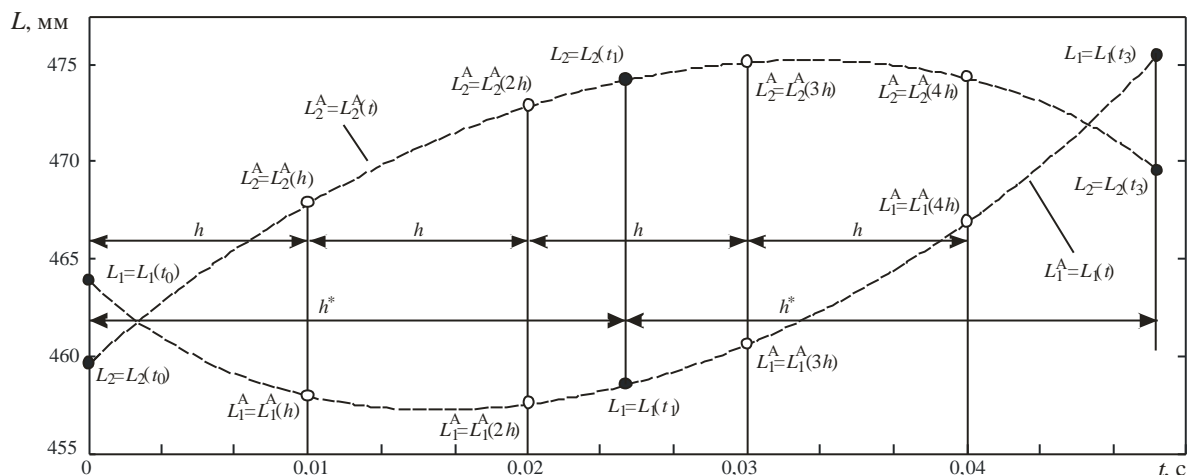
$$L^A(t) = \sqrt{T_2 t^2 + T_1 t + T_0} ; \quad (149)$$

– при формировании движения характерной точки рабочего органа ОПКС по дуге окружности с неменяющимися одной линейной и всеми угловыми выходными координатами используются тригонометрические функции:

$$L^A(t) = \sqrt{a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t} ; \quad (150)$$

– при движении по более сложным траекториям используются степенные функции высокого порядка:

$$L^A(t) = T_6 t^6 + \dots + T_1 t + T_0 . \quad (151)$$



**Рисунок 167 – Аппроксимация решетчатых функций, задающих законы изменения длин штанг МПКЦ, аналитическими зависимостями**

Зависимости  $L_j^A = L_j^A(t)$  представляют собой законы изменения длин штанг, при которых обеспечивается перемещение рабочего органа ОПКС по заданной траектории с требуемой (номинальной) контурной скоростью  $V_K^{\text{НОМ}}$ . Время  $t$  в данных законах находится в интервале  $0 \leq t \leq t_{\text{Тр}}$  и имеет идеализированное значение; в дальнейшем величину  $t$ , входящую в функции  $L_j^A = L_j^A(t)$  в качестве аргумента, будем называть идеальным временем  $\tau$ . Как будет показано далее, реальное время отработки траектории может превосходить  $t_{\text{Тр}}$ .

На интервалах времени длительностью  $h$  предполагается, что длина штанги должна изменяться по линейному закону

$$L_{\text{ЛИН}}^h(\tilde{t}) = L^A(\tau_{\text{Н}}^h) + \frac{L^A(\tau_{\text{Н}}^h + h) - L^A(\tau_{\text{Н}}^h)}{h} \tilde{t} = L^A(\tau_{\text{Н}}^h) + k_h \tilde{t}, \quad 0 \leq \tilde{t} < h,$$

где  $L^A(\tau_{\text{Н}}^h)$  – длина штанги в момент времени, соответствующий началу интервала;  $L^A(\tau_{\text{Н}}^h + h)$  длина штанги в момент времени, соответствующий концу интервала. Необходимо найти максимальную погрешность  $\Delta L^h$  в формировании требуемого закона изменения длины штанги на таком интервале.

Примем, что на интервале длительностью  $h$  закон изменения длины штанги может быть описан зависимостью вида

$$L^h(\tilde{t}) = T_2^h \tilde{t}^2 + T_1^h \tilde{t} + T_0^h, \quad (152)$$

где  $T_i$  – некоторые коэффициенты, что справедливо при любом рассмотренном способе аппроксимации закона изменения длины штанги в силу малости длительности интервала  $h$ . Тогда

$$\Delta L^h(\tilde{t}) = L^h(\tilde{t}) - L_{\text{ЛИН}}^h(\tilde{t}) = T_2^h \tilde{t}^2 + T_1^h \tilde{t} + T_0^h - L^A(\tau_{\text{Н}}^h) - k_h \tilde{t}.$$

Так как на концах интервала длительностью  $0 \leq \tilde{t} < h$  функции  $L^h(\tilde{t})$  и  $L_{\text{ЛИН}}^h(\tilde{t})$  должны совпадать, то

$$\begin{aligned} \Delta L^h(\tilde{t}) &= L^h(\tilde{t}) - L_{\text{ЛИН}}^h(\tilde{t}) = T_2^h \tilde{t}^2 + T_1^h \tilde{t} + T_0^h - L^A(t_H^h) - \\ &\quad - \frac{T_2^h h^2 + T_1^h h + T_0^h - T_2^h 0^2 + T_1^h 0 + T_0^h}{h} \tilde{t} = T_2^h \tilde{t}^2 - \tau T_2^h \tilde{t}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \Delta L^h(\tilde{t}) = 2T_2^h \tilde{t} - hT_2^h,$$

что позволяет найти момент времени на интервале  $0 \leq \tilde{t} < h$ , в который погрешность  $\Delta L^h$  принимает экстремальное (максимальное) значение:  $\tilde{t} = \frac{h}{2}$ . Таким обра-

зом, в середине интервала  $0 \leq \tilde{t} < h$  отклонение  $\Delta L^h$  будет принимать максимальное значение, равное

$$|\Delta L_{\text{МАХ}}^h(h/2)| = \frac{T_2^h h^2}{4}. \quad (153)$$

Принципиальной необходимости в использовании (153) при определении  $\Delta L_{\text{МАХ}}^h$  нет; данная зависимость использована только для определения, при принятом допущении (152), момента времени  $\tilde{t}$ , в который погрешность  $\Delta L^h$  имеет максимальное значение. Поэтому определять  $\Delta L_{\text{МАХ}}^h$  можно следующим способом:

$$\Delta L_{\text{МАХ}}^h(h/2) = L^A(\tau_H^h + h/2) - \left( L^A(\tau_H^h) + \frac{L^A(\tau_H^h + h) - L^A(\tau_H^h)}{2} \right). \quad (154)$$

В соответствии с (146) должно выполняться условие

$$\Delta L_{\text{МАХ}}^h \leq \Delta L_{\text{ДОП}}^h = 0,9 \frac{\rho_{\text{МАХ}}}{\rho_{\text{МАХ}}^*}, \quad (155)$$

учитывающее 10% «запас» погрешности на аппроксимацию закона изменения длины штанги для отработки всей траектории.

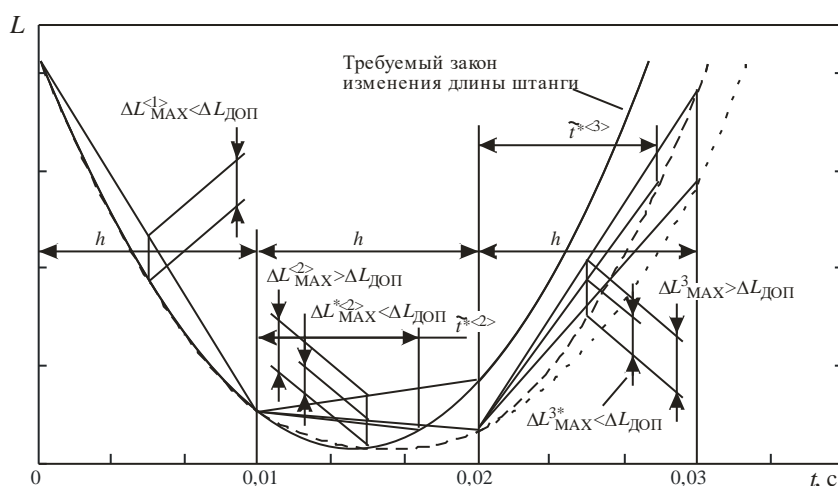
Если условие (155) для какого-либо интервала не выполняется, следует добиться уменьшения отклонения  $\Delta L_{\text{МАХ}}^h$ . В соответствии с (153) уменьшение  $\Delta L_{\text{МАХ}}^h$  можно получить за счет уменьшения периода несущей частоты  $h$  или мо-

для аппроксимирующего коэффициента  $T_2^h$ . Оперативное изменение (уменьшение) периода несущей частоты связано с вмешательством в работы системы ЧПУ на низком уровне, поэтому нецелесообразно.

Уменьшение модуля аппроксимирующего коэффициента  $T_2^h$  можно получить за счет уменьшения участка траектории, формируемого в текущем периоде несущей частоты, т. е. за счет снижения контурной скорости.

На рисунке 168 показан фрагмент требуемого закона изменения длины  $j$ -й штанги МПКЦ. На первом периоде несущей частоты условие (155) выполняется. Скорость изменения длины штанги составит

$$V_j^{<1>} = \frac{L_j^A(\tau_H^{<1>} + h) - L_j^A(\tau_H^{<1>})}{h}. \quad (156)$$



**Рисунок 168 – Уменьшение изменения длины штанги при невыполнении в текущем периоде несущей частоты условия (155)**

Так как за время  $h$  длина каждой штанги должна измениться на целое количество дискрет  $\Delta_{ПР}$  используемого привода, то при задании скорости в числителе (156) должно присутствовать выражение

$$\left\{ \frac{L_j^A(\tau_H^{<1>} + h) - L_j^A(\tau_H^{<1>})}{\Delta_{ПР}} \right\} \Delta_{ПР}, \quad (157)$$

где фигурные скобки обозначают операцию выделения целой части. Остаток

$$\frac{L_j^A(\tau_H^{<1>} + h) - L_j^A(\tau_H^{<1>})}{\Delta_{ПП}} - \left\{ \frac{L_j^A(\tau_H^{<1>} + h) - L_j^A(\tau_H^{<1>})}{\Delta_{ПП}} \right\} < \Delta_{ПП}$$

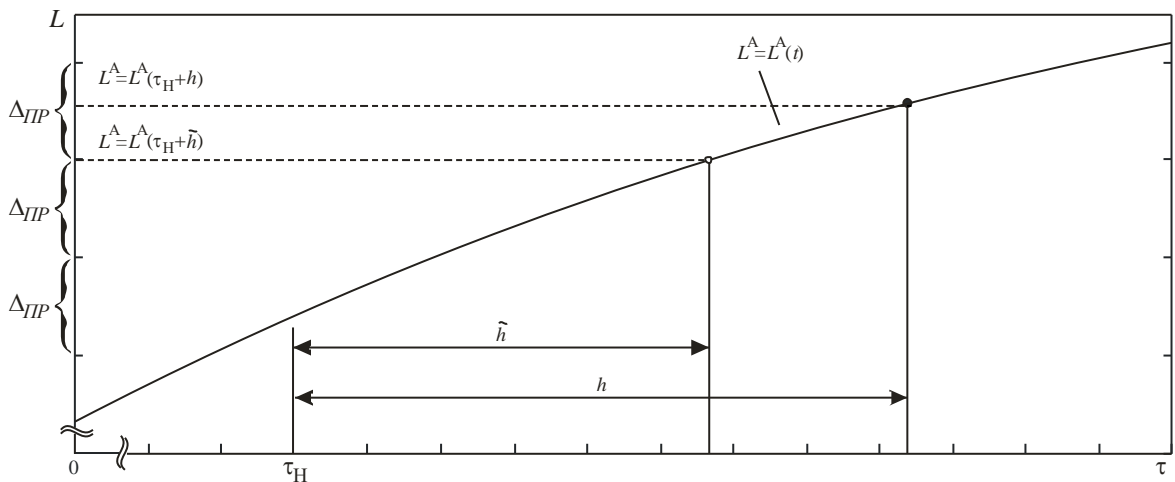
накапливается в переменной  $L_j^{OCT}$ . При выполнении условия

$$L_j^{OCT} \geq \Delta_{ПП}$$

значение этой переменной уменьшается на  $\Delta_{ПП}$  и значение  $\Delta_{ПП}$  прибавляется к (157), т. е.

$$V_j^{<1>} = \frac{\left\{ \frac{L_j^A(\tau_H^{<1>} + h) - L_j^A(\tau_H^{<1>})}{\Delta_{ПП}} \right\} \Delta_{ПП} + \Delta_{ПП} \Big|_{L_j^{OCT} \geq \Delta_{ПП}}}{h}. \tag{158}$$

В результате задания скорости согласно (158) длина штанги в момент окончания периода несущей частоты будет равна  $L_j^A(\tau_H^{<1>} + \tilde{h}_j)$ , причем  $\tilde{h}_j \neq h$  (рисунок 169) и значения  $\tilde{h}_j$  будут различны для разных штанг. Так как  $|\tilde{h}_j - h| \ll h$  (за интервал времени  $|\tilde{h}_j - h|$  длина штанги изменяется менее чем на  $\Delta_{ПП}$ ), то примем, что  $\tilde{h}_j = h$ .



**Рисунок 169 – Уменьшение изменения длины штанги из-за округления количества дискрет , обрабатываемых за период несущей частоты**

Аналогичная коррекция скоростей изменения длин штанг с учетом целого количества дискрет, обрабатываемых за период  $h$ , и накопленных остатков  $L_j^{OCT}$  должна осуществляться на всех этапах построение траектории. В дальнейших вы-



кладках внимание на этой процедуре не акцентируется, если в этом нет необходимости.

На втором периоде условие (155) не выполняется, поэтому с использованием функции  $L_j^A(\tau)$  необходимо найти точку, для которой

$$\Delta L_{j\text{ДОП}} = \left| L_j^A(\tau_H^{<2>} + \tilde{t}^*/2) - \left( L_j^A(\tau_H^{<2>}) + \frac{L_j^A(\tau_H^{<2>} + \tilde{t}^*) - L_j^A(\tau_H^{<2>})}{2} \right) \right|.$$

Если принять, что на данном периоде несущей частоты произведена аппроксимация закона изменения длины штанги зависимостью вида (152), то момент времени  $\tilde{t}^*$  может быть определен следующим образом:

$$\tilde{t}^* = \sqrt{\left| \frac{4\Delta L_{j\text{ДОП}}}{T_2^h} \right|}. \quad (159)$$

Скорость изменения длины штанги на этом периоде несущей частоты составит

$$V_j^{<2>} = \frac{L_j^A(\tau_H^{<2>} + \tilde{t}^*) - L_j^A(\tau_H^{<2>})}{h}.$$

Скорости изменения длин других штанг должны быть рассчитаны применительно к моменту времени  $\tau_H^{<2>} + \tilde{t}^*$ . Соответственно произойдет уменьшение текущей контурной скорости в

$$K_{V,\Delta}^{<2>} = \frac{L_j^A(\tau_H^{<2>} + \tilde{t}^*) - L_j^A(\tau_H^{<2>})}{L_j^A(\tau_H^{<2>} + h) - L_j^A(\tau_H^{<2>})},$$

т. е.  $V_K^{<2>} = K_{V,\Delta}^{<2>} V_{K.\text{НОМ}}$ . В общем случае

$$V_K^\tau = K_{V,\Delta}^\tau V_{K.\text{НОМ}}. \quad (160)$$

Если условие (155) не выполняется для нескольких штанг, то для них рассчитываются значения  $\tilde{t}_j^*$  и за момент времени  $\tau_H^{<2>} + \tilde{t}_j^*$ , определяющий скорости на текущем периоде несущей частоты, принимается минимальный из  $\tau_H^{<2>} + \tilde{t}_j^*$ . Принятый момент времени  $\tau_H^{<2>} + \tilde{t}^*$  будет использоваться в (154) как момент времени,

определяющий в функциях  $L_j^A(t)$  начало интервала траектории, формируемого на следующем (третьем на рисунке 168) периоде несущей частоты, т. е.  $\tau_H^{<3>} = \tau_H^{<2>} + \tilde{t}^*$ .

В общем случае  $t_H^{<i+1>} = t_H^{<i>} + h$ ,  $\tau_H^{<i+1>} = \tau_H^{<i>} + \tilde{t}^{*<i>}$ , где  $\tilde{t}^* \leq h$  и равенство возникает при выполнении на  $i$ -м периоде несущей частоты условия (155), поэтому при обработке траектории наблюдается временное рассогласование между идеальным временем  $\tau$  и реальным временем  $t$ . В начальный момент обработки траектории реальное время совпадает с идеальным временем, т. е.  $t_0 = \tau_0$ , в дальнейшем из-за выполнения процесса обеспечения точности формирования законов изменения длин штанг  $t > \tau$ .

Скорости изменения длин штанг для всех периодов несущей частоты рассчитываются последовательно по мере обработки траектории. Требуемые скорости изменения длин штанг на  $i$ -м периоде несущей частоты должны быть определены до начала этого периода (до момента  $t_H^{<i>}$  реального времени). Следовательно, эти расчеты должны проводиться во время предшествующего периода несущей частоты, начинать их целесообразно в момент времени  $t_H^{<i-1>}$ .

Во время периода несущей, в котором осуществляется обработка последнего интервала требуемой траектории, скорости изменения длин штанг задаются так, чтобы окончание обработки траектории совпало с окончанием этого периода. Данное требование может не выполняться, если в процессе обработки траектории должна быть реализована функция торможения, т. е. обеспечено снижение контурной скорости на конечном этапе обработки траектории.

В процессе обработки траектории текущая контурная скорость может меняться по причинам, не связанным с рассмотренным выше обеспечением требуемой точности в формировании законов изменения длин штанг МПКЦ. Современные системы ЧПУ имеют органы управления, позволяющие оператору корректировать контурную скорость как в сторону уменьшения от заданной, так и в сторону увеличения. Кроме того, с целью уменьшения динамических погрешностей

при работе оборудования отработка траектории включает в себя этапы разгона и торможения [37]. В первом случае контурная скорость увеличивается от нулевого значения до требуемого, во втором – уменьшается от требуемого до нулевого. Длительности этапов разгона и торможения определяются динамическими свойствами оборудования, в том числе параметрами используемых приводов.

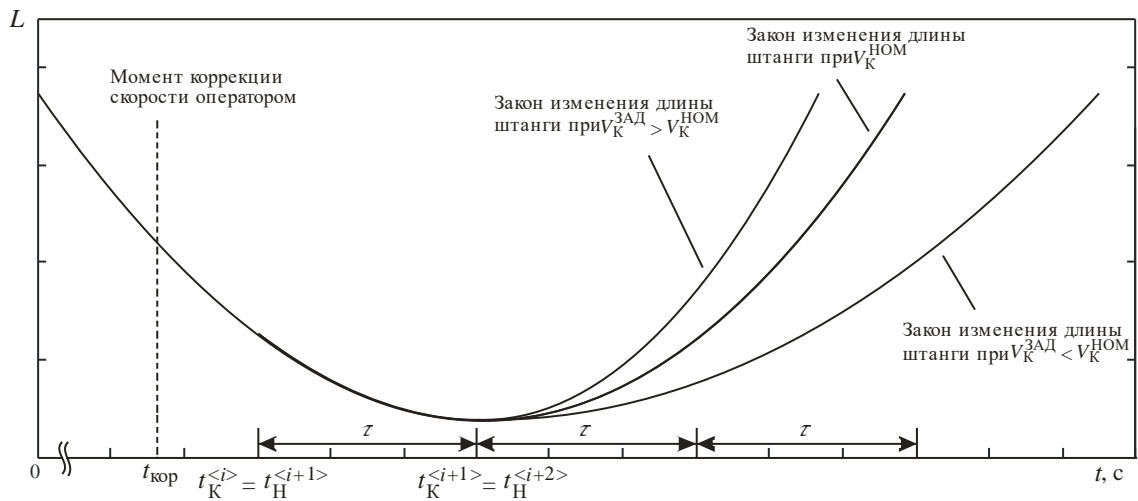
Будем различать номинальную, заданную и текущую контурные скорости. Под номинальной понимается контурная скорость, исходя из которой рассчитываются функции изменения длин штанг  $L_j^A(\tau)$ . Заданная контурная скорость определяется оператором с помощью органов управления системы ЧПУ, при отсутствии корректировок со стороны оператора заданная контурная скорость равна номинальной. Текущая контурная скорость – это контурная скорость рабочего органа в текущий момент времени с учетом возможной отработки операций разгона, торможения, обеспечения требуемой точности формирования законов изменения длин штанг. Текущая контурная скорость не превосходит заданную.

Очевидно, что изменение контурной скорости осуществляется за счет согласованного изменения скоростей изменения длин всех штанг МПКЦ: уменьшение скоростей изменений длин всех штанг на 10% вызовет снижение контурной скорости на 10% и т. д. Аппроксимирующие зависимости  $L_j^A(\tau)$  для законов изменения длин штанг получаются из условия постоянства контурной скорости, поэтому в алгоритм управления на постоянной несущей частоте необходимо добавить модули, позволяющие изменять контурную скорость.

#### *Коррекция контурной скорости оператором*

При отработке траектории движения рабочего органа зависимости  $L_j^A(\tau)$  рассчитываются применительно к требуемой (номинальной) контурной скорости  $V_K^{\text{НОМ}}$ . В процессе работы оборудования контурная скорость может корректироваться оператором, который определяет скорость  $V_K^{\text{Зад}}$ , которая может быть как больше номинально, так и меньше ее.

Пусть коррекция траектории произведена оператором в момент времени  $t_{кор}$ , относящемся к  $i$ -му периоду несущей частоты (рисунок 170). Так как  $t_{кор} > t_H^{<i>}$ , то скорректированная оператором контурная скорость не может быть использована при определении скоростей изменения длин штанг на интервале  $i+1$ : данные скорости определяются расчетами применительно к нескорректированной контурной скорости в момент времени  $t_H^{<i>}$ . Изменения в законах изменения длин штанг, отражающие коррекцию контурной скорости, будут произведены начиная с  $i+2$  периода несущей частоты.



**Рисунок 170 – Изменение закона изменения длины штанги, вызванное коррекцией контурной скорости оператором**

Характер этих изменений иллюстрирует рисунок 171. Требуемый закон изменения длины  $j$ -й штанги описывается функцией  $L_j^A = L_j^A(\tau)$ , имеющей в качестве аргумента идеальное время. Если контурная скорость равна номинальной, то на периоде  $i+2$  длина штанги должна измениться на величину

$$\Delta L_j^{<i+2>} = L_j^A(\tau_H^{<i+2>} + h) - L_j^A(\tau_H^{<i+2>}).$$

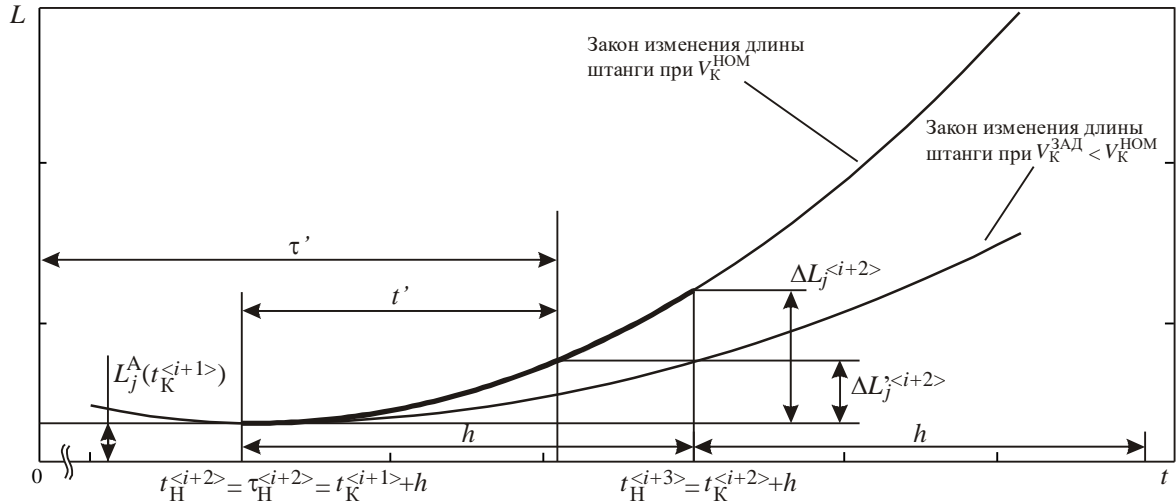
Скорость изменения длины штанги на этом периоде равна

$$V_j^{<i+2>} = \frac{\Delta L_j^{<i+2>}}{h}.$$

Если заданная контурная скорость отличается от номинальной, то скорость изменения длины штанги должна быть скорректирована с помощью коэффициен-

та  $K_V$ , показывающего отношение номинальной и задаваемой оператором контурных скоростей:

$$K_V = \frac{V_K^{3AD}}{V_K^{НОМ}}. \quad (161)$$



**Рисунок 171 – Поправка закона изменения длины штанги и соотнесение идеального и реального времени в случае уменьшения скорости оператором**

Для обеспечения заданной контурной скорости длина  $j$ -й штанги на периоде  $i + 2$  должна измениться на величину

$$\Delta L_j'^{<i+2>} = K_V \Delta L_j^{<i+2>}.$$

Для соотнесения реального и идеального времени необходимо определить момент идеального времени, для которого

$$L_j^A(\tau') = L_j^A(\tau_H^{<i+2>}) + \Delta L_j'^{<i+2>}. \quad (162)$$

Моменты времени  $\tau_H^{<i+2>}$  и  $t_H^{<i+2>}$  должны быть известны из расчетов, проводимых при отработке предшествующих этапов траектории (на рисунке 171 принято, что  $\tau_H^{<i+2>} = t_H^{<i+2>}$ ).

Если для получения зависимостей  $L_j^A = L_j^A(\tau)$  используются квадратичные (149) или тригонометрические (150) функции, то определение из (162) момента времени  $\tau'$  не представит серьезной проблемы. Однако при использовании степенных функций (151) нахождение  $\tau'$  может вызвать затруднение.

Используя значения функций  $L_j^A = L_j^A(\tau)$  на интервале  $\tau_H^{<i+2>} \leq \tau \leq \tau_H^{<i+2>} + h$  можно получить квадратичную функцию

$$L_j^{A<i+2>}(\tilde{\tau}) = A_{j2}^{<i+2>} \tilde{\tau}^2 + A_{j1}^{<i+2>} \tilde{\tau} + A_{j0}^{<i+2>}, \quad (163)$$

описывающую требуемый закон изменения длины  $j$ -й штанги на этом интервале времени. В силу малости рассматриваемого интервала времени точность приближения закона с использованием квадратичной зависимости будет достаточно высока.

С учетом (162) функция (163) позволяет определить значение  $\tau'$ :

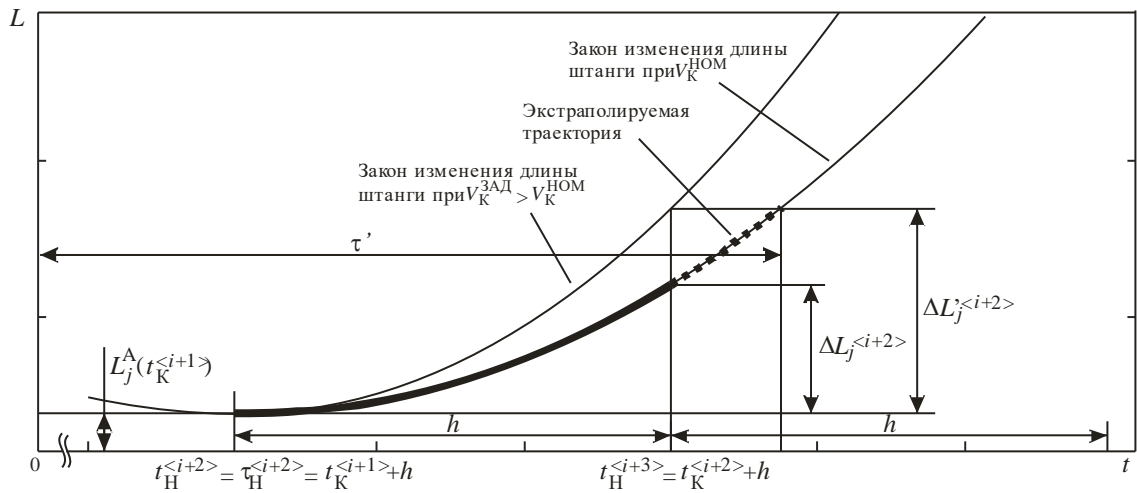
$$A_{j2}^{<i+2>} \tilde{\tau}'^2 + A_{j1}^{<i+2>} \tilde{\tau}' + A_{j0}^{<i+2>} = L_j^A(\tau_H^{<i+2>}) + \Delta L_j^{<i+2>},$$

$$\tau_j' = \frac{-A_{j1}^{<i+2>} \pm \sqrt{A_{j1}^{<i+2>2} - 4A_{j2}^{<i+2>} (A_{j0}^{<i+2>} - L_j^A(\tau_H^{<i+2>}) - \Delta L_j^{<i+2>})}}{2A_{j2}^{<i+2>}}. \quad (164)$$

Для показанного на рисунке 171 случая уменьшения оператором контурной скорости ( $K_V < 1$ ) в качестве результата расчета  $\tau'$  по (164) следуют брать ближайшее к  $\tau_H^{<i+2>} + h$  значение, причем  $\tau' < \tau_H^{<i+2>} + h$ .

Зависимость (164) позволяет определить значение  $\tau_j'$  применительно к каждому из законов изменения длин штанг  $L_j^A = L_j^A(\tau)$  для рассматриваемого периода несущей частоты. Для повышения точности определения момента времени  $\tau'$  целесообразно выполнить усреднение значений  $\tau_j'$ .

Если  $K_V > 1$ , т. е. оператор увеличивает контурную скорость относительно номинальной, момент времени  $\tau'$  превышает значение  $\tau_H^{<i+2>} + h$  (рисунок 172). В этом случае для определения  $\tau'$  также могут использоваться зависимости (163) и (164), однако они используются для решения задачи экстраполяции. Для повышения точности экстраполирования также целесообразно выполнять усреднение найденных значений  $\tau_j'$ . При нахождении  $\tau_j'$  по (164) в качестве результатов расчета для  $j$ -й штанги следует использовать значение, ближайшее к  $\tau_H^{<i+2>} + h$ , причем  $\tau_j' > \tau_H^{<i+2>} + h$ .



**Рисунок 172 – Поправка закона изменения длины штанги и соотнесение идеального и реального времени в случае увеличения скорости оператором**

При отработке коррекции контурной скорости оператором следует учитывать ограничения, связанные с допустимыми для элементов оборудования ускорениями.

Пусть при коррекции контурной скорости оператором изменение скорости от значения  $V_{К.НАЧ}^{ЗАД}$  до значения  $V_{К.КОН}^{ЗАД}$  должно происходить по некоторому закону

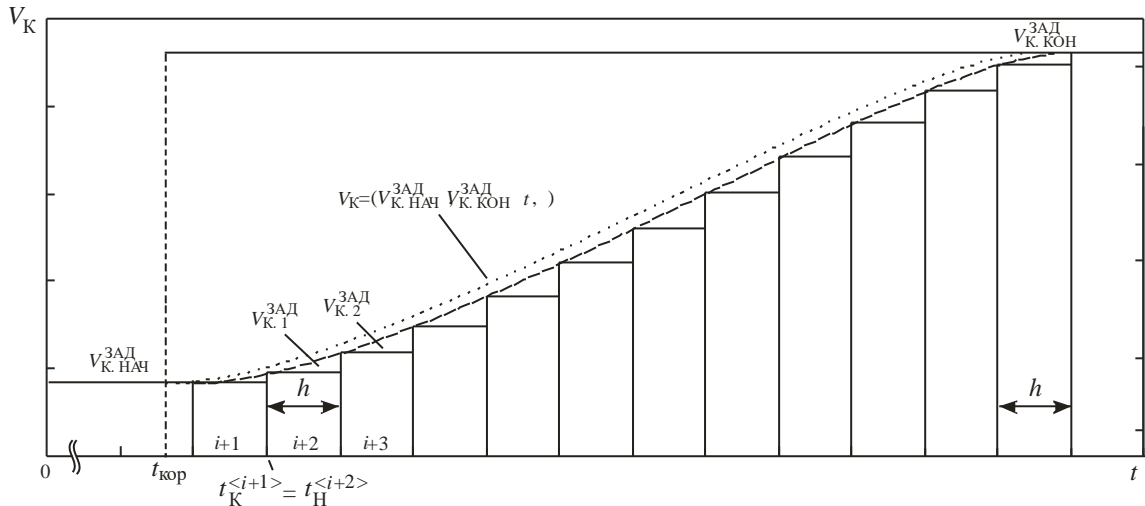
$$V_K = V_K(V_{К.НАЧ}^{ЗАД}, V_{К.КОН}^{ЗАД}, t), \quad (165)$$

учитывающему ограничения на допустимые ускорения (рисунок 173). Так как коррекция контурной скорости оператором в момент времени  $t_{кор}$ , принадлежащий  $i$ -му периоду несущей частоты, будет учтена в расчетах, выполняемых в момент времени  $t_H^{<i+2>}$  применительно к периоду  $i+2$ , то в течение периода  $i+1$  контурная скорость будет оставаться равной  $V_{К.НАЧ}^{ЗАД}$ . За начальный момент времени  $t_0$  в (165) целесообразно принять момент времени  $t_H^{<i+1>}$ . Закон изменения контурной скорости, имеющий начало в этой точке, на рисунке 173 показан пунктирной линией.

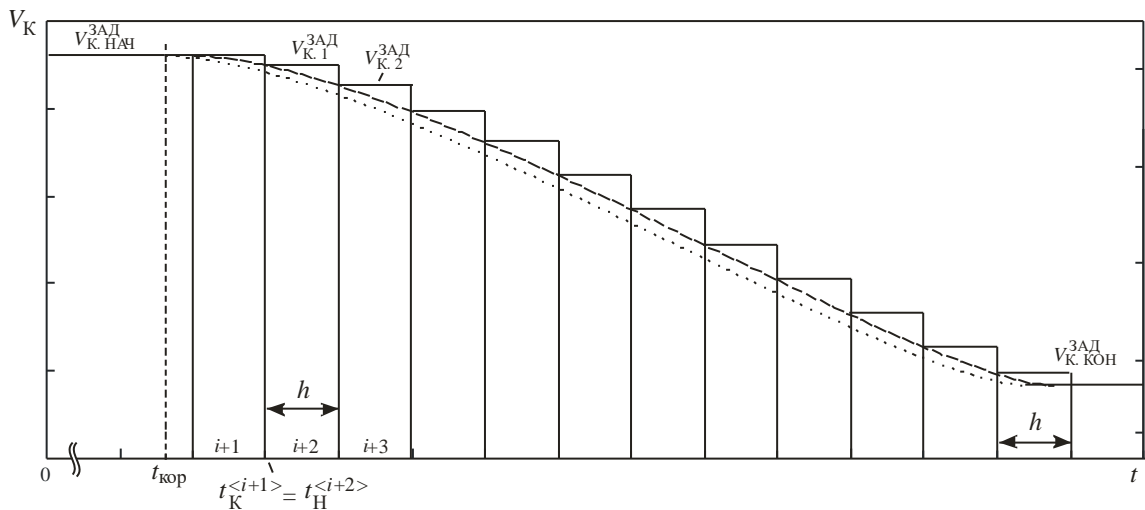
Таким образом, с использованием зависимости (165) можно задавать значения контурной скорости: на периоде  $i+1$  контурная скорость равна  $V_{К.НАЧ}^{ЗАД}$ , на периоде  $i+2$  она определяется из (165) для момента времени  $t_0 + h$  и т. д. В общем случае для периода несущей частоты  $i+k$  контурная скорость рассчитывается из

(165) для момента времени  $t_0 + (k-1)h$ . Использование зависимости (165) прекращается при достижении контурной скорости  $V_{К.КОН}^{ЗАД}$ .

На рисунке 173 показан случай коррекции оператором контурной скорости в сторону ее увеличения. При коррекции в сторону уменьшения задание контурных скоростей интервалов времени  $h$  производится аналогично (рисунок 174).



**Рисунок 173 – Закон изменения контурной скорости, учитывающий ограничения на допустимые ускорения; случай коррекции скорости в сторону увеличения**



**Рисунок 174 – Закон изменения контурной скорости, учитывающий ограничения на допустимые ускорения; случай коррекции скорости в сторону уменьшения**

### *Формирование траектории на этапах разгона и торможения*

Формирование траектории на этапе разгона не отличается от показанного на рисунке 173 случая увеличения контурной скорости от значения  $V_{К.НАЧ}^{ЗАД}$  до значения  $V_{К.КОН}^{ЗАД}$ . На этапе разгона необходимо обеспечить нарастание контурной ско-



рости от значения  $V_{K.НАЧ}^{3АД} = 0$  до некоторого заданного  $V_K^{3АД} = K_V V_K^{НОМ}$ . Длительность этапа разгона определяется значением  $V_K^{3АД}$  и видом зависимости (165).

Формирование траектории на этапе торможения имеет следующие особенности:

1. Момент начала этапа торможения зависит от текущей контурной скорости  $V_K^{ТЕК}$ .
2. На этапе торможения контурная скорость уменьшается до некоторого значения  $V_{K.МІН}$ , являющегося заданной величиной.
3. Последний при формировании траектории период должен отрабатываться при контурной скорости  $V_{K.МІН}$ .

Пусть изменение контурной скорости на этапе торможения задается некоторой функцией

$$V_K = V_K(V_K^{ТЕК}, t). \quad (166)$$

Зависимость (166) позволяет определить интервал времени от начала этапа торможения, в течение которого контурная скорость снизится от исходного значения  $V_K^{ТЕК}$  до требуемого при торможении  $V_{K.МІН}$ . Величина этого интервала будет определять длительность этапа торможения  $t_{Торм}$ .

В ходе отработки траектории этап торможения должен начинаться, когда идеальное время достигнет значения  $\tau_{Тр} - \tau_{Торм}$ , причем  $\tau_{Торм} < t_{Торм}$ .

Проиллюстрируем принцип определения длительности этапа торможения  $\tau_{Торм}$  в идеальном времени. Пусть скорость на этапе торможения должна меняться по линейному закону

$$V_K(t) = V_K^{ТЕК} - a_V t, \quad (167)$$

где  $a_V$  – коэффициент, определяющий изменение контурной скорости во времени с учетом возможных ограничений на допустимые ускорения.

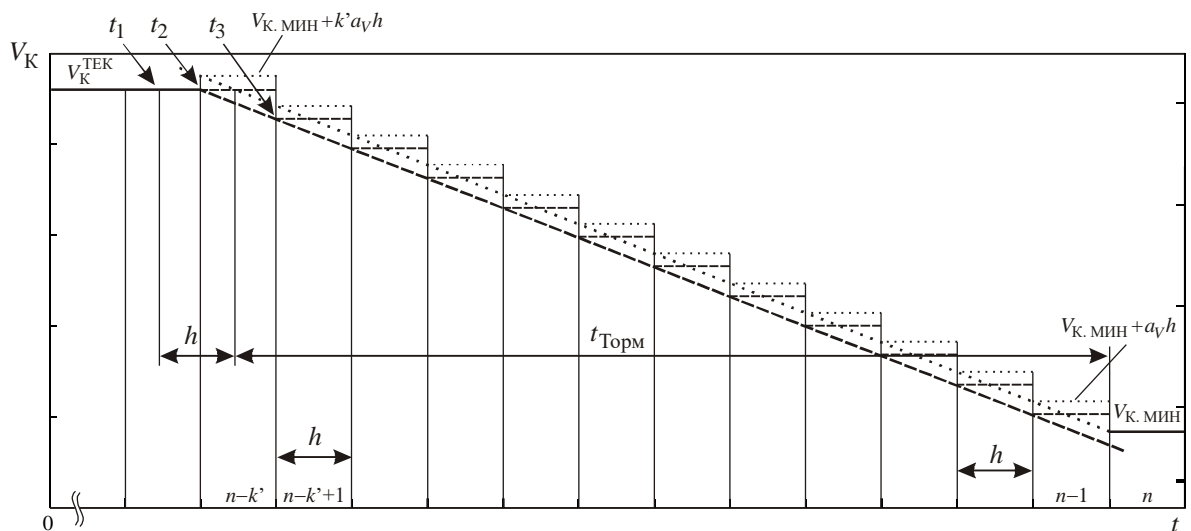
Если на последнем ( $n$ -м) при формировании траектории движения периоде несущей частоты контурная скорость должна составлять заданную величину  $V_{K.MIN}$ , то на предпоследнем ( $n-1$ ) периоде контурная скорость должна составлять  $V_K^{<n-1>} = V_{K.MIN} + a_V h$  (рисунок 175). Очевидно, что  $V_K^{<n-2>} = V_{K.MIN} + 2a_V h$ , и, в общем виде,

$$V_K^{<n-k>} = V_{K.MIN} + k a_V h.$$

На рисунке 175 скорость  $V_K^{<n-k'>}$  для периода  $n-k'$  превысила текущую контурную скорость  $V_K^{TEK}$ . Продолжительность этапа торможения  $t_{Торм}$  может быть определена следующим образом:

$$t_{Торм} = \frac{V_K^{TEK} - V_{K.MIN}}{a_V}. \quad (168)$$

Отработка этапа торможения должна начинаться с  $n-k'+1$  периода несущей частоты, процедуры, связанные с расчетом скорости на этом периоде должны производиться на  $n-k'$  периоде несущей частоты.



**Рисунок 175 – Определение длительности этапа торможения**

Этап движения рабочего органа со скоростью  $V_{K.MIN}$  назовем этапом доработки. В общем случае его длительность может составлять несколько периодов несущей частоты:  $t_{Дор} = n_D h$ .

Во время этапа торможения характерная точка рабочего органа, для которой определена контурная скорость  $V_K$ , пройдет по траектории путь

$$S_{\text{Торм}} = V_K^{\text{ТЕК}} t_{\text{Торм}} - \frac{a_V t_{\text{Торм}}^2}{2}, \quad (169)$$

во время этапа доработки:

$$S_{\text{Дор}} = V_{K.\text{MIN}} t_{\text{Дор}}. \quad (170)$$

Так как применительно к идеальному времени процесс формирования траектории происходит с заданной номинальной контурной скоростью  $V_K^{\text{НОМ}}$ , то для отработки участка траектории длиной  $S_{\text{Торм}} + S_{\text{Дор}}$  потребуется время

$$\tau_{\text{Торм}} = \frac{S_{\text{Торм}} + S_{\text{Дор}}}{V_K^{\text{НОМ}}}. \quad (171)$$

Формула (171) позволяет определить идеальное время  $\tau_{\text{Торм}}$  при любом законе изменения контурной скорости на этапе торможения. В частном случае линейной зависимости (167) с учетом (168)–(170) выражение для определения  $\tau_{\text{Торм}}$  примет следующий вид:

$$\tau_{\text{Торм}} = \frac{V_K^{\text{ТЕК}2} - V_{K.\text{MIN}}^2}{2V_K^{\text{НОМ}} a_V} + \frac{V_{K.\text{MIN}} t_{\text{Дор}}}{V_K^{\text{НОМ}}}. \quad (172)$$

Для обеспечения выполнения расчетов скорости для  $n - k' + 1$  периода несущей частоты в течение периода  $n - k'$  необходимо увеличить значение  $\tau_{\text{Торм}}$  по сравнению с рассчитанным по (172) на величину

$$\tau_{\text{Доп}} = h \frac{V_K^{\text{ТЕК}}}{V_K^{\text{НОМ}}}.$$

В этом случае признак начала этапа торможения будет сформирован в момент времени  $t_1$  (см. рисунок 175), расчеты скоростей для первого периода этапа торможения начнутся в момент времени  $t_2$ , собственно торможение – в момент времени  $t_3$ .

Помимо линейного для описания закона изменения контурной скорости на этапе торможения может использоваться и экспоненциальная зависимость вида

$$V_K(t) = V_K^{\text{ТЕК}} e^{-\alpha_V t},$$

где  $\alpha_V$  – коэффициент, определяющий изменение контурной скорости во времени с учетом возможных ограничений на допустимые ускорения. В этом случае время отработки этапа торможения составит

$$t_{\text{Торм}} = \frac{1}{\alpha_V} \ln \frac{V_K^{\text{ТЕК}}}{V_{K.\text{MIN}}},$$

характерная точка рабочего органа за время этапа торможения пройдет по траектории путь

$$S_{\text{Торм}} = \frac{V_K^{\text{ТЕК}}}{\alpha_V} \left( 1 - e^{-\alpha_V t_{\text{Торм}}} \right).$$

В соответствие с (171) идеальное время отработки этапа торможения составит

$$\tau_{\text{Торм}} = \frac{V_K^{\text{ТЕК}} - V_{K.\text{MIN}}}{\alpha_V V_K^{\text{НОМ}}} + \frac{V_{K.\text{MIN}} t_{\text{Дор}}}{V_K^{\text{НОМ}}}.$$

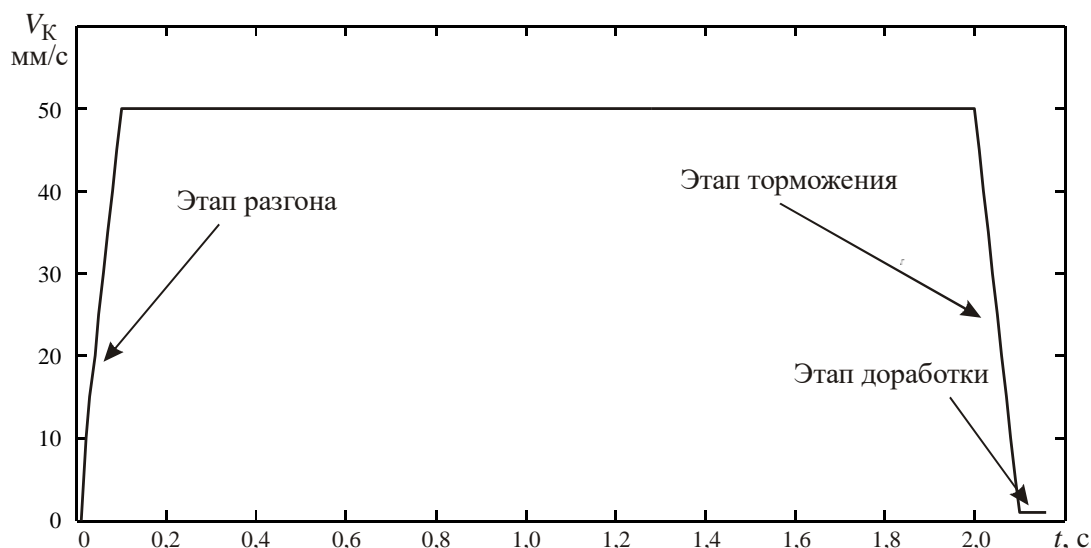
### 5.2.3. Моделирование метода интерполяции на постоянной несущей частоте

Для моделирования движение рабочего органа МПКЦ типа «гексапод» при управлении на постоянной несущей частоте разработана программа в виде М-файла для пакета MATLAB. Моделирование проводилось применительно к описанному выше МПКЦ, имеющему следующие геометрические размеры: радиус расположения нижних шарниров 400 мм, радиус расположения верхних шарниров 200 мм, шарниры платформы попарно сведены. В качестве характерного элемента выступает инструмент, точка  $P$  которого отстоит от подвижной платформы (плоскости расположения шарниров  $V_i$  на величину 150 мм. В качестве выходных координат выступают координаты этой точки, а также углы Крылова, описывающие разворот связанной с инструментом системы координат  $PX_{II}Y_{II}Z_{II}$  относительно глобальной СК  $OXYZ$  (см. рис 150). Принято, что начальной точки траектории соответствуют выходные координаты  $(-50, 0, 700, 0, 0, 0)$ , конечной –

(50, 0, 700, 0, 0, 0), номинальная контурная скорость  $V_K^{\text{НОМ}} = 50 \text{ мм/с}$ . Погрешность в формировании траектории (по линейным координатам) не должна превышать  $\rho_{\text{МАХ}} = 0,001 \text{ мм}$ , относительное отклонение  $\rho_{\text{МАХ}}^*$  принято равным 10.

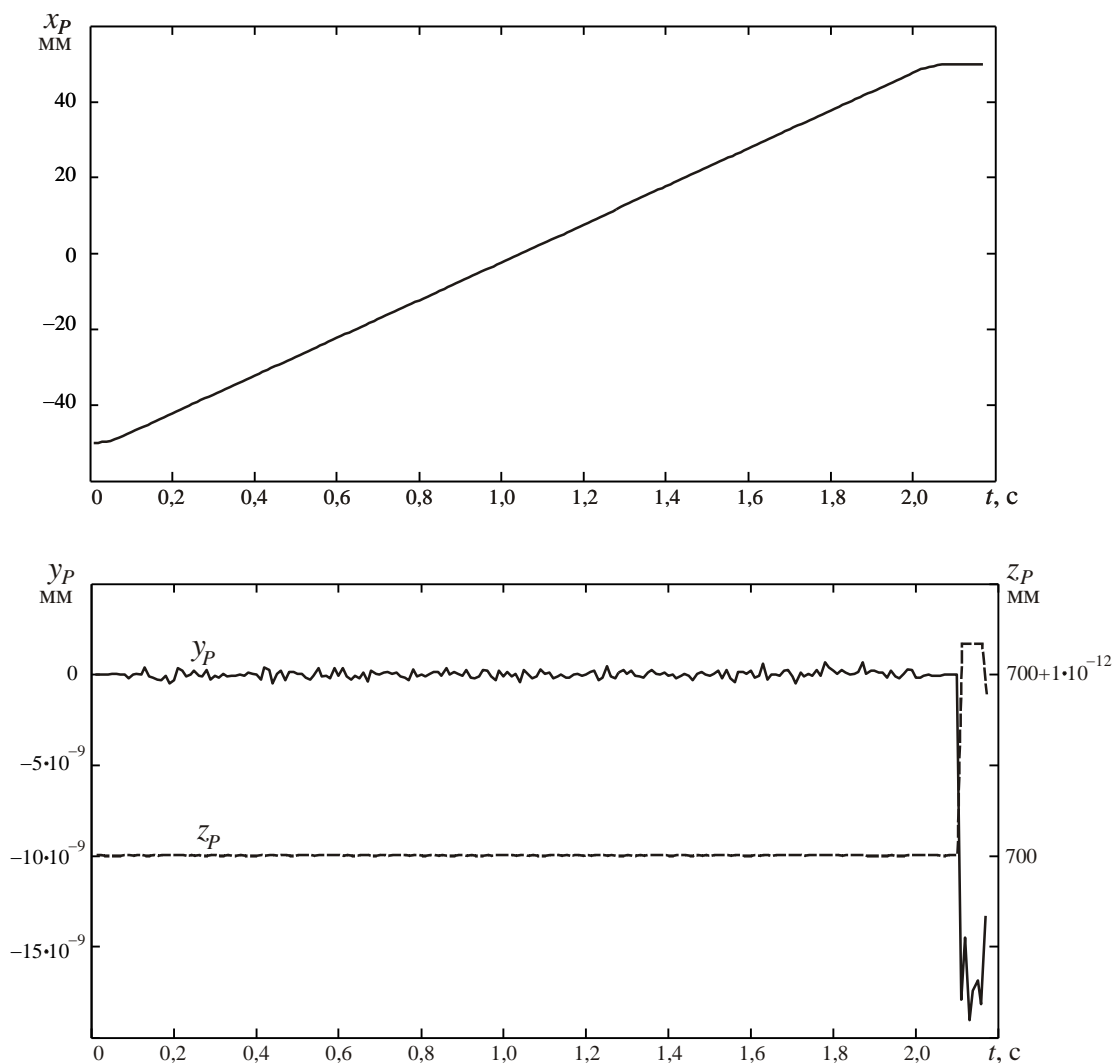
На рисунке 176 показан полученный при моделировании закон изменения контурной скорости характерной точки рабочего органа.

На графике присутствуют все характерные этапы отработки траектории: этап разгона, этап поддержания постоянной контурной скорости, этап торможения и этап доработки. При разгоне и торможении приняты линейные законы изменения контурной скорости.



**Рисунок 176 – Закон изменения контурной скорости, полученный при моделировании**

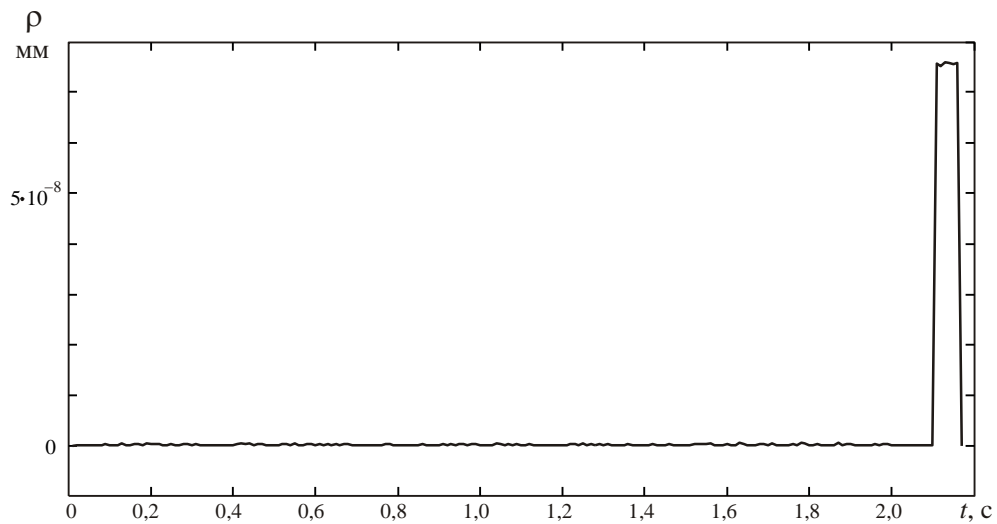
На рисунке 177 показаны законы изменения выходных линейных координат. Из графиков видно, что отклонения координат от требуемой траектории незначительны. Это же подтверждается графиком для величины погрешности  $\rho$ , показанном на рисунке 178. Наблюдаемые в конце отработки траектории выбросы соответствуют участку доработки и вызваны тем, что на этом этапе точность формирования законов изменения длин штанг в моделирующей программе не контролируется. Однако величина этих выбросов существенно меньше требуемой точности движения по траектории.



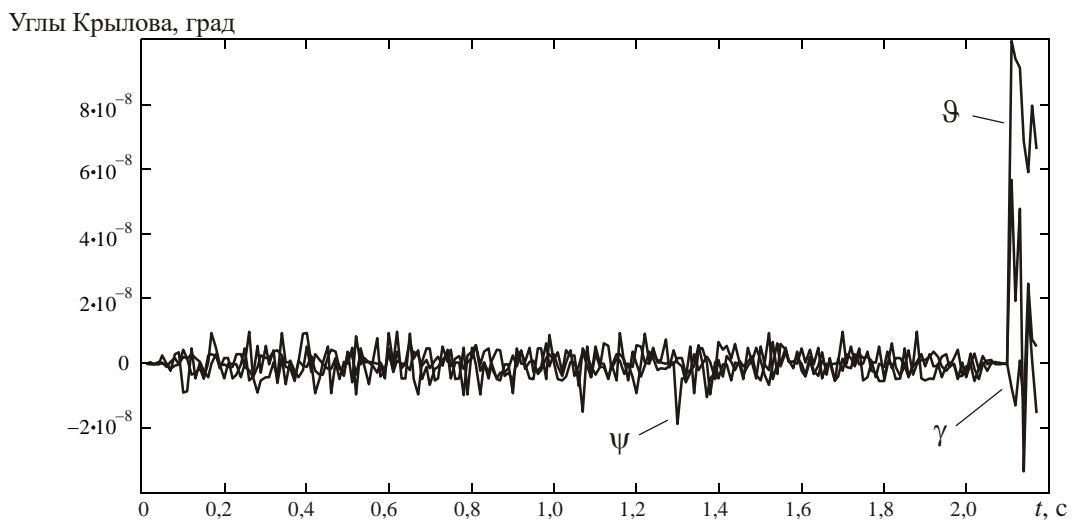
**Рисунок 177 – Изменения выходных линейных координат**

Предложенный выше алгоритм управления на постоянной несущей частоте применительно к ОПКС обеспечивает формирование законов изменения длин штанг МПКЦ с заданной точностью, что позволяет получить требуемые законы изменения выходных координат, включая угловые. На рисунке 179 показаны изменения выходных угловых координат (углов Крылова), полученные при моделировании движения рабочего органа по заданной выше траектории, для которой все заданные угловые координаты должны равняться нулю.

Таким образом, предложенный метод интерполяции заданной частоте позволяет обеспечить перемещение рабочего органа по заданной траектории с точностью, достаточной для большинства практических задач.



**Рисунок 178 – Погрешность формирования траектории (по линейным координатам)**



**Рисунок 179 – Изменения выходных угловых координат**

При моделировании не учитывался ряд факторов, которые могут негативно сказаться на точности траекторных движений. Очевидно, что качественное функционирование ОПКС возможно только при адекватности используемой при построении управления кинематической модели реальному МПКЦ, положенному в основу ОПКС. Кроме того, с точки зрения задачи интерполяции представляет интерес возможное негативное влияние дискретного характера изменения длины штанг МПКЦ (дискретность входных координат, вызванная дискретностью привода) на точность формирования траектории.

#### 5.2.4. Уменьшение погрешностей формирования траектории, вызванных неточностью кинематической модели

Рассмотренные выше алгоритмы формирования требуемой траектории движения рабочего органа ОПКС используют кинематическую модель МПКЦ, лежащего в его основе. Очевидно, что все параметры, входящие в кинематическую модель, должны быть известны. Вопросам определения параметров кинематических моделей МПКЦ посвящено достаточно много работ различных авторов [135, 146, 201, 248, 270], что свидетельствует об отсутствии единого подхода к решению этой задачи. Ниже изложена методика [82], позволяющая решать эту задачу применительно к МПКЦ типа «гексапод».

Для МПКЦ типа «гексапод» к параметрам кинематической модели, требующим экспериментального определения, следует отнести (для модели, рассмотренной в разделе 2.2.3):

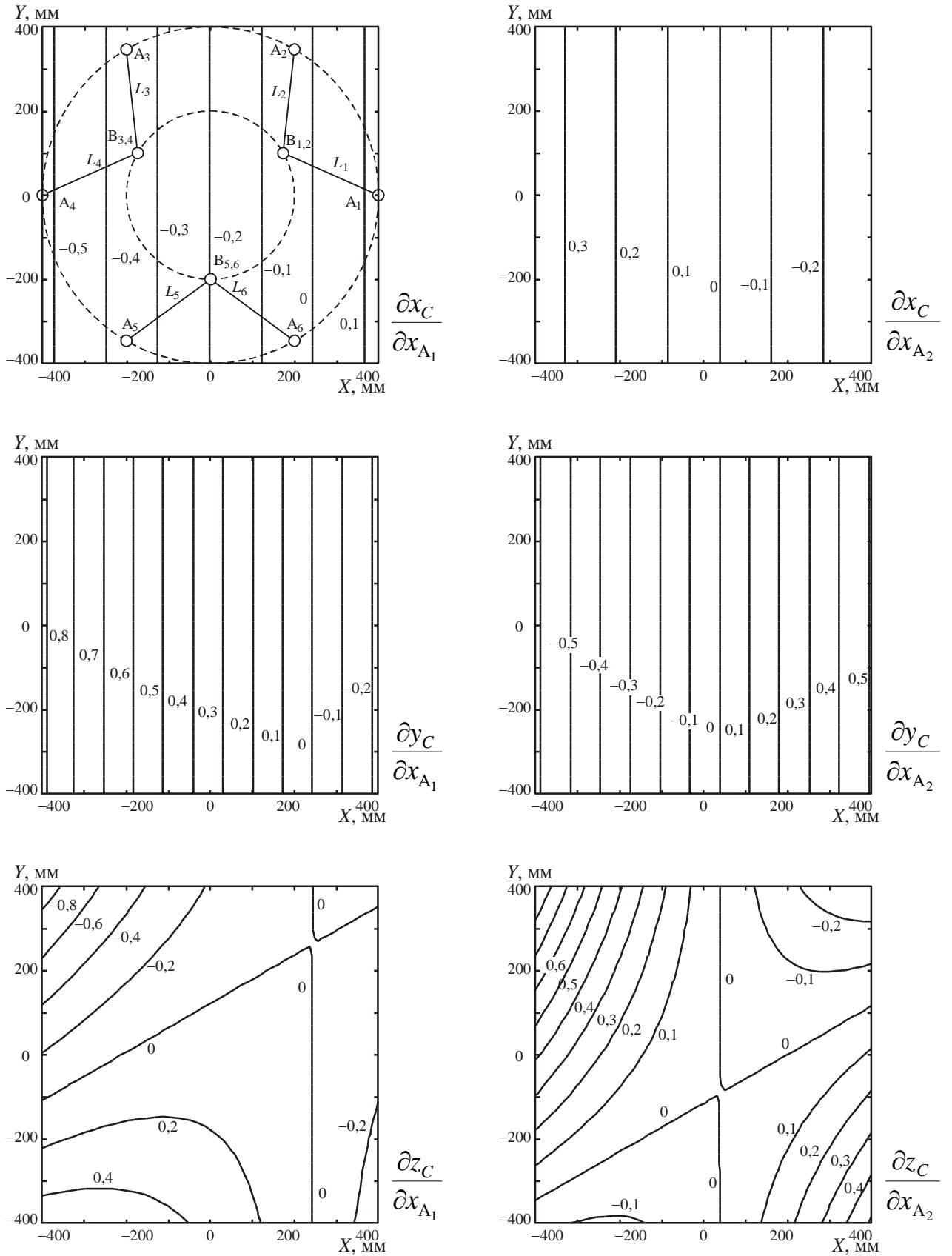
- координаты кардановых шарниров  $A_j$ ,  $j=1...6$  в системе координат  $OXYZ$ , связанной с основанием (рисунок 29);
- координаты сферических шарниров  $B_j$ ,  $j=1...6$  в системе координат  $SX'Y'Z'$ , связанной с подвижной платформой.

Знание этих координат позволяет установить связь между входными и выходными координатами МПКЦ (см. уравнения (22)).

Используемые при построении кинематической модели МПКЦ значения для перечисленных выше координат могут отличаться от координат в реальном оборудовании. Оценить влияние этого несоответствия на точность формирования траектории можно с использованием численного моделирования. В частности, моделирование позволит определить значения производных вида  $\partial x_C / \partial x_{A_j}$ .

На рисунке 180, 181 показаны поля распределения некоторых частных производных, что позволяет наглядно оценить характер влияния рассматриваемых погрешностей. Производные определены для случая  $z_C = 500$  мм,  $\psi = \vartheta = \gamma = 0$ .





**Рисунок 180 – Графики производных, характеризующие влияние погрешностей в расположении шарниров A<sub>j</sub> на погрешности выходных линейных координат**

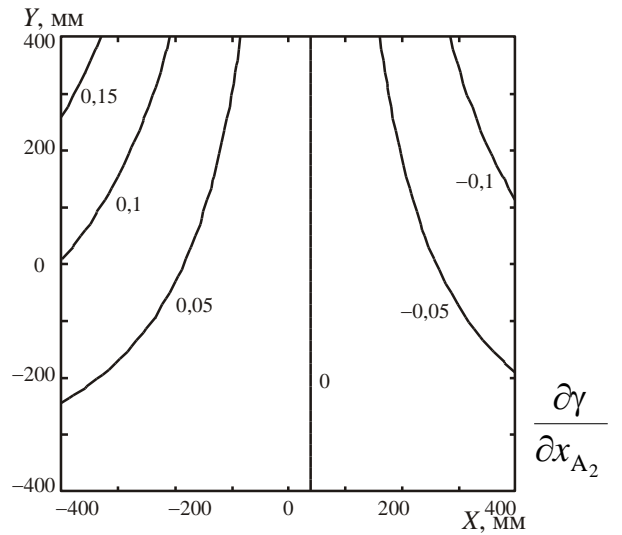
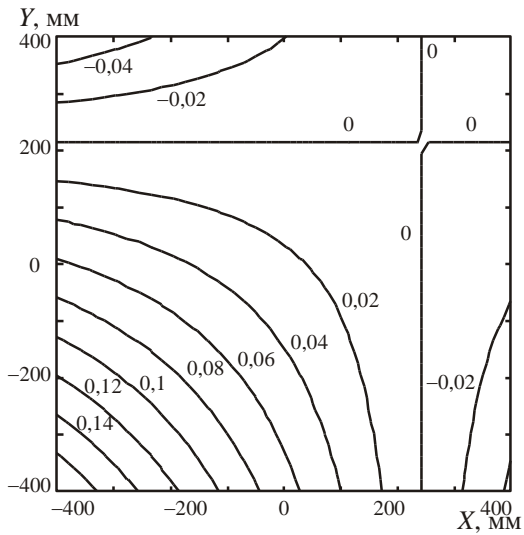
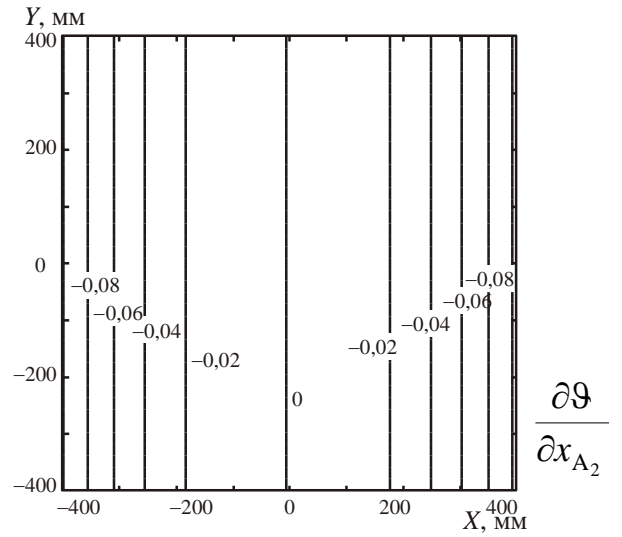
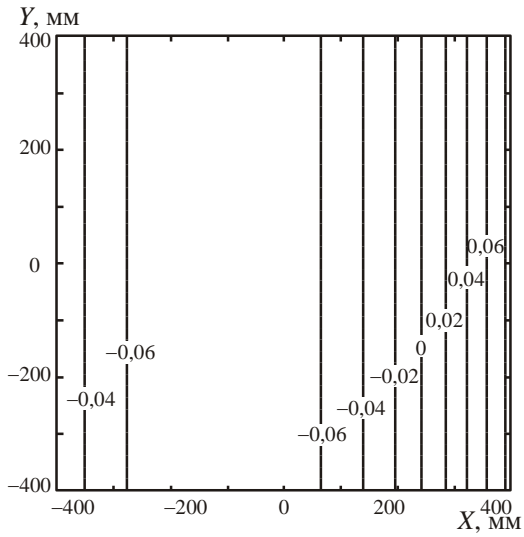
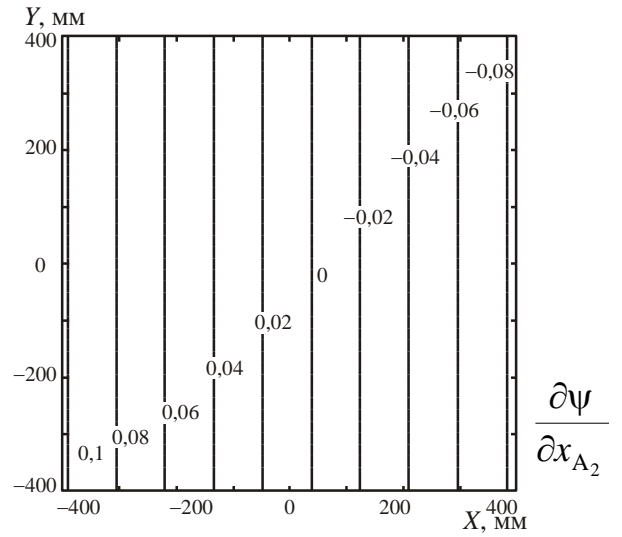
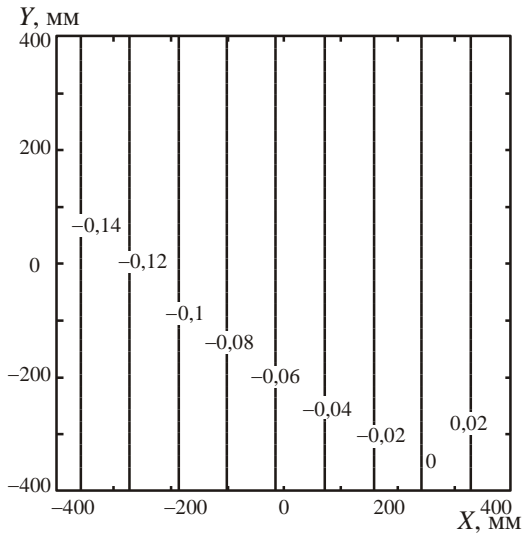
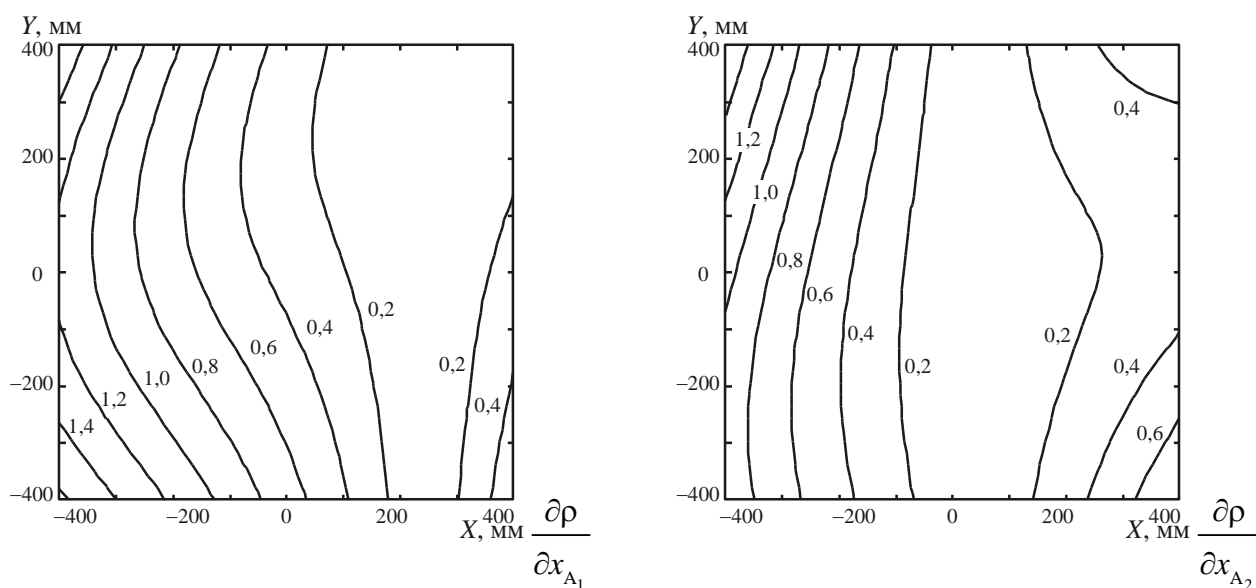


Рисунок 181 – Графики производных, характеризующие влияние погрешностей в расположении шарниров  $A_j$  на погрешности выходных угловых координат

Производные, представленные на рисунке 180, являются безразмерными. Анализ графиков показывает, что погрешности в расположении шарниров  $A_j$  создают погрешности выходных линейных координат практически такого же порядка.

Показанные на рисунке 180, 181 частные производные рассчитаны применительно к началу (производные линейных координат) и осям (производные угловых координат) связанной с подвижной платформой системы координат  $SX'Y'Z'$ . Если на платформе установлен инструмент, имеющий некоторую длину, то аналогичным образом могут быть определены погрешности пространственного положения характерной точки этого инструмента, определяемые погрешностью в расположении шарниров  $A_j$ .

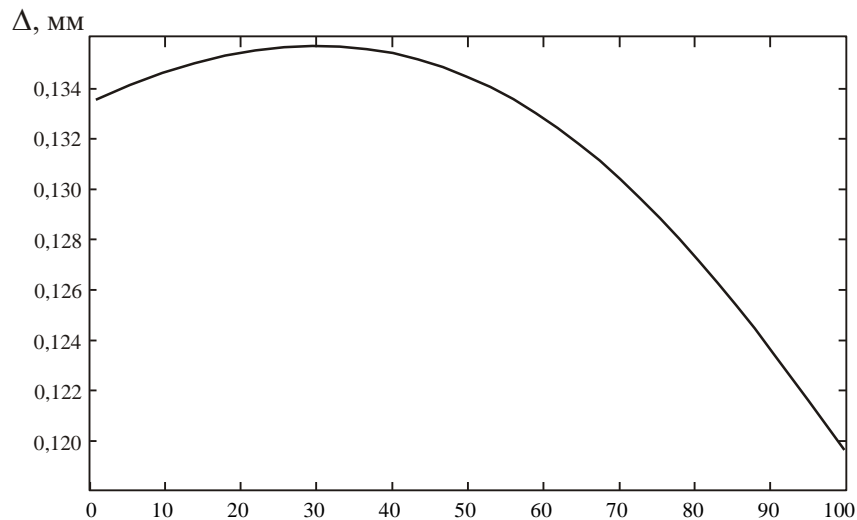
На рисунке 182 приведены поля распределения производных применительно к инструменту длиной 150 мм; при моделировании величина  $\rho$  рассчитывалась в соответствии с (145).



**Рисунок 182 – Поля распределения производных, характеризующих влияние погрешностей в расположении шарниров  $A_j$  на погрешность пространственного положения конечной точки (вершины) инструмента**

Таким образом, погрешности, вызванные несоответствием реальных координат шарниров  $A_j$  принятым для кинематической модели, могут приводить к су-

ществленным отклонениям в формируемой траектории рабочего органа (рисунок 183).

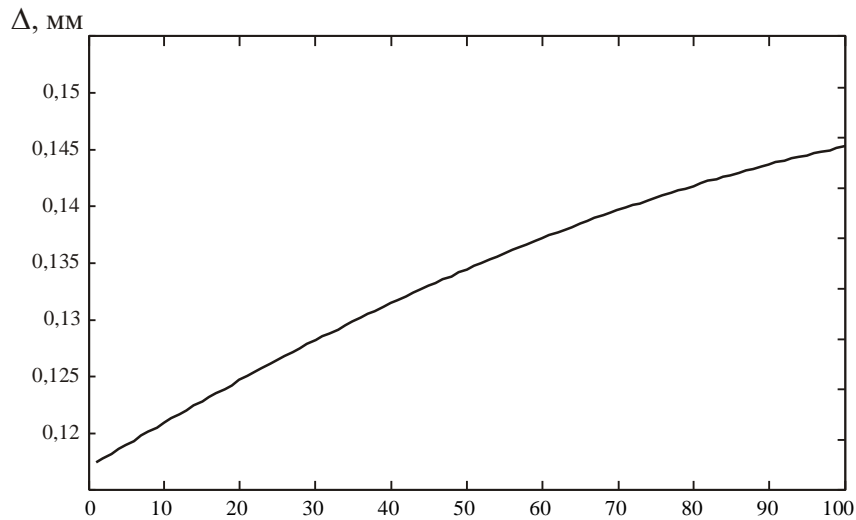


**Рисунок 183 – Погрешность отработки траектории (по линейным координатам), вызванная погрешностями в расположении шарниров  $A_j$**

Для рисунок 183 принято, что координаты каждого из шарниров  $A_j$  отличается от принятой для модели на некоторую величину, не превышающую 0,1мм. В этом случае изменение длин штанг по законам, определенным согласно модели, приведет к показанной на рисунке погрешности в формировании требуемой траектории. Погрешность  $\Delta$  применительно к линейным выходным координатам рассчитывалась как отклонение положения характерной точки инструмента длиной 150 мм от прямой, соединяющей точки, определяемые начальными значениями входных координат.

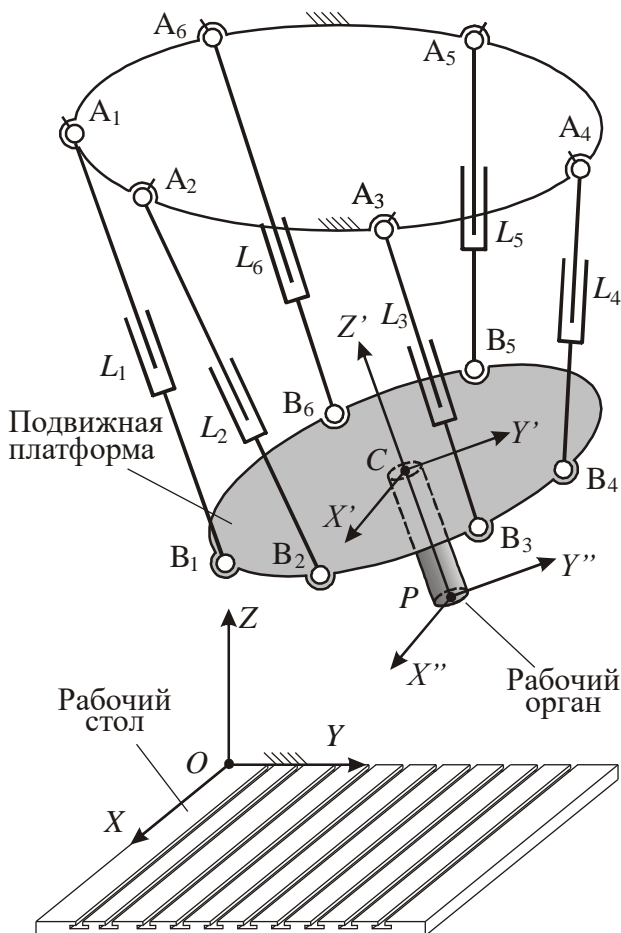
Аналогичные результаты получаются применительно к погрешности, определяемой отклонениями реального расположения сферических шарниров  $B_j$  от принятых для кинематической модели (рисунок 184).

Таким образом, несоответствие реальных координат шарниров принятым для кинематической модели способно существенно снизить точность ОПКС. Поэтому необходимо разработать методику, позволяющую проводить уточнение параметров модели МПКЦ.



**Рисунок 184 – Погрешность отработки траектории (по линейным координатам), вызванная погрешностями в расположении шарниров  $B_j$**

Определить реальные координаты шарниров, реализованных в ОПКС, можно на основе экспериментальных данных [82]. Пусть экземпляр оборудования (станок) построен на основе МПКЦ, показанного на рисунке 185. Глобальная система



**Рисунок 185 – Схема станка, построенного на основе МПКЦ типа «гексапод»**

координат  $OXYZ$  должна быть реализована конструктивно, например, связана с рабочим столом, на котором предполагается размещение заготовки.

Для определения указанных выше геометрических параметров модели параметров воспользуемся метрологической оснасткой (рисунок 186), имеющей элемент крепления к подвижной платформе и тонкую пластину, выполненную в форме равностороннего треугольника.

После установки метрологической оснастки на подвижную платформу связанная с оснасткой система координат  $PX''Y''Z''$  будет полностью определять пространственную ориентацию подвиж-

ной платформы. Примем, что в рассматриваемом случае выходными координатами являются:

- координаты точки  $P$  в глобальной системе координат  $OXYZ$  ;
- углы Крылова, определяющие разворот осей системы координат  $PX''Y''Z''$  относительно осей глобальной системы координат  $OXYZ$  .

Пусть станок находится в некотором состоянии, которое будем считать начальным. При этом состоянии могут быть измерены координаты  $(x_{S_k}, y_{S_k}, z_{S_k})$ ,  $k=1...3$  вершин  $S_k$  треугольной пластины метрологической оснастки в глобальной системе координат. Это позволит определить координаты характерной точки  $P$  как точки пересечения высот треугольной пластины:

$$x_P = \frac{1}{3}(x_{S_1} + x_{S_2} + x_{S_3}), \quad y_P = \frac{1}{3}(y_{S_1} + y_{S_2} + y_{S_3}), \quad z_P = \frac{1}{3}(z_{S_1} + z_{S_2} + z_{S_3}), \quad (173)$$

т. е. определить три выходные координаты.

Так как координаты  $(x''_{S_k}, y''_{S_k}, z''_{S_k})$  точек  $S_k$  в системе координат  $PX''Y''Z''$  известны, а пересчет их в систему координат  $OXYZ$  осуществляется с использованием матричного преобразования

$$\begin{pmatrix} x_{S_k} \\ y_{S_k} \\ z_{S_k} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & x_P \\ m_1 & m_2 & m_3 & y_P \\ n_1 & n_2 & n_3 & z_P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_{S_k} \\ y''_{S_k} \\ z''_{S_k} \\ 1 \end{pmatrix},$$

то из системы уравнений

$$\begin{cases} x_{S_k} = l_1 x''_{S_k} + l_2 y''_{S_k} + l_3 z''_{S_k} + x_P; \\ y_{S_k} = m_1 x''_{S_k} + m_2 y''_{S_k} + m_3 z''_{S_k} + y_P; \\ z_{S_k} = n_1 x''_{S_k} + n_2 y''_{S_k} + n_3 z''_{S_k} + z_P. \end{cases}$$

могут быть определены направляющие косинусы. Выражения (15) позволяют записать систему нелинейных уравнений

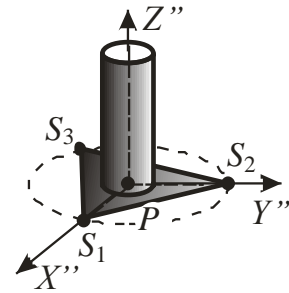


Рисунок 186 – Метрологическая оснастка

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{S_k} = (\cos \psi \cos \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma) x''_{S_k} + \sin \psi \cos \vartheta y''_{S_k} + \\ \quad + (\sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma - \cos \psi \sin \gamma) z''_{S_k} + x_P; \\ y_{S_k} = (\sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma - \sin \psi \cos \gamma) x''_{S_k} + \cos \psi \cos \vartheta y''_{S_k} + \\ \quad + (\sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma) m_3 z''_{S_k} + y_P; \\ z_{S_k} = \cos \vartheta \sin \gamma x''_{S_k} - \sin \vartheta y''_{S_k} + \cos \vartheta \cos \gamma z''_{S_k} + z_P, \end{array} \right. \quad (174)$$

которая может быть использована для определения углов Крылова. Таким образом, для начального состояния МПКЦ после измерения координат  $(x_{S_k}, y_{S_k}, z_{S_k})$  могут быть определены все шесть выходных координат.

Кинематическая модель МПКЦ, лежащего в основе рассматриваемого станка, определяется уравнениями (22). Для начального (нулевого) состояния станка уравнения кинематической модели могут быть записаны следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1^{<0>} = f_1(x_{A_1}, y_{A_1}, z_{A_1}, x''_{B_1}, y''_{B_1}, z''_{B_1}, x_P^{<0>}, y_P^{<0>}, z_P^{<0>}, \psi^{<0>}, \vartheta^{<0>}, \gamma^{<0>}); \\ \dots \\ L_6^{<0>} = f_6(x_{A_6}, y_{A_6}, z_{A_6}, x''_{B_6}, y''_{B_6}, z''_{B_6}, x_P^{<0>}, y_P^{<0>}, z_P^{<0>}, \psi^{<0>}, \vartheta^{<0>}, \gamma^{<0>}), \end{array} \right. \quad (175)$$

где функции  $f_j$  определяются уравнениями кинематической модели:

$$\begin{aligned} L_j^{<0>} = & \left\{ x''_{B_j}{}^2 + y''_{B_j}{}^2 + z''_{B_j}{}^2 + (x_P - x_{A_j})^2 + (y_P - y_{A_j})^2 + (z_P - z_{A_j})^2 + \right. \\ & + 2 \left[ (C\psi^{<0>} C\gamma^{<0>} + S\psi^{<0>} S\vartheta^{<0>} S\gamma^{<0>}) x''_{B_j} + S\psi^{<0>} C\vartheta^{<0>} y''_{B_j} \right. \\ & + (S\psi^{<0>} S\vartheta^{<0>} C\gamma^{<0>} - C\psi^{<0>} S\gamma^{<0>}) z''_{B_j} \left. \right] (x_P - x_{A_j}) + \\ & + 2 \left[ (C\psi^{<0>} S\vartheta^{<0>} S\gamma^{<0>} - S\psi^{<0>} C\gamma^{<0>}) x''_{B_j} + C\psi^{<0>} C\vartheta^{<0>} y''_{B_j} + \right. \\ & + (S\psi^{<0>} S\gamma^{<0>} + C\psi^{<0>} S\vartheta^{<0>} C\gamma) z''_{B_j} \left. \right] (y_P - y_{A_j}) + \\ & \left. + 2 \left[ C\vartheta^{<0>} S\gamma^{<0>} x''_{B_j} - S\vartheta^{<0>} y''_{B_j} + C\vartheta^{<0>} C\gamma^{<0>} z''_{B_j} \right] (z_P - z_{A_j}) \right\}^{0,5} \end{aligned}$$

Длины штанг  $L_j^{<0>}$ , стоящие в левых частях уравнений, являются неизвестными величинами. Кроме того, в уравнения системы (175) входят 36 требующих определения (уточнения) координат сферических и кардановых шарниров. Таким

образом, общее количество неизвестных величин в этих уравнениях составляет 42. Для их нахождения 6 уравнений (175) должны быть дополнены как минимум 36 независимыми уравнениями.

Для получения требующихся уравнений будем последовательно изменять длины штанг. Изменим длину первой штанги на величину  $\Delta L_1^{<1>}$ . В этом случае можно записать следующую систему уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta L_1^{<1>} = f_1(x_{A_1}, y_{A_1}, z_{A_1}, x''_{B_1}, y''_{B_1}, z''_{B_1}, x_P^{<1>}, y_P^{<1>}, z_P^{<1>}, \psi^{<1>}, \vartheta^{<1>}, \gamma^{<1>}) - L_1^{<0>} ; \\ L_2^{<0>} = f_2(x_{A_2}, y_{A_2}, z_{A_2}, x''_{B_2}, y''_{B_2}, z''_{B_2}, x_P^{<1>}, y_P^{<1>}, z_P^{<1>}, \psi^{<1>}, \vartheta^{<1>}, \gamma^{<1>}) ; \\ \dots \\ L_6^{<0>} = f_6(x_{A_6}, y_{A_6}, z_{A_6}, x''_{B_6}, y''_{B_6}, z''_{B_6}, x_P^{<1>}, y_P^{<1>}, z_P^{<1>}, \psi^{<1>}, \vartheta^{<1>}, \gamma^{<1>}). \end{array} \right. \quad (176)$$

Для данного состояния станка могут быть измерены координаты  $(x_{S_k}, y_{S_k}, z_{S_k})$ ,  $k=1...3$ , что позволит с использованием (173) и (174) определить значения выходных координат  $x_C^{<1>}, y_C^{<1>}, z_C^{<1>}, \psi^{<1>}, \vartheta^{<1>}, \gamma^{<1>}$ . В уравнениях (176) в качестве неизвестных будут присутствовать те же 42 величины, как и в уравнениях (175).

Если теперь изменить длину второй штанги на величину  $\Delta L_2^{<2>}$ , то можно записать еще 6 уравнений, аналогичных (176):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta L_1^{<1>} = f_1(x_{A_1}, y_{A_1}, z_{A_1}, x''_{B_1}, y''_{B_1}, z''_{B_1}, x_P^{<2>}, y_P^{<2>}, z_P^{<2>}, \psi^{<2>}, \vartheta^{<2>}, \gamma^{<2>}) - L_1^{<0>} ; \\ \Delta L_2^{<2>} = f_2(x_{A_2}, y_{A_2}, z_{A_2}, x''_{B_2}, y''_{B_2}, z''_{B_2}, x_P^{<2>}, y_P^{<2>}, z_P^{<2>}, \psi^{<2>}, \vartheta^{<2>}, \gamma^{<2>}) - L_2^{<0>} ; \\ L_3^{<0>} = f_3(x_{A_3}, y_{A_3}, z_{A_3}, x''_{B_3}, y''_{B_3}, z''_{B_3}, x_P^{<2>}, y_P^{<2>}, z_P^{<2>}, \psi^{<2>}, \vartheta^{<2>}, \gamma^{<2>}) ; \\ \dots \\ L_6^{<0>} = f_6(x_{A_6}, y_{A_6}, z_{A_6}, x''_{B_6}, y''_{B_6}, z''_{B_6}, x_P^{<2>}, y_P^{<2>}, z_P^{<2>}, \psi^{<2>}, \vartheta^{<2>}, \gamma^{<2>}). \end{array} \right.$$

В результате последовательного изменения длин всех 6 штанг будут получены 42 нелинейных уравнения, которые можно сгруппировать в шесть систем уравнений:





$$\left\{ \begin{array}{l} f_4(x_{A_4}, y_{A_4}, z_{A_4}, x''_{B_4}, y''_{B_4}, z''_{B_4}, x_P^{<0>}, y_P^{<0>}, z_P^{<0>}, \psi^{<0>}, \vartheta^{<0>}, \gamma^{<0>}) - L_4^{<0>} = 0; \\ f_4(x_{A_4}, y_{A_4}, z_{A_4}, x''_{B_4}, y''_{B_4}, z''_{B_4}, x_P^{<1>}, y_P^{<1>}, z_P^{<1>}, \psi^{<1>}, \vartheta^{<1>}, \gamma^{<1>}) - L_4^{<0>} = 0; \\ f_4(x_{A_4}, y_{A_4}, z_{A_4}, x''_{B_4}, y''_{B_4}, z''_{B_4}, x_P^{<2>}, y_P^{<2>}, z_P^{<2>}, \psi^{<2>}, \vartheta^{<2>}, \gamma^{<2>}) - L_4^{<0>} = 0; \\ f_4(x_{A_4}, y_{A_4}, z_{A_4}, x''_{B_4}, y''_{B_4}, z''_{B_4}, x_P^{<3>}, y_P^{<3>}, z_P^{<3>}, \psi^{<3>}, \vartheta^{<3>}, \gamma^{<3>}) - L_4^{<0>} = 0; \\ f_4(x_{A_4}, y_{A_4}, z_{A_4}, x''_{B_4}, y''_{B_4}, z''_{B_4}, x_P^{<4>}, y_P^{<4>}, z_P^{<4>}, \psi^{<4>}, \vartheta^{<4>}, \gamma^{<4>}) - L_4^{<0>} = \Delta L_4^{<4>}; \\ f_4(x_{A_4}, y_{A_4}, z_{A_4}, x''_{B_4}, y''_{B_4}, z''_{B_4}, x_P^{<5>}, y_P^{<5>}, z_P^{<5>}, \psi^{<5>}, \vartheta^{<5>}, \gamma^{<5>}) - L_4^{<0>} = \Delta L_4^{<4>}; \\ f_4(x_{A_4}, y_{A_4}, z_{A_4}, x''_{B_4}, y''_{B_4}, z''_{B_4}, x_P^{<6>}, y_P^{<6>}, z_P^{<6>}, \psi^{<6>}, \vartheta^{<6>}, \gamma^{<6>}) - L_4^{<0>} = \Delta L_4^{<4>}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_5(x_{A_5}, y_{A_5}, z_{A_5}, x''_{B_5}, y''_{B_5}, z''_{B_5}, x_P^{<0>}, y_P^{<0>}, z_P^{<0>}, \psi^{<0>}, \vartheta^{<0>}, \gamma^{<0>}) - L_5^{<0>} = 0; \\ f_5(x_{A_5}, y_{A_5}, z_{A_5}, x''_{B_5}, y''_{B_5}, z''_{B_5}, x_P^{<1>}, y_P^{<1>}, z_P^{<1>}, \psi^{<1>}, \vartheta^{<1>}, \gamma^{<1>}) - L_5^{<0>} = 0; \\ f_5(x_{A_5}, y_{A_5}, z_{A_5}, x''_{B_5}, y''_{B_5}, z''_{B_5}, x_P^{<2>}, y_P^{<2>}, z_P^{<2>}, \psi^{<2>}, \vartheta^{<2>}, \gamma^{<2>}) - L_5^{<0>} = 0; \\ f_5(x_{A_5}, y_{A_5}, z_{A_5}, x''_{B_5}, y''_{B_5}, z''_{B_5}, x_P^{<3>}, y_P^{<3>}, z_P^{<3>}, \psi^{<3>}, \vartheta^{<3>}, \gamma^{<3>}) - L_5^{<0>} = 0; \\ f_5(x_{A_5}, y_{A_5}, z_{A_5}, x''_{B_5}, y''_{B_5}, z''_{B_5}, x_P^{<4>}, y_P^{<4>}, z_P^{<4>}, \psi^{<4>}, \vartheta^{<4>}, \gamma^{<4>}) - L_5^{<0>} = 0; \\ f_5(x_{A_5}, y_{A_5}, z_{A_5}, x''_{B_5}, y''_{B_5}, z''_{B_5}, x_P^{<5>}, y_P^{<5>}, z_P^{<5>}, \psi^{<5>}, \vartheta^{<5>}, \gamma^{<5>}) - L_5^{<0>} = \Delta L_5^{<5>}; \\ f_5(x_{A_5}, y_{A_5}, z_{A_5}, x''_{B_5}, y''_{B_5}, z''_{B_5}, x_P^{<6>}, y_P^{<6>}, z_P^{<6>}, \psi^{<6>}, \vartheta^{<6>}, \gamma^{<6>}) - L_5^{<0>} = \Delta L_5^{<5>}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_6(x_{A_6}, y_{A_6}, z_{A_6}, x''_{B_6}, y''_{B_6}, z''_{B_6}, x_P^{<0>}, y_P^{<0>}, z_P^{<0>}, \psi^{<0>}, \vartheta^{<0>}, \gamma^{<0>}) - L_6^{<0>} = 0; \\ f_6(x_{A_6}, y_{A_6}, z_{A_6}, x''_{B_6}, y''_{B_6}, z''_{B_6}, x_P^{<1>}, y_P^{<1>}, z_P^{<1>}, \psi^{<1>}, \vartheta^{<1>}, \gamma^{<1>}) - L_6^{<0>} = 0; \\ f_6(x_{A_6}, y_{A_6}, z_{A_6}, x''_{B_6}, y''_{B_6}, z''_{B_6}, x_P^{<2>}, y_P^{<2>}, z_P^{<2>}, \psi^{<2>}, \vartheta^{<2>}, \gamma^{<2>}) - L_6^{<0>} = 0; \\ f_6(x_{A_6}, y_{A_6}, z_{A_6}, x''_{B_6}, y''_{B_6}, z''_{B_6}, x_P^{<3>}, y_P^{<3>}, z_P^{<3>}, \psi^{<3>}, \vartheta^{<3>}, \gamma^{<3>}) - L_6^{<0>} = 0; \\ f_6(x_{A_6}, y_{A_6}, z_{A_6}, x''_{B_6}, y''_{B_6}, z''_{B_6}, x_P^{<4>}, y_P^{<4>}, z_P^{<4>}, \psi^{<4>}, \vartheta^{<4>}, \gamma^{<4>}) - L_6^{<0>} = 0; \\ f_6(x_{A_6}, y_{A_6}, z_{A_6}, x''_{B_6}, y''_{B_6}, z''_{B_6}, x_P^{<5>}, y_P^{<5>}, z_P^{<5>}, \psi^{<5>}, \vartheta^{<5>}, \gamma^{<5>}) - L_6^{<0>} = 0; \\ f_6(x_{A_6}, y_{A_6}, z_{A_6}, x''_{B_6}, y''_{B_6}, z''_{B_6}, x_P^{<6>}, y_P^{<6>}, z_P^{<6>}, \psi^{<6>}, \vartheta^{<6>}, \gamma^{<6>}) - L_6^{<0>} = \Delta L_6^{<6>}. \end{array} \right.$$

Численное решение каждой из сформированных систем нелинейных уравнений позволит определить 7 подлежащих уточнению параметров модели МПКЦ: длину одной штанги и координаты соединяемых ею шарниров. Координаты кардановых шарниров будут определены в глобальной системе координат  $OXYZ$ ; ко-

ординаты сферических шарниров – в связанной с метрологической оснасткой системе координат  $PX "Y "Z "$ .

В рассмотренной ранее кинематической модели МПКЦ типа «гексапод» координаты сферических шарниров задаются в связанной с подвижной платформой системе координат  $CX 'Y 'Z '$ . Пересчет этих координат из системы координат  $PX "Y "Z "$  в  $CX 'Y 'Z '$  легко осуществим, если известно пространственное положение одной системы координат относительно другой. Наиболее простой (с точки зрения пересчета координат) случай показан на рисунке 185: соответствующие оси систем координат  $PX "Y "Z "$  и  $CX 'Y 'Z '$  сонаправлены, оси  $CZ '$  и  $PZ "$  совпадают, расстояние между точками  $C$  и  $P$  известно. Выполнение этих условий должно обеспечиваться конструкцией подвижной платформы и устанавливаемой на ней метрологической оснастки.

Численное моделирование в пакете MATLAB показало работоспособность описанной методики идентификации параметров кинематической модели: при принятой точности измерения координат  $(x_{S_k}, y_{S_k}, z_{S_k})$ ,  $k=1...3$  вершин  $S_k$  треугольной пластины метрологической оснастки в 0,01 мм координаты шарниров определяются с погрешностью 0,03 мм.

Если для описания МПКЦ используется уточненная кинематическая модель, рассмотренная в разделе 2.2.5, то определению подлежат следующие параметры:

- составляющие векторов  $\mathbf{R}_{0j}$ , определяющих координаты точек  $A_j$ ,  $j=1...6$  в глобальной системе координат;
- составляющие векторов  $\mathbf{R}'_j$ , определяющих координаты точек  $A'_j$ ,  $j=1...6$  в СК  $A_j x_j y_j z_j$ ;
- составляющие векторов  $\mathbf{R}''_j$ , определяющих координаты точек  $A''_j$ ,  $j=1...6$  в СК  $A'_j x'_j y'_j z'_j$ ;
- составляющие векторов  $\mathbf{R}^*$ , – определяющих координаты точек  $A^*_j$ ,  $j=1...6$  в СК  $A''_j x''_j y''_j z''_j$ ;

– координаты сферических шарниров  $B_j$ ,  $j=1...6$  в системе координат  $CX'Y'Z'$ , связанной с подвижной платформой.

С учетом необходимости определения длин штанг для некоторого исходного состояния, общее количество подлежащих уточнению параметров модели составляет 96. Описанная выше методика может быть расширена на такое количество параметров при соответствующем увеличении количества измерений координат  $(x_{S_k}, y_{S_k}, z_{S_k})$ ,  $k=1...3$  вершин треугольной пластины метрологической оснастки.

Процесс получения экспериментальных данных для проведения идентификации может быть автоматизирован, если в качестве рабочего органа ОПКС выступает специализированная измерительная головка. Данный подход реализован в координатно-измерительных машинах фирмы «Лапик» [53].

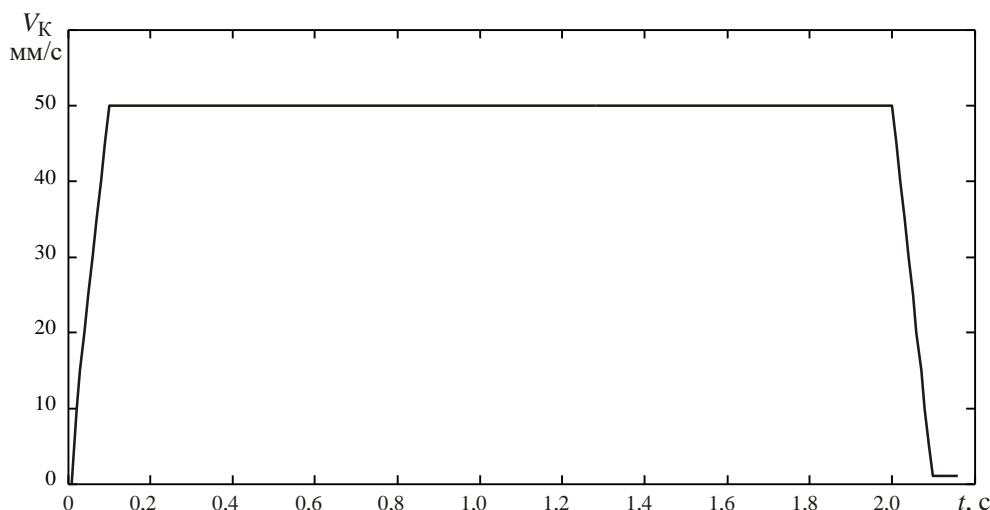
Рассмотренная в разделе методика идентификации параметров кинематической модели МПКЦ типа «гексапод» была реализована применительно к многокоординатному динамометру-позиционеру [77, 91], разработанному в Южно-Уральском государственном университете (Приложение Е).

### **5.2.5. Уменьшение погрешностей формирования траектории, вызванных дискретностью приводов**

Рассмотренный в разделе 5.2.2 метод интерполяции на постоянной несущей частоте предполагает, что за период  $h$  длина штанги должна измениться на целое число дискрет  $\Delta_{IP}$ . Чаще всего рассчитанная величина не является целой, поэтому она усекается, а остаток накапливается в специальном регистре. Когда значение в этом регистре превысит  $\Delta_{IP}$ , оно уменьшается на  $\Delta_{IP}$ , а целочисленное (в единицах  $\Delta_{IP}$ ) значение изменения длины штанги в следующем периоде несущей увеличивается на  $\Delta_{IP}$ . Таким образом, реальная скорость изменения длины штанги на текущем периоде несущей частоты либо меньше расчетной (при усечении величины изменения длины штанги), либо больше (при добавлении  $\Delta_{IP}$  к величине изменения длины штанги).

Моделирование данного метода формирования траектории проводилось в среде MATLAB; при моделировании принято, что  $\Delta_{IP} = 0,001$  мм.

Как показывает рисунок 187, общий характер изменения во времени контурной скорости практически не меняется по сравнению с показанным на рисунке 176. Однако характер изменения выходных координат изменяется существенно (рисунок 188).

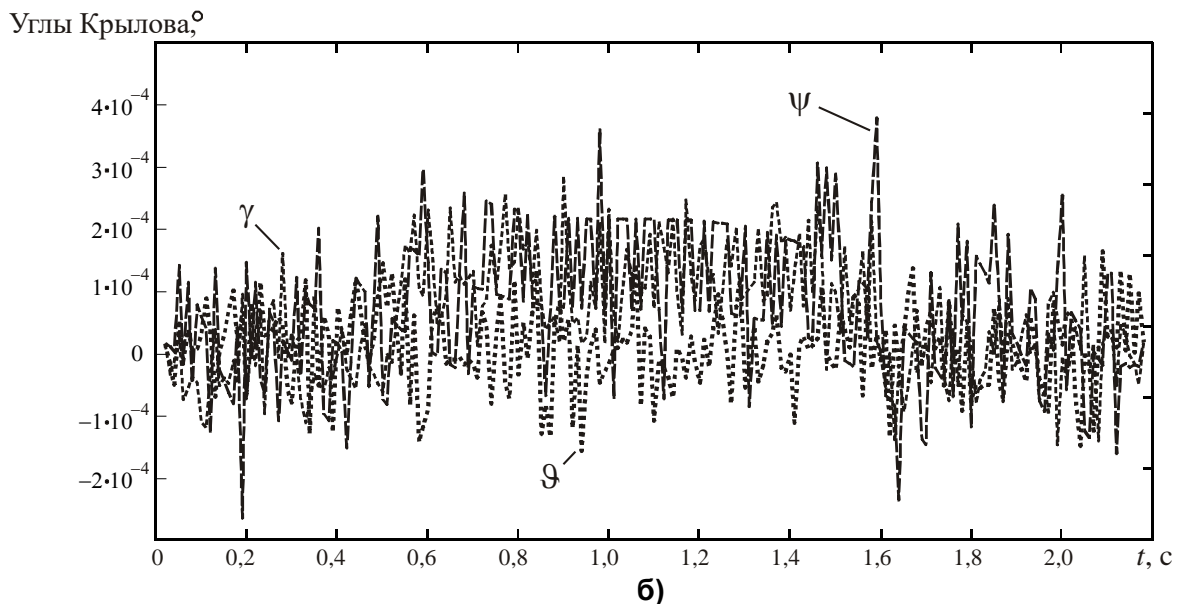
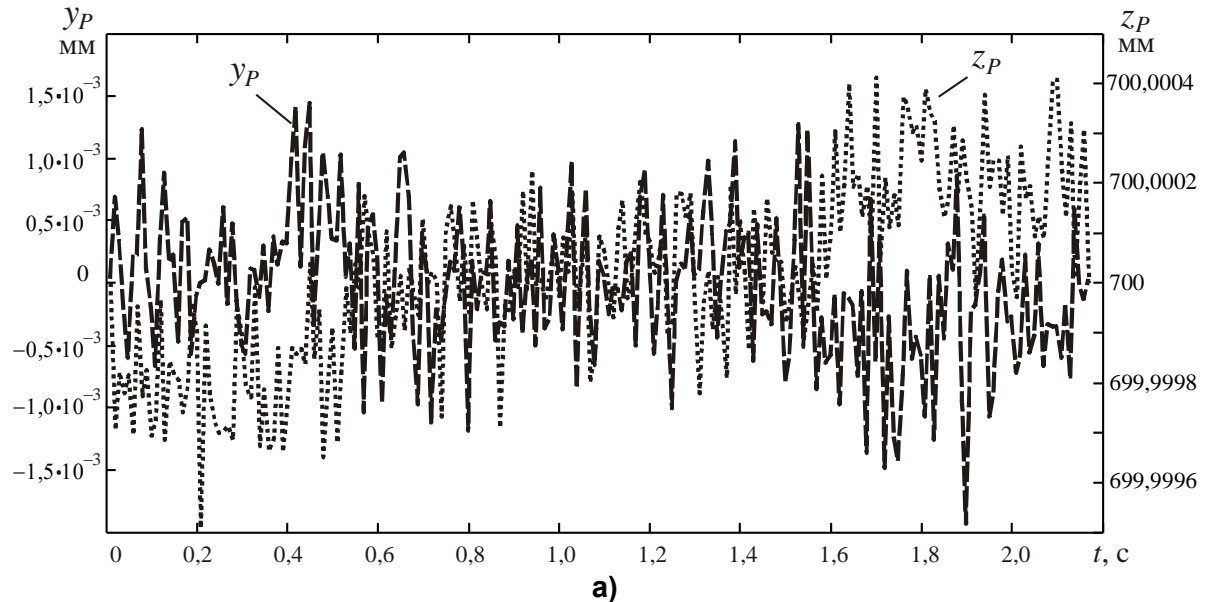


**Рисунок 187 – Закон изменения контурной скорости, полученный при моделировании с учетом дискретного характера изменения длин штанг**

Погрешность в формировании траектории превысила принятую при моделировании величину  $\rho_{\text{MAX}} = 0,001\text{ мм}$  (рисунок 189).

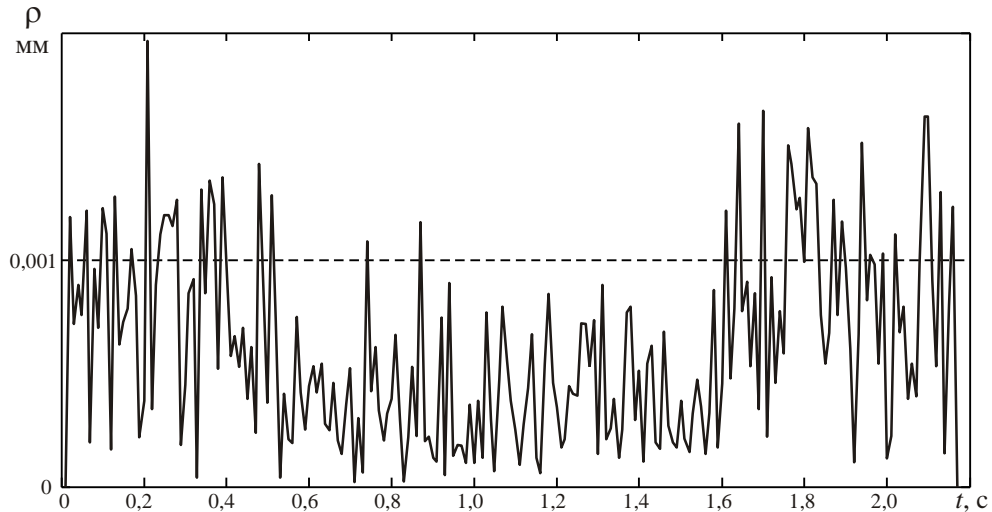
Помимо несоответствия реальных текущих скоростей изменения длин штанг в текущем периоде расчетным, влияние дискретности входных координат проявляется в несовпадении используемых при расчетах координат начальной точки траектории с действительным ее положением. При выполненном ранее моделировании (см. рисунки 177–179) принято, что начальная точка имеет координаты  $(-50, 0, 700, 0, 0, 0)$ . В соответствии с кинематической моделью МПКЦ этим выходным координатам соответствуют следующие длины штанг:  $L_1 = 623,7911728445\text{ мм}$ ,  $L_2 = 607,5487036598\text{ мм}$ ,  $L_3 = 603,1222458757\text{ мм}$ ,  $L_4 = 586,3074649620\text{ мм}$ ,  $L_5 = 588,5880863511\text{ мм}$ ,  $L_6 = 621,6397151039\text{ мм}$ . Учет дискретности входных координат методом усечения приводит к следующим длинам штанг:  $L_1 = 623,791\text{ мм}$ ,  $L_2 = 607,548\text{ мм}$ ,  $L_3 = 603,122\text{ мм}$ ,  $L_4 = 586,307\text{ мм}$ ,  $L_5 = 588,588\text{ мм}$ ,  $L_6 = 621,639\text{ мм}$  и соответствующим им выходным координатам

( $49,9997$ ,  $2,6542 \cdot 10^{-4}$ ,  $699,9996 \cdot 10^{-4}$ ,  $-1,9999 \cdot 10^{-4}$ ,  $-6,3184 \cdot 10^{-6}$ ,  $4,6194 \cdot 10^{-6}$ ). Следовательно, даже в начальной точке траектории будет наблюдаться погрешность в формировании траектории, равная  $\rho = 4,9166 \cdot 10^{-4}$  мм. Анализ показывает (рисунок 190, целочисленность изменения длин штанг не учитывается), что данная погрешность при обработке траектории практически не меняется.

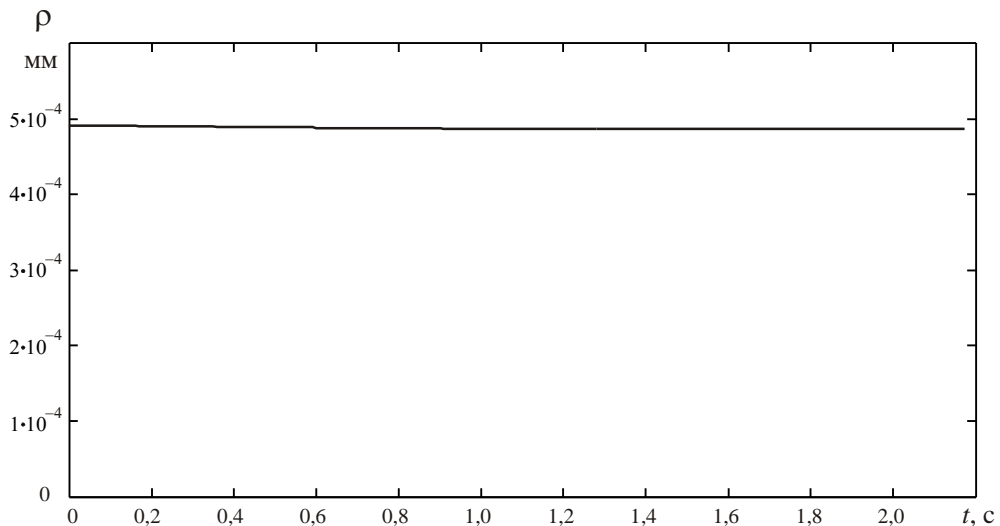


**Рисунок 188 – Изменения выходных координат: а) – линейных, б) – угловых**

Моделирование показывает (рисунок 190, приняты расчетные скорости изменения длин штанг), что данная погрешность, имеющаяся в начальной точке траектории, при дальнейшей обработке траектории с использованием описанного выше алгоритма не компенсируется.



**Рисунок 189 – Погрешность формирования траектории (по линейным координатам) при дискретном характере изменения длин штанг**

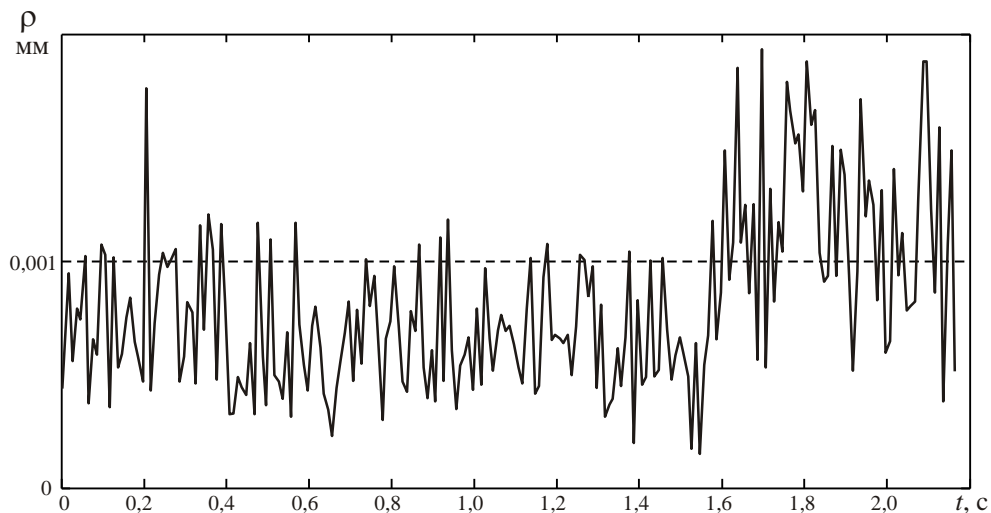


**Рисунок 190 – Отсутствие компенсации погрешности, присутствующей в начальной точке траектории**

Результаты моделирование с учетом обеих составляющих влияния дискретности входных координат на точность формирования траектории (несоответствие реальных скоростей изменения длин штанг расчетным и отличие реальной начальной точки траектории от требуемой) показаны на рисунке 191.

Очевидно, что негативное влияние этих составляющих должно быть уменьшено. С этой целью воспользуемся подходом, аналогичным используемому ранее при формировании траектории с использованием метода оценочной функции (см. раздел 5.2.1).

Рассмотрим участок траектории рабочего органа ОПКС, формируемый в течение произвольного периода  $h$  несущей частоты. За этот интервал времени штанга  $L_j$  должна изменить свою длину по некоторому требуемому закону, в общем случае нелинейному. Согласно описанному выше алгоритму управления на постоянной несущей частоте требуемый нелинейный закон изменения длины штанги должен быть заменен кусочно-линейным, обеспечивающим на периоде  $h$  постоянство контурной скорости.

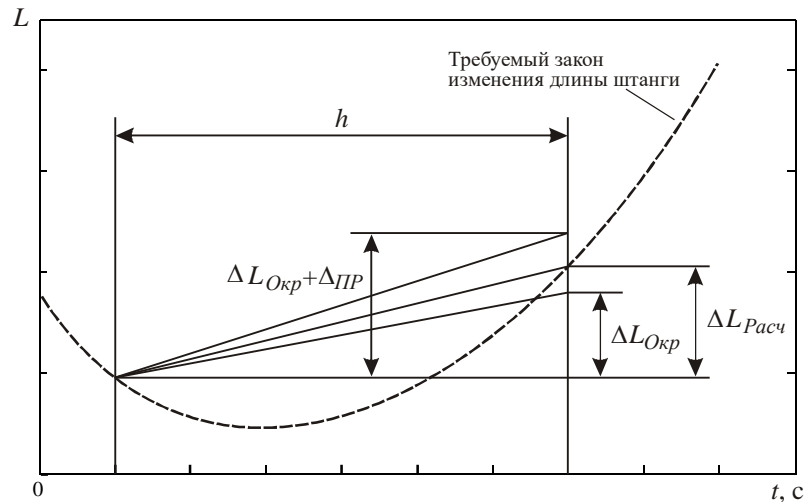


**Рисунок 191 – Погрешность формирования траектории (по линейным координатам) с учетом несоответствия реальных скоростей изменения длин штанг расчетным и отличия реальной начальной точки траектории от требуемой**

На рассматриваемом периоде несущей частоты длина  $j$ -й штанги должна измениться на величину  $\Delta L_{Расч}$  (рисунок 192), определяемую в ходе расчетов с использованием аналитической зависимости для требуемого закона изменения длины этой штанги. Данное расчетное значение в общем случае содержит в себе не целое количество величин  $\Delta L_{ДР}$ , определяемых дискретностью привода. Округлением (усечением) до целого количества  $\Delta L_{ДР}$  можно получить значение  $\Delta L_{Окр}$ , которое можно использовать для определения скорости изменения длины штанги на текущем периоде:  $V_j = \frac{\Delta L_{Окр}}{h}$ . Остаток  $\Delta L_{Расч} - \Delta L_{Окр}$  накапливается в соответствующем регистре. Такой подход реализуется при управлении на постоянной частоте применительно к оборудованию классических компоновочных схем. Однако как показали представленные выше результаты моделирования, реализация



описанного подхода применительно к ОПКС приводит к погрешностям в формировании траектории, существенно превосходящим величину дискретности привода  $\Delta_{\text{ПР}}$  (см. рисунок 189). Вызвано это нелинейными связями между входными (длины штанг) и выходными координатами.



**Рисунок 192 – Округление количества дискрет  $\Delta_{\text{ПР}}$  в сторону уменьшения (усечение), или увеличения**

Уменьшения погрешности формирования траектории можно добиться за счет дополнительного анализа, связанного с расчетом выходных координат для текущих длин штанг в соответствие с принятой математической моделью МПКЦ.

На рассматриваемом периоде несущей частоты расчетное значение изменения длины штанги  $\Delta L_{\text{Расч}}$  может быть округлено до целого количества  $\Delta_{\text{ПР}}$  как в сторону уменьшения (значение  $\Delta L_{\text{Окр}}$  на рисунке 192), так и в сторону увеличения (значение  $\Delta L_{\text{Окр}} + \Delta_{\text{ПР}}$  на рисунке 192). Следовательно, длина штанги в конце  $k$ -го периода несущей частоты равна

$$L^{<k>} = L^{<k-1>} + \Delta L^*,$$

где  $\Delta L^* = \Delta L_{\text{Окр}}$  или  $\Delta L^* = \Delta L_{\text{Окр}} + \Delta_{\text{ПР}}$ .

Каждому из двух значений длины  $L^{<k>}$ , будет соответствовать свой набор выходных координат, для которых можно определить значение погрешности  $\rho$  (145).

Округление в большую и меньшую сторону для каждой из шести штанг МПКЦ типа «гексапод» позволит получить массив возможных положений рабочего органа в конце рассматриваемого периода несущей частоты. Массив будет состоять из 64 векторов выходных координат  $\mathbf{Y}_{ВЫХ}$ .

Если для каждого вектора  $\mathbf{Y}_{ВЫХ}$  определить значение погрешности  $\rho$ , то, проведя анализ значений  $\rho$ , можно определить изменения длин штанг на текущем периоде несущей частоты, которые обеспечивают минимальное отклонение линейных выходных координат от требуемой траектории.

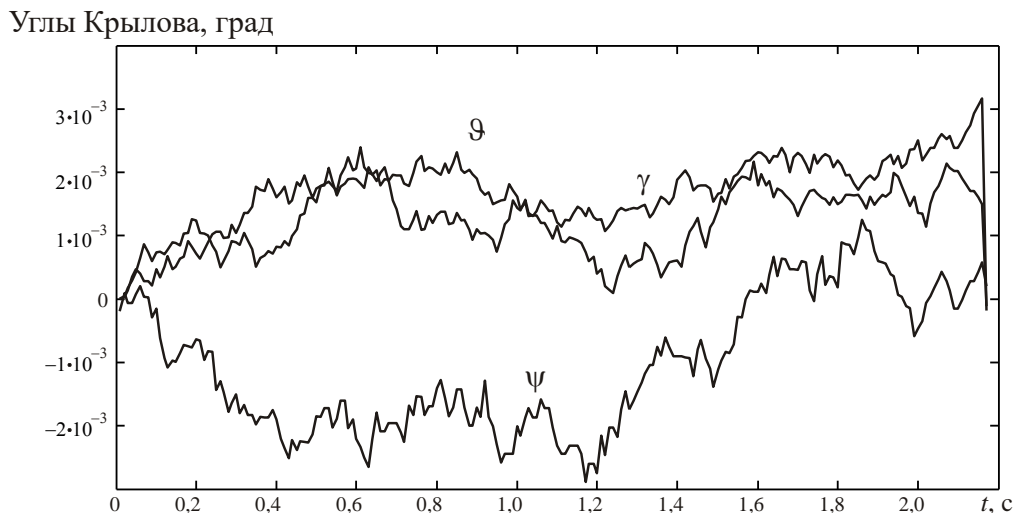
На рисунке 193 показаны результаты моделирования формирования траектории с использованием алгоритма, минимизирующего погрешность в формировании траектории описанным методом. Моделирование проводилось в среде MATLAB. Как и рассмотренных ранее примерах принято, что начальной точке траектории соответствуют выходные координаты  $(-50, 0, 700, 0, 0, 0)$ , конечной –  $(50, 0, 700, 0, 0, 0)$ , номинальная контурная скорость  $V_K^{НОМ} = 50 \text{ мм/с}$ ,  $\Delta_{ДП} = 0,001 \text{ мм}$ . Сравнение с рисунком 191 показывает существенное (практически на порядок) уменьшение погрешности  $\rho$ .

Следует отметить, что использование данного метода позволяет уже на первом периоде несущей частоты устранить негативное влияние на точность формирования траектории отличие реальных координат начальной точки траектории от используемых в расчетах. Конечная точка траектории будет получена с учетом минимума ее отклонения (для линейных выходных координат) от требуемой.

В рассматриваемом методе минимизация погрешности формирования траектории рабочего органа осуществляется за счет анализа погрешности  $\rho$ , характеризующей отклонение линейных выходных координат от требуемых значений. Значения угловых выходных координат при этом в анализе не участвуют. На рисунке 194 показаны значения угловых выходных координат, полученные при моделировании движения рабочего органа по заданной выше траектории, для которой требуемые угловые выходные координаты равны нулю.



**Рисунок 193 – Погрешность формирования траектории (по линейным координатам) при использовании анализа значений погрешности  $\rho$  для элементов массива возможных положений рабочего органа в конце каждого периода несущей**



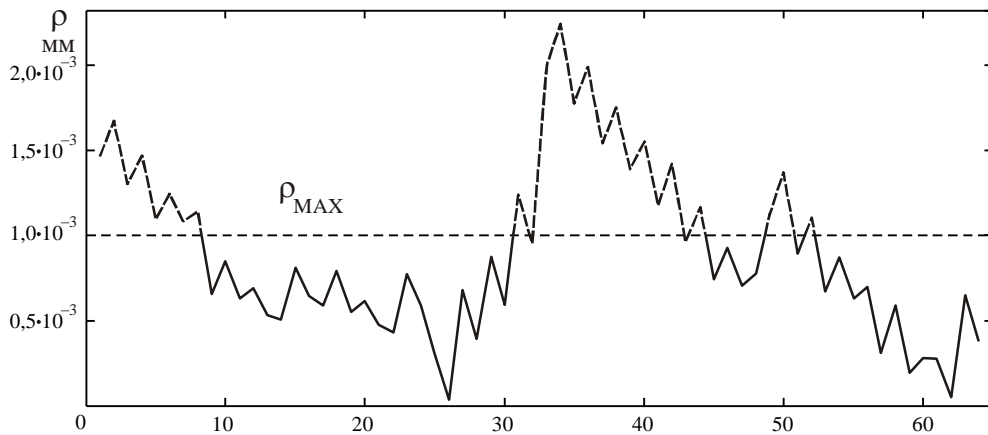
**Рисунок 194 – Характер изменения выходных угловых координат (требуемые значения этих координат равны нулю)**

При реализации энергоэффективного управления (см. главу 3) необходимо осуществлять изменение выходных угловых координат по требуемым законам. На рисунке 195 показаны значения погрешностей  $\rho$ , полученные при анализе 64 возможных комбинаций длин штанг МПКЦ в конце произвольного периода несущей частоты. Видно, что для достаточно большого количества комбинаций выполняется условие  $\rho \leq \rho_{\text{MAX}} = 0,001 \text{ мм}$ .

Среди комбинаций длин штанг, обеспечивающих  $\rho \leq \rho_{\text{MAX}} = 0,001 \text{ мм}$ , можно найти такую, для которой

$$(\psi - \psi_{\text{треб}})^2 + (\vartheta - \vartheta_{\text{треб}})^2 + (\gamma - \gamma_{\text{треб}})^2 \rightarrow \min ,$$

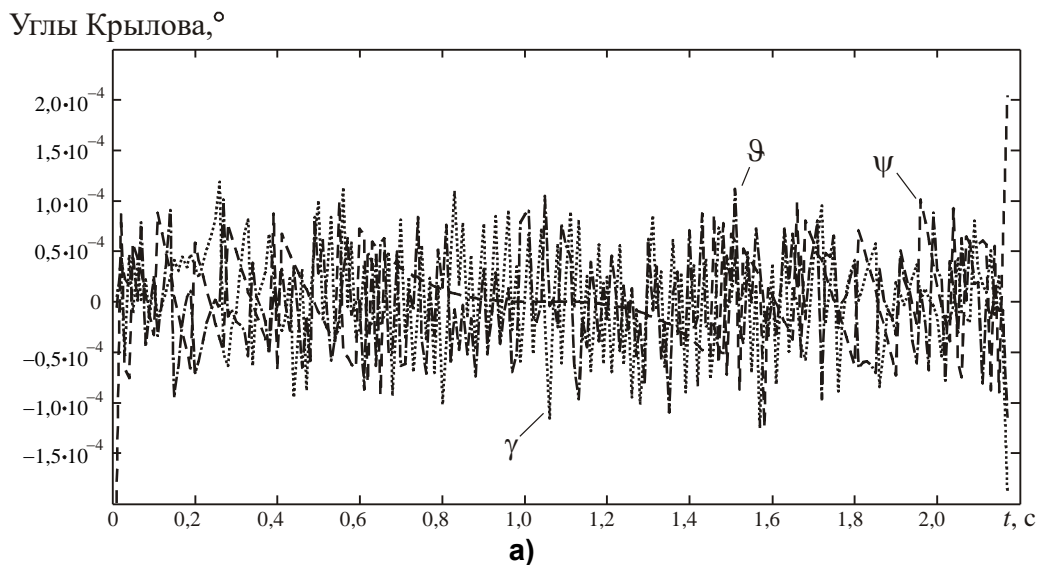
что позволит минимизировать погрешности в обработке угловых выходных координат при соблюдении условия для точности обработки линейных выходных координат.



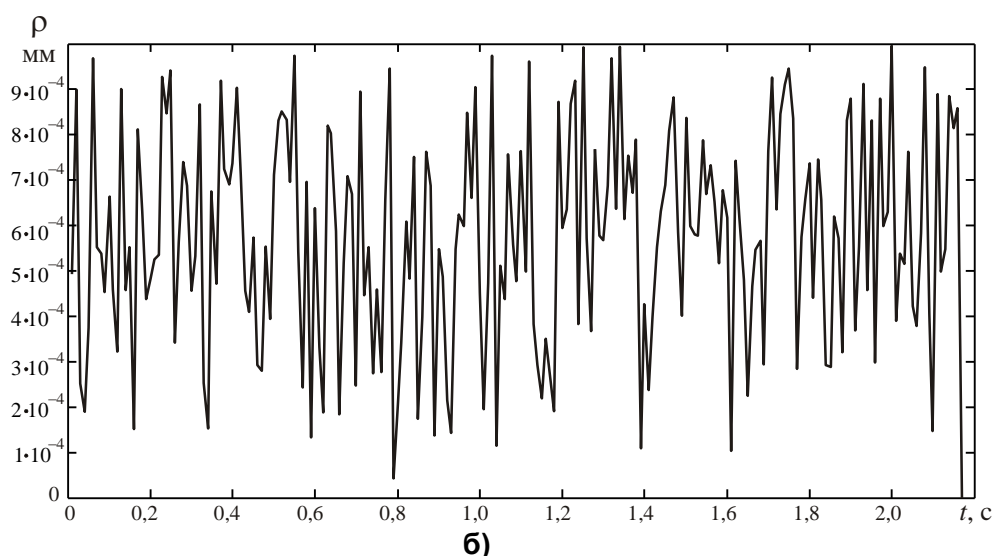
**Рисунок 195 – Возможность выполнения условия  $\rho \leq \rho_{\text{MAX}}$  для большого количества комбинаций длин штанг в конце периода несущей частоты**

На рисунке 196 показаны результаты моделирования для случая минимизации отклонений угловых линейных координат от требуемых, которые были приняты нулевыми.

Приведенные оценки точности формирования траектории не совсем корректны, так как получены при рассмотрении только конечной точки траектории для каждого из периодов несущей частоты. Погрешности положения рабочего органа в промежуточных точках не рассчитывались.



**Рисунок 196 – Результаты моделирования для случая минимизации отклонений угловых координат от требуемых: а) – значения выходных угловых координат (требуемые значения равны нулю), б) – отклонения выходных линейных координат**



б)  
Окончание рисунка 196

На рисунке 197, а показан график погрешностей  $\rho$ , рассчитанных для пяти промежуточных положений рабочего органа на каждом периоде. На данный точечный график наложен график рисунок 196, б. Сравнение показывает, что погрешности в промежуточных положениях могут существенно отличаться от погрешностей, соответствующих границам периода (рисунок 197, б). Наибольшая разница наблюдается в середине каждого периода, что согласуется с (153).

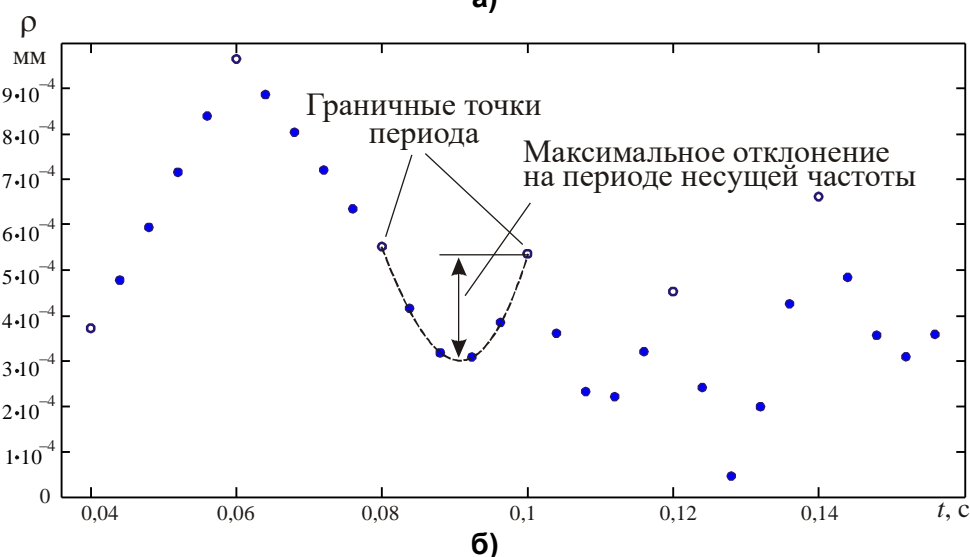
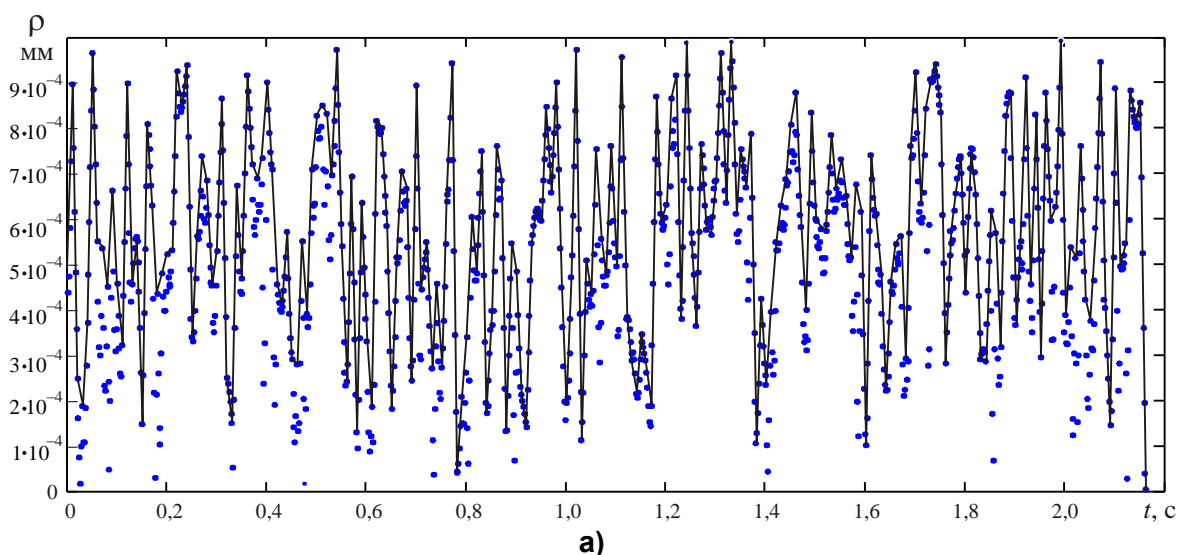
Таким образом, при выборе обрабатываемого на каждом периоде несущей частоты изменения длин штанг из 64 возможных комбинаций следует анализировать положение рабочего органа в момент, соответствующей на временной шкале середине этого периода. Так как скорости изменения длин штанг в течение периода остаются постоянными, следует контролировать погрешность формирования траектории для длин штанг

$$L^{<k>} = L^{<k-1>} + \frac{\Delta L^*}{2}. \quad (177)$$

Погрешность по линейным координатам не должна превышать величину  $\rho_{\text{MAX}}$ , что для рисунка 197 выполняется.

Уменьшение погрешностей формирования траектории, вызванных дискретностью приводов, описанным выше способом предполагает для каждого периода несущей частоты многократное решение прямой задачи кинематики применительно к МПКЦ, лежащему в основе ОПКС: 64 раза при проверке отклонения в

конечной точке текущего периода несущей частоты и 64 раза при контроле отклонения в точке, соответствующей середине этого периода. Многократное выполнение численных расчетов может оказаться фактором, ограничивающим быстродействие системы управления. Следовательно, необходимо принять меры к уменьшению объема вычислений.



**Рисунок 197 – Погрешность формирования траектории (по линейным координатам) в пяти положениях рабочего органа для каждого периода несущей частоты: а) – для всей траектории; б) – при отработке первых трех периодов несущей частоты**

Уменьшить объем вычислений можно путем упрощения алгоритмов решения прямой задачи, а также за счет уменьшения количества требующихся решений этой задачи

Как отмечалось ранее, аналитическое решение прямой задачи кинематики для МПКЦ типа «гексапод» не существует, следовательно, задача должна решаться с использованием численных методов. В общем случае при решении прямой

задачи требуется определить шесть неизвестных, в качестве которых выступают выходные координаты, с использованием шести нелинейных уравнений (21). В разделе 2.2.4 показано, что с использованием метода реструктуризации МПКЦ размерность задачи может быть снижена.

Для МПКЦ, имеющих другие кинематические схемы, для упрощения решения прямой задачи кинематики можно использовать другие методы [124, 134]. В разделе 2.3 показано, что использование кватернионов при решении прямой задачи о положениях применительно к МПКЦ типа «трипод» позволило снизить количество совместно решаемых уравнений с девяти (см. (29)–(31)) до трех в (63).

Для уменьшения количества вычислительных процедур, связанных с решением прямой задачи кинематики на  $k$ -м периоде несущей частоты, определим значения выходных координат  $\mathbf{Y}_{Okr}^{<k>}$  для состояния, когда для всех входных координат  $\Delta L^* = \Delta L_{Okr}$ . Данное состояние является одним из 64 рассмотренных выше возможных, определяемых дискретностью приводов. Оставшиеся 63 состояния можно определить следующим образом:

$$\mathbf{Y}_{Okr}^{<k>} = \mathbf{Y}_{Okr}^{<k>} + \sum_j \frac{\partial \mathbf{Y}_{Okr}^{<k>}}{\partial L_j} \Delta_j,$$

где  $\Delta_j = \Delta_{IP}$  или  $\Delta_j = 0$  в зависимости от анализируемого состояния входных переменных. При данном подходе количество вычислительных процедур, связанных с решением прямой задачи кинематики, снижается с 64 до 7. Еще столько же раз потребуется выполнить решение прямой задачи кинематики при контроле погрешности  $\rho$  в точке, определяемой входными координатами (177).

Использование описанных подходов к уменьшению объема требуемых вычислений позволит повысить максимальную контурную скорость при выполнении технологических операций на оборудовании с параллельной кинематической структурой при сохранении точности обработки.

Предложенный в главе метод интерполяции на постоянной несущей частоте использован:

- в системе управления ОПКС, построенным на основе МПКЦ с 6-ю координатами, разработанной в ООО «НПО «ТехноЛайн» (Приложение А);
- в системе управления 6-ти степенным прецизионным сварочным позиционером, созданным в ООО «Завод энергоэффективного и емкостного оборудования» (Приложение Б);
- в системе управления станка для получения изделий методом инкрементальной формовки, созданном в ООО «Челябинский завод мобильных энергоустановок и конструкций» (Приложение В).

Во всех случаях в системах управления реализованы: коррекция контурной скорости при ее изменении оператором, формирование разгона и торможения рабочего органа ОПКС при линейных законах изменения скоростей, методика уменьшения погрешностей формирования траектории, вызванных дискретностью приводов.

#### **5.2.6. Сравнение результатов моделирования интерполяции на постоянной несущей частоте**

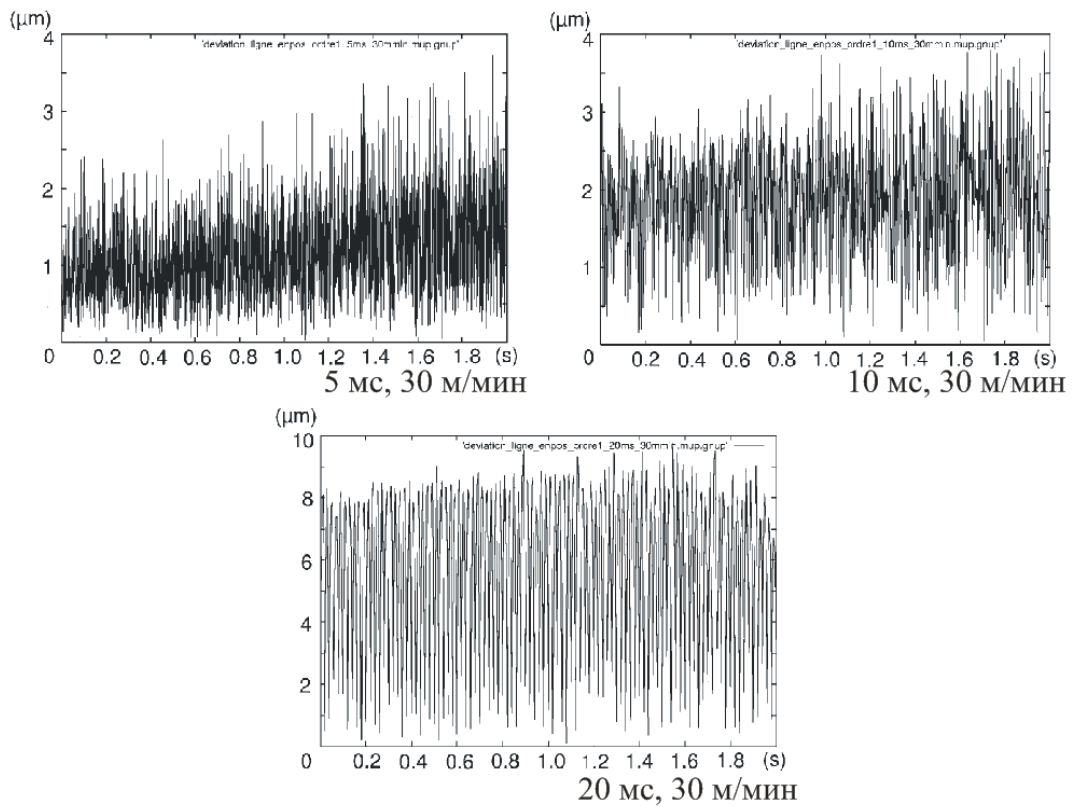
В работе [249] представлена возможная реализация метода интерполяции на постоянной несущей частоте, которая предполагает:

- формирование промежуточных точек траектории движения инструмента, привязанных к моментам времени, определяемых периодом несущей частоты;
- расчет законов изменения длин штанг для каждого из участков между промежуточными точками;
- аппроксимация законов изменения длин штанг для каждого из участков между промежуточными точками;
- формирование аппроксимированных законов изменения длин штанг.

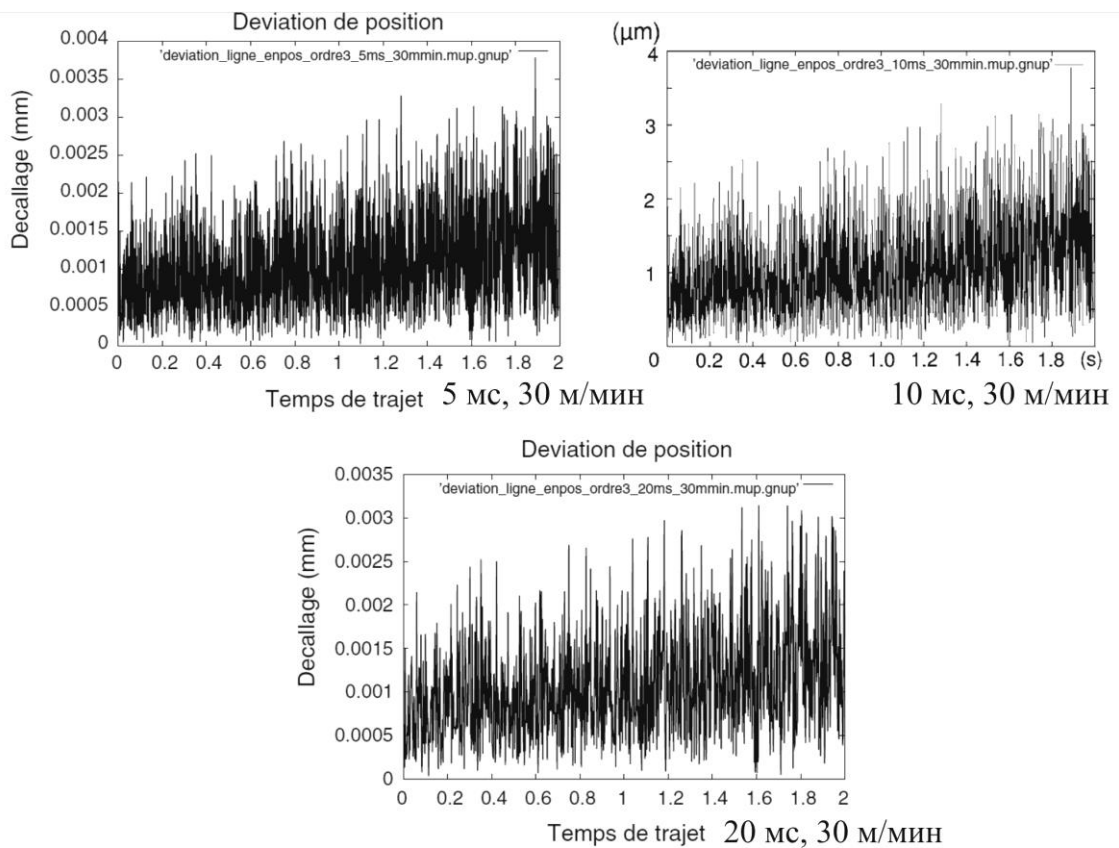
Моделирование точности формирования траектории осуществлялось для МПКЦ типа «гексапод» с приведенными в статье координатами шарниров. Также в статье указаны координаты начальной и конечной точек линейной траектории, период несущей частоты и контурная скорость, принятые при моделировании.

На рисунке 198 и 199 показаны приведенные в работе [249] результаты моделирования.





**Рисунок 198 – Погрешности формирования линейной траектории в [249];  
линейная аппроксимация законов изменения длин штанг**



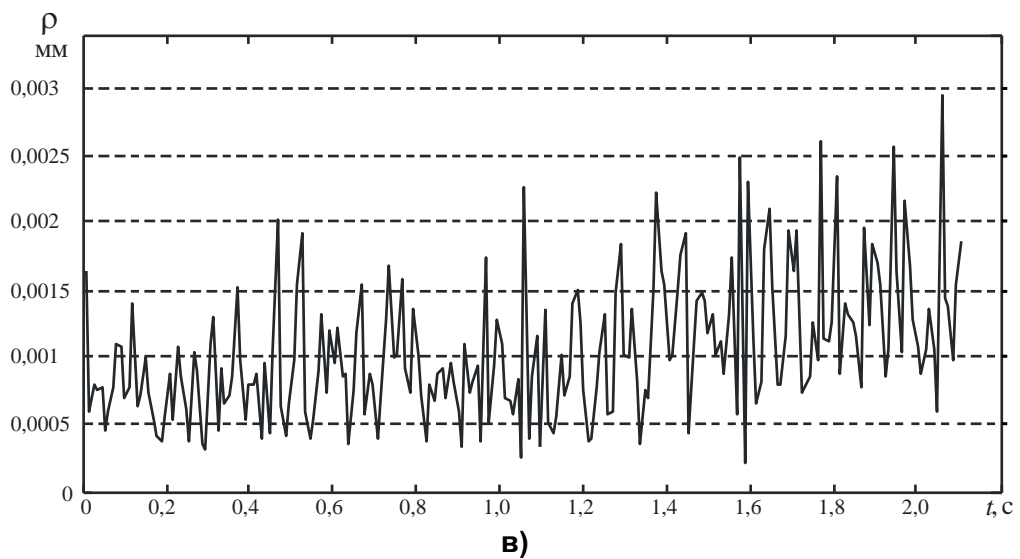
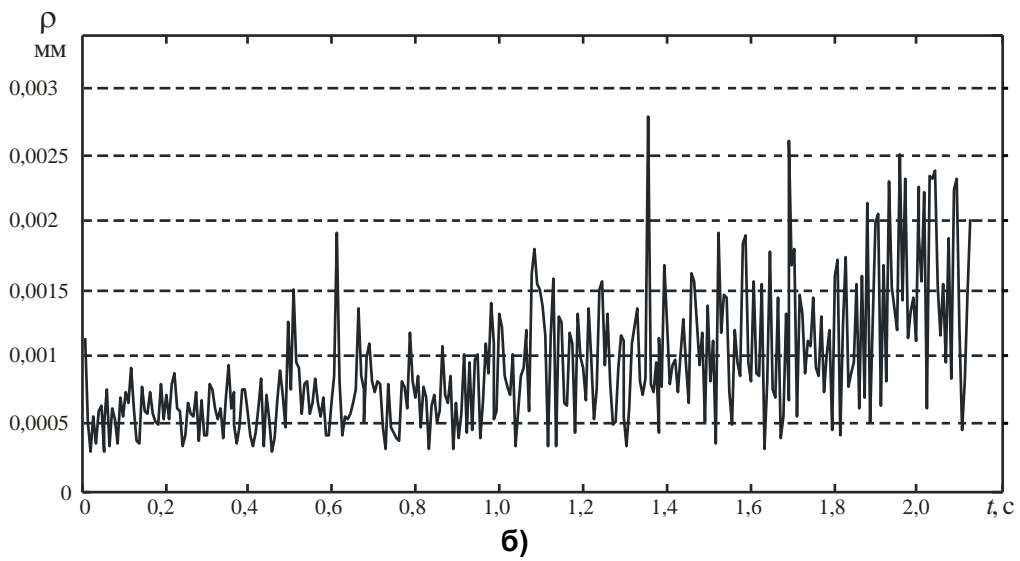
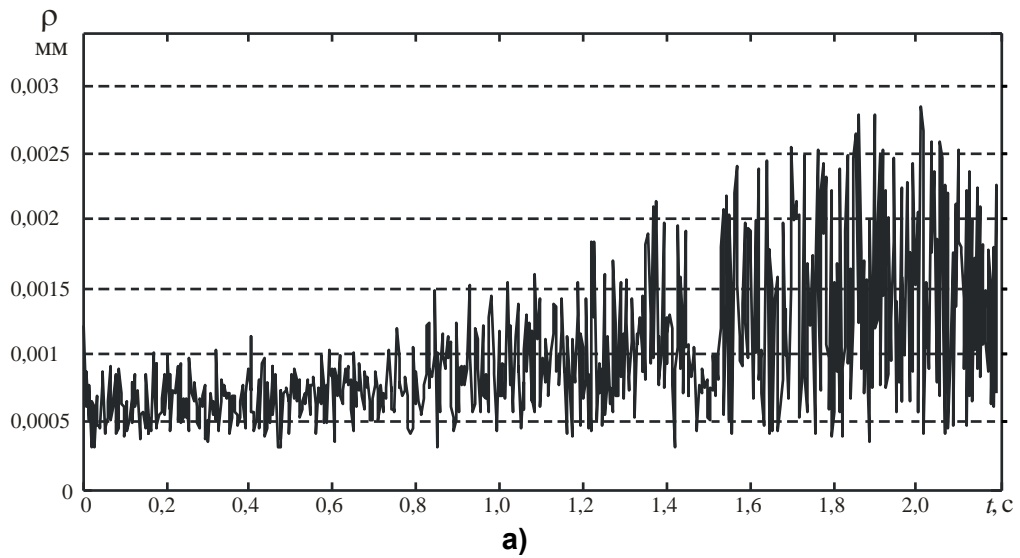
**Рисунок 199 – Погрешности формирования линейной траектории в [249];  
кубическая аппроксимация законов изменения длин штанг**

Графики на этих рисунках характеризуют погрешность формирования линейной траектории длиной 1 м при контурной скорости 30 м/мин и несущей, имеющей период 5 мс, 10 мс и 20 мс. Графики на рисунке 198 получены для линейной аппроксимации законов изменения длин штанг, графики на рисунке 199 – для кубической аппроксимации законов изменения длин штанг. Примем их за эталонные для дальнейшего сравнения.

Анализ графиков на этих рисунках показал, что для моделируемого движения они содержат излишнее количество точек. Например, при периоде постоянной несущей частоты, равном 20 мс, количество точек на графике должно быть равно 100; на графиках их существенно больше. Точки, по аналогии с рисунком 163, должны характеризовать границы участков постоянства скоростей приводов, т. е. участков аппроксимации нелинейных законов изменения длин штанг отрезками. Излишнее количество этих участков свидетельствует о неоптимальном решении задач аппроксимации законов изменения длин штанг и обработки этих законов приводами.

Имеющаяся в статье информация позволила построить кинематическую модель используемого МПКЦ и выполнить аналогичное моделирование с использованием подходов к решению задачи интерполяции на постоянной несущей частоте, описанных в этой главе. На рисунке 200 показаны результаты моделирования в виде погрешностей формирования траектории.

При моделировании движения по траектории реализовывались участки разгона и торможения, в связи с чем интервал моделирования превышает 2 секунды. Также учитывался дискретный характер изменения длин штанг. Дискретность приводов при моделировании была принята равной 1 мкм. Так как моделировалось движение характерной точки по прямой при неизменных угловых выходных координатах, то изменение длин штанг аппроксимировалось квадратичными зависимостями (149).



**Рисунок 200 – Погрешности формирования линейной траектории при моделировании предложенной методики интерполяции:  
а) –  $h=5$  мс; б) –  $h=10$  мс; в) –  $h=20$  мс**

При сравнении графиков на рисунках 198, 199 и 200, можно отметить, что предложенный в диссертации подход к реализации интерполяции на постоянной несущей частоте обеспечивает несколько большую точность в сравнении с результатами эталонного метода, приведенными в работе [249]. Помимо этого, следует отметить уменьшение количества участков постоянства скоростей приводов до, фактически, расчетных значений в 400 участков для  $h=5$  мс, 200 участков для  $h=10$  мс и 100 участков для  $h=20$  мс. Незначительное превышение этих значений объясняется моделированием участков разгона и торможения. Это свидетельствует о более качественном решении задачи аппроксимации требуемых законом изменения длин штанг.

### 5.3. Выводы по главе

1. Предложены и реализованы в программной среде MATLAB два метода многокоординатной интерполяции для ОПКС:

- с использованием оценочной функции;
- с использованием управления на постоянной несущей частоте.

2. Метод, использующий оценочную функцию, обеспечивает на каждом шаге наилучшее приближение формируемой траектории к требуемой в опорных точках. Погрешность в формировании траектории с использованием предложенного метода может быть меньше дискретности используемых приводов, что является особенностью оборудования с параллельной кинематической структурой. Однако реализация данного метода связана с многократным численным решением прямой задачи кинематики, поэтому его использование для управления ОПКС в реальном времени затруднительно.

3. Метод интерполяции на постоянной несущей частоте базируется на кинематических моделях МПКЦ и позволяет гарантированно обеспечить требуемую точность формирования траектории. Применительно к этому методу рассмотрены важные с точки зрения практической реализации вопросы изменения скорости движения рабочего органа: разгон в начале траектории, торможение в конце траектории, коррекция скорости оператором.

4. При реализации метода интерполяции на постоянной несущей частоте необходимо учитывать негативное влияние дискретности приводов на точность формирования траектории. В работе предложена методика, позволяющая снизить погрешность в формировании траектории, вызванную этим фактором.

5. Так как в процессе формирования траектории с помощью каждого из рассмотренных методов предполагается минимизация отклонений значений выходных угловых координат от требуемых, то эти методы могут использоваться для реализации любого из оптимальных законов управления приводными устройствами ОПКС, рассмотренных в главе 3.

6. Метод реализации многокоординатной интерполяции на постоянной несущей частоте, предложенный в работе, по результатам моделирования обеспечивает более высокую точность при меньшем количестве аппроксимирующих линейных участков, чем метод, принятый за эталонный.

7. Метод реализации многокоординатной интерполяции на постоянной несущей частоте, предложенный в работе, использован:

- в системе управления ОПКС, построенным на основе МПКЦ с 6-ю координатами, разработанной в ООО «НПО «ТехноЛайн» (Приложение А);
- в системе управления 6-ти степенным прецизионным сварочным позиционером, созданным в ООО «Завод энергоэффективного и емкостного оборудования» (Приложение Б);
- в системе управления станка для получения изделий методом инкрементальной формовки, созданном в ООО «Челябинский завод мобильных энергоустановок и конструкций» (Приложение В).

Во всех случаях в системах управления реализованы: коррекция контурной скорости при ее изменении оператором, формирование разгона и торможения рабочего органа ОПКС при линейных законах изменения скоростей, методика уменьшения погрешностей формирования траектории, вызванных дискретностью приводов.

## Заключение

Машины с параллельными кинематическими структурами представляют собой класс машин, выполненных по нетрадиционным для современного машиностроения кинематическим схемам, в которых выходное звено соединено с основанием несколькими кинематическими цепями. Особенности машин с параллельными кинематическими структурами в совокупности с особенностями выполняемых с их помощью технологических операций позволяют ставить и решать задачи по совершенствованию таких машин.

В диссертационной работе проведены исследования, направленные на повышение эффективности приводных устройств машин с параллельными кинематическими структурами по следующим направлениям:

- снижение энергии, потребляемой машиной при реализации технологической операции;
- обеспечение возможности перераспределения энергии приводов машины с целью снижения нагрузок на ее элементы;
- увеличение скорости перемещения рабочего органа машины без увеличения мощности приводов подач;
- снижение времени выполнения вычислительных процедур, используемых при управлении приводами машины, за счет их упрощения;
- повышение точности движения рабочего органа по траектории за счет новых методов интерполяции траектории.

Исследования проводились применительно к обрабатывающему технологическому оборудованию с параллельной кинематической структурой. В диссертационной работе показано, что при реализации с помощью такого оборудования некоторых технологических операций часть выходных координат становится избыточными. Например, при фрезеровании сферической фрезой положение режущей части определяется только линейными координатами центра фрезы, наклон фрезы в некоторых пределах на процесс фрезерования не влияет. Следовательно, три выходные угловые координаты могут рассматриваться как избыточные. Фак-

тор избыточности координат положен в основу исследований по совершенствованию оборудования с параллельной кинематической структурой.

В ходе исследований получены следующие результаты:

1. Разработаны теоретические положения, обеспечивающие использование фактора избыточности координат в оборудовании с параллельной кинематической структурой для повышения быстродействия, снижения нагрузок на элементы конструкции и приводы, уменьшения потребляемой приводами энергии. Сформулированы следующие критерии оптимальности:

- критерий оптимальности по приращениям входных координат;
- критерий оптимальности по усилиям;
- критерий оптимальности по потребляемой приводами энергии,

которые могут использоваться при формировании оптимальных законов управления приводными устройствами оборудования.

2. С использованием математического моделирования показано, что:

- закон управления приводными устройствами, реализующий критерий оптимальности по приращениям входных координат, позволяет снижать время выполнения технологических операций за счет минимизации изменений длин штанг при наличии ограничений на скорость этих изменений; моделирование для типовой технологической операции показало возможность снижения времени в 2 и более раза;

- закон управления приводными устройствами, реализующий критерий оптимальности по усилиям, позволяет уменьшить силы, возникающие в штангах МПКЦ при выполнении заданной технологической операции, тем самым снижая нагрузки на элементы конструкции и привода; моделирование для типовой технологической операции показало возможность снижения силовых факторов более чем на 10%;

- закон управления приводными устройствами, реализующий критерий оптимальности по потребляемой приводами энергии (закон энергоэффективного управления приводным устройством), позволяет уменьшать энергию, потребляе-

мую приводами ОПКС; моделирование для типовой технологической операции показало возможность снижения потребления энергии более чем на 15%.

Моделирование проводилось в программной среде MATLAB. При моделировании использовались разработанные в рамках работы кинематические модели и методика расчета оптимальных законов управления приводными устройствами оборудования с параллельной кинематической структурой.

3. Возможность снижения потребляемой приводами энергии при реализации закона энергоэффективного управления приводными устройствами подтверждена экспериментально: в серии экспериментов зафиксировано уменьшение потребления энергии приводами экспериментальной установки на 8,1%.

4. С использованием уравнений Даламбера–Лагранжа получены динамические модели для двух МПКЦ, имеющих штанги переменной длины: плоского механизма типа «бипод» и пространственного механизма типа «гексапод». Для каждого из механизмов получены динамические модели двух типов:

- динамическая модель, рассматривающая элементы МПКЦ (штанги) как абсолютно жесткие тела;
- динамическая модель, учитывающая наличие упруго-диссипативных связей в элементах МПКЦ.

Дифференциальные уравнения, входящие в эти модели, относятся к классу уравнений с переменными параметрами.

Анализ с использованием динамической модели, рассматривающей элементы МПКЦ как абсолютно жесткие тела, показал, что усилия в штангах будут определяться как внешними силовыми факторами, так и силами инерции, возникающими при движении элементов оборудования. Наличие этих составляющих определяет подтвержденный компьютерным моделированием факт, что возможность уменьшения потребляемой приводами энергии по мере увеличения скорости движения его рабочего органа снижается. При относительно невысоких скоростях движения работа сил инерции может не учитываться и для реализации закона энергоэффективного управления приводными устройствами могут использоваться существенно более простые уравнения статических моделей ОПКС.



Динамическая модель, учитывающая наличие упруго-диссипативных связей в элементах МПКЦ, имеет самостоятельное значение и может быть использована для исследования поведения машин с параллельными кинематическими структурами при кинематическом возбуждении.

5. Разработана кинематическая модель МПКЦ, учитывающая неидеальность используемых при его построении двухступенных (кардановых) шарниров. Использование такой модели при реализации законов управления приводными устройствами оборудования с параллельной кинематической структурой позволяет снизить ошибки в формировании траектории рабочего органа.

6. Предложено использовать гиперкомплексные числа – кватернионы для построения кинематических моделей МПКЦ. Использование кватернионов позволило сократить количество уравнений, требующихся для решения задач кинематики для МПКЦ типа «трипод», а также позволило упростить вычислительные процедуры и снизить время вычислений при численном решении прямой задачи кинематики для МПКЦ типа «гексапод».

7. Предложены и реализованы в программной среде MATLAB два метода многокоординатной интерполяции для ОПКС:

- с использованием оценочной функции;
- с использованием управления на постоянной несущей частоте.

Метод, использующий оценочную функцию, обеспечивает наилучшее приближение формируемой траектории к требуемой в опорных точках. Погрешность в формировании траектории с использованием предложенного метода может быть меньше дискретности используемых приводов, что является особенностью оборудования с параллельной кинематической структурой. В связи с тем, что реализация данного метода связана с многократным численным решением прямой задачи кинематики, его использование для управления ОПКС в реальном времени затруднительно.

Метод интерполяции на постоянной несущей частоте базируется на кинематических моделях МПКЦ и позволяет гарантированно обеспечить требуемую точность формирования траектории. Применительно к этому методу в работе рас-

смотрены важные с точки зрения практической реализации вопросы изменения скорости движения рабочего органа: разгон в начале траектории, торможение в конце траектории, коррекция скорости оператором, дискретный характер работы приводов.

Каждый из предложенных методов многокоординатной интерполяции обеспечивает минимизацию отклонений значений выходных угловых координат от требуемых, что позволяет использовать эти методы для реализации любого из оптимальных законов управления приводными устройствами ОПКС.

Результаты исследований имеют практическую направленность и использованы:

– в ООО «ТехноЛайн» (г. Челябинск) при создании программно-аппаратного комплекса для управления оборудованием с параллельной кинематикой (Приложение А);

– в ООО «Завод энергоэффективного и емкостного оборудования» (г. Челябинск) при создании 6-ти степенного прецизионного сварочного позиционера (Приложение Б);

– в ООО «Челябинский завод мобильных энергоустановок и конструкций» при создании станка для получения изделий методом инкрементальной формовки (Приложение В);

– в ФГУП ПО «Октябрь» (г. Каменск-Уральский) при выполнении работ по повышению эффективности рабочих органов манипуляторов (Приложение Г).

Полученные результаты позволяют утверждать, что задачи, поставленные для достижения цели диссертационной работы, успешно решены.

### Список литературы

1. Альван, Х.М. Декомпозиция задачи силового анализа многоподвижного механизма параллельной структуры / Х.М. Альван, А.В.Слоущ // Теория механизмов и машин. – 2005. – №1. – Том. 3. – С. 35–39.
2. Альван, Х.М. Об управлении движением пространственной платформы с несколькими степенями подвижности / Х.М. Альван, А.В.Слоущ // Теория механизмов и машин. – 2003. – №1. – С. 63–69.
3. Амелькин, Н.И. Кинематика и динамика твердого тела / Н.И. Амелькин. – М.: Изд-во МФТИ, 2000. – 64 с.
4. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайник. – М.: Физматгиз, 1959. – 915 с.
5. Астанин, В.О. Исследование металлорежущего станка нетрадиционной компоновки / В.О. Астанин, В.М. Сергиенко // Станки и инструмент. – 1993. – №3. – С. 5–8.
6. Астанин, В.О. Российский металлорежущий станок с параллельной кинематикой исполнительных движений / В.О. Астанин, В.В. Усов, А.В. Дуюнов, В.М. Сергиенко // Мехатроника. – 2000. – №5. – С. 27–32.
7. Афонин, В.Л. Позиционно-силовое управление в механизмах параллельной структуры / В.Л. Афонин, А.Н. Смоленцев // Справочник. Инженерный журнал. – 2003. – №5. – С. 14–22.
8. Афонин, В.Л. Энергетический метод расчета управления систем с рассредоточенными исполнительными приводами / В.Л. Афонин // Справочник. Инженерный журнал. – 2003. – №1. – С. 41–43.
9. Байков, В.Д. Решение траекторных задач в микропроцессорных системах ЧПУ / В.Д. Байков, С.Н. Вашкевич; под ред. В.Б. Смолова. – Л.: Машиностроение, 1986. – 106 с.
10. Басов, К.А., ANSYS: справочник пользователя / К.А. Басов. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 604 с.

11. Бранец, В.Н. Использование кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыгловский. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
12. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1964. – 608 с.
13. Бухгольц, Н.Н. Основы курс теоретической механики / Н.Н. Бухгольц. – М.: Наука, 1969. – 332 с.
14. Бушуев, В.В. Механизмы параллельной структуры в машиностроении / В.В. Бушуев, И.Г. Хольшев // СТИН. – 2001. – №1. – С. 3–8.
15. Бушуев, В.В. Особенности проектирования оборудования с параллельной кинематикой / В.В. Бушуев, П.В. Подзоров // СТИН. – 2004. – №4. – С. 3–10.
16. Бушуев, В.В. Особенности проектирования оборудования с параллельной кинематикой / В.В. Бушуев, П.В. Подзоров // СТИН. – 2004. – №5. – С. 3–7.
17. Вульфсон, И.И. Динамика механизмов с учетом упругости звеньев. Учебное пособие / И.И. Вульфсон. – Л.: изд-во ЛПИ, 1984. – 80 с.
18. Вульфсон, И.И. Динамические расчеты цикловых механизмов / И.И. Вульфсон. – Л.: Машиностроение, 1976. – 328 с.
19. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: Физматгиз, 1963. – 872 с.
20. Гаврилов, В.А. Исследование рабочей зоны и жесткости механизмов с параллельной кинематикой / В.А. Гаврилов, Д.А. Спиридонов, А.Г. Кольцов // СТИН. – 2004. – №2. – С. 24–26.
21. Галиуллин, А.С. Методы решения обратных задач динамики / А.С. Галиуллин. – М.: Наука, 1986. – 224 с.
22. Гендель, В.С. Силовой анализ платформы Стюарта с учётом неидеальности связей / В.С. Гендель, А.В. Слоущ // Теория механизмов и машин. – 2005. – №2. – Том 3. – С. 59–66.
23. Гжиров, Р.И. Программирование обработки на станках с ЧПУ / Р.И. Гжиров, П.П. Серебrenицкий. – Л.: Машиностроение, 1990. – 590 с.

24. Глазунов, В.А. Принципы классификации и методы анализа пространственных механизмов с параллельной структурой / В.А. Глазунов, А.Ш. Колискор, А.Ф. Крайнев, Б.И. Модель // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1990. – № 1. – С. 41–49.

25. Глазунов, В.А. Пространственные механизмы параллельной структуры / В.А. Глазунов, А.Ш. Колискор, А.Ф. Крайнев – М: Наука, 1991. – 95 с.

26. Глазунов, В.А. Управление механизмами параллельной структуры при переходе через особые положения / В.А. Глазунов, М.Г. Есина, Р.Э. Быков // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2004. – № 2. – С. 78–84.

27. ГОСТ 18934-73. Фрезы концевые сферические грушевидные твердосплавные цельные для труднообрабатываемых сталей и сплавов. Конструкция и размеры.

28. ГОСТ 20085-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения.

29. ГОСТ 23597-79. Станки металлорежущие с числовым программным управлением. Обозначение осей координат и направлений движений. Общие положения.

30. Грек, Н.А. Моделирование формообразования на станках с параллельной кинематикой / Н.А. Грек, А.Г. Ивахненко, О.Н. Подленко // Моделирование систем. – 2005. – №11(9). – С. 34–41.

31. Д'Анжелло, Г. Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез: Пер. с англ. / Г. Д'Анжелло. – М.: «Машиностроение», 1974. – 288 с.

32. Деграве, В.С. Особые положения плоских неассуровых структурных групп с внутренними входами / В.С. Деграве // Теория механизмов и машин. – 2006. – №2. – Том 4. – С. 81–85.

33. Как работает подвижная платформа авиатренажера? [Электронный ресурс] URL: <https://moscow.tft.aero/info/blog/kak-rabotaet-podvizhnaja-platforma-aviatrenazhera> (дата обращения 18.05.2019).

34. Кетков, Ю. MATLAB 7. Программирование, численные методы / Ю. Кетков, А. Кетков, М. Шульц. – БХВ-Петербург, 2005. – 742 с.

35. Колискор, А.Ш. Разработка и исследование промышленных роботов на основе *l*-координат / А.Ш. Колискор // Станки и инструмент. – 1982. – №12. – С. 21–24.
36. Коловский, М.З. Динамика машин / М.З. Коловский. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1989. – 263 с.
37. Коровин, Б.Г. Системы программного управления промышленными установками и робототехническими комплексами. Учебное пособие для вузов / Б.Г. Коровин, Г.И. Прокофьев, Л.Н. Рассудов. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 352 с.
38. Костров, А.В. Движение асимметричных баллистических аппаратов / А.В. Костров. – М.: Машиностроение, 1984. – 272 с.
39. Кривошеин, В.А. Перспективы использования технологий инкрементальной формовки в современном производстве // В.А. Кривошеин, А.А. Анцифиров, Ю.В. Майстров // Известия высших учебных заведений. Машиностроение, 2014. – № 11 (656). – С. 84–89.
40. Кривошеин, В.А. Разработка технологии получения полусферических изделий методом инкрементальной формовки / В.А. Кривошеин, Е.А. Рукавичко, А.А. Анцифиров // Интернет-журнал «Наукovedение», 2017. – Т. 9. – № 3. <http://naukovedenie.ru/PDF/74TVN317.pdf> (дата обращения: 01.03.2019).
41. Лебедев, В.И. Синтез механизмов с пассивными связями / В.И. Лебедев, А.М. Турланов // Теория механизмов и машин. – 2003. – №2. – С. 28–31.
42. Манипуляционные системы роботов / А.И. Корендясев, Б.Л. Саламандра, Л.И. Тывес и др.; под общ. ред. А.И. Корендясева. – М.: Машиностроение, 1989. – 472 с.
43. Маркеев, А.П. Теоретическая механика: Учебник для университетов. / А.П. Маркеев. – М.: ЧеРо, 1999. – 572 с.
44. Метьюз, Дж. Численные методы. Использование MATLAB / Дж. Метьюз, К. Финк. – Вильямс, 2001. – 720 с.
45. Механика машин: Учеб. пособие для вузов / И.И. Вульфсон, М.Л. Ерихов, М.З. Коловский и др.; под ред. Г.А. Смирнова. – М.: Высш. шк., 1996. – 511 с.

46. Механика промышленных роботов: Учеб. пособие для вузов: В 3-х кн./ Под ред. К.В. Фролова, Е.И. Воробьева. Кн. 1: Кинематика и динамика / Е.И. Воробьев, С.А. Попов, Г.А. Шевелева. – М.: Высш. шк., 1988. – 304 с.

47. Михайлов, О.П. Автоматизированный электропривод станков и промышленных роботов: учебник для вузов / О.П. Михайлов. – М.: Машиностроение, 1990. – 304 с.

48. Мохамед, М. Непосредственное определение мгновенной кинематики роботов с параллельным расположением приводов / М. Мохамед, Д. Даффи // Конструирование, 1985. – Т. 107. – № 2. – С. 229– 232.

49. Несмиянов, И.А. Структурный и параметрический синтез и оптимизация программных движений манипуляторов на основе трипода: Автореф. дис. докт. техн. наук. / И.А. Несмиянов. – Волгоград, 2017. – 40 с.

50. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики: учеб. для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов. / Н.Н. Никитин. – М.: Высш. шк. – 1990. – 607 с.

51. Обработывающее оборудование нового поколения. Концепция проектирования / В.Л. Афонин, А.Ф. Крайнов, В.Е. Ковалев и др.; под ред. В.Л. Афолина. – М.: Машиностроение, 2001. – 256 с.

52. Пакет прикладных программ для ЭВМ «WorkSpace РКМ». Заявка № 2009611493. Зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 5 июня 2009 г.

53. Пат. 2345884 РФ, МПК В25J 11/00. Шестиосевая координатно-измерительная машина и способ калибровки измерительного наконечника для нее / Лаптев А.Г., Маслов П.В., Шишкин А.В. – Оpubл. 10.02.2009. – Бюл. № 4.

54. Патент на полезную модель № 80137 «Устройство формирования дополнительных технологических координат». Заявка № 2008111901. Приоритет полезной модели 31 марта 2008 г. Зарегистрировано в Государственном реестре полезных моделей РФ 27 января 2009 г.

55. Патент на полезную модель №111044 «Малогобаритное многокоординатное обрабатывающее устройство на основе механизма с параллельной кинематикой». Заявка № 2011107050. Приоритет полезной модели 24 февраля 2011 г.

Зарегистрировано в Государственном реестре полезных моделей РФ 10 декабря 2011 г.

56. Патент на полезную модель №140220 «Шестикомпонентный измеритель-позиционер». Заявка № 2013155084. Приоритет полезной модели 10 декабря 2013 г. Зарегистрировано в Государственном реестре полезных моделей РФ 03 апреля 2014 г.

57. Петрова, Л.Н. Особенности решения обратной задачи для ротопода / Л.Н. Петрова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2009. Вып. 14. – № 33 (166). – с. 61–65.

58. Подзоров, П.В. Механизмы параллельной кинематики в станкостроении / П.В. Подзоров // Справочник. Инженерный журнал. Приложение. – 2005, №8. – С. 2–24.

59. Подзоров, П.В. Синтез технологического оборудования на основе механизмов параллельной кинематики: дис. ... канд. техн. наук / П.В. Подзоров. – М. – 2003. – 384 с.

60. Подленко, О.Н. Параметрический синтез формообразующих систем станков на базе станков с параллельной кинематикой: дис. ... канд. техн. наук / О.Н. Подленко. – Хабаровск. – 2005. – 151 с.

61. Потапов, В.А. Оборудование с параллельной кинематикой / В.А. Потапов // СТИН. – 2003. – №3. – С. 35–40.

62. Прикладная программа для ЭВМ «Шестикомпонентный измеритель-позиционер для определения динамических характеристик беспилотного летательного аппарата при наземной отработке» Заявка № 2013619053. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 25 ноября 2013 г.

63. Принципы классификации и методы анализа пространственных механизмов с параллельной структурой / В.А. Глазунов, А.Ш. Колискор, А.Ф. Крайнев, Б.И. Модель // Проблемы машиностроения и надежности машин, 1990. – № 1. – С. 41–49.

64. Ракета как объект управления: учебник. / И.М. Игдалов [и др.]; под ред. С.Н. Конюхова. – Днепропетровск: АРТ-ПРЕСС, 2004. – 544 с.



65. Сайт компании DMG MORI [Электронный ресурс] URL: <https://ru.dmgmori.com/products/machines/milling/5-axis-milling/nmv/nmv-5000-dcg> (дата обращения 18.05.2019).
66. Сайт компании Okuma [Электронный ресурс]. URL: <https://www.okumamerit.com/article/no16/02.html>. (дата обращения 18.05.2019).
67. Сайт ООО «Лапик» [Электронный ресурс]. URL: [http://lapic.ru/catalog/Koordinatno\\_izmeritelnaya\\_mashina\\_KIM\\_1000/](http://lapic.ru/catalog/Koordinatno_izmeritelnaya_mashina_KIM_1000/) (дата обращения 18.05.2019).
68. Сейдж, Э.П. Идентификация систем управления / Э.П. Сейдж, Д.Л. Мелс. – М.: Наука, 1974. – 248 с.
69. Смирнов, В.А. Влияние конструктивных особенностей на жёсткость оборудования, построенного на основе механизмов с параллельными кинематическими цепями / В.А. Смирнов, Е.Ю. Сулацкая // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2009. – Вып. 14. №33(166). – С. 72–75.
70. Смирнов, В.А. Динамическая модель механизма с параллельной кинематикой / В.А. Смирнов, Л.Н. Петрова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2009. – Вып. 13. – № 11 (144). – С. 50–56.
71. Смирнов, В.А. Избыточность координат как фактор возможности оптимального управления оборудованием с параллельными приводами / Информационные технологии моделирования и управления. Научно-технический журнал. – Воронеж: «Научная книга». – 2010. – № 1(60). – С. 126–131.
72. Смирнов, В.А. Использование кватернионов при математическом моделировании механизмов с параллельными кинематическими цепями / В.А. Смирнов, В.Б. Федоров // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2008. – Вып. 11. – № 10 (110). – С. 24–29.
73. Смирнов, В.А. Использование механизма-гексапода для изменения массоинерционных характеристик объекта при его движении в атмосфере / В.А. Смирнов, Л.Н. Петрова // Заочная конференция «Авиакосмические технологии и оборудование». URL: <http://econf.rae.ru/article/7901> (дата обращения: 15.05.2019).

74. Смирнов, В.А. Кинематическая модель механизма с параллельными кинематическими цепями с учётом неидеальности используемых двухстепенных шарниров / В.А. Смирнов, Л.Н. Петрова // I Международная научная конференция «Современные проблемы информатизации в системах моделирования, программирования и телекоммуникациях». 05.10.09. URL: <http://www.econf.rae.ru/article/4667> (дата обращения 18.05.2019).

75. Смирнов, В.А. Кинетостатическое моделирование энергоэффективного управления оборудованием с параллельной кинематикой / В.А. Смирнов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2010. – Вып. 16. №29 (205). – С. 65–70.

76. Смирнов, В.А. Математическая модель трехкоординатного манипулятора с параллельной кинематической структурой / В.А. Смирнов, М.М. Тверской // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2005. – Вып. 7. – № 14 (54). – С. 18–22.

77. Смирнов, В.А. Методика тарировки многокомпонентного динамометра, выполненного на основе механизма с параллельной кинематикой / В.А. Смирнов, Л.Н. Петрова, В.Б. Федоров // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2013. – № 11-2. – С. 83–84.

78. Смирнов, В.А. Моделирование энергоэффективного управления оборудованием с параллельной кинематикой / Информационные технологии моделирования и управления. Научно-технический журнал. – Воронеж: «Научная книга». – 2010. – № 4(63). – С. 490–497.

79. Смирнов, В.А. Научные основы и алгоритмы управления оборудования с параллельными приводами / В.А. Смирнов. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2009. – 164 с.

80. Смирнов, В.А. Обеспечение требуемой точности перемещения рабочего органа оборудования с параллельными приводами / В.А. Смирнов, Л.Н. Петрова // Междунар. научно-техн. конференция «Оптимизация процессов резания, разработка и эксплуатация мехатронных станочных систем». – Уфа: Уфимский гос. авиац. техн. университет. – С. 113–118.

81. Смирнов, В.А. Особенности оборудования с параллельными приводами как объекта управления / В.А. Смирнов, Л.Н. Петрова // Современные проблемы информатизации в экономике и обеспечении безопасности: Сб. трудов. Вып. 15 (по итогам XV международной открытой научной конференции) / Под ред. д.т.н., проф. О.Я. Кравца. – Воронеж. «Научная книга», 2010. – С. 127–130.

82. Смирнов, В.А. Параметрическая идентификация модели механизма с параллельными кинематическими цепями / В.А. Смирнов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2009. – Вып. 14. №33(166). – С. 57–60.

83. Смирнов, В.А. Повышение производительности обработки на оборудовании с параллельной кинематикой / В.А. Смирнов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2010. – Вып. 15. №10 (186). – С. 72–76.

84. Смирнов, В.А. Повышение энергоэффективности инкрементальной формовки на оборудовании с параллельной кинематикой / В.А. Смирнов, Л.Н. Петрова // Машиностроение и инженерное образование. – 2019. – № 1. – С. 23–29.

85. Смирнов, В.А. Повышение энергоэффективности оборудования с параллельными приводами / В.А. Смирнов, Ю.Л. Сюськина // Современные проблемы информатизации в анализе и синтезе программных и телекоммуникационных систем: Сб. трудов. Вып. 15 (по итогам XV международной открытой научной конференции) / Под ред. д.т.н., проф. О.Я. Кравца. – Воронеж. «Научная книга», 2010. – С. 383–387.

86. Смирнов, В.А. Расширение рабочего пространства технологического оборудования, построенного на основе ротопода / В.А. Смирнов, Л.Н. Петрова, М.М. Тверской // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2012. – Вып. 19. – № 12 (271). – С. 75–79.

87. Смирнов, В.А. Рациональное расположение заготовки как фактор снижения затрат энергии при фрезеровании // Современные проблемы науки и образования. – 2011. – № 4; URL: [www.science-education.ru/98-4761](http://www.science-education.ru/98-4761).

88. Смирнов, В.А. Реализация компьютерного управления на постоянной несущей частоте применительно к оборудованию с параллельными приводами / В.А. Смирнов // Сборка в машиностроении и приборостроении. – 2010. – №2. – С. 39–46.

89. Смирнов, В.А. Решение траекторной задачи в оборудовании с параллельными приводами рабочего органа / В.А. Смирнов, Л.Н. Петрова // Вестник УГАТУ. Серия «Машиностроение». – 2009. – Вып. 12. – № 4 (33). – С. 96–101.

90. Смирнов, В.А. Снижение усилий приводов при обработке на станках с параллельной кинематикой / В.А. Смирнов, Ю.Л. Сюськина, М.М. Тверской // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2012. – Вып. 19. – № 12 (271). – С. 137–142.

91. Смирнов, В.А. Тарировка многокомпонентного динамометра, выполненного на основе механизма с параллельной кинематикой / В.А. Смирнов, Л.Н. Петрова, В.Б. Федоров // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2013. – Том 13. – № 12. – С. 119–124.

92. Смирнов, В.А. Управление оборудованием с параллельными приводами / В.А. Смирнов, Л.Н. Петрова // Высокие технологии, фундаментальные исследования, образование, промышленность: сборник трудов Восьмой междунар. научно-практ. конференция «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности». 27-28.10.2009, Санкт-Петербург, Россия / под ред. А.П. Кудинова. – СПб.: Издательство Политехн. ун-та, 2009. – С. 312–314.

93. Смирнов, В.А. Уточненная модель механизма с параллельными кинематическими цепями / Информационные технологии моделирования и управления. Научно-технический журнал. – Воронеж: «Научная книга». – 2009. – № 6(58). – С. 866–871.

94. Смирнов, В.А. Формирование траекторий в механизмах с параллельной кинематической структурой / В.А. Смирнов, Л.Н. Петрова, В.Б. Федоров // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2006. – Вып. 8. – № 11 (66). – С. 24–29.

95. Смирнов, В.А. Энергоэффективное управление оборудованием с параллельными приводами // Современные проблемы науки и образования. – 2011. – № 2; URL: [www.science-education.ru/96-4620](http://www.science-education.ru/96-4620).

96. Смирнов, В.А. Алгоритм управления механизмом с параллельной кинематической структурой / В.А. Смирнов, В.Б. Федоров // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2005. – Вып. 7. – № 14 (54). – С. 23–27.

97. Смоленцев, А.Н. Самоидентификация геометрических параметров механизмов параллельной структуры / А.Н. Смоленцев // Справочник. Инженерный журнал. – 2004. – №1. – С. 31–34.

98. Смородов, П.В. Демонстрационные роботы для театральной сцены: дис. ... канд. техн. наук / П.В. Смородов. – С-Петербург. – 2008. – 131 с.

99. Сосонкин, В.Л. Программное управление технологическим оборудованием: Учебник для вузов / В.Л. Сосонкин. – М.: Машиностроение, 1991. – 512 с.

100. Сулацкая, Е.Ю. Моделирование рабочего пространства станка с параллельной кинематикой / Е.Ю. Сулацкая, Л.Н. Петрова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2009. – Вып. 13. – № 11 (144). – С. 42–45.

101. Сюськина, Ю.Л. Особые положения технологического оборудования с параллельными приводами рабочего органа / Ю.Л. Сюськина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2009. – Вып. 14. – с. 66–71.

102. Турлапов, В.Е. Решение задачи кинематики для платформы Стюарта методом групп нулевого порядка / В.Е. Турлапов // МАИ. Электронный журнал «Прикладная геометрия». – 2002. – Вып. 4. – №5.

103. Фельдштейн, Е.Э. Обработка деталей на станках с ЧПУ // Е.Э. Фельдштейн, М.А. Корниевич. – Мн.: Новое знание, 2005. – 287 с.

104. Фу, К. Робототехника / К. Фу, Р. Гонсалес, К. Ли. – М.: Мир, 1989. – 624 с.

105. Хант, К.Х. Кинематические структуры манипуляторов с параллельным приводом / К.Х. Хант // Конструирование и технология машиностроения, 1983. – Т. 105. – № 4. – С. 201–210.

106. Хольшев, И.Г. Оптимизация конструктивных параметров оборудования типа гексапода / И.Г. Хольшев, В.В. Бушуев // СТИН. – 2002. – №1. – С. 15–20.

107. Янг, Д. Исследование кинематики манипуляторов платформенного типа / Д. Янг, Т. Ли // Конструирование, 1984. – Т. 106. – № 2. – С. 264– 272.

108. A force–torque sensor based on a Stewart Platform in a near-singular configuration / R. Ranganath, P.S. Nair, T.S. Mruthyunjaya, A. Ghosal // Mechanism and Machine Theory. 2004 – Vol. 39. – P. 971–998.

109. Abdellatif, H. Model-based control for industrial robots: uniform approaches for serial and parallel structures / H. Abdellatif, B. Heimann // Industrial Robotics: Theory, Modelling and Control. – Pro Literatur Verlag, 2006. – 964 p.

110. Alba-Gomez, O.G. Trajectory planning of a redundant parallel manipulator changing of working mode / O.G. Alba-Gomez, J.A. Pamanes, P. Wenger. Proceedings of the 12th IFTOMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms (Besancon, 2007). – [http://130.15.85.212/proceedings/proceedings\\_WorldCongress/WorldCongress07/articles/sessions/papers/A753.pdf](http://130.15.85.212/proceedings/proceedings_WorldCongress/WorldCongress07/articles/sessions/papers/A753.pdf) (дата обращения 18.05.2019).

111. Alves de Sousa R.J., Ferreira J.A.F., Sá de Farias J.B., Torrão J.N.D., Afonso D.G., Martins M.A.B.E SPIF-A: on the development of a new concept of incremental forming machine // Structural Engineering and Mechanics, Vol. 49. No. 5 (2014). P. 645-660.

112. Angeles, J. Managing Singularities of 3-DOF Planar Parallel Manipulators Using Joint-Coupling / J. Angeles, Theingi, I-Ming Chen, Chuan Li // 11th World Congress in Mechanism and Machine Science, Tianjin (China), August 18-21, 2003. – China Machinery Press, 2003. – URL: [155.69.254.10/users/risc/Pub/Conf/03-c-iftomm-jc.pdf](http://155.69.254.10/users/risc/Pub/Conf/03-c-iftomm-jc.pdf) (дата обращения 18.05.2019).

113. Awtar, S. Synthesis and Analysis of Parallel Kinematic XY Flexure Mechanism, Ph. D. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 2004. – 198 p.

114. Baslamisli, C. A procedure for the online measurement of a vehicle's inertia tensor on a Stewart Platform / C. Baslamisli, O. Tuncer. // the 4-th Otomovit Teknolojileri Kongresi (Haziran, 2018).

115. Bianchi, G. A Virtual Prototyping Environment for Parallel Kinematic Machine Analysis and Design / G. Bianchi, I. Fassi, L.M. Tosatti. – Milano: CNR-ITIA, 2000. – 22 p.
116. Bonev, I.A. A closed-form solution to the direct kinematics of nearly general parallel manipulators with optimally located three linear extra sensors / I.A. Bonev, J. Ryu, S-G. Kim, S-K. Lee // Transactions on Robotics and Automation, 2001. – Vol. 17 (2). – P. 148–156.
117. Bonev, I.A. Accuracy analysis of a 3-dof planar parallel robot / S. Briot, I.A. Bonev // Mechanism and Machine Theory, 2008. – Vol. 43 (4). – P. 445–458.
118. Bonev, I.A. Constraint singularities of parallel mechanisms / D. Zlatanov, I.A. Bonev, and C.M. Gosselin // IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (Washington, 2002). – P. 496–502.
119. Briot, S. Are parallel robots more accurate than serial robots? / S. Briot, I.A. Bonev. – <http://www.gpa.etsmtl.ca/prof/ibonev/Publications/CSME001.pdf>. (дата обращения 18.05.2019).
120. Bruzzone, L.E. Mechatronic design of a parallel robot for high-speed, impedance-controlled manipulation / L.E. Bruzzone, R.M. Molino, M. Zoppi. – <http://med.ee.nd.edu/MED11/pdf/papers/iv06-01.pdf> (дата обращения 18.05.2019).
121. Bruzzone, L.E. The PRIDE prototype: control layout of a parallel robot for assembly tasks / L.E. Bruzzone, R.M. Molino, M. Zoppi, G. Zurlo // Int. Conf. Modeling, Identification and Control (Innsbruck, 2003). – P. 606–611.
122. Bulca, F. The kinematics and workspace analysis of platform mechanisms: a thesis submitted to the Faculty of Graduate Studies and Research in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy / F. Bulca. – Montréal: Department of Mechanical Engineering McGill University, 1998.
123. Cao, Y. Orientation-workspace analysis of the Steward-Gough manipulator / Y. Cao, Q.J. Zhang, H. Zhou, H.F. Ding // International Conference on Sensing, Computing and Automation (Watam, 2006). – P. 646–652.

124. Charles C. Nguyen. Analysis and design of six-degree-of-freedom Steward platform-based robotic wrist / Charles C. Nguyen, Sami Antrazi, Zhen-Lei Zhou. – The catholic university of America, 1991. – 19 p.

125. Chen, G. A kind of kinematically redundant planar parallel mechanism for optimal output accuracy / G. Chen, H. Wang, Y. Zhao, Z. Lin // ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2009. – P. 475–483.

126. Cheng, H. Advantages and dynamics of parallel mechanisms with redundant actuation / H. Cheng, G.F. Liu, Y.K. Yiu, Z.H. Xiong, Z.X. Li // 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. – Vol. 4, 2001. – P. 171–177.

127. Cheng, L. Adaptive neural network tracking control for manipulators with uncertain kinematics, dynamics and actuator model / L. Cheng, Z.-G. Hou, M. Tan // Automatica, 2009. – Vol. 45. – P. 2312–2318.

128. Cheng, Y. Real-time interpolator and contour tracking in link-space for a 3 DOF parallel mechanism / Y. Cheng, C. Kuo, J. Chin // Proceedings of ICAM2007 (Tainan, Taiwan, Nov. 26-28, 2007). – Materials Science Forum, 2008. – Vol. 594. – P. 415–436.

129. Choi, H-B. Closed-Form Forward Kinematics Solutions of a 4-DOF Parallel Robot / H-B. Choi, A. Konno, M. Uchiyama // International Journal of Control, Automation, and Systems, 2009. – Vol. 7 (5). – P. 858–864.

130. Chun-Ta, C. A hybrid strategy for the time- and energy-efficient trajectory planning of parallel platform manipulators / C. Chun-Ta, L. Te-Tan // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing Volume 27, Issue 1, February 2011, P. 72–81.

131. Colombo, D. PC based control systems for compliance control and intuitive programming of industrial robots / D. Colombo, D. Dallefrate, L. Molinari. – [http://www.smerobot.org/08\\_scientific\\_papers/papers/Colombo\\_et\\_al\\_ISR-Robotik06.pdf](http://www.smerobot.org/08_scientific_papers/papers/Colombo_et_al_ISR-Robotik06.pdf) (дата обращения 18.05.2019).

132. Conti, J.P. Workspace variation of a hexapod machine / J.P. Conti, C.M. Clinton, G. Zhang, A. J. Wavering. – [http://www.isd.mel.nist.gov/documents/wavering/workspace\\_res.pdf](http://www.isd.mel.nist.gov/documents/wavering/workspace_res.pdf) (дата обращения 18.05.2019).



133. Cortés, J. Motion planning algorithms for general closed-chain mechanisms. Ph.D. Thesis / J. Cortés. – Toulouse: Institut National Polytechnique de Toulouse, 2003. – 170 p.
134. Cruz, P. Kinematic modeling of Stewart-Gough platforms / P. Cruz, R. Ferreira, J.S. Sequeira. – [http://welcome.isr.ist.utl.pt/img/pdfs/1351\\_05-ICINCO-Cruz.pdf](http://welcome.isr.ist.utl.pt/img/pdfs/1351_05-ICINCO-Cruz.pdf) (дата обращения 18.05.2019).
135. Daney, D. Interval methods for certification of the kinematic calibration of parallel robots / D. Daney, Y. Papegay, A. Neumaier // IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (New Orleans, 2004). – P. 1913–1918.
136. Dasgupta, B. The Stewart platform manipulator: a review / B. Dasgupta, T. Mruthyunjaya // Mechanism and Machine Theory. – 2000. – Vol. 35 (1). – P. 15–40.
137. Dehghani, M. Neural network solution for forward kinematics problem of HEXA parallel robot / M. Dehghani, M. Ahmadi, A. Khayatian, M. Eghtesad, M. Farid // American Control Conference (Seattle, 2008). – P. 4214–4219.
138. Do, W. Q. D. Inverse dynamic analysis and simulation of a platform type of robot / W. Q. D. Do, D. C. H. Yang // Journal of Robotic Systems, 1988. Vol. 5 (3). – P. 209–227.
139. Dunlop, R. A Nitinol wire actuated Stewart platform / R. Dunlop, A.C. Garcia // Australasian Conf. on Robotics and Automation (Auckland 2002). – P. 122–127.
140. Emmens, W.C. The technology of incremental sheet forming – a brief review of the history / W.C. Emmens, G. Sebastian, A.H. van den Boogaard // Journal of Materials Processing Technology, 2010. – № 210. – P. 981–997.
141. Fang, Y. Structure synthesis of a class of 4-dof and 5-dof parallel manipulators with identical limb structures / Y. Fang, L-W. Tsai // The International Journal of Robotics Research, 2002. – Vol. 21 (9). – P. 799–810.
142. Fichter, E. A Stewart Platform-Based Manipulator: General Theory and Practical Construction / E. F. Fichter // International Journal of Robotics Research, 1986. – Vol. 5. – № 2. – P. 157–182.

143. Filho, S. Kinematics and workspace analysis of a parallel architecture robot: the HEXA / S. Filho, E. Cabral // ABCM Symposium Series in Mechatronics, (Ouro Preto, 2006). – Vol. 2. – P. 158–165.

144. Finding the best machine for SPIF operations – a brief discussion / S.R. Marabuto, D. Afonso, J.A.F. Ferreira, F.Q. Melo, M. Martins, R.J. Alves de Sousa // Key Engineering Materials, 2011. – Vol. 473. – P. 861–868.

145. Force prediction for single point incremental forming deduced from experimental and FEM observations / R. Aerens, P. Eyckens, A. Van Bael, J.R. Duflou // International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2009. – № 46(9). – P. 969–982.

146. Frayssinet, H. Calibration of parallel kinematics machine-tools using small displacement torsors / H. Frayssinet, M. Thurneysen, D. Jeannerat, R. Clavel. – [http://infoscience.epfl.ch/record/62721/files/Frayssinet\\_full\\_paper.pdf](http://infoscience.epfl.ch/record/62721/files/Frayssinet_full_paper.pdf) (дата обращения 18.05.2019).

147. Gao, F. A novel 5-DOF fully parallel kinematic machine tool / F. Gao, B. Peng, H. Zhao, W. Li // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2006. – Vol. 31 (1–2). – P. 201–207.

148. Geng, Z. On the dynamic model and kinematic analysis of a class of Stewart platforms / Z. Geng, L. S. Haynes, J. D. Lee, R. L. Carroll // Robotics and Autonomous Systems, 1992. – Vol. 9. – P. 237–254.

149. Gosselin, C.M. Parallel computational algorithms for the kinematics and dynamics of planar and spatial parallel manipulators / C.M. Gosselin // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1996. Vol. 118. P. 22–28.

150. Hadorn, M. Model-based Control Input Compensation for Parallel Kinematic Machine Tools / Michael Hadorn. – [http://www.aspe.net/publications /Annual\\_2003 /PDF/2equip/2ctrl/1198.pdf](http://www.aspe.net/publications /Annual_2003 /PDF/2equip/2ctrl/1198.pdf) (дата обращения 18.05.2019).

151. Hoffman, R. Vibration Modes of an Aircraft Simulator Motion System / R. Hoffman, M.C. McKinnon // Proc. of the First World Congress on Theory of Machines and Mechanisms (Monreal, 1979). – P. 603–606.

152. Huang, T. Stiffness estimation of a Tripod-based parallel kinematic machine / T. Huang, J.P. Mei, X.Y. Zhao, L.H. Zhou, D.W. Zhang, Z. P. Zeng // IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (Seoul, 2001). – P. 3280–3285.
153. Hui, C. Dynamics and control of redundantly actuated parallel manipulators / C. Hui, Y. Yiu, Z. Li // IEEE/ASME Transactions on MECHATRONICS, 2003. – Vol. 8 (4). – P. 483–491.
154. Hunt, K.H. Kinematic Geometry of Mechanisms / K.H. Hunt. – Oxford: Clarendon Press, 1978. – 488 p.
155. Husty, M.L. An algorithm for solving the direct kinematic of Stewart-Gough-type platforms. Research Report TR-CIM-94-7 / M.L. Husty. – Université McGill, 1994. URL: <ftp://ftp.mercim.mcgill.edu/pub/techrep/1994/CIM-9>.
156. Husty, M.L. An algorithm for solving the direct kinematic of Stewart-Gough-type platforms / M.L. Husty // Research Report TR-CIM-94-7. – Montréal: Université McGill, 1994.
157. Innocenti, C. Closed-form direct position analysis of a 5-5 parallel mechanism / C. Innocenti, V. Parenti-Castelli // Journal of Mechanical Design, 1993. – Vol. 115 (3). – P. 515–521.
158. Innocenti, C. Echelon form solution of direct kinematics for general full-parallel spherical wrists / C. Innocenti, V. Parenti-Castelli // Mechanism and Machine Theory, 1993. – Vol. 28 (4). – P. 553–561.
159. Innocenti, C. Forward kinematics of 6-6 fully parallel mechanism – an exhaustive numerical approach via a mono-dimensional-search algorithm / C. Innocenti, V. Parenti-Castelli // Journal of Mechanical Design, 1993. – Vol. 115 (4). – P. 932–937.
160. ISO 841:1974. Numerical control of machines. Axis and motion nomenclature.
161. Jackson, K. The mechanics of incremental sheet forming / K. Jackson, J. Allwood // Journal of Materials Processing Technology, 2009. – Vol. 209. – P. 1158–1174.

162. Jakobović, D. Forward Kinematics of a Stewart Platform Mechanism / D. Jakobović, L. Budin. – <http://www.zemris.fer.hr/~yeti/download/ines2002.pdf> (дата обращения 18.05.2019).

163. Jakobovic, D. Kinematic evaluation and forward kinematic problem for Stewart platform based manipulators / D. Jakobovic, L. Jelenkovic. – <http://www.zemris.fer.hr/~yeti/download/ICCC2003.pdf> (дата обращения 18.05.2019).

164. Jelenkovic, L. Error analysis of a Stewart platform based manipulators / L. Jelenkovic, L. Budin // Int. Conf. on Intelligent Engineering Systems (INES), (Opatija, 2002). – [http://www.zemris.fer.hr/~leonardo/unofficial/radovi/ines\\_2002.pdf](http://www.zemris.fer.hr/~leonardo/unofficial/radovi/ines_2002.pdf) (дата обращения 18.05.2019).

165. Ji, Z. Dynamics Decomposition for Stewart Platforms / Z. Ji // Journal of Mechanical Design, 1994. – Vol. 116. – P. 67–69.

166. Karbowski, K. Application of incremental sheet forming / K. Karbowski // Management and Production Engineering Review, 2015. – Vol. 6. – No. 4. – P. 55–59.

167. Ketul, P. Modelling, simulation and control of incremental sheet metal forming process using CNC machine tool / Ketul Patel, V. Kalaichelvi, R. Karthikeyan, Sriparvathi Bhattathiri // Procedia Manufacturing, 2018. – № 26. – P. 95–106.

168. Kharazmi, B. Real-time control of a parallel kinematic robot / B. Kharazmi. – [http://www.cs.lth.se/EDA920/2008/Rapport\\_2008-10.pdf](http://www.cs.lth.se/EDA920/2008/Rapport_2008-10.pdf) (дата обращения 18.05.2019).

169. Khatib, O. Inertial properties in robotic manipulation: an object-level framework / O. Khatib // International Journal of Robotics Research, 1995. – Vol. 14 (1). – P. 19–36.

170. Khatib, O. Optimization of the inertial and acceleration characteristics of manipulators / O. Khatib, A. Bowling // In IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (Minneapolis, 1996). – P. 2883–2889.

171. Khoukhi, A. Constrained multi-objective trajectory planning of parallel kinematic machines / A. Khoukhi, L. Baron, M. Balazinski. – <http://cogito.labos.polymtl.ca/~baron/doc/r18.pdf> (дата обращения 18.05.2019).

172. Kim, N. High speed tracking control of Stewart platform manipulator via enhanced sliding mode control / N. Kim, C.-W. Lee // Proceedings of the 1998 IEEE International conference on Robotics and Automation (Leuven, Belgium, 1998). – Vol. 3. – P. 2716–2721.

173. Koh, K. H. The analysis of forming forces in single point incremental forming / Kyung Hee Koh, Jae-Gwan Kang, Jong-Yun Jung // MATEC Web of Conferences 81, 05004 (2016) ICTTE 2016. URL: <https://doi.org/10.1051/matecconf/20168105004> (дата обращения: 18.05.2019).

174. Kondakov, S. Modeling of the Automatic Power Distribution System among the Traction Motors of the Driving Wheels of a Multi-Axle Vehicle / S. Kondakov, O. Pavlovskaya, S. Aliukov, V. Smirnov // SAE Technical Paper 2019-01-0914, 2019, <https://doi.org/10.4271/2019-01-0914> (дата обращения 18.05.2019).

175. Krabbes, M. Dynamic modeling and control of a 6 DOF parallel kinematics / M. Krabbes, Ch. Meißner // Modelica, 2006. – Vol. 4–5. – P. 385–390.

176. Krabbes, M. Dynamic modeling and control of a 6 DOF parallel kinematics / M. Krabbes, Ch. Meibner. – <http://www.modelica.org/events/modelica2006/Proceedings/sessions/Session407.pdf> (дата обращения 18.05.2019).

177. Krabbes, M. Dynamic modeling and control of a 6 DOF parallel kinematics / M. Krabbes, Ch. Meißner // 5th International Modelica Conference (Vienna, 2006). – P. 385–390.

178. Kumar Y., Kumar S. Design and development of single point incremental sheet forming machine / 5th International & 26th All India Manufacturing Technology, Design and Research Conference (AIMTDR 2014). 2014. P. 94-1-94-4.

179. Kumar, Y. Design and development of single point incremental sheet forming machine / Y. Kumar, S. Kumar // 5th International & 26th All India Manufacturing Technology, Design and Research Conference, 2014. – P. 94-1–94-4.

180. Lee, S.-H. Position control of a Stewart platform using inverse dynamics control with approximate dynamics / S.-H. Lee, J.-B. Song, W.-C. Choi, D. Hong // Mechatronics, 2003. – Vol. 13. – P. 605–619.

181. Li, X. Optimal fault tolerant control of flexure jointed hexapods for applications requiring less than six degrees of freedom / X. Li, J.E. Mcinroy, J.C. Hamann // Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control (Sydney, Australia, 2000). – Vol. 4. – P. 3337–3338.

182. Li, Y. Dynamic analysis of a modified DELTA parallel robot for cardiopulmonary resuscitation / Y. Li, Q. Xu. – University of Macau (China). – <http://www.sftw.umac.mo/~yangmin/conferencepdf/C05-17-Li-Xu-Iros.pdf> (дата обращения 18.05.2019).

183. Li, Z. Reconfiguration and tool path planning of hexapod machine tools // Z. Li – <http://archives.njit.edu/vol01/etd/2000s/2000/njit-etd2000-058/njit-etd2000-58.pdf> (дата обращения 18.05.2019).

184. Liu, G. Singularities of parallel manipulators: a geometric treatment / G. Liu, Y. Lou, Z. Li // IEEE Transactions on robotics and automation, 2003. – Vol. 19 (4). – P. 579–594.

185. Liu, K. Kinematic analysis of a Stewart platform manipulator / K. Liu, M.K. Fitzgerald, F. Lewis // IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1993. – Vol. 40 (2). – P. 282–293.

186. Liu, K. Modeling and control of a Stewart platform manipulator / K. Liu, M. Fitzgerald, D. W. Dawson, and F. L. Lewis // Proc. ASME Symp. Control of Systems with Inexact Dynamic Models, 1991. – P. 83–89.

187. Liu, K. The singularities and dynamics of a Stewart platform manipulator / K. Liu, F. Lewis, G. Lebet, D. Taylor // Journal of Intelligent & Robotic Systems. 1993. –Vol. 8. – P. 287–308.

188. Lorenz, M. A study on efficient motion design for redundantly actuated parallel kinematic manipulators / M. Lorenz, J. Paris, T. Haschke, F. Schöler, M. Hüsing, B. Corves // 2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), September 24–28, 2017. – P. 5638–5645. DOI: 10.1109/IROS.2017.8206452 (дата обращения 18.05.2019).

189. Lorenz, M. Energy-efficient trajectory planning for robot manipulators / M. Lorenz, J. Paris, F. Schöler, J.-P. Barreto, T. Mannheim, M. Hüsing, B. Corves //

Proceedings of the ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE), 2017. DOI: 10.1115/DETC2017-67198 (дата обращения 18.05.2019).

190. Luces, M. A review of redundant parallel kinematic mechanisms / M. Luces, J. K. Mills, B. Benhabib // *Journal of Intelligent and Robotic Systems*. – Volume 86. – Issue 2, 2017. – P. 175–198.

191. Marabuto S. R., Afonso D., Ferreira J.A.F., Melo F.Q., Martins M., Alves de Sousa R.J. Finding the best machine for SPIF operations – a brief discussion // *Key Engineering Materials* Vol. 473 (2011). P. 861-868.

192. Martins, P.A.F. Theory of single point incremental forming / P.A.F. Martins, N. Bay, M. Skjoedt, M.B. Silva // *CIRP Annals – Manufacturing Technology*, 2008. – № 57. – P. 247–252.

193. McCallion, H. The Analysis of a Six-Degree-of-Freedom Workstation for Mechanized assembly / H. McCallion, P.D. Truong // *Proc. of the First World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*. – Monreal, 1979. – jul 8–13. – P. 611–619.

194. Memicoglua, P. Simulation of incremental sheet forming using partial sheet models / P. Memicoglua, O. Musicb, C. Karadogan // *Procedia Engineering*, 2017. – Vol. 207. – P. 831–835.

195. Merlet, J.-P. Optimal trajectory planning of a 5-axis machine tool based on a 6-axis parallel manipulator / J.-P. Merlet, M.-W. Perng, D. Daney // *Advances in Robot Kinematic*, 2000. – P. 315–322.

196. Merlet, J.-P. Research Report No. 646 / J.-P. Merlet. – INRIA, 1987.

197. Merlet, J-P. A generic trajectory verifier for the motion planning of parallel robots / J-P. Merlet // *ASME Journal of Mechanical Design*, 2001. – Vol. 123 (4). – P. 510–515.

198. Merlet, J-P. An algorithm for the forward kinematics of general 6 d.o.f. parallel manipulators. Technical Report № 1331 / J-P. Merlet. – INRIA, 1990. – 27 p.

199. Merlet, J-P. An improved design algorithm based on interval analysis for parallel manipulator with specified workspace / J-P. Merlet // IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (Seoul, 2001). – P. 1289–1294.

200. Merlet, J-P. An interval analysis based study for the design and the comparison of three-degrees-of-freedom parallel kinematic machine / D. Chablat, P. Wenger, F. Majou, J-P. Merlet // International Journal of Robotics Research, 2004. – Vol. 23 (6). – P. 615–624.

201. Merlet, J-P. Calibration of parallel robots: on the elimination of pose-dependent parameters / D. Daney, I.Z. Emiris, Y. Papegay, E. Tsigaridas, J-P. Merlet // Proceedings of the 1st European Conf. on Mechanism Science (Oberurgl, 2006). – <ftp://ftp-sop.inria.fr/coprin/daney/articles/EuCoMeS-026.pdf> (дата обращения 18.05.2019).

202. Merlet, J-P. Closed-form resolution of the direct kinematics of parallel manipulators using extra sensors data / J-P. Merlet // IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (Atlanta, 1993). – P. 200–204.

203. Merlet, J-P. Democrat: A DEsign Methodology for the Conception of robots with parallel ArchiTecture / J-P. Merlet // Robotica, 1997. – Vol. 15 (4). – P. 367–373.

204. Merlet, J-P. Deployable hexapod using tape-springs / L. Blanchard, F. Falzon, J. Dupuis, J-P. Merlet. // In Disruption in Space, ESA/CNES Symp., Marseille, 2005. – <http://handle.dtic.mil/100.2/ADA445185> (дата обращения 18.05.2019).

205. Merlet, J-P. Designing a parallel manipulator for a specific workspace. Technical Report № 2527 / J-P. Merlet. – INRIA, 1995. – 64 p.

206. Merlet, J-P. Designing a parallel manipulator for a specific workspace / J-P. Merlet // International Journal of Robotics Research, 1997. – P. 545–556.

207. Merlet, J-P. Determination of 6D workspaces of Gough-type parallel manipulator and comparison between different geometries / J-P. Merlet // International Journal of Robotics Research, 1999. – Vol. 18 (9). – P. 902–916.

208. Merlet, J-P. Determination of the orientation workspace of parallel manipulators / J-P. Merlet // Journal of Intelligent and Robotic Systems, 1995. – Vol. 13 (1). – P. 143–160.



209. Merlet, J-P. Determination of the wrench-closure workspace of 6-dof parallel cable-driven mechanisms / M. Gouttefarde, J-P. Merlet, D. Daney // *Advances in Robot Kinematic*, 2006. – P. 315–322.

210. Merlet, J-P. Dimensional synthesis of parallel robots with a guaranteed given accuracy over a specific workspace / J-P. Merlet, D. Daney // *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation* (Barcelona, 2005). – P. 942–947.

211. Merlet, J-P. Direct Kinematics and Assembly Modes of Parallel manipulators / J-P. Merlet // *International Journal of Robotics Research*, 1992. – Vol. 11 (2). – P. 150–162.

212. Merlet, J-P. First results on the design of high speed parallel robots in presence of uncertainty / N. Ramdani, M. Gouttefarde, F. Pierrot, J-P. Merlet // *IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems* (Nice, France, 2008). – P. 2410–2415.

213. Merlet, J-P. Five precision points synthesis of spatial RRR manipulators using interval analysis / E. Lee, C. Mavroidis, J-P. Merlet // *Journal of Mechanical Design*, 2004. – Vol. 125 (5). – P. 842–849.

214. Merlet, J-P. Forward kinematics of non-polyhedral parallel manipulators / J-P. Merlet // *ASME Journal of Mechanical Design*, 1993. – Vol. 115 (4). – P. 938–940.

215. Merlet, J-P. Hexaspine: a parallel platform for physical cervical spine simulation – design and interval-based verification / K. Liem, A. Kecskeméthy, J-P. Merlet // *Proceedings of the 12th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms* (Besancon, 2007). – [http://130.15.85.212/proceedings/proceedings\\_WorldCongress/WorldCongress07/articles/sessions/papers/A432.pdf](http://130.15.85.212/proceedings/proceedings_WorldCongress/WorldCongress07/articles/sessions/papers/A432.pdf) (дата обращения 18.05.2019).

216. Merlet, J-P. Kinematic analysis of a spatial four-wire driven parallel crane without constraining mechanism / J-P. Merlet, D. Daney. – <https://twiki.sop.inria.fr/twiki/pub/Projets/Coprin/SIROPA/ck2009.pdf> (дата обращения 18.05.2019).

217. Merlet, J-P. Legs interference checking of parallel robots over a given workspace or trajectory / J-P. Merlet, D. Daney // IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (Orlando, 2006). – P. 757–762.
218. Merlet, J-P. Multi-criteria optimal design of parallel manipulators based on interval analysis / H. Fang, J-P. Merlet // Mechanism and Machine Theory, 2005. – Vol. 40 (2). – P. 151–171.
219. Merlet, J-P. On solving the direct kinematics problem for parallel robots. Technical Report № 5923 / J.C. Faugère, J-P. Merlet, F. Rouillier. – INRIA, 2006. – 24 p.
220. Merlet, J-P. On the regularity of the inverse jacobian of parallel robot / J-P. Merlet, P. Donelan // Advances in Robot Kinematic, 2006. – P. 41–48.
221. Merlet, J-P. Optimal design of robots / J-P. Merlet // IEEE Int. Conf. Robotics: Science and Systems (Boston, 2005). – <http://www.roboticsproceedings.org/rss01/p41.pdf> (дата обращения 18.05.2019).
222. Merlet, J-P. Parallel manipulators. Part 2. Singular Configurations and Grassmann geometry. Technical Report № 791 / J-P. Merlet. – INRIA, 1988. – 69 p.
223. Merlet, J-P. Parallel robots. 2nd Edition / J-P. Merlet. – Springer, 2005. – 417 p.
224. Merlet, J-P. Parallel robots: open problems / J-P. Merlet. – <http://www-sop.inria.fr/members/Jean-Pierre.Merlet//Problemes/isrr99-html.html> (дата обращения 18.05.2019).
225. Merlet, J-P. Singularity analysis through static analysis / Hubert and J-P. Merlet // Advances in Robot Kinematic, 2008. – P. 13–20.
226. Merlet, J-P. Solving the Forward Kinematics of a Gough-Type Parallel Manipulator with Interval Analysis / J-P. Merlet // International Journal of Robotics Research, 2004. Vol. 23(3). – P. 221–235.
227. Merlet, J-P. Trajectory verification in the workspace for parallel manipulators / J-P. Merlet // International Journal of Robotics Research, 1994. – Vol. 13 (4). – P. 326–333.

228. Merlet, J-P. Workspace analysis of the Orthoglide using interval analysis / D. Chablat, P. Wenger, J-P. Merlet // *Advances in Robot Kinematic*, 2002. – P. 397–406.
229. Merlet, J-P. Workspaces of planar parallel manipulators / J-P. Merlet, C. Gosselin, N. Mouly // *Mechanism and Machine Theory*, 1998. – Vol. 33 (1–2). – P. 7–20.
230. Merlet, J-P. Wrench-feasible workspace of parallel cable-driven mechanisms / M. Gouttefarde, J-P. Merlet, D. Daney // *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (Roma, 2007)*. – P. 1492–1497.
231. Mini educational 3-axis parallel kinematic milling machine / D. Milutinovic, M. Glavonjic, S. Zivanovic, Z. Dimic, V. Kvrjic // *The 3rd International Conference on Manufacturing Engineering (Chalkidiki, 2008)*. – P. 463–474.
232. Ni, Y. Interpolation control algorithm for a three-RPS parallel spindle head / Y. Ni, Y. Zhang, K. Sun, H. Wang, Y. Sun // *Journal of systems and control engineering*, 2016. – DOI: 10.1177/0959651816645687 (дата обращения 18.05.2019).
233. Numerical study of incremental sheet forming processes / H. Kim<sup>1</sup>, T. Park<sup>1</sup>, R. Esmailpour<sup>1</sup>, F. Pourboghraat // *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*, 2018. – Vol. 1063. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1063/1/012017>. (дата обращения: 01.03.2019).
234. O'Brien, J.F. Kinematic control of parallel robots in the presence of unstable singularities / J.F. O'Brien, J.T. Wen // *In IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (Seoul, 2001)*. – P. 3154–3159.
235. Oen, K.-T. Optimal dynamic trajectory planning for linearly actuated platform type parallel manipulators having task space redundant degree of freedom / K.-T. Oen, L.-C. T. Wang // *Mechanism and machine theory*, 2007. – Vol. 42. – P. 727–750.
236. Oiwa, T. Study on Abbe's principle in parallel kinematics / T. Oiwa, M. Tamaki // *In 2nd Chemnitzer Parallelkinematik Seminar (Chemnitz, 2000)*. – P. 345–353.

237. Omran, A. Genetic algorithm based optimal control for a 6-DOF non redundant stewart manipulator / A. Omran, G. El-Bayiumi, M. Bayoumi, A. Kassem // International Journal of Mechanical, Industrial and Aerospace Engineering, 2008. – Vol. 2 (2). – P. 73–79.

238. Oraon, M. Predicting force in single point incremental forming by using artificial neural network / Oraon M., Sharma V. // IJE TRANSACTIONS A: Basics. 2018. – Vol. 31. – № 1. – P. 88–95.

239. Ottaviano, E. Optimal design of CaPaMan (Cassino Parallel Manipulator) with prescribed position and orientation workspace / E. Ottaviano, M. Ceccarelli. – [http://med.ee.nd.edu/MED9/Papers/Robotics/Robotics\\_3/med01-009.pdf](http://med.ee.nd.edu/MED9/Papers/Robotics/Robotics_3/med01-009.pdf) (дата обращения 18.05.2019).

240. Paccot, F. A review on dynamic control of parallel kinematic machine: theory and experiments / F. Paccot, N. Andreff, P. Martinet // The International Journal of Robotics Research March, 2009. – Vol. 28 (3). – P. 395–416.

241. Park, F.C. Singularity analysis of closed kinematic chains / F.C. Park, J.W. Kim // Journal of Mechanical Design, 1999. – Vol. 121 (1). – P. 32–38.

242. Parsa, S. On-orbit servicing: novel algorithms for motion control of robot manipulators / S.S. Parsa, C.M. Saaj, H.R.M. Daniali, R. Ghaderi. – [http://robotics.estec.esa.int/ASTRA/Astra2008/S13/13\\_04\\_Saaj.pdf](http://robotics.estec.esa.int/ASTRA/Astra2008/S13/13_04_Saaj.pdf) (дата обращения 18.05.2019).

243. Pierrot, F. Optimal design of a 4-dof parallel manipulator from academia to industry / F. Pierrot, V. Nabat, O. Company, S. Krut, P. Poignet // IEEE Transactions on Robotics, 2009. – Vol. 25 (2). P. 213–224.

244. Pott, A. Parameter synthesis for parallel kinematic machines from given process requirements / A. Pott, T. Boye, M. Hiller // IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (Monterey, 2005). – P. 753–758.

245. Pusey, J. Design and workspace analysis of a 6-6 cable-suspended parallel robot / J. Pusey, A. Fattah, S. Agrawal, E. Messina // Mechanism and Machine Theory, 2004. – Vol. 139 (7). – P. 761–778.

246. Pyung, H. A Closed Form Solution for Inverse Kinematics of Robot Manipulator with Redundancy / H. Pyung, Chang. – <http://hdl.handle.net/1721.1/6425> (дата обращения 18.05.2019).

247. Reisinger, T. Hybrid position/force–control for implementing skill primitives / T. Reisinger. – <http://www.icgst.com/ACSE05/papers/P1110527102.pdf> (дата обращения 18.05.2019).

248. Renaud, P. Simplifying the kinematic calibration of parallel mechanisms using vision-based metrology / P. Renaud, N. Andreff, J-M. Lavest, M. Dhome // *IEEE Transactions on Robotics*, 2006. – Vol. 22 (1). – P. 11–22.

249. Rolland, L. Path planning kinematics simulation of CNC machine tools based on parallel manipulators / L. Rolland // *Mechanisms and Machine Science*, 2015. – № 29. – P. 147–192.

250. Santis, A. Inverse kinematics of robot manipulators with multiple moving control points / A. Santis, B. Siciliano // *Advances in Robot Kinematics: Analysis and Design*. – Springer, 2008. P. 429–438.

251. Schlattmann, J. Complex parallel mechanisms in a two legged robot respectively machine tools controlled by MEMS based position and motion sensors / J. Schlattmann, M.T. Tesfu // *International Seminar on Industrial Engineering and Management (Bali, 2009)*. – P. 137–144.

252. Shen, X. A smooth and undistorted toolpath interpolation method for 5-DoF parallel kinematic machines / X. Shen, F. Xie, X.-J. Liu, Z. Xie // *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, 2019. – Vol. 57. – P. 347–356.

253. Simaan, N. Stiffness synthesis of a variable geometry planar robot / N. Simaan, M. Shoham. *Advances in Robot Kinematic*, 2002. – P. 463–472.

254. Simaan, N. Stiffness synthesis of a variable geometry six-degrees-of-freedom double planar parallel robot / N. Simaan, M. Shoham // *The International Journal of Robotics Research*, 2003. – Vol. 22 (9). – P. 757–775.

255. Smirnov, V. Energy efficient trajectories of industrial machine tools with parallel kinematics / V. Smirnov, V. Plyusnin, G. Mirzaeva // *ICIT 2013 – 2013 IEEE In-*

ternational Conference on Industrial Technology (Cape Town, South Africa, 25-28 February, 2013). – P. 1267 – 1272.

256. Some approaches for modeling and analysis of a parallel mechanism with Stewart platform architecture V. De Sapio SANDIA REPORT SAND98-8242 Unlimited Release Printed May 1998, 54 p.

257. Song, S-K. Efficient formulation approach for the forward kinematics of 3-6 parallel mechanisms / S-K. Song, D-S. Kwon // *Advanced Robotics*, 2002. – Vol. 16 (2). – P. 191–215.

258. Song, S-K. New direct kinematic formulation of 6 D.O.F Stewart-Gough platforms using the tetrahedron approach / S-K. Song, D-S. Kwon // *Transactions on Control, Automation, and Systems Engineering*, 2002. – Vol. 4 (3). – P. 217–223.

259. Song, S-K. New direct kinematics formulation of 6 D.O.F Stewart-Gough platforms using the tetrahedron approach / S-K. Song, D-S. Kwon // *Transactions on Control, Automation and Systems Engineering*, 2002. – Vol. 4 (3). – P. 217–223.

260. Song, S-K. New Formulation method for reducing the direct kinematic complexity of the 3-6 Stewart-Gough platform / S-K. Song, D-S. Kwon // *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2002. – Vol. 4 (2). – P. 156–163.

261. SPIF-A: on the development of a new concept of incremental forming machine / R.J. Alves de Sousa, J.A.F. Ferreira, J.B. Sá de Farias, J.N.D. Torrão, D.G. Afonso, M.A.B.E Martins // *Structural Engineering and Mechanics*, 2014. – Vol. 49. – №. 5. – P. 645–660.

262. Stan, S-D. Kinematics and fuzzy control of ISOGLIDE3 medical parallel robot / S-D. Stan, R. Bălan, V. Mătieș, C. Rad // *Mechanika*, 2009. – Vol. 1 (75). – P. 62–66.

263. Steiner, J. Runtime analysis and adaptation of a hard real-time robotic control system / J. Steiner, M. Hagner, U. Goltz // *Journal of computers*, 2007. – Vol. 2 (10). – P. 18–27.

264. Stewart, D. A Platform with Six Degrees of Freedom / D. Stewart // *Proc. Institute of Mechanical Engineering*, 1965. – Vol. 180. – P. 371–386.

265. Szep, C. New approach for accuracy and kinematics analysis of 2 DOF medical parallel robot / C. Szep, S-D. Stan, V. Csibi, M. Manic, R. Balan // 3rd IEEE International Conference on Digital Ecosystems and Technologies (Istanbul, 2009). – P. 524–529.
266. Tancredi, L. Symbolic elimination for parallel manipulators. Research Report № 2809 / L. Tancredi, M. Teillaud, O. Devillers. – INRIA, 1996. – 34 p.
267. Tesfu, M.T. Simulation based methodology for selection and integration of real time control electronics into complex dynamic mechanical systems / M.T. Tesfu, J. Schlattmann, L. Ziemer // Proceedings of the 2008 IAJC-IJME International Conference. – [http://www.ijme.us/cd\\_08/PDF/122,\\_ENG\\_101.pdf](http://www.ijme.us/cd_08/PDF/122,_ENG_101.pdf) (дата обращения 18.05.2019).
268. Tisza, M. General overview of sheet incremental forming / M. Tisza // Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering, 2012. – Vol. 55. – № 1. – P. 113–120.
269. Tyapin, I. Collision-free workspace design optimisation of the 3-dof gantry-tau parallel kinematic machine / Илья Тыапин. – <http://www.araa.asn.au/acra/acra2008/papers/pap148s1.pdf> (дата обращения 18.05.2019).
270. Wampler, C.W. An implicit loop method for kinematic calibration and its application to closed-chain mechanisms / C.W. Wampler, J.M. Hollerbach, T. Arai // Transaction on Robotics and Automation, 1995. – Vol. 11 (5). – P. 710–724.
271. Wan, Y. A Y-star robot: optimal design for the specified workspace / Y. Wan, G. Wang, S. Ji, Z. Wang, J. Liu // International Conference on Computer Science and Software Engineering (Wuhan, Hubei, 2008). – P. 1089–1093.
272. Wang, J. Nonlinearity for a parallel kinematic machine tool and its application to interpolation accuracy analysis / J. Wang, Z. Wang, T. Huang, D.J. Whitehouse // Science of China, 2002. – Vol. 45. – №. 1. – P. 97–105.
273. Wang, Y. Interpolation error prediction of a three-degree parallel kinematic machine / Y. Wang, T. Huang, C.M. Gosselin // Journal of mechanical design, 2004. – Vol. 126. – P. 932–937.

274. Weck, M. Parallel kinematic machine tools – current state and future potentials / M. Weck, D. Staimer // *CIRP Annals – Manufacturing Technology*, 2002. – Vol. 51 (2). – P. 671–683.

275. Wenger, P. A comparative study of parallel kinematic architecture for machining applications / P. Wenger, C. Gosselin, D. Chablat. – [http://www.sop.inria.fr/coprin/EJCK/Vol1-1/23\\_wenger\\_gosselin\\_chablat.pdf](http://www.sop.inria.fr/coprin/EJCK/Vol1-1/23_wenger_gosselin_chablat.pdf) (дата обращения 18.05.2019).

276. Wiens, G.J. Structural dynamics and system identification of parallel kinematic machines / G.J. Wiens, D.S. Hardage // *Proceedings of IDETC/CIE 2006 ASME 2006 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference (Philadelphia, Pennsylvania, 2006)*. – P. 749-758.

277. Williams II, R.L. Planar parallel 3-RPR manipulator / R.L. Williams II, A.R. Joshi *Proc. of the Sixth Conference on Applied Mechanisms and Robotics (Cincinnati, 1999)*. – <http://oak.cats.ohiou.edu/~williar4/PDF/Amr99RPR.pdf> (дата обращения 18.05.2019).

278. Williams II, R.L. Spherically-actuated platform manipulator / R.L. Williams II, D.B. Poling. – <http://oak.cats.ohiou.edu/~williar4/PDF/JRS2001.pdf> (дата обращения 18.05.2019).

279. Wolf, A. Application of line geometry and linear complex approximation to singularity analysis of the 3-DOF CaPaMan parallel manipulator / A. Wolf, E. Ottaviano, M. Shoham, M. Ceccarelli // *Mechanism and Machine Theory*, 2004. – Vol. 39. – P. 75–95.

280. Xi, F. Global kinetostatic modelling of tripod-based parallel kinematic machine / F. Xi, D. Zhang, C.M. Mechefske, S.Y.T. Lang // *Mechanism and Machine Theory*, 2004. – Vol. 39. – P. 357–377.

281. Xie, F. Optimal design and development of a decoupled A/B-axis tool head with parallel kinematics advances in mechanical engineering / F. Xie, X-J. Liu, L-P. Wang, J. Wang // *Advances in Mechanical Engineering*. – Vol. 2010 (2010). – Article ID 474602. – <http://www.hindawi.com/journals/ame/2010/474602.html> (дата обращения 18.05.2019).



282. Xu, Q. Dynamic modeling and robust control of a 3-PRC translational parallel / Q. Xu, Y. Li // *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2009. – Vol. 25 (3). – P. 630–640.

283. Zhao, Y. Dynamics analysis of a 5-UPS/PRPU parallel machine tool / Y. Zhao, Y. Hou, Y. Shi, L. Lu // *12th IFToMM World Congress (Besançon, 2007)*. – [http://130.15.85.212/proceedings/proceedings\\_WorldCongress/WorldCongress07/articles/sessions/papers/A673.pdf](http://130.15.85.212/proceedings/proceedings_WorldCongress/WorldCongress07/articles/sessions/papers/A673.pdf) (дата обращения 18.05.2019).

Общество с ограниченной  
ответственностью

Научно-производственное  
объединение

**ТЕХНОЛАЙН**

ОГРН 1087453002394  
ИНН 7453193522, КПП 74301001

10.02.2018

**Акт  
о внедрении результатов  
диссертационной работы**

Настоящим подтверждаем, что с использованием материалов диссертационной работы Смирнова Владимира Алексеевича «Повышение эффективности приводных устройств в машинах с параллельными кинематическими структурами за счет уменьшения энергопотребления, повышения точности и быстродействия» на предприятии создан программно-аппаратный комплекс для управления оборудованием с параллельной кинематикой, включающий:

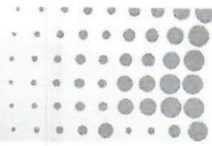
– программное обеспечение верхнего уровня для расчета траектории движения рабочего органа технологической машины с параллельной кинематикой на основе механизма-гексапода, отвечающей требованиям по увеличению скорости перемещения рабочего органа, по повышению надежности машины за счет перераспределения возникающих в ее элементах силовых факторов, по снижению потребления энергии ее приводами;

– система управления 6-ти координатной машиной с параллельной кинематикой на основе механизма-гексапода, использующая динамическую модель такого механизма и реализующая многомерную интерполяцию траектории методом управления на постоянной несущей частоте.

Директор



Л.Н. Петрова

**Приложение Б****ZEOTEK**  
Завод энергоэффективного  
и емкостного оборудования**Акт****о внедрении результатов  
диссертационной работы**

06.03.2019

Настоящим подтверждаем, что при разработке конструкции 6-ти степенного прецизионного сварочного позиционера с параллельной кинематикой использованы следующие результаты диссертации «Повышение эффективности приводных устройств в машинах с параллельными кинематическими структурами за счет уменьшения энергопотребления, повышения точности и быстродействия» (автор: Смирнов Владимир Алексеевич):

– уточненная кинематическая модель механизма-гексапода; использована при разработке кинематической схемы механизма, лежащего в основе позиционера;

– алгоритм интерполяции траекторного движения рабочего органа; использован для реализации управления приводами позиционера;

– динамическая модель механизма-гексапода; использована для верификации параметров изготовленного позиционера с целью повышения качества управления позиционером.

Использование позиционера позволило упростить созданный на предприятии сварочный комплекс за счет отказа от 6-ти координатного сварочного робота и обеспечить требуемую точность по взаимному перемещению изделия и сварочной головки.

Управляющий



Шабанов Д.С.

## Приложение В



Челябинский завод  
мобильных энергоустановок  
и конструкций

WWW.CHZMEK.RU

### Акт

#### о внедрении результатов диссертационного исследования

20.04.2017

Настоящим удостоверяется, что результаты диссертационной работы Смирнова Владимира Алексеевича на тему «Повышение эффективности приводных устройств в машинах с параллельными кинематическими структурами за счет уменьшения энергопотребления, повышения точности и быстродействия» использованы на предприятии при создании и эксплуатации в рамках опытного производства станка с параллельной кинематикой для получения изделий методом инкрементальной формовки.

Теоретические положения, обеспечивающие снижение потребления энергии приводами машины с параллельной кинематической структурой, использованы для обоснования целесообразности применения механизма-гексапода при разработке станка для инкрементальной формовки.

Кинематические модели, использующие гиперкомплексные числа, алгоритмы управления приводами, реализующие многокоординатное движение пуансона, и динамическая модель станка как машины с параллельной кинематической структурой использованы в программном обеспечении системы управления станком.

На основе материалов диссертационной работы на предприятии создана методика снижения затрат при выполнении инкрементальной формовки.

Помощник директора



Дедух Н.В.

ООО «ЧЗМЭК»  
ИНН 7450061013 КПП 746001001  
ОГРН 1087450005940  
Р/С 407 02 810 3723 100 21339  
в Челябинском ОСБ № 8597 Г. ЧЕЛЯБИНСК  
БИК 04 75 01 602 К/С 301 01 810 7 0000 0000 602  
Юр. адрес: 454038, г. Челябинск, ул. Хлебозаводская, 5

ПОЖАРНОЕ, НАСОСНОЕ,  
КОМПРЕССОРНОЕ,  
ГАЗОРАЗДЕЛИТЕЛЬНОЕ ОБОРУДОВАНИЕ  
в блочно-модульном исполнении  
г. Челябинск, ул. Хлебозаводская, 5  
тел./факс: (351) 729-91-06, 222-41-44  
e-mail: zakaz@chzmek.ru

## Приложение Г



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УНИТАРНОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ  
ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ

«ОКТАБРЬ»



IRIS  
Certification

Российская Федерация, 623420, Свердловская область, г. Каменск-Уральский, ул. Рябова, 8  
телефон: /3439/ 322-279 факс: /3439/ 325-207, 339-692  
http://www.neywa.ru, e-mail: october@neywa.ru  
ОГРН 1026600932566 ИНН 6612001971

30.05.2019 № 016/375

На № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

411071

Для представления  
в диссертационный совет

Настоящим удостоверяется, что результаты научных исследований, представленные в диссертации Смирнова Владимира Алексеевича на тему «Повышение эффективности приводных устройств в машинах с параллельными кинематическими структурами за счет уменьшения энергопотребления, повышения точности и быстродействия», а именно:

- динамические модели штанг переменной длины;
  - теоретические положения и алгоритмы управления, обеспечивающие снижение потребления энергии приводами машины с параллельной кинематической структурой
- использованы для повышения эффективности приводов рабочих органов манипуляторов за счет использования ресурсов конструкции.

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЕНЕРАЛЬНОГО ДИРЕКТОРА –  
ГЛАВНЫЙ КОНСТРУКТОР

С.Ю. Гришаев



## Приложение Д

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

**ПАТЕНТ**

НА ПОЛЕЗНУЮ МОДЕЛЬ

№ 80137

**УСТРОЙСТВО ФОРМИРОВАНИЯ  
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ  
КООРДИНАТ**

Патентообладатель(ли): *Общество с ограниченной  
ответственностью Научно-производственное  
объединение "ТехноЛайн" (RU)*

Автор(ы): *см. на обороте*

Заявка № 2008111901

Приоритет полезной модели **31 марта 2008 г.**

Зарегистрировано в Государственном реестре полезных  
моделей Российской Федерации **27 января 2009 г.**

Срок действия патента истекает **31 марта 2018 г.**

*Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной  
собственности, патентам и товарным знакам*



Б.П. Симонов

## Приложение Е

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

**ПАТЕНТ**

НА ПОЛЕЗНУЮ МОДЕЛЬ

№ 111044

**МАЛОГАБАРИТНОЕ МНОГОКООРДИНАТНОЕ  
ОБРАБАТЫВАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО НА ОСНОВЕ  
МЕХАНИЗМА С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КИНЕМАТИКОЙ**

Патентообладатель(ли): *Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Южно-Уральский государственный университет" (ГОУ ВПО "ЮУрГУ") (RU)*

Автор(ы): *см. на обороте*

Заявка № 2011107050

Приоритет полезной модели 24 февраля 2011 г.

Зарегистрировано в Государственном реестре полезных моделей Российской Федерации 10 декабря 2011 г.

Срок действия патента истекает 24 февраля 2021 г.

*Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам*



Б.И. Симонов

## Приложение Ж

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

**ПАТЕНТ**

НА ПОЛЕЗНУЮ МОДЕЛЬ

№ 140220

**ШЕСТИКОМПОНЕНТНЫЙ ИЗМЕРИТЕЛЬ-ПОЗИЦИОНЕР**

Патентообладатель(ли): *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Южно-Уральский государственный университет" (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВПО "ЮУрГУ" (НИУ)) (RU)*

Автор(ы): *см. на обороте*

Заявка № 2013155084

Приоритет полезной модели 10 декабря 2013 г.

Зарегистрировано в Государственном реестре полезных моделей Российской Федерации 03 апреля 2014 г.

Срок действия патента истекает 10 декабря 2023 г.

*Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности*

Б.П. Симонов





## Приложение И

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2009612959

Пакет прикладных программ для ЭВМ «WorkSpace РКМ»

Правообладатель(ли): *Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (ГОУ ВПО «ЮУрГУ») (RU), Общество с ограниченной ответственностью Научно-производственное объединение «ТехноЛайн» (ООО НПО «ТехноЛайн») (RU)*

Автор(ы): *Смирнов Владимир Алексеевич, Петрова Лина Николаевна, Сулацкая Елена Юрьевна, Сюськина Юлия Львовна (RU)*

Заявка № 2009611493

Дата поступления 6 апреля 2009 г.

Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ  
5 июня 2009 г.

*Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам*

Б.П. Симонов

## Приложение К

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2013660918

**Прикладная программа для ЭВМ «Шестикомпонентный измеритель-позиционер для определения динамических характеристик беспилотного летательного аппарата при наземной отработке»**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ» (НИУ)) (RU)*

Авторы: *Федоров Виктор Борисович (RU), Смирнов Владимир Алексеевич (RU), Петрова Лина Николаевна (RU)*

Заявка № 2013619053

Дата поступления 09 октября 2013 г.

Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ 25 ноября 2013 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов