

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Подвилова Елена Олеговна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ПОДВИЖНЫХ
ОБЪЕКТОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ С
РАЗРАБОТКОЙ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА
ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ**

Специальность 05.13.18 —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
д.т.н., профессор
Ширяев В.И.

Челябинск — 2020

Оглавление

Введение	5
1 Анализ численных методов оценивания состояния подвижных объектов	16
1.1 Обзор детерминированных и вероятностных методов оценивания	16
1.2 Обзор методов гарантированного оценивания и аппроксимации информационных множеств	21
1.3 Постановка задачи	35
2 Алгоритмы гарантированного оценивания на основе численного метода полиэдральной аппроксимации	37
2.1 Задачи управления и оценивания в условиях неполной информации	37
2.2 Моделирование эволюции информационных множеств подвижных объектов на основе описания вектора состояния системами линейных неравенств	40
2.3 Алгоритм аппроксимации информационных множеств	47
2.4 Сравнение методов гарантированного оценивания	54
2.5 Оценка вычислительной сложности алгоритма	62
2.6 Выводы по главе	65
3 Алгоритмы гарантированного оценивания с учётом особенностей математических моделей процессов в подвижных объектах 67	67
3.1 Использование особенностей математических моделей процессов в подвижных объектах в задаче гарантированного оценивания . .	67
3.2 Моделирование эволюции информационных множеств при разложении возмущения по системе функций	69

3.3	Оценка состояния для математических моделей объектов с трёхмерным вектором состояния	75
3.4	Гарантированное оценивание состояния переключаемых систем	79
3.5	Исследование гарантированных оценок состояния подвижных объектов при аномальных измерениях	83
3.6	Выводы по главе	89
4	Реализация алгоритмов полиэдральной аппроксимации, моделирование и исследования гарантированных оценок для различных математических моделей подвижных объектов	92
4.1	Гарантированная оценка вектора состояния в системе управления боковым движением летательного аппарата на основе вычислительного эксперимента	92
4.2	Гарантированная оценка ошибок БИНС в продольном и боковом каналах на основе вычислительного эксперимента	102
4.3	Гарантированное оценивание параметров модели «быстрых» колебаний по экспериментальным данным волоконно-оптического гироскопа ВОГК-2	113
4.4	Проведение натурного эксперимента и гарантированное оценивание состояния автомобильной дроссельной заслонки	122
4.5	Применение гарантированного подхода в задаче динамических измерений температуры	127
4.6	Выводы по главе	139
5	Программный комплекс для вычислительных экспериментов и исследований гарантированных оценок состояния подвижных объектов методом полиэдральной аппроксимации	142
	Заключение	151
	Список литературы	156
	Приложение А. Акты внедрения	174

Приложение Б. Исходные данные для эксперимента с дроссель- ной заслонкой176
Приложение В. Исходные данные для эксперимента с термопарой180
Приложение Г. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ183

Введение

Актуальность работы

Задача оценивания состояния возникает в различных системах управления подвижными объектами, таких как системы управления летательными аппаратами, системы слежения и обнаружения целей, автоматизированные системы управления технологическими процессами и предприятиями и др. Функционирование подвижного объекта осуществляется следующим образом: в процессе работы подвижного объекта производится измерение функций компонент вектора состояния, по результатам которого осуществляется оперативное оценивание полного вектора состояния, а затем на основе полученной оценки и заложенного критерия качества вырабатывается величина терминального управления [10, 102]. При этом подвижные объекты функционируют в условиях неопределённости, обусловленной неполнотой информации о внешних возмущениях и помехах измерений, неточностью в задании параметров модели, малым объёмом измерительной информации. Однако системы управления подвижными объектами должны обеспечивать всё растущие требования к точности и быстродействию при их функционировании в условиях неполноты информации.

Выбор алгоритма оценивания зависит от предположений о характере и моделях возмущений и помех, действующих в объекте. Для описания реальных процессов часто применяют стохастические модели, когда начальное состояние системы, возмущения и ошибки измерений являются нормально распределёнными взаимно некоррелированными случайными величинами. Классические подходы к оцениванию основаны на предположении, что статистические характеристики возмущений, помех, действующих на объект, известны. Если предполагается, что возмущения и помехи являются белыми гауссовскими шумами с известными математическими ожиданиями и ковариационными матрицами, то широкое применение находит фильтр Калмана, который даёт простой алгоритм вычисления оптимальной оценки вектора состояния [14, 30, 34, 144, 168]. Одна-

ко для многих измерительных систем, которые используются, например, для обеспечения космических экспериментов, невозможно провести большое число испытаний, поэтому статистическая информация может отсутствовать или быть недостоверной. В этом случае применение фильтра Калмана может быть необоснованным из-за расходимости фильтра, когда истинные ошибки оценивания с течением времени увеличиваются. Тогда рассматривают геометрические ограничения, когда неопределённость возмущений и помех предлагается описывать множествами их возможных значений, то есть предполагается, что возмущения и помехи являются неизвестными, но могут принимать любые значения из некоторых заданных выпуклых множеств. Такой подход приводит к необходимости решения задачи оценивания в гарантирующей или минимаксной постановке [4, 31, 49, 54, 61, 65, 100, 101, 110, 111, 119, 120, 122, 132, 140, 152, 161]. В этом случае требуется получить оценку в виде информационного множества, в котором гарантированно находится вектор состояния в каждый момент времени на основе модели объекта и измерений, т.е. построить трубку возможных траекторий объекта (рис.1).

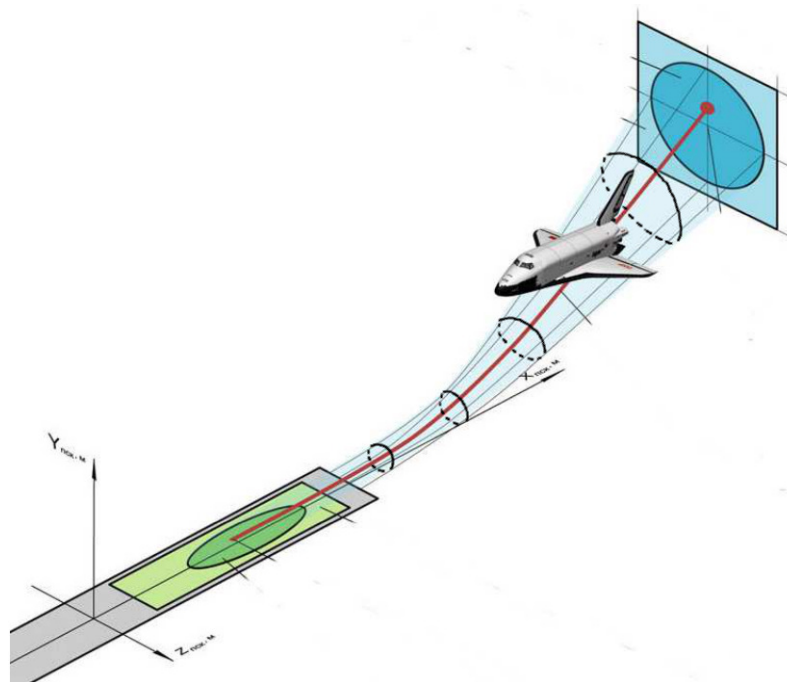


Рис. 1. Пример трубки траекторий летательного аппарата

Таким образом, актуальной является задача моделирования гарантированных оценок состояния подвижного объекта на основе априорной информации об объекте и текущих измерений, а также разработка алгоритмического

и программного обеспечения задачи гарантированного оценивания состояния подвижных объектов.

Степень разработанности темы

Проблема гарантированного оценивания изучается с 60х годов и активно развивается в настоящее время. Идея гарантированного оценивания впервые была сформулирована Ф.К. Швеппе [161]. Решению задачи оценивания при неслучайных, но ограниченных возмущениях и помехах посвящены работы И.Я. Каца [31], А.Б. Куржанского [48, 49], В.М. Кунцевича [45, 46], Н.Н. Красовского [40], В.М. Кейна [33], Ф.Л. Черноусько [110], а также Б.И. Ананьева [5], И.А. Богуславского [12], Е.К. Костоусовой [36, 37], С.И. Кумкова [43], М.Л. Лычака [58], А.И. Матасова [61], А.И. Овсеевича [65], В.С. Пацко [70], С.Б. Пельцвергер [71], Н.Н. Сальникова [88], Ю.Н. Решетняка [86], Г.А. Тимофеевой [97], А.А. Федотова [70], Н.Б. Филимонова [100], В.И. Ширяева [119, 120], А.Ф. Шорикова [132], Т. Alamo [134, 149, 150], D.P. Bertsekas [139], E.F. Camacho [134], H.S. Witsenhausen [171] и др.

На практике большое значение имеют задачи оценивания и управления для подвижных объектов, функционирующих в статистически неопределённой среде. Например, при управлении самолётом при посадке требуется, чтобы самолет попал на ограниченный участок взлетно-посадочной полосы, чтобы при любых допустимых возмущениях самолет не выкатился за кромку полосы [33]. В связи с этим возникает задача гарантированной точности захода на посадку, когда в каждый момент времени отклонение самолёта от оси взлётно-посадочной полосы не должно превышать заданную величину. Кроме того, актуальной является задача обработки измерительной информации, поступающей от бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) [4], когда требуется принять решение о допуске к эксплуатации БИНС при одномоментных изменениях (скачках) погрешностей чувствительных элементов (датчиков угловой скорости или акселерометров) на величину, заметно превышающую допустимые вариации уровня шума. Гарантированное оценивание также требуется в задаче синтеза управления беспилотным летательным аппаратом (БПЛА) при сближении с маневрирующей целью [111], когда необходимо определить управление БПЛА с учетом возможных маневров цели так, чтобы БПЛА попал в некоторую заданную область относительно маневрирующей цели.

Гарантированное оценивание состояния подвижного объекта состоит в построении последовательности информационных множеств, которые гарантированно содержат вектор состояния. Построение информационных множеств выполняется с помощью рекуррентных уравнений для пересчёта информационных множеств от предыдущего момента к следующему на основе множественно-множественных преобразований [31, 110]. Такой подход включает в себя выполнение операций суммы множеств в смысле Минковского, линейного преобразование и пересечения множеств. Однако построение информационных множеств является вычислительно сложной задачей для систем больших размерностей.

Существующие алгоритмы гарантированного оценивания различаются в зависимости от способа описания множеств и алгоритмов выполнения операций над множествами. В работе Ф.К. Швеппе [161] построение информационного множества заключается в построении многомерного эллипсоида, который гарантированно включает оцениваемый вектор состояния подвижного объекта. А.Б. Куржанским [48, 49] получены аналитические выражения для информационного множества, которое представляет собой эллипсоид, при условии, что ограничения на возмущения и помехи заданы в виде квадратичных интегральных ограничений. Однако на практике таким способом не всегда можно описать реальные ограничения на возмущения и помехи. Также задача эллипсоидального оценивания была развита в работах Ф.Л. Черноусько [110, 140], А.Б. Куржанского [50], и др. [8, 59, 86, 88, 130, 173]. В данных работах предполагается, что начальное состояние, возмущения и помехи измерения в подвижном объекте удовлетворяют эллипсоидальным ограничениям и требуется найти эллипсоид наименьшего объёма, гарантированно содержащий фазовый вектор системы. Поскольку класс эллипсоидов не инвариантен относительно операций суммы Минковского и пересечения, то результаты этих операций в алгоритме гарантированного оценивания аппроксимируются сверху эллипсоидами, в связи с чем происходит потеря точности.

Для повышения точности оценивания в работах В.М. Кунцевича [45, 46], М.М. Лычака [58], А.Ф. Шорикова [132] предлагается описывать множества многогранниками, заданными набором вершин и уравнениями граней. При этом эффективные алгоритмы суммы множеств используют описание множеств вершинами, например, построение суммы множеств как выпуклой оболочки вер-

шин, представляющих сумму вершин исходных множеств. А пересечение множеств заключается в удалении из системы линейных неравенств, описывающих пересекаемые множества, избыточных неравенств. Это приводит к необходимости преобразования в каждый момент времени множества вершин во множество граней и наоборот. Кроме того, с течением времени форма информационных множеств может становиться достаточно сложной, то есть может содержать большое количество вершин и граней, а операции над множествами в этом случае будут вычислительно сложными для систем большой размерности.

Поскольку число вершин в информационных множествах с течением времени может увеличиваться, то для ограничения числа вершин применяется описание множеств многогранниками заданной формы. Данный подход в настоящее время активно развивается: в работах Е.К. Костоусовой [36, 37], А. Vicino, G. Zappa [141] предлагается описывать множества параллелотопами, в работах Т. Alamo, Е.Ф. Самачо [134, 149, 150] – зонотопами. Данный подход аналогично эллипсоидальному оцениванию основан на аппроксимации результатов операций суммы и пересечения множеств параллелотопами или зонотопами, поэтому в гарантированных оценках присутствуют потери за счет аппроксимации.

В работах А.В. Лотова, В.А. Бушенкова, И.Г. Поспелова [17, 55, 56] рассмотрены численные алгоритмы построения множеств достижимости линейных динамических объектов, когда на начальное состояние и возмущение наложены ограничения в виде многогранников, описанных системами линейных неравенств. Построение множества достижимости сводится к нахождению фундаментальных решений системы неравенств или ортогональной проекции на основе метода исключения неизвестных или свёртки системы Фурье-Черникова. Недостатком данного метода является появление в промежуточных вычислениях большого количества избыточных неравенств, число которых экспоненциально растет с увеличением размерности системы, в связи с чем требуются большие вычислительные затраты для их исключения, что не позволяет применять его в реальном времени.

Таким образом, проведённый обзор методов оценивания вектора состояния подвижных объектов показал, что при задании ограничений на возмущения и помехи в виде выпуклых множеств требуются большие вычислительные ресурсы при реализации алгоритмов операций суммы Минковского и пересечения

множеств. Применение известных аппроксимаций информационных множеств эллипсоидами, параллелотопами, зонотопами может приводить к потере точности оценок состояния подвижного объекта, функционирующих в условиях неопределённости. Поэтому актуальной является разработка алгоритмов гарантированного оценивания на основе аппроксимации выпуклыми многогранниками.

Целью данной работы является разработка методов моделирования состояния подвижных объектов, разработка численных алгоритмов полиэдральной аппроксимации информационного множества и их реализация в виде программного комплекса.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

- 1) разработать методы моделирования состояния подвижных объектов с учётом дополнительной информации о модели и характере процесса;
- 2) разработать методы моделирования гарантированных оценок возмущений и помех;
- 3) разработать численный алгоритм полиэдральной аппроксимации информационных множеств;
- 4) сравнить разработанные алгоритмы гарантированного оценивания, основанные на полиэдральной аппроксимации информационных множеств, с существующими алгоритмами оценивания;
- 5) реализовать разработанные алгоритмы в виде комплекса программ и провести вычислительные и натурные эксперименты для различных подвижных объектов.

Научная новизна:

В области математического моделирования

1. Разработан метод моделирования гарантированных оценок вектора состояния подвижного объекта с учётом дополнительной информации о характере возмущений в виде ограничения на среднее значение и разложения возмущения по системе функций с постоянными неизвестными коэффициентами. Полученные алгоритмы позволяют повысить точность гарантированных оценок состояния за счет включения в математическую модель опи-

сания информационного множества дополнительной информации о модели и характере возмущений.

2. Разработан метод моделирования гарантированных оценок возмущений и помех на основе неявного задания на некотором временном отрезке вектора состояния подвижного объекта системами линейных уравнений и неравенств, что может быть в дальнейшем использовано для разработки адаптивных алгоритмов оценивания и управления, прогнозирования состояния системы и построения множеств достижимости.

В области численных методов

3. Предложен алгоритм построения полиэдральной аппроксимации информационного множества без выполнения вычислительно затратных операций суммы Минковского и пересечения множеств на основе неявного описания информационного множества системами линейных неравенств и уравнений. Оценка информационного множества строится в виде многогранника заданной формы, что позволяет повысить точность оценивания по сравнению с существующими алгоритмами аппроксимации эллипсоидами и параллелепипедами. Для повышения точности аппроксимации предложен выбор направлений аппроксимирующего многогранника на основе модели подвижного объекта и ограничений на множества возмущений и помех.

В области комплексов программ

4. Разработан программный комплекс для построения гарантированных оценок вектора состояния, возмущения и помех методом полиэдральной аппроксимации информационных множеств для подвижных объектов с геометрическими ограничениями. Данный комплекс позволяет на этапе проектирования системы управления подвижным объектом оценить время вычисления оценок, точность оценивания, анализировать гарантированные оценки вектора состояния объекта при различных составах измерительных систем, характеристиках точности измерительных приборов и датчиков, реализациях возмущений и помех, параметрах математической модели движения объекта.

Теоретическая значимость диссертационного исследования заключается в разработке нового подхода к моделированию информационных множеств и их эволюции. Предложенные алгоритмы позволяют получать не только га-

рантированные оценки вектора состояния, но и множества прогнозов вектора состояния, гарантированные оценки реализовавшихся возмущений и помех, действующих на подвижный объект, что может быть в дальнейшем использовано для разработки адаптивных алгоритмов оценивания и управления, а также прогнозирования состояния объекта. Кроме того, гарантированные оценки могут быть использованы для синтеза управления, когда качество функционирования подвижного объекта оценивается принадлежностью вектора состояния некоторому множеству и требуется управлять трубкой траекторий.

Практическая значимость заключается в применимости разработанных алгоритмов гарантированного оценивания вектора состояния в задачах управления летательными аппаратами, фильтрации в бесплатформенных инерциальных навигационных системах, динамических измерений и др. Создан программный комплекс, реализующий разработанные алгоритмы и позволяющий на этапе проектирования систем управления исследовать точность и время вычисления оценок вектора состояния подвижных объектов, полученных при различных условиях функционирования объекта, например, при различных параметрах модели, реализациях возмущений и помех, ограничениях на начальное состояние, возмущения и помехи и позволяющий и на основе этих исследований подбирать параметры измерительных систем. На программный комплекс получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017615448 от 16.05.2017 (Приложение Г).

Реализация и внедрение. Предложенные алгоритмы применялись в научно-исследовательской работе АО «НПО автоматики» (г.Екатеринбург) "Разработка алгоритмов обработки измерительной информации и анализ точности волоконно-оптического гироскопа ВОГК-2 и его модификаций"(номер темы: ОКБ/103-11 2011058). Разработанные алгоритмы гарантированного оценивания могут быть применены для повышения эффективности, надежности и качества систем управления, разрабатываемых в ООО «ДСТ-УРАЛ» (г.Челябинск). Получены акты об использовании результатов диссертационного исследования в АО «НПО автоматики» (г.Екатеринбург) и ООО «ДСТ-УРАЛ» (г.Челябинск) (Приложение А).

Методология и методы исследования. В работе использовались методы линейной алгебры, математического моделирования, теории оптимизации,

фильтрации, теории систем управления. Для реализации разработанных алгоритмов и обработки полученных данных использовался пакет прикладных программ MATLAB.

Основные положения, выносимые на защиту:

В рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п.2)

1. Качественно исследованы модели состояния подвижных объектов и возмущений при наличии дополнительной информации о характере возмущений, основанные на описании информационных множеств системами линейных уравнений и неравенств. Разработан численный метод оценки параметров модели возмущений в случае при разложении возмущений по системе функций.
2. Исследованы гарантированные оценки состояния подвижных объектов при аномальных измерениях. Получена оценка величины выброса помехи из априорно заданного множества при аномальном измерении, который гарантированно может быть обнаружен.

В рамках разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (п.3):

3. Численный метод полиэдральной аппроксимации информационных множеств в задаче гарантированного оценивания состояния подвижных объектов с использованием математической модели информационных множеств в виде неявного задания вектора состояния подвижного объекта системами линейных уравнений и неравенств.

В рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента (п.4):

4. Программный комплекс для построения гарантированных оценок вектора состояния, возмущений и помех методом полиэдральной аппроксимации.
5. Вычислительные и натурные эксперименты, проведенные для математических моделей различных подвижных объектов, демонстрирующие преимущества разработанных алгоритмов: увеличение точности по сравнению с

эллипсоидальным и интервальным подходами, увеличение быстродействия по сравнению с гарантированным оцениванием методом эллипсоидов.

Степень достоверности полученных результатов подтверждается строгостью математической постановки задачи исследования, корректным использованием математического аппарата, согласованностью результатов вычислительных экспериментов с модельными примерами, натурными экспериментами, а также тестированием разработанного программного комплекса на различных математических моделях подвижных объектов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на международной научно-практической конференции "Измерения: состояние, перспективы развития"(Челябинск, 2012), на XI Международной научно-технической конференции "Физика и технические приложения волновых процессов"(Екатеринбург, 2012), на конференции "Актуальные проблемы автоматизации и управления"(Челябинск, 2013), на XVIII Макеевских чтениях (Екатеринбург, 2014), на XII Всероссийском совещании по проблемам управления (Москва, 2014), на 14-й Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2015» (Москва, 2015), на международной научно-технической конференции "The International Conference on Industrial Engineering (ICIE)"(Челябинск, 2015, 2016, 2017, 2020), на международном форуме «Информационные технологии на службе оборонно-промышленного комплекса-2016» (Челябинск, 2016), на Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и информационные технологии» (Екатеринбург, 2016).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 26 публикациях [27, 28, 72–78, 103, 104, 121, 123–128, 154–158, 162, 165, 166], 6 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [72, 75, 77, 103, 104, 125], 7 – в изданиях, входящих в международную базу Scopus [155–158, 162, 165, 166], и др. [27, 28, 73, 74, 76, 78, 121, 123, 124, 126–128, 154]. В совместных с научным руководителем работах [73–76, 78, 123–128, 155, 157, 158, 165, 166] научному руководителю принадлежит постановка задачи. Из работ, выполненных в соавторстве [27, 28, 103, 104, 121, 154, 156, 162], в диссертацию включены результаты, полученные лично автором.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения. Полный объем диссертации составляет 185 страниц с 84 рисунками и 4 таблицами. Список литературы содержит 173 наименования.

Глава 1. Анализ численных методов оценивания состояния подвижных объектов

1.1 Обзор детерминированных и вероятностных методов оценивания

Задачи оценивания вектора состояния и параметров подвижного объекта по результатам измерений его входных и выходных переменных являются основными в теории управления. К необходимости оценивания состояния приводят различные задачи теории управления, дифференциальных игр, связанные с исследованиями сложных реальных систем различной природы, в которых присутствует неопределённость в их описании [7, 10, 13, 30, 52, 85, 87, 95, 108, 116, 161]. Например, при обработке измерительной информации, поступающей от навигационных систем, возникает задача оценивания погрешностей инерциальных датчиков навигационных систем для обнаружения разладок и принятия решения о допуске к эксплуатации навигационных систем [4, 24, 103, 143]. Оценка состояния и возмущений требуется при автоматической прокладке маршрута полёта, выполняемой в бортовых системах управления самолётом, в наземных системах подготовки полётных заданий и др. [6, 111]. Фильтрация также требуется в различных инженерных, экономических, био-медицинских и др. приложениях.

В общем случае функционирование подвижного объекта описывается нелинейными уравнениями вида:

$$\dot{x} = f(x, u, w), \quad (1.1)$$

где $x \in R^{n_x}$, $u \in R^{n_u}$, $w \in R^{n_w}$, – векторы состояния объекта, управления и возмущения соответственно; f – вектор-функция.

Измерению, как правило, доступен не весь вектор состояния x , а лишь некоторая функция вида:

$$y = h(x, v), \quad (1.2)$$

где $y \in R^{n_y}$, $v \in R^{n_v}$, – векторы измерения и помех измерения соответственно; h – вектор-функция.

Поскольку отсутствуют эффективные методы управления, оценивания и идентификации для нелинейных систем, проводят кусочно-линейную аппроксимацию нелинейной модели:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w, \\ y = Gx + Hv, \end{cases} \quad (1.3)$$

и переходят к дискретному времени [10]:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + \Gamma_k w_k, \\ y_{k+1} = G_k x_{k+1} + H_k v_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1.4)$$

где $x_k \in R^{n_x}$, $u_k \in R^{n_u}$, $w_k \in R^{n_w}$, $y_k \in R^{n_y}$, $v_k \in R^{n_v}$ – векторы состояния подвижного объекта, возмущения, измерения, ошибок измерений на k -м шаге соответственно; A_k , B_k , Γ_k , G_k , H_k – известные матрицы. Далее для упрощения записи опустим индекс k у матриц.

При построении систем управления в условиях внешних возмущений, шумов измерений, малом объёме измерительной информации, априорной неопределённости характеристик, характерных для объектов космической и авиационной техники, требуется оперативно оценивать состояние и проводить идентификацию неизвестных параметров по результатам обработки измерительной информации, получаемой в процессе полёта. Система функционирует следующим образом (рис.1.1) [102] в процессе полёта производится измерение функций компонент вектора состояния y_k . По результатам измерений выполняется оценивание полного вектора состояния x_k . На основе полученной оценки \hat{x}_k и заданного критерия качества вычисляется величина терминального управления u_k .

Подвижные объекты функционируют в неопределённой среде. Неопределённости могут быть вызваны неполнотой информации о начальном состоянии объекта, неконтролируемыми возмущающими воздействиями, помехами при измерении данных, неточностью в задании параметров модели и пр. Например, возму-

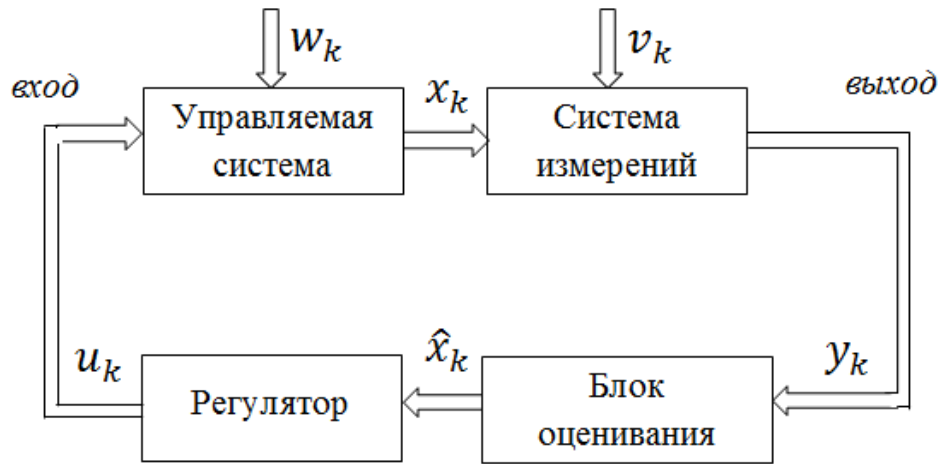


Рис. 1.1. Структурная схема системы управления

щённое движение летательного аппарата может быть вызвано наличием ветра, погрешностями при изготовлении и монтаже двигательной установки, аэродинамическими возмущениями, действующими на летательный аппарат при наличии программного угла атаки, отклонениями от номинала тяги тормозного двигателя и пр. В связи с этим возникают вопросы, как характеризовать различные виды неопределённостей, о выборе моделей, адекватно описывающих поведение объекта в окружающей среде, о разработке эффективных алгоритмов оценивания состояния подвижных объектов в соответствии с выбранными моделями [10, 14, 15, 25, 39–41, 45, 67, 105, 109, 133].

Выбор алгоритма оценивания зависит от предположений о характере и моделях возмущений и помех. Если в системе (1.3) случайные возмущения и помехи измерений отсутствуют, то задача оценивания решается с помощью детерминированной процедуры, например, методом наименьших квадратов или детерминированным наблюдателем. Например, для получения оценки координат вектора состояния, когда в системе (1.3) отсутствуют шумы измерений и возмущения, Люенбергером был предложен метод, позволяющий восстанавливать только требуемые переменные вектора состояния подвижного объекта [3]. Для получения оценки вектора x используется дополнительная система:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}), \\ \hat{y} = G\hat{x}, \end{cases} \quad (1.5)$$

где L - матрица коэффициентов усиления наблюдателя, которая определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \nu &= T\hat{x}, \\ \dot{\nu} &= T(A - LG)\hat{x} + TLy + TBu, \\ F_1 &= T(A - LG)T^{-1}, \quad F_2 = TL, \\ TA - F_1T &= F_2T, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где T - неособая матрица ($\det T \neq 0$) размера $n_x \times n_x$.

Разработан ряд вероятностных методов и подходов в задачах управления, идентификации и фильтрации [14, 82, 89]. Байесовский фильтр был первой попыткой вычислить неизвестные параметры системы. Идея этого фильтра основана на том, что все формы неопределённости могут быть выражены и измерены с помощью вероятностей, а оценка неизвестных параметров проводится по критерию минимума ожидаемых потерь [14, 89]. Для вектора неизвестных параметров θ , координаты которого, например, могут быть шумом, возмущением, неопределённость выражена априорным распределением $p(\theta)$, тогда байесовская оценка параметра $\hat{\theta}$ является наилучшей в смысле доставления минимума апостериорному байесовскому риску:

$$\int \|\theta - \hat{\theta}\|^2 p(\theta|y_{1:N}) d\theta. \tag{1.7}$$

Метод максимума правдоподобия позволяет оценивать параметры генеральной совокупности с помощью максимизации правдоподобия выборки, которое описывается функцией совместного распределения. Выборка из n наблюдений x_1, x_2, \dots, x_n описывается функцией совместного распределения $p(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$, где θ - вектор неизвестных параметров. Оценкой максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ является значение, при котором функция правдоподобия $L(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = p(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$ достигает максимума:

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta). \tag{1.8}$$

При использовании данного метода требуются большие вычислительные затраты, а сходимость при этом не гарантируется.

В работах Л.С. Казаринова [21, 29] рассмотрена оценка энергетической эффективности технологических объектов управления с использованием метода экспоненциальной фильтрации в условиях белого шума и цветных помех.

Однако для описания реальных процессов часто применяют стохастические модели, когда в (1.4) начальное состояние x_0 , возмущения w_k и ошибки измерений v_k являются нормально распределёнными взаимно некоррелированными случайными величинами:

$$x_0 \sim N(0, P_0), \quad w_k \sim N(0, Q), \quad v_k \sim N(0, R). \quad (1.9)$$

В этом случае применяется фильтр Калмана, который даёт простой алгоритм вычисления оптимальной оценки \hat{x}_k вектора состояния при гауссовских помехах и возмущениях [15, 30, 144]:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + K_{k+1} (y_{k+1} - G\hat{x}_k), \\ K_k &= (AP_{k-1}A' + \Gamma Q\Gamma') G' (G(AP_{k-1}A' + \Gamma Q\Gamma') G' + HRH')^{-1}, \\ P_k &= (I - K_k G) (AP_{k-1}A' + \Gamma Q\Gamma'), \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где K_k - коэффициент усиления, P_k - ковариационная матрица ошибок.

Возможность синтеза оптимальных оценок рекуррентным способом представляет большой практический интерес в связи с удобством реализации данного фильтра с использованием современной вычислительной техники. Будущее состояние объекта определяется текущей оценкой и вновь поступившей информацией, поэтому нет необходимости помнить всю предшествующую информацию. Фильтр даёт оптимальную оценку: условием оптимальности оценки является минимум её среднеквадратической ошибки. Однако при использовании калмановской фильтрации в конкретных прикладных задачах могут возникать проблемы. Недостатком фильтра Калмана является расходимость, когда истинные ошибки оценивания во много раз превышают теоретические, характеризуемые дисперсией P_k [30, 89, 144]. Одними из главных причин расходимости являются неточность или неполнота априорной информации о свойствах процессах, неточность задания уравнений движения и наблюдения, отсутствие информации о реальной физической задаче, линеаризация уравнений, ошибки, связанные с моделированием вероятностных характеристик возмущений и помех. Кро-

ме того, во многих приложениях стохастическое описание возмущений и помех не является полным. Так, для многих измерительных систем, которые используются, например, для обеспечения космических экспериментов, нет достаточного количества экспериментальных данных. Поэтому невозможно определить статистические характеристики с достаточной точностью и надёжностью.

Таким образом, вероятностный подход хоть и является удобной математической формализацией процессов в системах управления подвижными объектами, но не всегда является обоснованным. Поэтому применяют геометрические ограничения, когда неопределённость описывают принадлежностью реализаций некоторым множествам:

$$x_0 \in X_0, \quad w_k \in W, \quad v_k \in V, \quad (1.11)$$

поэтому возникает необходимость решения задачи оценивания в гарантирующей или минимаксной постановке. При таком подходе требуется получить оценку в виде информационного множества, в котором гарантированно находится вектор состояния.

1.2 Обзор методов гарантированного оценивания и аппроксимации информационных множеств

В настоящее время в теории управления и идентификации активно развивается область гарантированного оценивания вектора состояния для систем с геометрическими ограничениями на начальное состояние системы, возмущения и помехи. Её исследованию посвящено множество отечественных и зарубежных публикаций [4, 5, 27, 28, 31, 33, 40, 43, 45, 54, 58, 59, 61, 65, 66, 70, 74, 76, 78, 86, 88, 97, 100, 110, 119–122, 124, 127, 130, 132, 134, 149, 150, 152, 154, 161, 173]. Гарантированное оценивание активно изучалось с 60-х годов начиная с работ Ф.К. Швеппе, И.Я. Каца, Н.Н. Красовского, А.Б. Куржанского и др. Ключевым понятием в гарантированном оценивании является информационное множество, которое определяет набор возможных состояний подвижного объекта в каждый момент времени на основе модели системы и измерений (рис. 1.2). Понятие гарантированных или минимаксных оценок встречается и при стохастическом подходе [62, 90, 91], но в данном подходе гарантия рассматривается относительно

некоторого вероятностного критерия, а не как множественная оценка, гарантированно содержащая истинное состояние подвижного объекта.

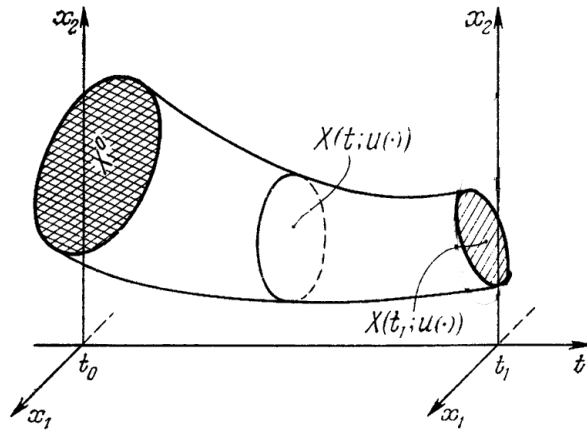


Рис. 1.2. Трубка траекторий вектора состояния

В работах А.Б. Куржанского [48, 49] рассматриваются следующие системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w, \\ y = Gx + Hv, \end{cases}$$

в которых возмущения и помехи на некотором интервале $[t_0, \vartheta]$ заданы интегральными квадратичными ограничениями:

$$\int_{t_0}^{\vartheta} (w'(t)R(t)w(t) + k^2 v'(t)Q(t)v(t)) dt \leq \mu^2, \quad (1.12)$$

где $R(t)$, $Q(t)$ - положительно определённые матрицы непрерывные по t , k и μ - заданные величины. Рассматривается решение задач позиционного наблюдения и программного управления при ограничениях (1.12). Истинное состояние вектора состояния $x(\vartheta)$ находится внутри информационное множества, которое представляет собой эллипсоид $x(\vartheta) \in \tilde{X}(\vartheta)$, центр $x^0(\vartheta)$ и матрица $P^{-1}(\vartheta)$ которого определяются уравнениями минимаксного фильтра при заданных $P(t_0)$

и $x^0(t_0)$:

$$\begin{aligned}\frac{dP^{-1}(\vartheta)}{d\vartheta} &= AP^{-1}(\vartheta) + P^{-1}(\vartheta)A' + \Gamma R^{-1}(\vartheta)\Gamma' - k^2 P^{-1}(\vartheta)G'Q(\vartheta)GP^{-1}(\vartheta), \\ \frac{dx^0(\vartheta)}{d\vartheta} &= Ax^0(\vartheta) + Bu(\vartheta) + k^2 P^{-1}(\vartheta)G'Q(\vartheta)(y(\vartheta) - Gx^0(\vartheta)).\end{aligned}\tag{1.13}$$

Вывод уравнений (1.13) основан на условии, что ограничения на возмущения и помехи заданы в виде (1.12). Однако на практике реальные ограничения на возмущения и помехи не всегда могут быть описаны таким образом.

Пусть процессы в системе управления описываются линейными разностными уравнениями вида:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \Gamma w_k, \\ y_{k+1} = Gx_{k+1} + Hv_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{cases}\tag{1.14}$$

где $x_k \in R^{n_x}$, $u_k \in R^{n_u}$, $w_k \in R^{n_w}$, $y_k \in R^{n_y}$, $v_k \in R^{n_v}$ – векторы состояния объекта, управления, возмущения, измерения, ошибок измерений на k -м шаге соответственно; A , B , Γ , G , H – известные матрицы.

Для начального состояния системы, возмущений и помех могут быть заданы геометрические ограничения [49, 110, 161]. В этом случае известно, что начальное состояние x_0 , возмущения w_k и помехи v_k на k -м шаге являются неизвестными, но могут принимать любые значения из некоторых заданных выпуклых множеств

$$x_0 \in X_0, \quad w_k \in W, \quad v_k \in V.\tag{1.15}$$

Гарантированное оценивание состояния системы состоит в построении последовательности информационных множеств \bar{X}_{k+1} , таких что $x_{k+1} \in \bar{X}_{k+1}$. Для систем с геометрическими ограничениями алгоритму минимаксной фильтрации соответствуют рекуррентные уравнения для пересчёта множеств от предыдущего момента к следующему на основе множественно-множественных преобразований [31, 110]. На основе предыдущей оценки информационного множества \bar{X}_k рассчитывается множество прогнозов $X_{k+1/k}$ вектора состояния объекта в виде суммы в смысле Минковского множеств $A\bar{X}_k$ и ΓW :

$$X_{k+1/k} = A\bar{X}_k + \Gamma W, \quad k = 0, 1, \dots, N.\tag{1.16}$$

По результатам измерения y_{k+1} рассчитывается множество состояний, совместимых с измерением:

$$X[y_{k+1}] = \{x \in R^{n_x} | Gx + Hv = y_{k+1}, \forall v \in V\}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (1.17)$$

и затем информационное множество:

$$\bar{X}_{k+1} = X_{k+1/k} \cap X[y_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (1.18)$$

Операции в соотношениях (1.16) – (1.18) проводятся над множествами: сумма Минковского, линейное преобразование и пересечение множеств. Как видно из соотношений (1.16) – (1.18) размер и форма информационных множеств зависят от размера исходных множеств \bar{X}_0 , W и V и от реализовавшихся значений возмущений и помех. Информационное множество \bar{X}_{k+1} вычисляется как пересечение множества прогнозов $X_{k+1/k}$ и множества $X[y_{k+1}]$, совместимого с измерением, положение которых зависит от реализовавшихся возмущений и помех, и чем меньше размер результирующего множества \bar{X}_{k+1} , тем точнее получается оценка. Таким образом, если информационное множество \bar{X}_{k+1} представляет собой точку, это означает, что получено точное значение вектора состояния подвижного объекта. При использовании стохастического подхода фильтр Калмана не сможет распознать ситуацию, если на каком-то шаге оценка вектора состояния объекта совпадёт с истинным значением вектора состояния. В качестве точечной оценки вектора состояния объекта рассматривается чебышевский центр информационного множества \bar{X}_k . Отметим, что система (1.4) должна быть наблюдаемой. В противном случае информационное множество может быть неограниченным.

Рассмотрим пример для пояснения операций (1.16)-(1.18) для случая, когда ограничения (1.15) заданы в виде многогранников.

Пример

Матрицы в системе (1.4) следующие:

$$A = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.05 \\ -0.09 & 0.85 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0.23 \\ 4.64 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}, \quad G = I_{2 \times 2}, \quad H = I_{2 \times 2},$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}', \quad w_0 = -1.5, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0.08 \cdot 10^{-4} & -0.01 \end{pmatrix}',$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} -0.3 & -6.9 \end{pmatrix}' \cdot 10^{-3}, \quad y_1 = \begin{pmatrix} -0.3 \cdot 10^{-3} & -1.7 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}'.$$

Множества X_0 , W , V приведены на рис.1.3. На рис.1.4 приведён пример построения информационного множества \bar{X}_1 . На рис.1.4а показаны результаты линейного преобразования множеств X_0 и W . На рис.1.4б приведен результат построения множества прогнозов $X_{1/0}$, которое является суммой множеств AX_0 и ΓW . На рис.рис.1.4в показано множество прогнозов $X_{1/0}$ и множество совместимое с измерением $X[y_1]$, пересечение этих множеств образует информационное множество \bar{X}_1 , в котором находится вектор состояния x_1 .

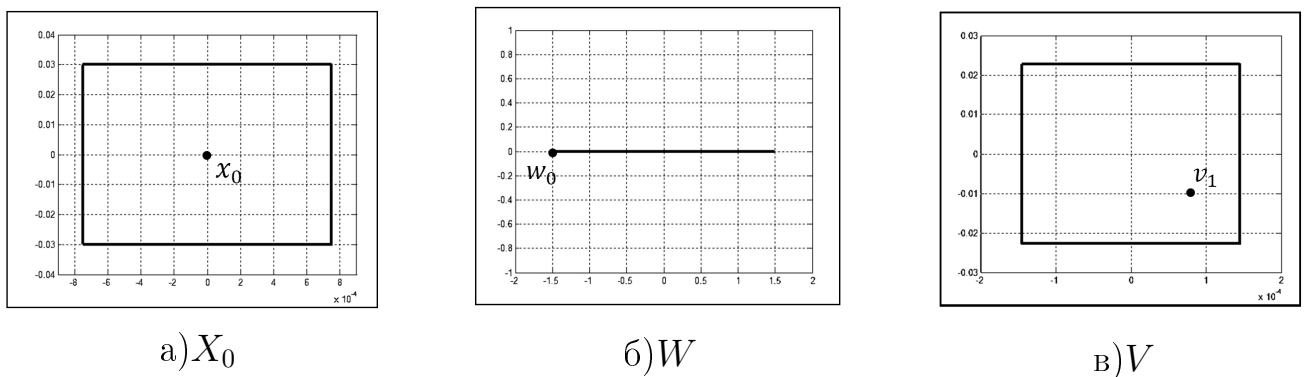


Рис. 1.3. Ограничения.

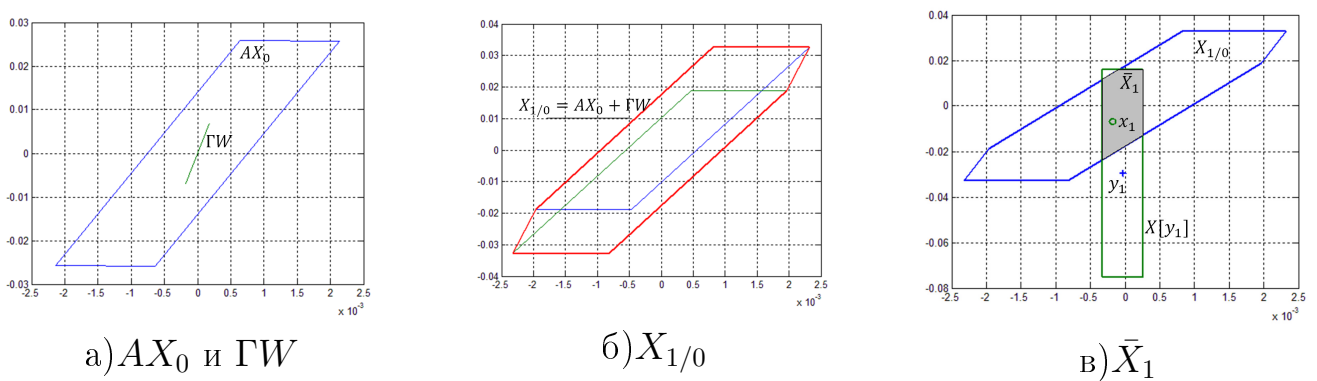


Рис. 1.4. Пример построения информационного множества.

При реализации гарантированного подхода необходимо выбрать класс областей, описывающих информационное множество, и построить основные операции, необходимые для построения информационных множеств. В работах Ф. Швеппе, А.Б. Куржанского, Ф.Л. Черноусько [48, 49, 110, 148, 161] предлагается описывать информационные множества эллипсоидами. Для описания эллипсоида требуется заранее известное количество параметров (центр и матрица

эллипсоида), однако класс эллипсоидов не инвариантен относительно операций суммы и пересечения, поэтому результаты данных операций аппроксимируются эллипсоидами, в связи с чем происходит потеря точности. Для повышения точности оценивания в работах В.М. Кунцевича [45, 46], М.М. Лычака [58], А.В. Лотова [55, 56], А.В. Панюкова [69] предлагается описывать множества выпуклыми многогранниками, заданными набором вершин или используя двойное описание вершинами и системами линейных неравенств. В работе В.М. Кейна [33] приведены выражения для вычисления опорных функций множества прогнозов, множества, совместимого с измерением и для информационного множества, однако для приведенные соотношения трудно привести численную реализацию. Как правило, форма информационных множеств является достаточно сложной, то есть множество может содержать большое количество вершин и граней, а операции над множествами являются вычислительно сложными для систем большой размерности в реальном времени. Поэтому возникает необходимость в разработке эффективных численных методов построения множественных оценок вектора состояния. Вместо точного построения информационных множеств и множеств достижимости их аппроксимируют областями определённой канонической формы, например, эллипсоидами [8, 86, 88, 110, 130, 148], параллелепипедами [134], многогранниками [56] и др. При таком подходе результаты операций над множествами аппроксимируются соответствующими формами.

Один из наиболее распространённых методов гарантированного оценивания, описанный прежде всего в работах Ф.Л. Черноусько, Г.М. Бакана, Ю.Н. Решетняка и др. [8, 86, 88, 110, 130, 148], является эллипсоидальное оценивание, когда требуется найти эллипсоид наименьшего объёма, который гарантированно содержит фазовый вектор системы, когда начальное состояние в системе (1.4), возмущения и помехи измерения в системе управления удовлетворяют квадратичным ограничениям:

$$x_k \in \bar{X}_k \subseteq E(c_k, P_k) = \{x_k \in R^{n_x} : (x_k - c_k)' P_k^{-1} (x_k - c_k) \leq 1\}, \quad (1.19)$$

где $E(c_k, P_k)$ - эллипсоид с центром в точке c_k и симметрической положительно определённой матрицей P_k , которая характеризует размер и форму эллипсоида.

Класс эллипсоидов инвариантен относительно операции линейного преобразования, и аппроксимирующий эллипсоид получается в результате решения выпуклых задач оптимизации.

Предполагается, что начальное состояние, ошибки и возмущения, действующие на подвижный объект, удовлетворяют квадратичным эллипсоидальным ограничениям, но их характер изменения и модель неизвестны:

$$\begin{aligned} x_0 \in E(c_0, P_0) &= \{x_0 \in R_x^n : (x_0 - c_0)' P_0^{-1} (x_0 - c_0) \leq 1\}, \\ w_k \in E(0, Q) &= \{w_k \in R_w^n : w_k' Q^{-1} w_k \leq 1\}, \\ v_k \in E(0, R) &= \{v_k \in R_v^n : v_k' R^{-1} v_k \leq 1\}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Тогда операция линейного преобразования вычисляется по формуле:

$$A\bar{X}_k \subseteq AE(c_k, P_k) = E(Ac_k, AP_k A'). \quad (1.21)$$

Сумма двух эллипсоидов $AE(c_k, P_k)$ и $\Gamma E(0, Q)$ в общем случае не является эллипсоидом, тогда требуется найти эллипсоид $E(c_k^+, P_k^+)$ наименьшего объёма, содержащий сумму эллипсоидов:

$$\begin{aligned} X_{k+1/k} \subseteq AE(c_k, P_k) + \Gamma E(0, Q) \subseteq E(c_k^+, P_k^+), \\ c_k^+ = c_k + 0 = c_k, \quad \det P_k^+ \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Информационное множество вычисляется в результате пересечения множества прогнозов и множества, совместимого с измерением, которые аппроксимированы эллипсоидами. Результат пересечения эллипсоида не является эллипсоидом в общем случае, поэтому пересечение эллипсоидов, как и сумму, аппроксимируют эллипсоидом наименьшего объёма:

$$\bar{X}_{k+1} \subseteq E(c_k^+, P_k^+) \cap E(y_{k+1}, R) \subseteq E(c_k^\cap, P_k^\cap), \quad \det P_k^\cap \rightarrow \min. \quad (1.23)$$

При таком подходе дважды происходит потеря точности: при выполнении суммы и пересечения эллипсоидов (рис.1.5,1.6). Кроме того, для пересечения эллипсоидов не существует аналитического решения и имеющиеся алгоритмы заключаются в построении субоптимальных эллипсоидов.

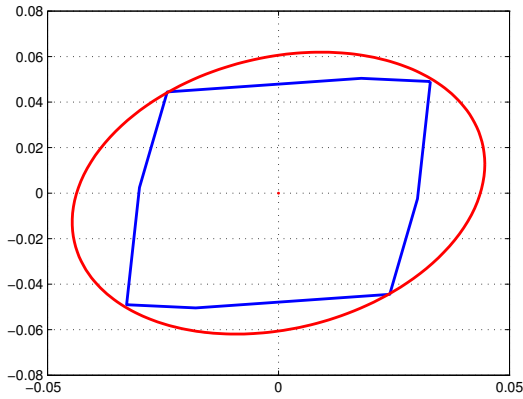


Рис. 1.5. Множество прогнозов (синий цвет) и его аппроксимация эллипсом (красный цвет).

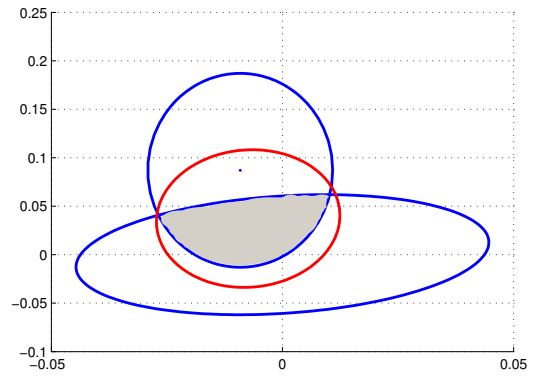


Рис. 1.6. Аппроксимация пересечения эллипсов (серым цветом показано пересечение эллипсов, красным - аппроксимация пересечения)

Альтернативой эллипсоидальному оцениванию является интервальный подход, когда предполагается, что начальное состояние, возмущения и помехи принимают значения из заданного ограниченного интервала [38, 79, 80]

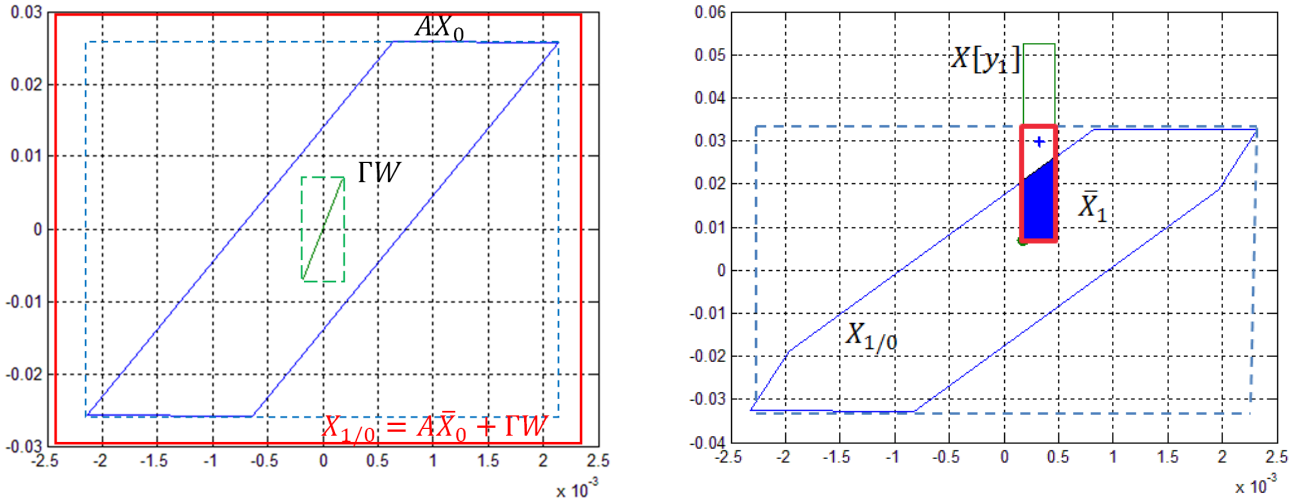
$$x_0 \in [\underline{x}_0 \quad \bar{x}_0], \quad w_k \in [\underline{w} \quad \bar{w}] \quad v_k \in [\underline{v} \quad \bar{v}]. \quad (1.24)$$

Данный подход прост при моделировании неопределённостей и реализации операций над множествами на основе интервальной арифметики:

$$\begin{aligned} a + b &= [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}], \\ a \cap b &= [\max(\underline{a}, \underline{b}), \min(\bar{a}, \bar{b})]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Однако такие по координатные оценки могут быть достаточно грубыми в силу известного в интервальном анализе "эффекта упаковки" (рис.1.7).

Интервальные оценки выпуклых множеств могут оказаться достаточно грубыми по сравнению, например, с эллипсоидальными. Один из способов повысить точность оценивая служит рассмотрение и поиск полиэдральных оценок, где в качестве аппроксимирующих множеств выступают параллелепипеды, а не интервальные вектора. В работах Е.К. Костоусовой [35–37] предложена аппроксимация информационного множества параллелепипедами (параллело-



- а) Интервальная оценка множества прогнозов
- б) Интервальная оценка информационного множества (красным цветом показана граница интервальной оценки, закрашенная фигура - информационное множество.)

Рис. 1.7. Пример интервальной оценки

пами), грани которых необязательно параллельны координатным плоскостям:

$$\mathcal{P}(p, P, \pi) = \left\{ x \in R^{n_x} : x = p + \sum_{i=1}^n p^i \pi_i \xi_i, \quad |\xi_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \right\}, \quad (1.26)$$

где p - центр параллелепипеда, $P = \{p^1, \dots, p^n\}$ -матрица ориентации параллелепипеда, $\pi_i \geq 0$ - размеры "полуосей" параллелепипеда. Ставится задача о нахождении внешних \mathcal{P}_k^+ и внутренних \mathcal{P}_k^- параллелепипедозначных оценок \bar{X}_k :

$$\mathcal{P}_k^- \leq \bar{X}_k \leq \mathcal{P}_k^+. \quad (1.27)$$

Данный подход аналогично эллипсоидальному оцениванию основан на аппроксимации результатов операций суммы и пересечения множеств параллелепипедами. Рассмотрение в качестве оценок параллелепипедов произвольной ориентации в пространстве позволяет ослабить "эффект обёртывания" по сравнению с интервальным анализом, но потери точности за счёт аппроксимации также присутствуют.

В случае, когда исходные множественные ограничения (1.15) являются многогранниками, они могут быть описаны системами линейных неравенств

$$\begin{aligned}
x_0 \in \bar{X}_0 &= \{x_0 \in R^{n_x} : A_{x_0}x_0 \leq b_{x_0}\}, \\
w_k \in W &= \{w_k \in R^{n_w} : A_w w_k \leq b_w\}, \\
v_k \in V &= \{v_k \in R^{n_v} : A_v v_k \leq b_v\}.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

В работах Лотова А.В., Бушенкова В.А., Поспелова И.Г. рассмотрены численные алгоритмы построения множеств достижимости линейных динамических систем, когда на начальное состояние и возмущение наложены ограничения в виде систем линейных неравенств [55, 56]. Пусть получено множество достижимости на $(k - 1)$ -м шаге в виде системы линейных неравенств $C_{k-1}x_{k-1} \leq b_{k-1}$, тогда построение множества достижимости на k -м шаге строится на основе следствия из теоремы Минковского-Фаркаша: для того чтобы система линейных неравенств $C_k x_k \leq b_k$ имела решения необходимо и достаточно, чтобы для $C_k^T z = 0, z \geq 0$ выполнялось условие $(b_k, z) \geq 0$. Поскольку любое решение системы линейных уравнений и неравенств можно представить в виде линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами конечного числа фундаментальных решений данной системы, условие $(b_k, z) \geq 0$ необходимо проверять только для фундаментальных решений системы.

Уравнения движения(1.4) совместно с системой линейных неравенств (1.28) описывают состояние подвижного объекта на k -м шаге. В этом случае информационное множество также является многогранником:

$$x_k \in \bar{X}_k = \{x_k \in R^{n_x} : A_{x_k}x_k \leq b_{x_k}\}. \tag{1.29}$$

Тогда задача построения информационного множества сводится к решению системы линейных уравнений (1.4) и неравенств (1.28) относительно оцениваемой переменной x_{k+1} . Один из методов - проектирование многогранника в пространство меньшей размерности методом свертки системы линейных неравенств Фурье-Черникова [17, 18]. Данный метод позволяет получить информационное множество без потерь за счет аппроксимаций. Однако в промежуточных вычислениях появляется большое количество избыточных неравенств и их число экспоненциально растет с увеличением размерности системы, в связи с чем увеличивается вычислительная сложность алгоритма, что не позволяет применять его в реальном времени. Поэтому предлагаются методы аппроксима-

ции выпуклых многомерных многогранников, имеющих большое число граней и вершин, многогранниками с малым числом граней и вершин [16, 56, 125, 126].

В работах П.А. Акимова, А.И. Матасова [4, 61, 152] также рассмотрено применение систем линейных неравенств для оценивания состояния подвижного объекта (1.14). Рассматриваемый подход к оцениванию векторов состояния подвижного объекта заключается в решении проблемы l_1 -аппроксимации, аналогичной классической задаче метода наименьших модулей. Идея предлагаемого метода состоит в формировании функционала оптимизационной задачи в виде суммы модулей компонент вектора невязки, соответствующих начальной информации, неточностям динамической модели и уравнениям для измерений:

$$\begin{aligned} & \|\Pi^{-1}(\bar{x}_0 - x_0)\|_1 + \sum_{i=0}^{K-1} \|Q^{-1}w_i\|_1 + \sum_{i=0}^K \|R^{-1}(y_i - Gx_i)\|_1 \rightarrow \min_{x_i, w_i}, \\ & Q^{-1} = \text{diag}(Q(1)^{-1}, \dots, Q(n_w)^{-1}), \quad R^{-1} = \text{diag}(R(1)^{-1}, \dots, R(n_v)^{-1}), \\ & \Pi^{-1} = \text{diag}(\Pi(1)^{-1}, \dots, \Pi(n_w)^{-1}), \end{aligned} \quad (1.30)$$

где $Q(1), \dots, Q(n_w)$ - максимальные значения координат возмущения, $R(1), \dots, R(n_v)$ - максимальные значения координат помех изменений, $\Pi(1), \dots, \Pi(n_w)$ описывают точность задания априорной информации v^{appr} о начальном состоянии $\bar{x}_0 = x_0 + v^{appr}$. Переменными в задаче (1.30) являются значения вектора состояния x_k и возмущений w_k системы (1.14) на всём интервале времени, на котором производились измерения. Задачу оценивания в данном случае сводят к задаче линейного программирования. Однако данный подход используется для послеопытной обработки данных, а не для оценки состояния в реальном времени.

В работе Кунцевича В.М. [44] использовано описание множества прогнозов $X_{k/k-1}$ набором вершин и матрицей граней, а множества, совместимого с измерением $X[y_k]$, - системой линейных неравенств. Построение информационного множества основано на переборе вершин множества, анализе их положения относительно множества совместимого с измерением и вычисления точек пересечения ребер множества прогноза с гранями множества, совместимого с измерением. Однако, количество вершин может увеличиваться с течением времени, в связи с чем перебор вершин становится вычислительно трудным.

В работе Лычака М.М. [58] применяется метод двойного описания множеств при построении информационных множеств, когда многогранные множества представляют набором вершин и граней. Все известные алгоритмы пересечения многогранников в пространстве R^n при $n > 3$ требуют представления многогранников в виде системы линейных неравенств. В этом случае операция пересечения заключается в удалении из системы избыточных неравенств на основе теоремы Минковского-Фаркаша [9, 106]. А эффективные алгоритмы для выполнения операции суммы множеств в смысле Минковского используют описание множеств набором вершин. Например, когда множества заданы наборами вершин, сумма множеств вычисляется как выпуклая оболочка вершин, представляющих сумму вершин исходных множеств [99]. Это приводит к необходимости сначала преобразовать множество вершин в множество граней, а затем делать обратное преобразование.

В ряде работ, чтобы избежать двойного преобразования и существенно снизить объем вычислений, предлагается аппроксимировать многогранники проекциями на координатные плоскости [71]. В этом случае для построения информационных множеств необходимы только вершины многогранников. Разработанные алгоритмы аппроксимации информационных множеств в виде проекций на двумерные плоскости позволяют получать более точные оценки фазового вектора состояния подвижного объекта, чем при аппроксимации эллипсоидами. Данный подход позволяет стоить гарантированные оценки в реальном времени, однако происходит потеря точности за счет того, что построение точной суммы множеств заменено аппроксимацией.

В работах Кумкова С.И., Пацко В.С. [43, 70] рассматривается построение трёхмерных и четырёхмерных информационных множеств для нелинейных систем. Информационные множества в данном случае не всегда являются выпуклыми. В исследуемой задаче при построении информационных множеств применяется овыпукление множеств, хотя при этом и происходит потеря точности. Полученные множества аппроксимируют истинные информационные множества сверху. Основная идея заключается в использовании сетки по двум из трех или четырех координат и плоских сечений в виде выпуклых многоугольников по двум другим координатам. Построение информационных множеств по предложенной схеме может быть осуществлено в режиме реального времени

для систем третьего и четвертого порядков. Для систем большей размерности построение информационных множеств на основе сеток является уже вычислительно трудным.

В работах Каца И.Я., Куржанского А.Б., Ананьева Б.И., Пельцвергер С.Б., Панченко И.С. и др. [5, 32, 68, 71] рассматривают стохастически неопределённые системы, в которых наряду с возмущениями w_k и помехами v_k , описанными замкнутыми выпуклыми областями их изменения, имеются стохастические возмущения и помехи:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + \Gamma w_k + C\xi_k, \\ y_{k+1} = Gx_{k+1} + Hv_{k+1} + \eta_k, \quad k = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1.31)$$

где ξ_k , η_k - независимые белые гауссовские случайные последовательности векторов с нулевым средним и известными матрицами ковариаций Q_k , R_k . Минимаксно-стохастический подход основан на сочетании вероятностного и игрового подходов. Для информационного множества оценка сверху имеет вид рекуррентного отображения [119]

$$\bar{X}_k = \tilde{X}_k + L_k, \quad k = 0, 1, \dots, \bar{X}_0 = \tilde{X}_0, \quad L_0 = 0, \quad (1.32)$$

где множество условно средних значений \tilde{X}_k может быть вычислено априорно по формуле:

$$\tilde{X}_k = \bar{A}_{k-1}\tilde{X}_{k-1} + \bar{\Gamma}_{k-1}W + \Lambda_k H_k(-V_k). \quad (1.33)$$

Вектор L_k определяется результатами измерения y_k :

$$L_k = \bar{A}_{k-1}L_{k-1} + \bar{B}_{k-1}u_{k-1} + \Lambda_k y_k. \quad (1.34)$$

Матрицы в (1.32, 1.33) определяются как

$$\bar{A}_k = \alpha_k A, \quad \bar{B}_k = \alpha_k B, \quad \bar{\Gamma}_k = \alpha_k \Gamma, \quad \alpha_k = I - \Lambda_{k+1} G, \quad (1.35)$$

где I -единичная матрица, $\Lambda_k = P_k G' R_k^{-1}$, матрица P_k находится из уравнения Рикатти:

$$P_k = M_k G' (G M_k G' + R_k)^{-1} G M_k, \quad M_k = A P_{k-1} A' + Q_{k-1}. \quad (1.36)$$

В результате такого фильтра оценку вектора состояния x_k получают в виде множества \bar{X}_k , но она не является гарантированной.

В работе Ширяева В.И. [120] рассмотрена нелинейная модель

$$\begin{cases} x_{k+1} = \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k + \Gamma w_k, \\ y_{k+1} = Gx_{k+1} + v_{k+1}, \\ x_0 \in \bar{X}_0, \quad w_k \in W, \quad v_{k+1} \in V, \quad k = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1.37)$$

где элементы $a(i, j)$ матрицы \mathbf{A} и элементы $b(i, j)$ матрицы \mathbf{B} могут принимать значения из заданных отрезков $[a_H(i, j) \quad a_B(i, j)]$ и $[b_H(i, j) \quad b_B(i, j)]$ соответственно, а множества \bar{X}_0 , W , V являются многогранниками, которые заданы системами линейных неравенств. Для получения информационного множества \bar{X}_L необходимо решить систему нелинейных уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} Gx_{k+1+i} + v_{k+1+i} = y_{k+i}, \\ x_{k+1+i} - \mathbf{A}x_{k+i} - \mathbf{B}u_{k+i} - \Gamma w_{k+i} = 0, \\ a(i, j) \in [a_H(i, j) \quad a_B(i, j)], \\ b(i, j) \in [b_H(i, j) \quad b_B(i, j)], \\ x_0 \in \bar{X}_0, \quad w_k \in W, \quad v_{k+1} \in V, \\ i = 0, 1, \dots, L, \end{cases} \quad (1.38)$$

В работе [120] также отмечается, что уравнения фильтра (1.38) за счёт совместной обработки совокупности измерений y_{k+i} , $i = 0, \dots, L$ позволяют не только получить информационное множество \bar{X}_L для момента времени L , но и решить задачи как сглаживания, так и оценивания значений реализовавшихся возмущений w_{k+i} , помех v_{k+1+i} , $i = 0, \dots, L$ и параметров $a(i, j)$, $b(i, j)$. Однако для решения нелинейной системы (1.38) требуются большие вычислительные ресурсы.

В ряде работ, посвященных вероятностному и гарантированному подходам к оцениванию состояния подвижных объектов, рассматривается применение дополнительной информации о модели и характере процесса. Например, когда известно, что возмущения и помехи не могут меняться слишком быстро, реализации возмущений и помех имеют ограниченные приращения [61]. На практике широко применяется каноническое и неканоническое разложение внешних возмущений, в том числе и случайных [1, 2, 12, 81, 120, 129]. В некоторых случаях допускают осреднение возмущений и шумов измерений [61]. Учет такой дополнительной информации при разработке алгоритма оценивания позволяет повысить точность оценивания.

1.3 Постановка задачи

Проведённый обзор методов оценивания вектора состояния подвижных объектов показал, что в настоящее время актуальной является разработка методов оценивания вектора состояния подвижных объектов с геометрическими ограничениями. Требуется разработать алгоритм гарантированного оценивания вектора состояния, когда статистические характеристики начального состояния, возмущений и помех, действующих на подвижный объект, неизвестны или не могут быть получены, но в каждый момент времени они могут принимать любой значение из заданных множеств.

Гарантированные оценки, полученные с помощью эллипсоидального и интервального подходов и при аппроксимации информационных множеств параллелотопами и зонотопами, могут быть значительно больше информационных множеств, что может приводить к снижению точности оценивания состояния и, как следствие, к снижению точности и эффективности систем управления подвижными объектами.

Целью данной работы является разработка методов моделирования состояния подвижных объектов, разработка численных алгоритмов полиэдральной аппроксимации информационного множества и их реализация в виде программного комплекса.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

- 1) разработать методы моделирования состояния подвижных объектов с учётом дополнительной информации о модели и характере процесса;
- 2) разработать методы моделирования гарантированных оценок возмущений и помех;
- 3) разработать численный алгоритм полиэдральной аппроксимации информационных множеств;
- 4) сравнить разработанные алгоритмы гарантированного оценивания, основанные на аппроксимации информационных множеств, с существующими алгоритмами оценивания;
- 5) реализовать разработанные алгоритмы в виде комплекса программ и провести вычислительные и натурные эксперименты для различных подвижных объектов.

Глава 2. Алгоритмы гарантированного оценивания на основе численного метода полиэдральной аппроксимации

2.1 Задачи управления и оценивания в условиях неполной информации

Для обеспечения высокой эффективности систем управления в условиях внешних возмущений, шумов измерений, малом объёме измерительной информации, априорной неопределённости характеристик, характерных для объектов ракетной, космической, авиационной техники, требуется по результатам измерений проводить оперативное оценивание состояния и идентификацию неизвестных параметров в процессе функционирования объекта. В качестве примера рассмотрим схему системы управления летательного аппарата. При разработке систем управления на бортовых цифровых вычислительных комплексах выделяют следующие функциональные подсистемы (рис.2.1) [10]

- 1) информационно-измерительные подсистемы, включающие инерциально-навигационные системы и другие датчики и измерители;
- 2) подсистемы оценивания состояния и подсистемы идентификации параметров, обеспечивающие обработку измерительной информации в процессе полета;
- 3) подсистемы предсказания конечного состояния, осуществляющие интегрирование уравнений модели движения летательного аппарата с целью определения текущей ошибки управления;
- 4) управляющие подсистемы, вырабатывающие сигналы управления летательным аппаратом.

В процессе движения летательного аппарата производится измерение функций компонент вектора состояния и параметров летательного аппарата y . По ре-

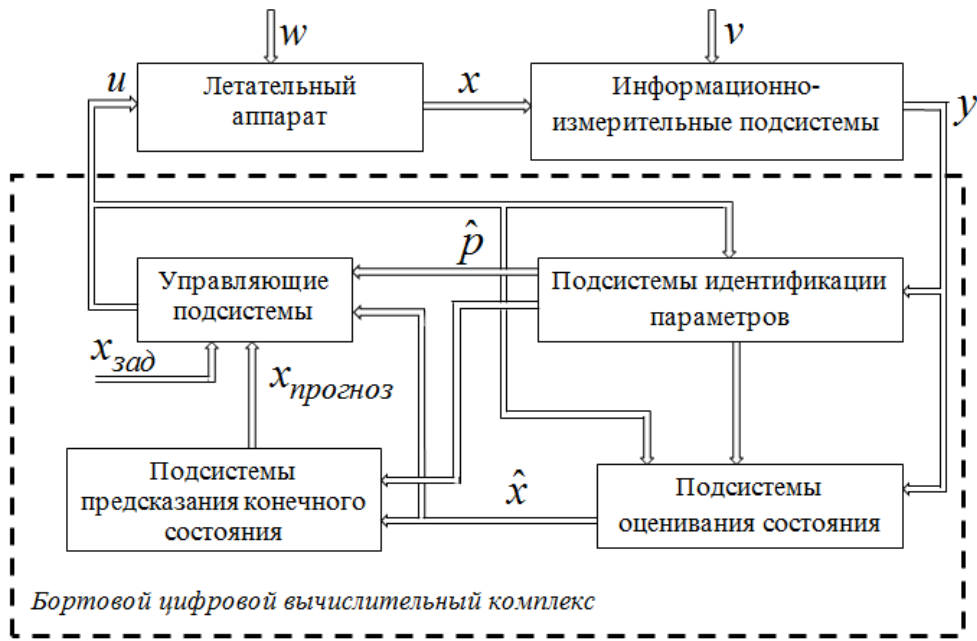


Рис. 2.1. Структурная схема интегрированной системы управления

результатам измерений в подсистеме оценивания состояния (рис.2.1) проводится оценивание вектора состояния и неизвестных x . В этой подсистеме реализованы алгоритмы оценивания состояния системы управления, функционирующей в условиях неопределённости. Далее будем рассматривать алгоритмы гарантированного оценивания, которые должны быть реализованы в данной подсистеме.

В общем случае летательный аппарат как объект управления представляет собой нелинейную нестационарную систему [10], движение которой описывается системой уравнений вида

$$\dot{x} = f^0(x, u) + \Gamma^0(x, u)w, \quad (2.1)$$

где $x \in R^{n_x}$, $w \in R^{n_w}$, $u \in R^{n_u}$ – векторы состояния объекта, возмущения, управления, f^0 – вектор-функция, известная с точностью до априорно неопределённых характеристик объекта.

Измерению, как правило, доступен не весь вектор координат объекта, а лишь некоторая функция вида

$$y = h^0(x) + v, \quad (2.2)$$

где $y \in R^{n_y}$, $v \in R^{n_v}$ – векторы измерения и ошибок измерений.

Поскольку отсутствуют эффективные методы управления, оценивания и идентификации для нелинейных систем, проводят кусочно-линейную аппроксимацию нелинейной модели:

$$\begin{cases} \dot{x} = A^\nu x + B^\nu u + \Gamma^\nu w + c^\nu, \\ y = G^\nu x + v + d^\nu, \end{cases}$$

где $A^\nu = \frac{\partial f^0(x,u)}{\partial x}|_{t_\nu}$, $B^\nu = \frac{\partial f^0(x,u)}{\partial u}|_{t_\nu}$, $G^\nu = \frac{\partial h^0(x)}{\partial x}|_{t_\nu}$, $\Gamma^\nu = \Gamma^0(x(t_\nu), u(t_\nu))$, $c^\nu = f^0(x(t_\nu), u(t_\nu)) - A^\nu x(t_\nu) - B^\nu u(t_\nu)$, $d^\nu = h^0(x, t_\nu) - G^\nu x(t_\nu)$.

Отметим, что погрешности аппроксимации c^ν , d^ν включают в возмущения w и помехи v , действующие на объект.

Алгоритмы управления и оценивания должны быть реализованы с помощью средств цифровой вычислительной техники, поэтому модель объекта управления приводят к дискретному виду, например с помощью экстраполятора нулевого порядка (ЗОН), первого порядка (ФОН) и др. [153]:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + \Gamma_k w_k + c_k; \\ y_{k+1} = G_k x_{k+1} + H_k v_{k+1} + d_k, \quad k = 0, 1, \dots, N, \end{cases}$$

где $x_k \in R^{n_x}$, $w_k \in R^{n_w}$, $y_k \in R^{n_y}$, $v_k \in R^{n_v}$ – векторы состояния, возмущения, измерения, ошибок измерений на k -м шаге соответственно; A_k , B_k , Γ_k , G_k , H_k – известные матрицы. Далее для упрощения записи индекс k у матриц опустим.

Система управления летательного аппарата имеет двухуровневую иерархическую структуру: на верхнем уровне просходит расчет текущих потребных ускорений в геоцентрической системе координат, а задача нижнего уровня – обеспечение достаточно точной реализации потребных ускорений в связанной с летательным аппаратом системе координат. При этом на нижнем уровне системы на основе уравнений движения летательного аппарата осуществляется оценивание текущего состояния летательного аппарата. При рассмотрении движения летательного аппарата на нижнем уровне системы управления вектор состояния в связанной системе координат состоит из 18 координат $x_k \in R^{18}$, непосредственному измерению подвергаются только 6 из них: $y_k \in R^6$ [10]. Измерения проводятся с ошибками $v_k \in R^6$. Возмущения, действующие на систему управления, $w_k \in R^9$. На практике часто рассматривают упрощенные модели

движения летательных аппаратов с вектором состояния меньшей размерности, например, боковое и продольное движение [96]. В этом случае размерность вектора x_k состояния равна 6, а измерения проводятся только по двум координатам $y_k \in R^2$, при этом ошибками измерений пренебрегают.

Задача оценивания рассматривается для систем с геометрическими ограничениями, т.е. когда статистические характеристики начального состояния, возмущений и помех, действующих на подвижный объект, неизвестны, но заданы множества значений:

$$x_0 \in \bar{X}_0, \quad w_k \in W_k, \quad v_k \in V_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Далее для упрощения записи будем опускать индексы у множеств:

$$x_0 \in \bar{X}_0, \quad w_k \in W, \quad v_k \in V, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

2.2 Моделирование эволюции информационных множеств подвижных объектов на основе описания вектора состояния системами линейных неравенств

Описанный в п.1.2 алгоритм минимаксной фильтрации предполагает выполнение операций над множествами: линейные преобразования множеств, сумма множеств в смысле Минковского, пересечение множеств. Эволюцию информационных множеств получают в этом случае в результате множественно-множественных отображений. Методы реализации операций над множествами зависят от способа описания множеств. Когда множества являются многогранниками, заданными набором своих вершин, то задача построения суммы множеств сводится к нахождению выпуклой оболочки. Известные в настоящее время алгоритмы построения выпуклой оболочки из N точек в n -мерном пространстве имеют время решения $O(N^{\lfloor n/2 \rfloor + 1})$, что неприемлемо для многих практических задач, когда вычисления требуется проводить в реальном времени. Многогранники также могут быть заданы методом двойного описания (вершинами и гранями) [58, 131, 132]. Однако при больших объёмах измерительной информации количество вершин информационного множества может

значительно возрастать, что существенно увеличивает вычислительные затраты.

Рассмотрим состояние подвижного объекта в виде систем линейных уравнений и неравенств, где в качестве переменных будут выступать значения векторов состояния x_k , векторов возмущения w_k и помех измерения v_k при $k = 0, 1, \dots, N$, отвечающих всему временному интервалу, на которых производились измерения.

Подвижный объект описан линейными разностными уравнениями:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \Gamma w_k, \\ y_{k+1} = Gx_{k+1} + Hv_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (2.3)$$

где $x_k \in R^{n_x}$, $w_k \in R^{n_w}$, $y_k \in R^{n_y}$, $v_k \in R^{n_v}$ – векторы состояния объекта, возмущения, измерения, ошибок измерений на k -м шаге соответственно; A , Γ , G , H – известные матрицы.

Для начального состояния x_0 , возмущения w_k и помех измерений v_k заданы множественные ограничения в виде многогранников в соответствующих пространствах:

$$\begin{aligned} x_0 \in \bar{X}_0 : \quad A_{x_0}x_0 &\leq b_{x_0}, \\ w_k \in W : \quad A_w w_k &\leq b_w, \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ v_k \in V : \quad A_v v_k &\leq b_v, \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В работах [16, 17, 55, 56, 98] рассматривается построение множества достижимости (1.16) в виде многогранника, описанного системой линейной неравенств

$$X_{k/k+1} = \{x \in R^n | C_k x \leq b_k\}.$$

Построение множества достижимости основано на следствии из теоремы Минковского-Фаркаша. Для того чтобы система линейных неравенств $C_k x \leq b_k$ имела решения необходимо и достаточно, чтобы для

$$C_k^T y = 0, \quad y \geq 0 \quad (2.5)$$

выполнялось условие

$$(b_k, y) \geq 0. \quad (2.6)$$

Любое решение системы линейных уравнений и неравенств (2.5) можно представить в виде линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами конечного числа фундаментальных решений данной системы [26]. Поэтому условие (2.6) необходимо проверять только для фундаментальных решений системы (2.5). Н.Б. Черниковой разработана вычислительная схема для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы однородных линейных уравнений [107]. Данный метод является трудоёмким по времени вычисления [77, 99].

Динамика системы с 0 шага до k -го описана следующей системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = Ax_0 + \Gamma w_0 + Bu_0; \\ y_1 = Gx_1 + Hv_1; \\ x_2 = Ax_1 + \Gamma w_1 + Bu_1; \\ y_2 = Gx_2 + Hv_2; \\ \dots \\ x_k = Ax_{k-1} + \Gamma w_{k-1} + Bu_{k-1}; \\ y_k = Gx_k + Hv_k \end{cases} \quad (2.7)$$

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} I & -A & \mathbf{0} & \dots & -\Gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & -A & \dots & \mathbf{0} & -\Gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & -A & \dots & \mathbf{0} & -\Gamma & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ G & \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & H & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & G & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} & \dots & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \dots \\ x_0 \\ w_{k-1} \\ \dots \\ w_0 \\ v_k \\ \dots \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bu_{k-1} \\ \dots \\ Bu_0 \\ y_k \\ \dots \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Система линейных неравенств, описывающая ограничения на неизвестные величины $x_0, w_i, v_{i+1}, i = 0, \dots, k$:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{x_0}x_0 \leq b_{x_0}; \\ A_w w_0 \leq b_w; \\ A_w w_1 \leq b_w; \\ \dots \\ A_w w_{k-1} \leq b_w; \\ A_v v_1 \leq b_v; \\ A_v v_2 \leq b_v; \\ \dots \\ A_v v_k \leq b_v \end{array} \right. \quad (2.9)$$

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \dots & A_{x_0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & A_w & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_w & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & A_v & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \dots \\ x_0 \\ w_{k-1} \\ \dots \\ w_0 \\ v_k \\ \dots \\ v_1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_{x_0} \\ b_w \\ \dots \\ b_w \\ b_v \\ \dots \\ b_v \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Системы (2.8), (2.10) описывают многогранник в пространстве переменных $(x_0, x_1, \dots, x_k, w_0, \dots, w_{k-1}, v_1, \dots, v_k)$, то есть неявно описывают состояние системы с 0 до k -го шага. Размерность пространства равна $(n_x \cdot (k+1) + n_w \cdot k + n_v \cdot k)$. Требуется получить явное описание информационного множества в виде системы линейных неравенств $A_{x_k}x_k \leq b_k$. В этом случае задача оценивания заключается в решении данных систем относительно оцениваемой переменной x_k . Один из подходов к решению задачи заключается в проектировании многогранника, описанного системами (2.8), (2.10), в пространство меньшей размер-

ности переменных x_k методом свёртки системы линейных неравенств Фурье-Черникова [57, 106]. Метод заключается в последовательном исключении переменных из систем (2.8), (2.10). Отметим, что данный подход позволяет построить множественную оценку не только для вектора состояния x_k , но и для возмущений w_i и помех v_i , $i = 0, \dots, k$. Недостатком данного алгоритма является появление в промежуточных вычислениях большого количества избыточных неравенств, число которых зависит экспоненциально от количества неравенств в исходной системе. Покажем недостаток применения свёртки систем линейных неравенств на следующем примере.

Пример. Матрицы в системе (2.3):

$$A = \begin{pmatrix} 0.9976 & 0.04636 \\ -0.09278 & 0.8584 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = (0.1189; 4.639) 10^{-3},$$

G, H – единичные матрицы размера 2×2 .

Ограничения на x_0 , w_k , v_k заданы в виде многогранников (рис.1.3):

$$\bar{X}_0 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x_0 \leq \begin{pmatrix} 0.0316 \\ 0.0141 \\ 0.0316 \\ 0.0141 \end{pmatrix}, \quad W : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} w_k \leq \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix},$$

$$V : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v_k \leq \begin{pmatrix} 0.0228 \\ 0.000145 \\ 0.0228 \\ 0.000145 \end{pmatrix}.$$

На рис.2.2 показано информационное множество \bar{X}_5 , построенное в результате применения свёртки системы линейных неравенств. Как видно из рисунка, информационное множество имеет пять граней, то есть описано пятью неравенствами, но в результате свёртки было получено большое число избыточных неравенств.

Системы (2.8), (2.10) содержат все неизвестные переменные системы с 0-го до k -го шага и включают всю информацию о движении и ограничениях в системе за всё время функционирования системы. С течением времени размерность

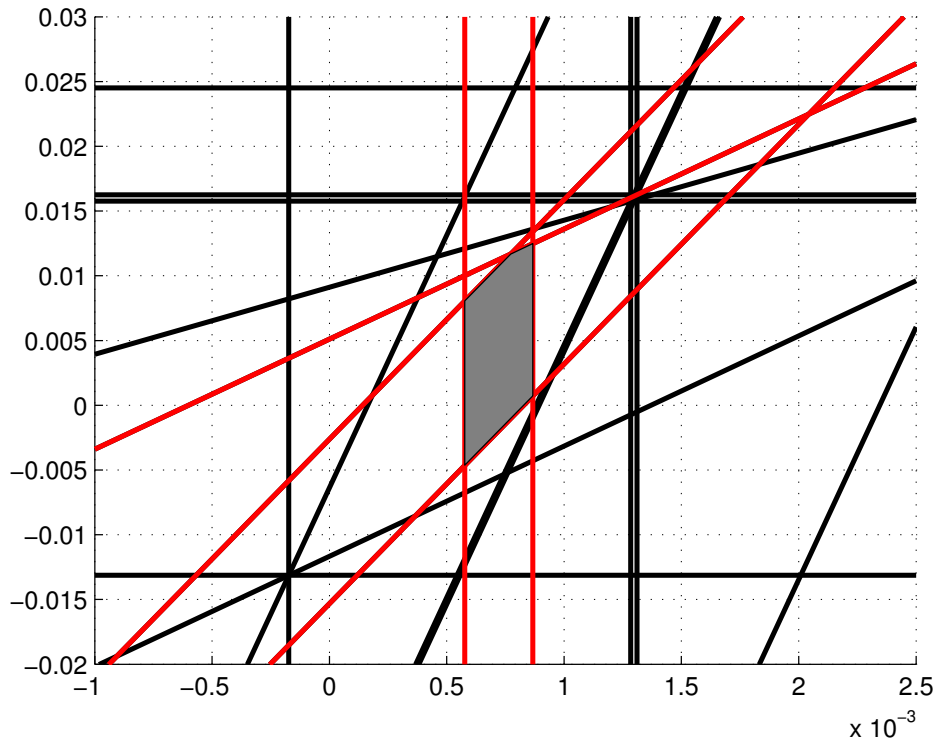


Рис. 2.2. Информационное множество \bar{X}_5 (серым цветом закрашено информационное множество, черным цветом обозначены избыточные ограничения, полученные в результате свёртки, красным цветом - активные ограничения, образующие информационное множество).

системы увеличивается, поэтому растут вычислительные затраты для хранения и обработки этой информации.

Для уменьшения вычислительных затрат рассмотрим оценку вектора состояния x_k подвижного объекта не за k шагов, а на один последний шаг по алгоритму (1.16)-(1.18), когда все исходные множества и результаты операций над множествами в минимаксном фильтре описаны системами линейных уравнений и неравенств. Множество прогнозов $X_{k/k-1}$ найдем в результате выполнения свертки системы системы линейных неравенств [98], затем полученную систему объединим с системой линейных неравенств, описывающих $X[y_k]$. Из объединенной системы удалим избыточные неравенства. Приведем алгоритм нахождения системы линейных неравенств, описывающей информационное множество \bar{X}_k .

Алгоритм.

1) Найдем систему линейных неравенств, описывающих множество прогнозов $X_{k/k-1}$

$$X_{k/k-1} = A\bar{X}_{k-1} + \Gamma W, \quad x_k \in X_{k/k-1}. \quad (2.11)$$

Уравнение движения из (2.3) запишем в виде системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_k - Ax_{k-1} - \Gamma w_{k-1} \leq 0, \\ -x_k + Ax_{k-1} + \Gamma w_{k-1} \leq 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Из (2.4), (2.12) получаем систему линейных неравенств:

$$\begin{pmatrix} A & \Gamma & -I \\ -A & -\Gamma & I \\ A_{x_{k-1}} & 0 & 0 \\ 0 & A_w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ w_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{x_{k-1}} \\ b_w \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Проведем свертку системы (2.13), обнуляя коэффициенты при x_{k-1} и w_{k-1} [57, 106]. Получим систему $A_{k/k-1}x_k \leq b_{k/k-1}$.

2) Найдем систему линейных неравенств, описывающую множество, совместимое с измерением, $X[y_k]$:

$$X[y_k] : A_{y_k}x_k \leq b_{y_k}, \quad \text{где } A_{y_k} = -A_v G, \quad b_{y_k} = -A_v y_k + b_v. \quad (2.14)$$

3) Найдем систему линейных неравенств, описывающую информационное множество

$$\bar{X}_k : A_{x_k}x_k \leq b_{x_k}. \quad (2.15)$$

Поскольку истинное состояние x_k принадлежит и множеству $X_{k/k-1}$ и $X[y_k]$, то оно принадлежит пересечению этих множеств, то есть удовлетворяет системам (2.13) и (2.14). Для нахождения пересечения объединим системы (2.13) и (2.14) и исключим из полученной системы избыточные неравенства, используя теорему Минковского-Фаркаша [26]. Для каждого неравенства $a_i x \leq d_i$ из системы (2.15), где a_i - i -я строка матрицы A_{x_k} , d_i - i -й элемент b_{x_k} , решим задачу линейного программирования при ограничениях (2.13), (2.14):

$$x_k^* = \operatorname{argmax} \langle a_i, x_k \rangle. \quad (2.16)$$

Если найдется решение x_k^* , при котором $a_i x_k^* < d_i$, то данное неравенство является избыточным и его можно исключить из системы [26]. Неравенства, оставшиеся в объединённой системе после удаления избыточных неравенств, описывают информационное множество \bar{X}_k . Конец алгоритма.

Поскольку на шаге 1 в результате свёртки может быть получена система линейных неравенств с большим числом избыточных неравенств, то на шаге 3 необходимо будет решать большое число задач линейного программирования, чтобы исключить избыточные неравенства.

2.3 Алгоритм аппроксимации информационных множеств

Алгоритм, описанный в п.2.2 позволяет строить информационное множество, но при его применении возникают вычислительные сложности, связанные с построением множества прогнозов и информационного множества. Множество прогнозов $X_{k+1/k}$ строится с применением свёртки системы линейных уравнений и неравенств, в результате которой возникает большое число избыточных неравенств. Для вычисления информационного множества требуется выполнить пересечение множеств, которое сводится к исключению избыточных неравенств решением большого числа задач линейного программирования. Поэтому приведём алгоритм построения аппроксимации информационных множеств сверху для системы (2.3), когда множества начального состояния, возмущений, помех заданы многогранниками в виде систем линейных неравенств (2.4). Процедура заключается в построении аппроксимации информационного множества сверху многогранником заданной формы, без выполнения вычислительно затратных операций суммы и пересечения множеств.

Подвижный объект описан уравнениями:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \Gamma w_k, \\ y_{k+1} = Gx_{k+1} + Hv_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (2.17)$$

где $x_k \in R^n$, $w_k \in R^l$, $y_k \in R^m$, $v_k \in R^p$ – векторы состояния системы, возмущения, измерения, ошибок измерений на k -м шаге соответственно; A , Γ , G , H – известные матрицы; u_k – заданное управление.

Начальное состояние x_0 и неопределенные воздействия w_k и v_k на k -м шаге могут принимать любые значения из заданных выпуклых многогранных множеств:

$$\begin{aligned} x_0 \in \bar{X}_0 : A_{x_0}x_0 &\leq b_{x_0}, \\ w_k \in W : A_w w_k &\leq b_w, \\ v_k \in V : A_v v_k &\leq b_v, \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для построения аппроксимирующего многогранника X_{k+1} информационного множества $\bar{X}_{k+1} \subseteq X_{k+1}$ по результатам измерения y_{k+1} используется неявное задание информационного множества системами линейных неравенств, полученных из условий (2.18), уравнений модели (2.17) и оценки X_k . На основе этой системы строится явное представление аппроксимирующего многогранника X_{k+1} в виде системы линейных неравенств относительно переменной x_{k+1} , т.е.

$$X_{k+1} = \{x_{k+1} | A_{x_{k+1}}x_{k+1} \leq b_{x_{k+1}}\}.$$

Для этого необходимо задать набор векторов нормалей a_i к граням аппроксимирующего многогранника X_{k+1} , где a_i – i -я строка матрицы $A_{x_{k+1}}$, по направлению которых оценки значения координат вектора состояния x_{k+1} являются наиболее значимыми. Чтобы получить уравнение грани аппроксимирующего многогранника $\langle a_i, x_{k+1} \rangle = b_{x_{k+1}}(i)$, необходимо вычислить значения элементов свободного члена $b_{x_{k+1}}$ решив ряд задач линейного программирования (рис.2.3).

Алгоритм 1

Шаг 1. $k = 0$.

Шаг 2. . На k -м шаге в системе (2.17) известны значения управления u_k и измерения y_{k+1} , а вектора x_{k+1} , x_k , w_k , v_{k+1} являются неизвестными. В уравнениях модели (2.17) неизвестные перенесем в одну часть, а известные – в другую. Получим систему линейных уравнений, описывающую модель системы (2.17):

$$\begin{cases} x_{k+1} - Ax_k - \Gamma w_k = Bu_k; \\ Gx_{k+1} + Hv_{k+1} = y_{k+1} \end{cases} \quad (2.19)$$

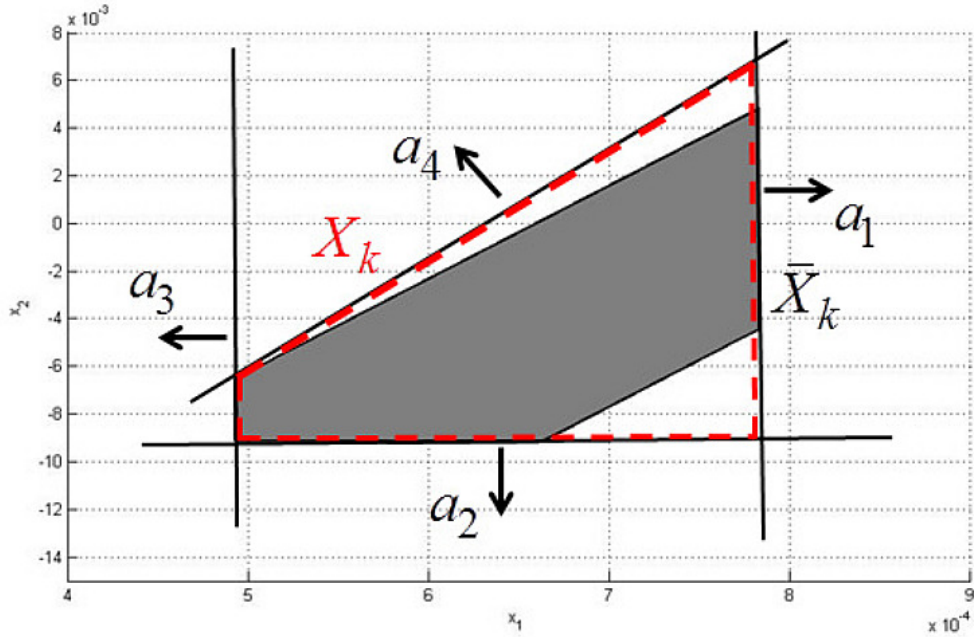


Рис. 2.3. Пример построения аппроксимации X_k (пунктир) информационного множества \bar{X}_k (закрашенная фигура).

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} I & -A & -\Gamma & \mathbf{0} \\ G & \mathbf{0} & \mathbf{0} & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ w_k \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bu_k \\ y_{k+1} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Шаг 3. Получим систему линейных неравенств из ограничений (2.18):

$$\begin{cases} A_{x_k} x_k \leq b_{x_k}; \\ A_w w_k \leq b_w; \\ A_v v_k \leq b_v, \end{cases} \quad (2.21)$$

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & A_{x_k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ w_k \\ v_{k+1} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_{x_k} \\ b_w \\ b_v \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Шаг 4. Аппроксимируем информационное множество \bar{X}_{k+1} многогранником X_{k+1} с набором граней, вектора нормалей которых записаны по строкам матрицы $A_{x_{k+1}}$, т.е. получим многогранник X_{k+1} , т.к. $\bar{X}_{k+1} \subseteq X_{k+1}$, описанный системой линейных неравенств

$$X_{k+1} = \{x_{k+1} | A_{x_{k+1}} x_{k+1} \leq b_{x_{k+1}}\}. \quad (2.23)$$

Для каждого направления a_i (i -я строка матрицы $A_{x_{k+1}}$) решаем задачу линейного программирования

$$x_{k+1}^* = \operatorname{argmax} \langle a_i, x_{k+1} \rangle, \quad (2.24)$$

при ограничениях (2.20), (2.22), где $\langle a_i, x_{k+1} \rangle$ – скалярное произведение векторов a_i и x_{k+1} , тогда из уравнения гиперплоскости, проходящей через точку x_{k+1}^* , следует, что i -я координата вектора $b_{x_{k+1}}$ равна

$$b_{x_{k+1}}(i) = \langle a_i, x_{k+1}^* \rangle. \quad (2.25)$$

Шаг 5. $k = k + 1$. Если $k = N$ конец алгоритма, иначе перейти к шагу 2.

Алгоритм 1 описывает аппроксимацию информационного множества \bar{X}_{k+1} на основе текущего измерения y_{k+1} . Если использовать оценку X_{k+1} для получения на следующем $k + 2$ шаге оценки X_{k+2} информационного множества \bar{X}_{k+1} , то неточности, получаемые из-за аппроксимации, могут с каждым шагом накапливаться. На практике часто рассматривают обработку измерительной информации, полученной не в конкретный момент времени k , а за весь период наблюдений или за несколько последних шагов [4, 133]. Рассмотрим повышение точности полиэдральной аппроксимации, если учитывать информацию об измерениях, возмущениях и помехах, полученную не с одного предыдущего k -го шага, а с нескольких предыдущих шагов $k, k - 1, \dots, k - L$. Если в алгоритме 1 система (2.20), (2.22) составлена относительно неизвестных переменных $x_{k+1}, x_k, w_k, v_{k+1}$, то теперь увеличим размерность системы (2.20), (2.22), включив в нее переменные $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-L}, w_{k-1}, \dots, w_{k-L}, v_k, \dots, v_{k-L}$. С помощью

алгоритма 2 может быть получена более точная оценка X_k информационного множества \bar{X}_k .

Алгоритм 2.

Шаг 1. Зададим L – число предыдущих шагов, значения измерений $y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-L}$ и управлений $u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_{k-L}$ с которых будут использованы для вычисления текущей оценки.

Шаг 2. Составим систему линейных уравнений, описывающих систему (2.17),(2.18) на последних L шагах:

$$\begin{pmatrix} I & -A & \mathbf{0} & \dots & -\Gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & -A & \dots & \mathbf{0} & -\Gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & -A & \dots & \mathbf{0} & -\Gamma & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ G & \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & H & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & G & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} & \dots & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \dots \\ x_{k-L} \\ w_{k-1} \\ \dots \\ w_{k-L} \\ v_k \\ \dots \\ v_{k-L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bu_{k-1} \\ \dots \\ Bu_{k-L} \\ y_k \\ \dots \\ y_{k-L} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Шаг 3. Составим систему линейных неравенств, описывающих ограничения на возмущения, помехи и оценку на последних L шагах:

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{0} & \cdots & A_{x_{k-L}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & A_w & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & Aw & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & A_v & \cdots & \mathbf{0} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_v
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_k \\
x_{k-1} \\
\cdots \\
x_{k-L} \\
w_{k-1} \\
\cdots \\
w_{k-L} \\
v_k \\
\cdots \\
v_{k-L}
\end{pmatrix}
\leq
\begin{pmatrix}
b_{x_{k-L}} \\
b_w \\
\cdots \\
b_w \\
b_v \\
\cdots \\
b_v
\end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Шаг 4. Построим аппроксимацию информационного множества X_k на основе систем (2.26), (2.27):

$$\bar{X}_k \subseteq X_k = \{x_k | A_{x_k} x_k \leq b_{x_k}\}. \quad (2.28)$$

Для каждого направления a_i (i -я строка матрицы A_{x_k}) аппроксимирующего многогранника решаем задачу линейного программирования

$$x_k^* = \operatorname{argmax} \langle a_i, x_k \rangle, \quad (2.29)$$

при ограничениях (2.26), (2.27), где $\langle a_i, x_k \rangle$ – скалярное произведение векторов a_i и x_k , тогда i -я координата вектора b_{x_k} равна

$$b_{x_k}(i) = \langle a_i, x_k^* \rangle. \quad (2.30)$$

Шаг 5. $k = k + 1$. Если $k = N$ конец алгоритма, иначе перейти к шагу 2.

Описанные алгоритмы позволяют построить аппроксимацию информационного множества в виде многогранника заданной формы без выполнения вычислительно затратных операций суммы Минковского и пересечение множеств. Поскольку форма аппроксимирующего множества X_k неизвестна, то выбирать направления A_{x_k} следует исходя из требований задачи, например, выбирать та-

кие вектора a_i , по направлению которых значения координат вектора состояния являются наиболее важными. Например, если требуется вычислить диапазон возможных значений по каждой из координат вектора x_k , то аппроксимирующее множество представляет собой параллелепипед, ориентированный по координатным осям, и матрица векторов-нормалей $A_{x_k} = \begin{pmatrix} I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} \end{pmatrix}$. Чем ближе к истинному информационному множеству задана форма аппроксимирующего многогранника, тем более точной будет получена аппроксимация и меньше будет накапливаться ошибка оценивания. Кроме того, отметим, что при рекуррентном построении информационное множество \bar{X}_k формируется в результате пересечения множества прогнозов $X_{k/k-1}$ и множества, совместимого с измерением $X[y_k]$, т.е. некоторые грани этих множеств являются и гранями информационного множества. Множество прогнозов является суммой Минковского множеств $A\bar{X}_{k-1}$ и ΓW , среди граней множества прогнозов могут быть грани с такими же векторами нормалей [99]. Векторы нормалей граней множества $X[y_k]$ и ΓW заданы априорно, поэтому они могут быть включены в матрицу A_{x_k} для увеличения точности оценки.

Уменьшить время вычисления аппроксимации можно, если вычислять оценки только по не измеряемым координатам, а в качестве оценки по остальным координатам брать множество, совместимое с измерением.

Выбор ширины окна L также влияет на точность оценки. Но при увеличении L увеличивается размер систем линейных уравнений (2.26) и неравенств (2.27), а значит и время вычисления оценки.

Например, при рассмотрении движения летательного аппарата, когда $n_x = 18$, $n_w = 9$, $n_y = 6$, $n_v = 6$ размер системы линейных уравнений (2.26) равен 24×51 при $L = 1$, 48×84 при $L = 2$, 240×348 при $L = 10$, а размер системы линейных неравенств (2.27) равен 66×51 при $L = 1$, 96×84 при $L = 2$, 226×348 при $L = 10$. Кроме того, увеличение ширины окна не всегда является обоснованным, так как более ранние измерения со временем всё меньше влияют на текущую оценку, и в какой-то момент увеличение L не позволяет получить более точную оценку. Выбор ширины окна следует проводить в соответствии с имеющимися вычислительными ресурсами и на этапе численного моделирования системы.

Отметим, что описанные алгоритмы позволяют получать гарантированную оценку возмущений и помех, действующих на подвижный объект, что может быть в дальнейшем использовано для прогнозирования и разработки адаптивного алгоритма оценивания.

2.4 Сравнение методов гарантированного оценивания

Наиболее известный метод аппроксимации информационных множеств - метод эллипсоидов. К преимуществам данного подхода относится то, что класс эллипсоидов инвариантен относительно операций линейного преобразования, а квадратичное описание множеств позволяет легко решать на них задачи оптимизации. Наибольший вклад в развитие эллипсоидального оценивания внесли А.Б. Куржанский [48, 49], Ф.Л. Черноусько [110], Г.М. Бакан [8]. А.А. Куржанским совместно с коллегами был разработан программный пакет Ellipsoidal Toolbox для вычислительной среды Matlab [147]. В данном пакете реализованы следующие численные алгоритмы: вычисление внешних и внутренних эллипсоидальных аппроксимаций суммы и разности эллипсоидов, пересечение эллипсоидов, а также пересечение эллипсоидов с полупространствами и политопами, вычисление расстояния между эллипсоидами, между эллипсоидом и гиперплоскостью, между эллипсоидом и политопом, вычисление проекции эллипсоида на заданную плоскость. Операции над эллипсоидами используются для вычисления множеств достижимости для непрерывных и дискретных линейных систем.

Проведём сравнение аппроксимаций информационных множеств многогранниками, используя подход, описанный в п.2.2,2.3 и эллипсоидами, используя пакет Ellipsoidal Toolbox.

Рассмотрим полиэдральную аппроксимацию X_{k+1} информационного множества \bar{X}_{k+1} сверху, т.е. $X_{k+1} \subseteq \bar{X}_{k+1}$ когда ограничения заданы системами линейных неравенств:

$$\begin{aligned} x_0 \in X_0 : A_{x_0}x_0 \leq b_{x_0}, \quad w_k \in W : A_w w_k \leq b_w, \\ v_k \in V : A_v v_k \leq b_v, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Сравним полиэдральную аппроксимацию информационного множества с аппроксимацией \bar{X}_{k+1} эллипсоидом $E(q_{x_{k+1}}, Q_{x_{k+1}}) = \{x \in R^n | \langle (x - q_{x_{k+1}}), Q_{x_{k+1}}^{-1} (x -$

$q_{x_{k+1}}\rangle\rangle \leq 1\}$. Для этого зададим ограничения на начальное состояние, возмущения и помехи измерения в виде эллипсоидов

$$x_0 \in E(q_{x_0}, Q_{x_0}), \quad w_k \in E(q_w, Q_w), \quad v_k \in E(q_v, Q_v), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.32)$$

Тогда алгоритм гарантированного оценивания проводится по рекуррентным уравнениям (1.16)-(1.18), но при этом все операции проводятся над эллипсоидами. Для множества прогнозов $X_{k+1/k}$, являющегося суммой множеств $A\bar{X}_k = E(q_1, Q_1)$ и $\Gamma W = E(q_2, Q_2)$, строится внешняя аппроксимация эллипсоидом $E(q^+, Q^+)$ (рис.1.5). Для вычисления аппроксимирующего эллипсоида использован метод `reach` пакета `Ellipsoidal Toolbox`. Данный метод позволяет получить уравнение аппроксимирующего эллипса минимального объёма $E(q^+, Q_l^+)$ для априорно заданных направлений главных осей l . Для заданного направления осей l получено уравнение матрицы Q_l^+ и центра q^+ [147, 148]:

$$Q_l^+ = \left(\langle l, Q_1 l \rangle^{1/2} + \langle l, Q_2 l \rangle^{1/2} \right) \left(\frac{1}{\langle l, Q_1 l \rangle^{1/2}} Q_1 + \frac{1}{\langle l, Q_2 l \rangle^{1/2}} Q_2 \right), \quad (2.33)$$

$$q^+ = q_1 + q_2.$$

Изменяя параметр l можно получить точную сумму эллипсоидов $E(q_1, Q_1)$ и $E(q_2, Q_2)$:

$$E(q^+, Q^+) = \bigcap_{\langle l, l \rangle = 1} E(q^+, Q_l^+). \quad (2.34)$$

Аппроксимацию выпуклого множества можно получить с любой точностью в результате пересечения конечного числа аппроксимирующих сверху эллипсоидов. Поэтому для повышения точности оценивания Куржанским А.Б. было предложено вычислять аппроксимацию параллельно для различных значений параметра l и в качестве оценки брать пересечение полученных эллипсоидов, хотя это требует увеличение вычислительных ресурсов.

Информационное множество вычисляется как пересечение эллипсоида $E(q^+, Q^+)$ и эллипсоида $E(y_{k+1}, Q_{y_{k+1}}^+)$, описывающего множество, совместимое с измерением. А операция пересечения эллипсоидов сводится к построению пересечения в классе эллипсоидов, а именно к аппроксимации пересечения двух эллипсоидов эллипсоидом $E(q_{x_{k+1}}, Q_{x_{k+1}})$, а поскольку решается задача гарантированного оценивания вектора состояния, то строится внешняя аппроксима-

ция результата пересечения двух эллипсоидов минимального объема (рис.1.6). Для вычисления пересечения множеств использован метод *intersection_ea* пакета Ellipsoidal Toolbox. Вычисление параметров аппроксимирующего эллипсоида наименьшего объёма сводится к решению системы нелинейных уравнений [147, 148]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{Q}^+ = \alpha X, \\ X = \pi W_1 + (1 - \pi)W_2, \\ \alpha = 1 - \pi(1 - \pi)\langle (q_2 - q_1), W_2 X^{-1} W_1 (q_2 - q_1) \rangle, \\ \tilde{q}^+ = X^{-1}(\pi W_1 q_1 + (1 - \pi)W_2 q_2), \\ 0 = \alpha |X|^2 \text{tr}(X^{-1}(W_1 - W_2)) \\ \quad - n |X|^2 (2\langle q^+, W_1 q_1 - W_2 q_2 \rangle + \langle q^+, (W_2 - W_1)\tilde{q}^+ \rangle \\ \quad - \langle q_1, W_1 q_1 \rangle + \langle q_2, W_2 q_2 \rangle), \end{array} \right. \quad (2.35)$$

где $\tilde{q}^+ = q_{x_{k+1}}$, $\tilde{Q}^+ = Q_{x_{k+1}}$, $q_1 = q^+$, $q_2 = y_{k+1}$, $W_1 = (Q^+)^{-1}$, $W_2 = (Q_{y_{k+1}}^+)^{-1}$.

Пример. Проведем сравнение аппроксимации информационного множества на примере двумерной модели (2.3):

$$A = \begin{pmatrix} 0.9976 & 0.04636 \\ -0.09278 & 0.8584 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0.014 & 0.002 \\ 0.002 & 0.014 \end{pmatrix},$$

G, H – единичные матрицы размера 2×2 .

Для аппроксимации информационного множества многогранником зададим множества \bar{X}_0, W, V (рис.2.4) в виде систем линейных неравенств:

$$\bar{X}_0 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x_0 \leq \begin{pmatrix} 0.0316 \\ 0.0141 \\ 0.0316 \\ 0.0141 \end{pmatrix}, \quad W : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} w_k \leq \begin{pmatrix} 1.7321 \\ 1 \\ 1.7321 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$V : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v_k \leq \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.1 \\ 0.02 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Для аппроксимации информационного множества эллипсом зададим ограничения на начальное состояние, возмущения и помехи в виде эллипсов, вписанных во множества \bar{X}_0 , W , V . Эллипсы E_{x_0} , E_w и E_v являются эллипсами в центре координат (рис.2.4) и заданы следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} E_{x_0} &= \{x_0 \in R^{n_x} | \langle x_0, Q_x^{-1} x_0 \rangle \leq 1\}, \\ E_w &= \{w_k \in R^{n_w} | \langle w_k, Q_w^{-1} w_k \rangle \leq 1, \quad k = 0, \dots, N\}, \\ E_v &= \{v_k \in R^{n_v} | \langle v_k, Q_v^{-1} v_k \rangle \leq 1, \quad k = 0, \dots, N\}, \end{aligned}$$

где

$$Q_{x_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}, \quad Q_w = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_v = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

При моделировании процесса x_k , y_{k+1} , $k = 0, 1, \dots, N$ будем считать, что начальное состояние системы равно 0, а возмущения w_k и ошибок измерений v_k при реализованы внутри соответствующих эллипсов случайным образом (рис.2.5,2.6). На рис. 5.6 показана эволюция информационных множеств.

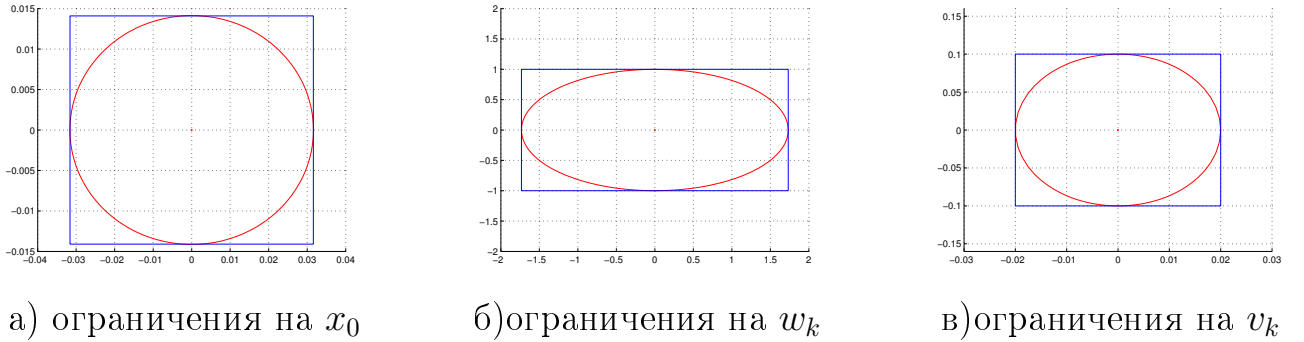


Рис. 2.4. Априорные ограничения на начальное состояние x_0 , возмущения w_k и помехи измерений v_k

Множественные оценки можно строить и по результатам фильтра Калмана. Действительное значение вектора состояния объекта на уровне 3σ попадает во множество

$$(x_k - \hat{x}_k) P_k^{-1} (x_k - \hat{x}_k)' \leq l^2. \quad (2.36)$$

Параметр l выбирается в зависимости от размерности вектора x и доверительной вероятности. Например, для двумерного пространства вероятность нахождения вектора внутри эллипса при $l = 3$ равна 0,989 [14]. Сравним доверитель-

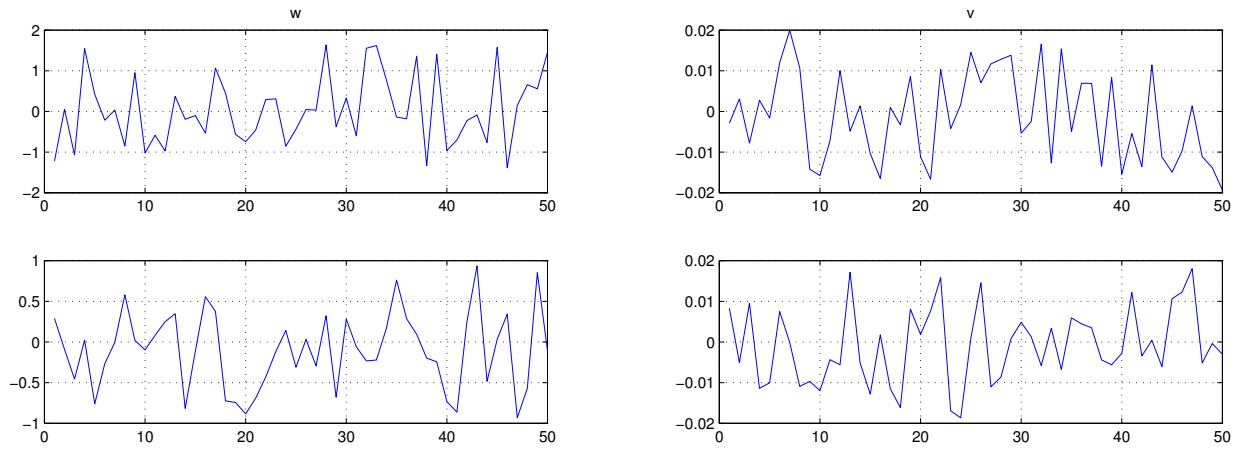
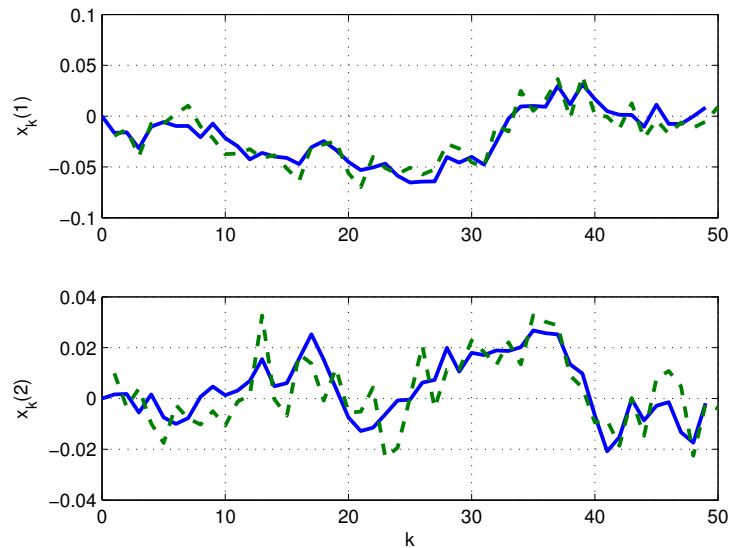
а) реализация возмущений w_k б) реализация возмущений v_k

Рис. 2.5. Реализация процесса

Рис. 2.6. Вектор состояния x_k (сплошная линия) и измерения y_k (пунктир)

ные области, построенные с помощью фильтра Калмана, и информационные множества, построенные с помощью минимаксного фильтра.

Зададим ковариационные матрицы P_0 , Q и R в соответствии с эллипсами E_{x_0} , E_w , E_v :

$$P_0 = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}, \quad Q = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Построим аппроксимации информационных множеств X_k прямоугольником с гранями, нормали которых записаны по строкам матрицы $A_{x_{k+1}} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$ и эллипсоидами с направляющими векторами $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Также рассмотрим оценки фильтра Калмана и сравним доверительные множества, полученные на основе оценок фильтра Калмана, с аппроксимацией эллипсоидами и многогранниками (рис.2.7). Результаты оценивания приведены в табл.2.1.

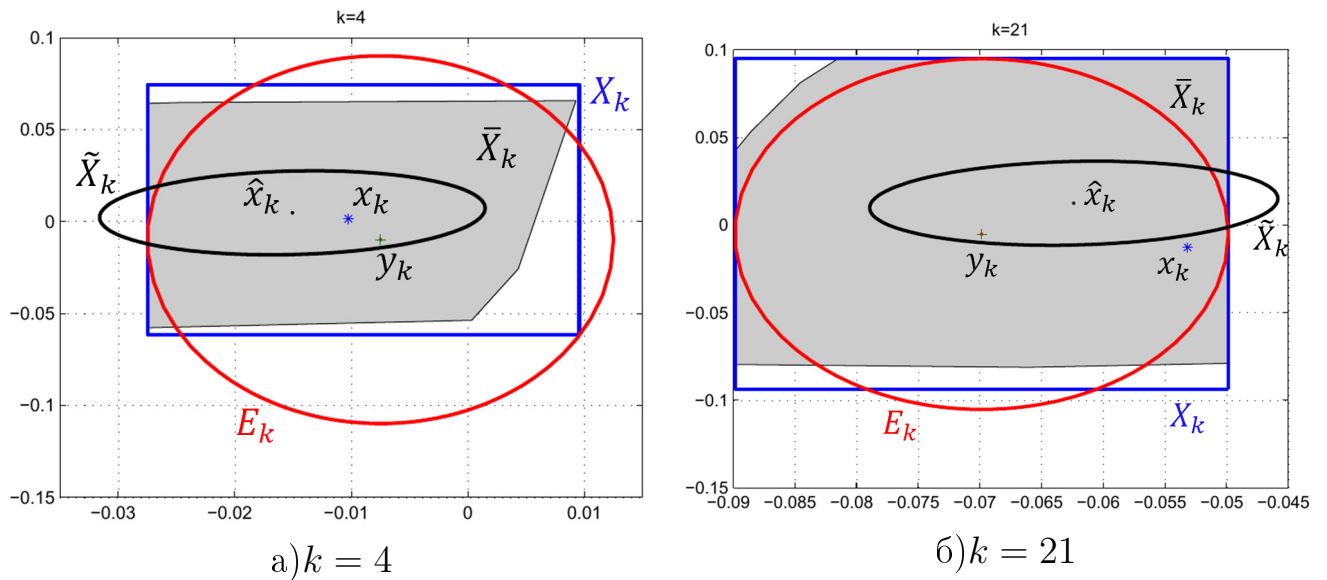


Рис. 2.7. Сравнение аппроксимаций информационных множеств \bar{X}_k эллипсами E_k , многоугольниками X_k и доверительных областей \tilde{X}_k

Таблица 2.1. Результаты оценивания.

k	b_{x_k}	q_{x_k}	Q_{x_k}	\hat{x}_k	P_k
1	$\begin{pmatrix} 0.0006 \\ 0.0325 \\ 0.0394 \\ 0.0321 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0167 \\ -0.0000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0007 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0012 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0155 \\ 0.0001 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0029 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0032 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0.0071 \\ 0.0490 \\ 0.0329 \\ 0.0451 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0133 \\ 0.0008 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0007 & 0 \\ 0 & 0.0036 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0137 \\ 0.0015 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0025 & 0.0003 \\ 0.0003 & 0.0040 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} -0.0195 \\ 0.0604 \\ 0.0595 \\ 0.0568 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0377 \\ 0.0009 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0005 & 0 \\ 0 & 0.0073 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0314 \\ 0.0001 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0025 & 0.0003 \\ 0.0003 & 0.0044 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 0.0096 \\ 0.0746 \\ 0.0275 \\ 0.0615 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0075 \\ -0.0098 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0004 & 0 \\ 0 & 0.0100 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0151 \\ 0.0048 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0025 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.0047 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0.0126 \\ 0.0825 \\ 0.0274 \\ 0.0711 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0074 \\ -0.0175 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0004 & 0 \\ 0 & 0.0100 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0098 \\ 0.0051 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0025 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.0049 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 0.0223 \\ 0.0908 \\ 0.0177 \\ 0.0797 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0023 \\ -0.0026 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0004 & 0 \\ 0 & 0.0100 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0015 \\ 0.0061 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0025 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.0050 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 0.0303 \\ 0.0921 \\ 0.0097 \\ 0.0879 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0103 \\ -0.0079 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0004 & 0 \\ 0 & 0.0100 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0066 \\ 0.0059 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0025 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.0051 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 0.0099 \\ 0.0897 \\ 0.0301 \\ 0.0957 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0101 \\ -0.0103 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0004 & 0 \\ 0 & 0.0100 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0048 \\ 0.0018 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0025 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.0051 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} -0.0016 \\ 0.0950 \\ 0.0416 \\ 0.1006 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0216 \\ -0.0050 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0004 & 0 \\ 0 & 0.0100 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0163 \\ -0.0003 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0025 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.0051 \end{pmatrix}$
...
21	$\begin{pmatrix} -0.0499 \\ 0.0948 \\ 0.0899 \\ 0.0935 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0699 \\ -0.0052 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0004 & 0 \\ 0 & 0.0100 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0624 \\ 0.0124 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0025 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.0052 \end{pmatrix}$

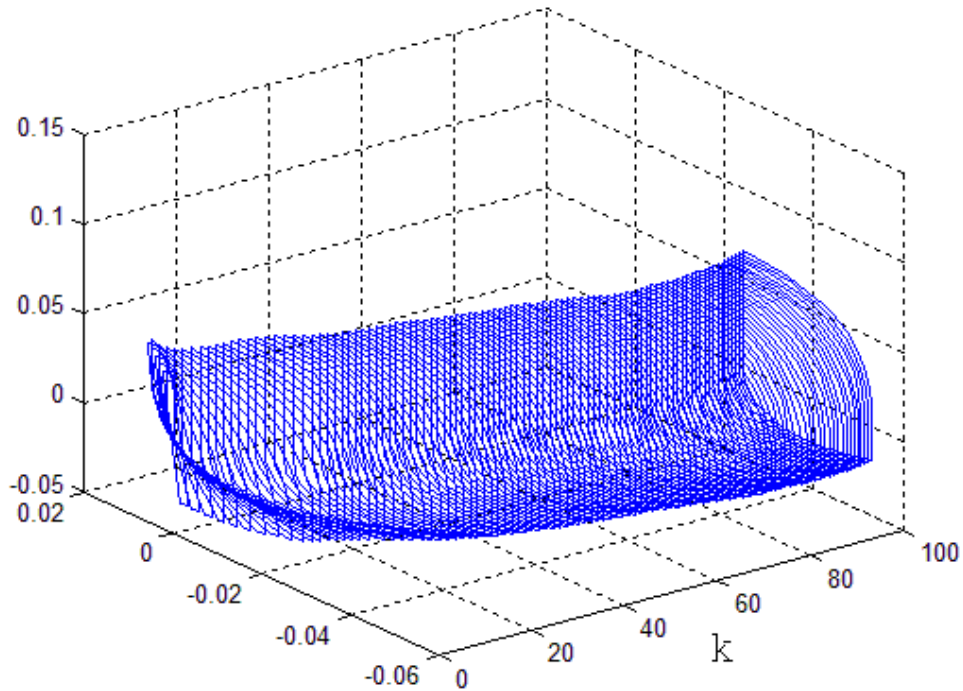


Рис. 2.8. Эволюция информационных множеств

Размер аппроксимирующих эллипсов получился значительно больше аппроксимирующего прямоугольника и доверительного эллипса. При аппроксимации эллипсами точность теряется дважды при аппроксимации результатов суммы эллипсов и пересечения эллипсов. Аппроксимация многоугольниками позволяет уменьшить потери точности. Кроме того, повысить точность можно, если аппроксимировать информационное множество многогранником с большим числом граней, а не брусом. Время вычисления аппроксимации многогранниками на 1 шаг оказалось меньше, чем при аппроксимации эллипсами. Для вычисления эллипсоидальных оценок на 1 шаг потребовалось в среднем 0.12с, а для вычисления многоугольников – 0.03с. Для построения эллипсоидальной аппроксимации требуется больше времени, так как при вычислении пересечения эллипсов решается задача вычисления расстояния между эллипсами для определения факта наличия пересечения, которая является нелинейной задачей оптимизации. А в алгоритме аппроксимации многогранниками решается ряд задач линейного программирования, для решения которых применён метод внутренней точки, который, как известно, в вычислительном плане является эффективным [159, 172].

Размеры доверительных эллипсов получились меньше аппроксимирующих множеств. Однако, при использовании вероятностного подхода нельзя получить гарантированные оценки вектора состояния подвижного объекта. Для некоторых реализаций процесса истинные значения вектора состояния находятся за пределами доверительных областей, полученных на основе фильтра Калмана. В рассмотренном примере на шагах $k = 21$ истинное значение вектора состояния объекта находится за границей доверительного эллипса. Это можно объяснить тем, что фильтр Калмана построен в предположении, что возмущения и помехи измерений имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и известной матрицей ковариации, но в данной реализации процесса возмущения и помехи были реализованы равномерно внутри соответствующих множеств. Как было отмечено ранее, фильтр Калмана позволяет получить оптимальную оценку на множестве реализаций, а в случае единственной реализации процесса не имеется статистическая информация или может быть недостаточной и недостоверной, поэтому применение фильтра Калмана может быть необоснованным. Минимаксный фильтр гарантирует нахождение истинного состояния внутри информационного множества.

Кроме того, в результате моделирования было отмечено, что при увеличении точности измерителя, то есть при уменьшении множества V на большинстве шагов аппроксимирующий эллипсоид оказался примерно равным множеству, совместимому с измерением. В этом случае вклад модели в оценку оказался незначительным. Это связано с тем, что на этих шагах множество совместимое с измерением или большая его часть находились внутри множества прогнозов и аппроксимация пересечения оказывалась близка к множеству $E(y_k, Q_v)$.

2.5 Оценка вычислительной сложности алгоритма

Алгоритм, описанный в п.2.3, заключается в решении ряда задач линейного программирования. Поэтому вычислительная сложность алгоритма оценивания определяется размерностью систем линейных неравенств и уравнений, описывающих векторное пространство, для которого решается оптимизационная задача, а также количеством решаемых задач линейного программирования.

Наиболее известным методом решения задач линейного программирования является симплекс-метод, который является алгоритмом с экспоненциальной сложностью, хотя при решении прикладных задач показывает хорошие результаты. В 1979г. было показано, что линейное программирование относится к классу полиномиально разрешимых задач, что привело к созданию целого класса эффективных алгоритмов линейного программирования — методов внутренней точки [146]. Для задачи линейного программирования

$$\min_x c^T x$$

при

$$Ax = b, x \geq 0,$$

где $c \in R^n$, $x \in R^n$, $b \in R^m$ количество итераций определяется как $O(nM)$, а количество операций - $O(n^{3.5}M)$, где M - число бит входных данных:

$$M = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n [\log_2(|a_{ij}| + 1) + 1],$$

при этом $a_{i0} = b_i$, $a_{0j} = c_j$ [159, 172].

При использовании алгоритма, описанного в п.2.3, для системы (1.14) размерность задачи линейного программирования n зависит от размерности векторов x_k , w_k , v_k и ширины окна L :

$$n = n_x + (n_x + n_w + n_v)L. \quad (2.37)$$

Число ограничений в системе линейных уравнений (2.26) равно $(n_x + n_y)L$, в системе линейных неравенств (2.27) не менее $2((n_w + n_v)L + n_x)$. Например, при рассмотрении бокового движения летательного аппарата [168], когда $n_x = 6$, $n_w = 4$, $n_y = 2$, $n_v = 2$, размерность системы линейных уравнений (2.26) равна 8×18 при $L = 1$, 16×30 при $L = 2$, 80×126 при $L = 10$, а размерность системы (2.27) равна 24×18 при $L = 1$, 44×30 при $L = 2$, 172×126 при $L = 10$.

Информационное множество описывается системой линейных неравенств $A_{x_k} x_k \leq b_k$, где $A_{x_k} \in R^{l \times n}$, $b_k \in R^l$. Тогда для хранения информационного множества требуется $8l(n + 1)$ байт машинной памяти.

Приведем оценку затрат машинного времени для вычисления аппроксимации информационного множества параллелепипедом для моделей различных размерностей. В таблице 2.2 приведены оценки времени вычисления аппроксимации на одном шаге для систем различных размерностей при различной ширине окна L . Вычисления проводились в среде Matlab R2010a на компьютере с процессором Intel(R) Core(TM) i7-4702MQ с тактовой частотой 2.20ГГц и ОЗУ 8ГБ. На рис. 2.9 приведены графики зависимости времени вычисления аппроксимации от размерности системы n для различных значений L . При увеличении окна время, требуемое для вычисления оценки, растет нелинейно, например, в первой модели, когда размерности вектора состояния, измерения, возмущения и помех равно 2 при увеличении окна в 10 раз размерность n выросла в 7.8 раза, а время выросло в 1.7 раза. В последнем случае, когда размерность n_x равна 18 при увеличении L в 10 раз время выросло в 3,5 раза.

Таблица 2.2. Вычислительные затраты.

n_x	n_y	n_w	n_v	L	n	Время, с
2	2	2	2	1	8	0.023
2	2	2	2	2	14	0.025
2	2	2	2	10	62	0.040
2	1	1	0	1	5	0.009
2	1	1	0	2	8	0.010
2	1	1	0	10	32	0.011
6	2	4	2	1	18	0.078
6	2	4	2	2	30	0.082
6	2	4	2	10	126	0.163
8	8	8	8	1	32	0.108
8	8	8	8	2	56	0.140
8	8	8	8	10	248	0.390
18	6	9	6	1	51	0.401
18	6	9	6	2	84	0.721
18	6	9	6	10	348	1.389

При ограниченных вычислительных ресурсах уменьшить время вычисления аппроксимации можно, если вычислять оценки не по всем координатам, а по наиболее важным направлениям.

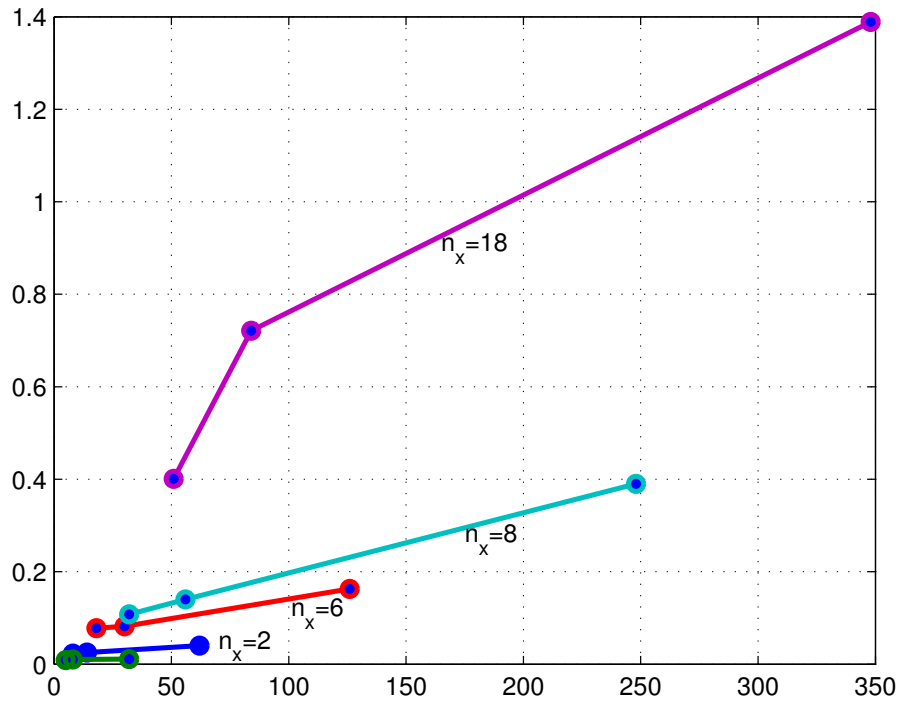


Рис. 2.9. Вычислительные затраты

Поскольку время вычисления оценки зависит от размерности системы, то для уменьшения вычислительных затрат, как и при реализации фильтра Калмана, проводят редукцию размерности или декомпозицию математических моделей объектов управления с сохранением свойств подвижного объекта [96].

2.6 Выводы по главе

1. Разработан метод моделирования эволюции информационных множеств \bar{X}_k с помощью неявного задания вектора состояния подвижных объектов, функционирующих в условиях неопределённости, системами линейных уравнений и неравенств, в которых в качестве переменных выступают вектор состояния подвижного объекта $x_k \in R^{n_x}$, векторы возмущения $w_k \in R^{n_w}$ и помех измерения $v_k \in R^{n_v}$, соответствующих L последним измерениям $y_k \in R^{n_y}$. После проведения L измерений размерность системы линейных уравнений равна $((n_x + n_y)L) \times (n_x + (n_x + n_w + n_v)L)$, а системы линейных неравенств не менее $(2((n_w + n_v)L + n_x)) \times (n_x + (n_x + n_w + n_v)L)$.
2. Разработан численный алгоритм полиэдральной аппроксимации информационного множества \bar{X}_k сверху многогранником заданной формы X_k без

выполнения операций суммы Минковского и пересечения множеств. В алгоритме используется разработанная математическая модель описания эволюции информационных множеств, а построение множественных оценок вектора состояния сводится к решению ряда задач линейного программирования. В зависимости от имеющихся вычислительных ресурсов имеется возможность уточнить гарантированную оценку вектора состояния, включив в систему линейных уравнений и неравенств, описывающую информационное множество, данные не на последнем шаге, а на L последних шагах.

3. Разработанный численный алгоритм позволяет получить не только гарантированную оценку вектора состояния, но и гарантированную оценку возмущений и помех, действующих на подвижный объект, что может быть в дальнейшем использовано для прогнозирования и построения адаптивного алгоритма оценивания.
4. Проведено сравнение оценок, полученных в результате метода полиэдральной аппроксимации, с гарантированными оценками в виде эллипсов и доверительными множествами, полученными по результатам оценки фильтра Калмана. Потери точности при аппроксимации многогранниками получаются меньше, чем при аппроксимации эллипсоидами. Доверительные области могут быть меньше аппроксимаций многогранниками и эллипсоидами, но истинное состояние системы может не находиться внутри данной области.
5. Приведены временные затраты для вычисления полиэдральной аппроксимации для систем различных размерностей. Время, требуемое для вычисления аппроксимации зависит от размерностей фазового вектора, возмущения и помехи, от количества граней аппроксимирующего многогранника, а также от ширины окна, то есть от количества последних измерений, которые учитываются при вычислении текущей оценки. При этом при увеличении окна время, требуемое для вычисления оценки, растет нелинейно, например, при увеличении окна в 10 раз, время возрастает в 1.7 – 3.7 раза в зависимости от размерности векторов состояния, измерения, возмущений и помех. Оценить время оценивания для конкретного подвижного объекта и конкретной вычислительной машины можно на этапе проектирования.

Глава 3. Алгоритмы гарантированного оценивания с учётом особенностей математических моделей процессов в подвижных объектах

3.1 Использование особенностей математических моделей процессов в подвижных объектах в задаче гарантированного оценивания

Алгоритмы оценивания вектора состояния, описанные в п.2.2,2.3, рассмотрены в предположении, что математическая модель возмущений и помех задана в виде множества их возможных значений. То есть оценка вектора состояния строится для всех возможных значений возмущений w_k и помех v_k из заданных множеств. Однако, на практике может присутствовать дополнительная информация о характере возмущений и помех, учёт которой может способствовать повышению точности и скорости оценивания. Например, значения возмущений и помех могут быть не только ограничены, но и иметь ограниченные приращения по координатам [61, 119]:

$$\begin{aligned} |w_{k+1}(i) - w_k(i)| &\leq \delta_w(i), \quad i = 1, \dots, n_w, \\ |v_{k+1}(j) - v_k(j)| &\leq \delta_v(j), \quad j = 1, \dots, n_v, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где δ_w, δ_v - заданные величины, i, j - координаты векторов w_k, v_k .

При использовании фильтра Калмана предполагается, что возмущения и помехи являются случайными величинами с математическим ожиданием, равным нулю. Это свойство возмущений и помех может быть использовано и в гарантированном подходе. Для этого предполагают осреднение возмущений и

помех по координатам:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N w_k(i) \right| &\leq \epsilon_w(i), \quad i = 1, \dots, n_w, \\ \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v_k(j) \right| &\leq \epsilon_v(j), \quad j = 1, \dots, n_v, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где ϵ_w, ϵ_v - заданные величины.

Условия (3.1), (3.2) являются линейными и могут быть включены в систему (2.10) в алгоритме 1 в п.2.3 для получения более точной оценки вектора состояния.

Кроме того, возмущения и помехи могут быть заданы в виде линейной комбинации функций с неизвестными параметрами:

$$\begin{aligned} w_k &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \phi_{ik}, \\ v_k &= \sum_{i=1}^l \beta_i \psi_{ik}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где α_i, β_i - неизвестные постоянные коэффициенты. Например, в некоторых случаях внешние возмущения и помехи могут быть представлены в виде определённой линейной комбинации некоррелированных случайных величин, гармонических функций и др. Тогда по результатам измерения определённых выходных величин требуется определить не только вектор состояния системы, но и параметры процесса, то есть коэффициенты в разложении (3.3) [1, 12, 45, 46, 81, 94, 102, 129, 157, 165].

Также рассматривают динамические модели без возмущений [49]

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k; \\ y_{k+1} = Gx_{k+1} + Hv_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \end{cases}$$

или с точными, но неполными измерениями [3, 14, 63, 116]

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + \Gamma w_k; \\ y_{k+1} = Gx_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{cases}$$

Если данные системы были получены не в результате расширения вектора состояния, то в этих случаях в системах линейных уравнений (2.8) и неравенств (2.10), описывающих динамику системы с 0-го по k -й шаг, отсутствуют переменные возмущений и помех, а также ограничения на них. Размерность пространства неизвестных переменных и размер систем получается меньше, что влияет на скорость решения задачи.

Рассмотрим возможность уточнения оценки и уменьшения времени вычислений для некоторых особенностей модели и процесса.

3.2 Моделирование эволюции информационных множеств при разложении возмущения по системе функций

В теории адаптивного управления развивается ряд подходов к синтезу систем в условиях неопределённости, обусловленной действиями возмущений. Соответствующие формальные постановки задач адаптивного управления отличаются способами учета неопределённости возмущающих воздействий. В некоторых условиях функционирования системы информация о возмущениях может быть доопределена, а не ограничена только множеством возможных значений W . При решении ряда задач анализа и синтеза систем автоматического управления применяются канонические и неканонические разложения случайных возмущений [1, 2, 12, 23, 47, 92, 102, 129], что позволяет снизить неопределённость в системе и повысить точность оценивания и управления. Например, плотность воздуха, температуру воздуха, составляющие скорости ветра представляют в виде определённой линейной комбинации некоррелированных случайных величин [129]. Пусть о возмущениях w_k , $k = 0, 1, \dots, N$ имеется больше априорной информации и их можно представить в виде разложения по системе функций $\phi_{ik} \in R^m$ [1, 2, 47, 81]:

$$w_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i \phi_{ik}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (3.4)$$

где α_i , $i = 1, \dots, m$ – постоянные неизвестные коэффициенты, которые необходимо вычислять в реальном времени по результатам измерений y_k , $k = 1, 2, \dots, N$.

Например, внешние возмущения могут быть представлены в виде разложения по системе гармонических функций $\phi_{ik} = \sin(\omega_i t_k)$ [1, 2, 81]. При этом для сохранения априорных характеристик возмущений число членов канонического разложения, как правило, не менее десяти [53]. При рассмотрении случайных параметров атмосферы $\xi(h)$, воздействующих на летательный аппарат, таких как температура, плотность воздуха, составляющие скорости ветра, применяют неканонические разложения вида [129]

$$\xi(h) = \gamma \sin(\Omega h) + \beta \cos(\Omega h),$$

где γ, β - независимые нормально распределённые случайные величины, Ω - случайная частота.

В матричном виде выражение для возмущения (3.4) можно представить как

$$w_k = \Phi_k \alpha, \quad (3.5)$$

где $\Phi_k = [\phi_{1k} \ \phi_{2k} \ \dots \ \phi_{mk}]$ - матрица, $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_m]^T$ - вектор соответствующей размерности. Тогда модель системы можно представить в виде

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + \Gamma \Phi_k \alpha, \\ y_{k+1} = Gx_{k+1} + Hv_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.6)$$

Далее рассмотрим алгоритм гарантированного оценивания векторов состояния x_k и неизвестных коэффициентов α в разложении возмущения по системе функций в системе (3.6) используя неявное описание состояния системами линейных уравнений и неравенств на основе подхода, описанного в п.2.3.

Алгоритм

Шаг 1. Запишем модель системы (3.6) с расширенным вектором состояния z_k :

$$\begin{cases} z_{k+1} = \tilde{A}_k z_k; \\ y_{k+1} = \tilde{G} z_{k+1} + Hv_{k+1}, \end{cases} \quad (3.7)$$

где $z_k = [x_k \ \alpha]'$, $\tilde{A}_k = \begin{bmatrix} A & \Gamma \Phi_k \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $\tilde{G} = \begin{bmatrix} G & 0 \end{bmatrix}$.

Шаг 2. На k -м шаге система линейных уравнений, описывающая систему с 0 шага имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 - \tilde{A}_0 z_0 = 0; \\ z_2 - \tilde{A}_1 z_1 = 0; \\ \dots \\ z_k - \tilde{A}_{k-1} z_{k-1} = 0; \\ \tilde{G} z_1 + H v_1 = y_1; \\ \tilde{G} z_2 + H v_2 = y_2; \\ \dots \\ \tilde{G} z_k + H v_k = y_k. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Система линейных неравенств, описывающая ограничения в системе (3.7) системы с 0 шага имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{x_0} x_0 \leq b_{x_0}; \\ A_w \Phi_1 \alpha \leq b_w; \\ A_w \Phi_2 \alpha \leq b_w; \\ \dots \\ A_w \Phi_k \alpha \leq b_w; \\ A_v v_1 \leq b_v; \\ A_v v_2 \leq b_v; \\ \dots \\ A_v v_k \leq b_v. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Шаг 3. Получим оценку вектора z_k в виде многогранника $Z_k : A_z z_k \leq b_{z_k}$, такого что $z_k \in Z_k$. Матрица A_z определяет форму требуемого многогранника и задана априорно. В простейшем случае, когда нужно определить границы значений параметров, многогранник является параллелепипедом, описанным системой линейных неравенств с матрицей $A_z = [I \ -I]^T$. Для каждого направления a_i (i -я строка матрицы A_z) решаем задачу линейного программирования

$$z_k^* = \operatorname{argmax} \langle a_i, z_k \rangle, \quad (3.10)$$

при ограничениях (3.8), (3.9), где $\langle a_i, z_k \rangle$ – скалярное произведение векторов a_i, z_k , тогда i -я координата вектора b_{z_k} равна $b_{z_k}(i) = \langle a_i, z_k^* \rangle$.

Отметим, чтобы одновременно оценивать вектор состояния x_k и вектор коэффициентов α , система (3.7) должна быть наблюдаема относительно расширенного вектора состояния z_k .

Системы (3.8), (3.9) заданы в пространстве $(x_0, \dots, x_k, v_1, \dots, v_k, \alpha)$. Когда известно только множество возможных значений возмущений W состояние подвижного объекта рассматривается в пространстве $(x_0, \dots, x_k, v_1, \dots, v_k, w_0, \dots, w_{k-1})$. В случае, когда известен вид разложения возмущений по системе функций, размерность систем линейных уравнений и неравенств (3.8), (3.9), описывающих состояние системы на k -м шаге получается на $k \cdot n_w - m$ меньше аналогичных систем, описывающих систему, когда известно только множество возможных значений возмущений за счёт того, что вектор коэффициентов $\alpha \in R^m$ является постоянным. Это позволяет уменьшить время вычисления оценок.

В случае, если известен вид разложения помех измерений v_k , данная информация может быть учтена в системе аналогичным образом.

Рассмотрим применение описанного алгоритма для оценивания вектора состояния подвижного объекта, когда возмущение w_k представлено в виде линейной комбинации из двух гармонических функций с неизвестными постоянными коэффициентами. Сравним результаты оценивания с оценками, полученными в случае, когда задано только множество возмущений W .

Пример. Пусть в модели (3.6) заданы следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.01 \\ -0.1 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad G = I_{2 \times 2}, \quad H = I_{2 \times 2}.$$

Множества возможных значений начального состояния, возмущений и помех являются многоугольниками:

$$X_0 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x_0 \leq \begin{pmatrix} 8 \cdot 10^{-4} \\ 4 \cdot 10^{-2} \\ 8 \cdot 10^{-4} \\ 4 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}, \quad W : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} w_k \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3},$$

$$V : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v_k \leq \begin{pmatrix} 1.5 \cdot 10^{-4} \\ 0.02 \\ 1.5 \cdot 10^{-4} \\ 0.02 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда возмущения можно представить в виде разложения:

$$w_k = \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi k}{7}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{\pi k}{7}\right), \quad (3.11)$$

где α_1, α_2 - неизвестные постоянные коэффициенты. При моделировании процесса коэффициенты были приняты равными $1.1 \cdot 10^{-3}$. Построим множествен-

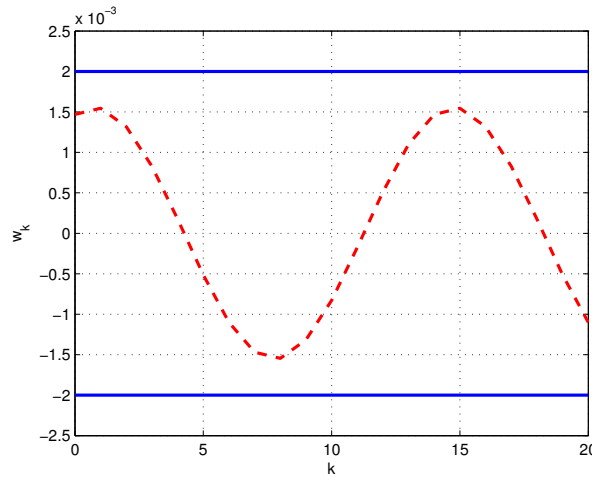


Рис. 3.1. Реализация возмущений (пунктир – реализовавшееся возмущения, сплошная линия – граница множества возможных значений)

ные оценки вектора состояния, когда известно только множество возможных возмущений (рис. 3.2) и с учётом информации о виде разложения возмущения (3.11) (рис.3.3). В случае, когда известен вид разложения возмущения, диапазон возможных значений координат вектора состояния получился уже. Например, на шаге $k = 20$ диапазон возможных значений по первой координате получился в 3.1 раз меньше, а по второй – в 5.8 раз меньше, чем в случае, когда известно только множество возможных значений возмущений. Кроме того, дополнительная информация о характере изменения возмущений позволила сократить время вычисления оценок для $N = 20$ в 2.5 раза.

Описанный алгоритм полиэдральной аппроксимации позволяет получить оценки коэффициентов в разложении (рис.3.4). По мере накопления данных

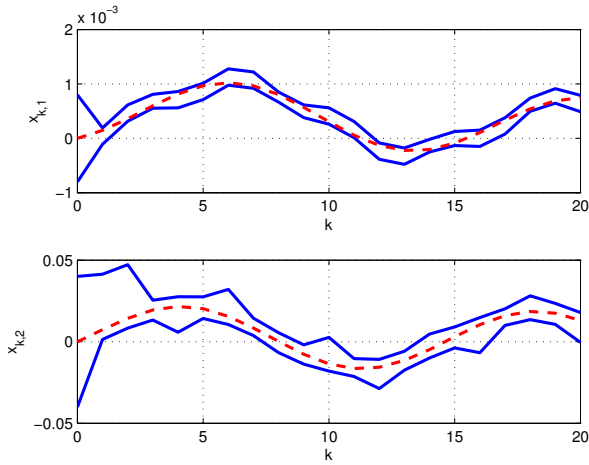


Рис. 3.2. Результаты гарантированного оценивания в случае, когда известно только множество возможных значений возмущений (пунктир – истинное значение вектора состояния, сплошная линия – граница множественных оценок)

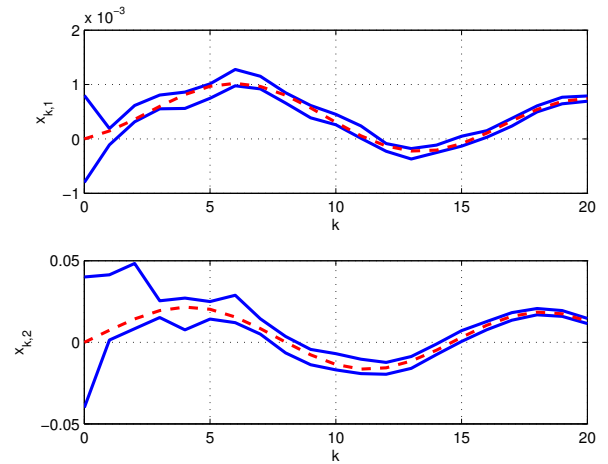


Рис. 3.3. Результаты гарантированного оценивания в случае, когда известен вид разложения возмущений (пунктир – истинное значение вектора состояния, сплошная линия – граница множественных оценок).

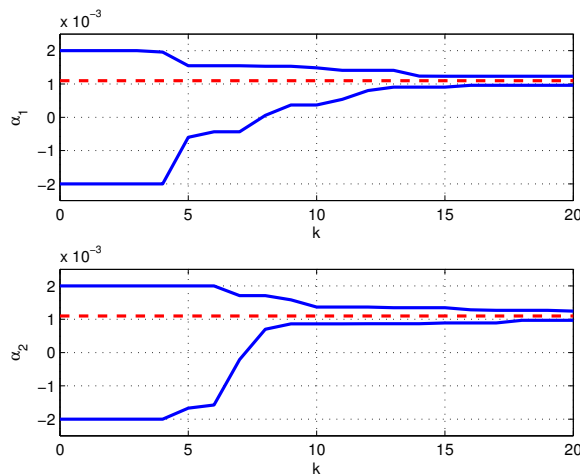


Рис. 3.4. Оценка коэффициентов в разложении (пунктир – истинное значение коэффициентов, сплошная линия – граница множества возможных значений)

оценка коэффициентов улучшается. К шагу $k = 20$ оценка коэффициентов α_1 , α_2 получилась в 14.5 раз лучше по сравнению с априорными оценками. После шага $k = 20$ оценки коэффициентов не улучшались, поэтому на последующих шагах их можно не оценивать, приняв ограничение на α_1 , α_2 , полученные на шаге $k = 20$, что позволит уменьшить время вычисления оценки вектора x_k .

Таким, образом, данный алгоритм позволяет проводить идентификацию модели возмущений, что может быть использовано для разработки адаптивных алгоритмов оценивания.

Численные эксперименты показали, что частота колебаний влияет на точность оценки. Чем меньше частота колебаний, тем точнее получается оценка. Как уже отмечалось ранее (п.1.2), точность оценки, т.е. размер полученного множества, зависит не только от исходных данных, но и от реализации процесса, а именно от того, как соотносятся реализованные возмущения и помехи: когда они реализуются на границе соответствующих множеств и имеют противоположное направление, информационное множество может даже стянуться в точку. Для данной модели системы получается, чем меньше частота колебаний возмущений, тем большее время возмущения реализуются вблизи границы множества W , а значит появляется возможность получить более точную оценку в зависимости от реализации помех измерений.

Отметим, что точность оценки коэффициентов в разложении (3.4) и время k , за которое можно уточнить априорные ограничения на коэффициенты, зависит от числа функций в разложении. Определить время и точность оценивания коэффициентов можно на этапе проектирования системы управления подвижным объектом.

3.3 Оценка состояния для математических моделей объектов с трёхмерным вектором состояния

Часто на практике для описания движения используют модели третьего порядка, когда возмущения действуют по одной координате и измерения проводятся по одной из координат. Например для описания продольного или поперечного движения БИНС [39], используются модели вида:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w, \quad (3.12)$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + v. \quad (3.13)$$

где $x = (\Delta X, \Delta V_x, \Delta a_x)'$ - рассматриваемый вектор системы, w - возмущения, действующие на систему, y - измерения, v - помехи измерений.

Приведём модель к дискретному виду:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + \Gamma w_k, \\ y_{k+1} = Gx_{k+1} + v_{k+1}, k = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (3.14)$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & \tau & 0 \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Gamma = (0 \ 0 \ \tau)'$, $G = (1 \ 0 \ 0)$, τ -время дискретизации.

На начальное состояние, возмущения и помехи измерения заданы ограничения:

$$x_0 \in \bar{X}_0, \quad w_k \in W : w_{min} \leq w_k \leq w_{max}, \quad v_k \in V : v_{min} \leq v_k \leq v_{max}. \quad (3.15)$$

Приведём алгоритм построения аппроксимации информационного множества в виде параллелепипеда, т.е. будем искать диапазон возможных значений по каждой из координат вектора состояния подвижного объекта. Алгоритм учитывает особенность множеств возмущений и помех и основан на анализе положения множества прогнозов относительно множества, совместного с измерением. В результате оценки на каждом шаге получаем аппроксимирующий информационное множество параллелепипед в виде набора вершин. Множества прогнозов на каждом шаге являются многогранниками одной и той же формы, но разного размера, координаты этих многогранников выражаются через координаты аппроксимирующего параллелепипеда и множества возмущений. Далее вычисляются координаты пересечения множества прогнозов и множества, совместного с измерением. В алгоритме не используются итерационные процедуры, выполняется заранее известное число операций, в связи с чем время вычисления аппроксимации сравнимо с временем, требуемым для вычисления оценок фильтра Калмана.

Алгоритм

Шаг 1. $k = 0$.

Шаг 2. Оценка X_k на k -м шаге представляет собой параллелепипед:

$$\begin{aligned} x_{min_k} &\leq x_{k,1} \leq x_{max_k}, \\ y_{min_k} &\leq x_{k,2} \leq y_{max_k}, \\ z_{min_k} &\leq x_{k,3} \leq z_{max_k}. \end{aligned}$$

Координаты вершин множества X_k :

$$\begin{aligned} V1 &: (x_{max_k}, y_{max_k}, z_{min_k}), & V5 &: (x_{max_k}, y_{max_k}, z_{max_k}), \\ V2 &: (x_{max_k}, y_{min_k}, z_{min_k}), & V6 &: (x_{max_k}, y_{min_k}, z_{max_k}), \\ V3 &: (x_{min_k}, y_{min_k}, z_{min_k}), & V7 &: (x_{min_k}, y_{min_k}, z_{max_k}), \\ V4 &: (x_{min_k}, y_{max_k}, z_{min_k}), & V8 &: (x_{min_k}, y_{max_k}, z_{max_k}). \end{aligned}$$

После линейного преобразования множества X_k получаем множество AX_k с вершинами:

$$\begin{aligned} V1' &: A(x_{max_k}, y_{max_k}, z_{min_k}), & V5' &: A(x_{max_k}, y_{max_k}, z_{max_k}), \\ V2' &: A(x_{max_k}, y_{min_k}, z_{min_k}), & V6' &: A(x_{max_k}, y_{min_k}, z_{max_k}), \\ V3' &: A(x_{min_k}, y_{min_k}, z_{min_k}), & V7' &: A(x_{min_k}, y_{min_k}, z_{max_k}), \\ V4' &: A(x_{min_k}, y_{max_k}, z_{min_k}), & V8' &: A(x_{min_k}, y_{max_k}, z_{max_k}), \end{aligned}$$

Шаг 3. Построим множество прогнозов $X_{k+1/k}$ как сумму Минковского множеств AX_k и ΓW . Координаты полученного множества:

$$\begin{aligned} S1 &: V1' + (0, 0, \tau \cdot w_{min}), & S7 &: V7' + (0, 0, \tau \cdot w_{max}), \\ S2 &: V2' + (0, 0, \tau \cdot w_{min}), & S8 &: V8' + (0, 0, \tau \cdot w_{max}), \\ S3 &: V3' + (0, 0, \tau \cdot w_{min}), & S9 &: V2' + (0, 0, \tau \cdot w_{max}), \\ S4 &: V4' + (0, 0, \tau \cdot w_{min}), & S10 &: V3' + (0, 0, \tau \cdot w_{max}), \\ S5 &: V5' + (0, 0, \tau \cdot w_{max}), & S11 &: V5' + (0, 0, \tau \cdot w_{min}), \\ S6 &: V6' + (0, 0, \tau \cdot w_{max}), & S12 &: V6' + (0, 0, \tau \cdot w_{min}). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Множество ребер множества $X_{k+1/k}$ образуется следующими парами вершин:

$$\begin{aligned}
E1 : (S1 \ S2), & \quad E10 : (S11 \ S12), \\
E2 : (S2 \ S9), & \quad E11 : (S6 \ S9), \\
E3 : (S7 \ S8), & \quad E12 : (S7 \ S10), \\
E4 : (S9 \ S10), & \quad E13 : (S3 \ S4), \\
E5 : (S1 \ S11), & \quad E14 : (S5 \ S6), \\
E6 : (S4 \ S12), & \quad E15 : (S5 \ S11), \\
E7 : (S2 \ S3), & \quad E16 : (S4 \ S1), \\
E8 : (S3 \ S10), & \quad E17 : (S6 \ S7), \\
E9 : (S8 \ S5), & \quad E18 : (S8 \ S12).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Шаг 4. Построим множество, совместимое с измерением, $X[y_{k+1}]$. Производится измерение первой координаты y_{k+1} с ошибкой $v_{k+1} : v_{min} \leq v_{k+1} \leq v_{max}$, поэтому множество $X[y_{k+1}]$ представляет собой часть пространства, ограниченного двумя плоскостями $F1 : x = y_{k+1} - v_{max}$ и $F2 : x = y_{k+1} - v_{min}$ и значения первой координаты вектора состояния $x_{k+1,1}$ находятся в следующих пределах:

$$y_{k+1} - v_{max} \leq x_{k+1,1} \leq y_{k+1} - v_{min}. \tag{3.18}$$

Шаг 5. Найдём точки пересечения рёбер множества прогнозов с множеством, совместимым с измерением. Для каждого ребра Ei из (3.17) проверяем, пересекает ли оно плоскости $F1$ и $F2$. Если пересекает, то во множество вершин P добавим точки пересечения.

Шаг 6. Проверим, какие из вершин множества прогнозов $X_{k+1/k}$ лежат внутри множества, совместимого с измерением. Для каждой вершины Si из (3.16) проверим, выполняется ли неравенство (3.18). Если неравенство выполняется, то добавим данную вершину во множество вершин P .

Шаг 7. Найдём оценку вектора состояния x_{k+1} :

$$\begin{aligned}
x_{min_{k+1}} &\leq x_{k+1,1} \leq x_{max_{k+1}}, \\
y_{min_{k+1}} &\leq x_{k+1,2} \leq y_{max_{k+1}}, \\
z_{min_{k+1}} &\leq x_{k+1,3} \leq z_{max_{k+1}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{max_{k+1}} &= \max_{P_i \in P} P_i(1), \\
x_{min_{k+1}} &= \min_{P_i \in P} P_i(1), \\
y_{max_{k+1}} &= \max_{P_i \in P} P_i(2), \\
y_{min_{k+1}} &= \min_{P_i \in P} P_i(2), \\
z_{max_{k+1}} &= \max_{P_i \in P} P_i(3), \\
z_{min_{k+1}} &= \min_{P_i \in P} P_i(3),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Шаг 8. $k = k + 1$. Если $k = N$ алгоритм заканчивается, иначе - переходим к шагу 2.

Оценка состояния, полученная в результате применения данного алгоритма получается не хуже оценки при интервальном подходе, так как в данном случае вычисляются точки пересечения множества прогнозов и множества, совместимого с измерением, а при интервальном подходе анализируются только границы суммируемых и пересекаемых множеств. Данный подход не использует какие-либо итерационные процедуры, как в решении задачи линейного программирования, поэтому время вычисления оценки значительно меньше, чем при подходе с использованием систем линейных уравнений и неравенств и сравнимо со временем, требуемым для вычисления оценок фильтра Калмана. Однако данный алгоритм позволяет построить гарантированную оценку только в виде параллелепипеда и использует особенности конкретной модели.

3.4 Гарантированное оценивание состояния переключаемых систем

Многие прикладные задачи приводят к исследованию систем с переключениями. Системы этого вида широко встречаются на практике в задачах управ-

ления механическими, электроэнергетическими системами, в управлении летательными аппаратами, технологическими процессами, трафиком в компьютерных сетях и во многих других областях [51, 151, 167]. Математическая модель переключаемой системы возникает при исследовании взаимодействия среды, непрерывно изменяющейся в соответствии с некоторыми физическими законами, и управляющих элементов, срабатывающих в дискретные моменты времени, например, в электронных системах автоматического управления самолетом, либо автомобилем, системах автоматического регулирования температуры, влажности в помещении и др. Система с переключениями представляет собой гибридную систему, состоящую из семейства подсистем и закона переключения, определяющего в каждый момент времени, какая из подсистем является активной. Гибридная система может быть получена также при кусочно-линейной аппроксимации сложной нелинейной системы дифференциальных уравнений. Таким образом можно аппроксимировать решения различных задач управления для нелинейной системы решениями аналогичных задач для гибридной системы.

Дискретная переключаемая система описана уравнениями [51, 151, 167]:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + B_{\sigma(k)}u_k + F_{\sigma(k)}w_k, \\ y_{k+1} = C_{\sigma(k)}x_{k+1} + D_{\sigma(k)}v_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (3.20)$$

где $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ - вектор состояния системы, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ - известное управление, $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ - возмущение, $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ - измерение, $v_k \in \mathbb{R}^{n_v}$ - помехи измерения. В каждый момент времени $k \geq 0$ матрица $A_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ может принимать одно значение из заданного множества матриц $\{A_1, \dots, A_M\}$, то есть $A_{\sigma(k)} = A_m$ при $\sigma(k) = m \in \{1, \dots, M\}$; для матриц $B_{\sigma(k)}$, $F_{\sigma(k)}$, $C_{\sigma(k)}$, $D_{\sigma(k)}$ заданы аналогичные условия. Но какая подсистема m на каждом k -м шаге является активной, неизвестно. Начальное состояние системы $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$, возмущения $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$, и помехи $v_k \in \mathbb{R}^{n_v}$ заданы следующими множествами возможных значений:

$$\begin{aligned} x_0 &\in \bar{X}_0 = \{x_0 \in \mathbb{R}^{n_x} | H_{x_0}x_0 \leq b_{x_0}\}, \\ w_k &\in W = \{w \in \mathbb{R}^{n_w} | H_w w_k \leq b_w\}, \\ v_k &\in V = \{v \in \mathbb{R}^{n_v} | H_v v_k \leq b_v\}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где H_{x_0} , H_w , и H_v - заданные матрицы соответствующих размерностей.

Для оценивания состояния переключаемых систем применяют байесовские фильтры [136], сигма-точечные фильтры Калмана [145]. Недостатки вероятностного подхода описаны в п.1.1. Вероятностные оценки могут быть неточными при отсутствии статистической информации, что может привести к выходу из строя оборудования. Поэтому целесообразней применять минимаксный фильтр, когда получаемые гарантированные оценки позволяют определить, находится ли состояние объекта в допустимых пределах. Известные подходы к гарантированному оцениванию переключаемых систем основаны на оценивании состояния каждой подсистемы [137, 163] и объединении полученных множественных оценок. Для оценивания состояния каждой подсистемы применяют аппроксимации эллипсодами [52, 140, 161], параллелограммами [37, 141], зонотопами [134] и др., но как было отмечено в п.1.2, аппроксимации такими множествами могут быть значительно больше информационных множеств, что может приводить к снижению точности оценивания состояния и, как следствие, к снижению точности и эффективности систем управления.

Рассмотрим гарантированное оценивание состояния переключаемой системы используя подход, описанный в п.2.3. Для каждого возможного состояния $\sigma(k)$ переключаемой системы вычисляется аппроксимация информационного множества. Объединение полученных множеств является результирующей множественной оценкой вектора состояния переключаемой системы.

Алгоритм

Шаг 1. $k = 0$.

Шаг 2. На каждом шаге k , управление u_k и измерение y_{k+1} являются известными величинами, а x_{k+1} , x_k , w_k , v_{k+1} - неизвестными. Перенесем в системе уравнений (3.20) неизвестные величины в левую сторону от знака равенства, а известные - в правую:

$$\begin{bmatrix} I & -A_m & -F_m & 0 \\ C_m & 0 & 0 & D_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ w_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_m u_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix}, \quad m = 1, \dots, M. \quad (3.22)$$

Шаг 3. Получим систему линейных неравенств из (3.21), описывающую ограничения в системе:

$$\begin{bmatrix} 0 & H_{x_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ w_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_{x_k} \\ b_w \\ b_v \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Шаг 4. Системы (3.22), (3.23) неявно описывают информационное множество \overline{X}_{k+1} . Необходимо получить систему линейных неравенств относительно переменной x_{k+1} . Для этого построим аппроксимацию сверху X_{k+1} информационного множества $\overline{X}_{k+1} \subseteq X_{k+1}$ в виде:

$$X_{k+1} = \{x_{k+1} | H_{x_{k+1}} x_{k+1} \leq b_{x_{k+1}}\}. \quad (3.24)$$

Матрица $H_{x_{k+1}}$ задана, чтобы вычислить значения $b_{x_{k+1}}$ необходимо решить ряд задач линейного программирования. Для каждого возможного состояния системы $m \in \{1, \dots, M\}$ и для каждого направления h_i (i -я строка матрицы $H_{x_{k+1}}$) необходимо решить следующие задачи линейного программирования:

$$x^* = \arg \max_{x_{k+1}} \langle h_i, x_{k+1} \rangle \text{ при ограничениях (3.22) и (3.23)}, \quad (3.25)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение векторов. Тогда

$$b_{x_{k+1}, m}(i) = \langle h_i, x^* \rangle. \quad (3.26)$$

Значение $b_{x_{k+1}}$ вычисляется следующим образом:

$$b_{x_{k+1}}(i) = \max_{m \in \{1, \dots, M\}} b_{x_{k+1}, m}(i). \quad (3.27)$$

Шаг 5. Если $k = N$, то конец алгоритма, иначе - $k = k + 1$, перейти к Шагу 2.

Время оценивания состояния переключаемых систем оказывается в m раз больше, чем для систем без переключений той же размерности из-за необходимости вычислять оценку для каждой подсистемы. Если имеется информация

о том, что не все подсистемы могут быть активны в какой-то момент времени, а лишь некоторое подмножество подсистем, то оценку состояния необходимо проводить только для этого подмножества подсистем.

3.5 Исследование гарантированных оценок состояния подвижных объектов при аномальных измерениях

В прикладных задачах оценивания некоторое число измерений может содержать аномальные ошибки (сбои, выбросы) [19, 42, 61, 64, 114, 138, 155, 160, 164]. Далее под аномальными ошибками будем понимать реализацию ошибки измерения v_k за пределами априорно заданного множества возможных значений V . Появление таких измерений связано с резким нарушением условий работы информационно-измерительной аппаратуры. Наличие аномальных измерений может существенно снижать эффективность применения многих классических процедур обработки информации, поэтому необходимо своевременно обнаружить и исключить их из последующей обработки. Существуют разнообразные эвристические подходы для фильтрации аномальных ошибок: выбор и исключение сбоев с помощью подходящего порогового критерия, использование метода наименьших модулей и др. Однако, они эффективны только при выбросах, заметно выделяющихся на фоне остальных измерений. Кроме того, эти методы не дают границ для ошибок оценивания параметров. Рассмотрим гарантированное оценивание вектора состояния при наличии аномальных измерений в рамках подхода, описанного в п.2.3.

Пусть в некоторый момент времени k реализовалась ошибка измерения v_k за пределами априорно заданного множества возможных значений V . В зависимости от реализовавшегося значения помехи согласно алгоритму построения информационных множеств возможны следующие случаи:

- информационное множество пусто;
- информационное множество не пусто.

Если информационное множество

$$\bar{X}_k = X_{k/k-1} \cap X[y_k]$$

на некотором шаге k оказалось пустым (рис.3.5), значит, в этот момент времени k или ранее произошел выброс помехи v_k из множества V , то есть $v_k \notin V$. В этом случае проводят перезапуск фильтра с новыми исходными данными или исключают anomальное измерение из обработки. Если же информационное множество \bar{X}_k оказалось не пустым (рис.3.6), истинное значение состояния системы может и не принадлежать этому множеству $x_k \notin \bar{X}_k$. Но распознать выброс в этом случае не удаётся. Таким образом, при минимаксном подходе гарантированным признаком anomальных ошибок является пустое информационное множество, или если использовать подход, описанный в п.3.2, - несовместность систем линейных уравнений и неравенств, описывающих состояние подвижного объекта. При использовании фильтра Калмана нет гарантированных признаков обнаружения выброса по результатам оценивания, так как оценка вектора состояния x_k строится с некоторой вероятностью.

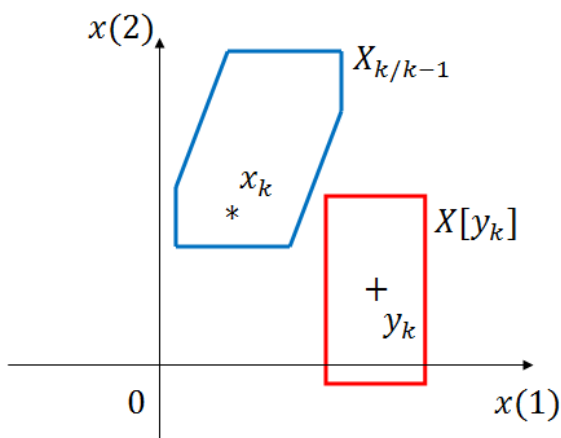


Рис. 3.5. Пример anomального измерения

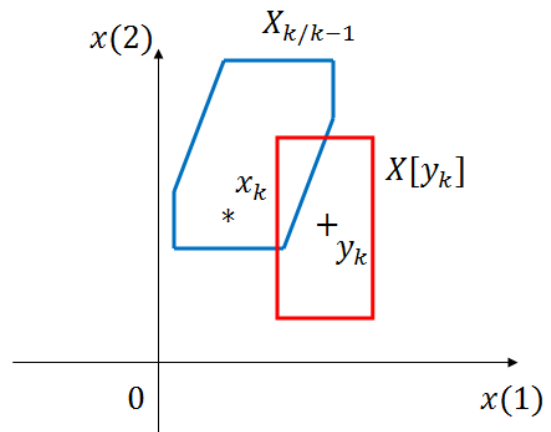


Рис. 3.6. Пример anomального измерения

Рассмотрим, какой уровень выброса помехи v_k возможно распознать с помощью минимаксного фильтра, т.е. при каком выбросе информационное множество \bar{X}_k окажется пустым. Информационное множество \bar{X}_k оказывается пустым, если соответствующее множество прогнозов $X_{k/k-1}$ и множество, совместимое с измерением $X[y_k]$ не пересекаются (рис.3.5). Эти множества гарантированно не пересекаются если не пересекаются их проекции на координатные оси. Рассмотрим проекции множеств $X_{k/k-1}$ и $X[y_k]$ на те координатные оси, по которым проводятся измерения.

Приведём крайний случай, когда истинное значение оказывается на границе проекции множества прогнозов (рис.3.7). Если бы помеха измерений реализовалась на границе v_{max_i} по оси $x(i)$ множества V , то измерения попали бы в точку y'_k (рис.3.7б). Допустим, на k -м шаге произошел выброс и измерения находятся в точке y_k :

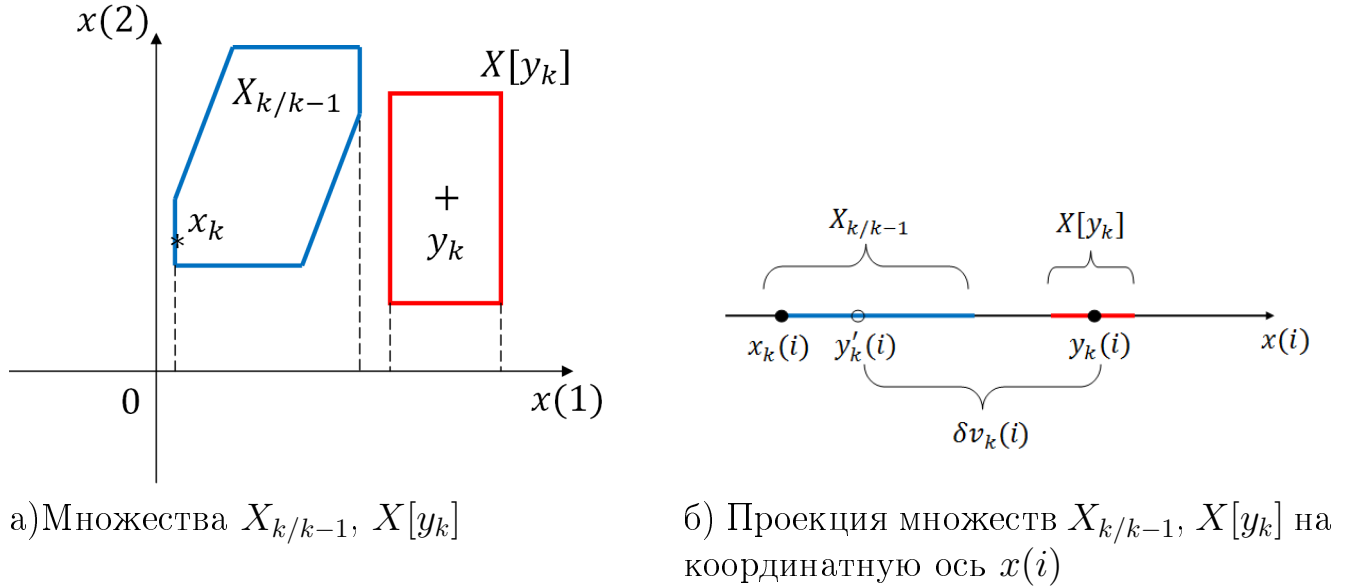


Рис. 3.7. Расположение множеств $X_{k/k-1}$, $X[y_k]$ и их проекций при аномальном измерении.

$$\begin{aligned} y'_k &= x_k + v_{max_i}, \\ y_k &= x_k + v_k. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Тогда значение величины, на которую произошел выброс помехи измерений, равно расстоянию между точками y'_k и y_k :

$$\delta v_{x(i)} = |v_k - v_{max_i}| = |y'_k - y_k|. \quad (3.29)$$

Тогда минимальный выброс помехи $\delta v_{x(i)}$, при котором пересечение проекций окажется пустым, равен

$$\begin{aligned} \delta v_{x(i)} = |v_k - v_{max_i}| &= \left(diam(X_{k/k-1})_{x(i)} - \frac{1}{2} diam(X[y'_k])_{x(i)} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} diam(X[y_k])_{x(i)} = diam(X_{k/k-1})_{x(i)}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где $diam(X_{k/k-1})_{x(i)}$, $diam(X[y'_k])_{x(i)}$, $diam(X[y_k])_{x(i)}$ - проекции диаметров множеств $X_{k/k-1}$, $X[y'_k]$, $X[y_k]$ на ось $x(i)$.

Оценим диаметр множества $X_{k/k-1}$. По построению множество прогнозов $X_{k/k-1}$ является суммой Минковского множеств $A\bar{X}_{k-1}$ и ΓW . Оценка проекций диаметра \bar{X}_{k-1} по измеряемым координатам получается не хуже проекции диаметра множества помех измерений V . Тогда

$$\begin{aligned} diam(X_{k/k-1})_{x(i)} &= diam(A\bar{X}_{k-1})_{x(i)} + diam(\Gamma W)_{x(i)} \leq \\ &\leq diam(AV)_{x(i)} + diam(\Gamma W)_{x(i)}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Таким образом, если произошёл выброс помехи измерения из априорно заданного множества допустимых значений V и при этом по какой-либо из координат $x(i)$ выполняется условие

$$\delta v_{x(i)} \geq diam(AV)_{x(i)} + diam(\Gamma W)_{x(i)}, \quad (3.32)$$

то при минимаксной фильтрации данный выброс гарантированно будет обнаружен.

Рассмотрим динамическую модель объекта и вычислим для нее оценку сверху величины выброса помехи измерения, который гарантированно можно распознать при применении гарантированного подхода. Рассмотрим некоторые реализации процесса с выбросами помех измерения из априорно заданного множества V .

Пример. Пусть в динамической модели матрицы имеют значения:

$$A = \begin{pmatrix} 0.9976 & 0.04639 \\ -0.09278 & 0.8584 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0.1189 \\ 4.639 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}, \quad G = I_{2 \times 2}, \quad H = I_{2 \times 2}.$$

Множества возможных значений начального состояния, возмущений и помех являются многогранниками:

$$X_0 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x_0 \leq \begin{pmatrix} 7.5 \cdot 10^{-4} \\ 3 \cdot 10^{-2} \\ 7.75 \cdot 10^{-4} \\ 3 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}, \quad W : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} w_k \leq \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix},$$

$$V : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v_k \leq \begin{pmatrix} 1.45 \cdot 10^{-4} \\ 2.28 \cdot 10^{-2} \\ 1.45 \cdot 10^{-4} \\ 2.28 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

По координате $x(1)$:

$$d(AV)_{x(1)} = 0.0024, \quad d(\Gamma W)_{x(1)} = 0.00036,$$

$$\delta v_{x(1)} \geq 0.0024 + 0.00036 = 0.00276.$$

По координате $x(2)$:

$$d(AV)_{x(2)} = 0.039170, \quad d(\Gamma W)_{x(2)} = 0.013917,$$

$$\delta v_{x(2)} \geq 0.039170 + 0.013917 = 0.053087.$$

В связи с тем, что в данном примере множество ошибок измерения по первой координате намного меньше множества возмущений по первой координате, гарантированно удастся распознать выброс помех измерений, если величина помехи измерения будет в 19 раз превышать максимально возможное значение из априорно заданного множества V . При уменьшении множества W по первой координате величина выброса, который гарантированно можно распознать, будет меньше. Поскольку величина выброса по первой координате, который гарантированно можно распознать, достаточно большая, то для первой координаты можно дополнительно использовать другие методы идентификации выбросов, например, пороговый критерий. По второй координате получилось, что при выбросе, превышающем максимальное значение по второй координате множества V в 2.3 раза, его гарантированно можно распознать. Однако полученная оценка является оценкой сверху. На практике могут быть ситуации, когда можно распознать и меньшие выбросы. Рассмотрены некоторая реализация возмущений (рис. 3.8) и две реализации помех измерений с двумя выбросами на шагах $k = 10$ и $k = 20$. На рисунках 3.9-3.11 показана реализация помех с выбросами, которые удалось распознать, хотя величина выбросов меньше оценки $\delta v_{x(1)}$, полученной из выражения (3.32). В этих реализациях на шаге $k = 10$ информационное множество оказалось пустым. В реализации, показанных на рис.3.12, 3.15, выбросы распознать не удалось, информационное множество на 10-м и 20-м шагах оказалось не пустым, но истинное состояние вектора x не находится внутри полученной оценки (рис.3.12, 3.15).

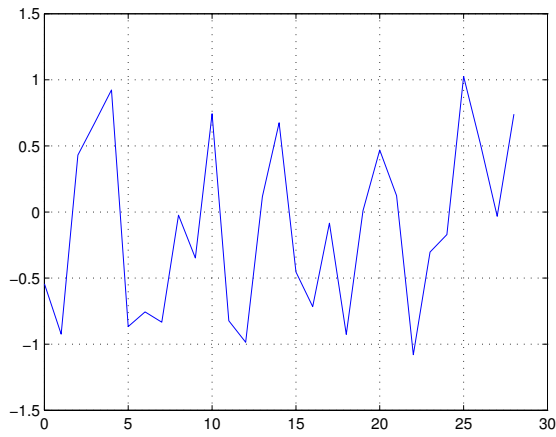


Рис. 3.8. График возмущений.

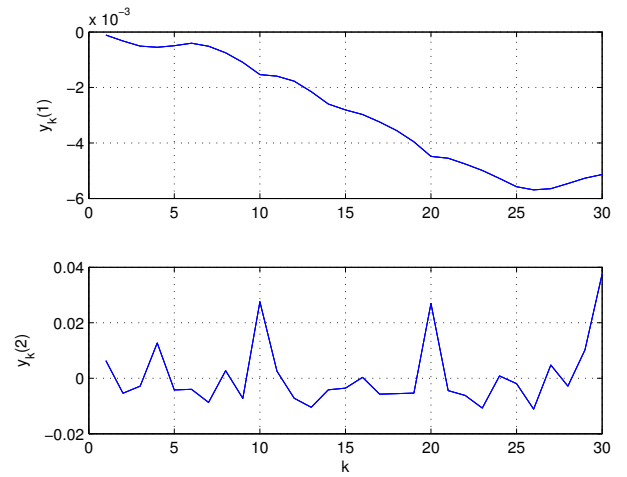
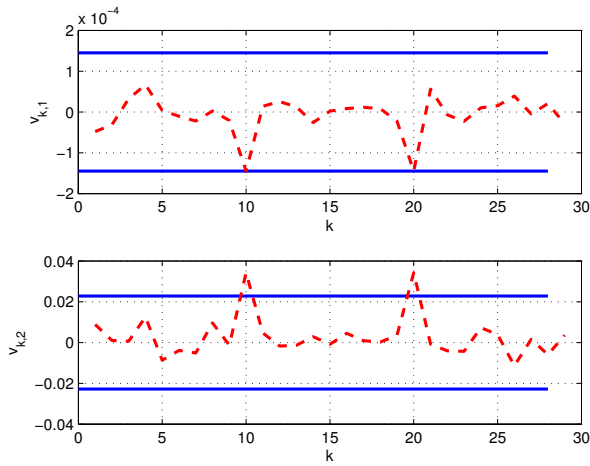
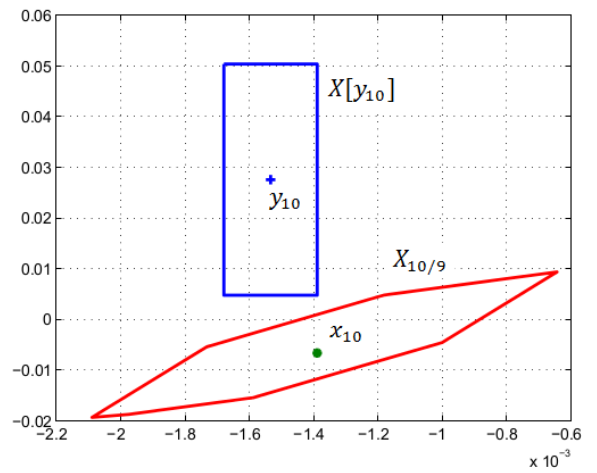


Рис. 3.10. Измерения (реализация 1)

Рис. 3.9. График помех измерений (реализация 1). Сплошная линия - граница априорного множества V , пунктир - реализованное значение.Рис. 3.11. Множество прогнозов $X_{10/9}$ и множество, совместимое с измерением $X[y_{10}]$ (реализация 1)

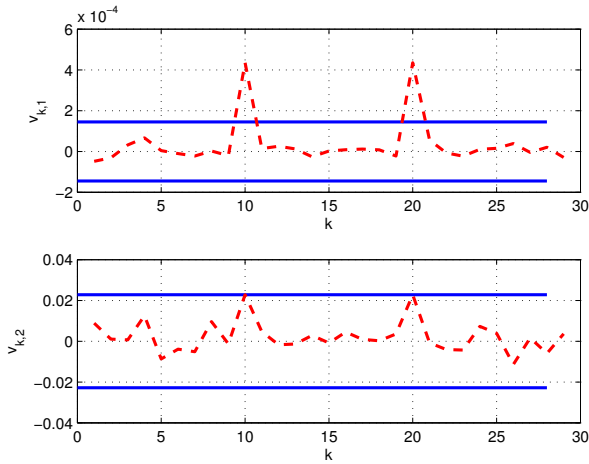


Рис. 3.12. График помех измерений (реализация 2). Сплошная линия - граница априорного множества V , пунктир - реализовавшееся значение, точечный пунктир - оценка помех.

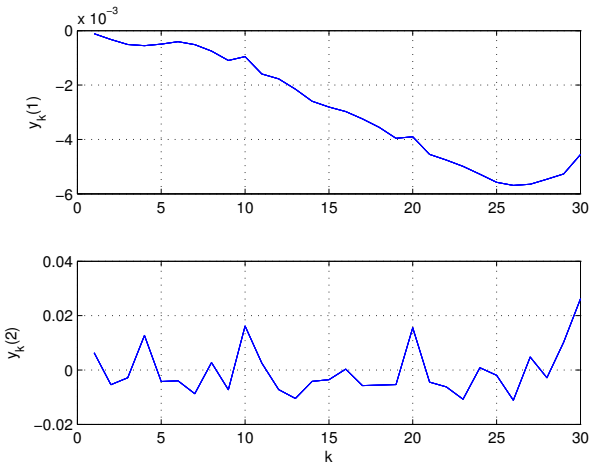


Рис. 3.13. Измерения (реализация 2)

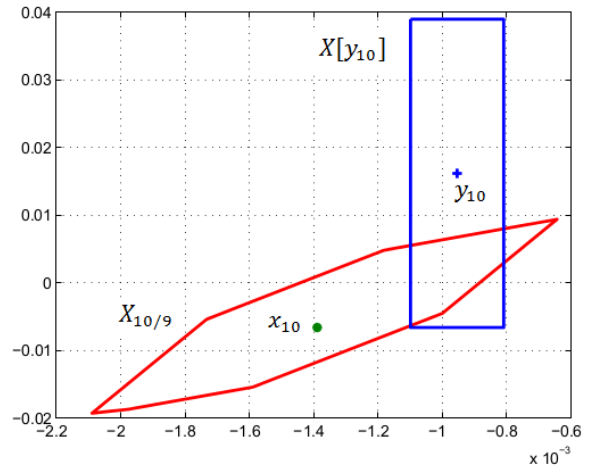


Рис. 3.14. Множество прогнозов $X_{10/9}$ и множество, совместимое с измерением $X[y_{10}]$ (реализация 2)

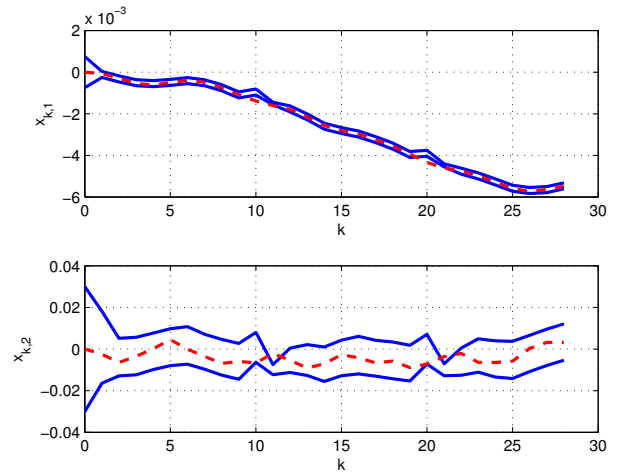


Рис. 3.15. Оценка вектора (реализация 2). Спрощная линия - оценка вектора состояния, пунктир - истинное значение вектора состояния.

3.6 Выводы по главе

Рассмотрено гарантированное оценивание состояния подвижных объектов при некоторых особенностях математических моделей процессов в подвижных объектах:

1. Для повышения точности оценивания рассмотрено разложение возмущений, действующих на подвижный объект, по системе функций с неизвестными постоянными коэффициентами. Разработан алгоритм гарантированно-

го оценивания вектора состояния системы и коэффициентов в разложении возмущения на основе расширения вектора состояния системы, часть координат которого является постоянной. В этом случае за счёт использования информации о том, что коэффициенты разложения являются постоянными, оценка вектора состояния получается точнее, чем в случае, когда возмущение известно с точностью до множества возможных значений: для рассмотренной двумерной системы к шагу $k = 20$ диапазон возможных значений по первой координате получился в 3.1 раз меньше, а по второй - в 5.8 раз меньше, а оценка коэффициентов разложения получилась в 14.5 раз лучше по сравнению с априорными оценками. Кроме того, при увеличении окна наблюдения размерность системы, описывающей эволюцию информационных множеств, когда часть координат является постоянной, меньше, чем в случае, когда известно только множество возможных значений возмущений, что позволяет уменьшить время вычисления оценок.

2. Рассмотрена трехмерная модель движения, в которой возмущения действуют на третью координату, а измерения проводятся только по первой координате. Для данной модели предложен численный алгоритм аппроксимации информационного множества в виде параллелепипеда без решения задач линейного программирования. Для данной модели были аналитически получены координаты аппроксимирующего параллелепипеда. Время вычисления оценки на каждом шаге получилось в 100 раз меньше, чем при использовании задач линейного программирования.
3. Разработан численный алгоритм гарантированного оценивания состояния линейных переключаемых систем на основе использования систем линейных неравенств и уравнений. Для каждого возможного состояния $\sigma(k)$, $\sigma(k) = 1, 2, \dots, m$ переключаемой системы вычисляется аппроксимация информационного множества. Объединение полученных множеств задаёт результирующую множественную оценку вектора состояния переключаемой системы. Время оценивания состояния переключаемых систем оказывается в m раз больше, чем для систем без переключений той же размерности из-за необходимости вычислять оценку для каждой подсистемы.
4. Исследовано гарантированное оценивание состояния системы при аномальных измерениях, когда происходит выброс помехи измерения из априор-

но заданного множества. Гарантированным признаком выброса является пустое информационное множество, или вырожденность систем линейных уравнений и неравенств, описывающих состояние подвижного объекта. Установлено, что если величина выброса на k -м шаге $\delta\nu_k$ превышает сумму проекций диаметров множеств AV и ΓW по какой-либо координате, то такой выброс гарантированно будет обнаружен.

Глава 4. Реализация алгоритмов полиэдральной аппроксимации, моделирование и исследования гарантированных оценок для различных математических моделей подвижных объектов

4.1 Гарантированная оценка вектора состояния в системе управления боковым движением летательного аппарата на основе вычислительного эксперимента

Рассмотрим боковое движение летательного аппарата [135, 168, 169]. Вектор состояния состоит из угла скольжения β , угла крена ϕ , угловой скорости по крену p , угловой скорости по рысканью r , отклонения элерона и руля направления δ_r и δ_a (рис. 4.1, 4.2).

$$x = [\beta \quad \phi \quad p \quad r \quad \delta_a \quad \delta_r]'. \quad (4.1)$$

Модель бокового движения летательного аппарата описана уравнениями [169]

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \Gamma w_k, \\ y_{k+1} = Gx_{k+1} + Hv_{k+1}, \end{cases} \quad (4.2)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0.996306 & 0.000639 & 0.000361 & -0.009876 & 0.000003 & 0.000010 \\ -0.001531 & 1 & 0.009816 & 0.000070 & -0.000037 & 0.000007 \\ -0.300078 & -0.000098 & 0.963836 & 0.008028 & -0.006459 & 0.001155 \\ 0.085093 & 0.000027 & -0.000233 & 0.994823 & -0.000285 & -0.000556 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.818402 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.818402 \end{pmatrix},$$

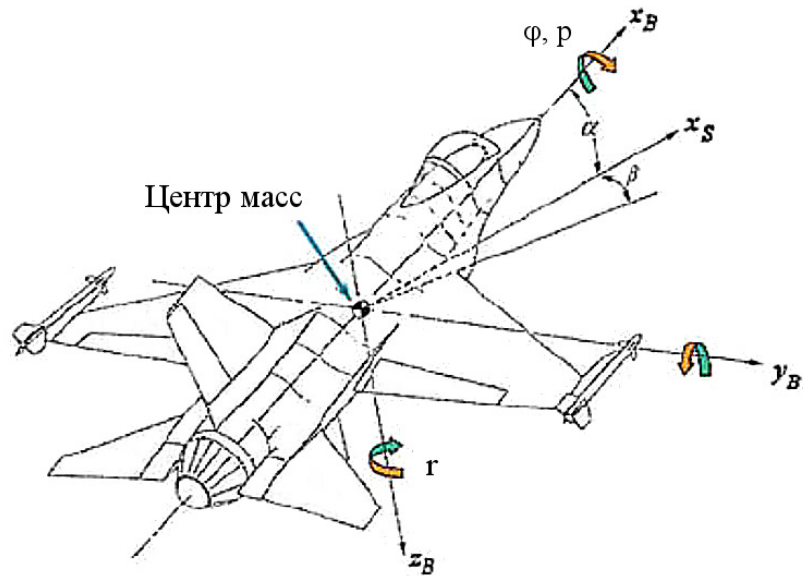


Рис. 4.1. Система координат ЛА

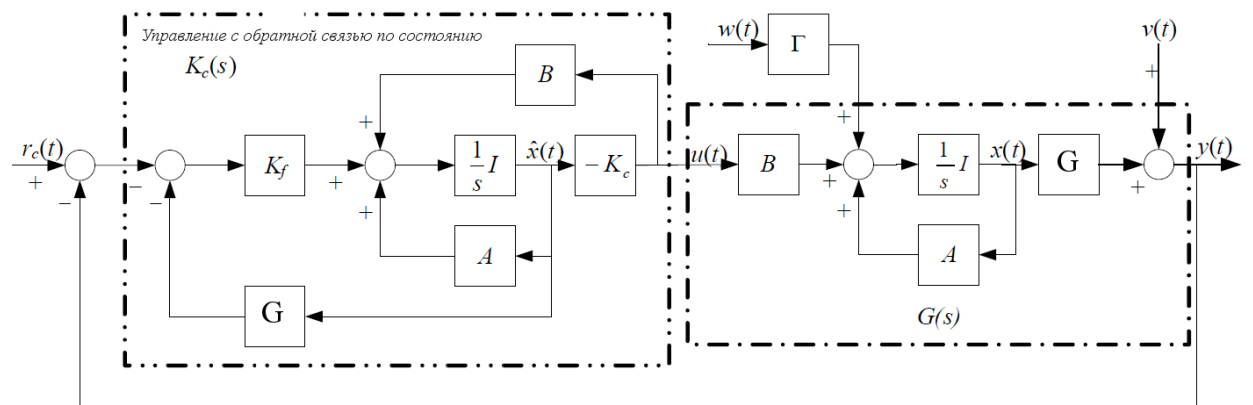


Рис. 4.2. Схема системы управления движением ЛА [169]

$$B = \begin{pmatrix} 0.0000003 & -0.0000023 & -0.000685 & -0.000030 & 0.182900 & 0 \\ 0.0000010 & 0.00000042 & 0.0001225 & -0.0000585 & 0 & 0.182900 \end{pmatrix}' ,$$

$$\Gamma = I_{6 \times 6} \cdot 0.01.$$

Начальное состояние $x(0)$, возмущения $w(t)$ и помехи $v(t)$ являются случайными величинами со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} x(0) &= N(0, P_0), \quad P_0 = \text{diag} \left(0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \right), \\ w(t) &= N(0, Q), \quad Q = \text{diag} \left(0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0 \quad 0 \right), \\ v(t) &= N(0, R), \quad R = I_{2 \times 2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Управление определяется уравнением [169]:

$$u_k = -K_c \hat{x}_k, \quad (4.4)$$

где \hat{x}_k - оценка вектора состояния,

$K_c = \begin{pmatrix} 6.6926 & -1.3561 & -0.07792 & -22.06 & -0.62269 & 0.2132 \\ -44.461 & 0.9441 & 0.31137 & -10.212 & 0.02949 & -0.5593 \end{pmatrix}$ - матрица усиления, полученная в результате решения уравнения Рикатти.

Зададим начальные ограничения состояния x_0 , возмущений w_k и помех v_k в соответствии с ковариационными матрицами P_0 , Q , R : опишем сверху эллипсоиды, заданные ковариационными матрицами, параллелепипедами. В результате получено, что множество \bar{X}_0 является параллелепипедом в шестимерном пространстве с центром в начале координат и со сторонами равными 0.6, множество W - параллелепипедом в четырёхмерном пространстве с центром в начале координат и со сторонами равными 0.6, V - параллелепипед в двумерном пространстве с центром в начале координат и со сторонами равными 6.

Рассмотрим некоторую реализацию процесса (рис.4.3,4.4). Информационное множество \bar{X}_k на k -м шаге будем аппроксимировать сверху параллелепипедом X_k с гранями, параллельными координатным плоскостям:

$$x_k \in X_k : A_{x_k} x_k \leq b_{x_k}, \quad A_{x_k} = \left(I_{6 \times 6}, \quad -I_{6 \times 6} \right)'$$

Значения b_{x_k} вычисляются по алгоритму, описанному в п.2.3. Для вычисления управления u_k из (4.4) в качестве оценки \hat{x}_k будем брать чебышевский центр аппроксимирующего многогранника X_k .

Из результатов работы алгоритма следует, что оценка по пятой и шестой координатам стянулась в точку (рис.4.6 д, е). Это связано с тем, что по этим

координатам возмущения не действуют, а матрица A в уравнении (4.2) является сжимающей по этим координатам. Размер множеств по первой и второй координатам уменьшился по сравнению с исходным множеством, т.к. эти координаты измеряемые, а возмущения и помехи реализовались таким образом, что пересечение множеств прогнозов и множеств, совместимых с измерением, оказалось мало.

Построенная аппроксимация информационного множества основана на текущем измерении. Рассмотрим возможность уточнения оценки за счет накопления данных с нескольких предыдущих шагов. Построим гарантированные оценки при ширине окна $L = 3$ и $L = 9$. С помощью расширенной системы получилось значительно уточнить оценку (рис.4.7, 4.8) по третьей и четвёртой координатам. По первой и второй координатам уточнение оценки произошло не на всех шагах, это объясняется тем, что эти координаты измеряются и измерения вносят большой вклад в оценку. Оценки по пятой и шестой координатам не изменились, т.к. возмущения по этим координатам не действуют.

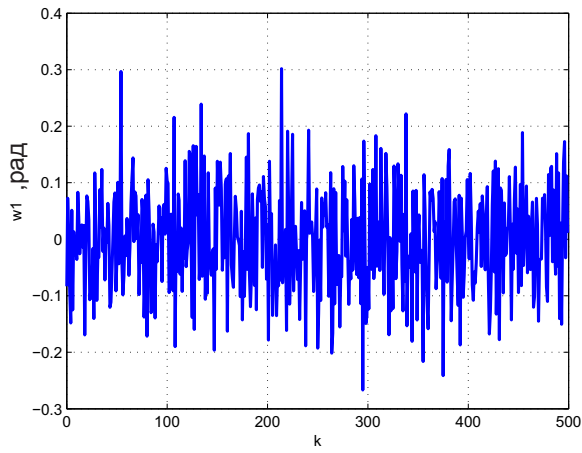
Из результатов работы алгоритма следует, что размер аппроксимирующего параллелепипеда по первой и второй координатам уменьшается, т.к. эти координаты измеряются и соотношение реализованных возмущений и помех оказалось таким, что они как бы скомпенсировали друг друга и размер параллелепипеда по этим координатам получился достаточно небольшим. При этом несмотря на то что множество ошибок измерений является большим по сравнению с множествами возмущений и множеством начального состояния по соответствующим координатам, т.е. измерения проводятся неполные и неточные, множественная оценка по этим координатам за счет модели системы (4.2) получилась точнее, чем без учета модели системы. Длина ребер аппроксимирующего параллелепипеда по первой и второй координатам не превышает 1, а размер множества ошибок измерений этих координат равен 6. Размер по пятой и шестой координатам вектора уменьшается с течением времени за счет того, что по этим координатам возмущения не действуют, а матрица A в уравнении (4.2) является сжимающей по этим координатам.

Проведём оценку вектора состояния для данной реализации процесса с помощью фильтра Калмана и сравним с гарантированной оценкой. Для $k = 1..500$ по первым четырём координатам среднеквадратичная ошибка фильтра Калма-

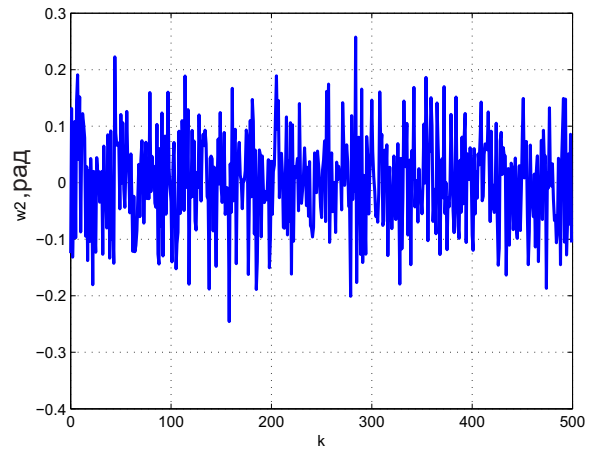
на получилась меньше ошибки минимаксного фильтра

$$\begin{aligned}\sigma_{kalman} &= 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.0142 & 0.0315 & 0.2131 & 0.1378 & 3.231 \cdot 10^{-7} & 1.44 \cdot 10^{-8} \end{pmatrix} \\ \sigma_{minmax} &= 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.1523 & 0.1116 & 0.2747 & 0.4238 & 0.067 \cdot 10^{-7} & 0.200 \cdot 10^{-8} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.5}$$

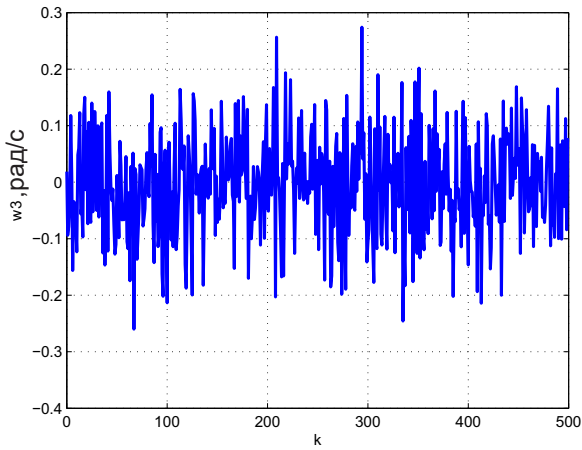
На основе вычисленных ковариационных матриц ошибок фильтрации P_k построим доверительные области $\tilde{X}_k : (x_k - \hat{x}_k)P_k^{-1}(x_k - \hat{x}_k) \leq 14.5$, \hat{x}_k – оценка фильтра Калмана, в которые истинное значение вектора состояния должно попадать с вероятностью 0,975. Доверительный эллипсоид с течением времени уменьшается по каждой из осей (рис.4.9). Длины сторон аппроксимирующих параллелепипеда по четырём направлениям оказались больше соответствующих длин осей эллипсоида. Однако вычисления показали, что на 9 шагах истинное значение вектора состояния x_k не попадает в доверительную область \tilde{X}_k . Такое небольшое число выпаданий связано с тем, что в данном примере моделирование случайных возмущений и помех проводилось в соответствии с заданным законом нормального распределения. При моделировании случайных возмущений w_k и помех v_k , равномерно распределённых в соответствующих множествах W и V , выпадания истинного значения вектора состояния происходят в среднем в 25% случаев. Это можно объяснить тем, что фильтр Калмана построен в предположении, что возмущения и помехи измерений имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и известной матрицей ковариации, но реализации процесса возмущения и помехи не соответствовали этому предположению.



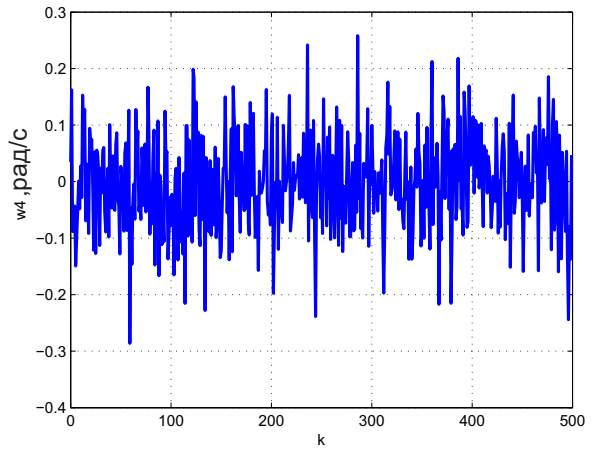
а) возмущения по первой координате $w_k(1)$ (угол скольжения)



б) возмущения по второй координате $w_k(2)$ (угол крена)

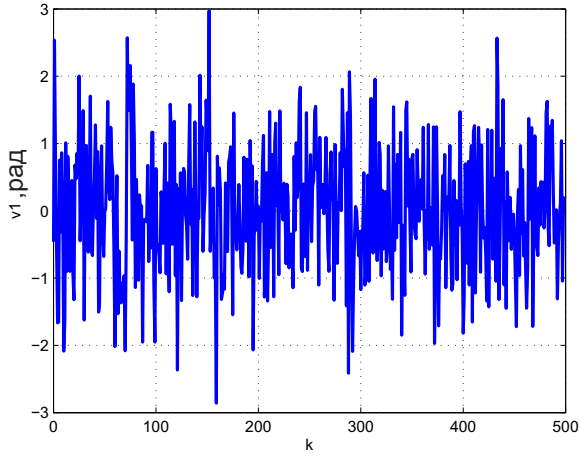


в) возмущения по третьей координате $w_k(3)$ (угловая скорость по крену)

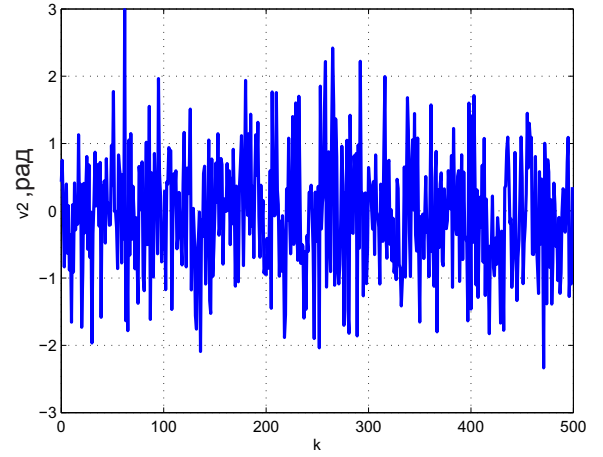


г) возмущения по четвертой координате $w_k(4)$ (угловая скорость по рысканью)

Рис. 4.3. Возмущения

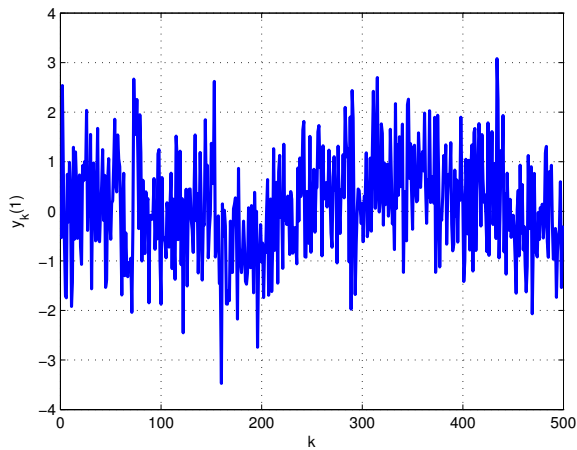


а) Ошибки измерений $v_k(1)$ (угол скольжения)

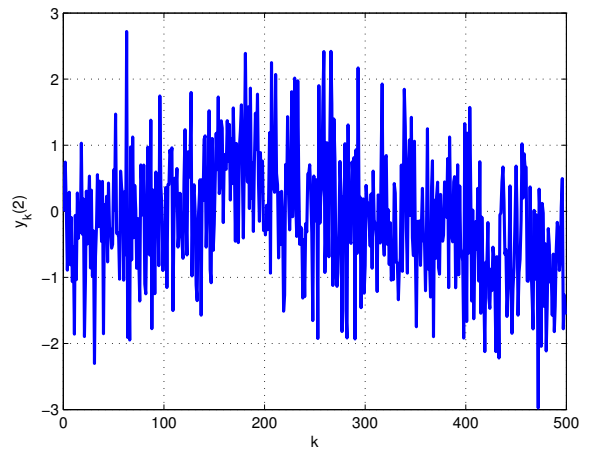


б) Ошибки измерений $v_k(2)$ (угол крена)

Рис. 4.4. Ошибки измерений



а) измерения $y_k(1)$ (угол скольжения)



б) измерения $y_k(2)$ (угол крена)

Рис. 4.5. Измерения

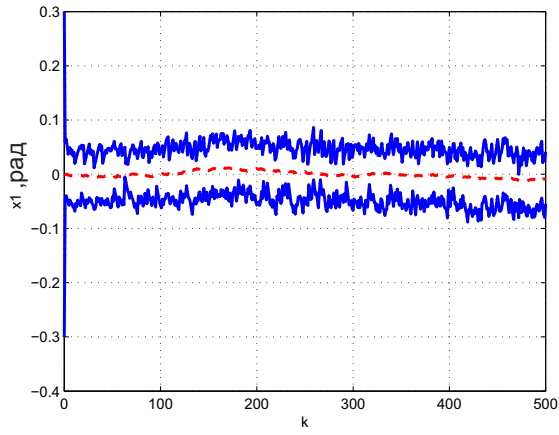
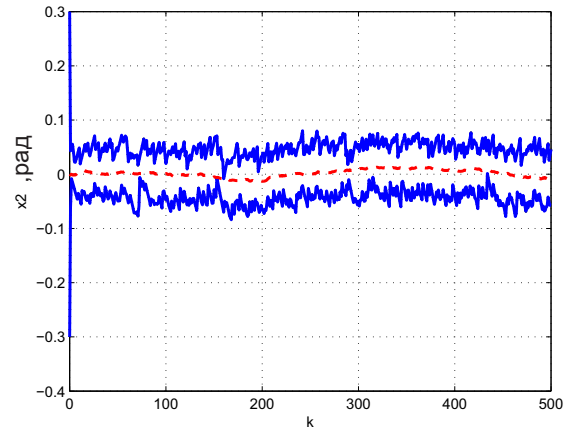
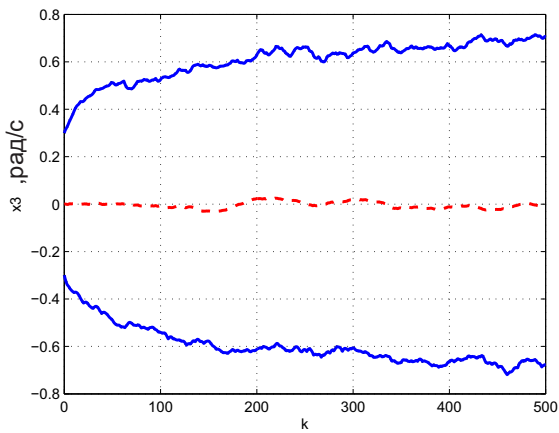
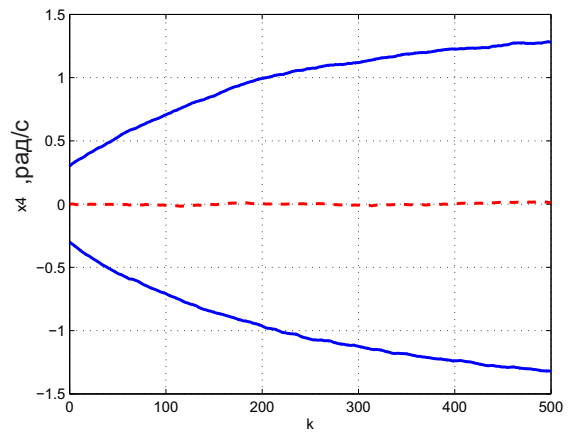
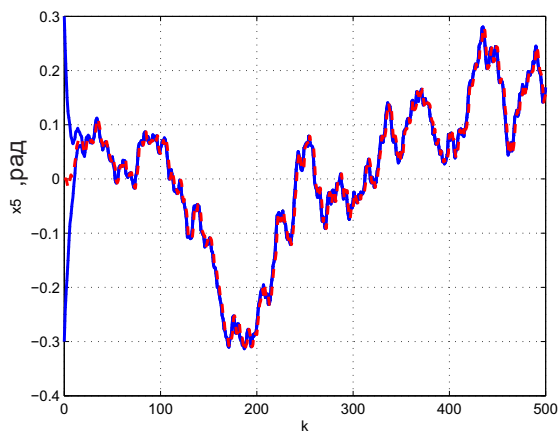
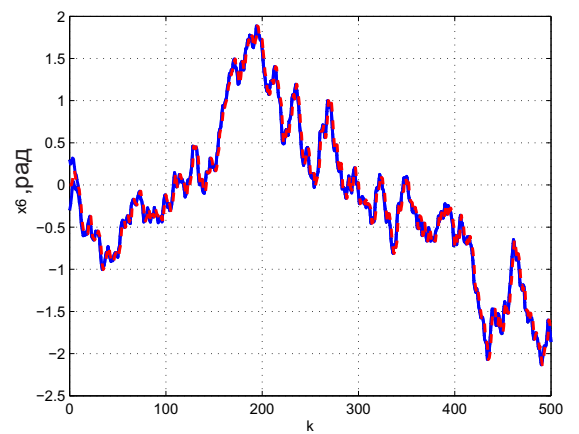
а) оценка $x_k(1)$ (угол скольжения)б) оценка $x_k(2)$ (угол крена)в) оценка $x_k(3)$ (угловая скорость по крену)г) оценка $x_k(4)$ (угловая скорость по рысканью)д) оценка $x_k(5)$ (отклонение руля направления)е) оценка $x_k(6)$ (отклонение руля элерона)

Рис. 4.6. Аппроксимация информационных множеств (пунктир - истинное значение вектора состояния, сплошная линия - граница аппроксимирующих множеств).

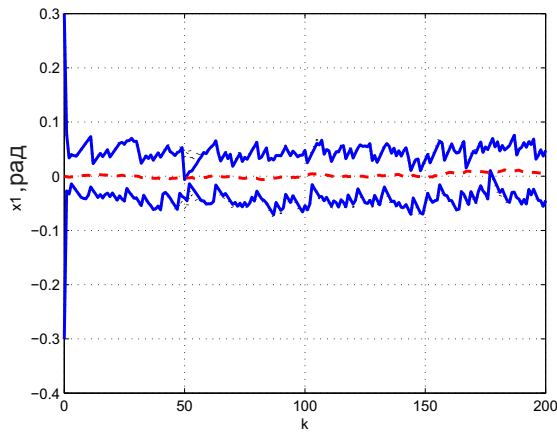
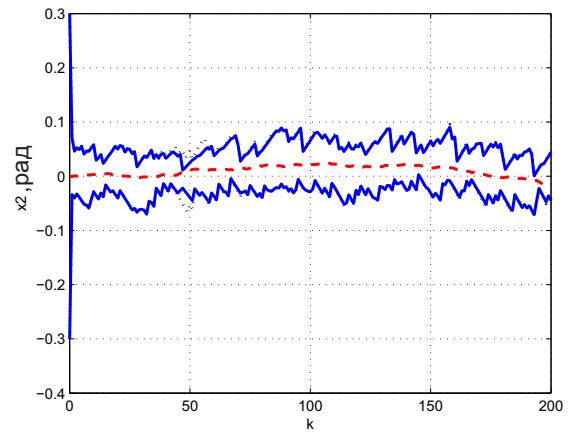
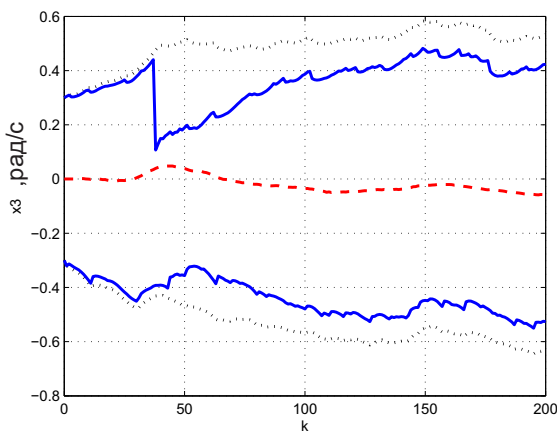
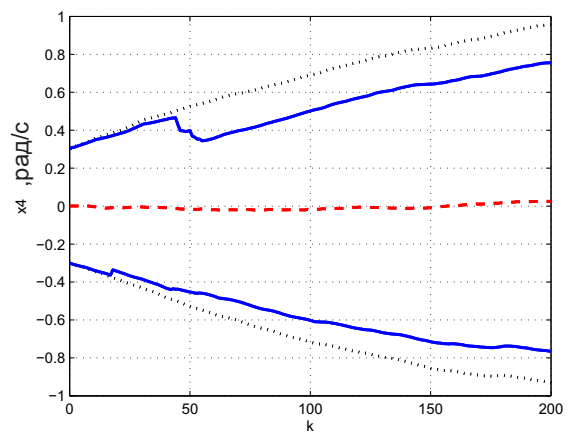
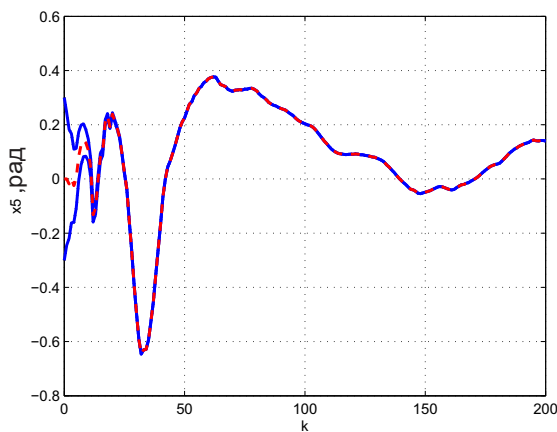
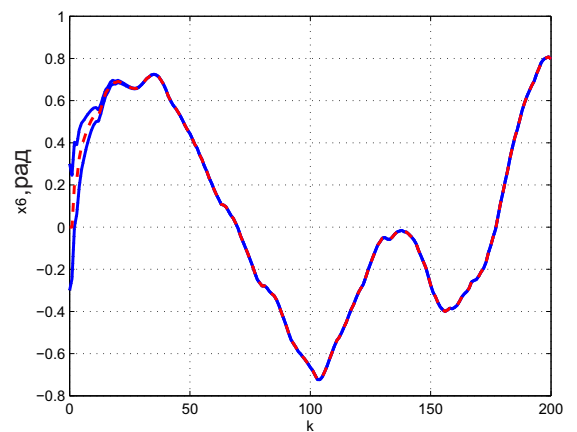
а) оценка $x_k(1)$ (угол скольжения)б) оценка $x_k(2)$ (угол крена, рад)в) оценка $x_k(3)$ (угловая скорость по крену)г) оценка $x_k(4)$ (угловая скорость по рысканью)д) оценка $x_k(5)$ (отклонение руля направления)е) оценка $x_k(6)$ (отклонение руля элерона)

Рис. 4.7. Аппроксимация информационных множеств при ширине окна $L = 3$ (пунктир - истинное значение вектора состояния, сплошная линия - граница аппроксимирующих множеств при ширине окна $L = 3$, точечный пунктир - граница аппроксимирующих множеств при ширине окна $L = 1$).

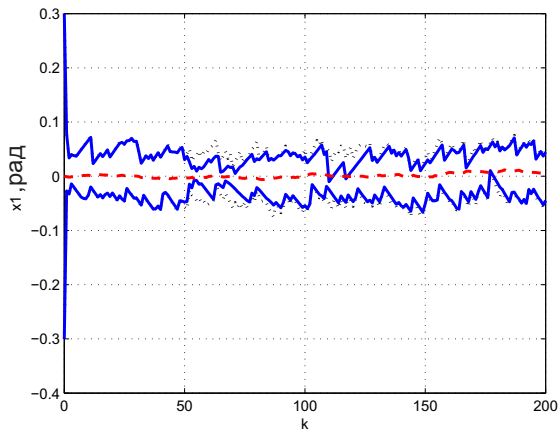
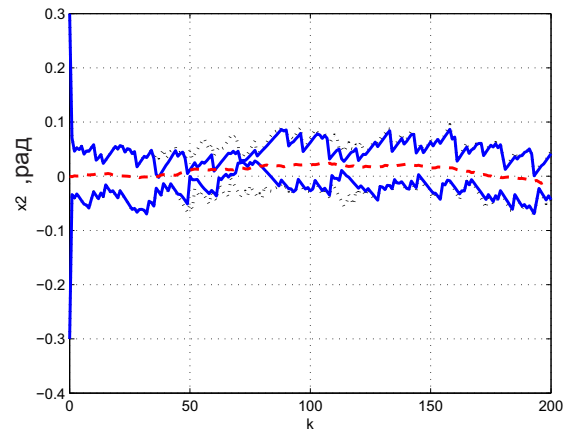
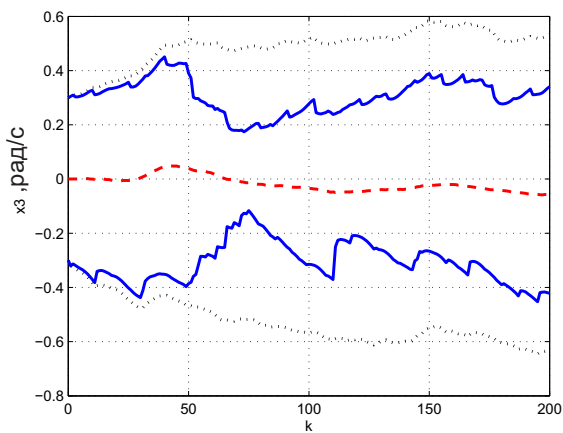
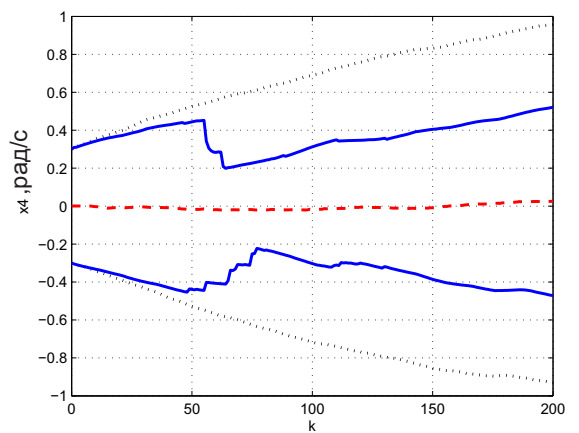
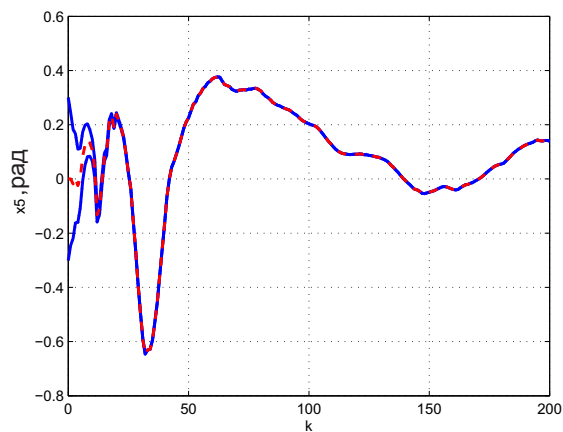
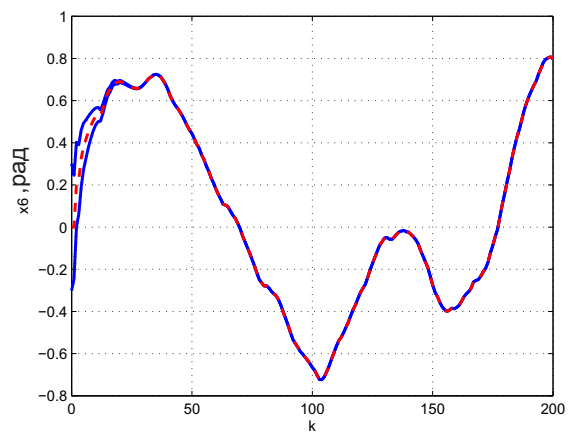
а) оценка $x_k(1)$ (угол скольжения)б) оценка $x_k(2)$ (угол крена)в) оценка $x_k(3)$ (угловая скорость по крену)г) оценка $x_k(4)$ (угловая скорость по рысканью)д) оценка $x_k(5)$ (отклонение руля направления)е) оценка $x_k(6)$ (отклонение руля элерона)

Рис. 4.8. Аппроксимация информационных множеств при ширине окна $L = 9$ (пунктир - истинное значение вектора состояния, сплошная линия - граница аппроксимирующих множеств при ширине окна $L = 9$, точечный пунктир - граница аппроксимирующих множеств при ширине окна $L = 1$).

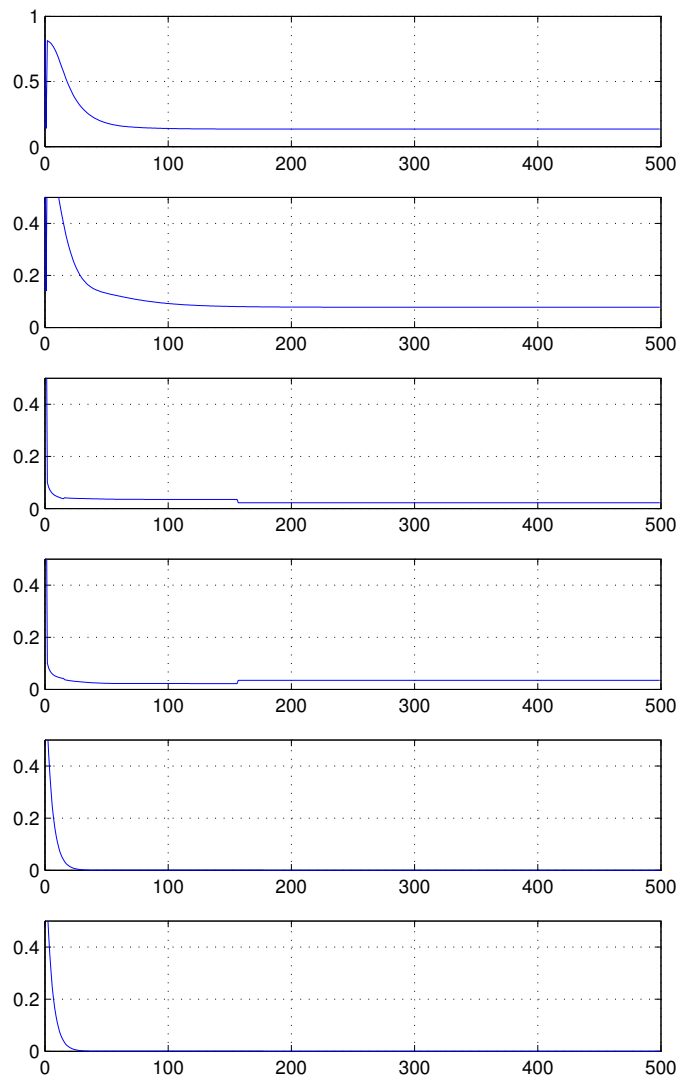


Рис. 4.9. Размеры осей доверительного эллипсоида

4.2 Гарантированная оценка ошибок БИНС в продольном и боковом каналах на основе вычислительного эксперимента

Бесплатформенные инерциальные навигационные системы (БИНС) (рис.4.10) используются для определения местоположения, скорости и ориентации движущегося объекта при помощи акселерометров и гироскопов. Отличие бесплатформенных систем от платформенных заключается в том, что инерциальные датчики устанавливаются на корпусе БИНС, жестко связанном с движущимся объектом. С помощью акселерометров получают данные об ускорениях фиксированной точки объекта, а с помощью гироскопов – об угловой скорости вращения корпуса БИНС. На основе совместной обработки

этих данных решается задача навигации. Однако в реальных условиях информация о векторах кажущегося ускорения и угловой скорости искажается за счет не скомпенсированных систематических погрешностей, не калибруемых псевдослучайных погрешностей и собственных шумов датчиков [4, 93, 104]. Не скомпенсированные систематические погрешности появляются из-за погрешности или отсутствия калибровки. Не калибруемые псевдослучайные погрешности характерны для некоторых типов датчиков, например, для микромеханических акселерометров. Собственные шумы датчиков появляются из-за особенностей физического устройства чувствительного элемента и подсистем съёма сигнала, термического шума микроэлектроники. Тогда для повышения точности решения навигационных задач необходимо осуществлять идентификацию инструментальных погрешностей инерциальных датчиков БИНС. Такую задачу идентификации часто рассматривают как задачу оценивания вектора ошибок БИНС по известным измерениям. Для обработки сигналов инерциальных навигационных систем широко используется калмановская теория фильтрации, когда требуется знание статистических характеристик начального состояния системы, помех и шумов, которые на практике не всегда могут быть получены. Кроме того, не всегда можно говорить о корреляционных свойствах погрешности из-за зависимости корреляционных свойств погрешности от динамики объекта. Данный параграф посвящен гарантированному подходу к обработке измерительной информации, поступающей от БИНС.

Известно, что при оценивании параметров пространственного движения управляемого летательного аппарата (ЛА) вертикальный канал движения, включающий высоту полета, имеет особенность, которая состоит в необходимости иметь дополнительный источник информации — высотомер, с помощью которого проводится устойчивое оценивание навигационных параметров в этом канале. Эта особенность вертикального канала достаточно хорошо изучена, поэтому в дальнейшем ограничимся алгоритмами фильтрации в продольном и боковом каналах.

При формировании алгоритмического обеспечения систем наведения ЛА используются различные системы координат. Рассмотрим стартовую систему координат, начало которой расположено в точке проекции на поверхность Земли точки старта ЛА или в геометрическом центре наземной цели. Ось OY этой

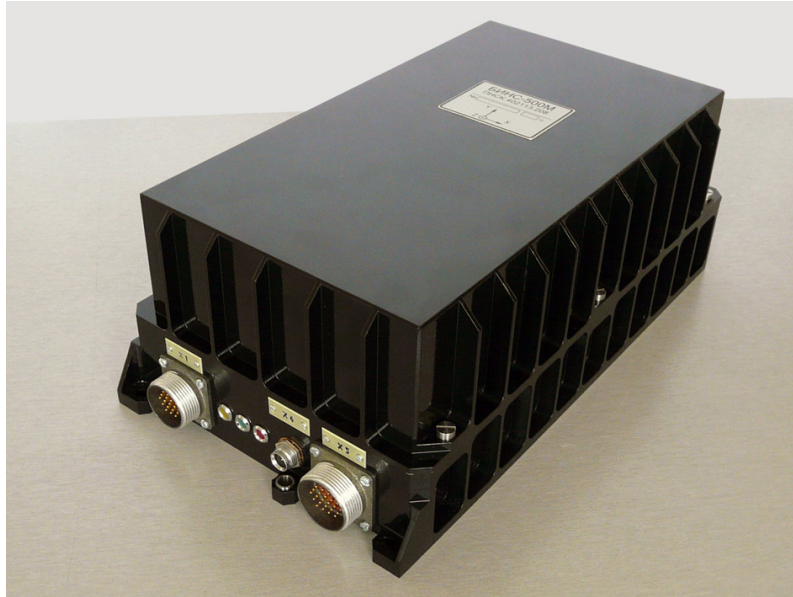


Рис. 4.10. Бесплатформенная инерциальная навигационная система БИНС-500М ООО НПК "Оптолинк"

системы направлена вверх по местной вертикали, ось OX — по касательной к меридиану точки старта или меридиану геометрического центра цели, в направлении на север, ось OZ дополняет систему координат до правой. Модель оши-

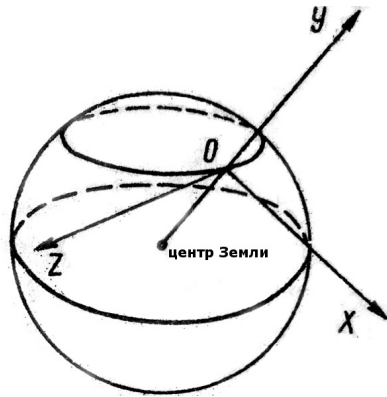


Рис. 4.11. Стартовая система координат

бок счисления параметров полета ЛА в продольном и боковом каналах БИНС удобно представить в виде [39]

$$\begin{aligned} \Delta \dot{X} &= \Delta V_x; & \Delta \dot{V}_x &= \Delta a_x; & \Delta \dot{a}_x &= w_x; \\ \Delta \dot{Z} &= \Delta V_z; & \Delta \dot{V}_z &= \Delta a_z; & \Delta \dot{a}_z &= w_z, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $\Delta X, \Delta V_x, \Delta a_x, \Delta Z, \Delta V_z, \Delta a_z$ — ошибки БИНС по координатам и их производным; w_x, w_z — шумы акселерометров.

Модель наблюдения запишем в виде

$$\begin{aligned}
 y_1 &= X_{\text{бинс}} - X_{\text{снс}} = \Delta X + v_1; \\
 y_2 &= Z_{\text{бинс}} - Z_{\text{снс}} = \Delta Z + v_2; \\
 X_{\text{бинс}} &= X^{\text{И}} + \Delta X; \quad Z_{\text{бинс}} = Z^{\text{И}} + \Delta Z; \\
 X_{\text{снс}} &= X^{\text{И}} + v_1; \quad Z_{\text{снс}} = Z^{\text{И}} + v_2.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь $X_{\text{бинс}}$, $Z_{\text{бинс}}$ — координаты, определяемые БИНС; $X_{\text{снс}}$, $Z_{\text{снс}}$ — координаты полета ЛА, определяемые ГЛОНАСС/GPS-приемником; $X^{\text{И}}$ — истинное значение координат; ΔX , ΔZ — погрешности БИНС, рассматриваемые как систематические ошибки, обусловленные уходом гироскопов и неточностью акселерометров; v_1 , v_2 — шумовая составляющая ошибки ГЛОНАСС/GPS-приемника.

Поскольку координаты в продольном и боковом каналах не зависят друг от друга, рассмотрим алгоритм оценивания на примере одного из каналов. Модель движения БИНС в продольном канале описана следующими уравнениями:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w, \tag{4.8}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + v, \tag{4.9}$$

где $x = (\Delta X, \Delta V_x, \Delta a_x)'$ — рассматриваемый вектор системы, w — возмущения, действующие на систему, y — измерения, v — помехи измерений.

Приведём модель к дискретному виду:

$$x_{k+1} = Ax_k + \Gamma w_k, \tag{4.10}$$

$$y_{k+1} = Gx_{k+1} + v_{k+1}, \tag{4.11}$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & \tau & 0 \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, τ — время дискретизации.

На начальное состояние, возмущения и помехи измерения заданы множественные ограничения:

$$x_0 \in \bar{X}_0, \quad w_k \in W : w_{min} \leq w_k \leq w_{max}, \quad v_k \in V : v_{min} \leq v_k \leq v_{max}. \quad (4.12)$$

Рассмотрим движение БИНС при следующих исходных данных [39, 166]:

$$\tau = 0.02,$$

$$X_0 : \{-150 \leq x_0(1) \leq 150; \quad -1.65 \leq x_0(2) \leq 1.65; \quad 0 \leq x_0(3) \leq 0\},$$

$$W : \{-2.16 \leq w_k \leq 2.16\},$$

$$V : \{-28.5 \leq v_k \leq 28.5\},$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}'.$$

Рассмотрим некоторую случайную реализацию возмущений и помех измерений (рис. 4.12,4.13). Были построены множественные оценки вектора состояния БИНС в виде параллелепипедов двумя способами:

1. По алгоритму, описанному в п.3.3.
2. С использованием систем линейных неравенств и уравнений, по алгоритму 1, описанному в п. 2.3.

Результаты оценки по этим двум алгоритмам - одинаковые (рис.4.14), но время вычисления отличается на 2 порядка. Время работы первого алгоритма аппроксимации на 1 шаг - в среднем 0.00028с. Время работы второго алгоритма аппроксимации на 1 шаг - в среднем 0.03с. Время работы фильтра Калмана на 1 шаге - в среднем 0.0001с.

Размер аппроксимирующего многогранника по второй и третьей координатам с течением времени увеличивается. Это связано с тем, что матрица A не является сжимающей, на третью координату действуют возмущения, а измерения по третьей и второй координатам не проводятся. Первая координата слабо связана со второй и третьей координатами в модели, поэтому измерения по первой координате не позволяют уточнить оценку по ним.

Получить более точную оценку можно, применив алгоритм 2 (п.2.3), увеличив ширину окна L . При ширине окна $L = 100$ оценка по второй и третьей координатам на разных шагах получается до 10 раз точнее оценки при $L = 1$.

Наиболее точную оценку состояния БИНС можно получить после проведения всех измерений, когда оценка на каждом шаге вычисляется не только с

учетом предыдущих измерений, но и с учетом последующих (рис.4.16). Такие оценки могут быть использованы для послеопытной обработки данных, когда не требуется выполнять вычисления в реальном времени.

В настоящее время широкое применения для оценивания состояния БИНС находит фильтр Калмана [39]. Проведем сравнение минимаксных оценок и оценок фильтра Калмана для БИНС для процесса, приведённого на рис.4.12, 4.13 (рис.4.17). При реализации фильтра Калмана будем считать, что начальное состояние, возмущения и помехи являются случайными нормально распределёнными величинами:

$$x_0 \sim N(0, P_0), \quad w_k \sim N(0, Q), \quad v_k \sim N(0, R),$$

где матрицы P_0 , Q и R выбраны таким образом, что доверительные области, построенные на основе этих матриц покрывали соответствующие множества X_0 , W , V :

$$P_0 = \text{diag}(2500, 0.3, 0), \quad Q = 0.49, \quad R = 90.25.$$

Среднеквадратичная ошибка оценивания фильтра Калмана для $N = 100$:
 $\sigma_{kalman}(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i(j) - \hat{x}_i(j))^2$, где $j = 1, \dots, 3$, \hat{x}_i - оценка фильтра Калмана,
 $\sigma_{kalman} = \begin{pmatrix} 3.4898 & 4.0234 & 8.5319 \end{pmatrix}$.

Среднеквадратичная ошибка оценивания минимаксного фильтра, когда в качестве точечной оценки взят центр аппроксимирующего параллелепипеда для $N = 100$, $L = 1$:

$\sigma_{mm}(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i(j) - x_i^*(j))^2$, где $j = 1, \dots, 3$, x_i^* - центр аппроксимирующего параллелепипеда,
 $\sigma_{mm} = \begin{pmatrix} 5.4698 & 5.5099 & 9.6035 \end{pmatrix}$.

Для данной реализации процесса оценка фильтра Калмана получилась точнее оценки минимаксного фильтра. Сравним размеры доверительного эллипсоида, построенного на основе оценок фильтра Калмана и аппроксимирующего параллелепипеда. Размеры осей доверительного эллипсоида со временем стремятся к некоторому постоянному значению, в отличие от размеров аппроксимирующего параллелепипеда. Заметим, что реализация возмущений в данном случае близка к равномерному распределению, а фильтр Калмана при-

меняется в предположении, что возмущения имеют нормальное распределение. Вычислительные эксперименты показали, что истинное значение вектора состояния БИНС в среднем в 30% случаев не попадает в доверительный эллипсоид при равномерном распределении возмущений. Если же реализация возмущений близка к нормальной, то выпадания истинного значения вектора состояния происходит в среднем в 5% случаев.

На практике, как правило, возмущения представляют собой величины с нулевым средним значением. Рассмотрим возможность уточнения множественных оценок состояния БИНС за счёт этой дополнительной информации о возмущениях. Рассмотрев множество реализаций возмущений в рассмотренной выше модели, можно сделать вывод что в большинстве случаев начиная с 30 шага среднее значение находится в диапазоне от -0.2 до 0.2.

$$-\epsilon_k \leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^k w_k \leq \epsilon_k. \quad (4.13)$$

Возьмём ϵ_k равным 0.2 для $k > 30$. Оценку вектора состояния БИНС будем строить по алгоритму 2 (п. 2.3), включив в систему линейных неравенств, описывающих ограничения системы, неравенства (4.13) начиная с шага $k = 30$. Если имеется дополнительная информация о характере и ограничениях возмущений, её также можно включить в систему. Приведем результаты оценок для трёх случайных реализаций возмущений (рис. 4.18, 4.20, 4.22). Оценки с учётом дополнительной информации о среднем значении возмущений получились более точными по сравнению с оценками, полученными без учета информации о среднем значении (рис. 4.19, 4.21, 4.23): по третьей координате оценка получилась на некоторых шагах до 5 раз точнее, по второй - до 1,5 раз точнее. Но для реализации 3 (рис. 4.23) получилось, что истина на некоторых шагах (например, $k=30..50$) не попала во множество, т.к. предположение для ϵ_k не выполнилось для этой реализации. Таким образом, при включении в систему информации о вероятностных характеристиках возмущений полученная множественная оценка может не гарантировать нахождение в ней истинного состояния системы. Однако в большинстве случаев это позволяет уточнить оценку в несколько раз без значительного увеличения вычислительных затрат.

Для повышения точности множественных оценок и уменьшения вычислительных затрат возможно совместное использование минимаксного фильтра и фильтра Калмана. Например, для вычисления оценки по первой координате можно применять алгоритм аппроксимации, а по второй и третьей - фильтр Калмана, т.к. по первой координате можно получить гарантированные оценки по минимаксному фильтру, а множественные оценки по второй и третьей координатам, полученные по результатам работы фильтра Калмана, получаются точнее оценок минимаксного фильтра и для их вычисления требуется меньше времени. В этом случае для вычисления оценок по первой координате требуется решить две задачи линейного программирования, а не шесть, что позволит сократить время вычисления оценок.

В настоящее время в системах инерциальной навигации начинают широко применяться БИНС на основе волоконно-оптических гироскопов, которые характеризуются потенциально высокой чувствительностью (точностью), но чувствительны к очень малым внешним и внутренним возмущениям, что приводит к ухудшению точности прибора. Далее будет рассмотрена идентификация модели «быстрых» колебаний в измерениях волоконно-оптического гироскопа в виде разложения по системе процессов, заданных хаотическими отображениями, с целью повышения точности процедуры оценивания проекции угловой скорости.

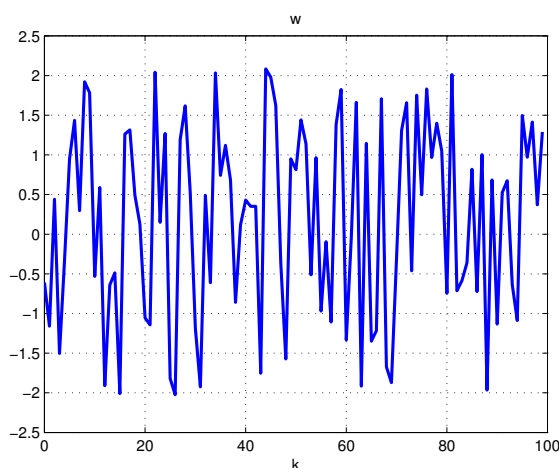


Рис. 4.12. Возмущения

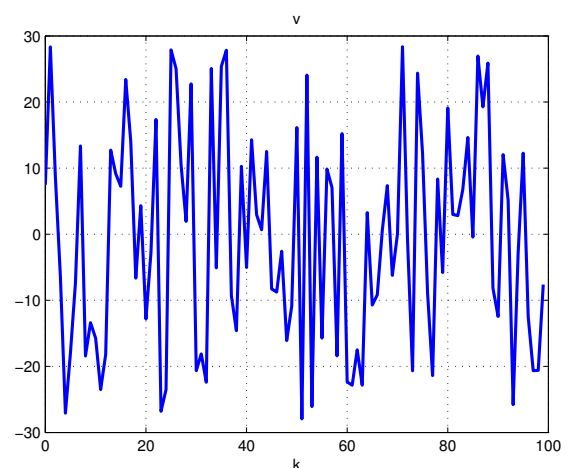


Рис. 4.13. Помехи измерений

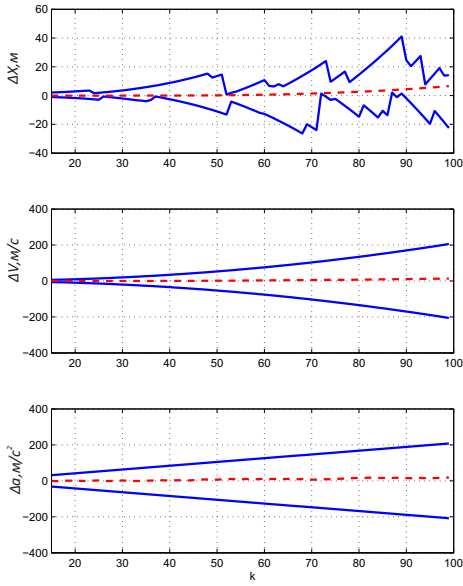


Рис. 4.14. Аппроксимация информационных множеств (пунктир - истинное состояние БИНС, сплошная линия - граница аппроксимирующих множеств)

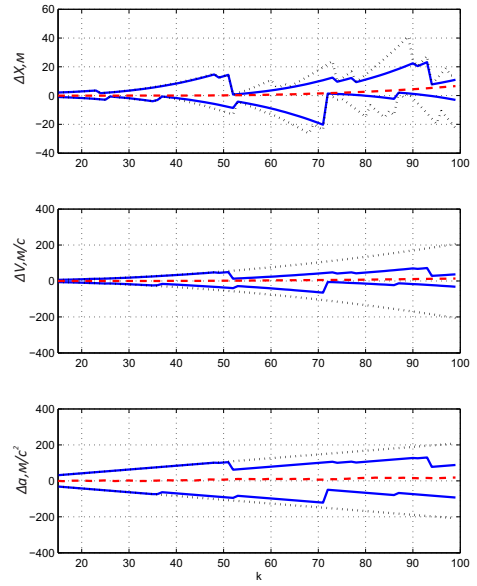


Рис. 4.15. Аппроксимация информационных множеств с окном $L=100$ (пунктир - истинное состояние БИНС, сплошная линия - граница аппроксимирующего множества при $L = 100$, точечный пунктир - граница аппроксимирующего множества при $L = 1$)

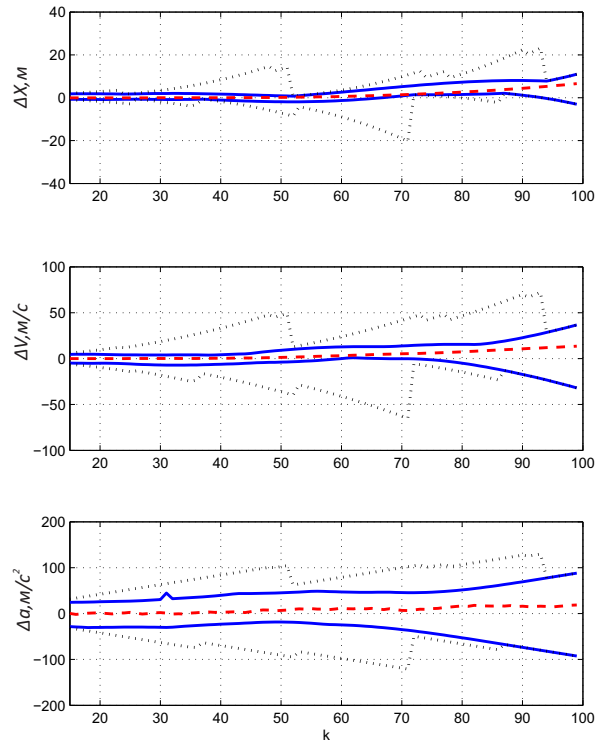


Рис. 4.16. Аппроксимация информационных множеств, полученная после всех наблюдений (пунктир - истинное состояние БИНС, сплошная линия - граница аппроксимирующего множества, точечный пунктир - граница аппроксимирующего множества при $L = 1$)

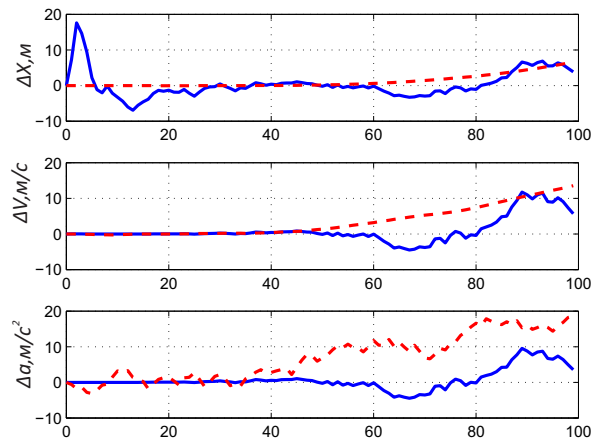


Рис. 4.17. Оценка фильтра Калмана (сплошная линия), истинное значение (пунктир)

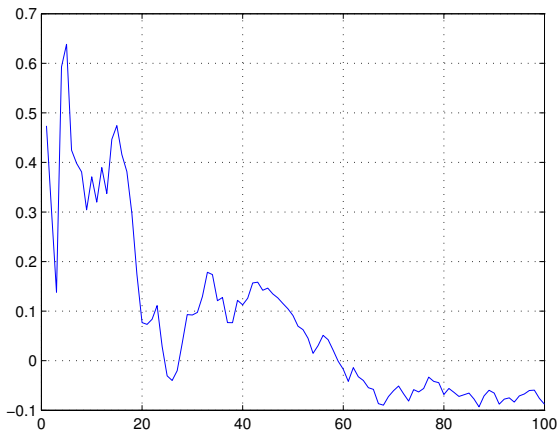


Рис. 4.18. График средних значений возмущений (реализация 1)

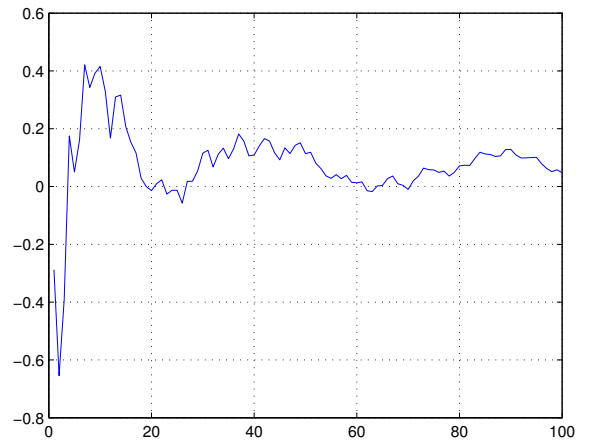


Рис. 4.20. График средних значений возмущений (реализация 2)

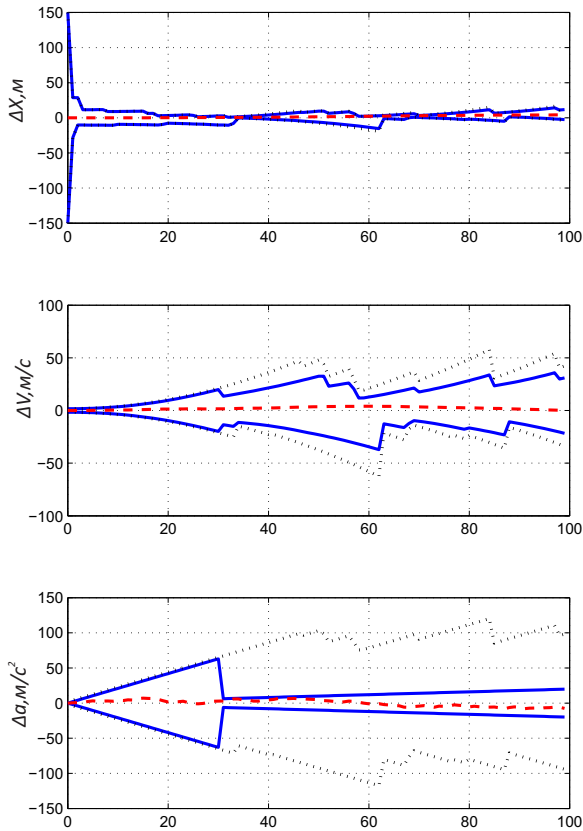


Рис. 4.19. Оценка вектора x (реализация 1). Точечный пунктир - оценка без учета дополнительной информации о возмущениях, сплошная синяя линия - с учетом информации о среднем значении возмущений

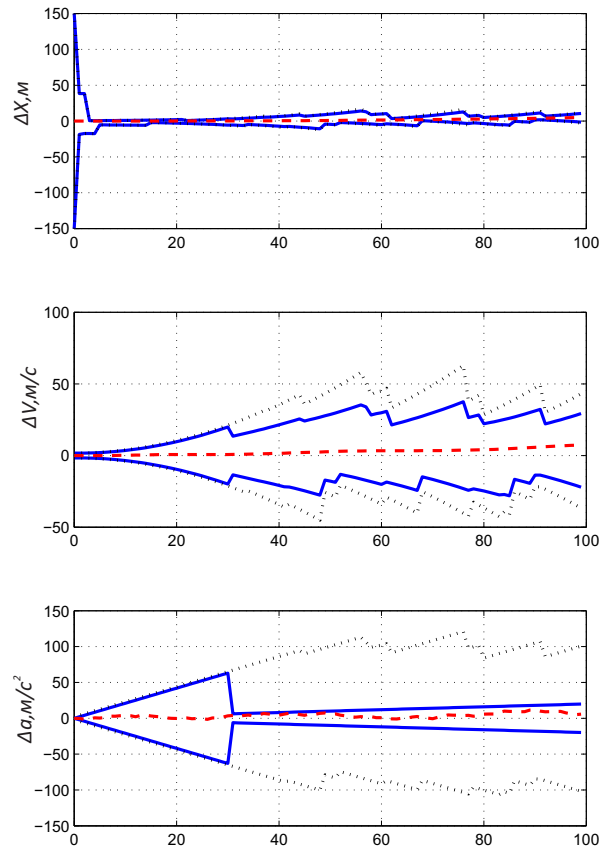


Рис. 4.21. Оценка вектора x (реализация 2). Точечный пунктир - оценка без учета дополнительной информации о возмущениях, сплошная синяя линия - с учетом информации о среднем значении возмущений

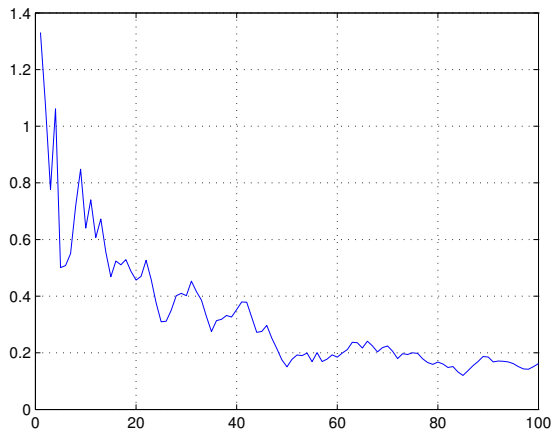


Рис. 4.22. График средних значений возмущений (реализация 3)

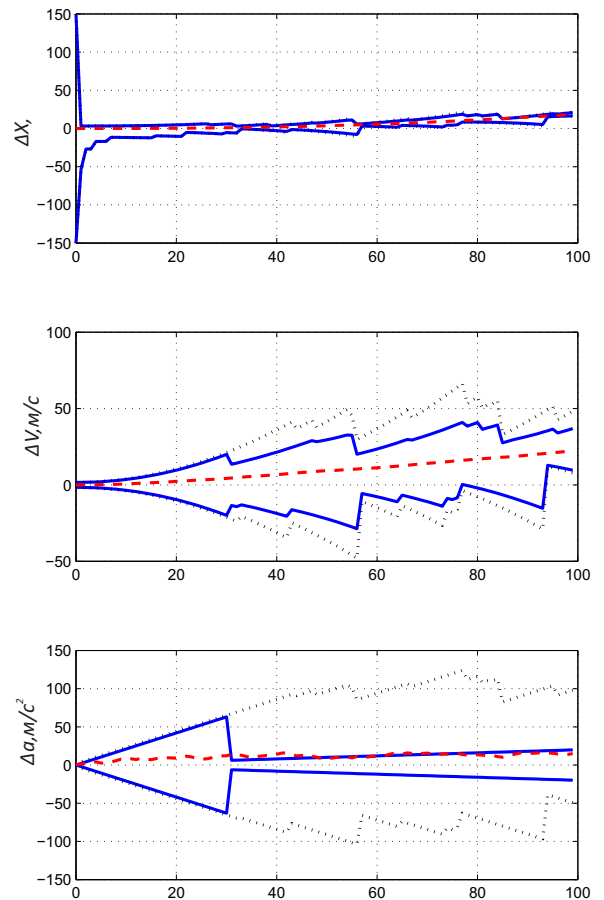


Рис. 4.23. Оценка вектора x (реализация 3). Точечный пунктир - оценка без учета дополнительной информации о возмущениях, сплошная синяя линия - с учетом информации о среднем значении возмущений

4.3 Гарантированное оценивание параметров модели «быстрых» колебаний по экспериментальным данным волоконно-оптического гироскопа ВОГК-2

В настоящее время волоконно-оптические гироскопы (ВОГ) (рис.4.24,4.25) широко применяются в системах инерциальной навигации [93]. Отличиями и преимуществами волоконно-оптических гироскопов по сравнению с механическими являются: высокая надежность благодаря отсутствию подвижных дета-

лей, устойчивость к ускорениям и вибрациям, малое время запуска, высокая чувствительность в широком диапазоне скоростей вращения, широкая полоса пропускания, высокая линейность передаточной характеристики, низкая потребляемая мощность, малые габариты и вес. Однако ВОГ чрезвычайно чувствителен к очень малым внешним и внутренним возмущениям и неустойчивостям, что приводит к дрейфам, т.е. ухудшению точности прибора. К таким возмущениям относятся температурные градиенты, акустические шумы и вибрации, флуктуации электрических и магнитных полей и др. Поэтому возникает необходимость использования алгоритмов обработки измерительной информации на выходе ВОГ, обеспечивающих высокую точность навигации.



Рис. 4.24. Волоконно-оптический гироскоп ОИУС-200 ООО НПК "Оптолинк"

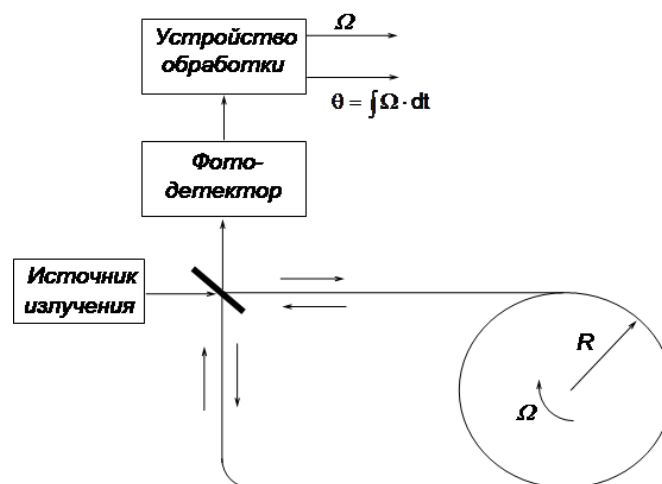


Рис. 4.25. Схема работы волоконно-оптического гироскопа

Волоконно-оптический гироскоп ВОГК-2 [83] предназначен для определения азимута A заданного направления или объекта путем последовательного измерения четырех проекций $\Omega_1, \dots, \Omega_4$ угловой скорости вращения Земли и

дальнейшей обработки результатов измерений с целью определения значения искомого азимута. Каждой конкретной проекции Ω соответствует массив числовых данных в виде дискретной выборки z длиной $N < 100$ значений (в 1 секунду приводится 4-5 измерений):

$$z_k = \Omega + \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4.14)$$

где ξ_k - ошибки измерений.

В измерениях проекции угловой скорости можно выделить медленно меняющуюся составляющую и остаток, который представляет собой «быстрые» колебания. Для повышения точности определения проекции угловой скорости, а значит и азимута, предлагается построить математическую модель «быстрых» колебаний в виде разложения по системе базисных функций. При этом построение модели проводится по некоторому набору измерений, а далее на основе полученной модели вычисляется прогноз значения.

На рис. 4.26 показаны исходные измерения на выходе ВОГК-2 и главная компонента последовательности измерений, то есть медленно меняющаяся составляющая последовательности измерений [83, 84]. На рис.4.27 показаны «быстрые» колебания в измерениях ВОГК-2, полученные после выделения из исходных данных (серия 2606082, проекция Ω_1) главной компоненты («медленных» колебаний) с помощью метода SSA с длиной окна $l = 10$ [20]. Среднеквадратическое отклонение «быстрых» колебаний в измерениях ВОГК-2 $\sigma_\eta = 96.4577$. Одним из подходов к решению задачи восстановления модели «быстрых» колебаний является декомпозиция по системе базисных процессов [83, 112, 113].

Пусть y_k – измеряемый процесс, для которого требуется построить модель в виде разложения

$$y_k = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_{i,k} + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4.15)$$

по системе процессов $x_{1,k}, \dots, x_{m,k}$, заданных в одном классе одномерных хаотических отображений

$$x_{i,k+1} = f(x_{i,k}, \lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.16)$$

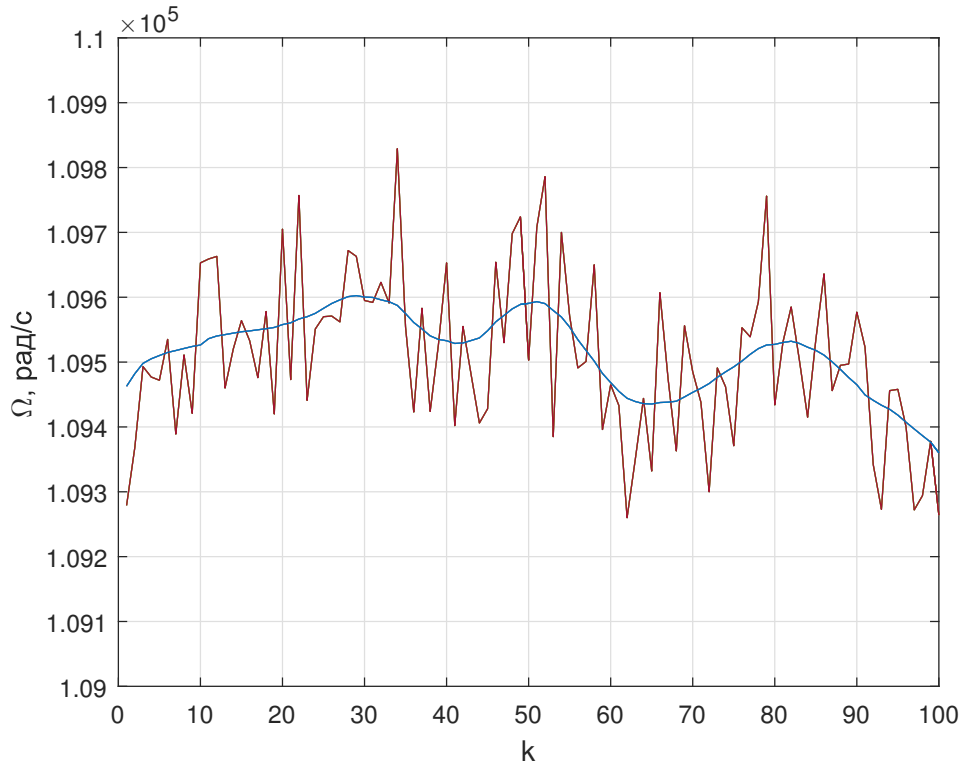


Рис. 4.26. Исходные измерения ВОГК-2 и главная компонента

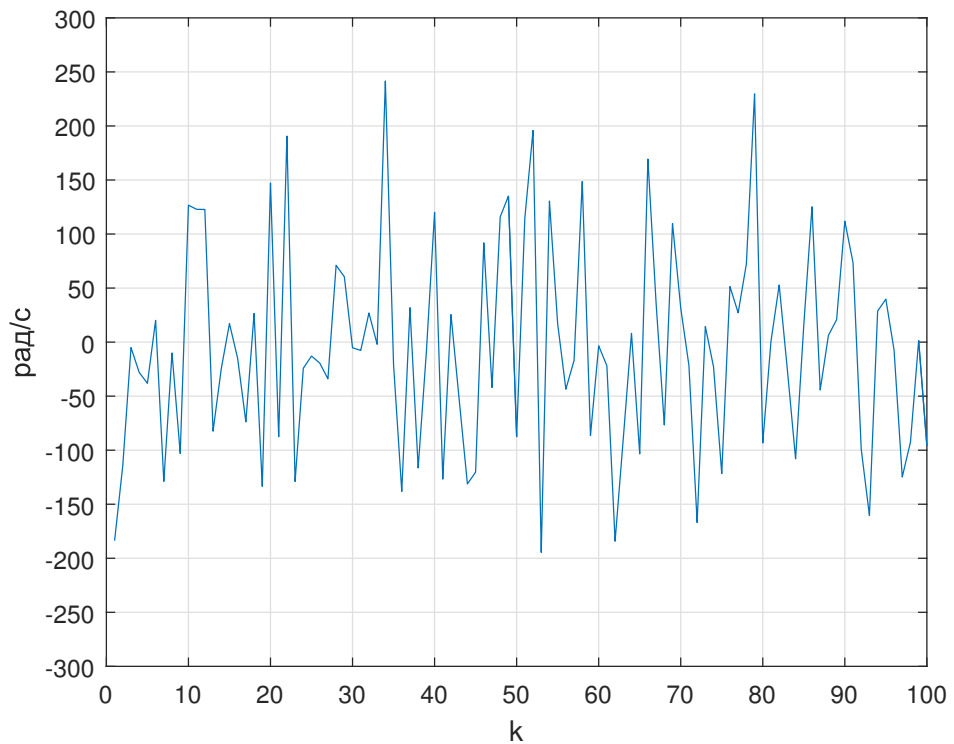


Рис. 4.27. «Быстрые» колебания в измерениях ВОГК-2

где ν_k - точность разложения.

В [60] описан алгоритм, предполагающий последовательное выделение составляющих разложения (4.15), то есть последовательное определение начальных условий $x_{i,0}$, параметров λ_i модели (4.16), коэффициентов a_i , $i = 0, 1, \dots, n$ разложения (4.15), $i = 1, 2, \dots, n$. Ошибка аппроксимации v_k представляет собой остаток после выделения n составляющих разложения из исходных измерений.

Таким образом, с целью повышения точности процедуры оценивания проекции угловой скорости предлагается восстановить нелинейную модель «быстрых» колебаний в измерениях ВОГ в виде разложения по системе процессов, заданных хаотическими отображениями (4.16). Использование моделей детерминированного хаоса в процедурах обработки измерительной информации на выходе ВОГ приводит к необходимости разработки соответствующих алгоритмов идентификации для хаотических процессов. Рассмотрим задачу оценивания коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ разложения

$$y_k = a_0 + a_1 u_k^{(1)} + \dots + a_n u_k^{(n)} + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.17)$$

измерений y_k по системе хаотических процессов $u_k^{(1)}, \dots, u_k^{(n)}$, заданных квадратичными отображениями:

$$u_{k+1}^{(i)} = \lambda_i u_k^{(i)} (1 - u_k^{(i)}), \quad (4.18)$$

где v_k - ошибка разложения, а λ_i , u_0^i , $i = 1, 2, \dots, n$ заданы. Представим вектор коэффициентов $x_k = [a_0, a_1, \dots, a_n]'$ как вектор состояния $x_k \in R^n$ в динамической модели

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1}, \\ y_k = G_k x_k + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (4.19)$$

где элементы матрицы измерений

$$G_k = \begin{bmatrix} 1 & u_k^{(1)} & \dots & u_k^{(n)} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

задают квадратичные отображения (4.18), а на начальное состояние x_0 и ошибки измерения v_k заданы следующие ограничения:

$$x_0 \in X_0 \subset R^n, \quad v_k \in V \subset R, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4.21)$$

где X_0, V заданы априорно. Таким образом, задача оценивания коэффициентов разложения (4.22) в реальном времени рассматривается как задача оценивания вектора состояния в модели (4.19).

Рассмотрим пример использования алгоритма, описанного в п.2.3 для $n = 3$.

$$y_k = a_0 + a_1 u_k^{(1)} + a_2 u_k^{(2)} + a_3 u_k^{(3)} + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4.22)$$

где параметры квадратичных отображений (4.18), задающих процессы $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$, $u_k^{(3)}$ равны $\lambda_1 = 3.99379684182887$, $u_0^{(1)} = 0.11108659032488$, $\lambda_2 = 3.98471589319736$, $u_0^{(2)} = 0.80255479861042$, $\lambda_3 = 3.90145435825753$, $u_0^{(3)} = 0.63783130829751$, v_k – ошибки измерений [83, 84]. Множество V возможных значений для ошибок v_k зададим постоянным на всем интервале измерений

$$V = [-70; 70], \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.23)$$

Начальное информационное множество X_0 зададим как гиперкуб с центром в начале координат и стороной 800:

$$-400 \leq x_0(i) \leq 400, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (4.24)$$

Аппроксимацию информационного множества будем строить в виде параллелепипеда, т.е. будем искать диапазон возможных значений коэффициентов разложения. Оценку вектора коэффициентов x_k будем проводить по результатам 5 измерений и построим прогноз процесса на несколько шагов вперед.

Результаты применения алгоритма полиэдральной аппроксимации для гарантированного оценивания коэффициентов в разложении y_k приведены на рис.4.28. После обработки пяти измерений диапазон возможных значений коэффициентов a_1 и a_2 оказался почти в 2 раза уже по сравнению с начальным, у коэффициента a_3 произошло уточнение верхней границы, уточнения значения a_0 практически не произошло после пяти шагов. В качестве точечной оценки коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 возьмем центр соответствующих диапазонов возможных значений, полученных на $k = 5$:

$$a_0^* = 22.360195, \quad a_1^* = 175.231598, \quad a_2^* = -163.94938, \quad a_3^* = -78.569631.$$

Полученную оценку коэффициентов a_0^* , a_1^* , a_2^* , a_3^* применим для аппроксимации процесса (4.22). Аппроксимация процесса $a_0^* + a_1^*u_k^{(1)} + a_2^*u_k^{(2)} + a_3^*u_k^{(3)}$ для шагов $k = 1, \dots, 5$ и прогноз для шагов $k = 6, \dots, 15$ приведены на рис.4.29, 4.30. Ошибка прогноза процесса выходит за границу множества V на шаге $k = 10$ и $k = 12$ (рис.4.30). При этом отметим, что ошибка прогноза попадает в интервал $[-70; 100]$ на интервале $k = 6, \dots, 15$, что не намного больше априорно заданного множества V .

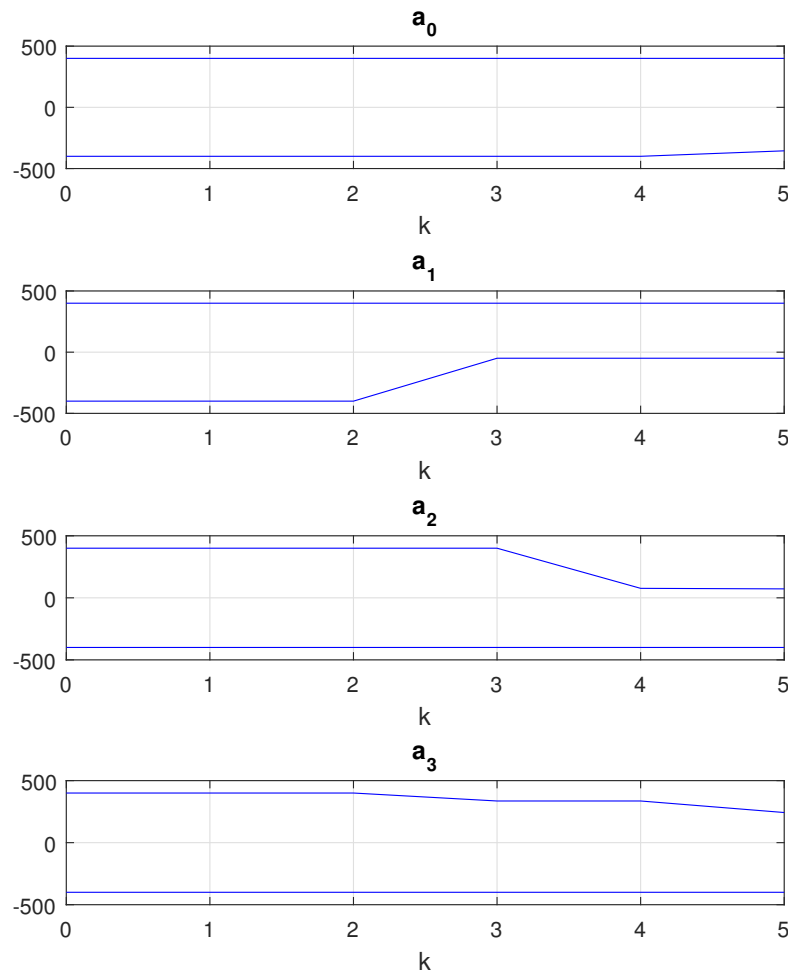


Рис. 4.28. Результаты оценки коэффициентов a_0 , a_1 , a_2 , a_3

Поскольку ошибка прогноза выпадает из априорно заданного множества V на шаге $k = 10$, проведём оценку коэффициентов по результатам пяти предшествующих измерений y_k , $k = 5, \dots, 9$. В качестве ограничения на коэффициенты x_5 возьмем гарантированную оценку, полученную после обработки первых пяти измерений (рис.4.28). После обработки пяти измерений гарантированная

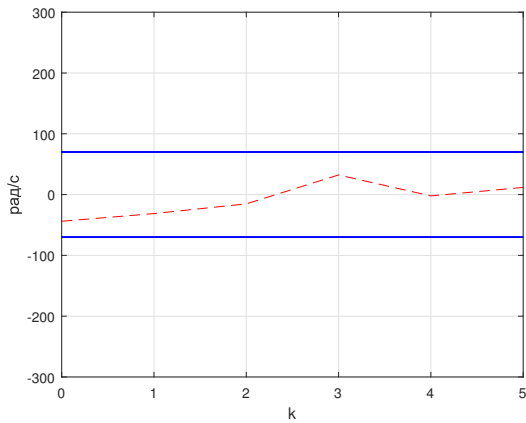


Рис. 4.29. Ошибка аппроксимации

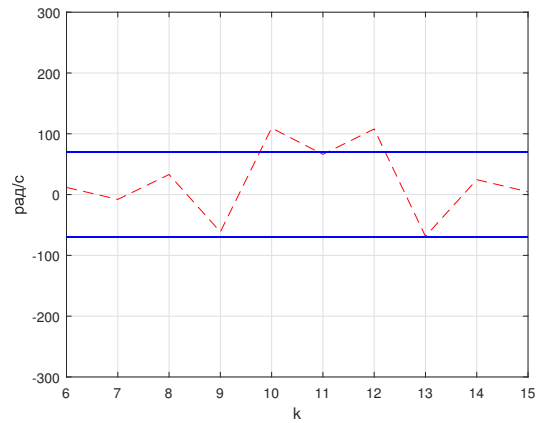


Рис. 4.30. Ошибка прогноза

оценка коэффициентов a_0 и a_2 оказалась почти в 2 раза точнее по сравнению с начальным, уточнения коэффициентов a_1 и a_3 не произошло (рис.4.32). Точечная оценка коэффициентов, полученная по результатам гарантированной оценки на шаге $k = 10$: $a_0^* = 133.878042$, $a_1^* = 175.231598$, $a_2^* = -247.719646$, $a_3^* = -78.569631$. Полученные оценки коэффициентов использовались для построения прогноза на шагах $k = 11, \dots, 20$ (рис.4.33). Ошибка прогноза превышает априорно заданные границы множества V на шагах $k = 13, 17, 19$, при этом ошибка прогноза попадает в интервал $[-100; 70]$ на интервале $k = 11, \dots, 20$.

Таким образом, показано применение алгоритмов гарантированного оценивания для идентификации коэффициентов разложения «быстрых» колебаний в измерениях ВОГК-2 по системе хаотических процессов с целью повышения точности процедуры оценивания проекции угловой скорости. При этом построение модели проводится по некоторому набору измерений, а далее на основе полученной модели вычисляется прогноз значения. Диапазон значений колебаний в измерениях ВОГК-2 (рис.4.27) составлял $[-200; 250]$, а диапазон ошибок прогноза значений колебаний в результате применения гарантированного подхода для оценки коэффициентов составляет $[-100; 100]$, то есть неопределённость удалось уменьшить в 2.25 раз, что может быть использовано для повышения точности определения проекции угловой скорости, а значит и азимута.

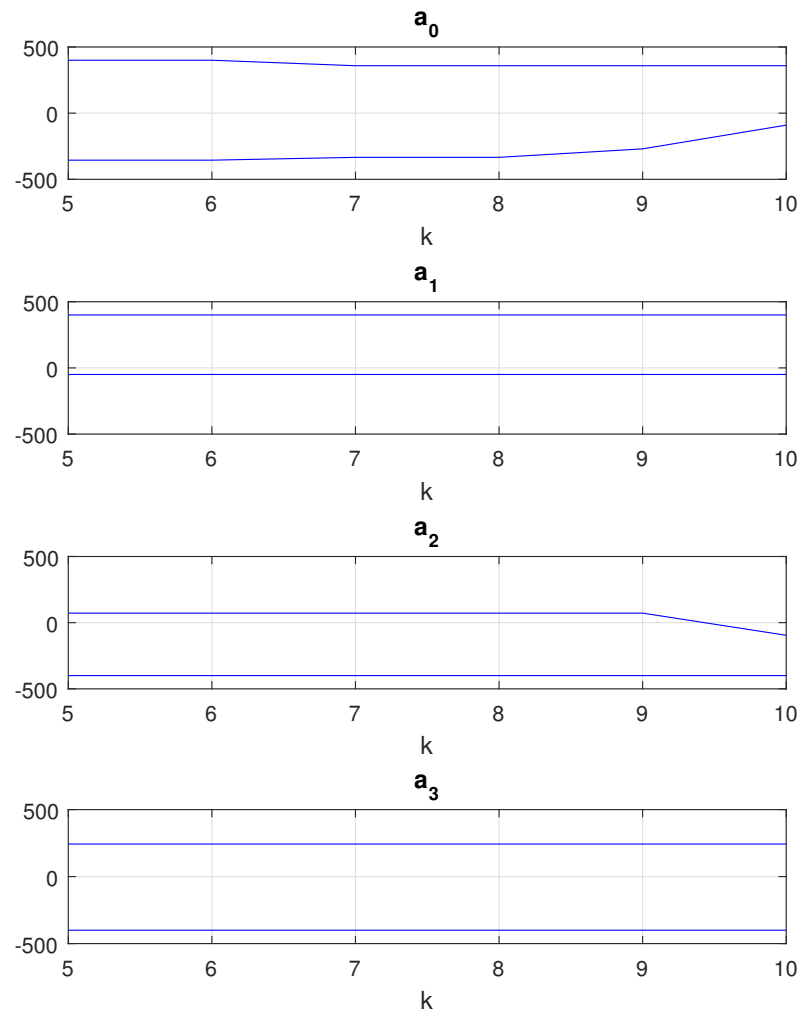
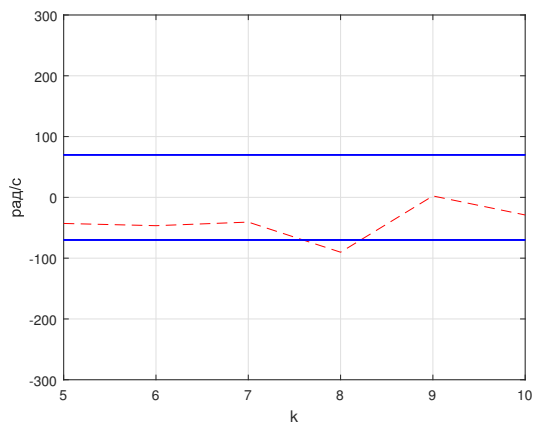
Рис. 4.31. Результаты оценки коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 

Рис. 4.32. Ошибка аппроксимации

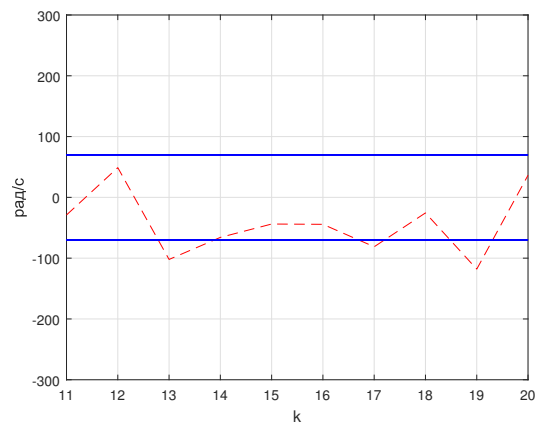


Рис. 4.33. Ошибка прогноза

4.4 Проведение натурального эксперимента и гарантированное оценивание состояния автомобильной дроссельной заслонки

Рассмотрим применение алгоритма, описанного в п.3.4 для оценивания положения дроссельной заслонки и электрического тока, потребляемого автомобильной дроссельной заслонкой [142], которая широко применяется для регулирования мощности двигателя внутреннего сгорания (рис.4.34). Для проведения экспериментов был использован стенд, который состоит из следующих устройств: панель управления Quanser Q4 Real-Time Control Board, усилитель мощности Quanser UPM180-25-B-PWM и дроссельная заслонка с электроприводом производства Continental Siemens VDO, Model A2C59511705, P.N. 06F133062J [162, 170]. Подаваемое на вход дроссельной заслонки напряжение заставляет заслонку поворачиваться, угол поворота заслонки измеряется соответствующим датчиком. На вход заслонки подаётся напряжение, а на выходе получаем угол поворота. Датчик угла поворота производит измерения с максимальной ошибкой $9/256$ вольт (ошибка квантования в 8 бит соответствует 9 вольтам). Измерения потребляемого электрического тока не производятся, однако достижение предельной величины тока может привести к повреждению электронной схемы. Описанный алгоритм гарантированного оценивания позволяет определить возможные значения электрического тока с учётом ошибок квантования.

Нелинейная непрерывная модель движения дроссельной заслонки описана системой дифференциальных уравнений вида [142]:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_t = a_{12}\omega_t; \\ \dot{\omega}_t = a_{21}\omega_t + a_{22}\theta_t + a_{23}y_t + c + f(\theta_t, \omega_t); \\ \dot{y}_t = a_{32}\omega_t + a_{33}y_t + bu_t, \end{cases} \quad (4.25)$$

где $\theta_t \in R$ - угол поворота, $\omega_t \in R$ - угловая скорость, $y_t \in R$ - электрический ток; f - непрерывная нелинейная функция, a_{12}, \dots, a_{33}, c - известные постоянные величины.



Рис. 4.34. Дроссельная заслонка

Введём вектор $x_t \equiv [\theta_t \ \omega_t \ y_t]' \in \mathbb{R}^3$, приведём модель системы (4.25) линейному дискретному виду [170]

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(m)} & 0 \\ a_{21}^{(m)} & a_{22}^{(m)} & a_{23}^{(m)} \\ 0 & a_{32}^{(m)} & a_{33}^{(m)} \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b^{(m)} \end{bmatrix} u_k + w_k + \begin{bmatrix} 0 \\ c^{(m)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

$$y_k = [1 \ 0 \ 0]x_k + v_k, \quad x_{1,k} \in \Gamma_m, \quad m = 1, \dots, 3,$$

где величины $a_{12}^{(m)}, \dots, a_{33}^{(m)}, b^{(m)}, c^{(m)}$, $m = 1, \dots, 3$, описаны в таблице 4.1; $x_k \equiv [x_{1,k} \ x_{2,k} \ x_{3,k}]' \in \mathbb{R}^3$, $x_{1,k}$ - угол поворота (с коэффициентом масштабирования 0.1), $x_{2,k}$ - угловая скорость, $x_{3,k}$ - электрический ток, $w_k \in \mathbb{R}^3$ - возмущение, действующие на систему, включая погрешности идентификации модели, v_k - ошибки датчика угла поворота.

Описанный подвижный объект может находиться в трёх состояниях в зависимости от значения угла поворота. Γ_m , $m = 1, 2, 3$ обозначают множества возможных значений угла поворота, то есть $x_{1,k}$ может принимать значение из одного из множеств $\Gamma_1 = [0, 0.8]$, $\Gamma_2 = (0.8, 1.6]$, $\Gamma_3 = (1.6, 9]$ в зависимости от того, в каком m -м состоянии находится система на k -м шаге. Но значение угла поворота из-за наличия возмущений и помех измерений в каждый момент вре-

мени точно не известно, поэтому какая из подсистем является активной в k -й момент времени, неизвестно. Однако по результатам гарантированного оценивания угла поворота на k -м шаге можно определить, в какие из множеств Γ_m , $m = 1, 2, 3$ попадает гарантированная оценка угла поворота и для оценки состояния заслонки на следующем шаге вычислять оценку не для всех подсистем.

Для идентификации параметров из таблицы 4.1, был проведён ряд экспериментов (Приложение Б). Поскольку максимально возможная ошибка датчика угла поворота равна $9/256$ вольт, зададим множество ошибок измерения V следующим образом:

$$v_k \in V : H_v v_k \leq b_v,$$

$$H_v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_v = \begin{bmatrix} 9/256 \\ 9/256 \end{bmatrix}.$$

Множество возмущений W было сформировано следующим образом: рассмотрено $4 \cdot 10^4$ точек, для каждой из которых вычислена ошибка идентификации модели $e_k = x_k - \tilde{x}_k$, где x_k является решением уравнения (4.26) при $w_k \equiv 0$; \tilde{x}_k - измеренное значение. Множество ошибок e_k аппроксимировано сверху парал-

Таблица 4.1. Параметры модели (4.26)

Параметр	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$a_{12}^{(m)}$	-3.4483	-2.8017	-0.12381
$a_{21}^{(m)}$	0.00012	0.002	0.0938
$a_{22}^{(m)}$	0.9358	-0.1677	-0.6864
$a_{23}^{(m)}$	-0.0006	-0.0221	-1.9807
$a_{32}^{(m)}$	-0.3913	-1.193	-0.0128
$a_{33}^{(m)}$	0.94486	0.9494	0.9394
$b^{(m)}$	0.07179	0.04182	0.02607
$c^{(m)}$	0.0001	0.0037	0.1728

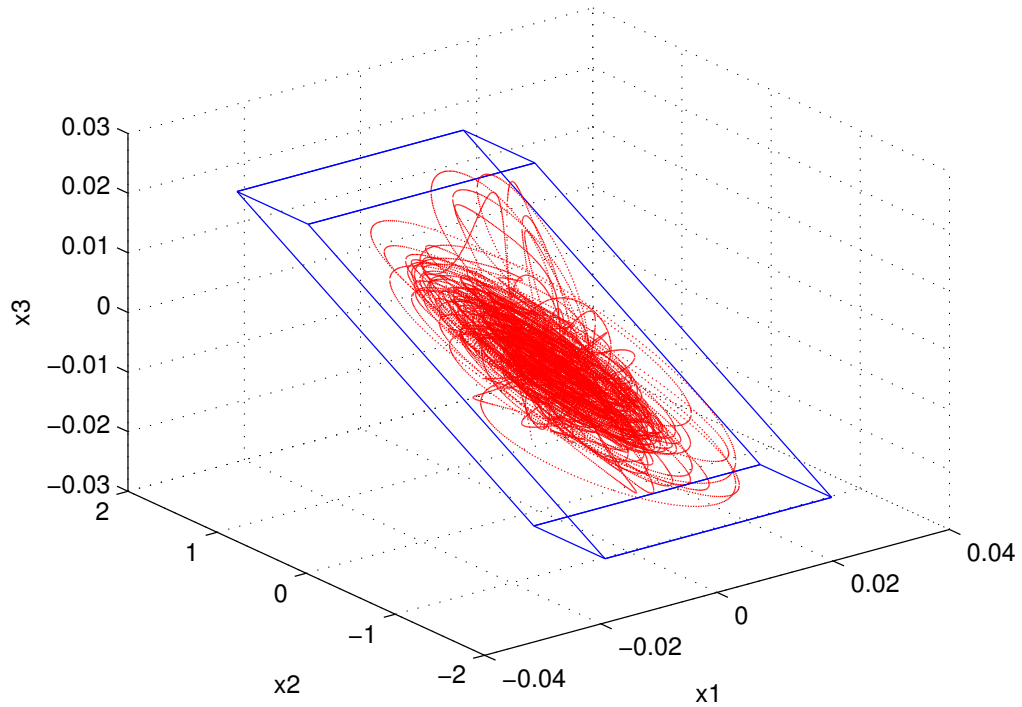


Рис. 4.35. Множество возмущений W в (4.26) (синим цветом показана граница множества W , красным цветом - значение ошибки идентификации e_k).

лелепипедом, который является множеством W (рис.4.35):

$$w_k \in W : H_w w_k \leq b_w,$$

$$H_w = \begin{bmatrix} -0.0408 & 0 & -0.02 \\ 0 & 0.001989 & -0.0663 \\ 0.0408 & 0 & 0.02 \\ 0 & -0.001989 & 0.0663 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b_w = \begin{bmatrix} 0.0008456 \\ 0.0010608 \\ 0.0007456 \\ 0.0005704 \\ 0.024 \\ 0.028 \end{bmatrix}.$$

Применим алгоритм, описанный в п.3.4 для оценки состояния системы для заданного управления u_k и имеющихся измерениях y_k . В начальный момент времени заслонка находится в покое, то есть начальное состояние объекта $x_0 = [0 \ 0 \ 0]'$. Аппроксимация информационного множества проводилась в виде параллелепипедов с матрицей $H_{x_{k+1}} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} \\ -I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$ для всех $k > 0$. Примеры информационных множеств представлены на рис. 4.36. Результаты оценивания

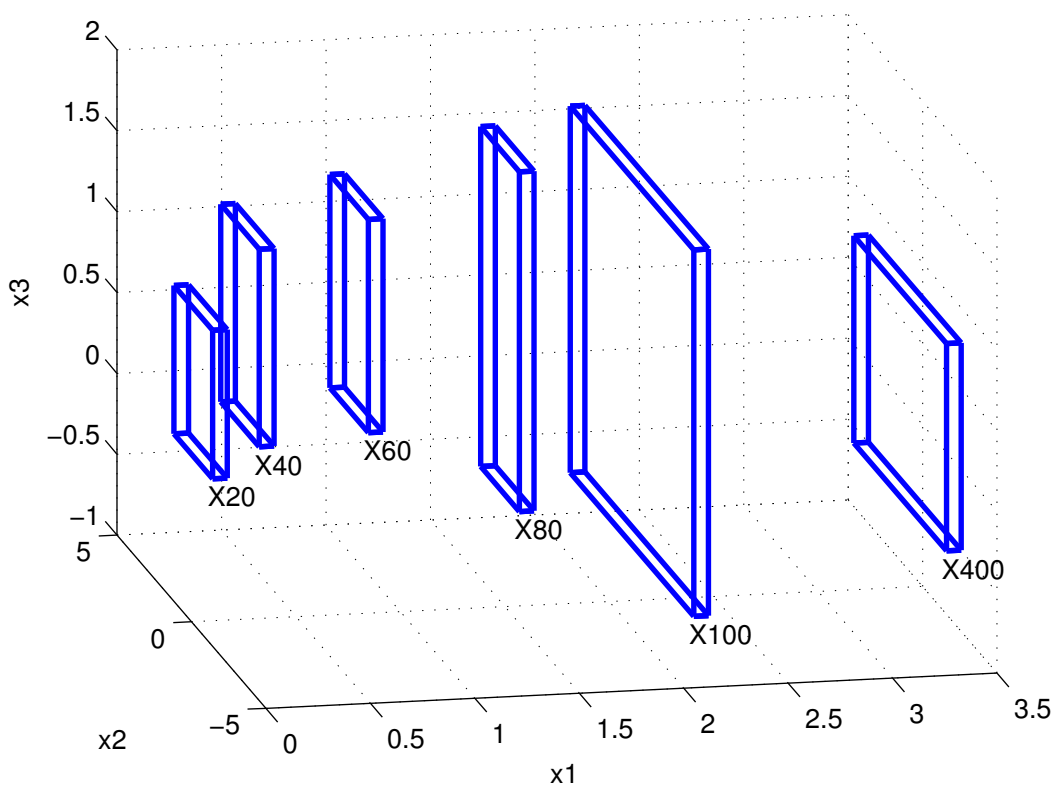


Рис. 4.36. Примеры гарантированных оценок X_k для $k = 20, 40, \dots, 100, 400$, где $x_{1,k}$, $x_{2,k}$, $x_{3,k}$ - угол поворота (рад), угловая скорость (рад/с) и электрический ток (А) соответственно.

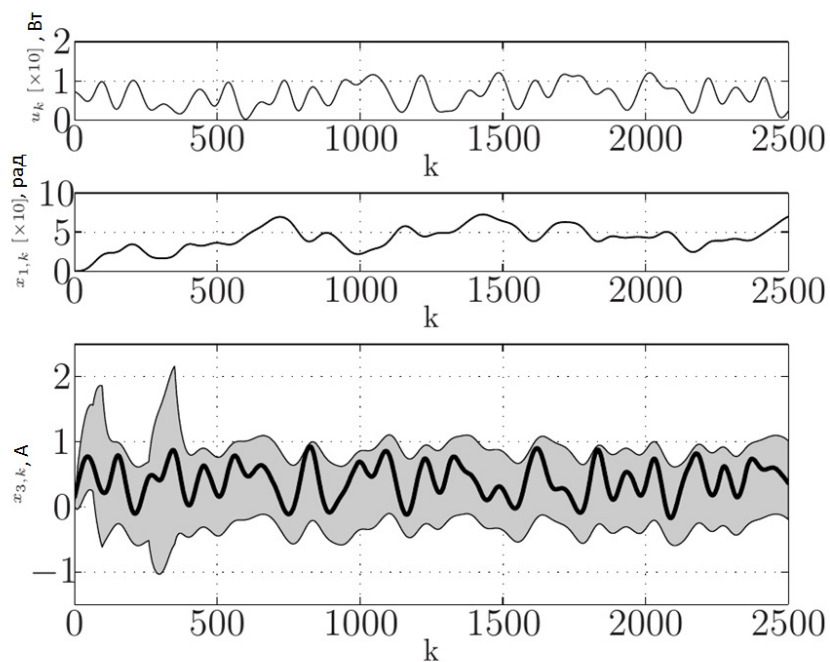


Рис. 4.37. Результаты эксперимента.

представлены на рис. 4.37. Эксперименты показали, что истинное значение, как и ожидалось, на всех шагах оказалось внутри множественной оценки. Отметим, что оценка угла поворота оказалась достаточно точной. Время оценки состояния на каждом шаге составило 52 миллисекунды.

4.5 Применение гарантированного подхода в задаче динамических измерений температуры

Динамические измерения получают всё большее распространение в технике и научных исследованиях [22]. Эти измерения связаны с изучением закономерностей протекания физических процессов в исследуемых объектах. Поэтому роль динамических измерений особенно велика в областях науки, связанных с исследованием структуры материи, анализом и синтезом новых веществ и материалов, изучением объектов в экстремальных условиях, а также в отраслях техники и производства, для которых характерно создание новых технологических процессов и испытание новых машин и приборов [22, 117].

В качестве примера динамических систем измерения температур можно рассмотреть систему контроля температуры в турбинах двигателей реактивных самолетов. Защитный кожух обладает высокой инерционностью, поэтому его невозможно применять к термопарам с высоким быстродействием, а без защитного кожуха термопары имеют короткий срок службы, что приводит к частой их смене, повышению экономических затрат и выходу из строя двигателя. При использовании термопар с защитным кожухом нельзя отслеживать резкие перепады температур, поэтому может произойти перегрев турбин. Кроме того, при измерении температуры расплавов термопара может выйти из строя до установившегося режима, поэтому возникает задача восстановить измеряемый сигнал по переходному процессу. Это показывает на актуальность динамического измерения температуры [115, 117].

В настоящее время для восстановления динамически искаженных сигналов применяются аналоговые и цифровые фильтры, методы, основанные на решении интегральных уравнений первого рода и на использовании прямого и обратного преобразования Фурье. Существует немного методов, основанных на достижениях теории автоматического управления. Богатство и разнообразие

таких методов, успешное применение их в различных областях техники служат основой их эффективного использования для решения задач динамических измерений. Описание динамических свойств средств измерений может быть выполнено аналогичными по форме линейными дифференциальными уравнениями. Погрешность измерений может быть уменьшена посредством динамического фильтра на выходе первичного измерительного преобразователя. Данный фильтр можно рассматривать как некоторую динамическую модель датчика. Поэтому применение методов автоматического управления к динамическим измерительным системам становится все более распространенным [117].

В работах [11, 117] рассмотрено введение в измерительные системы скользящего режима, обеспечивающего близость выходных и входных сигналов датчика. Однако, реальные измерительные системы не позволяют получить большую часть координат состояния датчика. Кроме того, скользящий режим сопровождается высокочастотными и внутренними шумами, которые требуют выбора фильтра и настройки его параметров.

В работах [116, 118] описан подход к восстановлению динамически искаженных сигналов, когда в качестве модели измерительного устройства рассматривается система леонтьевского типа:

$$\begin{cases} L\dot{x} = Mx + Du; \\ y = Cx, \end{cases} \quad (4.27)$$

где x – вектор-функция состояния, \dot{x} – вектор-функция скорости изменения состояния; y – вектор-функция наблюдений; L , M и D – квадратные матрицы, моделирующие конструкцию измерительного устройства; матрица C характеризует связь между состоянием измерительного устройства и наблюдением. При таком подходе применяют методы теории оптимального управления для достижения близости значений виртуальных наблюдений, которые получают при работе с математической моделью измерительного устройства, и наблюдений реального датчика. Входящий сигнал u модели (4.27) является решением математической задачи оптимального управления, а получаемое при этом оптимальное динамическое измерение наиболее точно отражает входящий сигнал датчика. Однако, в модели (4.27) не учитываются возможные возмущения, действующие на измерительное устройство, и ошибки измерений.

Рассмотрим применения гарантированного подхода для оценки температуры при измерении температуры термопарами для уменьшения времени получения реального значения температуры. На основе модели переходного процесса термопары и по результатам текущих измерений будем получать гарантированную оценку температуры, то есть множество возможных значений температуры. Для этого применим алгоритм полиэдральной аппроксимации информационного множества, описанный в п.2.3. На каждом шаге будем составлять расширенную систему линейных уравнений и неравенств из уравнений переходного процесса термопары, уравнений измерения, неравенств, описывающих множество ошибок измерений.

Для проведения экспериментов была использована установка, состоящая из термопары, калибратора температуры, источника тока, измерителя, реле (рис.4.38). Было проведено три термоудара от 0 до 400 градусов (рис.4.39), при которых термопара перемещается между калибратором температуры, который имитирует горячую среду и нулевым термостатом, который имитирует холодную среду (Приложение В). Время, через которое термопара показывает реальную температуру, составляет 250с. Требуется на основе текущих измерений и модели переходного процесса получить реальную температуру как можно раньше.

По одной серии экспериментальных данных была проведена идентификация передаточной функции термопары:

$$W(p) = \frac{p \cdot 0.0022674 + 0.004317}{p^2 + p \cdot 0.163255 + 0.004385}. \quad (4.28)$$

От передаточной функции перейдем к уравнению переходного процесса в пространстве состояний в непрерывной форме:

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u; \\ y = \tilde{G}x + v, \end{cases} \quad (4.29)$$

где x - вектор состояния, u - входной сигнал, y - измерения, v - помехи измерений и ошибки идентификации передаточной функции, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -0.1633 & -0.0044 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}', \tilde{G} = \begin{pmatrix} 0.0227 & 0.0043 \end{pmatrix}.$$

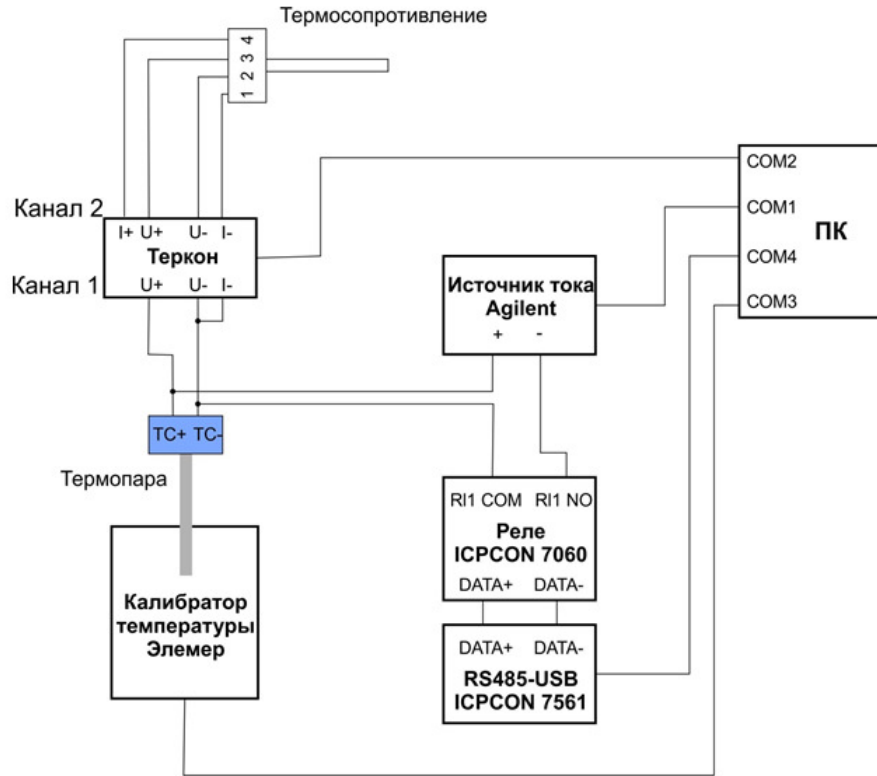


Рис. 4.38. Схема подключения приборов

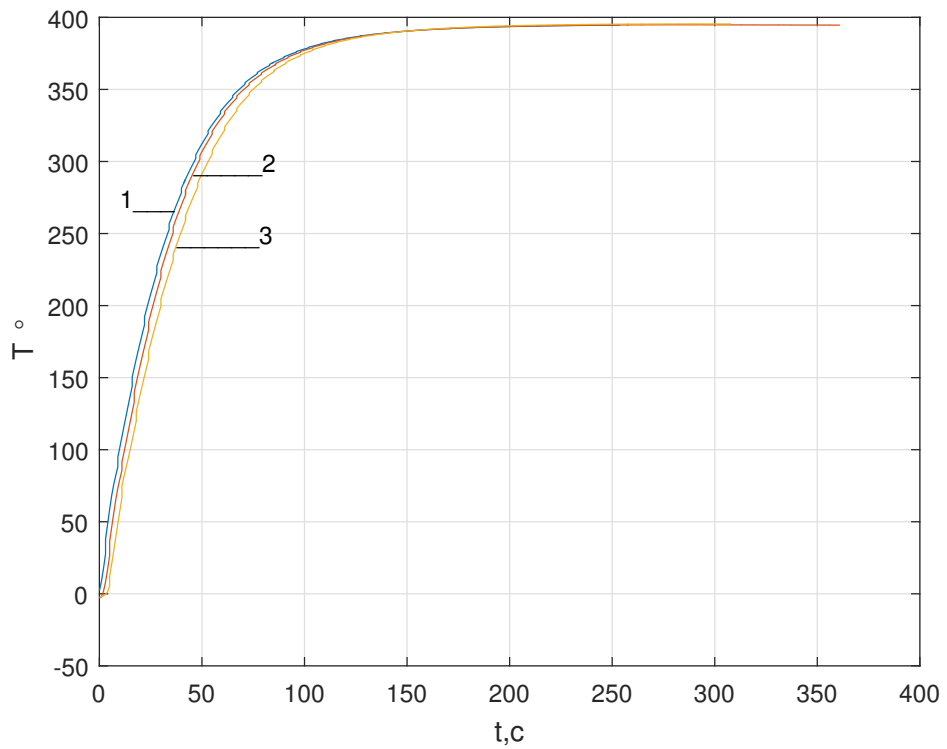


Рис. 4.39. Экспериментальные данные

Для применения алгоритма гарантированного оценивания входного сигнала перейдем к модели в дискретной форме с шагом дискретизации 1с.:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k; \\ y_{k+1} = Gx_{k+1} + v_{k+1}, \end{cases} \quad (4.30)$$

где $A = \begin{pmatrix} 0.8474 & -0.004 \\ 0.9220 & 0.9979 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0.9220 \\ 0.4737 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0.0227 & 0.0043 \end{pmatrix}$.

При этом отметим, что температура постоянная, т.е.

$$u_{k+1} = u_k = u. \quad (4.31)$$

На рис.4.40 приведены экспериментальные измерения y_k и теоретические $y_{theor,k}$, полученные из системы (4.30) при условии, что ошибка измерений $v_k = 0$ и температура нагрева $u = 400^\circ$. Для задания множества V_k , т.ч. $v_k \in V_k$, была использована разница между экспериментальными и теоретическими данными. В каждый k -й момент времени величина ошибки идентификации равна $v_k = y_k - y_{theor,k}$. На основе полученных ошибок v_k по трём экспериментам было задано множество V_k (рис. 4.41):

$$\begin{cases} -41 \leq v_k \leq 12, & k = 1, \dots, 55, \\ -20 \leq v_k \leq 3, & k = 56, \dots, 100, \\ -5 \leq v_k \leq 5, & k \geq 101. \end{cases} \quad (4.32)$$

Для оценки температуры u применим алгоритм полиэдральной аппроксимации информационного множества, описанный в п.2.3. Расширенную систему линейных уравнений и неравенств на k -м шаге составим на основе системы (4.30), уравнения (4.31), неравенств (4.32), учитывая информацию с 0 шага:

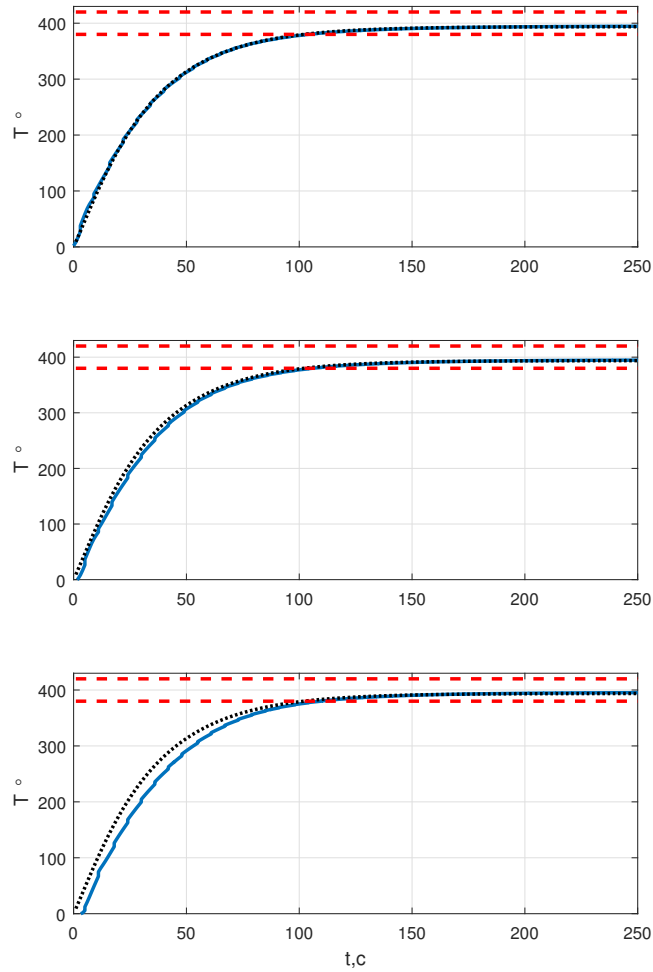


Рис. 4.40. Экспериментальные данные (сплошная линия) и реакция системы, описанной передаточной функцией, на термоудар (точечный пунктир). Горизонтальный пунктир - граница допустимой погрешности 5%

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_1 = Ax_0 + Bu; \\
 y_1 = Gx_1 + v_1, \\
 \dots\dots\dots \\
 x_k = Ax_{k-1} + Bu; \\
 y_k = Gx_k + v_k, \\
 -41 \leq v_k \leq 12, \quad k = 1, \dots, 55, \\
 -20 \leq v_k \leq 3, \quad k = 56, \dots, 100, \\
 -5 \leq v_k \leq 5, \quad k \geq 101, \\
 A_{x_0}x_0 \leq b_{x_0}, \\
 300 \leq u \leq 500;
 \end{array} \right. \quad (4.33)$$

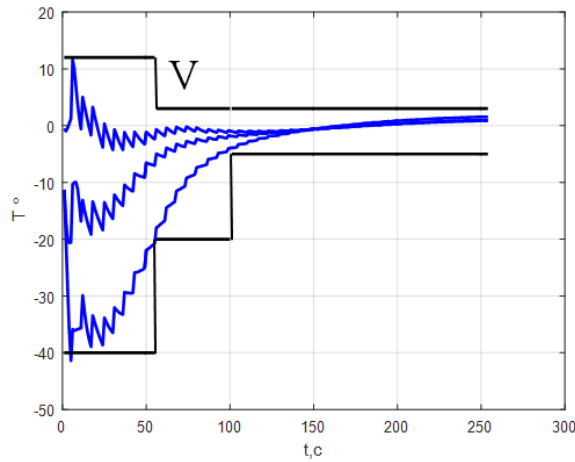


Рис. 4.41. Разница между экспериментальными данными и реакцией передаточной функции на термоудар (синяя кривая линия), граница множества V (горизонтальная сплошная линия)

где $A_{x_0} = [I_{2 \times 2}; -I_{2 \times 2}]$, $b_{x_0} = [10; 10; 10; 10]'$ задают априорно заданное ограничение на x_0 , исходное ограничение на входной сигнал u также должно быть задано.

В данной системе будем оценивать неизвестную величину u . Будем искать диапазон возможных значений $u = [u_{min} \quad u_{max}]$. Для поиска верхней границы u_{max} и нижней границы u_{min} будем решать следующие задачи оптимизации при ограничении (4.33):

$$\begin{aligned} u_{max} &= \operatorname{argmax}(u), \\ u_{min} &= \operatorname{argmin}(u). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Будем сравнивать время попадания оценки температуры в диапазон допустимой погрешности, равной 5% от измеряемой температуры 400° , то есть в диапазон от 380° до 420° . По исходным экспериментальным данным время измерения температуры 400° с помощью термопары – 250с., время попадания измерения температуры в диапазон допустимой погрешности – 100с. (рис.4.39). Гарантированная оценка входного сигнала u попала в допустимый диапазон в момент времени, равный 50с. для экспериментов 1 и 2, и в момент времени, равный 60с. – для эксперимента 3, что позволяет получить значение температуры в 2 раза быстрее в экспериментах 1,2 и в 1.7 раз быстрее в эксперименте 3, чем измерение температуры с помощью термопары (рис.4.42).

Отметим, что полученная оценка температуры является гарантированной, то есть получено множество возможных значений температуры для каждого

момента времени. Поэтому важно отметить, что в первом и третьем экспериментах нижняя и верхняя границы оценки температуры соответственно попали в область допустимой погрешности через 6 секунд, что особенно важно для определения перегрева. Получаем, что в третьем эксперименте через 6с получаем информацию, что перегрева нет, а в первом наоборот, может быть перегрев.

Сравним полученные гарантированные оценки с оценками фильтра Калмана. Рассмотрим систему (4.30) относительно расширенного вектора состояния $z_k = [x_k \quad u]'$, в котором третьей координатой является температура u :

$$\begin{cases} z_{k+1} = A_z z_k, & k = 0, 1, \dots, N, \\ y_{k+1} = G_z z_{k+1} + v_{k+1}, \end{cases} \quad (4.35)$$

где

$$A_z = \left(\begin{array}{cc|c} A & B & \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad G_z = \begin{pmatrix} G & 0 \end{pmatrix}.$$

Ковариацию ошибок измерений R_k зададим в соответствии с множеством V_k так, чтобы доверительный интервал случайной переменной v_k на уровне 3σ соответствовал множеству V_k :

$$R_k = \begin{cases} 177.78, & k = 1, \dots, 55, \\ 144.44, & k = 56, \dots, 100, \\ 2.77, & k \geq 101. \end{cases}$$

Ковариационную матрицу ошибок P_0 зададим таким образом, чтобы первые две координаты вектора z_0 соответствовали на уровне 3σ множеству $X_0 = A_{x_0} x_0 \leq b_{x_0}$, а третья - на уровне 3σ исходному ограничению на u : $300 \leq u \leq 500$:

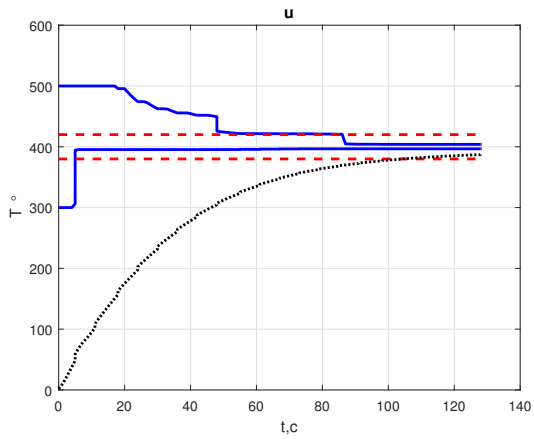
$$P_0 = \text{diag} \left(\begin{array}{ccc} 11.1 & 11.1 & 1111.11 \end{array} \right).$$

Рассмотрим время попадания точечной оценки фильтра Калмана и доверительной области, построенной на основе оценок фильтра Калмана и ковариационной матрицы ошибок оценивания. Для эксперимента 2 и 3 оценка фильтра Калмана попала в допустимую область позже, чем верхняя и нижняя граница

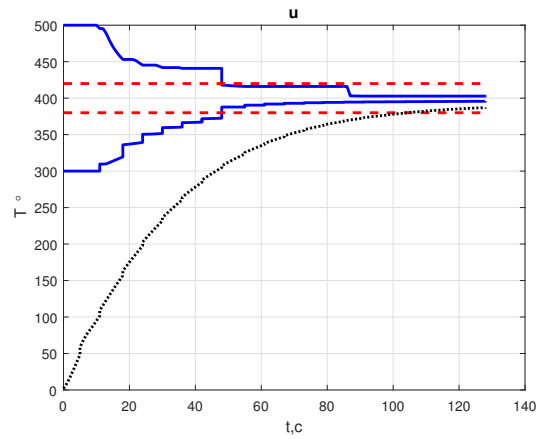
гарантированной оценки: для эксперимента 2 на 10с. позже, а для эксперимента 3 - на 20с.(рис.4.43). Для эксперимента 1 оценка фильтра Калмана попала в допустимую область в момент равный 30с., а нижняя граница гарантированной оценки - через 5с после начала процесса, а верхняя - через 50с. Для эксперимента 1 доверительная область полностью попала в допустимую область одновременно с гарантированной оценкой, а для экспериментов 2 и 3 - на 10с и 20с позже.

Рассмотрим оценку температуры при случайных ошибках измерения v_k из множества V (рис.4.44). Измерения температуры при таких ошибках измерения приведены на рис.4.45. Для данной реализации процесса проведем оценивание температуры с помощью гарантированного подхода и с помощью фильтра Калмана. Гарантированная оценка полностью попала в область допустимой погрешности через 40с после начала процесса, а доверительная область фильтра Калмана - через 72с.

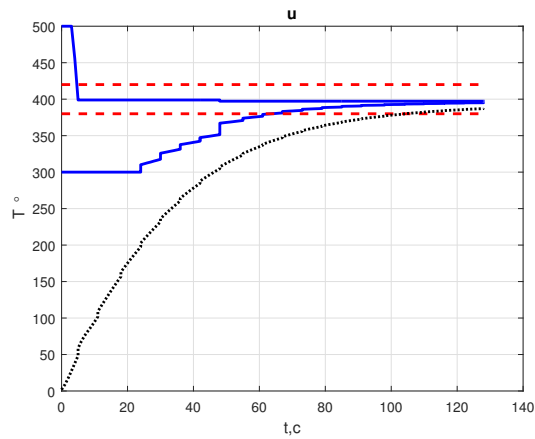
Таким образом, показано применение гарантированного подхода в задаче динамических измерений температуры. В проведенных экспериментах с помощью разработанного алгоритма полиэдральной аппроксимации информационных множеств время получения реального значения температуры удалось уменьшить в 1.7-2 раза. Кроме того, построение гарантированных оценок температуры особенно актуально при определении перегрева. В одном эксперименте получили, что через 6 секунд после начала процесса получили информацию, что перегрева нет.



а) Эксперимент 1

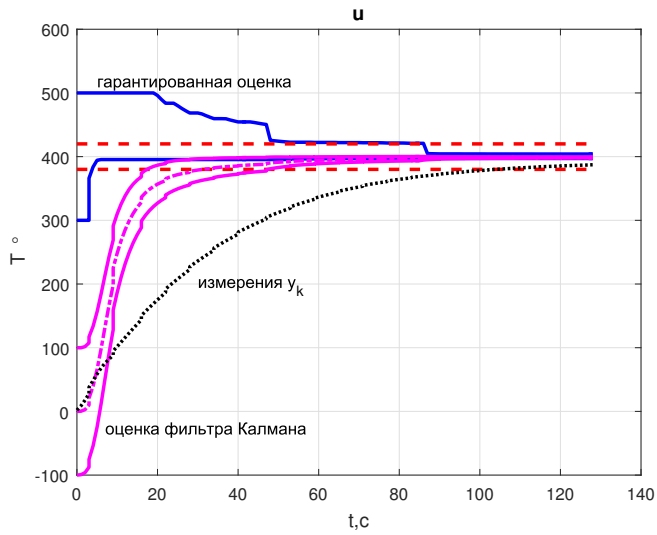


б) Эксперимент 2

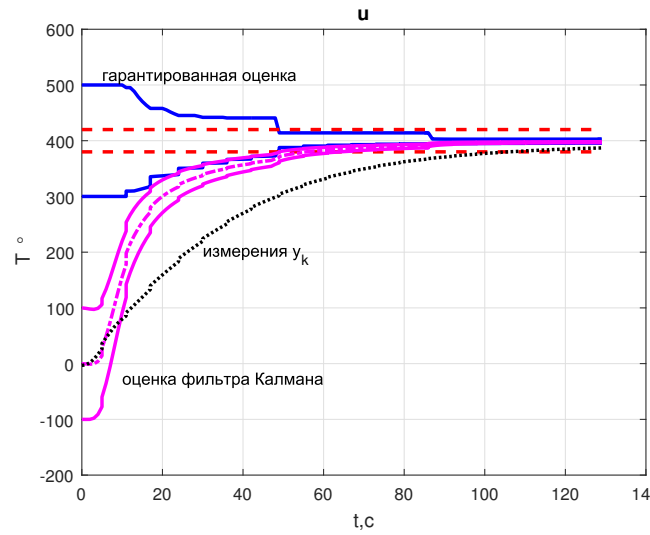


в) Эксперимент 3

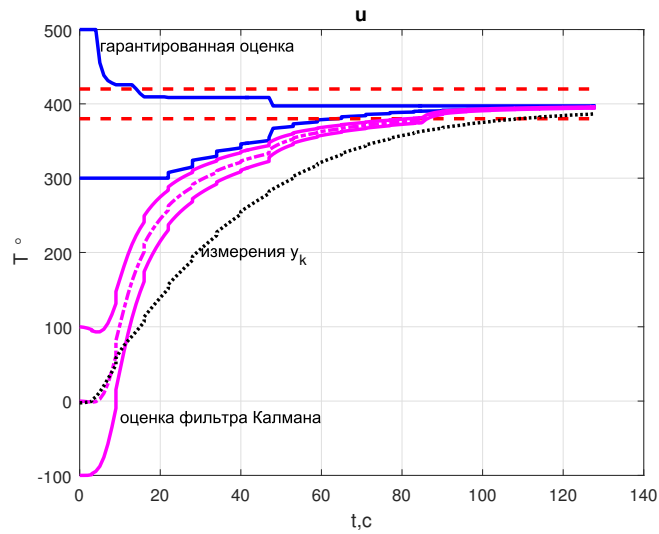
Рис. 4.42. Гарантированные оценки u (сплошная линия), измерения y_k (точечный пунктир), граница допустимой погрешности 5% (горизонтальный пунктир)



а) Эксперимент 1



б) Эксперимент 2



в) Эксперимент 3

Рис. 4.43. Гарантированные оценки u (сплошная линия), измерения y_k (точечный пунктир), оценка фильтра Калмана (штрих-пунктир), граница допустимой погрешности 5% (горизонтальный пунктир)

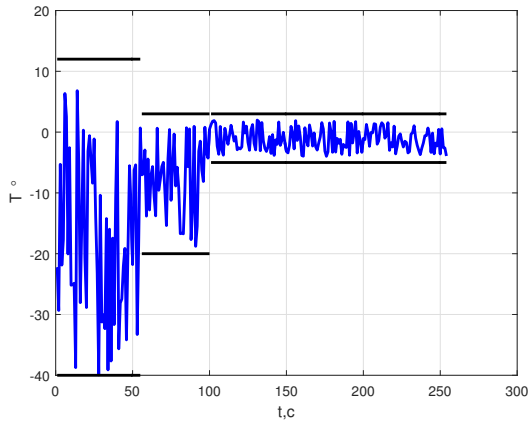


Рис. 4.44. Ошибки измерения

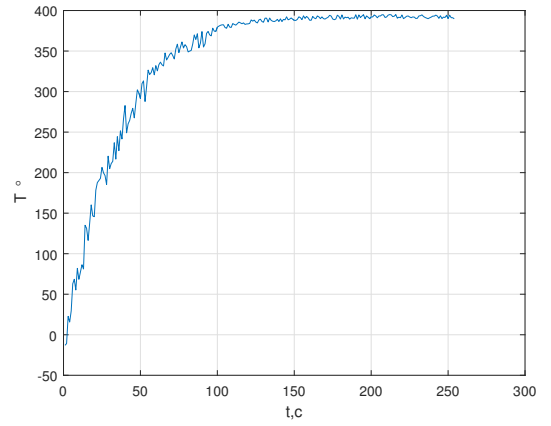


Рис. 4.45. Измерения температуры

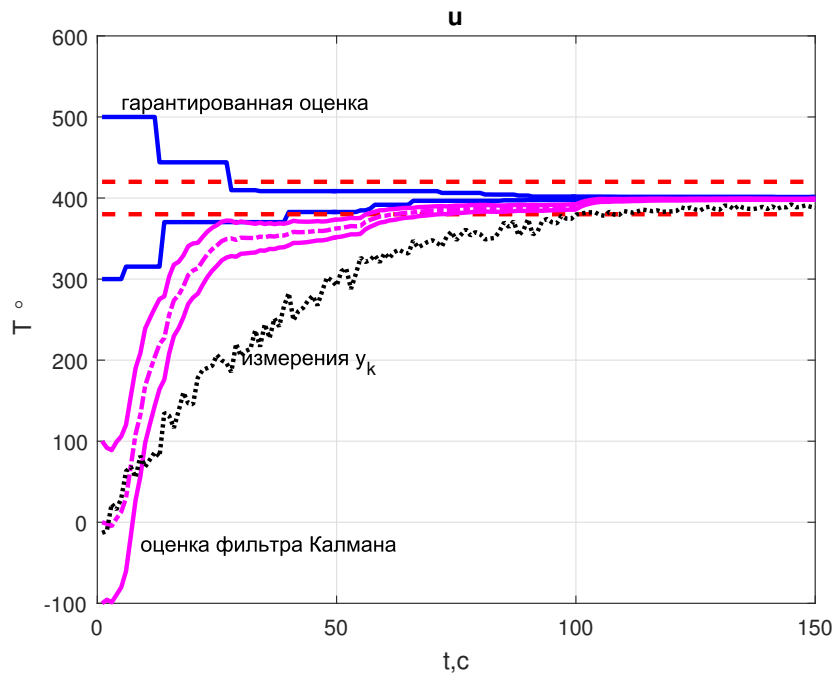


Рис. 4.46. Гарантированные оценки u (сплошная линия), измерения y_k (точечный пунктир), оценка фильтра Калмана (штрих-пунктир), граница допустимой погрешности 5% (горизонтальный пунктир)

4.6 Выводы по главе

Показаны реализация алгоритмов полиэдральной аппроксимации информационных множеств, моделирование и комплексное исследование гарантированных оценок для следующих математических моделей подвижных объектов:

1. Рассмотрена модель движения летательного аппарата шестого порядка, для которой проведено сравнение гарантированных оценок и оценок фильтра Калмана. Информационное множество по двум координатам практически стянулось в точку, т.е. была получена точная оценка вектора состояния. При использовании фильтра Калмана невозможно определить, была ли получена точная оценка. Длины сторон аппроксимирующего параллелепипеда по четырем направлениям оказались больше соответствующих длин осей эллипсоида, построенных по оценкам фильтра Калмана. Но на некоторых шагах истинное состояние не попадало в доверительную область, построенную на основе фильтра Калмана. При моделировании нормально распределённых случайных возмущений и помех истинное значение не попало в доверительный эллипсоид в 2% случаев. Однако при моделировании равномерно распределённых возмущений помех, когда реализация не соответствовала предположению о нормальном распределении возмущений и помех, истинное значение вектора состояния не попадало в доверительный эллипсоид в 25% случаев. При применении гарантированного подхода истинное состояние всегда находится внутри полученного множества при любой реализации возмущений и помех.
2. Рассмотрено применение алгоритма полиэдральной аппроксимации информационных множеств для оценивания ошибок БИНС в продольном и боковом каналах. Вычислена оценка по алгоритму, описанному в п.3.3 с конечным числом итераций, по алгоритму, описанному в п.2.3 с использованием систем линейных неравенств и уравнений, и с помощью фильтра Калмана. Время работы первого алгоритма аппроксимации на 1 шаг - в среднем 0.00028с, время работы второго алгоритма аппроксимации на 1 шаг - в среднем 0.03с, время работы фильтра Калмана на 1 шаге - в среднем 0.0001с., что в 2.8 раз меньше времени работы первого алгоритма и 300 раз меньше времени работы алгоритма полиэдральной аппроксимации.

Рассмотрено включение в систему информации о среднем значении возмущений. В большинстве случаев это позволяет уточнить оценку до 5 раз по третьей координате и до 1.5 раз по второй без значительного увеличения вычислительных затрат.

Вычислительные эксперименты показали, что истинное значение вектора состояния БИНС в среднем в 30% случаев не попадает в доверительный эллипсоид при равномерном распределении возмущений. Если реализация возмущений близка к нормальной, то выпадания истинного значения вектора состояния происходит в среднем в 5% случаев.

3. Рассмотрены экспериментальные измерения ВОГК-2. Показано применение алгоритмов гарантированного оценивания для идентификации коэффициентов разложения «быстрых» колебаний в измерениях ВОГК-2 по системе хаотических процессов. Задача оценивания коэффициентов сведена к задаче оценивания вектора состояния подвижного объекта, который является постоянным, но неизвестным и измеряемым с ошибкой. При этом построение модели проводится по некоторому набору измерений, а далее на основе полученной модели вычисляется прогноз значения. Диапазон значений колебаний в измерениях ВОГК-2 составлял $[-200;250]$, а диапазон ошибок прогноза значений колебаний в результате применения гарантированного подхода для оценки коэффициентов составляет $[-100;100]$, то есть неопределённость удалось уменьшить в 2.25 раз, что может быть использовано для повышения точности определения проекции угловой скорости, а значит и азимута.
4. Проведен натурный эксперимент для исследования гарантированных оценок угла поворота автомобильной дроссельной заслонки и электрического тока, потребляемого заслонкой, математическая модель которой описана трехмерной переключаемой системой. Оценивание проводилось методом полиэдральной аппроксимации информационных множеств по результатам измерения угла поворота. Истинное состояние системы оказалось внутри полученных аппроксимаций информационных множеств.
5. Показано применение гарантированного подхода в задаче динамических измерений температуры. В проведенных экспериментах с помощью разработанного алгоритма полиэдральной аппроксимации информационных мно-

жеств время получения реального значения температуры удалось уменьшить в 1.7-2 раза. Кроме того, построение гарантированных оценок температуры особенно актуально при определении перегрева. В одном эксперименте получили, что через 6 секунд после начала процесса получили информацию, что перегрева нет.

Глава 5. Программный комплекс для вычислительных экспериментов и исследований гарантированных оценок состояния подвижных объектов методом полиэдральной аппроксимации

Для вычисления гарантированных оценок вектора состояния подвижных объектов разработан пакет программ в среде MATLAB. Данный пакет позволяет на этапе проектирования системы управления подвижным объектом оценить время вычисления оценок, точность оценивания, анализировать гарантированные оценки системы при различных исходных данных и особенностях функционирования системы, например при различных параметрах модели, реализациях возмущений и помех, ограничениях на начальное состояние, возмущения и помехи. Пакет программ состоит из набора методов, позволяющих вычислять аппроксимирующие многогранники с учётом различных условий и особенностей подвижных объектов. На программный комплекс получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017615448 от 16.05.2017.

Рассматривается подвижный объект:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \Gamma w_k, \\ y_{k+1} = Gx_{k+1} + Hv_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (5.1)$$

Ограничения на x_0 , w_k , v_k заданы в виде многогранников X_0 , W_k , V_k описанных системами линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_0 \in X_0 : & A_{x_0} x_0 \leq b_{x_0}, \\ w_k \in W_k : & A_{w_k} w_k \leq b_{w_k}, \\ v_{k+1} \in V_{k+1} : & A_{v_{k+1}} v_{k+1} \leq b_{v_{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (5.2)$$

Аппроксимацией информационного множества \bar{X}_k является многогранник X_k , заданный системой линейных неравенств:

$$x_k \in \bar{X}_k \subseteq X_k : A_{x_k} x_k \leq b_{x_k}. \quad (5.3)$$

Матрица A_{x_k} - матрица, по строкам которой записаны вектора нормалей к граням аппроксимирующего многогранника. Матрица A_{x_k} задаёт форму аппроксимирующего многогранника X_k . Вектор b_{x_k} вычисляется в результате применения алгоритма аппроксимации.

Пакет состоит из следующих программ, которые применяются в зависимости от решаемой задачи:

1. Approximation - метод вычисления аппроксимации на один шаг. На основе оценки X_k вычисляется аппроксимирующий многогранник X_{k+1} . Метод реализован на основе алгоритма 1, описанного в п.2.3 (рис. 5.1).

Синтаксис:

`b=Approximation(A,B,G,H,Ax,Aw,Av,bx,bw,bv,y,u,Axk)`

Входные данные: A, B, G, H - матрицы из уравнений движения (5.1), Ax, Aw, Av - матрицы ограничений $A_{x_k}, A_{w_k}, A_{v_k}$ соответственно, bx, bw, bv - векторы ограничений $b_{x_k}, b_{w_k}, b_{v_k}$ соответственно, y - значение измерения на $(k+1)$ -м шаге y_k , u - значение управления на k -м шаге, Axk - матрица $A_{x_{k+1}}$, определяющая форму аппроксимирующего многогранника.

Результатом работы метода b является вектор $b_{x_{k+1}}$.

2. ApproximationL - метод вычисления аппроксимации X_k по результатам L последних измерений. Метод может быть использован для увеличения точности оценивания вектора состояния, а также для исследования оптимальной величины окна L . Метод реализован на основе алгоритма 2, описанного в п.2.3 (рис. 5.2).

Синтаксис:

`b=ApproximationL(A,B,G,H,Ax,Aw,Av,bx,bw,bv,Y,U,Axk,L)`

Входные данные:

A, B, G, H - матрицы из уравнений движения (5.1), Ax, Aw, Av - матрицы ограничений $A_{x_{k-L}}, A_{w_k}, A_{v_k}$ соответственно, bx, bw, bv - векторы ограничений $b_{x_{k-L}}, b_{w_k}, b_{v_k}$ соответственно, Y - массив измерений с $(k-L+1)$ -го шага до $(k+1)$ -го шага, в котором измерения записаны по столбцам, U -

массив управлений с $(k-L)$ -го шага до k -го шага, в котором вектора управления записаны по столбцам Axk - матрица $A_{x_{k+1}}$, определяющая форму аппроксимирующего многогранника на $(k+1)$ -м шаге, L - ширина окна. Результатом работы метода b является вектор $b_{x_{k+1}}$.

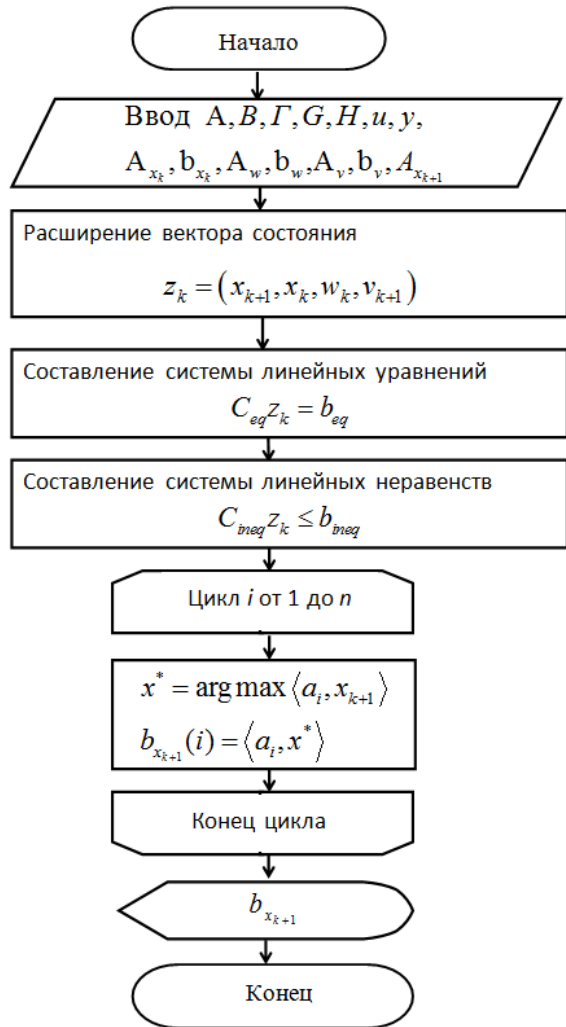


Рис. 5.1. Схема алгоритма полиэдральной аппроксимации информационного множества на один шаг

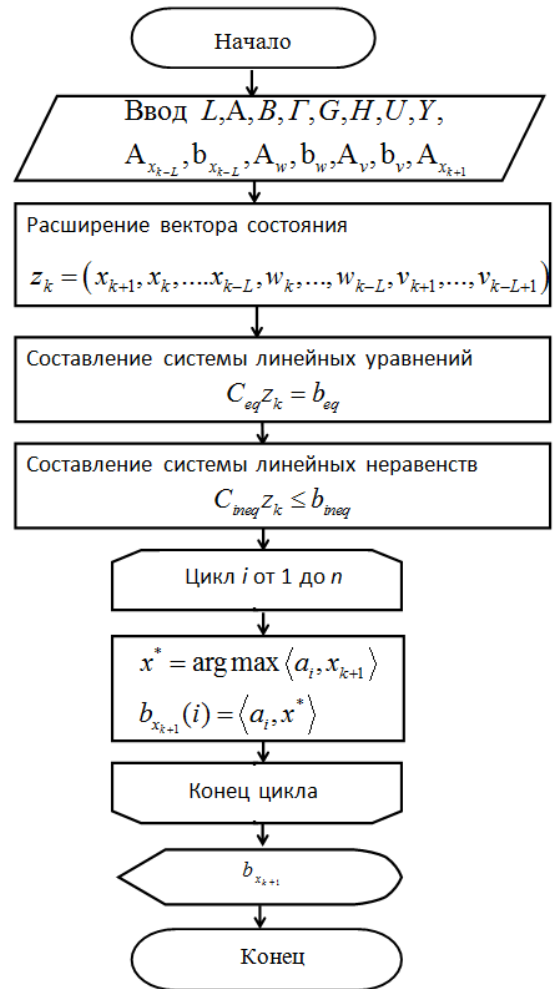


Рис. 5.2. Схема алгоритма полиэдральной аппроксимации информационного множества по результатам L последних измерений

3. ApproximationAvgW - метод вычисления аппроксимации X_k при наличии дополнительной информации о среднем значении возмущений по каждой координате j :

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |w_i(j)| \leq \epsilon_k(j). \quad (5.4)$$

В данном методе аппроксимация информационного множества производится на основе информации, полученной с нулевого по k -й шаг (рис. 5.3).

Синтаксис:

$b = \text{ApproximationAvgW}(A, B, \Gamma, G, H, Ax, Aw, Av, bx, bw, bv, Y, U, Axk, L, eps)$

Входные данные:

A, B, Γ, G, H - матрицы из уравнений движения (5.1), Ax, Aw, Av - матрицы ограничений $A_{x_0}, A_{w_k}, A_{v_k}$ соответственно, bx, bw, bv - векторы ограничений $b_{x_0}, b_{w_k}, b_{v_k}$ соответственно, Y - массив измерений с 1-го шага до $(k + 1)$ -го шага, U - массив управлений с 0-го шага до k -го шага, в котором вектора управлений записаны по столбцам, Axk - матрица $A_{x_{k+1}}$, определяющая форму аппроксимирующего многогранника на k -м шаге, L - номер шага, с которого в систему должна быть включена информация о среднем значении возмущения, eps - вектор ограничения на среднее значение возмущений (5.4).

Результатом работы метода b является вектор $b_{x_{k+1}}$.

4. $\text{ApproximationDecompositionW}$ - метод вычисления аппроксимации X_k по результатам L последних измерений при наличии информации о разложении возмущений по системе заданных функций:

$$w_k = \sum_{i=1}^l \alpha_i \phi_{ik}, \quad A_\alpha \alpha \leq b_\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \alpha_l), \quad (5.5)$$

где a_i - неизвестные постоянные коэффициенты, ϕ_{ik} - известные функции, неравенство $A_\alpha \alpha \leq b_\alpha$ задает априорные ограничения на коэффициенты α_i .

Данный метод позволяет вычислить аппроксимацию информационного множества X_k , а также провести множественную оценку параметров α_i . Метод реализован на основе алгоритма, описанного в п.3.2 (рис. 5.4).

Синтаксис:

$[bxk, bak] = \text{ApproximationDecompositionW}(A, B, \Gamma, G, H, Ax, Aw, Av, Aa, bx, bw, bv, ba, Y, U, Axk, \Phi, L)$

Входные данные:

A, B, Γ, G, H - матрицы из уравнений движения (5.1), Ax, Aw, Av, Aa - матрицы ограничений $A_{x_{k-L}}, A_{w_k}, A_{v_k}, A_\alpha$ соответственно, bx, bw, bv, ba

- векторы ограничений $b_{x_{k-L}}, b_{w_k}, b_{v_k}, b_\alpha$ соответственно, Y - массив измерений с $(k-L)$ -го шага до k -го шага, в котором измерения записаны по столбцам, U - массив управлений с $(k-L)$ -го шага до k -го шага, в котором управления записаны по столбцам, A_{xk} - матрица A_{x_k} , определяющая форму аппроксимирующего многогранника на k -м шаге, Φ - матрица значений функций из разложения (5.5) $\Phi_k = (\phi_{1k} \ \phi_{2k} \ \dots \ \phi_{lk})$, L - ширина окна. Результатом работы метода является массив из двух векторов b_{x_k}, b_α .

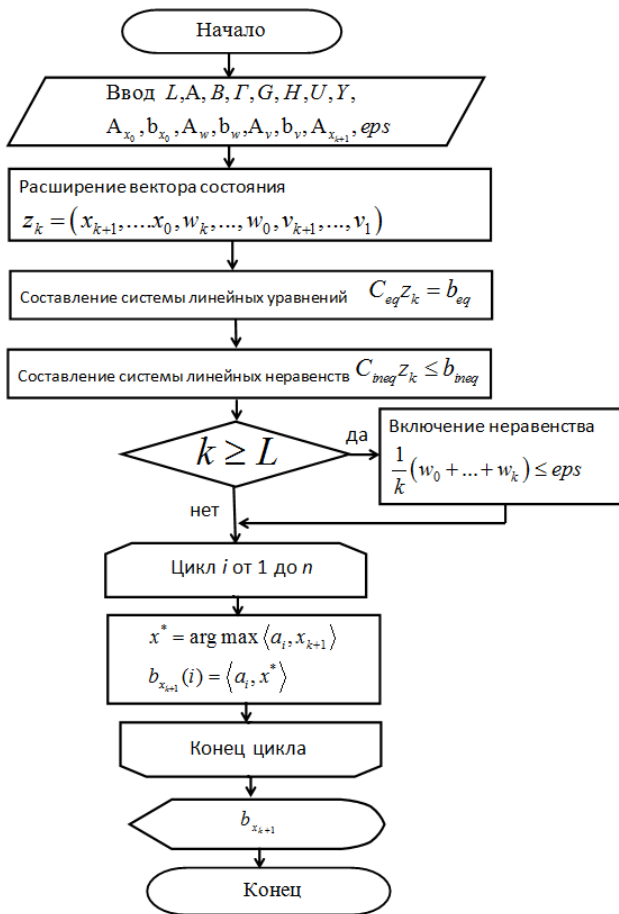


Рис. 5.3. Схема алгоритма полиэдральной аппроксимации при ограничении на среднее значение возмущений

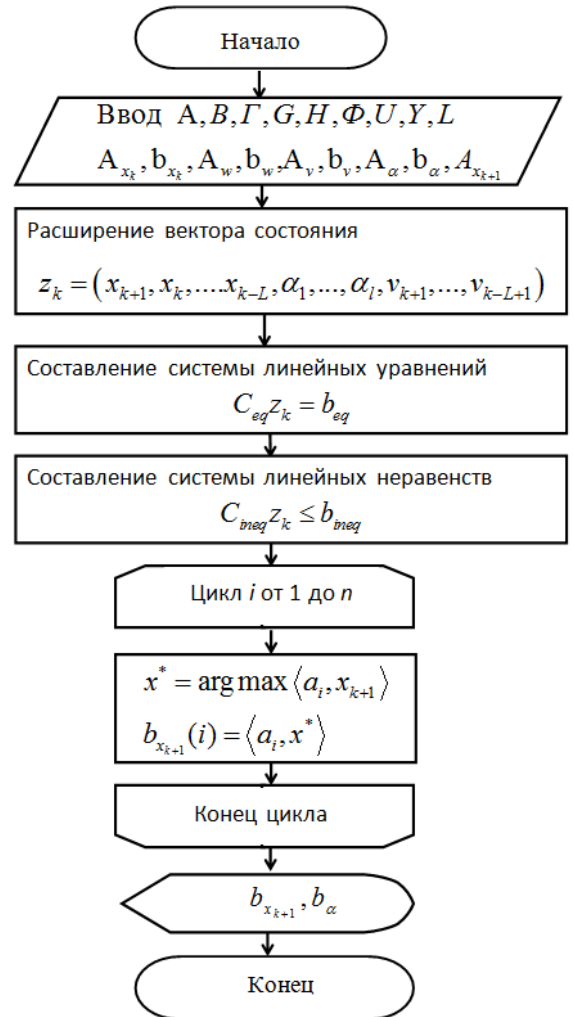


Рис. 5.4. Схема алгоритма полиэдральной аппроксимации при разложении возмущений по системе функций

5. ApproximationThrottle - метод вычисления аппроксимации информационного множества для вектора состояния дроссельной заслонки, модель дви-

жения которой описана в п.3.4:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A_{\sigma_i}x_k + B_{\sigma_i}u_k + w_k + C_{\sigma_i}, \\y_k &= Gx_k + Hv_k.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Данный метод может быть использован для вычисления аппроксимации X_{k+1} на основе оценки X_k для переключаемых систем (рис.5.5), когда матрицы A , B , C в модели системы на каждом шаге могут принимать значения из некоторых заданных множеств:

$$A \in \{A_{\sigma_1}, \dots, A_{\sigma_M}\}, \quad B \in \{B_{\sigma_1}, \dots, B_{\sigma_M}\}, \quad C \in \{C_{\sigma_1}, \dots, C_{\sigma_M}\}.\tag{5.7}$$

где A_{σ_j} , B_{σ_j} , C_{σ_j} , $j = 1 \dots M$ - заданные матрицы.

Синтаксис:

```
bх=ApproximationThrottle(Asigma,Bsigma, Csigma, G,H,Ax, Aw, Av,
uk, y, bx, bw, bv, Axk)
```

Входные данные:

$Asigma$, $Bsigma$, $Csigma$ - массивы матриц из (5.7), Ax , Aw , Av - матрицы ограничений A_{x_k} , A_{w_k} , A_{v_k} соответственно, bx , bw , bv - векторы ограничений b_{x_k} , b_{w_k} , b_{v_k} соответственно, y - измерение на $(k+1)$ -м шаге, u - управление на k -м шаге, Axk - матрица $A_{x_{k+1}}$, определяющая форму аппроксимирующего многогранника на k -м шаге.

Результатом работы метода является вектор $b_{x_{k+1}}$.

Данный пакет программ позволяет проводить комплексные исследования гарантированных оценок для различных математических моделей подвижных объектов. С помощью данного пакета можно исследовать размеры аппроксимирующих многогранников для подвижных объектов, выполняя процедуры оценивания в вычислительных экспериментах при различных исходных данных. В качестве оценки размера информационного множества можно рассматривать, например, чебышевский радиус множества, длины сторон аппроксимирующего параллелепипеда. Для подвижных объектов можно получить гарантированные оценки при различных реализациях возмущений и помех, ограничениях на начальное состояние, возмущения и помехи, и на основе полученных оценок

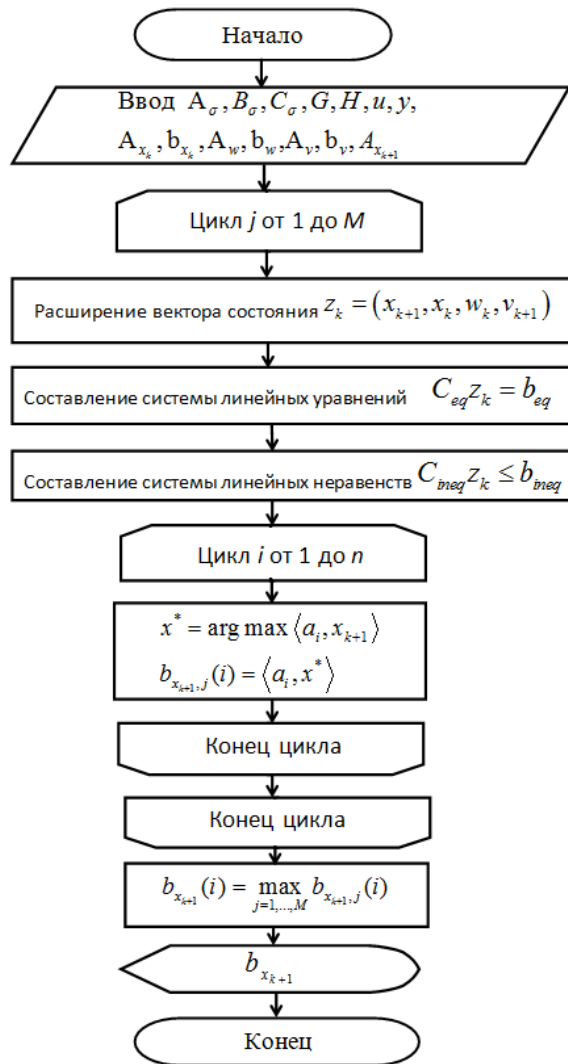


Рис. 5.5. Схема алгоритма
полиэдральной аппроксимации для
математической модели дроссельной
заслонки

сделать вывод о влиянии этих параметров на точность оценивания. Также можно провести вычислительные эксперименты при различных значениях ширины окна наблюдения L для определения, какое значение ширины окна позволяет получить более точную оценку в соответствии с имеющимися вычислительными ресурсами.

Минимальные требования к аппаратному и программному обеспечению для работы программного комплекса: процессор - от 500 МГц, оперативная память - от 1 Гб, постоянная память - от 200 кб, Matlab 6.5 (или более поздняя версия).

Пример. Матрицы в системе (5.1):

$$A = \begin{pmatrix} 0.9976 & 0.04636 \\ -0.09278 & 0.8584 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = (0.1189; 4.639) 10^{-3},$$

G, H – единичные матрицы размера 2×2 .

Ограничения на x_0, w_k, v_k заданы в виде многогранников:

$$\bar{X}_0 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x_0 \leq \begin{pmatrix} 0.0316 \\ 0.0141 \\ 0.0316 \\ 0.0141 \end{pmatrix}, \quad W : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} w_k \leq \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix},$$

$$V : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v_k \leq \begin{pmatrix} 0.0228 \\ 0.0145 \\ 0.0228 \\ 0.0145 \end{pmatrix}.$$

Проведена аппроксимация X_k информационных множеств \bar{X}_k для $L = 1$ многогранником $A_{x_k} x_k \leq b_{x_k}$, где $A_{x_k} = (I_{2 \times 2} \quad -I_{2 \times 2})^T$ с помощью метода Approximation. Результаты работы программы приведены в таб.5.1 и на рис.5.6.

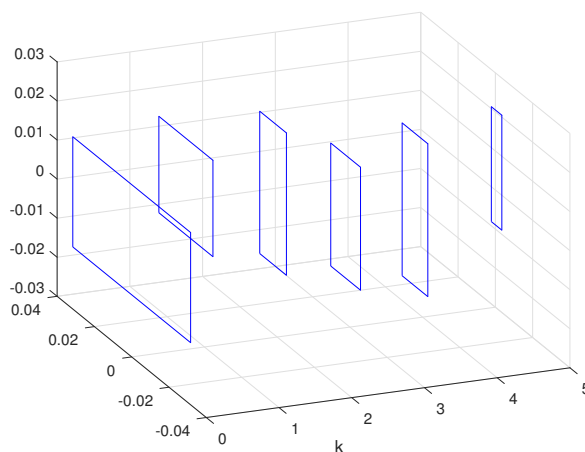


Рис. 5.6. Эволюция аппроксимирующих множеств X_k

Таблица 5.1. Результат работы программы.

k	w_k	v_k	x_k	y_k	b_{x_k}
0	-0.5	-	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	-	$\begin{pmatrix} 0.0316 \\ 0.0141 \\ 0.0316 \\ 0.0141 \end{pmatrix}$
1	0.1	$\begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.02 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0001 \\ -0.0023 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0099 \\ 0.0177 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0244 \\ 0.0196 \\ 0.0046 \\ 0.0051 \end{pmatrix}$
2	0.35	$\begin{pmatrix} -0.005 \\ 0.005 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0002 \\ -0.0015 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0052 \\ 0.0035 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0093 \\ 0.0242 \\ 0.005 \\ 0.0123 \end{pmatrix}$
3	-1	$\begin{pmatrix} 0.008 \\ -0.01 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0002 \\ 0.0003 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0078 \\ -0.0097 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0103 \\ 0.0131 \\ 0.0057 \\ 0.0184 \end{pmatrix}$
4	1.2	$\begin{pmatrix} 0.012 \\ -0.003 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0003 \\ -0.0043 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0117 \\ -0.0073 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0110 \\ 0.0155 \\ 0.0028 \\ 0.0237 \end{pmatrix}$
5	1	$\begin{pmatrix} -0.012 \\ 0.012 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0003 \\ 0.0019 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0123 \\ 0.0139 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0022 \\ 0.0205 \\ 0.0035 \\ 0.0089 \end{pmatrix}$

При проведении вычислений в среде Matlab R2010a на компьютере с процессором Intel(R) Core(TM) i7-4702MQ с тактовой частотой 2.20ГГц и ОЗУ 8ГБ время вычисления аппроксимации для рассмотренной двумерной модели при $x_k \in R^2$, $w_k \in R$, $y_k \in R^2$, $v_k \in R^2$ при $L = 1$ время аппроксимации на 1 шаг в среднем равно 0.021с.

Заключение

Итоги выполненного исследования

В работе решены все поставленные задачи и достигнута цель исследования. Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Разработаны методы моделирования состояния подвижного объекта при некоторых особенностях модели и процесса:
 - численный алгоритм гарантированного оценивания вектора состояния системы и коэффициентов при разложении возмущения по системе функций. В этом случае за счёт использования информации о том, что коэффициенты разложения являются постоянными, оценка вектора состояния получается точнее, чем в случае, когда возмущение известно с точностью до множества возможных значений, а время вычисления оценки меньше.
 - численный алгоритм гарантированного оценивания состояния линейных переключаемых систем на основе использования систем линейных неравенств и уравнений. Для каждого возможного состояния $\sigma(k)$, $\sigma(k) = 1, 2, \dots, m$ переключаемой системы вычисляется аппроксимация информационного множества. Объединение полученных множеств задаёт результирующую множественную оценку вектора состояния переключаемой системы. Время оценивания состояния переключаемых систем в m раз больше, чем для систем без переключений той же размерности из-за необходимости вычислять оценку для каждой подсистемы.
2. Разработан численный алгоритм полиэдральной аппроксимации информационного множества \bar{X}_k сверху многогранником заданной формы X_k без выполнения вычислительно затратных операций суммы Минковского и пересечения множеств. Алгоритм основан на неявном задании вектора состояния подвижных объектов системами линейных уравнений и неравенств, в которых в качестве переменных выступают вектор состояния подвижно-

го объекта $x_k \in R^{n_x}$, векторы возмущения $w_k \in R^{n_w}$ и помех измерения $v_k \in R^{n_v}$, соответствующих L последним измерениям $y_k \in R^{n_y}$. Выбор ширины окна L следует проводить в соответствии с имеющимися вычислительными ресурсами и на этапе численного моделирования системы.

3. Разработанный алгоритм полиэдральной аппроксимации информационных множеств позволяет получить не только гарантированную оценку вектора состояния, но и гарантированную оценку возмущений и помех в виде множеств, а также их эволюцию, что может быть в дальнейшем использовано для разработки адаптивных алгоритмов оценивания и управления, прогнозирования состояния системы и строительства множеств достижимости.
4. Исследовано гарантированное оценивание при аномальных измерениях, когда происходит выброс помехи измерения из априорно заданного множества. Установлено, что если величина выброса на k -м шаге δv_k превышает сумму проекций диаметров множеств AV и ΓW по какой-либо из координат, то такой выброс гарантированно будет обнаружен.
5. Проведено сравнение оценок, полученных в результате метода полиэдральной аппроксимации, с гарантированными оценками в виде эллипсоидов и доверительными множествами, полученными по результатам оценки фильтра Калмана. Вычислительные эксперименты показали, что время вычисления эллипсоидальных оценок оказалось больше, чем при полиэдральной аппроксимации. Доверительные области фильтра Калмана могут быть меньше аппроксимаций многогранниками и эллипсоидами, но истинное состояние системы может не находиться внутри данной области.
6. Время, требуемое для вычисления аппроксимации зависит от размерностей фазового вектора, возмущения и помехи, от количества граней аппроксимирующего многогранника, а также от ширины окна L . При этом при увеличении окна время, требуемое для вычисления оценки, растет нелинейно, например, при увеличении окна в 10 раз, время возрастает в 1.7–3.7 раза в зависимости от размерности векторов состояния, измерения, возмущений и помех. Оценить время построения аппроксимации информационного множества для конкретного подвижного объекта и конкретной вычислительной машины можно на этапе проектирования.

7. Показана реализация алгоритмов полиэдральной аппроксимации, моделирование и исследование гарантированных оценок для следующих математических моделей подвижных объектов:

- Рассмотрена модель движения летательного аппарата шестого порядка. Проведено сравнение гарантированных оценок и оценок фильтра Калмана по результатам вычислительных экспериментов. Оценка фильтра Калмана по некоторым координатам получилась точнее, чем при гарантированном подходе, но на некоторых шагах истинное состояние не попадало в доверительную область, построенную на основе фильтра Калмана. При моделировании нормально распределённых случайных возмущений и помех истинное значение не попало в доверительный эллипсоид в 2% случаев, а при моделировании равномерно распределённых - в 25% случаев.
- Проведены вычислительные эксперименты для моделирования гарантированных оценок ошибок бесплатформенной инерциальной навигационной системы в продольном и боковом каналах. Время работы алгоритма без итерационных процедур на 1 шаг - 0.00028с, алгоритма полиэдральной аппроксимации - 0.03с, фильтра Калмана - 0.0001с. Истинное значение вектора состояния бесплатформенной инерциальной навигационной системы в среднем в 30% случаев не попадает в доверительный эллипсоид при равномерном распределении возмущений, в 5% случаев - при нормальном распределении. Включение информации о среднем значении возмущений в систему линейных уравнений и неравенств, описывающую информационное множество, позволяет уточнить оценку в 1.5-5 раз без значительного увеличения вычислительных затрат.
- Рассмотрены экспериментальные измерения волоконно-оптического гироскопа ВОГК-2. Показано применение алгоритмов гарантированного оценивания для идентификации коэффициентов разложения «быстрых» колебаний в измерениях ВОГК-2 по системе хаотических процессов. Задача оценивания коэффициентов сведена к задаче оценивания вектора состояния, который является постоянным, но неизвестным и измеряемым с ошибкой. При этом построение модели проводится по некоторому набору измерений, а далее на основе полученной модели

вычисляется прогноз значения. Диапазон значений колебаний в измерениях ВОГК-2 составлял $[-200;250]$, а диапазон ошибок прогноза значений колебаний в результате применения гарантированного подхода для оценки коэффициентов составляет $[-100;100]$, то есть неопределённость удалось уменьшить в 2.25 раз, что может быть использовано для повышения точности определения проекции угловой скорости, а значит и азимута.

- Проведен натурный эксперимент для идентификации модели дроссельной заслонки и исследования гарантированных оценок угла поворота дроссельной заслонки и электрического тока, потребляемого заслонкой, математическая модель которой описана переключаемой системой. Оценивание проводилось методом полиэдральной аппроксимации информационных множеств по результатам измерения угла поворота. Истинное состояние системы оказалось внутри полученных множеств.
- Показано применение гарантированного подхода в задаче динамических измерений температуры. В проведенных экспериментах с помощью разработанного алгоритма полиэдральной аппроксимации информационных множеств время получения реального значения температуры удалось уменьшить в 1.7-2 раза. Кроме того, построение гарантированных оценок температуры особенно актуально при определении перегрева. В одном эксперименте получили, что через 6 секунд после начала процесса получили информацию, что перегрева нет.

8. Разработан пакет программ в среде MATLAB, предназначенный для проведения вычислительных экспериментов и исследований гарантированных оценок состояния подвижных объектов методом полиэдральной аппроксимации информационных множеств при различных особенностях функционирования системы. Пакет позволяет на этапе проектирования системы управления подвижным объектом оценить время вычисления оценок, точность оценивания, анализировать гарантированные оценки состояния объекта при различных исходных данных.

Рекомендации:

1. Для уменьшения вычислительных затрат, требуемых для гарантированного оценивания состояния подвижных объектов, возможно проведение редукции размерности или декомпозиции математических моделей объектов управления с сохранением свойств объекта.
2. При ограниченных вычислительных ресурсах можно уменьшить время вычисления аппроксимации, если вычислять оценки не по всем координатам, а по наиболее важным.
3. При ограниченных вычислительных ресурсах разработанные алгоритмы гарантированного оценивания могут быть применены в задачах послеопытной обработки информации, в частности телеметрии, а также для систем с медленно меняющимися процессами, происходящими, например, в судах, колесно-гусеничных машинах.

Перспективы дальнейшей разработки темы состоят в следующем:

1. Определение длины окна L , при увеличении которой не происходит повышение точности гарантированных оценок, в зависимости от априорной информации о системе.
2. Повышение быстродействия алгоритмов гарантированного оценивания за счёт использования особенностей модели подвижного объекта при решении задач личного программирования и распараллеливания вычислительных процессов.
3. Построение модели возмущений и помех измерений, действующих на подвижный объект, для построения адаптивных алгоритмов оценивания повышения точности оценивания состояния подвижных объектов.

Список литературы

1. Александров, А.Г. Адаптивное частотно-модальное управление / А.Г. Александров, Д.В. Шатов // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014г.: Труды. [электронный ресурс]. – 2014. – С. 135–146.
2. Александров, А.Г. К решению классической задачи автоматического управления / А.Г. Александров // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014г.: Труды. [электронный ресурс]. – 2014. – С. 123–134.
3. Александров, А. Г. Оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие для вузов по спец. «Автоматика и упр. в техн. системах» / А.Г. Александров. – М.: Высш. шк, 1989. – 263 с.
4. Акимов, П.А. Гарантирующий подход и l_1 аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях / П.А. Акимов, А.В. Деревянкин, А.И. Матасов. – М: Издательство Московского университета, 2012. – 296 с.
5. Ананьев, Б.И. Оценивание случайных информационных множеств многошаговых систем / / Б.И. Ананьев // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – № 4. – С. 35–41.
6. Андриенко, А.Я. Алгоритмы быстрого оценивания вектора высокой размерности в задачах управления подвижными объектами / / А.Я. Андриенко, Е.И. Тропова // Проблемы управления. – 2010. – № 2. – С. 69–73.
7. Андриенко, А.Я. Методы анализа результатов летных испытаний бортовых систем управления / А.Я. Андриенко, Е.И. Тропова, А.И. Чадаев // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 5. – С. 155–165.
8. Бакан, Г.М. Оптимизация алгоритмов гарантированного оценивания состояний динамических систем / Г.М. Бакан // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 10. – С. 27–36.

9. Бастраков, С.И. Удаление неравенств из фасетного описания многогранника / С.И. Бастраков, Н.Ю. Золотых // Тр. ИММ УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 3. – С. 37–45.
10. Бек, В.В. Интегрированные системы терминального управления / В.В. Бек, Ю.С. Вишняков, А.Р. Махлин – М: Наука, 1989. – 224 с.
11. Бизяев, М.Н. Динамические измерения в скользящем режиме с применением дополнительной фильтрации выходного сигнала./М.Н. Бизяев// Известия челябинского научного центра УРО РАН. – 2004.–Вып.4(26). – С.126–131.
12. Богуславский, И.А. Аппроксимация задачи нелинейной фильтрации последовательностью линейных задач; мера робастности фильтрации / И.А. Богуславский // Изв. РАН. Техническая кибернетика.– 1994.– №1.– С. 85–99.
13. Бортовая реализация адаптивно-робастных оценивающих фильтров: практические результаты / В.Л. Будкин, С.Л. Булгакова, Ю.П. Михеенков, А.В. Чернодаров // Науч. вестник МГТУ ГА – 2005. – №89(7). – С. 59–71.
14. Брайсон, А. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление/А. Брайсон, Хо Ю-Ши. – М.: Изд-во Мир, 1972. – 545 с.
15. Браммер, К. Фильтр Калмана-Бьюси / К. Браммер, Г. Зиффлинг – М.: Наука, 1982. – 200 с.
16. Брусникина, Н.Б. Аппроксимация с гарантированной точностью множеств достижимости для линейной динамической системы, подверженной импульсным воздействиям / Н.Б. Брусникина, А.В. Лотов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2007. – Т. 47, № 11. – С. 1855–1864.
17. Бушенков, В.А. Методы и алгоритмы анализа линейных систем на основе построения обобщенных множеств достижимости / В.А. Бушенков, А.В. Лотов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1980. – Т. 20, № 5. – С. 1130–1141.
18. Бушенков, В.А. Итерационный метод построения ортогональных проекций выпуклых многогранных множеств / В.А. Бушенков, А.В. Лотов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1985. – Т. 25, № 9. – С. 1285–1292.
19. Гаджиев, Ч.М. Метод отбраковки аномальных измерений для многомерных

- динамических систем / Ч.М. Гаджиев// Автометрия. – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 39–46.
20. Голяндина, Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов / Н.Э. Голяндина. – СПб.: СПбГУ, 2004. – 76 с.
 21. Горелик, С.И. Прогнозирование случайных колебательных процессов на основе метода экспоненциального сглаживания/ С.И. Горелик, Л.С. Казаринов // Автоматика и телемеханика.– 1994.–№ 10.–С. 27–34.
 22. Грановский, В.А. Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения/ В.А. Грановский. – Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 224с.
 23. Гридасов И.П., Синтез минимаксного линейного стохастического управления при случайных возмущениях, представляемых в виде конечного разложения / И.П. Гридасов // Автомат. и телемех. – 1993.–№ 2. – С113–126.
 24. Гусев, А.А. Математическая модель алгоритма определения навигационных параметров БИНС в условиях избыточной измерительной информации / А.А. Гусев, И.Е. Виноградов, В.М. Никифоров// Труды ФГУП «НПЦАП». – 2012. – № 2. – С. 58–69.
 25. Ефимов, Д.В. Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями / Д.В. Ефимов, Т. Раиссис // Автоматика и телемеханика. – 2016. – № 2. – Р. 5–49.
 26. Зоркальцев, В.И. Системы линейных неравенств: учебное пособие / В.И. Зоркальцев, М.А. Киселева. – Иркутск: Изд-во Иркутского гос. ун-та, 2007. – 128 С.
 27. Ильин, Е.Д. Оценивание состояния динамической системы в условиях неопределенности / Е.Д. Ильин, Е.О. Подвилова, В.И. Ширяев // Мехатроника и робототехника: сборник докладов международной молодежной конференции/Санкт–Петербург: Изд-во «Политехника–сервис». – 2011. – С. 101–110.
 28. Ильин, Е.Д. О применении минимаксного и калмановского фильтров в задаче оценивания / Е.Д. Ильин, Е.О. Подвилова, В.И. Ширяев // Материалы конф. "Информационные технологии в управлении"(ИТУ-2012). – СПб.: ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор 2012. – С. 586–595.
 29. Казаринов, Л.С. Метод построения упреждающих оценок энергетической эффективности технологических процессов / Л.С. Казаринов, Д.А. Шнай-

- дер // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2010. – Вып. 12, №22 (198). – С. 57–62.
30. Калман, Р.Е. Идентификация систем с шумами / Р.Е. Калман // Успехи математических наук. – 1985. – Т. 40. – № 4(244). – С. 27–41.
31. Кац, И.Я. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях / И.Я. Кац, А.Б. Куржанский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 11. – С. 79–87.
32. Кац, И.Я. Минимаксно-стохастические задачи оценивания в многошаговых системах / И.Я. Кац // Оценивание в условиях неопределенности. – 1982. – С. 43–59.
33. Кейн, В.М. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию / В.М. Кейн. – М: Наука, 1985. – 248 с.
34. Коган, М.М. Оптимальное оценивание и фильтрация при неизвестных ковариациях случайных факторов / М.М. Коган // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 11. – С. 88–109.
35. Костоусова, Е.К. Гарантированные оценки точности вычислений в задачах управления и оценивания / Е.К. Костоусова, А.Б. Куржанский // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 2, № 1. – С. 19–27.
36. Костоусова, Е.К. О полиэдральных оценках множеств достижимости линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление / Е.К. Костоусова // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 55–74.
37. Костоусова Е.К. Об ограниченности внешних полиэдральных оценок множеств достижимости линейных систем / Е.К. Костоусова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, № 6. – С. 974–989.
38. Корноушенко, Е.К. Интервальные по координатным оценки для множества достижимых состояний линейной стационарной системы. III / Е.К. Корноушенко // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 10. – С. 47–52.
39. Красильщиков, М.Н. Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий / М.Н. Красильщиков, Г.Г. Себряков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 280 с.

40. Красовский, Н.Н. Задачи управления с гарантированным результатом / Н.Н. Красовский, В.Е. Третьяков. – Свердловск: Сред.-Урал. кн.изд-во, 1986. – 64 с.
41. Красовский, Н. Н. Современные проблемы оптимизации и устойчивости неопределенных и стохастических систем / Н. Н. Красовский, А.Б. Куржанский, А.И. Кибзун // Автоматика и телемеханика. – 2007. – вып. 10. – С. 3–4.
42. Крянев, А.В. Метрический анализ и обработка данных / А.В. Крянев, Г.В. Лукин, Д.К. Удумян. – М.: Физматлит, 2012. – 213 с.
43. Кумков, С.И. Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолёта / С.И. Кумков, В.С. Пацко, С.Г. Пятко, А.А. Федотов // Тр. ИММ УрО РАН. – 2000. – Т. 6, № 2. – С. 413–434.
44. Кунцевич, В.М. Адаптивное управление: алгоритмы, системы, применение / В.М. Кунцевич. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1988. – 64 с.
45. Кунцевич, В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации / В.М. Кунцевич. – К.: Наукова думка, 2006. – 264 с.
46. Кунцевич, А.В. Инвариантные множества семейств линейных и нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями / А. В. Кунцевич, В. М. Кунцевич // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 92–106.
47. Кунцевич, В.М. О точности построения аппроксимирующих моделей при ограниченных помехах измерений / В.М. Кунцевич // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 5. – С. 125–133.
48. Куржанский, А.Б. Минимаксная фильтрация при квадратичных ограничениях. II / А.Б. Куржанский, И.Я. Пищулина. // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т.12, № 9. – С. 1568–1579
49. Куржанский, А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределённости / А.Б. Куржанский. – М.: Наука, 1977. – 394 С.
50. Куржанский, А.Б. Идентификация билинейных систем. Гарантированные псевдоэллипсоидальные оценки / А.Б. Куржанский, В.Д. Фурасов // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 1. – С. 41–53.
51. Куржанский А.Б. Слабо инвариантные множества гибридных систем / А.Б. Куржанский, П. А. Точилин // Дифференциальные уравнения. – 2008.

- Т. 11, № 11. – С. 1523–1533.
52. Куржанский А.Б. Задача слежения в пределах интервала времени по данным финитных наблюдателей / А.Б. Куржанский, П.А. Точилин // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 5. – С. 656–666.
53. Лебедев А.А. Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов / А.А. Лебедев, М.Н. Красильщиков, В.В. Малышев. – М.:Машиностроение, 1974. – 200 с.
54. Лидов, М.Л. К задаче гарантирующего оценивания / М.Л. Лидов // Космические исследования. – 1991. – Т. 29, № 6. – С. 803–814.
55. Лотов, А.В. Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями / А.В. Лотов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1975. – Т. 15, № 6. – С. 67–78.
56. Лотов, А.В. Модифицированный метод уточнения оценок для полиэдральной аппроксимации выпуклых многогранников / А.В. Лотов, А.И. Поспелов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, № 6. – С. 990–998.
57. Лукацкий, А.М. Конструктивный алгоритм свертывания систем линейных неравенств высокой размерности / А.М. Лукацкий, Д.В. Шапот // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, № 7. – С. 1167–1180.
58. Лычак, М.М. Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода / М.М. Лычак // Проблемы управления и информ. – 1999. – № 5. – С. 34–41.
59. Мамаев, А.А. Методы минимаксного оценивания при наличии эллипсоидальных ограничений / А.А. Мамаев, К.В. Семинихин // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 4. – С. 129–151.
60. Манько, Н.Г. Повышение точности оценок в алгоритме обработки измерений на выходе волоконно-оптического гироскопа с помощью применения моделей детерминированного хаоса / Н.Г. Манько, Л.Н. Шалимов, Г.В. Шестаков и др. // Актуальные проблемы автоматизации и управления. Тр. науч.-практ. конф. – Челябинск: ЮУрГУ, 2013. – С. 43–46.
61. Матасов, А.И. Метод гарантирующего оценивания / А.И. Матасов. – М.:

- Изд-во МГУ, 2009. – 100 с.
62. Миллер, Г.Б. Минимаксная фильтрация в линейных неопределённо-стохастических дискретно-непрерывных системах / Г.Б. Миллер, А.Р. Панков // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 3. – С. 77–93.
 63. Мирошник, И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы. / И.В. Мирошник. – СПб.: Питер, 2005. – 336с.
 64. Неусыпин, К.А. Разработка алгоритма коррекции инерциальной навигационной системы в условиях аномальных измерений / К.А. Неусыпин, В.В. Лукьянов, Нгуен Динь Тхай // Авиакосмическое приборостроение. – 2015. – №11. – С. 21–26.
 65. Овсеевич, А.И. К вопросу о сопоставлении вероятностного и гарантированного подходов к прогнозу фазового состояния динамических систем / А.И. Овсеевич, А.М. Шматков // Изв. АН. Теория и системы управления. – 1997. – № 4. – С. 11–16.
 66. Овсеевич, А.И. Сравнение интервальных и эллипсоидальных оценок погрешности векторных операций / А.И. Овсеевич, Ю.В. Тарабанько, Ф.Л. Черноусько // Доклады Академии наук. – 2005. – Т. 400, № 6. – С. 739–743.
 67. Олейник, А.И. Оценка базовых характеристик информационной системы интеллектуальной обработки высотно-скоростных параметров полета высокоманевренных самолетов / А.И. Олейник // Авиакосмическое приборостроение. – 2013. – № 8. – С. 30–38.
 68. Панченко, И.С. Алгоритмы оценивания аддитивных скачкообразных возмущений в линейных системах в условиях статистической неопределенности [Текст]: дис.... канд тех. наук: 05.13.01 / Панченко Ирина Степановна. – Челябинск, 1997. – 141 с.
 69. Панюков, А.В. Представление суммы минковского для двух полиэдров системой линейных неравенств / А.В. Панюков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 40. – С. 108–119.
 70. Пацко, В.С. Трёхмерное множество достижимости в системах нелинейной управляемой системы / В.С. Пацко, С.Г. Пятко, А.А. Федотов // Известия АН. Теория и системы управления. – 2003. – № 3. – С. 8–16.

71. Пельцвергер, С.Б. Быстрые алгоритмы полиэдральной аппроксимации в задачах минимаксно-стохастической фильтрации / С.Б. Пельцвергер // Известия Челябинского научного центра УРО РАН. – 2004. – №1(22). – С. 37–48.
72. Подивилова, Е.О. Сравнение минимаксного и калмановского алгоритмов оценивания векторов состояния динамических систем / Е.О. Подивилова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2012. – Т. 17, №35(294). – С. 135–138.
73. Подивилова, Е.О. Сравнение оценок минимаксного фильтра и фильтра Калмана / Е.О. Подивилова, В.И. Ширяев // Экстремальная робототехника. Сборник докладов Всероссийской научно-технической конференции. – СПб: Изд-во «Политехника-сервис», 2012. – С. 173–181.
74. Подивилова, Е.О. О гарантированном оценивании вектора состояния динамических систем / Е.О. Подивилова, В.И. Ширяев // Физика и технические приложения волновых процессов: труды XI Междунар. науч.–техн. конференции / под общ. ред Ю.Е. Мительмана. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2012. – С. 314–317.
75. Подивилова, Е.О. Сравнение оценок минимаксного фильтра и фильтра Калмана / Е.О. Подивилова, В.И. Ширяев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование – 2012. – Т. 14, №40(299). – С. 182–186.
76. Подивилова, Е.О. Об аппроксимации информационных множеств в задаче гарантированного оценивания / Е.О. Подивилова // Труды науч.-пр. конференции «Актуальные проблемы автоматизации и управления». – 2013. – С. 54–58.
77. Подивилова, Е.О. О подходе к оцениванию состояния динамических систем как к решению системы линейных неравенств / Е.О. Подивилова, В.И. Ширяев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2013. – Т. 17, №3(13). – С. 133–136.
78. Подивилова, Е.О. Об алгоритмах гарантированного оценивания состояния измерительного устройства в условиях неопределённости / Е.О. Подиви-

- лова, В.И. Ширяев // Измерения: состояние, перспективы развития: тез. докл. междунар. науч.-практ. конф., г. Челябинск, 25-27 сент. – N. 1. – Челябинск: Издат.центр ЮУрГУ, 2012. – С. 196–198.
79. Поляк, Б.Т. Оценивание параметров в линейных многомерных системах с интервальной неопределенностью / Б.Т. Поляк, С.А. Назин // Проблемы управления и информатики. – 2006. – №1-2. – С. 103–115.
 80. Прикладной интервальный анализ / Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 468 с.
 81. Пугачев, В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления / В.С. Пугачев. – М.: Физматлит, 1960. – 883 с.
 82. Пытьев, Ю.П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем / Ю.П. Пытьев. – изд.2-е, перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.
 83. Разработка алгоритмов обработки измерительной информации и анализ точности волоконно-оптического гироскопа ВОГК-2 и его модификаций: отчет о НИР (инж. записка): ОКБ/103-11 2011058 / ЮУрГУ; рук. В.И. Ширяев; исполн.: А.С. Шелудько [и др.]. – Челябинск, 2011. – 110 с.
 84. Разработка алгоритмов обработки измерительной информации и анализ точности волоконно-оптического гироскопа ВОГК-2 и его модификаций: отчет о НИР (науч.-тех. отчет): ОКБ/103-11 2011058 / ЮУрГУ; рук. В.И. Ширяев; исполн.: Е.О. Подвилова [и др.]. – Челябинск, 2015. – 200 с.
 85. Ракета как объект управления: Учебник / И.М. Игдалов, Л.Д. Кучма, Н.В. Поляков, Ю.Д. Шептун; под ред. акад. С.Н. Конюхова. – Д.: АРТ-ПРЕСС, 2004. – 544 с.
 86. Решетняк, Ю.Н. Суммирование эллипсоидов в задаче гарантированного оценивания / Ю.Н. Решетняк // ПММ. – 1989. – Т. 53, № 2. – С. 249–254.
 87. Родионов, В.В. Сравнительная характеристика помехоустойчивости обнаружителей движущихся целей на фоне пассивных помех // В.В. Родионов // РАДИОЛОКАЦИЯ, НАВИГАЦИЯ, СВЯЗЬ XXII. Сборник трудов международной научно-технической конференции – Воронеж, 2016. – С.1016-1022.
 88. Сальников, Н.Н. Эллипсоидальное оценивание состояний и параметров ди-

- намической системы при отсутствии априорной информации / Н.Н. Сальников // Проблемы управления и информатики. – 2014. – № 2. – С. 144–156.
89. Сейдж, Э. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / Э. Сейдж, Дж. Мелс. – М, «Связь», 1976. – 496 с.
90. Семинихин, К.В. Методы минимаксного оценивания в многомерных линейных моделях наблюдения при наличии геометрических ограничений на моментные характеристики : дис.... д-ра физ. -мат. наук: 05.13.01 / Семинихин Константин Владимирович. – М.,2010. – 326 с.
91. Семинихин, К. В. Минимаксная линейная фильтрация случайных последовательностей с неточно заданной ковариационной функцией / К. В. Семинихин // Автоматика и телемеханика. – 2016. – № 2. – С. 50–67.
92. Сеницын, И.Н. Развитие алгоритмического обеспечения анализа стохастических систем, основанного на канонических разложениях случайных функций / И.Н. Сеницын, В.И. Сеницын, Э.Р. Корепанов, В.В. Белоусов, И.В. Сергеев // Автоматика и телемеханика.– 2016.– № 2.– С. 195–206.
93. Соколов, С.В. Основы синтеза многоструктурных бесплатформенных навигационных систем / С.В. Соколов, В.А. Погорелов. – М.:ФИЗМАТЛИТ,2009.–184 с.
94. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М: Наука, Гл.ред. физ.-мат.лит., 1987. – 712 с.
95. Степанов, О.А. Рекуррентное оценивание и фильтрация: предыстория и современное состояние / О.А. Степанов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2010. – № 12. – С. 10–16.
96. Сыров, А.С. Особенности синтеза системы угловой стабилизации высокоточных беспилотных летательных аппаратов / А.С. Сыров, В.Ю. Рутковский, В.М. Глумов, А.М. Пучков, А. С. Соловьев // Проблемы управления. –2017. –№2.–С.56–67.
97. Тимофеева, Г.А. Обобщенные доверительные множества для статистически неопределенного случайного вектора / Г.А. Тимофеева // Автоматика и телемеханика. – 2002.– № 6.– С. 44–56.
98. Уханов, М.В. Алгоритм построения суммы многогранников / М.В. Уханов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика, физика, химия» – 2001. – № 7. – С. 39–44.

99. Уханов, М.В. Алгоритмы построения информационных множеств при реализации минимаксного фильтра / М.В. Уханов, В.И. Ширяев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Физика. Химия» – Вып.2 № 3. – 2002. – С. 19–33.
100. Филимонов, Н.Б. Идентификация состояния и внешней среды дискретных динамических объектов методом полиэдрального программирования / Н.Б. Филимонов // Мехатроника, автоматизация, управление – 2003. – № 2. – С. 11–15.
101. Филимонов, Н.Б. Проблема качества процессов управления: смена оптимизационной парадигмы / Н.Б. Филимонов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2012. – № 12. – С. 2–9.
102. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Я. Бар-Шалом; Г. Бревер; С. Джонсон и др.; ред. К.Т. Леондеса. – М. : Мир, 1980. – 407 с.
103. Фокин, Л.А. Об анализе погрешностей интегрированной навигационной системы и методах их оценивания / Л.А. Фокин, В.И. Ширяев, Е.О. Подвильова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2012. – Вып. 17. – № 35(294). – С. 127–134.
104. Фокин, Л.А. Об использовании калмановского и минимаксного алгоритмов оценивания погрешностей интегрированной навигационной системы / Л.А. Фокин, В.И. Ширяев, Е.О. Подвильова // Труды ФГУП «НПЦАП». Системы и приборы управления – 2013. – № 3. – С. 65–79.
105. Цифровая система управления расходом топлива ракет-носителей «Союз-2» и «Союз-СТ» / А.Я. Андриенко, Л.Н. Бельский, М.И. Заплатин и др. // Проблемы управления. – 2012. – № 5. – С. 81–83.
106. Черников, С.Н. Линейные неравенства / С.Н. Черников. – М.: Наука, 1968. – 488 с.
107. Черникова, Н.В. Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных неравенств / Н.В. Черникова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1968. – Т. 5, № 2. – С. 334–337.
108. Чернодаров, А.В. Параметрическая идентификация моделей погрешностей интегрированных систем навигации в режиме реального времени и по дан-

- ным бортовых устройств регистрации / Чернодаров, А.П. Патрикеев, А.Ю. Платонов и др. // Гироскопия и навигация. – 2007. – № 4. – С. 17–31.
109. Чернодаров, А.В. Прогнозирующий контроль и оценка уровня надежности инерциальных измерительных модулей в режиме реального времени / А.В. Чернодаров, В.А. Матюшин // Науч. вестник МГТУ ГА – 2009. – №148. – С. 71–83.
110. Черноусько, Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов / Ф.Л. Черноусько. – М.:Наука, 1988. – 320 с.
111. Шалыгин, А.С. Методы моделирования ситуационного управления движением беспилотных летательных аппаратов/ А.С. Шалыгин, Л.Н. Лысенко, О.А. Толпегин – М.: Машиностроение, 2012. – 584 с.
112. Шелудько, А.С. Построение модели измерений высокочувствительного датчика в виде разложения по системе процессов, заданных хаотическими отображениями /А.С. Шелудько, В.И. Ширяев // Измерения: состояние, перспективы развития. Тез. докл. Междунар. науч.-практ. конф. – Челябинск: ЮУрГУ, 2012. – Т. 1. – С. 252–254.
113. Шелудько, А.С. Алгоритм гарантированного оценивания параметра одномерного хаотического отображения / А.С. Шелудько, В.И. Ширяев // Информационные технологии. – 2015. – № 1. – С. 30–34.
114. Шестаков, А.Л. Модальный синтез измерительного преобразователя / А.Л. Шестаков // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1995. – № 4. – С. 67–75.
115. Шестаков, А.Л. Восстановление динамически искаженных сигналов испытательно-измерительных систем методом скользящих режимов / А.Л. Шестаков, М.Н. Бизяев // Известия РАН. Энергетика. – 2004. – № 6. – С. 119–130.
116. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова// Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.
117. Шестаков, А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях / А.Л. Шестаков. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. – 2013. – 257с.
118. Шестаков, А.Л. Оптимальные измерения детерминированных и стохастич-

- ческих сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Ю.В. Худяков // Труды XII всероссийского совещания по проблемам управления, Москва, ИПУ РАН, 16-19.06.2014 – Москва, 2014. – С. 1231–1242.
119. Ширяев, В.И. Синтез управления линейными системами при неполной информации / В.И. Ширяев // Изв. РАН. Техническая кибернетика – 1994. – № 3. – С. 229–237.
120. Ширяев, В.И. Алгоритмы управления динамическими системами в условиях неопределённости / В.И. Ширяев // Мехатроника – 2001. – № 8. – С. 2–5.
121. Ширяев, В.И. Оценивание состояния динамической системы в условиях неопределённости / В.И. Ширяев, В.И. Долбенков, Е.Д. Ильин, Е.О. Подivilова // Экстремальная робототехника. Сб. докл. Междунар. науч.-техн. конф. – СПб.: Изд-во «Политехника-сервис», 2011. – С. 234–243.
122. Ширяев, В.И. Синтез алгоритмов управления летательными аппаратами по неполным данным / В.И. Ширяев // Труды науч.-пр. конференции «Актуальные проблемы автоматизации и управления». – Челябинск: Изд.центр ЮУрГУ.– 2013. – С. 100–104.
123. Ширяев, В.И. Об аппроксимации информационных множеств в задаче минимаксной фильтрации / В.И. Ширяев, Е.О. Подivilова // ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ РОБОТОТЕХНИКА – робототехника для работы в условиях опасной окружающей среды. Труды 7-го международного симпозиума. – С-Пб: Изд-во «Политехника-сервис», 2013. –С. 454–459.
124. Ширяев, В.И. О построении информационных множеств в задаче гарантированного оценивания состояния динамических систем в условиях неполной и неточной информации / В.И. Ширяев, Е.О. Подivilова // Ракетно-космическая техника. Сер. XI. Системы управления ракетных комплексов: сборник статей по материалам XVIII Макеевских чтений, посвященных 95-летию со дня рождения ак. Н.А. Семихатова. – Т. 1. – Екатеринбург: НПОА, 2014. – С. 175–184.
125. Ширяев, В.И. Аппроксимация информационных множеств в задаче гарантированного оценивания состояния динамических систем в условиях неопределенности / В.И. Ширяев, Е.О. Подivilова // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2014. – № 7. – С. 10–16.

126. Ширяев, В.И. Об аппроксимации информационных множеств в задаче гарантированного оценивания состояния линейных динамических систем / В.И. Ширяев, Е.О. Подвиллова // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014г.: Труды. – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. – С. 2132–2141.
127. Ширяев, В.И. О гарантированных оценках состояния линейных динамических систем в условиях неопределенности / В.И. Ширяев, Е.О. Подвиллова // Известия высших учебных заведений. Уральский регион. – 2014. – № 2. – С. 52–59.
128. Ширяев, В.И. Об алгоритмах гарантированного оценивания вектора состояния большой размерности / В.И. Ширяев, Е.О. Подвиллова // Актуальные вопросы исследований в авионике: теория, обслуживание, разработки. Сб. тезисов докл. Всероссийской научно-практической конференции «АВИАТОР», Воронеж, 12-14 февраля 2014 г.–Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2014. – С. 157–159.
129. Школьный, Е.П. Атмосфера и управление движением летательных аппаратов / Е.П. Школьный, Л.А. Майборода. – Л.: Гидрометеиздат, 1973. – 310 с.
130. Шолохов, А.В. Разработка робастного алгоритма гарантированного оценивания состояния линейной управляемой системы / А.В. Шолохов // Компьютинг – 2011. – Т. 10, № 3. – С. 235–248.
131. Шориков, А.Ф. Алгоритм решения задачи апостериорного минимаксного оценивания состояний дискретных динамических систем. II / А.Ф. Шориков // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 9. – С. 139–150.
132. Шориков, А.Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах / А.Ф. Шориков. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997. – 248 с.
133. Эльясберг, П.Е. Измерительная информация: сколько её нужно? Как её обрабатывать? / П.Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1983. – 208 с.
134. Alamo, T. Guaranteed state estimation by zonotopes / T. Alamo, J.M. Bravo, E.F. Camacho // Automatica. – 2005. – no. 41. – P. 1035–1043.
135. Balint, A. Advances in Flight Control Systems / A. Balint. – InTech, 2011. –

- 296 pp.
136. Arulampalam, M.S. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking /M.S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, T. Clapp // Signal Processing, IEEE Transactions on. – 2002. – Vol. 50, no. 2. – P. 174–188.
 137. Baglietto, M. Active mode observation of switching systems based on set-valued estimation of the continuous state / M. Baglietto, G. Battistelli, L. Scardovi // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2009. – Vol. 19. – P. 1521–1540.
 138. Beckman, R.J. Outlier.....s/ R.J. Beckman, R.D. Cook // Technometrics. – Vol 25, №2. – P. 119–163.
 139. Bertsecas, D.P. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty /D.P. Bertsecas, I.B Rhodes// Automatica. – 1971. – Vol. 16, №. 2. – P. 117–128.
 140. Chernousko, F.L. Minimax control for a class of linear systems subject to disturbances / F.L. Chernousko // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2005. – Vol. 127,№ 3. – P. 535–548.
 141. Chisci, L. Block recursive parallelotopic bounding in set membership identification / L. Chisci, A. Garulli, A. Vicino, G. Zappa // Automatica. – 1998. – Vol. 34. – P. 15–22.
 142. Deur, J. An electronic throttle control strategy including compensation of friction and limp-home effects / J. Deur, D. Pavković, N. Perić et al. // IEEE Trans. Industry Appl – 2004. – Vol. 40, no. 3. – P. 821–834.
 143. Fokin, L.A. Preliminary Comparison of Kalman and Minimax Approaches to Error Estimation of Integrated Navigation System / L.A. Fokin, V.I. Shiryayev // IEEE International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON-2013) Proceedings, Sep. 12–13, 2013, Krasnoyarsk, Russia. – Krasnoyarsk: SFU, 2013. – P. 212–214.
 144. Kalman, R.E. A New Approach To Linear Filtering and Prediction Problems /R.E. Kalman // Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering. –1960. –№ 82. – P. 35–45.
 145. Kandepu, R. Applying the unscented Kalman filter for nonlinear state estimation / R. Kandepu, B. Foss, L. Imsland // Journal of Process Control.–

2008. – Vol. 18, № 7-8. – P. 753–768.
146. Karmarkar, N.K. A new polynomial-time algorithm for linear programming / N.K. Karmarkar // *Combinatorica*. – 1984. – № 4. – P. 373–395.
147. Kurzhanskiy, A.A. ELLIPSOIDAL TOOLBOX.: Tech. Rep. UCB/EECS-2006-46: EECS Department, University of California, Berkeley, 2006/ A.A. Kurzhanskiy, P. Varaiya // <http://www.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2006/EECS-2006-46.html>.
148. Kurzhanski, A.B. On ellipsoidal techniques for reachability analysis /A.B. Kurzhanski, P. Varaiya // *Optimization Methods and Software*. – 2000. – Vol. 17. – P. 177–237.
149. Le, V.T.H. A New Approach for Guaranteed State Estimation by Zonotopes / V.T.H. Le, T. Alamo, E.F. Camacho et al. // *Preprints of the 18th IFAC World Congress Milano (Italy) August 28 - September 2, 2011*. – 2011. – P. 9242–9247.
150. Le, V.T.H. Zonotopic guaranteed state estimation for uncertain systems / V.T.H. Le, C. Stoica, T. Alamo et al. // *Automatica*. – 2013. – № 49. – P. 3418–3424.
151. Lin, H. Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results / H. Lin, P. J. Antsaklis// *IEEE Trans. Automatic Control*. – 2009. – Vol. 54,№ 2. – P. 308–322.
152. Matasov, A.I. Estimators for uncertain dynamic systems / A.I. Matasov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 424 pp.
153. Ogata, K. Discrete-time control systems / K. Ogata. – New Jersey: Prentice-Hall,Inc. 1995. – 745 pp.
154. Podivilova, E. Performance evaluation of a sliding mode controller in discrete time domain using polyhedral approximation method / E. Podivilova, L. Aho, Y. Vidal // *CYBERNETICS AND PHYSICS*. – 2014. – Vol. 3, № 4. – P. 174–179.
155. Podivilova, E. Set-valued linear dynamical system state estimation with anomalous measurement errors / E. Podivilova, V. Shiryayev // *CEUR Workshop Proceedings. 3rd Russian Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies MMIT 2016; Ural State University of Railway Transport Yekaterinburg; Russian Federation; 16 November 2016*. – Vol. 1825. – P. 80-87.

156. Podivilova, E. Comparison of set-valued dynamical system state estimates [Электронный ресурс]/ E. Podivilova, V. Shiryaev, E.V. Gusev // IEEE Xplore. 2nd International Ural Conference on Measurements (UralCon), Chelyabinsk, Russia, 16-19 Oct. 2017. – DOI:10.1109/URALCON.2017.8120687.
157. Podivilova, E. Application of model and process features in set-valued dynamical system state estimation [Электронный ресурс]/ E. Podivilova, V. Shiryaev // IEEE Xplore. 2017 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM).– DOI:10.1109/ICIEAM.2017.8076144.
158. Podivilova, E Set-Valued Approach to Problem of Temperature Dynamic Measurements [Электронный ресурс]/ E. Podivilova, V. Shiryaev // IEEE Xplore. 2020 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM), Sochi, Russia, 2020. – DOI: 10.1109/ICIEAM48468.2020.9111890.
159. Potra Florian, A. Interior-point methods / A. Potra Florian, J. Wright Stephen// Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2000. – №124. – P. 281–302.
160. Pozo, F. Detection of structural changes through principal component analysis and multivariate statistical inference / F. Pozo, L.E. Mujica , M. Ruiz, I. Arruga, E. Podivilova // Structural Health Monitoring–2016.– №15.– P. 127-142.
161. Schweppe, F.C. Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs / F.C. Schweppe//IEEE Transactions on Automatic Control. – 1968. – №13(1). – P. 22–28.
162. Podivilova, E. Set-valued estimation of switching linear system: an application to an automotive throttle valve / E. Podivilova, A.N. Vargas, V. Shiryaev, L. Acho // International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields. – 2015. – Vol. 29, № 4. – P. 755–762.
163. Rosa, P. Fault detection and isolation of LTV systems using set-valued observers / P. Rosa, C.J. Silvestre, J.S. Shamma, M. Athans // Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. – 2010. – P. 768–773.
164. Shestakov, A. L. Dynamic error correction method/ A. L. Shestakov // IEEE

- Transactions on Instrumentation and Measurement. – 1996. – Vol. 45, № 1. – P.250–255.
165. Shiryaev, V.I. Set-valued Estimation of Linear Dynamical System State When Disturbance is Decomposed as a System of Functions / V.I. Shiryaev, E.O. Podivilova // Procedia Engineering. – 2015. – Vol. 129. – P. 252–258.
 166. Shiryaev, V.I. Algorithm of set-valued state estimation for strapdown inertial navigation systems [Электронный ресурс] / V.I. Shiryaev, E.O. Podivilova // IEEE Xplore, 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2016. – DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7910917.
 167. Shorten, R. Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems / R. Shorten, F. Wirth, O. Mason et al. // SIAM Rev. – 2007. – Vol. 49. – P. 545–592.
 168. Stevens, B.L. Aircraft Control and Simulation /B.L. Stevens, F.L. Lewis. – New York: Wiley, 1992. – 680 pp.
 169. Tsai, H. Generalized Linear Quadratic Gaussian and Loop Transfer Recovery Design of F-16 Aircraft Lateral Control System / Huan-Liang Tsai // Engineering Letters. – 2007. – Vol.14, Issue 1. – P. 1–6.
 170. Vargas, A.N. Robust H_2 static output feedback to control an automotive throttle valve / A.N. Vargas, L. Acho, G. Pujol et al. //Proc. American Control Conf. – 2014. – Portland, Oregon, USA.
 171. Witsenhausen H.S. A minimax control problem for sampled linear systems /H.S. Witsenhausen/ IEEE Trans. on Automatic Control. – 1968. – Vol.AC-13, No. 1. –pp. 5–21.
 172. Zhang, Y. Solving Large-Scale Linear Programs by Interior-Point Methods Under the MATLAB Environment: Tech. Rep. Technical Report TR96-01: Department of Mathematics and Statistics, University of Maryland, Baltimore County, Baltimore, MD, 1995.
 173. Zhou, B. A New Nonlinear Set Membership Filter Based on Guaranteed Bounding Ellipsoid Algorithm / Bo Zhou, Kun Qian, Xu-Dong Ma, Xian-Zhong Dai // Acta Automatica Sinica. – 2013. – Vol. 39, no. 2. – P. 146–154.

Приложение А. Акты внедрения



ЗАВОД «ДСТ-УРАЛ»

Завод « ДСТ-УРАЛ »

ООО «ДСТ – УРАЛ», Юридический адрес: 454091, Челябинск, ул. Сони Кривой, д. 37Б - 15
 Почтовый адрес: 454081, г. Челябинск, ул. Героев Танкограда, д. 28П
 тел/факс: +7 351/ 7724531, 32 www.tm10.ru

УТВЕРЖДАЮ

Директор ООО «ДСТ-УРАЛ»

Горелый Е.А.

«15» февраля 2017 г.



Акт

об использовании результатов диссертационного исследования

Научно-техническая комиссия в составе:

- Главного конструктора Танина-Шахова А.А.
- Коммерческого директора Калашникова Е.В.
- Главного инженера Павлова А.Б.

рассмотрела основные выводы и результаты диссертационного исследования Подвильовой Е.О. на тему «Гарантированное оценивание вектора состояния линейных динамических систем методом полиэдральной аппроксимации» и сделала следующий вывод:

Алгоритмы гарантированного оценивания, разработанные в диссертационной работе Подвильовой Е.О., являются актуальными, обладают научной новизной и могут быть использованы для повышения эффективности надежности и качества систем управления, разрабатываемых в ООО «ДСТ-УРАЛ». Разработанный программный комплекс позволяет на этапе проектирования исследовать точность и время вычисления гарантированных оценок вектора состояния динамических систем при различных исходных данных. Результаты данной диссертационной работы планируются к применению в разработках ООО «ДСТ-УРАЛ».

Председатель комиссии:

Члены комиссии:



УТВЕРЖДАЮ
 Главный конструктор
 АО «НПО Автоматики», академик МАНУД
С.Ф. Дерюгин

Акт

об использовании результатов диссертационной работы Е.О. Подивиловой, посвященной разработке алгоритмов полиэдральной аппроксимации в задаче гарантированного оценивания вектора состояния линейных динамических систем, в разработках АО «НПО автоматики имени академика Н.А. Семихатова».

Научно-техническая комиссия в составе: советника генерального директора НПО автоматики, КТН, КЭН, академика МАНУД Л.Н. Шалимова, начальника НПК 055, академика РИА А.Н. Штыкова, начальника лаборатории 055/1, КТН, члена-корреспондента АИН Г.В. Шестакова составила настоящий акт в том, что разработанные в диссертационной работе Е.О. Подивиловой методы гарантированных оценок вектора состояния динамических систем использованы в решении задач обработки, выделения полезной информации и анализа точности волоконно-оптического гироскопа ВОГК-1, разработки АО «НПО автоматики» имени академика Н.А. Семихатова.

Председатель комиссии:

Советник генерального директора НПОА,
 академик МАНУД, КТН, КЭН

 Л.Н. Шалимов

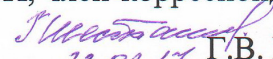
Члены комиссии:

Начальник НПК 055 НПОА, академик РИА

 А.Н. Штыков

Начальник лаборатории 055/1 НПОА,

КТН, член-корреспондент АИН


 22.02.17г. Г.В. Шестаков

Приложение Б. Исходные данные для эксперимента с дроссельной заслонкой

1	4,0355	-0,0001	51	7,4262	0,5201	101	4,0189	2,1218	151	8,7801	2,4791	201	0,1748	3,4397
2	4,1742	0,0003	52	7,3522	0,5477	102	4,1276	2,1405	152	8,6241	2,4929	202	0,1840	3,4409
3	4,3142	0,0008	53	7,2724	0,5760	103	4,2461	2,1582	153	8,4566	2,5075	203	0,2021	3,4407
4	4,4550	0,0014	54	7,1870	0,6050	104	4,3741	2,1748	154	8,2783	2,5231	204	0,2286	3,4391
5	4,5964	0,0023	55	7,0962	0,6347	105	4,5111	2,1905	155	8,0897	2,5395	205	0,2633	3,4361
6	4,7381	0,0034	56	7,0002	0,6651	106	4,6567	2,2051	156	7,8915	2,5568	206	0,3059	3,4319
7	4,8798	0,0047	57	6,8992	0,6961	107	4,8104	2,2188	157	7,6844	2,5750	207	0,3561	3,4262
8	5,0212	0,0062	58	6,7937	0,7278	108	4,9717	2,2316	158	7,4692	2,5940	208	0,4136	3,4193
9	5,1619	0,0079	59	6,6838	0,7601	109	5,1399	2,2435	159	7,2465	2,6138	209	0,4780	3,4111
10	5,3018	0,0100	60	6,5698	0,7931	110	5,3145	2,2545	160	7,0171	2,6344	210	0,5490	3,4015
11	5,4404	0,0123	61	6,4522	0,8266	111	5,4948	2,2647	161	6,7819	2,6558	211	0,6261	3,3907
12	5,5775	0,0148	62	6,3313	0,8606	112	5,6800	2,2740	162	6,5416	2,6778	212	0,7092	3,3785
13	5,7129	0,0177	63	6,2074	0,8952	113	5,8695	2,2826	163	6,2970	2,7005	213	0,7977	3,3651
14	5,8461	0,0209	64	6,0810	0,9301	114	6,0625	2,2905	164	6,0489	2,7238	214	0,8913	3,3503
15	5,9770	0,0244	65	5,9525	0,9655	115	6,2582	2,2977	165	5,7982	2,7477	215	0,9896	3,3344
16	6,1053	0,0282	66	5,8224	1,0014	116	6,4557	2,3043	166	5,5457	2,7722	216	1,0922	3,3172
17	6,2306	0,0324	67	5,6910	1,0375	117	6,6543	2,3102	167	5,2921	2,7972	217	1,1988	3,2988
18	6,3528	0,0370	68	5,5589	1,0738	118	6,8530	2,3156	168	5,0383	2,8225	218	1,3089	3,2793
19	6,4716	0,0420	69	5,4266	1,1104	119	7,0511	2,3205	169	4,7851	2,8483	219	1,4221	3,2586
20	6,5868	0,0473	70	5,2945	1,1472	120	7,2476	2,3249	170	4,5331	2,8743	220	1,5380	3,2368
21	6,6980	0,0531	71	5,1632	1,1842	121	7,4416	2,3288	171	4,2833	2,9005	221	1,6563	3,2139
22	6,8051	0,0593	72	5,0332	1,2212	122	7,6324	2,3323	172	4,0362	2,9269	222	1,7766	3,1901
23	6,9079	0,0659	73	4,9050	1,2582	123	7,8190	2,3355	173	3,7927	2,9534	223	1,8983	3,1654
24	7,0062	0,0730	74	4,7792	1,2953	124	8,0005	2,3384	174	3,5533	2,9799	224	2,0212	3,1398
25	7,0996	0,0806	75	4,6564	1,3324	125	8,1762	2,3410	175	3,3187	3,0063	225	2,1449	3,1133
26	7,1881	0,0887	76	4,5370	1,3693	126	8,3452	2,3433	176	3,0895	3,0325	226	2,2689	3,0859
27	7,2715	0,0974	77	4,4216	1,4061	127	8,5067	2,3454	177	2,8663	3,0585	227	2,3929	3,0578
28	7,3495	0,1066	78	4,3108	1,4427	128	8,6599	2,3474	178	2,6497	3,0842	228	2,5164	3,0290
29	7,4221	0,1165	79	4,2051	1,4792	129	8,8040	2,3494	179	2,4401	3,1095	229	2,6392	2,9994
30	7,4890	0,1270	80	4,1051	1,5153	130	8,9385	2,3513	180	2,2380	3,1343	230	2,7608	2,9692
31	7,5501	0,1382	81	4,0112	1,5510	131	9,0626	2,3532	181	2,0439	3,1585	231	2,8809	2,9384
32	7,6053	0,1500	82	3,9240	1,5864	132	9,1756	2,3552	182	1,8582	3,1821	232	2,9991	2,9070
33	7,6544	0,1625	83	3,8439	1,6212	133	9,2770	2,3574	183	1,6811	3,2051	233	3,1151	2,8750
34	7,6974	0,1758	84	3,7714	1,6555	134	9,3663	2,3597	184	1,5131	3,2272	234	3,2285	2,8427
35	7,7340	0,1898	85	3,7071	1,6893	135	9,4430	2,3623	185	1,3545	3,2485	235	3,3390	2,8099
36	7,7643	0,2046	86	3,6512	1,7225	136	9,5066	2,3652	186	1,2053	3,2689	236	3,4464	2,7769
37	7,7880	0,2200	87	3,6042	1,7550	137	9,5568	2,3685	187	1,0660	3,2883	237	3,5502	2,7435
38	7,8053	0,2362	88	3,5666	1,7869	138	9,5933	2,3722	188	0,9366	3,3068	238	3,6503	2,7101
39	7,8159	0,2532	89	3,5385	1,8181	139	9,6157	2,3763	189	0,8172	3,3242	239	3,7463	2,6764
40	7,8199	0,2710	90	3,5203	1,8484	140	9,6240	2,3811	190	0,7081	3,3405	240	3,8380	2,6428
41	7,8172	0,2895	91	3,5123	1,8779	141	9,6179	2,3864	191	0,6091	3,3557	241	3,9252	2,6090
42	7,8078	0,3089	92	3,5147	1,9066	142	9,5973	2,3923	192	0,5205	3,3697	242	4,0076	2,5754
43	7,7917	0,3291	93	3,5277	1,9344	143	9,5624	2,3990	193	0,4421	3,3826	243	4,0851	2,5418
44	7,7689	0,3501	94	3,5513	1,9613	144	9,5130	2,4063	194	0,3739	3,3942	244	4,1575	2,5083
45	7,7394	0,3719	95	3,5858	1,9873	145	9,4493	2,4143	195	0,3160	3,4046	245	4,2245	2,4749
46	7,7033	0,3945	96	3,6312	2,0123	146	9,3715	2,4231	196	0,2681	3,4137	246	4,2862	2,4418
47	7,6607	0,4180	97	3,6874	2,0363	147	9,2798	2,4327	197	0,2301	3,4216	247	4,3424	2,4090
48	7,6115	0,4423	98	3,7544	2,0592	148	9,1744	2,4430	198	0,2020	3,4281	248	4,3930	2,3766
49	7,5560	0,4674	99	3,8321	2,0812	149	9,0558	2,4542	199	0,1835	3,4333	249	4,4379	2,3444
50	7,4941	0,4933	100	3,9203	2,1020	150	8,9242	2,4662	200	0,1745	3,4372	250	4,4771	2,3128

251	4,5107	2,2816	301	5,1112	1,6547	351	8,5343	2,0442	401	3,7766	3,4512	451	7,5140	3,2555
252	4,5386	2,2510	302	5,2535	1,6545	352	8,3306	2,0713	402	3,9491	3,4564	452	7,4000	3,2605
253	4,5609	2,2209	303	5,4029	1,6545	353	8,1182	2,0992	403	4,1271	3,4604	453	7,2815	3,2661
254	4,5777	2,1915	304	5,5590	1,6545	354	7,8978	2,1282	404	4,3097	3,4632	454	7,1591	3,2722
255	4,5891	2,1628	305	5,7213	1,6546	355	7,6703	2,1581	405	4,4960	3,4649	455	7,0330	3,2789
256	4,5952	2,1347	306	5,8894	1,6549	356	7,4368	2,1889	406	4,6853	3,4655	456	6,9038	3,2861
257	4,5962	2,1074	307	6,0627	1,6552	357	7,1982	2,2206	407	4,8766	3,4650	457	6,7718	3,2939
258	4,5922	2,0809	308	6,2406	1,6556	358	6,9555	2,2531	408	5,0692	3,4635	458	6,6375	3,3021
259	4,5836	2,0552	309	6,4226	1,6560	359	6,7096	2,2863	409	5,2623	3,4610	459	6,5014	3,3107
260	4,5705	2,0304	310	6,6081	1,6565	360	6,4618	2,3202	410	5,4550	3,4577	460	6,3638	3,3197
261	4,5532	2,0064	311	6,7962	1,6571	361	6,2129	2,3547	411	5,6467	3,4534	461	6,2253	3,3291
262	4,5321	1,9832	312	6,9864	1,6578	362	5,9641	2,3898	412	5,8365	3,4484	462	6,0862	3,3389
263	4,5074	1,9609	313	7,1778	1,6586	363	5,7164	2,4254	413	6,0237	3,4426	463	5,9470	3,3489
264	4,4795	1,9395	314	7,3697	1,6595	364	5,4708	2,4614	414	6,2076	3,4362	464	5,8081	3,3593
265	4,4487	1,9190	315	7,5614	1,6605	365	5,2284	2,4979	415	6,3876	3,4291	465	5,6699	3,3699
266	4,4155	1,8994	316	7,7520	1,6617	366	4,9903	2,5346	416	6,5629	3,4215	466	5,5330	3,3807
267	4,3802	1,8807	317	7,9406	1,6630	367	4,7573	2,5716	417	6,7330	3,4134	467	5,3976	3,3915
268	4,3433	1,8630	318	8,1265	1,6645	368	4,5305	2,6088	418	6,8974	3,4050	468	5,2643	3,4025
269	4,3052	1,8462	319	8,3088	1,6663	369	4,3108	2,6461	419	7,0553	3,3962	469	5,1334	3,4135
270	4,2664	1,8303	320	8,4867	1,6682	370	4,0991	2,6834	420	7,2065	3,3872	470	5,0054	3,4245
271	4,2274	1,8153	321	8,6593	1,6705	371	3,8963	2,7207	421	7,3503	3,3780	471	4,8807	3,4356
272	4,1885	1,8012	322	8,8259	1,6730	372	3,7031	2,7577	422	7,4864	3,3687	472	4,7596	3,4465
273	4,1504	1,7879	323	8,9855	1,6759	373	3,5204	2,7946	423	7,6143	3,3593	473	4,6426	3,4574
274	4,1135	1,7755	324	9,1373	1,6792	374	3,3487	2,8311	424	7,7338	3,3500	474	4,5300	3,4682
275	4,0783	1,7639	325	9,2807	1,6830	375	3,1889	2,8671	425	7,8445	3,3409	475	4,4222	3,4787
276	4,0454	1,7531	326	9,4148	1,6872	376	3,0414	2,9027	426	7,9462	3,3318	476	4,3197	3,4890
277	4,0151	1,7431	327	9,5390	1,6919	377	2,9068	2,9377	427	8,0386	3,3230	477	4,2226	3,4990
278	3,9880	1,7339	328	9,6525	1,6971	378	2,7856	2,9720	428	8,1216	3,3144	478	4,1314	3,5087
279	3,9646	1,7254	329	9,7547	1,7029	379	2,6782	3,0056	429	8,1949	3,3061	479	4,0465	3,5181
280	3,9453	1,7175	330	9,8449	1,7093	380	2,5848	3,0384	430	8,2586	3,2981	480	3,9681	3,5271
281	3,9307	1,7102	331	9,9227	1,7163	381	2,5059	3,0703	431	8,3125	3,2905	481	3,8964	3,5357
282	3,9211	1,7036	332	9,9875	1,7241	382	2,4415	3,1012	432	8,3566	3,2834	482	3,8319	3,5439
283	3,9171	1,6976	333	10,0389	1,7326	383	2,3917	3,1312	433	8,3909	3,2767	483	3,7748	3,5516
284	3,9190	1,6921	334	10,0765	1,7418	384	2,3568	3,1600	434	8,4154	3,2704	484	3,7252	3,5590
285	3,9271	1,6870	335	10,0999	1,7519	385	2,3366	3,1876	435	8,4302	3,2646	485	3,6835	3,5659
286	3,9420	1,6825	336	10,1089	1,7628	386	2,3311	3,2140	436	8,4355	3,2594	486	3,6499	3,5723
287	3,9639	1,6785	337	10,1033	1,7746	387	2,3401	3,2392	437	8,4313	3,2547	487	3,6245	3,5783
288	3,9931	1,6748	338	10,0828	1,7873	388	2,3635	3,2631	438	8,4178	3,2505	488	3,6075	3,5838
289	4,0299	1,6716	339	10,0476	1,8009	389	2,4009	3,2857	439	8,3952	3,2470	489	3,5990	3,5888
290	4,0745	1,6686	340	9,9975	1,8155	390	2,4521	3,3069	440	8,3638	3,2440	490	3,5992	3,5932
291	4,1272	1,6661	341	9,9326	1,8312	391	2,5166	3,3269	441	8,3236	3,2418	491	3,6081	3,5972
292	4,1881	1,6639	342	9,8530	1,8479	392	2,5941	3,3455	442	8,2751	3,2401	492	3,6258	3,6006
293	4,2573	1,6620	343	9,7590	1,8656	393	2,6840	3,3627	443	8,2185	3,2392	493	3,6524	3,6036
294	4,3350	1,6603	344	9,6508	1,8843	394	2,7857	3,3785	444	8,1542	3,2388	494	3,6878	3,6060
295	4,4210	1,6589	345	9,5289	1,9040	395	2,8988	3,3929	445	8,0823	3,2392	495	3,7321	3,6079
296	4,5155	1,6577	346	9,3935	1,9248	396	3,0225	3,4059	446	8,0033	3,2402	496	3,7851	3,6093
297	4,6185	1,6567	347	9,2451	1,9466	397	3,1562	3,4177	447	7,9175	3,2419	497	3,8468	3,6102
298	4,7296	1,6559	348	9,0844	1,9694	398	3,2993	3,4280	448	7,8253	3,2443	498	3,9171	3,6106
299	4,8490	1,6553	349	8,9119	1,9933	399	3,4508	3,4370	449	7,7271	3,2474	499	3,9959	3,6105
300	4,9762	1,6549	350	8,7283	2,0183	400	3,6102	3,4447	450	7,6232	3,2511	500	4,0830	3,6100

501	4,1782	3,6089	551	10,2815	3,4333	601	9,3415	4,5315	651	11,5198	5,6280	701	7,0760	6,7829
502	4,2812	3,6074	552	10,2768	3,4396	602	9,3945	4,5586	652	11,5025	5,6501	702	6,9302	6,7979
503	4,3919	3,6054	553	10,2661	3,4467	603	9,4501	4,5854	653	11,4819	5,6724	703	6,7832	6,8121
504	4,5098	3,6029	554	10,2497	3,4546	604	9,5080	4,6119	654	11,4580	5,6949	704	6,6352	6,8255
505	4,6349	3,6000	555	10,2279	3,4634	605	9,5681	4,6380	655	11,4308	5,7177	705	6,4862	6,8381
506	4,7666	3,5967	556	10,2012	3,4730	606	9,6301	4,6638	656	11,4003	5,7406	706	6,3364	6,8500
507	4,9046	3,5930	557	10,1698	3,4835	607	9,6938	4,6893	657	11,3665	5,7638	707	6,1858	6,8610
508	5,0485	3,5888	558	10,1342	3,4949	608	9,7589	4,7144	658	11,3295	5,7872	708	6,0348	6,8713
509	5,1980	3,5842	559	10,0947	3,5071	609	9,8254	4,7392	659	11,2892	5,8108	709	5,8833	6,8807
510	5,3526	3,5793	560	10,0517	3,5202	610	9,8928	4,7638	660	11,2457	5,8346	710	5,7316	6,8893
511	5,5118	3,5740	561	10,0057	3,5342	611	9,9611	4,7880	661	11,1989	5,8587	711	5,5798	6,8972
512	5,6752	3,5685	562	9,9570	3,5490	612	10,0300	4,8119	662	11,1489	5,8830	712	5,4282	6,9042
513	5,8422	3,5626	563	9,9061	3,5647	613	10,0993	4,8355	663	11,0958	5,9074	713	5,2768	6,9104
514	6,0124	3,5564	564	9,8533	3,5811	614	10,1687	4,8587	664	11,0394	5,9320	714	5,1260	6,9158
515	6,1853	3,5501	565	9,7992	3,5984	615	10,2382	4,8817	665	10,9799	5,9568	715	4,9758	6,9204
516	6,3602	3,5435	566	9,7441	3,6165	616	10,3074	4,9043	666	10,9173	5,9817	716	4,8266	6,9242
517	6,5368	3,5367	567	9,6884	3,6354	617	10,3761	4,9268	667	10,8516	6,0068	717	4,6785	6,9272
518	6,7144	3,5298	568	9,6325	3,6551	618	10,4443	4,9489	668	10,7828	6,0318	718	4,5317	6,9294
519	6,8925	3,5228	569	9,5768	3,6756	619	10,5116	4,9709	669	10,7111	6,0571	719	4,3866	6,9307
520	7,0705	3,5157	570	9,5217	3,6968	620	10,5780	4,9926	670	10,6363	6,0824	720	4,2434	6,9313
521	7,2479	3,5086	571	9,4675	3,7187	621	10,6433	5,0140	671	10,5586	6,1078	721	4,1022	6,9311
522	7,4242	3,5015	572	9,4146	3,7413	622	10,7073	5,0352	672	10,4779	6,1332	722	3,9634	6,9300
523	7,5988	3,4944	573	9,3634	3,7645	623	10,7698	5,0562	673	10,3944	6,1586	723	3,8272	6,9281
524	7,7712	3,4873	574	9,3142	3,7883	624	10,8307	5,0770	674	10,3080	6,1841	724	3,6938	6,9254
525	7,9408	3,4804	575	9,2672	3,8126	625	10,8898	5,0975	675	10,2189	6,2096	725	3,5635	6,9219
526	8,1073	3,4737	576	9,2227	3,8374	626	10,9471	5,1180	676	10,1270	6,2350	726	3,4367	6,9175
527	8,2700	3,4671	577	9,1811	3,8627	627	11,0025	5,1382	677	10,0324	6,2604	727	3,3134	6,9122
528	8,4286	3,4607	578	9,1425	3,8884	628	11,0557	5,1584	678	9,9351	6,2858	728	3,1940	6,9060
529	8,5826	3,4547	579	9,1073	3,9146	629	11,1066	5,1786	679	9,8352	6,3111	729	3,0788	6,8988
530	8,7316	3,4489	580	9,0755	3,9412	630	11,1553	5,1986	680	9,7328	6,3362	730	2,9680	6,8909
531	8,8751	3,4433	581	9,0474	3,9682	631	11,2015	5,2186	681	9,6279	6,3612	731	2,8617	6,8819
532	9,0129	3,4381	582	9,0232	3,9955	632	11,2452	5,2385	682	9,5204	6,3859	732	2,7604	6,8720
533	9,1446	3,4333	583	9,0029	4,0232	633	11,2864	5,2584	683	9,4106	6,4105	733	2,6641	6,8612
534	9,2698	3,4288	584	8,9866	4,0510	634	11,3248	5,2783	684	9,2983	6,4348	734	2,5732	6,8495
535	9,3884	3,4247	585	8,9746	4,0792	635	11,3606	5,2981	685	9,1838	6,4588	735	2,4878	6,8367
536	9,5000	3,4211	586	8,9668	4,1074	636	11,3935	5,3180	686	9,0669	6,4825	736	2,4081	6,8229
537	9,6045	3,4179	587	8,9633	4,1359	637	11,4235	5,3379	687	8,9479	6,5060	737	2,3344	6,8081
538	9,7017	3,4152	588	8,9641	4,1645	638	11,4507	5,3578	688	8,8266	6,5291	738	2,2669	6,7922
539	9,7914	3,4130	589	8,9692	4,1931	639	11,4748	5,3778	689	8,7032	6,5519	739	2,2056	6,7753
540	9,8735	3,4113	590	8,9786	4,2218	640	11,4959	5,3978	690	8,5777	6,5742	740	2,1509	6,7573
541	9,9480	3,4101	591	8,9922	4,2504	641	11,5140	5,4179	691	8,4502	6,5960	741	2,1029	6,7382
542	10,0149	3,4096	592	9,0100	4,2791	642	11,5290	5,4382	692	8,3207	6,6174	742	2,0616	6,7180
543	10,0740	3,4096	593	9,0320	4,3077	643	11,5408	5,4586	693	8,1893	6,6383	743	2,0273	6,6968
544	10,1256	3,4102	594	9,0580	4,3362	644	11,5495	5,4791	694	8,0560	6,6586	744	2,0001	6,6745
545	10,1695	3,4114	595	9,0879	4,3646	645	11,5550	5,4997	695	7,9209	6,6783	745	1,9801	6,6511
546	10,2060	3,4133	596	9,1216	4,3929	646	11,5572	5,5206	696	7,7841	6,6974	746	1,9674	6,6266
547	10,2351	3,4159	597	9,1589	4,4210	647	11,5563	5,5417	697	7,6455	6,7158	747	1,9620	6,6011
548	10,2570	3,4191	598	9,1997	4,4490	648	11,5521	5,5630	698	7,5054	6,7337	748	1,9642	6,5745
549	10,2719	3,4231	599	9,2439	4,4767	649	11,5446	5,5845	699	7,3637	6,7508	749	1,9738	6,5467
550	10,2800	3,4278	600	9,2912	4,5042	650	11,5339	5,6062	700	7,2205	6,7672	750	1,9911	6,5178

751	2,0160	6,4877	801	10,1110	4,2215	851	5,5075	4,3219	901	2,1805	4,7052	951	4,2518	3,0313
752	2,0485	6,4565	802	10,2698	4,1839	852	5,2897	4,3515	902	2,1903	4,6840	952	4,3800	2,9959
753	2,0888	6,4243	803	10,4202	4,1478	853	5,0771	4,3811	903	2,1992	4,6618	953	4,5105	2,9609
754	2,1367	6,3909	804	10,5616	4,1131	854	4,8699	4,4105	904	2,2072	4,6388	954	4,6429	2,9262
755	2,1923	6,3564	805	10,6936	4,0800	855	4,6688	4,4396	905	2,2143	4,6147	955	4,7769	2,8919
756	2,2556	6,3209	806	10,8156	4,0486	856	4,4739	4,4684	906	2,2205	4,5899	956	4,9121	2,8580
757	2,3265	6,2844	807	10,9273	4,0189	857	4,2859	4,4968	907	2,2259	4,5642	957	5,0480	2,8246
758	2,4049	6,2468	808	11,0281	3,9910	858	4,1048	4,5248	908	2,2304	4,5378	958	5,1842	2,7917
759	2,4909	6,2084	809	11,1178	3,9647	859	3,9311	4,5521	909	2,2343	4,5105	959	5,3204	2,7593
760	2,5844	6,1689	810	11,1960	3,9402	860	3,7649	4,5788	910	2,2376	4,4826	960	5,4561	2,7276
761	2,6852	6,1285	811	11,2622	3,9175	861	3,6065	4,6048	911	2,2404	4,4539	961	5,5907	2,6965
762	2,7933	6,0871	812	11,3163	3,8967	862	3,4561	4,6299	912	2,2429	4,4246	962	5,7240	2,6660
763	2,9085	6,0448	813	11,3580	3,8776	863	3,3136	4,6542	913	2,2453	4,3946	963	5,8555	2,6361
764	3,0309	6,0017	814	11,3871	3,8604	864	3,1793	4,6775	914	2,2477	4,3640	964	5,9846	2,6069
765	3,1601	5,9577	815	11,4034	3,8451	865	3,0531	4,6999	915	2,2504	4,3328	965	6,1111	2,5784
766	3,2961	5,9129	816	11,4067	3,8317	866	2,9351	4,7212	916	2,2535	4,3010	966	6,2344	2,5506
767	3,4387	5,8672	817	11,3971	3,8201	867	2,8252	4,7414	917	2,2573	4,2687	967	6,3542	2,5236
768	3,5878	5,8208	818	11,3744	3,8104	868	2,7234	4,7605	918	2,2621	4,2358	968	6,4701	2,4974
769	3,7432	5,7736	819	11,3387	3,8024	869	2,6294	4,7785	919	2,2679	4,2025	969	6,5816	2,4721
770	3,9046	5,7258	820	11,2901	3,7963	870	2,5433	4,7954	920	2,2752	4,1687	970	6,6885	2,4476
771	4,0718	5,6772	821	11,2285	3,7921	871	2,4648	4,8110	921	2,2842	4,1345	971	6,7904	2,4241
772	4,2447	5,6281	822	11,1543	3,7896	872	2,3937	4,8254	922	2,2950	4,0999	972	6,8869	2,4016
773	4,4230	5,5785	823	11,0675	3,7889	873	2,3298	4,8386	923	2,3081	4,0649	973	6,9779	2,3800
774	4,6064	5,5285	824	10,9684	3,7901	874	2,2729	4,8506	924	2,3236	4,0295	974	7,0629	2,3595
775	4,7946	5,4781	825	10,8574	3,7931	875	2,2226	4,8613	925	2,3417	3,9938	975	7,1418	2,3401
776	4,9874	5,4273	826	10,7346	3,7977	876	2,1787	4,8708	926	2,3628	3,9577	976	7,2144	2,3217
777	5,1845	5,3762	827	10,6006	3,8041	877	2,1409	4,8789	927	2,3871	3,9214	977	7,2804	2,3044
778	5,3855	5,3248	828	10,4557	3,8120	878	2,1089	4,8858	928	2,4147	3,8849	978	7,3398	2,2881
779	5,5901	5,2732	829	10,3004	3,8216	879	2,0823	4,8915	929	2,4460	3,8482	979	7,3924	2,2729
780	5,7979	5,2215	830	10,1352	3,8327	880	2,0608	4,8958	930	2,4811	3,8113	980	7,4381	2,2588
781	6,0086	5,1697	831	9,9606	3,8453	881	2,0440	4,8990	931	2,5202	3,7743	981	7,4768	2,2457
782	6,2218	5,1179	832	9,7771	3,8594	882	2,0315	4,9008	932	2,5635	3,7371	982	7,5087	2,2338
783	6,4371	5,0662	833	9,5854	3,8749	883	2,0231	4,9014	933	2,6111	3,6997	983	7,5335	2,2230
784	6,6540	5,0146	834	9,3862	3,8917	884	2,0183	4,9008	934	2,6632	3,6623	984	7,5515	2,2133
785	6,8721	4,9631	835	9,1799	3,9098	885	2,0168	4,8989	935	2,7200	3,6247	985	7,5627	2,2046
786	7,0910	4,9119	836	8,9674	3,9291	886	2,0182	4,8957	936	2,7814	3,5871	986	7,5672	2,1970
787	7,3101	4,8610	837	8,7493	3,9495	887	2,0221	4,8912	937	2,8476	3,5494	987	7,5651	2,1904
788	7,5290	4,8104	838	8,5263	3,9710	888	2,0283	4,8856	938	2,9186	3,5116	988	7,5566	2,1849
789	7,7471	4,7604	839	8,2991	3,9936	889	2,0364	4,8786	939	2,9944	3,4739	989	7,5420	2,1804
790	7,9641	4,7109	840	8,0684	4,0172	890	2,0460	4,8705	940	3,0751	3,4362	990	7,5214	2,1769
791	8,1792	4,6620	841	7,8351	4,0417	891	2,0569	4,8611	941	3,1605	3,3986	991	7,4951	2,1744
792	8,3921	4,6138	842	7,5997	4,0671	892	2,0688	4,8505	942	3,2507	3,3611	992	7,4634	2,1729
793	8,6021	4,5664	843	7,3631	4,0933	893	2,0814	4,8388	943	3,3456	3,3238	993	7,4267	2,1724
794	8,8086	4,5197	844	7,1259	4,1202	894	2,0944	4,8258	944	3,4449	3,2865	994	7,3852	2,1728
795	9,0112	4,4739	845	6,8889	4,1478	895	2,1076	4,8117	945	3,5487	3,2495	995	7,3394	2,1742
796	9,2092	4,4290	846	6,6527	4,1759	896	2,1208	4,7966	946	3,6566	3,2126	996	7,2895	2,1765
797	9,4021	4,3851	847	6,4181	4,2044	897	2,1337	4,7803	947	3,7686	3,1758	997	7,2360	2,1796
798	9,5893	4,3424	848	6,1856	4,2334	898	2,1463	4,7630	948	3,8844	3,1393	998	7,1794	2,1837
799	9,7702	4,3008	849	5,9559	4,2628	899	2,1584	4,7447	949	4,0037	3,1030	999	7,1200	2,1886
800	9,9443	4,2605	850	5,7297	4,2922	900	2,1698	4,7254	950	4,1262	3,0670	1000	7,0582	2,1942

Эксперимент 2

Время	Т°С												
0:00:01	-3,267	0:00:39	188,62	0:01:19	339,542	0:01:59	378,916	0:02:38	389,554	0:03:18	392,986	0:03:57	394,253
0:00:02	-3,272	0:00:40	194,111	0:01:20	341,074	0:01:59	379,343	0:02:39	389,669	0:03:19	393,032	0:03:58	394,301
0:00:02	-3,272	0:00:41	199,464	0:01:21	342,574	0:02:00	379,738	0:02:40	389,788	0:03:19	393,05	0:03:59	394,287
0:00:02	-3,277	0:00:42	204,676	0:01:22	343,996	0:02:01	380,095	0:02:41	389,894	0:03:20	393,097	0:04:00	394,308
0:00:03	-3,259	0:00:43	209,804	0:01:22	345,438	0:02:02	380,447	0:02:42	390,022	0:03:21	393,15	0:04:01	394,325
0:00:04	-3,265	0:00:44	214,788	0:01:23	346,833	0:02:03	380,83	0:02:42	390,108	0:03:22	393,221	0:04:02	394,371
0:00:05	-3,276	0:00:45	219,66	0:01:24	348,18	0:02:04	381,14	0:02:43	390,202	0:03:23	393,197	0:04:02	394,352
0:00:06	-3,263	0:00:45	224,378	0:01:25	349,455	0:02:05	381,514	0:02:44	390,327	0:03:24	393,247	0:04:03	394,377
0:00:07	-3,254	0:00:46	229,081	0:01:26	350,703	0:02:05	381,82	0:02:45	390,434	0:03:25	393,287	0:04:04	394,384
0:00:08	-3,21	0:00:47	233,601	0:01:27	351,945	0:02:06	382,156	0:02:46	390,52	0:03:25	393,343	0:04:05	394,393
0:00:08	-3,256	0:00:48	238,027	0:01:28	353,108	0:02:07	382,427	0:02:47	390,618	0:03:26	393,366	0:04:06	394,416
0:00:09	-3,217	0:00:49	242,348	0:01:28	354,309	0:02:08	382,759	0:02:48	390,714	0:03:27	393,414	0:04:07	394,451
0:00:10	-3,222	0:00:50	246,537	0:01:29	355,388	0:02:09	383,054	0:02:48	390,794	0:03:28	393,429	0:04:08	394,481
0:00:11	-3,257	0:00:51	250,675	0:01:30	356,468	0:02:10	383,342	0:02:49	390,902	0:03:29	393,48	0:04:08	394,476
0:00:12	-3,236	0:00:51	254,671	0:01:31	357,501	0:02:11	383,602	0:02:50	390,967	0:03:30	393,483	0:04:09	394,494
0:00:13	-3,275	0:00:52	258,625	0:01:32	358,534	0:02:11	383,862	0:02:51	391,082	0:03:31	393,526	0:04:10	394,499
0:00:14	-3,28	0:00:53	262,452	0:01:33	359,518	0:02:12	384,15	0:02:52	391,152	0:03:31	393,558	0:04:11	394,499
0:00:14	-3,281	0:00:54	266,159	0:01:34	360,488	0:02:13	384,411	0:02:53	391,265	0:03:32	393,577	0:04:12	394,516
0:00:15	-3,168	0:00:55	269,807	0:01:34	361,424	0:02:14	384,651	0:02:54	391,327	0:03:33	393,634	0:04:13	394,5
0:00:16	-2,077	0:00:56	273,343	0:01:35	362,325	0:02:15	384,901	0:02:54	391,386	0:03:34	393,618	0:04:14	394,535
0:00:17	1,671	0:00:57	276,789	0:01:36	363,209	0:02:16	385,134	0:02:55	391,502	0:03:35	393,675	0:04:14	394,541
0:00:18	8,256	0:00:57	280,159	0:01:37	364,085	0:02:17	385,363	0:02:56	391,539	0:03:36	393,716	0:04:15	394,581
0:00:19	16,849	0:00:58	283,446	0:01:38	364,872	0:02:17	385,588	0:02:57	391,624	0:03:37	393,729	0:04:16	394,576
0:00:20	26,483	0:00:59	286,664	0:01:39	365,669	0:02:18	385,813	0:02:58	391,689	0:03:37	393,769	0:04:17	394,621
0:00:20	36,411	0:01:00	289,773	0:01:40	366,483	0:02:19	386,029	0:02:59	391,766	0:03:38	393,785	0:04:18	394,616
0:00:21	46,198	0:01:01	292,808	0:01:41	367,249	0:02:20	386,236	0:03:00	391,849	0:03:39	393,79	0:04:19	394,592
0:00:22	55,943	0:01:02	295,792	0:01:41	367,991	0:02:21	386,424	0:03:01	391,898	0:03:40	393,851	0:04:20	394,624
0:00:23	65,342	0:01:03	298,678	0:01:42	368,684	0:02:22	386,616	0:03:01	391,976	0:03:41	393,864	0:04:20	394,626
0:00:24	73,342	0:01:04	301,407	0:01:43	369,39	0:02:23	386,81	0:03:02	392,02	0:03:42	393,889	0:04:21	394,621
0:00:25	79,834	0:01:04	304,14	0:01:44	370,049	0:02:24	387,018	0:03:03	392,091	0:03:43	393,91	0:04:22	394,664
0:00:26	85,671	0:01:05	306,829	0:01:45	370,666	0:02:24	387,179	0:03:04	392,147	0:03:44	393,928	0:04:23	394,651
0:00:26	91,59	0:01:06	309,34	0:01:46	371,32	0:02:25	387,33	0:03:05	392,216	0:03:44	393,962	0:04:24	394,648
0:00:27	98,155	0:01:07	311,857	0:01:47	371,969	0:02:26	387,55	0:03:06	392,267	0:03:45	393,988	0:04:25	394,681
0:00:28	105,086	0:01:08	314,24	0:01:47	372,549	0:02:27	387,7	0:03:07	392,318	0:03:46	394,03	0:04:26	394,711
0:00:29	112,195	0:01:09	316,582	0:01:48	373,136	0:02:28	387,875	0:03:07	392,336	0:03:47	394,005	0:04:26	394,676
0:00:30	119,247	0:01:10	318,826	0:01:49	373,71	0:02:29	388,024	0:03:08	392,473	0:03:48	394,056	0:04:27	394,671
0:00:31	126,236	0:01:10	321,077	0:01:50	374,27	0:02:30	388,181	0:03:09	392,512	0:03:49	394,064	0:04:28	394,721
0:00:32	133,111	0:01:11	323,164	0:01:51	374,796	0:02:30	388,338	0:03:10	392,541	0:03:50	394,075	0:04:29	394,742
0:00:32	139,872	0:01:12	325,204	0:01:52	375,265	0:02:31	388,49	0:03:11	392,593	0:03:50	394,116	0:04:30	394,706
0:00:33	146,501	0:01:13	327,198	0:01:53	375,77	0:02:32	388,635	0:03:12	392,622	0:03:51	394,12	0:04:31	394,735
0:00:34	152,937	0:01:14	329,123	0:01:53	376,287	0:02:33	388,772	0:03:13	392,715	0:03:52	394,153	0:04:32	394,735
0:00:35	159,204	0:01:15	331,009	0:01:54	376,772	0:02:34	388,92	0:03:13	392,758	0:03:53	394,135	0:04:33	394,761
0:00:36	165,383	0:01:16	332,809	0:01:55	377,202	0:02:35	389,065	0:03:14	392,803	0:03:54	394,169	0:04:33	394,74
0:00:37	171,36	0:01:16	334,573	0:01:56	377,657	0:02:36	389,169	0:03:15	392,838	0:03:55	394,19	0:04:34	394,767
0:00:38	177,24	0:01:17	336,295	0:01:57	378,105	0:02:36	389,315	0:03:16	392,873	0:03:56	394,23	0:04:35	394,774
0:00:39	182,986	0:01:18	337,941	0:01:58	378,518	0:02:37	389,404	0:03:17	392,91	0:03:56	394,229	0:04:36	394,781

Эксперимент 3

Время	ТС	0:00:39	168,314	0:01:19	329,655	0:01:59	377,092	0:02:38	389,467	0:03:18	393,374	0:03:57	394,806
0:00:01	-2,64	0:00:40	173,794	0:01:20	331,53	0:01:59	377,565	0:02:39	389,601	0:03:19	393,419	0:03:58	394,824
0:00:02	-2,666	0:00:41	179,174	0:01:21	333,395	0:02:00	378,045	0:02:40	389,741	0:03:19	393,452	0:03:59	394,837
0:00:02	-2,656	0:00:42	184,379	0:01:22	335,126	0:02:01	378,459	0:02:41	389,877	0:03:20	393,521	0:04:00	394,846
0:00:03	-2,641	0:00:43	189,603	0:01:22	336,902	0:02:02	378,928	0:02:42	390,023	0:03:21	393,574	0:04:01	394,872
0:00:04	-2,62	0:00:44	194,617	0:01:23	338,533	0:02:03	379,274	0:02:42	390,156	0:03:22	393,589	0:04:02	394,88
0:00:05	-2,646	0:00:45	199,597	0:01:24	340,184	0:02:04	379,731	0:02:43	390,253	0:03:23	393,64	0:04:02	394,884
0:00:06	-2,658	0:00:45	204,472	0:01:25	341,695	0:02:05	380,134	0:02:44	390,383	0:03:24	393,651	0:04:03	394,95
0:00:07	-2,613	0:00:46	209,219	0:01:26	343,265	0:02:05	380,471	0:02:45	390,533	0:03:25	393,733	0:04:04	394,951
0:00:08	-2,673	0:00:47	213,857	0:01:27	344,735	0:02:06	380,864	0:02:46	390,608	0:03:25	393,768	0:04:05	394,94
0:00:08	-2,614	0:00:48	218,432	0:01:28	346,156	0:02:07	381,233	0:02:47	390,686	0:03:26	393,785	0:04:06	394,933
0:00:09	-2,647	0:00:49	222,849	0:01:28	347,581	0:02:08	381,545	0:02:48	390,829	0:03:27	393,853	0:04:07	394,976
0:00:10	-2,63	0:00:50	227,244	0:01:29	348,889	0:02:09	381,906	0:02:48	390,92	0:03:28	393,902	0:04:08	395,001
0:00:11	-2,629	0:00:51	231,509	0:01:30	350,199	0:02:10	382,282	0:02:49	391,017	0:03:29	393,935	0:04:08	395,031
0:00:12	-2,624	0:00:51	235,685	0:01:31	351,473	0:02:11	382,616	0:02:50	391,128	0:03:30	393,952	0:04:09	395,012
0:00:13	-2,646	0:00:52	239,728	0:01:32	352,719	0:02:11	382,901	0:02:51	391,24	0:03:31	393,936	0:04:10	395,047
0:00:14	-2,615	0:00:53	243,763	0:01:33	353,892	0:02:12	383,219	0:02:52	391,294	0:03:31	394,034	0:04:11	395,059
0:00:14	-2,553	0:00:54	247,677	0:01:34	355,06	0:02:13	383,53	0:02:53	391,426	0:03:32	394,04	0:04:12	395,045
0:00:15	-2,44	0:00:55	251,541	0:01:34	356,203	0:02:14	383,798	0:02:54	391,524	0:03:33	394,104	0:04:13	395,089
0:00:16	-2,094	0:00:56	255,234	0:01:35	357,287	0:02:15	384,091	0:02:54	391,598	0:03:34	394,146	0:04:14	395,103
0:00:17	-1,363	0:00:57	258,919	0:01:36	358,363	0:02:16	384,359	0:02:55	391,697	0:03:35	394,161	0:04:14	395,134
0:00:18	-0,351	0:00:57	262,474	0:01:37	359,372	0:02:17	384,631	0:02:56	391,767	0:03:36	394,212	0:04:15	395,115
0:00:19	1,47	0:00:58	265,992	0:01:38	360,362	0:02:17	384,914	0:02:57	391,851	0:03:37	394,214	0:04:16	395,116
0:00:20	5,626	0:00:59	269,42	0:01:39	361,327	0:02:18	385,166	0:02:58	391,948	0:03:37	394,271	0:04:17	395,156
0:00:20	12,265	0:01:00	272,742	0:01:40	362,252	0:02:19	385,42	0:02:59	392,02	0:03:38	394,278	0:04:18	395,146
0:00:21	20,67	0:01:01	276,066	0:01:40	363,148	0:02:20	385,668	0:03:00	392,09	0:03:39	394,293	0:04:19	395,188
0:00:22	29,845	0:01:02	279,276	0:01:41	364,072	0:02:21	385,85	0:03:00	392,151	0:03:40	394,347	0:04:20	395,185
0:00:23	39,309	0:01:03	282,369	0:01:42	364,918	0:02:22	386,102	0:03:01	392,24	0:03:41	394,363	0:04:20	395,186
0:00:24	48,662	0:01:03	285,486	0:01:43	365,698	0:02:23	386,324	0:03:02	392,316	0:03:42	394,386	0:04:21	395,194
0:00:25	57,811	0:01:04	288,478	0:01:44	366,516	0:02:23	386,522	0:03:03	392,384	0:03:43	394,454	0:04:22	395,203
0:00:26	66,861	0:01:05	291,443	0:01:45	367,308	0:02:24	386,763	0:03:04	392,453	0:03:43	394,415	0:04:23	395,226
0:00:26	74,791	0:01:06	294,271	0:01:46	368,067	0:02:25	386,956	0:03:05	392,492	0:03:44	394,475	0:04:24	395,268
0:00:27	81,365	0:01:07	297,093	0:01:46	368,779	0:02:26	387,16	0:03:06	392,582	0:03:45	394,471	0:04:25	395,245
0:00:28	87,316	0:01:08	299,835	0:01:47	369,516	0:02:27	387,358	0:03:06	392,636	0:03:46	394,508	0:04:26	395,257
0:00:29	93,483	0:01:09	302,515	0:01:48	370,226	0:02:28	387,539	0:03:07	392,692	0:03:47	394,517	0:04:26	395,236
0:00:30	99,944	0:01:10	305,113	0:01:49	370,862	0:02:29	387,712	0:03:08	392,763	0:03:48	394,556	0:04:27	395,264
0:00:31	106,631	0:01:10	307,676	0:01:50	371,514	0:02:29	387,895	0:03:09	392,852	0:03:49	394,582	0:04:28	395,273
0:00:32	113,33	0:01:11	310,156	0:01:51	372,161	0:02:30	388,085	0:03:10	392,88	0:03:49	394,596	0:04:29	395,256
0:00:33	119,896	0:01:12	312,515	0:01:52	372,766	0:02:31	388,262	0:03:11	392,954	0:03:50	394,643	0:04:30	395,285
0:00:33	126,438	0:01:13	314,95	0:01:53	373,371	0:02:32	388,429	0:03:12	393,005	0:03:51	394,638	0:04:31	395,279
0:00:34	132,846	0:01:14	317,22	0:01:53	373,954	0:02:33	388,584	0:03:13	393,051	0:03:52	394,651	0:04:32	395,28
0:00:35	139,107	0:01:15	319,447	0:01:54	374,481	0:02:34	388,749	0:03:13	393,129	0:03:53	394,7	0:04:33	395,308
0:00:36	145,216	0:01:16	321,593	0:01:55	375,043	0:02:35	388,906	0:03:14	393,163	0:03:54	394,699	0:04:33	395,329
0:00:37	151,165	0:01:16	323,737	0:01:56	375,613	0:02:36	389,067	0:03:15	393,246	0:03:55	394,725	0:04:34	395,328
0:00:38	157,019	0:01:17	325,758	0:01:57	376,082	0:02:36	389,195	0:03:16	393,296	0:03:56	394,768	0:04:35	395,337
0:00:39	162,744	0:01:18	327,745	0:01:58	376,586	0:02:37	389,377	0:03:17	393,325	0:03:56	394,805	0:04:36	395,355

Приложение Г. Свидетельство о государственной
регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2017615448

**Гарантированное оценивание вектора состояния линейных
динамических систем методом полиэдральной
аппроксимации**

Правообладатель: *федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)» (ФГАОУ ВО
«ЮрГУ (НИУ)») (RU)*

Авторы: *Подвилова Елена Олеговна (RU),
Ширяев Владимир Иванович (RU)*

Заявка № **2017610671**
Дата поступления **25 января 2017 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **16 мая 2017 г.**



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

9 2016-101

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

RU

2017615448

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
(12) ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): 2017615448	Авторы: Подвилова Елена Олеговна (RU), Ширяев Владимир Иванович (RU)
Дата регистрации: 16.05.2017	Правообладатель: федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» (ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)») (RU)
Номер и дата поступления заявки: 2017610671 25.01.2017	
Дата публикации: 16.05.2017	
Контактные реквизиты: нет	

Название программы для ЭВМ:

Гарантированное оценивание вектора состояния линейных динамических систем методом полиэдральной аппроксимации

Реферат:

Программа разработана для вычисления гарантированных оценок состояния линейных динамических систем методом полиэдральной аппроксимации информационных множеств. Программа предназначена для построения аппроксимирующих многогранников, заданных системами линейных неравенств, а также для исследования оценок вектора состояния динамических систем при различном числе измерений и с учётом различных условий и особенностей линейной динамической системы.

Тип реализующей ЭВМ: IBM PC - совмест. ПК

Язык программирования: Matlab

Вид и версия операционной системы: Windows XP/Vista/7/8

Объем программы для ЭВМ: 20 Кб