

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
СТЕРЛИТАМАКСКИЙ ФИЛИАЛ

На правах рукописи

НАФИКОВА АЛЬБИНА РИНАТОВНА

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
ПЕРЕНОСА РАДОНА В КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ
АНИЗОТРОПНЫХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ С
ВКЛЮЧЕНИЯМИ**

Специальность 05.13.18 — «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Кризский В.Н.

Стерлитамак – 2015

Оглавление

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Список терминов и их определений | 4 |
| Введение | 5 |
| Глава 1. Обзор работ и состояние проблемы | 13 |
| 1.1 Радон в геофизических и экологических исследованиях | 13 |
| 1.2 Механизмы выделения и переноса радона в приземный слой атмосферы | 17 |
| 1.3 Сравнительный анализ математических моделей процессов переноса радона | 19 |
| Глава 2. Математическая модель задачи переноса радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах | 22 |
| 2.1 Постановка задачи и способ ее решения | 22 |
| 2.2 Определение нормального поля радона в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами | 31 |
| 2.3 Вычисление функции Грина в горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами | 34 |
| Глава 3. Комплекс программ математического моделирования процессов переноса радона | 41 |
| 3.1 Функциональное назначение программного комплекса | 41 |
| 3.2 Описание процедур программного комплекса и их параметров | 43 |
| 3.3 Выводы | 55 |
| Глава 4. Компьютерное моделирование процессов переноса радона | 56 |
| 4.1 Сравнительное сопоставление для случая однородных сред | 56 |
| 4.2 Сравнение с натурным экспериментом | 65 |
| 4.3 Перенос радона. Анизотропный случай | 68 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.4 Выводы | 79 |
| Заключение | 81 |
| Литература | 83 |
| Приложение А. Свидетельства о регистрации программных средств комплекса | 100 |

Список терминов и их определений

В работе используются следующие понятия:

Активность радиоактивного источника – это ожидаемое число элементарных радиоактивных распадов в единицу времени.

Удельная активность – активность, приходящаяся на единицу массы вещества источника.

Объемная активность – активность, приходящаяся на единицу объема источника.

Удельная и объемная активности используются, как правило, в случае, когда радиоактивное вещество распределено по объёму источника.

В Международной системе единиц (СИ) единицей активности является *беккерель* (Бк, Bq); $1 \text{ Бк} = \text{с}^{-1}$. В образце с активностью 1 Бк происходит в среднем 1 распад в секунду.

Удельная активность измеряется в беккерелях на килограмм (Бк/кг, Bq/kg). Системная единица объемной активности – Бк/м³.

Эманирование (эманлирующая способность) – это свойство веществ, содержащих изотопы Ra, выделять в окружающую среду часть образующихся в них эманаций. Характеризуется *коэффициентом эманирования*.

Коэффициент эманирования – равен отношению количества выделившейся в окружающую среду эманации к общему количеству эманации, образовавшейся в веществе за один и тот же промежуток времени.

Коэффициент диффузии – численно равен потоку эманации в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярной к направлению оси x , при градиенте концентрации эманации, равном единице. Размерность коэффициента диффузии см²/сек.

Эксхалляция – выделение изотопов Rn с поверхности пород, вод и растений. Количественно эксхалляция определяется плотностью потока изотопов Rn.

Введение

Процессы массопереноса описываются краевыми задачами математической физики параболического типа.

Проблема переноса вещества в диффундирующих слоистых средах является предметом исследований как теоретиков, так и практиков различных областей: медицины, экологии, геологии и геофизики.

Так, в области медицины актуальны задачи достижения необходимых для лечения концентраций медицинских препаратов в тканях человека, имеющих, как правило, слоистую структуру, в необходимые интервалы времени. Известные математические модели переноса лекарственных препаратов при поверхностном или внутримышечном воздействиях имеют вид одномерной краевой задачи в кусочно-однородных слоистых средах. Например, трехслойная математическая модель диффузии лекарственных препаратов и иммерсионных жидкостей в тканях глаза человека [74] имеет вид:

$$\frac{\partial u_j(z_j, t_j)}{\partial t_j} = \frac{\partial^2 u_j(z_j, t_j)}{\partial z_j^2}, j = 1, 2, \quad (1)$$

$$u_1(0, t_1) = 1,$$

$$\left(\delta_2^2 \frac{\partial u_2(z_2, t_2)}{\partial z_2} + k\delta_{32}u_2(z_2, t_2)\right)|_{z_2=1} = 0, \quad (2)$$

$$u_2(0, t_2) = u_1(1, t_1),$$

$$\left(\frac{\partial u_2(z_2, t_2)}{\partial z_2}\right)|_{z_2=0} = \delta d_{21} \left(\frac{\partial u_1(z_1, t_1)}{\partial z_1}\right)|_{z_1=1}, \quad (3)$$

$$u_j(z_j, t_j)|_{t_j=0} = 0, \quad (4)$$

где

$$k\delta_{32} = k_{32} \frac{d_2}{\delta_2^2} = \delta d_{23}, t_2 = \delta_{12} d_{21} t_1, \quad (5)$$

$$\delta d_{ij} = \delta_{ji}^2 d_{ij}, \delta_{ij} = \frac{\delta_i}{\delta_j}, d_{ij} = \frac{d_i}{d_j},$$

$u_j(z_j, t_j)$ – функция, задающая распределение концентрации жидкости в диффундирующем j -ом слое, δ_j^2 – коэффициент диффузии j -го слоя, d_j –

толщина j -го слоя, k_{32} – коэффициент проницаемости на границе 2-го слоя и окружающей среды.

Но используемые модели не учитывают анизотропию диффузионных свойств тканей (например, мышечных) или возможные локальные образования измененных тканей (например, онкологических опухолей).

В области геологии и геофизики актуальными являются задачи массопереноса радона и дочерних продуктов его распада, измерений параметров радоновых полей, результаты которых используются при поисках месторождений радиоактивных и углеводородных ископаемых, геологическом картировании, прогнозе горных ударов и тектонических землетрясений, экологической оценке мест под строительство зданий и сооружений, оценке санитарного состояния помещений и т.д.

Известные математические модели процессов переноса радона также имеют вид одномерной краевой задачи для уравнения параболического типа в кусочно-однородных слоистых средах. Так, задача нестационарного переноса радона в системе грунт-атмосфера [61] может быть представлена в виде:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = D_g \frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial z^2} + \nu_g \frac{\partial A(z,t)}{\partial z} - \lambda(A(z,t) - A_\infty), z > 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial z^2} + \nu_a \frac{\partial A(z,t)}{\partial z} - \lambda(A(z,t)), z < 0 \quad (7)$$

$$D_g \frac{\partial A(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=0+0} + \nu_g A(z,t) \Big|_{z=0+0} = \quad (8)$$

$$D_a \frac{\partial A(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=0-0} + \nu_a A(z,t) \Big|_{z=0-0};$$

$$A(z,t) \Big|_{z=0+0} = A(z,t) \Big|_{z=0-0}, \quad (9)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} A(z,t) = A_\infty, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} A(z,t) = 0. \quad (10)$$

Здесь D_g, D_a – коэффициенты диффузии радона в грунте и в приземной атмосфере, $\text{м}^2/\text{с}$; ν_g, ν_a – скорость адвекции радона соответственно в грунте и в приземной атмосфере, $\text{м}/\text{с}$; λ – постоянная распада радона, $1/\text{с}$; A_∞ – объемная активность радона, который находится в радиоактивном равновесии

с радием (^{226}Ra) на заданной глубине в грунте ($A_\infty = K_{em}A_{Ra}\rho_s(1-\eta)$), где K_{em} – коэффициент эманирования радона, отн. ед.; A_{Ra} – удельная активность ^{226}Ra , Бк/кг; ρ_s – плотность твердых частиц, кг/м³; η – пористость грунта, отн. ед.; $A(z, t)$ – объемная активность радона в грунте, Бк/м³.

Широкий круг использования радона влечет изучение механизмов его миграции (переноса) в земной коре, факторов, формирующих радоновые поля, вопросов метрологического обеспечения. Все это в совокупности способствует развитию методов математического моделирования в различных геологических средах переноса радона и дочерних продуктов его распада.

Математическое моделирование процессов распределения радона в грунте и его стока в приземный слой атмосферы связано с решением параболических краевых задач математической физики. Разработка математических моделей, алгоритмов решения и программ расчета процессов распространения – актуальная задача, имеющая практическое значение.

Построению и исследованию математических моделей процессов переноса радона посвящены работы Ю.П. Булашевича, В.И. Уткина, Г.Ф. Новикова, А.Г. Граммакова, И.М. Хайковича, И.В. Павлова, Л.А. Гулабянца, А.К. Юркова, Д.Ю. Демежко, В.А. Щапова, И.А. Козловой, Е.Н. Рыбакова, В.С. Яковлевой, Н.К. Рыжаковой, Р.И. Паровика, А.В. Климшина, Т. Kohl, G. Etiopie, M. Jiranek, I. Cozmuta, W.J. Speelman, M. Goto, M. Antonopoulos-Domis, S. Savovic, A. Varchegyí, I. Suaro и др.

Имеющиеся в научной литературе публикации по расчету параметров радоновых полей (концентрации, объемной активности или плотности потока радона) основаны только на одномерных, либо диффузионных, либо диффузионно-фильтрационных (диффузионно-конвективных, диффузионно-адвективных) математических моделях в однородных геологических средах.

В настоящей работе рассматривается новая математическая модель трехмерной задачи массопереноса, учитывающая анизотропию диффузион-

ных свойств среды, геометрические формы анизотропных включений, которые могут быть использованы как в области медицины, так и для изучения процессов переноса радона.

Целью данной работы является исследование процессов массопереноса вещества в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями на примере процессов диффузии-адвекции радона.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Анализ состояния вопроса.
2. Построение математической модели задачи о распределении радона в кусочно-постоянной анизотропной горизонтально-слоистой среде с включениями.
3. Разработка численных алгоритмов решения поставленной задачи.
4. Разработка программного комплекса, дающего следующие возможности:
 - задание параметров описания модели;
 - нахождение функции нормального поля радона в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами;
 - вычисление функции Грина в горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами;
 - определение функции аномального поля радона, учитывающей влияние одного или нескольких включений;
 - графического отображения результатов расчетов.
5. Проведение вычислительных экспериментов по исследованию процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями и взаимному влиянию параметров математической модели.

Научная новизна.

В области математического моделирования:

Впервые построена математическая модель трехмерной задачи диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных слоистых средах с включениями, учитывающая анизотропию диффузионных свойств подобластей геологической среды. Получены формулы интегрального представления решения; аналитические формулы представления решения задач для функции нормального поля радона и функции Грина для случая горизонтально-слоистого плоско-параллельного пространства.

В области численных методов:

Разработаны новые алгоритмы расчета объемной активности радона в кусочно-анизотропной горизонтально-слоистой среде с анизотропным включением, основанные на сочетании методов интегральных преобразований Лапласа, интегральных представлений по формуле Остроградского с построением функции Грина в слоистой среде без включений и интегральных уравнений Фредгольма II рода, возникающих по границам раздела сред; алгоритмы расчета функции нормального поля радона; алгоритмы расчета функции точечного источника в горизонтально-слоистой среде (функции Грина).

В области комплексов программ:

Разработаны программы, реализующие численные алгоритмы нахождения функции нормального поля радона и функции Грина в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами, обращения интегрального преобразования Лапласа и позволяющие проводить вычислительные эксперименты по исследованию процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями и взаимному влиянию параметров математической модели.

Теоретическая и практическая значимость. Предложенные методы и алгоритмы позволяют решать практические задачи по исследованию процессов переноса радона в трехмерных кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с анизотропными включениями.

Полученные решения могут быть использованы для прогнозирования сейсмических событий, поиска урановых и ториевых руд, экологического картирования при выборе площадок под строительство промышленных и жилых сооружений, поиска и оконтуривания нефтяных и газовых месторождений.

Степень достоверности изложенных в работе результатов обеспечивается строгостью постановки задачи как краевой задачи математической физики для уравнения параболического типа, математически обоснованными вычислительными алгоритмами ее решения и апробацией разработанных вычислительных алгоритмов на различных примерах. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами для случая кусочно-постоянных однородных сред, а также согласуются с натурными экспериментами, проведенными лабораторией геодинамики Институт геофизики УрО РАН.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинаре лаборатории геодинамики (г. Екатеринбург, Институт геофизики УрО РАН, 2015), 42-й сессии Международного научного семинара им. Д. Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей» (г. Пермь, Горный институт УрО РАН, Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2015), Всероссийской конференции с международным участием «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» (г. Челябинск, Южно-Уральский государственный университет, 2014), XI Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» с участием зару-

бежных ученых (г. Саранск, «Средневолжское Математическое общество», Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, 2014), XV Уральской молодежной научной школе по геофизике (г. Екатеринбург, Институт геофизики УрО РАН, 2014), VI Международной математической школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» им. Е.В. Воскресенского (г. Саранск, «Средневолжское Математическое общество», Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, 2013), Международной научно-практической конференции «Измерения: состояние, перспективы развития» (г. Челябинск, Южно-Уральский государственный университет, 2012), Международной школе-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (г. Уфа, Башкирский государственный университет, 2012), Всероссийской молодежной научно-практической конференции «Актуальные вопросы науки и образования» (г. Уфа, Башкирский государственный университет, 2013), Всероссийской научно-практической конференции «Современные проблемы науки и образования в техническом вузе» (г. Стерлитамак, филиал Уфимского государственного авиационного технического университета в г. Стерлитамаке, 2013), Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (г. Стерлитамак, Институт прикладных исследований РБ АН РБ, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, 2013), Межвузовской студенческой научно-практической конференции по прикладной математике (г. Стерлитамак, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, 2012), II и III Всероссийских научно-практических конференциях с международным участием «Математическое моделирование процессов и систем» (г. Стерлитамак, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, 2013, 2014), научных семинарах кафедры математического моделирова-

ния Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета.

Личный вклад. В совместных с научным руководителем работах соискателю принадлежат математическая модель процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями, алгоритм расчета объемной активности радона в кусочно-постоянной анизотропной и горизонтально-слоистой средах с анизотропным включением, разработанный комплекс программ для исследования процессов переноса радона в грунте и его стока в приземный слой атмосферы, результаты вычислительных экспериментов по исследованию взаимного влияния параметров модели.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 19 работах [122-140], из них 2 статьи [122, 123] опубликованы в журналах из перечня ведущих российских рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ, 2 свидетельства о регистрации программных продуктов [125, 140] в Объединенном фонде электронных ресурсов «Наука и образование» (ОФЭРНИО) Минобрнауки РФ. Из совместных работ [122-127, 130-134, 136-138] в диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и приложения. Полный ее объем составляет 101 страницу машинописного текста, включая 42 рисунка, 6 таблиц, библиографию, содержащую 140 наименований, приложение.

Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Кризскому Владимиру Николаевичу за формулирование направления исследований, ценные советы, рекомендации и постоянное внимание к работе.

Глава 1. Обзор работ и состояние проблемы

1.1. Радон в геофизических и экологических исследованиях

Радон образуется в процессе распада радионуклидов в ряде урана, а его собственный распад дает начало радиоактивным веществам с последующим образованием нерадиоактивного стабильного свинца [28].

В газообразном виде радиоактивные элементы присутствуют в каждом из основных радиоактивных семейств, имеющихся в природе – урана ($^{238}_{92}U$), тория и актиноурана ($^{235}_{92}U$). В процессе распада в них появляются соответственно радон ($^{222}_{86}Rn$), торон ($^{220}_{86}Tn$) или его еще называют радон-220 ($^{220}_{86}Rn$), и актинон ($^{219}_{86}Rn$). Накапливаясь в породах, эти элементы могут мигрировать за счет диффузии или с фильтрационными потоками к поверхности земли [28].

По своим химическим свойствам радон относится к группе инертных газов, таких, как неон, криптон и ксенон. Радон мало активен при взаимодействии с другими химическими элементами. Это самый тяжелый из известных газов (плотность 9,72% при $0^{\circ}C$, т.е. он в 8 раз тяжелее воздуха) [28].

Как радиоактивный элемент сам газ радон является мощным α -излучателем. Непосредственно он образуется при распаде изотопов радия: радон-222 – при распаде радия-226, члена уранового радиоактивного семейства, и радон-220 – при распаде радия-224, члена ториевого семейства [28].

Радон-222 имеет период полураспада 3,824 суток и успевает за время своей жизни перемещаться на значительные расстояния. Период полураспада радона-220 всего 55,6 секунд, и расстояния, которые он может пройти до своего полного распада, естественно, значительно меньше. Поэтому радон-220 может не рассматриваться в дальнейшем при изучении миграции радиоактивных газов в толще земной коры [28].

Интерес к радону двусторонний. В аспекте радиационной безопасности он определяется необходимостью защиты человека от патогенного воздействия ионизации, генерируемой этим элементом и дочерними продуктами его распада [1].

Трудами отечественных и зарубежных специалистов доказано, что наибольший вклад в облучение населения вносят природные источники ионизирующего излучения и прежде всего радон и дочерние продукты распада, находящиеся в воздухе жилых и производственных помещений и именно этот фактор в первую очередь определяет радиационную обстановку в регионах и вносит основной вклад в средние значения эффективной дозы населения.

Установлено, что концентрация радона в воздухе жилых помещений изменяется в широких пределах – от нескольких десятков до нескольких тысяч единиц Бк/м³. Учитывая возможно большие дозы облучения человека за счет радона и дочерних продуктов его распада, превышающие в отдельных случаях в 2-3 раза предельно допустимые, во многих странах установлены нормативы величины среднегодовой эквивалентной равновесной объемной активности (ЭРОА) в воздухе помещений. В среднем эти нормы колеблются в пределах от 100 до 200 Бк/м³ [79].

В 1994 году Правительство Российской Федерации приняло Федеральную целевую программу снижения уровня облучения населения России и производственного персонала от природных источников ионизирующего излучения (программа «Радон»). В 1996 году Правительственная комиссия по охране окружающей среды признала проблему радона приоритетной среди Радиологических программ. И в этом же году был принят закон «О радиационной безопасности населения» и введены в действие «Нормы радиационной безопасности» НРБ-96. В соответствии с требованиями указанных документов во всех регионах России должен быть налажен учет доз облучения населения от всех источников ионизирующего излучения. Эти данные

должны ежегодно вноситься в радиационные паспорта регионов, а их анализ позволит оптимизировать мероприятия по снижению облучения населения и направлять основные усилия на снижение облучения от тех источников, которые вносят основной вклад в дозовую нагрузку.

Другая сторона радоновой проблемы связана с тем, что радон является одним из индикаторов сейсмогеодинамической активности структур континентальной коры. В этом плане его изучение может внести существенный вклад в понимание закономерностей развития новейшей разломной тектоники и дать значимую информацию для сейсмического прогноза [1].

Связь поведения радона с сейсмическим процессом была выявлена В.И. Уломовым при изучении Ташкентского землетрясения (26.04.1966 г.) [77]. Тогда было установлено, что концентрация радона в подземных водах вблизи эпицентра землетрясения резко увеличилась до его наступления, достигла максимума непосредственно перед событием, а сразу после его завершения снизилась до уровня фоновых значений. Выявленные закономерности послужили основанием для использования радона в качестве индикатора сейсмогеодинамической активности [1].

В последние десятилетия разрабатывается идея прогноза сейсмических событий на основе изучения процесса выделений радона перед землетрясением из массива горных пород в областях их упругой деформации [78]. Дело в том, что проницаемость массива, наличие в нем связанных пор и трещин, заметно зависит от напряженно-деформированного состояния массива. Очевидно, что при сжатии массива проницаемость его снижается, а при разгрузке увеличивается. Соответственно, изменяется кажущийся коэффициент диффузии. Следовательно, динамические изменения концентрации радона в приповерхностном слое почвы будут отражать динамические изменения напряженно-деформированного состояния горного массива в значительном объеме. Указанные факторы и послужили основой для исследо-

вания поля вариаций эксгаляции радона как краткосрочного предвестника сейсмических событий [10, 38, 82].

Следует отметить, что до сих пор среди специалистов нет единого мнения о механизмах формирования радоновых полей, о параметрах, характеризующих радоновое поле и подлежащих измерению. Одни считают, что основную информацию о возмущающих объектах и геологических структурах несет концентрация радона в почвенном (подпочвенном) и/или атмосферном воздухе, другие – что только поток радона через дневную поверхность способен дать необходимую и достоверную информацию об источниках радона и глубинных структурах, через которые проходит радон и которые формируют радоновые аномалии [84].

Согласно введенным в Российской Федерации новым Основным санитарным правилам обеспечения радиационной безопасности (ОСПОРБ-99) при радиационном обследовании участков будущего строительства необходимо измерять только плотность потока радона (ППР) с поверхности грунта. В то же время, в этом документе не нормирована объемная активность радона (ОАР) в почвенном воздухе, которая принята в большинстве стран мира в качестве основного параметра, характеризующего радоноопасность территорий застройки [86].

В соответствии с требованиями строительных норм, средневзвешенное значение ППР с поверхности грунта в пределах застраиваемой площади участка не должно превышать $80 \text{ мБк/м}^2 \cdot \text{с}$. Для участков застройки под дошкольные, общеобразовательные и лечебные учреждения ППР с поверхности грунта не должна превышать $40 \text{ мБк/м}^2 \cdot \text{с}$ [44].

ППР из почвы является функцией нескольких переменных, которые можно разделить на две основные группы. Первая связана с качественными характеристиками грунта, из которых наиболее существенное влияние на величину ППР оказывают: удельная активность ^{226}Ra в почве, коэффициенты эманирования и диффузии. Эти параметры практически постоянны

в пределах отдельного участка застройки (например, под строительство жилого здания). Вторая группа – параметры, связанные с климатическими и погодными условиями, среди которых наиболее существенное влияние на изменение величины ППР оказывают температура окружающего воздуха, атмосферное давление, влажность почвы. Эти параметры подвержены постоянным изменениям во времени [66].

Параметр ППР более чувствителен к изменению напряженно-деформированного состояния геосреды, чем величина ОАР. Это было подтверждено во время аномалии предшествующей усилению сейсмичности у берегов полуострова Камчатка. Величина ППР увеличилась на 162% от уровня фона, а величина ОАР в почвенном воздухе – на 115%. [59].

Выявлено, что наибольшие преимущества величина ППР имеет именно для однородных геологических сред, что очень важно для обеспечения хорошей сопоставимости и воспроизводимости результатов, полученных при измерениях в разных контрольных точках. Величина ППР может быть использована как самостоятельный или дополнительный прогностический параметр. Одновременное использование двух величин – ОА почвенного радона и ППР с поверхности земли позволит повысить достоверность прогнозных оценок [39].

1.2. Механизмы выделения и переноса радона в приземный слой атмосферы

Исследованием процессов эманирования и миграции радона в различных средах и при различных условиях занимались практически с момента его открытия. Уже в 1902 г. немецкие физики Эльстер и Гейтель произвели первые определения концентрации радона в почвенном воздухе, а в 1922 г. в СССР А.П. Кириков применил эманационный метод при изучении Тюя-Муюнского месторождения [68].

В 30-е гг. были разработаны теоретические и аппаратурно-методические основы эманационного метода, и он стал широко использоваться в радиометрии, как наиболее глубокий из прямых методов поиска месторождений радиоактивных руд [68].

Согласно теории эманационного метода в радиометрической разведке перенос радона из пористого однородного грунта к земной поверхности осуществляется с помощью механизмов диффузии и конвекции [54].

По мнению зарубежных авторов G. Etiope и G. Martinelli [102] миграция газа в общем случае должна описываться в совокупности двух типов переноса: диффузии и адвекции, ссылаясь на то, что в геологических средах данные процессы никогда не действуют раздельно. Термин «адвекция» авторами определяется как вид переноса, в котором масса газа стремится мигрировать из зоны с высоким давлением в зону низкого давления. Особое внимание в данной работе уделяется также описанию процесса конвекции, с целью сопоставления его с процессом адвекции. Конвекция представляется здесь в виде «наблюдаемой» адвекции, обусловленной градиентом температур. Вследствие этого, использование в некоторых работах термина «конвекция» как переноса, контролируемого давлением и не связанного с температурными эффектами, по мнению данных авторов, является ошибочным.

В работе В.С. Яковлевой [88] отмечено, что в России был введен условный термин «конвекция» для обозначения перемещения радона под действием тех же внешних воздействий, который на некоторое время прижился в России и за рубежом среди ученых, занимающихся радоновой тематикой, и продолжает использоваться в настоящее время. Однако, чтобы избежать путаницы в подразумеваемых под условным термином «конвекция» процессах переноса радона, по мнению данного автора, в данной работе используется термин «адвекция».

В работе Р.И. Паровика [62] адвекция определяется как перенос, который может включать либо конвекцию, либо фильтрацию.

В последующих главах настоящей работы при математическом описании процессов переноса радона будет использован термин «адвекция».

1.3. Сравнительный анализ математических моделей процессов переноса радона

Изучением переноса радона в геологических средах как отечественные, так и зарубежные ученые, занимаются сравнительно давно. Такие исследования проводились, как правило, для разведки урановых руд [16]. При этом были разработаны математические модели, которые легли в основу теории радонового (эманационного) метода поиска полезных ископаемых [10, 53, 54].

В рамках данного подхода модель массопереноса радона в приземный слой атмосферы описывается линейными дифференциальными уравнениями или системой дифференциальных уравнений в частных производных с начальными и граничными условиями. При этом массоперенос радона в грунте осуществляется механизмами диффузии и конвекции, а в приземном слое атмосферы массоперенос радона протекает под действием турбулентной диффузии. Данная одномерная нестационарная модель в дальнейшем приводится и исследуется в работах [34, 57, 60, 62, 63].

В работе [32] построена модель переноса радона в условиях промерзания поверхностного слоя грунтов на основе уравнения диффузии эманации в пористой среде [10].

Моделирование процессов переноса радона в геологических средах, максимально приближенных при их описании к реальным, является сложной задачей, поскольку геологическая среда является неоднородной, слоистой с заметно различающимися физико-геологическими характеристиками. При рассмотрении неоднородных сред, особенно, когда коэффициенты уравнения переноса являются функциями, а не постоянными, аналитиче-

ское решение невозможно. В данном случае для решения уравнений переноса радона используют численные методы [88].

С целью оценки величины фоновой составляющей радонового поля и проявления в этом поле возмущающих объектов, в работе И.М. Хайковича [84] аналитически находятся и исследуются параметры концентрации радона вблизи дневной поверхности и его потока через эту поверхность в случае трехслойной среды. Решение поставленной задачи проводилось в предположении, что физические свойства среды в полупространстве одинаковы, а распределение радона в воздухе подчиняется законам диффузии и фильтрации (конвекции). Также в данной работе была проведена оценка влияния изменений условий выхода радона в атмосферу, связанных с периодическими (суточными или сезонными) изменениями в атмосфере.

В работе Л.А. Гулабянца и Б.Ю. Заболотского [18], для определения мощности (толщины) поверхностных слоев грунта, которые определяют интенсивность выделений радона на отметке поверхности земли («активных» слоев), исследуется уравнение стационарного одномерного диффузионного переноса радона в однородном грунте с равномерно распределенной по объему концентрацией радия.

В работе Р.И. Паровика [61] рассматривается одномерная модель нестационарного переноса радона в системе «грунт-атмосфера», и для решения поставленной задачи строится алгоритм с использованием интегрального преобразования Лапласа. Данный алгоритм обобщен нами для многослойных геологических сред и описан в главе 2 настоящей работы.

В работе В.С. Яковлевой [88] приводятся модели переноса радона в стационарном случае в однородной пористой среде с постоянными коэффициентами и в слоистой геологической среде с непостоянными коэффициентами, а также их численные решения с использованием метода конечных элементов и интегро-интерполяционного метода (метода баланса) в сочетании с методом правой прогонки.

В продолжение двух последних указанных работ, в совместной статье В.С. Яковлевой и Р.И. Паровика [92] построена одномерная численная модель нестационарного диффузионно-адвективного переноса радона в многослойных геологических средах, и представлено ее решение также методом баланса в сочетании с методом правой прогонки.

Алгоритм расчета ППР предлагается в работах [58, 91].

Необходимо также отметить и основные работы зарубежных авторов, посвященных математическому моделированию процессов переноса радона.

Так, в работах М. Goto [104] и А. Varchegyi [120] исследуется одномерная диффузионная модель эксхалиции радона в однородной пористой среде.

В работе М. Antonopoulos-Domis [95] приводятся одномерные стационарные диффузионно-адвективные модели в случае однослойной и двухслойной сред, а также представлены их аналитические решения.

В работе S. Savovic [114] рассматривается нестационарная одномерная диффузионная модель переноса радона в системе «грунт-атмосфера». Для решения поставленной задачи автором применяется метод конечных разностей.

Таким образом, обзор литературы по теме исследования показывает достаточно большое количество работ, посвященных построению и исследованию математических моделей процессов диффузии-адвекции радона. Однако данные модели не учитывают анизотропию диффузионных свойств подобластей геологической среды, в отличие от рассматриваемой в настоящей работе.

Помимо самой математической модели, в работе также приводятся алгоритмы расчета объемной активности радона в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с анизотропным включением, основанные на сочетании методов интегральных преобразований Лапласа и Ханкеля, интегральных представлений.

Глава 2. Математическая модель задачи переноса радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах

В данной главе исследуется математическая модель задачи диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями. Описывается способ решения поставленной задачи, основанный на сочетании методов интегральных преобразований, интегральных представлений и граничных интегральных уравнений. Приводятся алгоритмы решения вспомогательных задач.

2.1. Постановка задачи и способ ее решения

Без ограничения общности рассуждений будем рассматривать горизонтально-слоистую модель среды с локальными включениями, отражающую типовую структуру нефтеносного района (рис. 2.1).

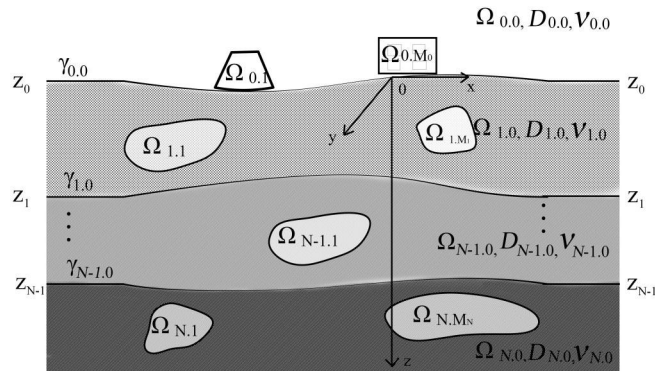


Рис. 2.1. Горизонтально-слоистая среда с включениями

Пусть среда разделена гладкими параметрически заданными границами $\gamma_{i,0} = \{\gamma_{i,0}(x, y) | \gamma_{i,0} \rightarrow z_i = const \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty\}$ ($i = \overline{0, N}$) на горизонтальные слои $\Omega_{0,0}, \Omega_{1,0}, \dots, \Omega_{N,0}$, заполненные веществом, диффузионные свойства которых описываются постоянными симметричными

тензорами $D_{i.0} = \begin{pmatrix} d_{xx}^{i.0} & d_{xy}^{i.0} & d_{xz}^{i.0} \\ d_{xy}^{i.0} & d_{yy}^{i.0} & d_{yz}^{i.0} \\ d_{xz}^{i.0} & d_{yz}^{i.0} & d_{zz}^{i.0} \end{pmatrix}$ и скоростями адвекции $\nu_{0.0}, \nu_{1.0}, \dots, \nu_{N.0}$ соответственно.

Каждый слой $\Omega_{i.0}$ содержит M_i локальных включений $\Omega_{i.j} (j = \overline{1, M_i})$ с гладкими границами $\gamma_{i.j}$, заполненных веществом, физические свойства которых описываются постоянными симметричными тензорами диффузии

$$D_{i.j} = \begin{pmatrix} d_{xx}^{i.j} & d_{xy}^{i.j} & d_{xz}^{i.j} \\ d_{xy}^{i.j} & d_{yy}^{i.j} & d_{yz}^{i.j} \\ d_{xz}^{i.j} & d_{yz}^{i.j} & d_{zz}^{i.j} \end{pmatrix} \text{ и скоростями адвекции } \nu_{i.j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}.$$

Математическая модель переноса радона в области исследования $\Omega = \bigcup_{i=0}^N \bigcup_{j=0}^{M_i} \Omega_{i.j} \subset R^3$ может быть представлена начально-краевой задачей для уравнения в частных производных параболического типа:

$$\frac{\partial A_{i.j}(P,t)}{\partial t} = \operatorname{div}(D_{i.j} \overline{\nabla} A_{i.j}(P,t)) + \nu_{i.j} \frac{\partial A_{i.j}(P,t)}{\partial z} - \lambda(A_{i.j}(P,t) - A_{i.\infty}), \quad (2.1)$$

$$P = P(x, y, z) \in \Omega_{i.j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i};$$

$$((D_{i.0} \overline{\nabla} A_{i.0}(P,t), \overline{n}) + \nu_{i.0} A_{i.0}(P,t))|_{\gamma_{i.0}} = \quad (2.2)$$

$$= ((D_{i+1.0} \overline{\nabla} A_{i+1.0}(P,t), \overline{n}) + \nu_{i+1.0} A_{i+1.0}(P,t))|_{\gamma_{i.0}}, i = \overline{0, N-1};$$

$$A_{i.0}(P,t)|_{\gamma_{i.0}} = A_{i+1.0}(P,t)|_{\gamma_{i.0}}, i = \overline{0, N-1}; \quad (2.3)$$

$$((D_{i.j} \overline{\nabla} A_{i.j}(P,t), \overline{n}) + \nu_{i.j} A_{i.j}(P,t))|_{\gamma_{i.j}} = \quad (2.4)$$

$$= ((D_{i.0} \overline{\nabla} A_{i.0}(P,t), \overline{n}) + \nu_{i.0} A_{i.0}(P,t))|_{\gamma_{i.j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i};$$

$$A_{i.j}(P,t)|_{\gamma_{i.j}} = A_{i.0}(P,t)|_{\gamma_{i.j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \quad (2.5)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} A_{N.0}(P,t) = A_{N.\infty}, \lim_{z \rightarrow -\infty} A_{0.0}(P,t) = 0; \quad (2.6)$$

$$\lim_{P \in \Omega_{i.0}, \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} A_{i.0}(P,t) = A_i(P,t), i = \overline{0, N}; \quad (2.7)$$

$$A_{i.j}(P,0) = 0, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}. \quad (2.8)$$

Здесь $A_{i.j}(P,t)$ – объемная активность радона в грунте, $A_{i.j}(P,t) \in C_P^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega) \cap C^1(\gamma_{i.j})$; λ – постоянная распада радона; $A_{i.\infty}$ – объемная активность радона, находящегося в радиоактивном равновесии с радием

(^{226}Ra) в грунте i -го слоя, которая равна $A_{i,\infty} = K_{i.em}A_{i.Ra}\rho_{i.s}(1 - \eta_i)$, $K_{i.em}$ – коэффициент эманирования радона, $A_{i.Ra}$ – удельная активность ^{226}Ra , $\rho_{i.s}$ – плотность твердых частиц, η_i – пористость грунта, $A_i(P, t)$ – нормальное поле радона, описывающее диффузию-адвекцию радона в слоистой среде в предположении отсутствия включений. Переменная $t \geq 0$ – время.

Если область $\Omega_{0,0}$ – приземный слой атмосферы, то в задаче (2.1) – (2.8) следует положить $A_{0,\infty} = 0$. При $M_0 > 0$ включения $\Omega_{0,1}, \dots, \Omega_{0,M_0}$ могут описывать жилые и производственные сооружения.

Представим искомую функцию объемной активности радона в грунте $A_{i,j}(P, t)$ в виде суммы двух вспомогательных функций нормального $A_i(P, t)$ и аномального $\bar{A}_{i,j}(P, t)$ полей, т.е.

$$A_{i,j}(P, t) = A_i(P, t) + \bar{A}_{i,j}(P, t), i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}, \quad (2.9)$$

где нормальное поле радона определяется краевой задачей и описывает поле радона в горизонтально-слоистой среде без включений:

$$\frac{\partial A_i(P, t)}{\partial t} = \text{div}(D_{i,0}\bar{\nabla}A_i(P, t)) + \nu_{i,0}\frac{\partial A_i(P, t)}{\partial z} - \lambda(A_i(P, t) - A_{i,\infty}), \quad (2.10)$$

$$P \in \Omega_{i,0}, i = \overline{0, N};$$

$$((D_{i,0}\bar{\nabla}A_i(P, t), \bar{n}) + \nu_{i,0}A_i(P, t))|_{\gamma_{i,0}} = \quad (2.11)$$

$$= ((D_{i+1,0}\bar{\nabla}A_{i+1}(P, t), \bar{n}) + \nu_{i+1,0}A_{i+1}(P, t))|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1};$$

$$A_i(P, t)|_{\gamma_{i,0}} = A_{i+1,0}(P, t)|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \quad (2.12)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} A_N(P, t) = A_{N,\infty}; \lim_{z \rightarrow -\infty} A_0(P, t) = 0; \quad (2.13)$$

$$\lim_{P \in \Omega_i, \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} A_i(P, t) = \widetilde{A}_i(z, t), i = \overline{0, N}; \quad (2.14)$$

$$A_i(P, 0) = 0, i = \overline{0, N}, \quad (2.15)$$

где $\widetilde{A}_i(z, t)$ – объемная активность радона в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами $z = z_i, i = \overline{0, N-1}$ и коэффициентами диффузии $\widetilde{d}_i = d_{zz}^{i,0}, i = \overline{0, N}$.

Следует отметить, что в случае однородной среды с плоско-параллельными границами функция нормального поля радона $A_i(P, t)$ совпадает с функцией $\widetilde{A}_i(z, t)$. Способ определения $\widetilde{A}_i(z, t)$ описан в [61].

С учетом задачи (2.10) – (2.15) аномальное поле радона удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial \bar{A}_{i,j}(P,t)}{\partial t} = \operatorname{div}(D_{i,j} \bar{\nabla} \bar{A}_{i,j}(P,t)) + \nu_{i,j} \frac{\partial \bar{A}_{i,j}(P,t)}{\partial z} - \lambda \bar{A}_{i,j}(P,t), \quad (2.16)$$

$$P \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i};$$

$$((D_{i,0} \bar{\nabla} \bar{A}_{i,0}(P,t), \bar{n}) + \nu_{i,0} \bar{A}_{i,0}(P,t))|_{\gamma_{i,0}} = \quad (2.17)$$

$$= ((D_{i+1,0} \bar{\nabla} \bar{A}_{i+1,0}(P,t), \bar{n}) + \nu_{i+1,0} \bar{A}_{i+1,0}(P,t))|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1};$$

$$\bar{A}_{i,0}(P,t)|_{\gamma_{i,0}} = \bar{A}_{i+1,0}(P,t)|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \quad (2.18)$$

$$((D_{i,j} \bar{\nabla} \bar{A}_{i,j}(P,t), \bar{n}) + \nu_{i,j} \bar{A}_{i,j}(P,t))|_{\gamma_{i,j}} = \quad (2.19)$$

$$= ((D_{i,0} \bar{\nabla} \bar{A}_{i,0}(P,t), \bar{n}) + \nu_{i,0} \bar{A}_{i,0}(P,t) + \psi_{i,0}(P,t))|_{\gamma_{i,j}},$$

$$i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i},$$

$$\psi_{i,0}(P,t) = ((D_{i,0} - D_{i,j}) \bar{\nabla} A_i(P,t), \bar{n}) + (\nu_{i,0} - \nu_{i,j}) A_i(P,t); \quad (2.20)$$

$$\bar{A}_{i,j}(P,t)|_{\gamma_{i,j}} = \bar{A}_{i,0}(P,t)|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \quad (2.21)$$

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \bar{A}_{i,0}(P,t) = 0, i = \overline{0, N}; \quad (2.22)$$

$$\bar{A}_{i,j}(P,0) = 0, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}. \quad (2.23)$$

Функция $\psi_{i,0}(P,t)$ вида (2.20) получена в результате применения равенства (2.9) к граничным условиям исходной задачи (2.1) – (2.8).

Сделаем в задаче (2.16) – (2.23) замену вида:

$$\bar{A}_{i,j}(P,t) = e^{-\lambda t} u_{i,j}(P', t), \quad (2.24)$$

где $P' = (x, y, z')$, $z' = z + \nu_{i,j} t$.

Получим задачу:

$$\frac{\partial u_{i,j}(P',t)}{\partial t} = \operatorname{div}(D_{i,j} \bar{\nabla} u_{i,j}(P',t)), P' \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}; \quad (2.25)$$

$$((D_{i,0} \bar{\nabla} u_{i,0}(P',t), \bar{n}) + \nu_{i,0} u_{i,0}(P',t))|_{\gamma'_{i,0}} = \quad (2.26)$$

$$= ((D_{i+1,0} \bar{\nabla} u_{i+1,0}(P',t), \bar{n}) + \nu_{i+1,0} u_{i+1,0}(P',t))|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N-1};$$

$$\begin{aligned}
& ((D_{i,j}\bar{\nabla}u_{i,j}(P',t),\bar{n}) + \nu_{i,j}u_{i,j}(P',t))|_{\gamma'_{i,j}} = \\
& = ((D_{i,0}\bar{\nabla}u_{i,0}(P',t),\bar{n}) + \nu_{i,0}u_{i,0}(P',t) + \psi_{i,0}(P',t))|_{\gamma'_{i,0}}, \\
& \quad i = \overline{0,N}, j = \overline{1,M_i};
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$u_{i,j}(P',t)|_{\gamma'_{i,0}} = u_{i,0}(P',t)|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0,N}, j = \overline{1,M_i}; \tag{2.28}$$

$$\lim_{P' \rightarrow \infty} u_{i,0}(P',t) = 0, i = \overline{0,N}; \tag{2.29}$$

$$u_{i,j}(P',0) = 0, i = \overline{0,N}, j = \overline{0,M_i}. \tag{2.30}$$

Применим к задаче (2.25) – (2.30) способ решения, описанный в работе [41], используя интегральное преобразование Лапласа

$$F(P',s) = \int_0^{\infty} u(P',t)e^{-st} dt \tag{2.31}$$

с формулой обращения Римана-Меллина

$$u(P',t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(P',s)e^{st} ds. \tag{2.32}$$

В формуле (2.32) пределы интегрирования $(\sigma - i\infty; \sigma + i\infty)$ означают, что интегрирование может вестись по любой прямой, параллельной оси $Im(s)$ и пересекающей ось $Re(s)$ в точке $\sigma > \sigma_0$. Фактически это означает, что $s = \sigma + i\omega$, где $\sigma (\sigma > \sigma_0)$ – константа, $\omega (-\infty < \omega < +\infty)$ – переменная интегрирования.

Далее получим семейство краевых задач относительно комплексного параметра s :

$$div(D_{i,j}\bar{\nabla}F_{i,j}(P',s)) - sF_{i,j}(P',s) = 0, \tag{2.33}$$

$$P' \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0,N}, j = \overline{0,M_i};$$

$$\begin{aligned}
& ((D_{i,0}\bar{\nabla}F_{i,0}(P',s),\bar{n}) + \nu_{i,0}F_{i,0}(P',s))|_{\gamma'_{i,0}} = \\
& = ((D_{i+1,0}\bar{\nabla}F_{i+1,0}(P',s),\bar{n}) + \nu_{i+1,0}F_{i+1,0}(P',s))|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0,N-1};
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$F_{i,0}(P',s)|_{\gamma_{i,0}} = F_{i+1,0}(P',s)|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0,N-1}; \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
& ((D_{i,j}\overline{\nabla}F_{i,j}(P', s), \overline{n}) + \nu_{i,j}F_{i,j}(P', s))|_{\gamma'_{i,j}} = \\
& = ((D_{i,0}\overline{\nabla}F_{i,0}(P', s), \overline{n}) + \nu_{i,0}F_{i,0}(P', s) + F_{\psi_{i,0}}(P', s))|_{\gamma'_{i,j}}, \\
& \quad i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i},
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$F_{\psi_{i,0}}(P', s) = ((D_{i,0} - D_{i,j})\overline{\nabla}F_i(P', s), \overline{n}) + (\nu_{i,0} - \nu_{i,j})F_i(P', s); \tag{2.37}$$

$$F_{i,j}(P', s)|_{\gamma'_{i,j}} = F_{i,0}(P', s)|_{\gamma'_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \tag{2.38}$$

$$\lim_{P' \rightarrow \infty} F_{i,j}(P', s) = 0, i = \overline{0, N}, \tag{2.39}$$

где функции $F_{\psi_{i,0}}(P', s)$ и $F_i(P', s)$ – есть образы функций $\psi_{i,0}(P', t)$ и $A_i(P', t)$ при преобразовании (2.31) соответственно.

Задача (2.33)–(2.39) – краевая задача дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Решим ее методом интегральных представлений и интегральных уравнений. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу для функции Грина $G(P, Q)$ – функции точечного источника, находящегося в произвольной точке $Q(x_q, y_q, z_q)$ и генерирующего диффузионное поле единичной интенсивности во вмещающем пространстве (в слоистой среде без включений):

$$\operatorname{div}(D_{i,0}\overline{\nabla}G_{i,0}(P', Q)) - sG_{i,0}(P', Q) = -\delta(P', Q), \tag{2.40}$$

$$P' \in \Omega_{i,0}, i = \overline{0, N};$$

$$\begin{aligned}
& ((D_{i,0}\overline{\nabla}G_{i,0}(P', Q), \overline{n}) + \nu_{i,0}G_{i,0}(P', Q))|_{\gamma'_{i,0}} = \\
& = ((D_{i+1,0}\overline{\nabla}G_{i+1,0}(P', Q), \overline{n}) + \nu_{i+1,0}G_{i+1,0}(P', Q))|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N-1};
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$G_{i,0}(P', Q)|_{\gamma'_{i,0}} = G_{i+1,0}(P', Q)|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \tag{2.42}$$

$$\lim_{P' \rightarrow \infty} G_{i,0}(P', Q) = 0, i = \overline{0, N}. \tag{2.43}$$

Рассмотрим для каждой подобласти $\Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}$ формулу Остроградского, справедливую для операторов $(\operatorname{div}(D_{i,j}\overline{\nabla}F_{i,j}(Q, s)) - sF_{i,j}(Q, s))$ с симметричными тензорами $D_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{i,j}} [(div(D_{i,j} \bar{\nabla} F_{i,j}(Q, s)) - sF_{i,j}(Q, s))G_{i,0}(P', Q) - \\
& - (div(D_{i,j} \bar{\nabla} G_{i,0}(P', Q)) - sG_{i,0}(P', Q))F_{i,j}(Q, s)] d\Omega_{i,jQ} = \\
& = \int_{\gamma'_{i,j}} [(D_{i,j} \bar{\nabla} F_{i,j}(Q, s), \bar{n}_Q)G_{i,0}(P', Q) - \\
& - (D_{i,j} \bar{\nabla} G_{i,0}(P', Q), \bar{n}_Q)F_{i,j}(Q, s)] d\gamma'_{i,jQ}.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Тогда, согласно [41], интегральное представление Грина решения краевой задачи (2.33)–(2.39) в области $\Omega_{i,j}$, $i = \overline{0, N}$, $j = \overline{1, M_i}$ примет вид:

$$\begin{aligned}
\mu_i F_{i,j}(P', s) = & \int_{\gamma'_{i,j}} [(D_{i,j} \bar{\nabla} F_{i,j}(Q, s), \bar{n}_Q)G_{i,0}(P', Q) - \\
& - (D_{i,j} \bar{\nabla} G_{i,0}(P', Q), \bar{n}_Q)F_{i,j}(Q, s)] d\gamma'_{i,jQ},
\end{aligned} \tag{2.45}$$

где

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & P' \in \Omega_{i,j} \setminus \{\partial\Omega_{i,j}\} \\ 1/2, & P' \in \{\partial\Omega_{i,j}\} \\ 0, & P' \notin \Omega_{i,j} \cup \{\partial\Omega_{i,j}\}. \end{cases}$$

Просуммировав формулы (2.45) по i от 0 до N , получим:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^N \mu_i F_{i,j}(P', s) = & \sum_{i=0}^N \int_{i=0}^N \int_{\gamma'_{i,j}} [(D_{i,j} \bar{\nabla} F_{i,j}(Q, s), \bar{n}_Q)G_{i,0}(P', Q) - \\
& - (D_{i,j} \bar{\nabla} G_{i,0}(P', Q), \bar{n}_Q)F_{i,j}(Q, s)] d\gamma'_{i,jQ}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

С учетом граничных условий (2.34), (2.36) и (2.41) правая часть (2.46) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^N \int_{\gamma'_{i,j}} [(D_{i,j} \bar{\nabla} F_{i,j}(Q, s), \bar{n}_Q)G_{i,0}(P', Q) - \\
& - (D_{i,j} \bar{\nabla} G_{i,0}(P', Q), \bar{n}_Q)F_{i,j}(Q, s)] d\gamma'_{i,jQ} = \\
& \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i,j}} F_{i,j}(Q, s) [(\nu_{i,0} - \nu_{i,j})G_{i,0}(P', Q) + \\
& + ((D_{i,0} - D_{i,j}) \bar{\nabla} G_{i,0}(P', Q), \bar{n}_Q)] d\gamma'_{i,jQ} + \\
& + \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i,j}} F_{\psi_{i,0}}(Q, s) G_{i,0}(P', Q) d\gamma'_{i,jQ}.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Здесь \bar{n}_Q – вектор внешней нормали к границе включения в точке Q .

Таким образом, в области Ω получим интегральное представление решения задачи (2.33)–(2.39):

$$\begin{aligned} F(P', s) = & \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i,j}} F_{i,j}(Q, s) [(\nu_{i,0} - \nu_{i,j})G_{i,0}(P', Q) + \\ & + ((D_{i,0} - D_{i,j})\bar{\nabla}G_{i,0}(P', Q), \bar{n}_Q)] d\gamma'_{i,j} + \\ & + \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i,j}} F_{\psi_{i,0}}(Q, s) G_{i,0}(P', Q) d\gamma'_{i,j}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Из (2.48) следует, что решение задачи (2.33)–(2.39) может быть получено в любой точке P' кусочно-постоянной анизотропной области $\Omega_{i,j}$, $i = \overline{0, N}$, $j = \overline{1, M_i}$, если будет определено решение задачи (2.40)–(2.43) – функция Грина $G_{i,0}(P', Q)$, $i = \overline{0, N}$, и будут известны граничные значения функции $F_{i,j}(Q, s)$ на внутренних границах подобластей, не вошедших в задачу для функции Грина.

Опуская в (2.48) точку P' на каждую из таких границ, получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно неизвестных граничных значений функции $F_{i,j}(Q, s)$ вида:

$$\begin{aligned} F_{i,j}(P', s) - \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i,j}} F_{i,j}(Q, s) [(\nu_{i,0} - \nu_{i,j})G_{i,0}(P', Q) + \\ + ((D_{i,0} - D_{i,j})\bar{\nabla}G_{i,0}(P', Q), \bar{n}_Q)] d\gamma'_{i,j} = \\ = \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i,j}} F_{\psi_{i,0}}(Q, s) G_{i,0}(P', Q) d\gamma'_{i,j}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Таким образом, алгоритм решения исходной задачи (2.1) – (2.8) имеет вид:

Шаг 1. Определяем нормальное поле радона $\tilde{A}_i(z, t)$ в горизонтально-слоистой кусочно-однородной среде с плоско-параллельными границами $z = z_i = const$, $i = \overline{0, N-1}$, коэффициентами диффузии $\tilde{d}_i = d_{zz}^{i,0}$, $i = \overline{0, N}$ и скоростями адвекции $\nu_{i,0}$, $i = \overline{0, N}$ по алгоритму, описанному в работе [61].

Шаг 2. Если границы слоев $z = \gamma_{i,0}(x, y) = z_i = const$, то есть среда имеет плоско-параллельные границы, то решение задачи (2.10) – (2.15)

для нормального поля радона найдено: $A_i(P, t) = \tilde{A}_i(z, t)$. Иначе следует решить задачу (2.10) – (2.15), например, методом интегральных уравнений, формируя их по участкам $\gamma_{i.0}(x, y) \neq z_i$.

Шаг 3. Вычисляем функции $\psi_{i.0}(P', t)$ на границах включений $\gamma_{i.j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}$ по формуле (2.20).

Шаг 4. Для каждого из значений параметра s множества квадратурных узлов численного обращения преобразования Лапласа (в соответствии с алгоритмом в [49]) по формуле (2.31):

Шаг 4.1. Находим образы $F_{\psi_{i.0}}(P', s)$ функций $\psi_{i.0}(P, t)$ при преобразованиях (2.24) и (2.31).

Шаг 4.2. Находим решение задачи (2.40) – (2.43) для функции Грина. Оно может быть получено аналитически для случая однородных слоев с плоско-параллельными границами, например, с помощью интегрального преобразования Ханкеля.

Шаг 4.3. Формируем систему (2.49) и находим ее решение - граничные (на границах включений) значения функции $F_{i.j}(Q, s)$.

Шаг 4.4. По формуле (2.48) определяем решение задачи (2.33) – (2.39) – функцию $F_{i.j}(P', s)$.

Шаг 4.5. Формируем слагаемое квадратурной формулы для интеграла (2.32), вычисляя функции $u(P', t)$.

Шаг 5. Находим аномальное поле $\bar{A}_{i.j}(P, t)$ по формуле (2.24).

Шаг 6. Решение исходной задачи (2.1) – (2.8) – функцию $A_{i.j}(P, t)$ – получаем по формуле (2.9).

Таким образом, в данном параграфе:

1) построена математическая модель диффузии-адвекции радона в слоистых анизотропных средах с анизотропными включениями, которая представляет собой краевую задачу математической физики параболического типа. Модель согласуется с приведенной в работе [61] для случая кусочно-

однородной горизонтально-слоистой среды с плоско-параллельными границами;

2) предложен комбинированный способ решения задачи на основе методов интегральных преобразований, интегральных представлений и граничных интегральных уравнений;

3) построен алгоритм расчета поля объемной активности радона.

Далее в последующих параграфах данной главы приведем более подробно алгоритмы решения вспомогательных задач, необходимых для нахождения искомой функции объемной активности радона.

2.2. Определение нормального поля радона в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами

Задача нахождения функции нормального поля радона является вспомогательной в общей постановке трехмерной задачи диффузии-адвекции радона. В соответствии с алгоритмом, изложенным в предыдущем параграфе, нормальное поле радона определяется следующей начально-краевой задачей:

$$\frac{\partial A_i(P,t)}{\partial t} = \text{div}(D_{i.0}\overline{\nabla}A_i(P,t)) + \nu_{i.0}\frac{\partial A_i(P,t)}{\partial z} - \lambda(A_i(P,t) - A_{i.\infty}), \quad (2.50)$$

$$P \in \Omega_{i.0}, i = \overline{0, N};$$

$$((D_{i.0}\overline{\nabla}A_i(P,t), \overline{n}) + \nu_{i.0}A_i(P,t))|_{\gamma_{i.0}} = \quad (2.51)$$

$$= ((D_{i+1.0}\overline{\nabla}A_{i+1}(P,t), \overline{n}) + \nu_{i+1.0}A_{i+1}(P,t))|_{\gamma_{i.0}}, i = \overline{0, N-1};$$

$$A_i(P,t)|_{\gamma_{i.0}} = A_{i+1.0}(P,t)|_{\gamma_{i.0}}, i = \overline{0, N-1}; \quad (2.52)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} A_N(P,t) = A_{N.\infty}; \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} A_0(P,t) = 0; \quad (2.53)$$

$$\lim_{P \in \Omega_i, \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} A_i(P,t) = \widetilde{A}_i(z,t), i = \overline{0, N}; \quad (2.54)$$

$$A_i(P,0) = 0, i = \overline{0, N}, \quad (2.55)$$

где $\tilde{A}_i(z, t)$ – объемная активность радона в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами $z = z_i, i = \overline{0, N-1}$ и коэффициентами диффузии $\tilde{d}_i = d_{zz}^{i,0}, i = \overline{0, N}$.

С учетом (2.50) – (2.55) задача нахождения функции $\tilde{A}_i(z, t)$ примет вид:

$$\frac{\partial \tilde{A}_i(z, t)}{\partial t} = \tilde{d}_i \frac{\partial^2 \tilde{A}_i(z, t)}{\partial z^2} + \nu_{i,0} \frac{\partial \tilde{A}_i(z, t)}{\partial z} - \lambda(\tilde{A}_i(z, t) - A_{i,\infty}), i = \overline{0, N}; \quad (2.56)$$

$$\left(\tilde{d}_i \frac{\partial \tilde{A}_i(z, t)}{\partial z} + \nu_{i,0} \tilde{A}_i(z, t) \right) \Big|_{z_i} = \left(\tilde{d}_{i+1} \frac{\partial \tilde{A}_{i+1}(z, t)}{\partial z} + \nu_{i+1,0} \tilde{A}_{i+1}(z, t) \right) \Big|_{z_i}, \quad (2.57)$$

$$i = \overline{0, N-1};$$

$$\tilde{A}_i(z, t) \Big|_{z_i} = \tilde{A}_{i+1}(z, t) \Big|_{z_i}, i = \overline{0, N-1}; \quad (2.58)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{A}_N(z, t) = A_{N,\infty}; \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{A}_0(z, t) = 0. \quad (2.59)$$

К задаче (2.56) – (2.59) применим алгоритм, предложенный в работе [62]. Для этого сделаем замену вида:

$$\tilde{A}_i(z, t) = e^{-\lambda t} \tilde{u}_i(z', t), \quad (2.60)$$

где $z' = z + \nu_{i,0}t$.

Получим следующую задачу:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i(z', t)}{\partial t} = \tilde{d}_i \frac{\partial^2 \tilde{u}_i(z', t)}{\partial z'^2} + \lambda A_{i,\infty} e^{\lambda t}, i = \overline{0, N}; \quad (2.61)$$

$$\left(\tilde{d}_i \frac{\partial \tilde{u}_i(z', t)}{\partial z'} + \nu_{i,0} \tilde{u}_i(z', t) \right) \Big|_{z'_i} = \left(\tilde{d}_{i+1} \frac{\partial \tilde{u}_{i+1}(z', t)}{\partial z'} + \nu_{i+1,0} \tilde{u}_{i+1}(z', t) \right) \Big|_{z'_i}, \quad (2.62)$$

$$i = \overline{0, N-1};$$

$$\tilde{u}_i(z', t) \Big|_{z'_i} = \tilde{u}_{i+1}(z', t) \Big|_{z'_i}, i = \overline{0, N-1}; \quad (2.63)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{u}_N(z', t) = A_{N,\infty} e^{\lambda t}; \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{u}_0(z', t) = 0. \quad (2.64)$$

Применим к задаче (2.61) – (2.64) интегральное преобразование Лапласа по переменной времени t :

$$\tilde{F}(z', s) = \int_0^{\infty} \tilde{u}(z', t) e^{-st} dt. \quad (2.65)$$

Получим следующую краевую задачу:

$$\tilde{d}_i \frac{d^2 \tilde{F}_i(z', s)}{dz'^2} - s \tilde{F}_i(z', s) + \frac{\lambda A_{i,\infty}}{s-\lambda} = 0, i = \overline{0, N}; \quad (2.66)$$

$$(\tilde{d}_i \frac{d \tilde{F}_i(z', s)}{dz'} + \nu_{i,0} \tilde{F}_i(z', s))|_{z'_i} = (\tilde{d}_{i+1} \frac{d \tilde{F}_{i+1}(z', s)}{dz'} + \nu_{i+1,0} \tilde{F}_{i+1}(z', s))|_{z'_i}, \quad (2.67)$$

$$i = \overline{0, N-1};$$

$$\tilde{F}_i(z', s)|_{z'_i} = \tilde{F}_{i+1}(z', s)|_{z'_i}, i = \overline{0, N-1}; \quad (2.68)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{F}_N(z', s) = \frac{A_{N,\infty}}{s-\lambda}; \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{F}_0(z', s) = 0. \quad (2.69)$$

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения в задаче (2.66) – (2.69) имеет вид:

$$\tilde{F}_i(z', s) = C_{i,1} e^{-\sqrt{\frac{s}{d_i}} z'} + C_{i,2} e^{\sqrt{\frac{s}{d_i}} z'} + \frac{\lambda A_{i,\infty}}{s(s-\lambda)}, i = \overline{0, N}, \quad (2.70)$$

где $C_{i,1}, C_{i,2} (i = \overline{0, N})$ – неизвестные постоянные коэффициенты.

С учетом граничных условий (2.69) общее решение (2.70) для первого и последнего слоев соответственно примет вид:

$$\tilde{F}_0(z', s) = C_{0,2} e^{\sqrt{\frac{s}{d_0}} z'}, \quad \tilde{F}_N(z', s) = C_{N,1} e^{-\sqrt{\frac{s}{d_N}} z'} + \frac{\lambda A_{i,\infty}}{s-\lambda}.$$

Следовательно, количество неизвестных постоянных коэффициентов составит $(2N - 2)$. Они могут быть найдены из системы $(2N - 2)$ алгебраических уравнений, формируемой из граничных условий (2.67) и (2.68) задачи (2.66) – (2.69):

$$C_{0,2} e^{\sqrt{\frac{s}{d_0}}(z_0 + \nu_{0,0} t)} = C_{1,1} e^{-\sqrt{\frac{s}{d_1}}(z_0 + \nu_{1,0} t)} + C_{1,2} e^{\sqrt{\frac{s}{d_1}}(z_0 + \nu_{1,0} t)} + \frac{\lambda A_{1,\infty}}{s(s-\lambda)}; \quad (2.71)$$

$$C_{0,2} e^{\sqrt{\frac{s}{d_0}}(z_0 + \nu_{0,0} t)} (\nu_{0,0} + \sqrt{\tilde{d}_0 s}) = C_{1,1} e^{-\sqrt{\frac{s}{d_1}}(z_0 + \nu_{1,0} t)} (\nu_{1,0} - \sqrt{\tilde{d}_1 s}) + \quad (2.72)$$

$$+ C_{1,2} e^{\sqrt{\frac{s}{d_1}}(z_0 + \nu_{1,0} t)} (\nu_{1,0} + \sqrt{\tilde{d}_1 s}) + \frac{\nu_{1,0} \lambda A_{1,\infty}}{s(s-\lambda)};$$

$$C_{i,1} e^{-\sqrt{\frac{s}{d_i}}(z_i + \nu_{i,0} t)} + C_{i,2} e^{\sqrt{\frac{s}{d_i}}(z_i + \nu_{i,0} t)} + \frac{\lambda A_{i,\infty}}{s(s-\lambda)} = \quad (2.73)$$

$$= C_{i+1,1} e^{-\sqrt{\frac{s}{d_{i+1}}}(z_i + \nu_{i+1,0} t)} + C_{i+1,2} e^{\sqrt{\frac{s}{d_{i+1}}}(z_i + \nu_{i+1,0} t)} + \frac{\lambda A_{i+1,\infty}}{s(s-\lambda)},$$

$$i = \overline{1, N-1};$$

$$\begin{aligned}
& C_{i.1} e^{-\sqrt{\frac{s}{d_i}}(z_i+\nu_{i.0}t)} (\nu_{i.0} - \sqrt{\tilde{d}_i s}) + C_{i.2} e^{\sqrt{\frac{s}{d_i}}(z_i+\nu_{i.0}t)} (\nu_{i.0} + \sqrt{\tilde{d}_i s}) + \\
& + \frac{\nu_{i.0} \lambda A_{i.\infty}}{s(s-\lambda)} = C_{i+1.1} e^{-\sqrt{\frac{s}{d_{i+1}}}(z_{i+1}+\nu_{i+1.0}t)} (\nu_{i+1.0} - \sqrt{\tilde{d}_{i+1} s}) + \\
& + C_{i+1.2} e^{\sqrt{\frac{s}{d_{i+1}}}(z_{i+1}+\nu_{i+1.0}t)} (\nu_{i+1.0} + \sqrt{\tilde{d}_{i+1} s}) + \frac{\nu_{i+1.0} \lambda A_{i+1.\infty}}{s(s-\lambda)}, i = \overline{1, N-1};
\end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
& C_{N-1.1} e^{-\sqrt{\frac{s}{d_{N-1}}}(z_{N-1}+\nu_{N-1.0}t)} + C_{N-1.2} e^{\sqrt{\frac{s}{d_{N-1}}}(z_{N-1}+\nu_{N-1.0}t)} + \\
& + \frac{\lambda A_{N-1.\infty}}{s(s-\lambda)} = C_{N.1} e^{-\sqrt{\frac{s}{d_N}}(z_{N-1}+\nu_{N.0}t)} + \frac{A_{N.\infty}}{s-\lambda};
\end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned}
& C_{N-1.1} e^{-\sqrt{\frac{s}{d_{N-1}}}(z_{N-1}+\nu_{N-1.0}t)} (\nu_{N-1.0} - \sqrt{\tilde{d}_{N-1} s}) + \\
& + C_{N-1.2} e^{\sqrt{\frac{s}{d_{N-1}}}(z_{N-1}+\nu_{N-1.0}t)} (\nu_{N-1.0} + \sqrt{\tilde{d}_{N-1} s}) + \frac{\nu_{N-1.0} \lambda A_{N-1.\infty}}{s(s-\lambda)} = \\
& = C_{N.1} e^{-\sqrt{\frac{s}{d_N}}(z_{N-1}+\nu_{N.0}t)} (\nu_{N.0} - \sqrt{\tilde{d}_N s}) + \frac{\nu_{N.0} A_{N.\infty}}{s-\lambda}.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Формирование и решение системы (2.71) – (2.76) по данным исходных параметров рассматриваемой геологической среды программно реализованы в пакете Maple.

2.3. Вычисление функции Грина в горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами

Задача нахождения функции Грина в горизонтально-слоистой среде также является вспомогательной в общей постановке трехмерной задачи диффузии-адвекции радона.

Согласно алгоритму, построенному в параграфе 2.1, математическая модель для функции Грина $G_{i.0}(P', Q)$ – функции точечного источника, находящегося в произвольной точке $Q(x_q, y_q, z_q)$ и генерирующего диффузионное поле единичной интенсивности в слоистой среде без включений, имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div}(D_{i.0} \overline{\nabla} G_{i.0}(P', Q)) - s G_{i.0}(P', Q) = -\delta(P', Q), \\
& P' \in \Omega_{i.0}, i = \overline{0, N};
\end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned}
& ((D_{i.0}\overline{\nabla}G_{i.0}(P', Q), \overline{n}) + \nu_{i.0}G_{i.0}(P', Q))|_{\gamma'_{i.0}} = & (2.78) \\
= & ((D_{i+1.0}\overline{\nabla}G_{i+1.0}(P', Q), \overline{n}) + \nu_{i+1.0}G_{i+1.0}(P', Q))|_{\gamma'_{i.0}}, i = \overline{0, N-1};
\end{aligned}$$

$$G_{i.0}(P', Q)|_{\gamma'_{i.0}} = G_{i+1.0}(P', Q)|_{\gamma'_{i.0}}, i = \overline{0, N-1}; \quad (2.79)$$

$$\lim_{P' \rightarrow \infty} G_{i.0}(P', Q) = 0, i = \overline{0, N}. \quad (2.80)$$

Для случая $D_{i.0} = \begin{pmatrix} d_{xx}^{i.0} & d_{xy}^{i.0} & 0 \\ d_{xy}^{i.0} & d_{yy}^{i.0} & 0 \\ 0 & 0 & d_{zz}^{i.0} \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} d_{xx}^{i.0} & d_{xy}^{i.0} \\ d_{xy}^{i.0} & d_{yy}^{i.0} \end{pmatrix}$ – матрица вращения,

получим аналитическое решение функции Грина.

Рассмотрим горизонтально-слоистую модель среды с плоско-параллельными границами $z = z'_i, i = \overline{0, N-1}$ и коэффициентами диффузии $\tilde{d}_i = d_{zz}^{i.0}, i = \overline{0, N}$.

Перейдем к системе цилиндрических координат с осью вращения Oz , проходящей через точку Q :

$$\begin{cases} x = x_q + r \cdot \cos(\varphi) \\ y = y_q + r \cdot \sin(\varphi) \\ z = z. \end{cases}$$

Тогда задача (2.81) – (2.80) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\tilde{d}_i\overline{\nabla}G_{i.0}(r, z', r_q, z_q)) - sG_{i.0}(r, z', r_q, z_q) &= -\delta(r, z', r_q, z_q), & (2.81) \\
i &= \overline{0, N};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((\tilde{d}_i\overline{\nabla}G_{i.0}(r, z', r_q, z_q), \overline{n}) + \nu_{i.0}G_{i.0}(r, z', r_q, z_q))|_{z'_i} = & (2.82) \\
= & ((\tilde{d}_{i+1}\overline{\nabla}G_{i+1.0}(r, z', r_q, z_q), \overline{n}) + \nu_{i+1.0}G_{i+1.0}(r, z', r_q, z_q))|_{z'_i}, \\
& i = \overline{0, N-1};
\end{aligned}$$

$$G_{i.0}(r, z', r_q, z_q)|_{z'_i} = G_{i+1.0}(r, z', r_q, z_q)|_{z'_i}, i = \overline{0, N-1}; \quad (2.83)$$

$$\lim_{P' \rightarrow \infty} G_{i.0}(r, z', r_q, z_q) = 0, i = \overline{0, N}. \quad (2.84)$$

Применим к задаче (2.81) – (2.84) интегральное преобразование Ханкеля:

$$G_{i.0}^H(p, z', z_q) = \int_0^{\infty} r J_0(pr) G_{i.0}(r, z', r_q, z_q) dr. \quad (2.85)$$

Поскольку $r = \sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2}$, то формула обращения преобразования (2.85) имеет вид:

$$G_{i.0}(r, z', r_q, z_q) = \int_0^{\infty} p J_0(p\sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2}) G_{i.0}^H(p, z', z_q) dp. \quad (2.86)$$

Получим однопараметрическое семейство задач:

$$\tilde{d}_i \frac{d^2 G_{i.0}^H(p, z', z_q)}{dz'^2} - (p^2 + \frac{s}{\tilde{d}_i}) G_{i.0}^H(p, z', z_q) = -\frac{1}{2\tilde{d}_i} \delta(z' - z_q), i = \overline{0, N}; \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} & (\tilde{d}_i \frac{dG_{i.0}^H(p, z', z_q)}{dz'} + \nu_{i.0} G_{i.0}^H(p, z', z_q))|_{z'_i} = \\ & = (\tilde{d}_{i+1} \frac{dG_{i+1.0}^H(p, z', z_q)}{dz'} + \nu_{i+1.0} G_{i+1.0}^H(p, z', z_q))|_{z'_i}, i = \overline{0, N-1}; \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$G_{i.0}^H(p, z', z_q)|_{z'_i} = G_{i+1.0}^H(p, z', z_q)|_{z'_i}, i = \overline{0, N-1}; \quad (2.89)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} G_{N.0}^H(p, z', z_q) = 0; \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} G_{0.0}^H(p, z', z_q) = 0. \quad (2.90)$$

Общее решение (2.87) – (2.90) может быть найдено методом неопределенных коэффициентов и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} G_{i.0}^H(p, z', z_q) &= C_{i.1} e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{\tilde{d}_i}} z'} + C_{i.2} e^{-\sqrt{p^2 + \frac{s}{\tilde{d}_i}} z'} + \\ &+ \frac{1}{4\tilde{d}_i \sqrt{p^2 + \frac{s}{\tilde{d}_i}}} \begin{cases} e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{\tilde{d}_i}} (z' - z_q)}, z' \leq z_q \\ e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{\tilde{d}_i}} (z_q - z')}, z' > z_q, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.91)$$

где $C_{i.1}, C_{i.2} (i = \overline{0, N})$ – неизвестные постоянные коэффициенты.

С учетом граничных условий (2.90) общее решение (2.91) для первого и последнего слоев соответственно примет вид:

$$\begin{aligned} G_{0.0}^H(p, z', z_q) &= C_{0.1} e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{\tilde{d}_0}} z'} + \frac{1}{4\tilde{d}_0 \sqrt{p^2 + \frac{s}{\tilde{d}_0}}} e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{\tilde{d}_0}} (z_q - z')}, \\ G_{N.0}^H(p, z', z_q) &= C_{N.2} e^{-\sqrt{p^2 + \frac{s}{\tilde{d}_N}} z'} + \frac{1}{4\tilde{d}_N \sqrt{p^2 + \frac{s}{\tilde{d}_N}}} e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{\tilde{d}_N}} (z' - z_q)}. \end{aligned}$$

Следовательно, количество неизвестных постоянных коэффициентов составит $(2N - 2)$. В зависимости от того, в каком слое k ($k = \overline{0, N}$) находится точечный источник, данные коэффициенты могут быть найдены из соответствующей системы $(2N - 2)$ алгебраических уравнений, которая формируется из граничных условий (2.88) и (2.89) задачи (2.87) – (2.90):

1. $k = 0$:

$$C_{k.1}e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_k}}(z_k + \nu_{k.0}t)} + \frac{1}{4\tilde{d}_k\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_k}}}e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_k}}(z_q - z_k - \nu_{k.0}t)} = \quad (2.92)$$

$$C_{k+1.1}e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_{k+1}}}(z_k + \nu_{k+1.0}t)} + C_{k+1.2}e^{-\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_{k+1}}}(z_k + \nu_{k+1.0}t)};$$

$$C_{k.1}e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_k}}(z_k + \nu_{k.0}t)}(\nu_{k.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_k^2 + \tilde{d}_k s}) - \quad (2.93)$$

$$-\frac{1}{4}e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_k}}(z_q - z_k - \nu_{k.0}t)}\left(1 - \frac{\nu_{k.0}}{\sqrt{p^2\tilde{d}_k^2 + \tilde{d}_k s}}\right) =$$

$$= C_{k+1.1}e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_{k+1}}}(z_k + \nu_{k+1.0}t)}(\nu_{k+1.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_{k+1}^2 + \tilde{d}_{k+1} s}) +$$

$$+ C_{k+1.2}e^{-\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_{k+1}}}(z_k + \nu_{k+1.0}t)}(\nu_{k+1.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_{k+1}^2 + \tilde{d}_{k+1} s});$$

$$C_{i.1}e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_i}}(z_i + \nu_{i.0}t)} + C_{i.2}e^{-\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_i}}(z_i + \nu_{i.0}t)} = \quad (2.94)$$

$$= C_{i+1.1}e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_{i+1}}}(z_i + \nu_{i+1.0}t)} + C_{i+1.2}e^{-\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_{i+1}}}(z_i + \nu_{i+1.0}t)},$$

$$i = \overline{k+1, N-1};$$

$$C_{i.1}e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_i}}(z_i + \nu_{i.0}t)}(\nu_{i.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_i^2 + \tilde{d}_i s}) + \quad (2.95)$$

$$+ C_{i.2}e^{-\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_i}}(z_i + \nu_{i.0}t)}(\nu_{i.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_i^2 + \tilde{d}_i s}) =$$

$$= C_{i+1.1}e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_{i+1}}}(z_i + \nu_{i+1.0}t)}(\nu_{i+1.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_{i+1}^2 + \tilde{d}_{i+1} s}) +$$

$$+ C_{i+1.2}e^{-\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_{i+1}}}(z_i + \nu_{i+1.0}t)}(\nu_{i+1.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_{i+1}^2 + \tilde{d}_{i+1} s}),$$

$$i = \overline{k+1, N-1};$$

$$C_{N-1.1}e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_{N-1}}}(z_{N-1} + \nu_{N-1.0}t)} + C_{N-1.2}e^{-\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_{N-1}}}(z_{N-1} + \nu_{N-1.0}t)} = \quad (2.96)$$

$$= C_{N.2}e^{-\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_N}}(z_{N-1} + \nu_{N.0}t)};$$

$$C_{N-1.1}e^{\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_{N-1}}}(z_{N-1} + \nu_{N-1.0}t)}(\nu_{N-1.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_{N-1}^2 + \tilde{d}_{N-1} s}) + \quad (2.97)$$

$$+ C_{N-1.2}e^{-\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_{N-1}}}(z_{N-1} + \nu_{N-1.0}t)}(\nu_{N-1.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_{N-1}^2 + \tilde{d}_{N-1} s}) =$$

$$= C_{N.2}e^{-\sqrt{p^2 + \frac{s}{d_N}}(z_{N-1} + \nu_{N.0}t)}(\nu_{N.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_N^2 + \tilde{d}_N s}).$$

2. $0 < k < N$:

$$C_{0.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_0}}(z_0+\nu_{0.0}t)} = C_{1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_1}}(z_0+\nu_{1.0}t)} + C_{1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_1}}(z_0+\nu_{1.0}t)}; \quad (2.98)$$

$$C_{0.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_0}}(z_0+\nu_{0.0}t)}(\nu_{0.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_0^2 + \tilde{d}_0s}) = \quad (2.99)$$

$$C_{1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_1}}(z_0+\nu_{1.0}t)}(\nu_{1.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_1^2 + \tilde{d}_1s}) + \\ + C_{1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_1}}(z_0+\nu_{1.0}t)}(\nu_{1.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_1^2 + \tilde{d}_1s});$$

$$C_{i.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_i}}(z_i+\nu_{i.0}t)} + C_{i.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_i}}(z_i+\nu_{i.0}t)} = \quad (2.100) \\ = C_{i+1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{i+1}}}(z_i+\nu_{i+1.0}t)} + C_{i+1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{i+1}}}(z_i+\nu_{i+1.0}t)},$$

$$i = \overline{1, k-2};$$

$$C_{i.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_i}}(z_i+\nu_{i.0}t)}(\nu_{i.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_i^2 + \tilde{d}_is}) + \quad (2.101)$$

$$+ C_{i.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_i}}(z_i+\nu_{i.0}t)}(\nu_{i.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_i^2 + \tilde{d}_is}) =$$

$$= C_{i+1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{i+1}}}(z_i+\nu_{i+1.0}t)}(\nu_{i+1.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_{i+1}^2 + \tilde{d}_{i+1}s}) + \\ + C_{i+1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{i+1}}}(z_i+\nu_{i+1.0}t)}(\nu_{i+1.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_{i+1}^2 + \tilde{d}_{i+1}s}),$$

$$i = \overline{1, k-2};$$

$$C_{k-1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{k-1}}}(z_{k-1}+\nu_{k-1.0}t)} + C_{k-1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{k-1}}}(z_{k-1}+\nu_{k-1.0}t)} = \quad (2.102)$$

$$= C_{k.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}(z_{k-1}+\nu_{k.0}t)} + C_{k.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}(z_{k-1}+\nu_{k.0}t)} + \\ + \frac{1}{4\tilde{d}_k\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}(z_{k-1}+\nu_{k.0}t-z_q)};$$

$$C_{k-1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{k-1}}}(z_{k-1}+\nu_{k-1.0}t)}(\nu_{k-1.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_{k-1}^2 + \tilde{d}_{k-1}s}) + \quad (2.103)$$

$$+ C_{k-1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{k-1}}}(z_{k-1}+\nu_{k-1.0}t)}(\nu_{k-1.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_{k-1}^2 + \tilde{d}_{k-1}s}) =$$

$$= C_{k.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}(z_{k-1}+\nu_{k.0}t)}(\nu_{k.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_k^2 + \tilde{d}_ks}) +$$

$$+ C_{k.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}(z_{k-1}+\nu_{k.0}t)}(\nu_{k.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_k^2 + \tilde{d}_ks}) +$$

$$+ \frac{1}{4}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}(z_{k-1}+\nu_{k.0}t-z_q)}\left(1 + \frac{\nu_{k.0}}{\sqrt{p^2\tilde{d}_k^2 + \tilde{d}_ks}}\right);$$

$$\begin{aligned}
& C_{k.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}(z_k+\nu_{k.0}t)} + C_{k.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}(z_k+\nu_{k.0}t)} + \\
& + \frac{1}{4\tilde{d}_k\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}(z_q-z_k-\nu_{k.0}t)} = C_{k+1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{\tilde{d}_{k+1}}}(z_k+\nu_{k+1.0}t)} + \\
& + C_{k+1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{\tilde{d}_{k+1}}}(z_k+\nu_{k+1.0}t)}; \tag{2.104}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_{k.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}(z_k+\nu_{k.0}t)}(\nu_{k.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_k^2 + \tilde{d}_k s}) + \\
& + C_{k.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}(z_k+\nu_{k.0}t)}(\nu_{k.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_k^2 + \tilde{d}_k s}) - \\
& - \frac{1}{4}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}(z_q-z_k-\nu_{k.0}t)}\left(1 - \frac{\nu_{k.0}}{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}}\right) = \\
& = C_{k+1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{\tilde{d}_{k+1}}}(z_k+\nu_{k+1.0}t)}(\nu_{k+1.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_{k+1}^2 + \tilde{d}_{k+1} s}) + \\
& + C_{k+1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{\tilde{d}_{k+1}}}(z_k+\nu_{k+1.0}t)}(\nu_{k+1.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_{k+1}^2 + \tilde{d}_{k+1} s}); \tag{2.105}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_{i.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_i}}(z_i+\nu_{i.0}t)} + C_{i.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_i}}(z_i+\nu_{i.0}t)} = \\
& = C_{i+1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{\tilde{d}_{i+1}}}(z_i+\nu_{i+1.0}t)} + C_{i+1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{\tilde{d}_{i+1}}}(z_i+\nu_{i+1.0}t)}, \tag{2.106}
\end{aligned}$$

$$i = \overline{k+1, N-2};$$

$$\begin{aligned}
& C_{i.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_i}}(z_i+\nu_{i.0}t)}(\nu_{i.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_i^2 + \tilde{d}_i s}) + \\
& + C_{i.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_i}}(z_i+\nu_{i.0}t)}(\nu_{i.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_i^2 + \tilde{d}_i s}) = \\
& = C_{i+1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{\tilde{d}_{i+1}}}(z_i+\nu_{i+1.0}t)}(\nu_{i+1.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_{i+1}^2 + \tilde{d}_{i+1} s}) + \\
& + C_{i+1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{\tilde{d}_{i+1}}}(z_i+\nu_{i+1.0}t)}(\nu_{i+1.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_{i+1}^2 + \tilde{d}_{i+1} s}), \tag{2.107}
\end{aligned}$$

$$i = \overline{k+1, N-2};$$

$$\begin{aligned}
& C_{N-1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{N-1}}}(z_{N-1}+\nu_{N-1.0}t)} + C_{N-1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{N-1}}}(z_{N-1}+\nu_{N-1.0}t)} = \\
& = C_{N.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_N}}(z_{N-1}+\nu_{N.0}t)}; \tag{2.108}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_{N-1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{N-1}}}(z_{N-1}+\nu_{N-1.0}t)}(\nu_{N-1.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_{N-1}^2 + \tilde{d}_{N-1} s}) + \\
& + C_{N-1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{N-1}}}(z_{N-1}+\nu_{N-1.0}t)}(\nu_{N-1.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_{N-1}^2 + \tilde{d}_{N-1} s}) = \\
& = C_{N.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_N}}(z_{N-1}+\nu_{N.0}t)}(\nu_{N.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_N^2 + \tilde{d}_N s}). \tag{2.109}
\end{aligned}$$

3. $k = N$:

$$C_{0.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_0}}(z_0+\nu_{0.0}t)} = C_{1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_1}}(z_0+\nu_{1.0}t)} + C_{1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_1}}(z_0+\nu_{1.0}t)}; \quad (2.110)$$

$$C_{0.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_0}}(z_0+\nu_{0.0}t)}(\nu_{0.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_0^2 + \tilde{d}_0s}) = \quad (2.111)$$

$$C_{1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_1}}(z_0+\nu_{1.0}t)}(\nu_{1.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_1^2 + \tilde{d}_1s}) + \\ + C_{1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_1}}(z_0+\nu_{1.0}t)}(\nu_{1.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_1^2 + \tilde{d}_1s});$$

$$C_{i.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_i}}(z_i+\nu_{i.0}t)} + C_{i.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_i}}(z_i+\nu_{i.0}t)} = \quad (2.112) \\ = C_{i+1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{i+1}}}(z_i+\nu_{i+1.0}t)} + C_{i+1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{i+1}}}(z_i+\nu_{i+1.0}t)},$$

$$i = \overline{1, k-2};$$

$$C_{i.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_i}}(z_i+\nu_{i.0}t)}(\nu_{i.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_i^2 + \tilde{d}_is}) + \quad (2.113) \\ + C_{i.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_i}}(z_i+\nu_{i.0}t)}(\nu_{i.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_i^2 + \tilde{d}_is}) =$$

$$= C_{i+1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{i+1}}}(z_i+\nu_{i+1.0}t)}(\nu_{i+1.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_{i+1}^2 + \tilde{d}_{i+1}s}) + \\ + C_{i+1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{i+1}}}(z_i+\nu_{i+1.0}t)}(\nu_{i+1.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_{i+1}^2 + \tilde{d}_{i+1}s}),$$

$$i = \overline{1, k-2};$$

$$C_{k-1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{k-1}}}(z_{k-1}+\nu_{k-1.0}t)} + C_{k-1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{k-1}}}(z_{k-1}+\nu_{k-1.0}t)} = \quad (2.114)$$

$$= C_{k.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}(z_{k-1}+\nu_{k.0}t)} + \frac{1}{4\tilde{d}_k\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}(z_{k-1}+\nu_{k.0}t-z_q)};$$

$$C_{k-1.1}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{k-1}}}(z_{k-1}+\nu_{k-1.0}t)}(\nu_{k-1.0} + \sqrt{p^2\tilde{d}_{k-1}^2 + \tilde{d}_{k-1}s}) + \quad (2.115)$$

$$+ C_{k-1.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_{k-1}}}(z_{k-1}+\nu_{k-1.0}t)}(\nu_{k-1.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_{k-1}^2 + \tilde{d}_{k-1}s}) =$$

$$= C_{k.2}e^{-\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}(z_{k-1}+\nu_{k.0}t)}(\nu_{k.0} - \sqrt{p^2\tilde{d}_k^2 + \tilde{d}_ks}) +$$

$$+ \frac{1}{4}e^{\sqrt{p^2+\frac{s}{d_k}}(z_{k-1}+\nu_{k.0}t-z_q)}\left(1 + \frac{\nu_{k.0}}{\sqrt{p^2\tilde{d}_k^2 + \tilde{d}_ks}}\right).$$

Формирование и решение системы уравнений соответствующего вида по данным исходных параметров рассматриваемой геологической среды программно реализованы в пакете Maple.

Глава 3. Комплекс программ математического моделирования процессов переноса радона

Для реализации алгоритмов решения поставленной задачи, рассмотренных в главе 2, разработан комплекс программ "DAR" для работы в среде операционных систем Windows XP/Vista/7/8/10. В качестве средства разработки использован программный пакет – система компьютерной алгебры MAPLE, имеющая собственный встроенный язык программирования. Программные средства комплекса зарегистрированы в Объединенном фонде электронных ресурсов «Наука и образование» (ОФЭРНИО) Министерства образования и науки Российской Федерации (приложение А).

3.1. Функциональное назначение программного комплекса

DAR (Diffusion and Advection of Radon) – программный комплекс на языке системы компьютерной алгебры MAPLE, состоящий из основной программы *DAR.mw* и процедур *INPUT.m*, *LAPLACE.m*, *FNORM.m*, *FGRIN.m* и *FANOM.m*. Он предназначен для расчета функции объемной активности радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями. Структурная схема программного комплекса *DAR* представлена на рис. 3.1.

Данный комплекс обладает следующими средствами и возможностями:

- задание параметров описания модели;
- нахождение функции нормального поля радона в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами;
- вычисление функции Грина в горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами;
- определение функции аномального поля радона, учитывающей влияние одного или нескольких включений;

- графического отображения результатов расчетов.

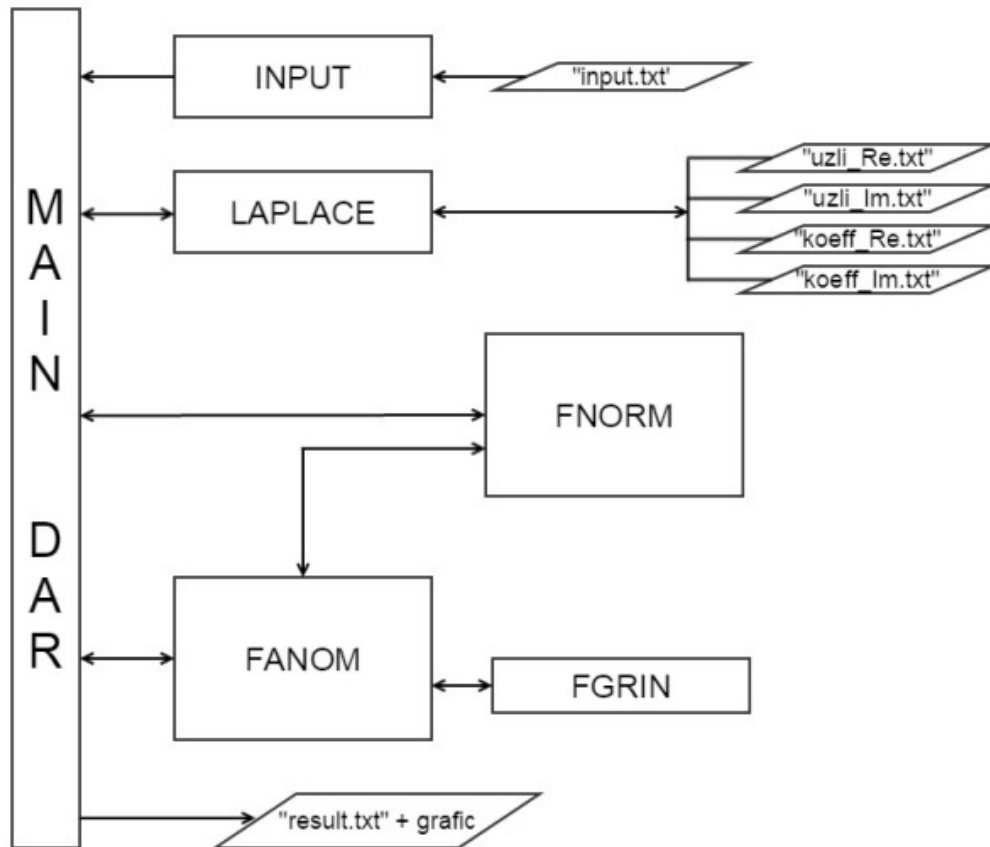


Рис. 3.1. Структурная схема программного комплекса DAR

Этапы работы с программным комплексом:

1. *Задание входных параметров описания модели.* Осуществляется в файле процедуры INPUT.m. Здесь исследователем задаются данные, используемые при вычислениях. Заполнение входных данных производится посредством ввода с клавиатуры. Результатом данного этапа является сформированный текстовый файл "input.txt".
2. *Проведение вычислений.* На данном этапе производится запуск основной программы DAR.mw с вызовом всех содержащихся в ней процедур.
3. *Просмотр и сохранение результатов.* Полученные в результате вычислений значения искомой функции объемной активности радона сохраняются в текстовом файле "result.txt". Отображение результатов

производится в виде двумерных (по вертикальному профилю) и трехмерных (по поверхности над включением) графиков. Все генерируемые графические изображения сохраняются в стандартных графических форматах (BMP, GIF, JPG, EPS, WMF).

Для успешной работы с данным комплексом в файл основной программы DAR.mw помещен ряд необходимых встроенных команд системы MAPLE:

- *restart*: – очистка внутренней памяти MAPLE от всех предыдущих определений, совершенных в процессе работы;
- *Digits:=L*: – переменная окружения, управляет числом цифр L , которые Maple использует при вычислениях с числами с плавающей запятой. По умолчанию $Digits = 10$, в программе $Digits = 50$.
- *with(linalg)*: – подключение пакета линейной алгебры *linalg* с помощью команды *with*;
- *with(plots)*: – подключение пакета *plots* для работы с графикой с помощью команды *with*;
- *read* – открытие файлов процедур для последующего обращения к ним.

Перейдем к подробному описанию назначений процедур программного комплекса и их параметров.

3.2. Описание процедур программного комплекса и их параметров

Составляющими процедурами программного комплекса DAR являются:

1. *Процедура INPUT* – процедура задания входных параметров описания модели, необходимых для дальнейших вычислений, а также формирования и заполнения текстового файла "input.txt".

Список входных параметров: данная процедура не содержит входных параметров.

Список основных локальных переменных и процедур:

f – файловая переменная;

n – целочисленный параметр, определяющий количество слоев;

t – целочисленный параметр, определяющий промежуток времени, с;

λ – постоянная распада радона, с^{-1} ;

z – одномерный массив размерности $(n - 1)$ вещественного типа, задающий границы слоев, м;

d – одномерный массив размерности n вещественного типа, задающий значения коэффициента диффузии в каждом слое, $\text{м}^2/\text{с}$;

v – одномерный массив размерности n вещественного типа, задающий значения скорости адвекции в каждом слое, м/с;

ARa – одномерный массив размерности $(n - 1)$ вещественного типа, задающий значения удельной активности радия в каждом слое (кроме нулевого слоя – приземного слоя атмосферы), Бк/кг;

ρ – одномерный массив размерности $(n - 1)$ вещественного типа, задающий значения плотности твердых частиц грунта в каждом слое (кроме нулевого слоя – приземного слоя атмосферы), $\text{кг}/\text{м}^3$;

K – одномерный массив размерности $(n - 1)$ вещественного типа, задающий значения коэффициента эманирования радона в каждом слое (кроме нулевого слоя – приземного слоя атмосферы);

η – одномерный массив размерности $(n - 1)$ вещественного типа, задающий значения коэффициента эманирования радона в каждом слое (кроме нулевого слоя – приземного слоя атмосферы);

A – одномерный массив размерности $(n - 1)$ вещественного типа, определяющий значения объемной активности радона, находящегося в радиоактивном равновесии с радием в грунте каждого слоя (кроме ну-

левого слоя – приземного слоя атмосферы), Бк/м³. Элементы данного массива вычисляются по формуле: $A = K \cdot ARa \cdot \rho \cdot (1 - \eta)$.

Список используемых команд и функций языка MAPLE:

- *fopen* – открытие текстового файла (для записи);
- *fprintf* – запись данных в файл;
- *fclose* – закрытие файла;
- *vector* – описание одномерного массива.

Обращение к процедуре: *INPUT()*;

Результат выполнения процедуры: "input.txt". Пример заполненного текстового файла приведен в табл. 3.1.

Таблица 3.1. Пример заполненного текстового файла "input.txt"

| Значение входного параметра | Описание входного параметра |
|------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4 | количество слоев (n) |
| 1000000 | значение параметра времени (t), с |
| 0.0000021 | постоянная распада радона (λ), с ⁻¹ |
| 0 1 3 | границы слоев (z), м |
| 0.00003 0.000003 0.000003 0.000003 | значения коэффициентов диффузии в каждом слое (d), м ² /с |
| 0.00004 0.000004 0.000004 0.000004 | значения скоростей адвекции в каждом слое (v), м/с |
| 26730 1188 8910 | значения ОАР, находящегося в радиоактивном равновесии с радием в грунте каждого слоя (A), Бк/м ³ |

2. Процедура *LAPLACE* – процедура, реализующая алгоритм численного обращения преобразования Лапласа с помощью обобщенных квадратурных формул наивысшей степени точности (ОКФНСТ).

Поясним некоторые теоретические аспекты построения ОКФНСТ [49].
Построение КФНСТ. Пусть при некотором $s > 0$ функция $\varphi_s(p) = p^s F(p)$ регулярна в полуплоскости $Re(p) > 0$. Для вычисления интеграла Римана-Меллина (2.32) в формуле обращения применим квадратурную формулу вида:

$$f(t) = t^{s-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^p p^{-s} \varphi_s(p/t) dp = t^{s-1} \left[\sum_{k=1}^n A_{kn} \varphi_s(p_{kn}/t) + \varepsilon_n(t) \right] \quad (3.1)$$

с узлами p_{kn} , коэффициентами A_{kn} и погрешностью $\varepsilon_n(t)$. Комплексные числа p_{kn} предполагаются попарно различными и удовлетворяющими неравенству $Re(p_{kn}) > 0$, а коэффициенты A_{kn} – произвольные комплексные числа. Квадратурные формулы наивысшей степени точности (КФНСТ) получаются как частный случай формулы (3.1), если потребовать равенства нулю погрешности $\varepsilon_n(t)$ для функций $\varphi_s(p) = p^{-j}$, $j = \overline{0, 2n-1}$. Узлы и коэффициенты КФНСТ удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{k=1}^n A_{kn} p_{kn}^{-j} = \frac{1}{\Gamma(s+j)}, j = \overline{0, 2n-1}, \quad (3.2)$$

из которой они могут быть найдены.

Построение ОКФНСТ. Пусть a – произвольное положительное число. Потребуем, чтобы формула (3.1) была точна для функций $\varphi_s(p) = p^{-am}$, $m = \overline{0, 2n-1}$, что равносильно выполнению неравенств:

$$\sum_{k=1}^n A_{kn} p_{kn}^{-am} = \frac{1}{\Gamma(s+am)}, j = \overline{0, 2n-1}. \quad (3.3)$$

Числа p_{kn}^{-a} суть корни многочлена $\omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - p_{kn}^{-a})$, определяемые однозначно из условий ортогональности

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^p p^{-s} \omega_n(p^{-a}) p^{-am} dp = 0, m = \overline{0, n-1} \quad (3.4)$$

и удовлетворяют неравенствам $Re(p_{kn}^{-a}) > 0$. В случае $a = 1$ получаются описанные выше КФНСТ, узлы которых попарно различны.

ОКФНСТ целесообразно применять для восстановления длительных, но медленно изменяющихся во времени оригиналов, что соответствует $a < 1$.

Список входных параметров:

nk – количество комплексных узлов и коэффициентов ОКФНСТ.

Список основных локальных переменных и процедур:

f – файловая переменная;

n – целочисленный параметр, содержащий значение количества слоев;

t – целочисленный параметр, содержащий значение промежутка времени, с;

λ – содержит значение постоянной распада радона, s^{-1} ;

p – двумерный массив размерности вещественного типа, содержащий значения границ слоев, коэффициентов диффузии, скоростей адвекции и объемной активности радона, находящегося в радиоактивном равновесии с радием в каждом слое;

$a0, p0$ – произвольные положительные целые числа;

$A1$ – двумерный массив размерности $(nk \times nk)$, содержащий элементы основной матрицы системы для нахождения узлов и коэффициентов ОКФНСТ;

$b1$ – одномерный массив размерности nk , содержащий элементы столбца свободных членов системы для нахождения узлов и коэффициентов ОКФНСТ;

uRe – одномерный массив размерности nk вещественного типа, хранящий действительные части комплексных узлов ОКФНСТ;

uIm – одномерный массив размерности nk вещественного типа, хранящий мнимые части комплексных узлов ОКФНСТ;

$AARe$ – одномерный массив размерности nk вещественного типа, хранящий действительные части коэффициентов ОКФНСТ;

$AAIm$ – одномерный массив размерности nk вещественного типа, хранящий мнимые части коэффициентов ОКФНСТ;

Список используемых команд и функций языка MAPLE:

- $fopen$ – открытие текстового файла (для чтения и записи);
- $fscanf, readdata$ – чтение данных из файла;
- $writedata$ – запись данных в файл;
- $fclose$ – закрытие файла;
- $vector$ – описание одномерного массива;
- $array$ – описание двумерного массива;
- $allvalues(RootOf)$ – нахождение всех корней многочлена в явном виде;
- $expand$ – раскрытие скобок в алгебраическом выражении;
- $evalf$ – вычисление значения выражения;
- $linsolve$ – решение системы уравнений в матричном виде;
- $GAMMA$ – гамма-функция.

Обращение к процедуре: $LAPLACE(nk)$;

Результат выполнения процедуры: "uzli_Re.txt" , "uzli_Im.txt" , "koeff_Re.txt" и "koeff_Im.txt".

Содержимое данных текстовых файлов для $nk = 18$ представлено в табл. 3.2 и табл. 3.3 (количество цифр после запятой при выводе значений равно 26).

3. Процедура $FNORM$ – процедура, реализующая алгоритм нахождения нормального поля радона.

Список входных параметров:

xp, yp, zp – координаты точки, в которой вычисляется значение функции нормального поля радона;

Таблица 3.2. Значения узлов ОКФНСТ

| Действительные части узлов ("uzli_Re.txt") | Мнимые части узлов ("uzli_Im.txt") |
|--------------------------------------------|------------------------------------|
| 1.41435082173068971942856647e-05 | -1.3879336584494351571561537e-06 |
| 1.37807273358693287030402046e-05 | -4.1653284602178946769086102e-06 |
| 1.30423490386289197303063283e-05 | -6.9477233065171354097494250e-06 |
| 1.19005005030359771546166764e-05 | -9.7399982045186721113752237e-06 |
| 1.03067524311947085204720549e-05 | -1.2550002474536281624718989e-05 |
| 8.18033573270653421153740245e-06 | -1.5391570004771209729063363e-05 |
| 5.38126195913558265888754972e-06 | -1.8291439861798454623240938e-05 |
| 1.63684687453474138469599164e-06 | -2.1309024663793304640008664e-05 |
| -3.7505918868319937095450884e-06 | -2.4619780299675757492318848e-05 |
| -3.7505918868319937095450884e-06 | 2.4619780299675757492318848e-05 |
| 1.63684687453474138469599164e-06 | 2.1309024663793304640008664e-05 |
| 5.38126195913558265888754972e-06 | 1.8291439861798454623240938e-05 |
| 8.18033573270653421153740245e-06 | 1.5391570004771209729063363e-05 |
| 1.03067524311947085204720549e-05 | 1.2550002474536281624718989e-05 |
| 1.19005005030359771546166764e-05 | 9.7399982045186721113752237e-06 |
| 1.30423490386289197303063283e-05 | 6.9477233065171354097494250e-06 |
| 1.37807273358693287030402046e-05 | 4.1653284602178946769086102e-06 |
| 1.41435082173068971942856647e-05 | 1.3879336584494351571561537e-06 |

s – один из комплексных узлов обращения интегрального преобразования Лапласа.

Список основных локальных переменных и процедур:

f – файловая переменная;

n – целочисленный параметр, содержащий значение количества слоев;

Таблица 3.3. Значения коэффициентов ОКФНСТ

| Действительные части коэффициентов ("koeff_Re.txt") | Мнимые части коэффициентов ("koeff_Im.txt") |
|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 72350.95175961781512231762704378 | -610365.370910071515965927499288 |
| -150374.030041479767699477273073 | 408622.2891545327728484841180319 |
| 118812.2479043846112474247150819 | -180235.518507321839759735648269 |
| -52543.1532709309362358764805352 | 50618.96996146075670850937159916 |
| 13589.89124814021830713162820842 | -8558.97888646000944865122982395 |
| -1976.82271429001730888542976570 | 806.9270536887790333320225501322 |
| 145.1264305930336345417284501782 | -40.1906467641758354877339400218 |
| -4.23553192746680662488804808833 | 1.173900367841853320939778213911 |
| 0.024215892509739448372637723152 | -0.01545606199097144546748552665 |
| 0.024215892509739448372637723152 | 0.01545606199097144546748552665 |
| -4.23553192746680662488804808833 | -1.173900367841853320939778213911 |
| 145.1264305930336345417284501782 | 40.1906467641758354877339400218 |
| -1976.82271429001730888542976570 | -806.9270536887790333320225501322 |
| 13589.89124814021830713162820842 | 8558.97888646000944865122982395 |
| -52543.1532709309362358764805352 | -50618.96996146075670850937159916 |
| 118812.2479043846112474247150819 | 180235.518507321839759735648269 |
| -150374.030041479767699477273073 | -408622.2891545327728484841180319 |
| 72350.95175961781512231762704378 | 610365.370910071515965927499288 |

t – целочисленный параметр, содержащий значение промежутка времени, с;

λ – содержит значение постоянной распада радона, с^{-1} ;

p – двумерный массив размерности вещественного типа, содержащий значения границ слоев, коэффициентов диффузии, скоростей адвек-

ции и объемной активности радона, находящегося в радиоактивном равновесии с радием в каждом слое;

N – целочисленный параметр, определяющий число уравнений формируемой в данной процедуре системы;

eq – одномерный массив размерности N , содержащий уравнения системы;

C – одномерный массив размерности N , содержащий неизвестные;

F – одномерный массив размерности n , определяющий вид функции нормального поля радона для каждого слоя.

Список используемых команд и функций языка MAPLE:

- *fopen* – открытие текстового файла (для чтения);
- *fscanf*, *readdata* – чтение данных из файла;
- *fclose* – закрытие файла;
- *vector* – описание одномерного массива;
- *seq* – создание последовательности;
- *assign* – присваивание решений системы уравнений исходным переменным;
- *unapply* – преобразование любого математического выражения в функцию от указанных в команде переменных, содержащихся в этом выражении;
- *evalf* – вычисление значения выражения;
- *solve* – решение системы уравнений.

Обращение к процедуре: $FNORM(xp, yp, zp, s)$;

Результат выполнения процедуры: значение функции нормального поля радона в горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами в точке $P(xp, yp, zp)$ в пространстве образов интегрального преобразования Лапласа.

4. Процедура *FGRIN* – процедура, реализующая алгоритм нахождения функции Грина.

Список входных параметров:

xp, yp, zp – координаты точки, в которой вычисляется значение функции Грина.

xq, yq, zq – координаты точки, в которой находится источник.

s – один из комплексных узлов обращения интегрального преобразования Лапласа.

Список основных локальных переменных и процедур:

f – файловая переменная;

n – целочисленный параметр, содержащий значение количества слоев;

t – целочисленный параметр, содержащий значение промежутка времени, с;

λ – содержит значение постоянной распада радона, с^{-1} ;

p – двумерный массив размерности вещественного типа, содержащий значения границ слоев, коэффициентов диффузии, скоростей адвекции и объемной активности радона, находящегося в радиоактивном равновесии с радием в каждом слое;

h – параметр интегрального преобразования Ханкеля;

N – целочисленный параметр, определяющий число уравнений формируемой в данной процедуре системы;

eq – одномерный массив размерности N , содержащий уравнения системы;

C – одномерный массив размерности N , содержащий неизвестные;

F – одномерный массив размерности $(n+1)$, определяющий вид функции Грина для каждого слоя;

Hankel – процедура, осуществляющая численное обращение интегрального преобразования Ханкеля по квадратурным формулам Гаусса [13].

Список используемых команд и функций языка MAPLE:

- *fopen* – открытие текстового файла (для чтения);
- *fscanf*, *readdata* – чтение данных из файла;
- *fclose* – закрытие файла;
- *vector* – описание одномерного массива;
- *seq* – создание последовательности;
- *assign* – присваивание решений системы уравнений исходным переменным;
- *unapply* – преобразование любого математического выражения в функцию от указанных в команде переменных, содержащихся в этом выражении;
- *evalf* – вычисление значения выражения;
- *solve* – решение системы уравнений;
- *BesselJ* – функция Бесселя.

Обращение к процедуре: $FGRIN(xp, yp, zp, xq, yq, zq, s)$;

Результат выполнения процедуры: значение функции Грина в горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами в точке $P(xp, yp, zp)$ в пространстве образов интегрального преобразования Лапласа. Точечный источник находится в точке $Q(xq, yq, zq)$.

5. Процедура *FANOM* – процедура, реализующая алгоритм нахождения функции аномального поля радона.

Список входных параметров:

xp, yp, zp – координаты точки, в которой вычисляется значение функции аномального поля радона.

s – один из комплексных узлов обращения интегрального преобразования Лапласа.

Список основных локальных переменных и процедур:

f – файловая переменная;

n – целочисленный параметр, содержащий значение количества слоев;
 t – целочисленный параметр, содержащий значение промежутка времени, с;

λ – содержит значение постоянной распада радона, с^{-1} ;

p – двумерный массив размерности вещественного типа, содержащий значения границ слоев, коэффициентов диффузии, скоростей адвекции и объемной активности радона, находящегося в радиоактивном равновесии с радием в каждом слое;

$a1, b1, a2, b2$ – границы изменения заданных параметров включения;
 $n1, n2$ – количество разбиений поверхности включения по x и y соответственно;

$h1, h2$ – шаг сетки поверхности включения по x и y соответственно, вычисляемые по следующим формулам: $h1 = \frac{b1-a1}{n1}$; $h2 = \frac{b2-a2}{n2}$;

A – двумерный массив размерности $(n1 \cdot n2) \times (n1 \cdot n2)$, содержащий элементы основной матрицы формируемой системы интегральных уравнений;

b – одномерный массив размерности $(n1 \cdot n2)$, содержащий элементы столбца свободных членов формируемой системы интегральных уравнений.

xs, ys, zs – процедуры, содержащие параметрические уравнения включения;

Nx, Ny, Nz – процедуры, определяющие координаты вектора нормали;

$lenN$ – процедура, вычисляющая длину вектора нормали.

Список используемых команд и функций языка MAPLE:

- *fopen* – открытие текстового файла (для чтения);
- *fscanf, readdata* – чтение данных из файла;
- *fclose* – закрытие файла;
- *vector* – описание одномерного массива;

- *array* – описание двумерного массива;
- *diag* – формирование диагональной матрицы;
- *matrix* – определение матрицы произвольного вида;
- *evalf* – вычисление значения выражения;
- *linsolve* – решение системы уравнений в матричном виде;
- *multiply* – произведение матрицы на вектор;
- *dotprod* – скалярное произведение двух векторов.

Обращение к процедуре: $FANOM(xp, yp, zp, s)$;

Результат выполнения процедуры: значение функции аномального поля радона в кусочно-постоянной анизотропной слоистой среде с включениями в точке $P(xp, yp, zp)$ в пространстве образов интегрального преобразования Лапласа.

3.3. Выводы

1. Разработан комплекс программ для реализации следующих алгоритмов:
 - нахождение функции нормального поля радона в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами;
 - вычисление функции Грина в горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами;
 - определение функции аномального поля радона, учитывающей влияние включений;
 - обращение интегрального преобразования Лапласа.
2. Программные средства комплекса зарегистрированы в Объединенном фонде электронных ресурсов «Наука и образование» (ОФЭРНИО) Министерства образования и науки Российской Федерации.

Глава 4. Компьютерное моделирование процессов переноса радона

С помощью разработанного комплекса программ математического моделирования процессов переноса радона "DAR" произведены численные расчеты с целью проверки правильности построенной модели и разработанных алгоритмов, анализа влияния физических и геометрических параметров сред на распределение поля радона.

4.1. Сравнительное сопоставление для случая однородных сред

Сравнительное сопоставление результатов компьютерного моделирования в случае однородных горизонтально-слоистых сред (функции нормального поля радона) рассмотрены с известными данными публикаций отечественных и зарубежных авторов: Р.И. Паровика [61], В.С. Яковлевой [92], А. Varchegyí [120].

Приведем описание проводимых вычислительных экспериментов на ЭВМ в соответствии с работами данных авторов. Характеристики испытываемой ЭВМ:

- *процессор*: Intel(R) Core(TM) i5-3550 CPU @ 3.30 GHz 3.30 GHz;
- *установленная память (ОЗУ)*: 8,00 Гб;
- *тип системы*: 64-разрядная операционная система.

Время работы программного комплекса для нахождения функции нормального поля радона в рассматриваемых случаях не превышает трех секунд.

1. Диффузионная модель переноса радона для однородной среды, ограниченной горизонтальной поверхностью [120].

- *список значений параметров расчетной модели*:

$n = 2$ – количество слоев;

$t = 1 \cdot 10^6$ с – время;

$\lambda = 2.1 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ – постоянная распада радона;

$z_0 = 0 \text{ м}$ – граница между слоями атмосферы и грунта;

$d_{0.0} = 1 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$ – коэффициент диффузии в нулевом слое (имитация отсутствия потока радона);

$v_{0.0} = v_{1.0} = 0 \text{ м/с}$ – скорости адвекции в нулевом и первом слоях соответственно.

Значения коэффициента диффузии и объемной активности радона, находящегося в радиоактивном равновесии с радием, в слое грунта, в каждом случае взяты следующими:

(а) $d_{1.0} = 1.3 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $A_{1.\infty} = 40.1 \text{ кБк/м}^3$;

(б) $d_{1.0} = 3.9 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $A_{1.\infty} = 36.5 \text{ кБк/м}^3$;

(в) $d_{1.0} = 6.7 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $A_{1.\infty} = 33.5 \text{ кБк/м}^3$;

(г) $d_{1.0} = 1.2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $A_{1.\infty} = 28.8 \text{ кБк/м}^3$;

(д) $d_{1.0} = 2.1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $A_{1.\infty} = 23.8 \text{ кБк/м}^3$;

(е) $d_{1.0} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $A_{1.\infty} = 18.5 \text{ кБк/м}^3$.

- *результат*: кривые распределения концентрации (объемной активности) радона в каждом из вышеописанных случаев (рис. 4.1).
- *сравнительный анализ результатов*: для случая (а) приведен в табл. 4.1, где:

– z – глубина, м;

– A_{gr} – значения ОАР, представленные в статье [120], кБк/м³;

– A_{num} – значения ОАР, найденные по разработанным алгоритмам, кБк/м³;

– Δ – абсолютная погрешность, %;

– δ – относительная погрешность, %.

Данные табл. 4.1 показывают, что максимальная относительная погрешность для случая (а) не превышает 1.5%.

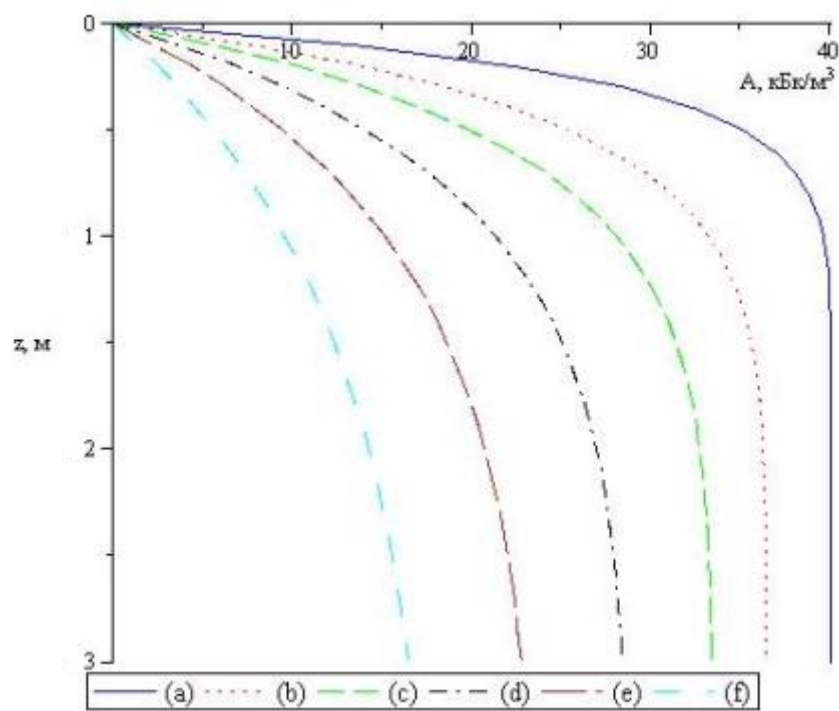


Рис. 4.1. Кривые распределения концентрации радона

Таблица 4.1. Сравнительный анализ результатов для случая (а)

| $z, \text{ м}$ | $A_{gr}, \text{ kBq/м}^3$ | $A_{num}, \text{ kBq/м}^3$ | $\Delta, \%$ | $\delta, \%$ |
|----------------|---------------------------|----------------------------|--------------|--------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 0.0000 | 0.0001 | 0.01 | – |
| 0.1 | 13.5714 | 13.3868 | 18.46 | 1.36 |
| 0.2 | 22.1429 | 22.3709 | 22.80 | 1.03 |
| 0.3 | 28.2143 | 28.3973 | 18.30 | 0.65 |
| 0.4 | 32.1429 | 32.4327 | 28.98 | 0.90 |
| 0.5 | 35.0000 | 35.1254 | 12.54 | 0.36 |
| 0.6 | 36.4286 | 36.9116 | 48.30 | 1.33 |
| 0.7 | 37.8571 | 38.0864 | 22.93 | 0.61 |
| 0.8 | 38.5714 | 38.8500 | 27.86 | 0.72 |
| 0.9 | 39.2857 | 39.3391 | 5.34 | 0.14 |
| 1 | 39.6429 | 39.6468 | 0.39 | 0.01 |

Продолжение табл. 4.1

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|---------|---------|-------|------|
| 1.1 | 39.8571 | 39.8365 | 2.06 | 0.05 |
| 1.2 | 39.9286 | 39.9506 | 2.20 | 0.06 |
| 1.3 | 40.0000 | 40.0176 | 1.76 | 0.04 |
| 1.4 | 40.0000 | 40.0558 | 5.58 | 0.14 |
| 1.5 | 40.0000 | 40.0770 | 7.70 | 0.19 |
| 1.6 | 40.0000 | 40.0884 | 8.84 | 0.22 |
| 1.7 | 40.0000 | 40.0943 | 9.43 | 0.24 |
| 1.8 | 40.0000 | 40.0973 | 9.73 | 0.24 |
| 1.9 | 40.0000 | 40.0988 | 9.88 | 0.25 |
| 2 | 40.0000 | 40.0995 | 9.95 | 0.25 |
| 2.1 | 40.0000 | 40.0998 | 9.98 | 0.25 |
| 2.2 | 40.0000 | 40.0999 | 9.99 | 0.25 |
| 2.3 | 40.0000 | 40.1000 | 10.00 | 0.25 |
| 2.4 | 40.0000 | 40.1000 | 10.00 | 0.25 |
| 2.5 | 40.0000 | 40.1000 | 10.00 | 0.25 |
| 2.6 | 40.0000 | 40.1000 | 10.00 | 0.25 |
| 2.7 | 40.0000 | 40.1000 | 10.00 | 0.25 |
| 2.8 | 40.0000 | 40.1000 | 10.00 | 0.25 |
| 2.9 | 40.0000 | 40.1000 | 10.00 | 0.25 |
| 3 | 40.1000 | 40.1000 | 0.00 | 0.00 |

2. Диффузионно-адвективная модель переноса радона для двухслойной горизонтально-слоистой среды с плоско-параллельными границами (система "грунт-атмосфера") [61].

- список значений параметров расчетной модели:

$n = 2$ – количество слоев;

$\lambda = 2.1 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ – постоянная распада радона;

$z_0 = 0$ м – граница между слоями атмосферы и грунта;

$d_{0,0} = 5 \cdot 10^{-3}$ м²/с, $d_{1,0} = 5 \cdot 10^{-4}$ м²/с – коэффициенты диффузии в слоях атмосферы и грунта соответственно;

$v_{0,0} = 1 \cdot 10^{-3}$ м/с, $v_{1,0} = 1 \cdot 10^{-4}$ м/с – скорости адвекции в слоях атмосферы и грунта соответственно.

Значение ОАР, находящегося в радиоактивном равновесии с радием в слое грунта, $A_{1,\infty}$ условно взято равным 1 Бк/м³, поскольку в данной работе автором рассматривается величина относительной объемной активности радона.

- *результат*: кривые распределения концентрации радона в различные моменты времени t : 1000 с; 2000 с; 3000 с (рис. 4.2).

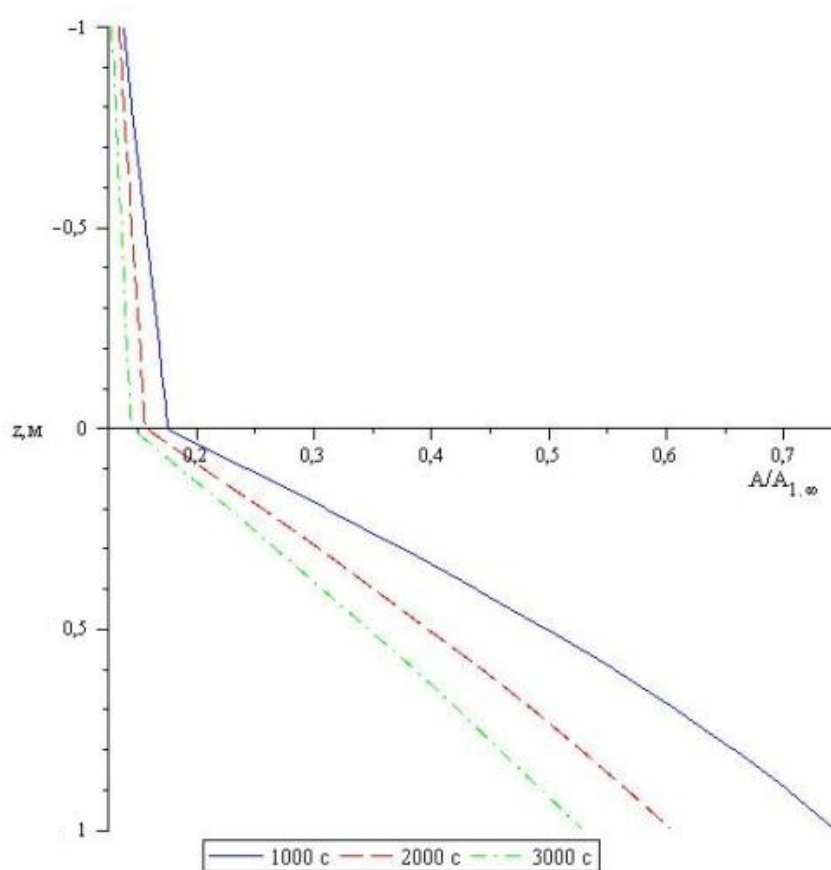


Рис. 4.2. Кривые распределения концентрации радона в системе "грунт-атмосфера" в различные моменты времени t

- *сравнительный анализ результатов*: для кривой, соответствующей моменту времени $t=1000$ с, приведен в табл. 4.2, где:
 - z – глубина, м;
 - $A/A_{1.\infty_{gr}}$ – значения относительной ОАР, представленные в статье [61];
 - $A/A_{1.\infty_{num}}$ – значения относительной ОАР, найденные по разработанным алгоритмам;
 - Δ – абсолютная погрешность, %;
 - δ – относительная погрешность, %.

Таблица 4.2. Сравнительный анализ результатов для $t=1000$ с

| z , м | $A/A_{1.\infty_{gr}}$ | $A/A_{1.\infty_{num}}$ | Δ , % | δ , % |
|---------|-----------------------|------------------------|--------------|--------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| -1 | 0.1338 | 0.1373 | 0.35 | 2.62 |
| -0.9 | 0.1415 | 0.1412 | 0.03 | 0.21 |
| -0.8 | 0.1469 | 0.1451 | 0.18 | 1.23 |
| -0.7 | 0.1496 | 0.1490 | 0.06 | 0.40 |
| -0.6 | 0.1523 | 0.1528 | 0.05 | 0.33 |
| -0.5 | 0.1577 | 0.1567 | 0.10 | 0.63 |
| -0.4 | 0.1654 | 0.1605 | 0.49 | 2.96 |
| -0.3 | 0.1654 | 0.1644 | 0.10 | 0.60 |
| -0.2 | 0.1708 | 0.1681 | 0.27 | 1.58 |
| -0.1 | 0.1762 | 0.1719 | 0.43 | 2.44 |
| 0 | 0.1738 | 0.1756 | 0.18 | 1.04 |
| 0.1 | 0.2397 | 0.2436 | 0.39 | 1.63 |
| 0.2 | 0.3116 | 0.3105 | 0.11 | 0.35 |
| 0.3 | 0.3726 | 0.3756 | 0.30 | 0.81 |
| 0.4 | 0.4461 | 0.4384 | 0.77 | 1.73 |

Продолжение табл. 4.2

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|--------|--------|------|------|
| 0.5 | 0.4974 | 0.4984 | 0.10 | 0.20 |
| 0.6 | 0.5579 | 0.5552 | 0.27 | 0.48 |
| 0.7 | 0.5925 | 0.6085 | 1.60 | 2.70 |
| 0.8 | 0.6501 | 0.6580 | 0.79 | 1.22 |
| 0.9 | 0.7078 | 0.7035 | 0.43 | 0.61 |
| 1 | 0.7527 | 0.7449 | 0.78 | 1.04 |

Согласно данным, приведенным в табл. 4.2, максимальная относительная погрешность для кривой, соответствующей моменту времени $t=1000$ с, не превышает 3%.

3. Диффузионно-адвективная модель переноса радона для пятислойной горизонтально-слоистой среды с плоско-параллельными границами [92].

- список значений параметров расчетной модели:

$n = 5$ – количество слоев;

$\lambda = 2.1 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ – постоянная распада радона;

$z_0 = 0 \text{ м}$, $z_1 = 1 \text{ м}$, $z_2 = 3 \text{ м}$, $z_3 = 6 \text{ м}$ – границы слоев;

$d_{0.0} = 1 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$, $d_{1.0} = d_{2.0} = d_{3.0} = d_{4.0} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ – коэффициенты диффузии в каждом слое соответственно;

$v_{0.0} = 0 \text{ м/с}$, $v_{1.0} = v_{2.0} = v_{3.0} = v_{4.0} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}$ – скорости адвекции в каждом слое соответственно;

$\rho_{1.s} = \rho_{2.s} = \rho_{3.s} = \rho_{4.s} = 2700 \text{ кг/м}^3$ – плотности твердых частиц грунта для каждого слоя;

$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0.45$ – пористость грунта для каждого слоя;

$K_{1.em} = K_{2.em} = K_{3.em} = K_{4.em} = 0.2$ – коэффициенты эманирования грунта для каждого слоя;

$A_{1.Ra} = 90$ Бк/кг, $A_{2.Ra} = 4$ Бк/кг, $A_{3.Ra} = 30$ Бк/кг, $A_{4.Ra} = 1000$ Бк/кг – удельная активность ^{226}Ra для каждого слоя.

- *результат*: кривые распределения объемной активности радона в различные моменты времени t : 10^5 с; $2 \cdot 10^5$ с; $3 \cdot 10^5$ с; 10^6 с (рис. 4.3).
- *сравнительный анализ результатов*: для кривой, соответствующей моменту времени $t = 10^6$ с, приведен в табл. 4.3, где:
 - z – глубина, м;
 - A_{gr} – значения ОАР, представленные в статье [92], кБк/м³;
 - A_{num} – значения ОАР, найденные по разработанным алгоритмам, кБк/м³;
 - Δ – абсолютная погрешность, %;
 - δ – относительная погрешность, %.

Таблица 4.3. Сравнительный анализ результатов для $t = 10^6$ с

| z , м | A_{gr} , кБк/м ³ | A_{num} , кБк/м ³ | Δ , % | δ , % |
|---------|-------------------------------|--------------------------------|--------------|--------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 0.0000 | 0.0001 | 0.01 | – |
| 1 | 2.3629 | 2.2798 | 8.31 | 3.52 |
| 2 | 0.4401 | 0.4465 | 0.64 | 1.45 |
| 3 | 0.9790 | 0.9736 | 0.54 | 0.55 |
| 4 | 2.8929 | 2.8628 | 3.01 | 1.04 |
| 5 | 27.6425 | 27.3560 | 28.65 | 1.04 |
| 6 | 149.4550 | 149.3438 | 11.12 | 0.07 |
| 7 | 271.0907 | 271.3304 | 23.97 | 0.09 |
| 8 | 295.2742 | 295.7716 | 49.74 | 0.17 |
| 9 | 297.1825 | 296.9868 | 19.57 | 0.07 |

Продолжение табл. 4.3

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----|----------|----------|-------|------|
| 10 | 297.2752 | 297.0000 | 27.52 | 0.09 |

Данные табл. 4.3 показывают, что максимальная относительная погрешность для кривой, соответствующей моменту времени $t = 10^6$ с, не превышает 4%.

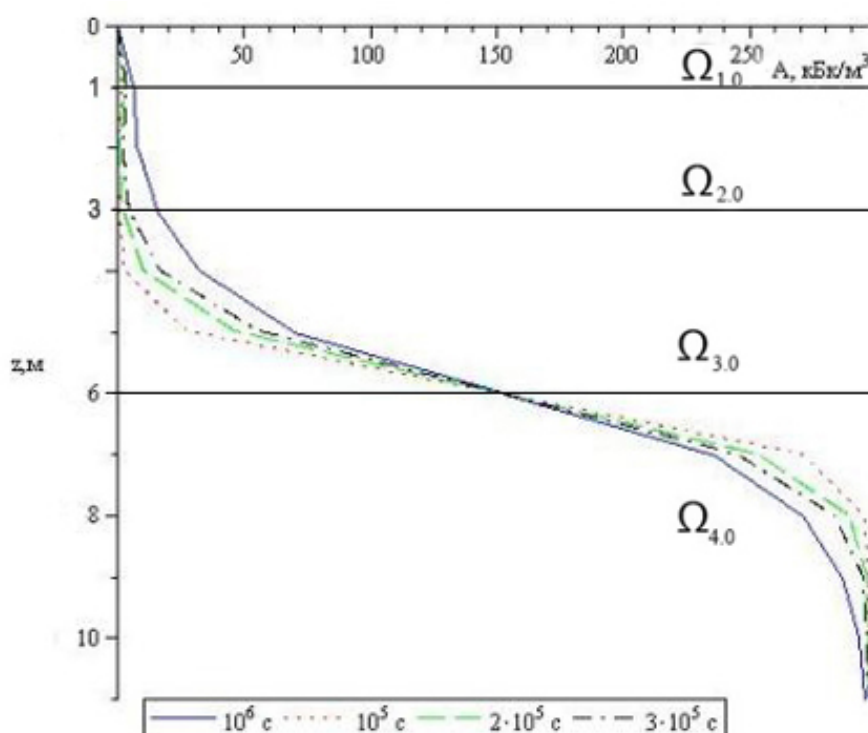


Рис. 4.3. Кривые распределения объемной активности радона в различные моменты времени t

Таким образом, полученные результаты качественно и количественно схожи с представленными в рассматриваемых публикациях. Это позволяет сделать вывод о правильности работы разработанных процедур, а именно, для данных случаев, FNORM и LAPLACE.

4.2. Сравнение с натурным экспериментом

Рассмотрим сравнение с данными натурального эксперимента, проведенного лабораторией геодинамики Института геофизики им. Ю.П. Булашевича УрО РАН [87]. Данная лаборатория является признанным лидером в Российской Федерации по геофизическим исследованиям эксхалляции радона.

На рис. 4.4 приведена экспериментальная установка, представляющая собой цилиндрическую емкость (высотой 120 см и диаметром 55 см), заполненную гранитным отсевом (фракция 1-5 мм). Для измерения объемной активности радона (ОАР) горизонтально, с двух сторон по диаметру вставлены воздухозаборники, состоящие из двух отрезков металлических трубок, герметично закрываемые с обоих концов. Снизу емкость герметично закрыта, сверху свободно сообщается с атмосферой.

В соответствии с разработанной математической моделью и с геометрией данной установки нами была предложена расчетная модель (рис. 4.5), представляющая собой 3 слоя: слой воздуха, слой емкости и слой, заполненный веществом с коэффициентом диффузии, мало отличным от нуля (равным нулю сделать невозможно в силу математической модели). В последнем слое объемная активность радона, находящегося в радиоактивном равновесии с радием, равна нулю (имитация непроницаемости дна емкости).

В соответствии с данной расчетной моделью были взяты следующие значения параметров:

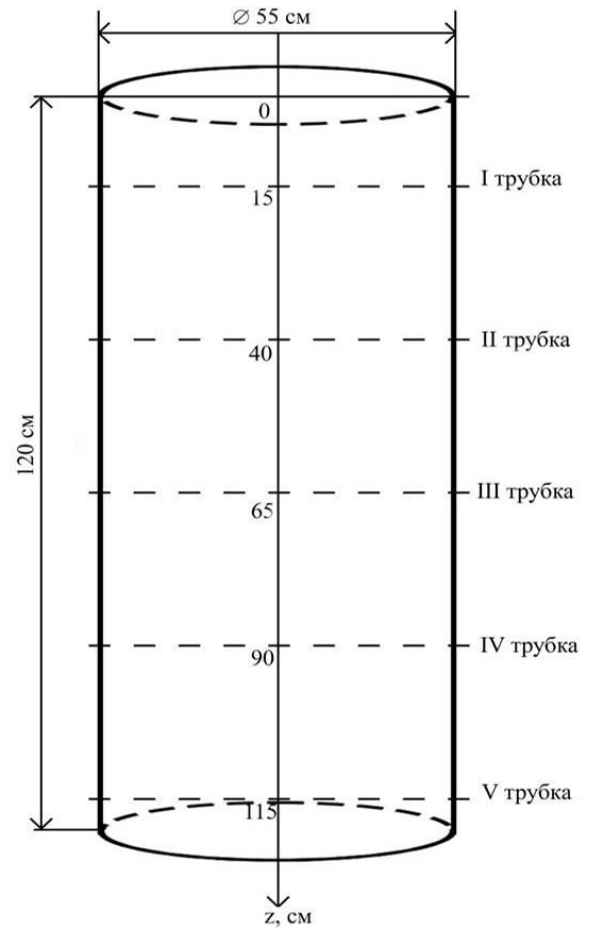
$$n = 3 - \text{количество слоев};$$

$$t = 2419200 \text{ с (28 дней)} - \text{время съема показаний прибора};$$

$$\lambda = 2.1 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1} - \text{постоянная распада радона};$$

$$z_0 = 0 \text{ м}, z_1 = 1.2 \text{ м} - \text{границы слоев};$$

$d_{0.0} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $d_{1.0} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $d_{2.0} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$ – коэффициенты диффузии в каждом слое соответственно;



а)

б)

Рис. 4.4. Экспериментальная установка

$v_{0.0} = v_{1.0} = v_{2.0} = 0$ м/с – скорости адвекции в каждом слое соответственно;

$\rho_{1.s} = 2600$ кг/м³ – плотность гранитного отсева;

$\eta_1 = 0.1$ – пористость гранитного отсева;

$K_{1.em} = 0.1$ – коэффициент эманирования гранитного отсева;

$A_{1.Ra} = 55$ Бк/кг – удельная активность ²²⁶Ra.

Значение ОАР, находящегося в радиоактивном равновесии с радием в остальных слоях расчетной модели, $A_{0.\infty} = A_{2.\infty} = 0$ Бк/м³.

Результаты численного моделирования приведены на рис. 4.6. Точками на графике отмечены результаты измерений, полученные сотрудниками лаборатории.

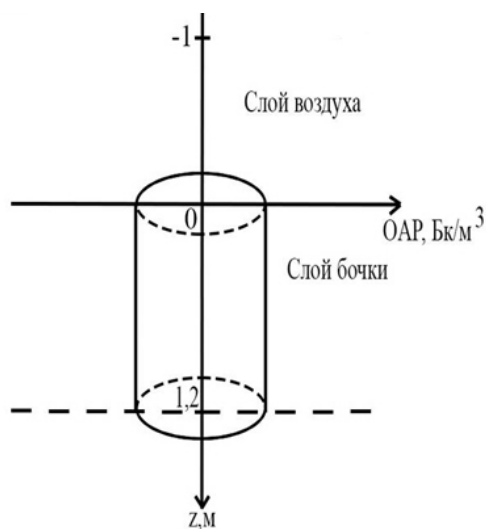


Рис. 4.5. Расчетная модель

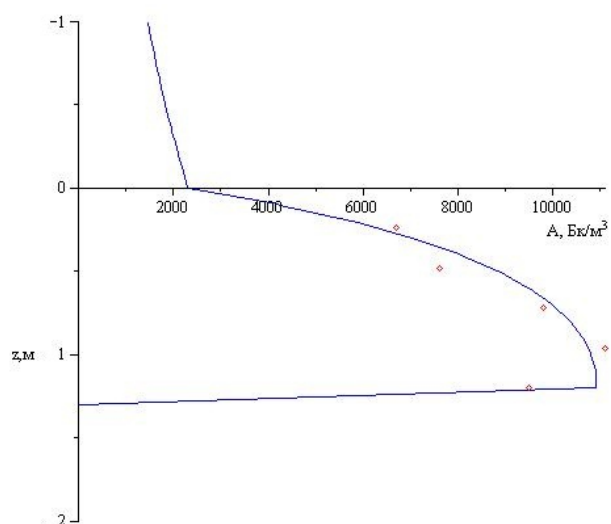


Рис. 4.6. График функции ОАР

В расчетную модель (рис. 4.5) был введен еще один слой, учитывающий влажность гранитного отсева, находящегося в нижней части цилиндрической емкости (рис. 4.7).

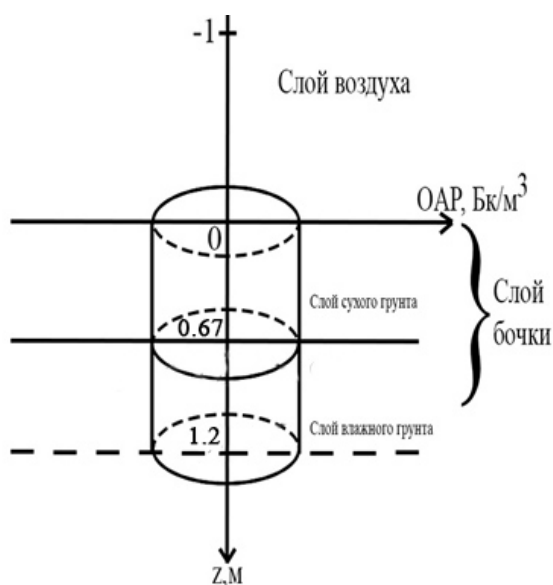


Рис. 4.7. Расчетная модель

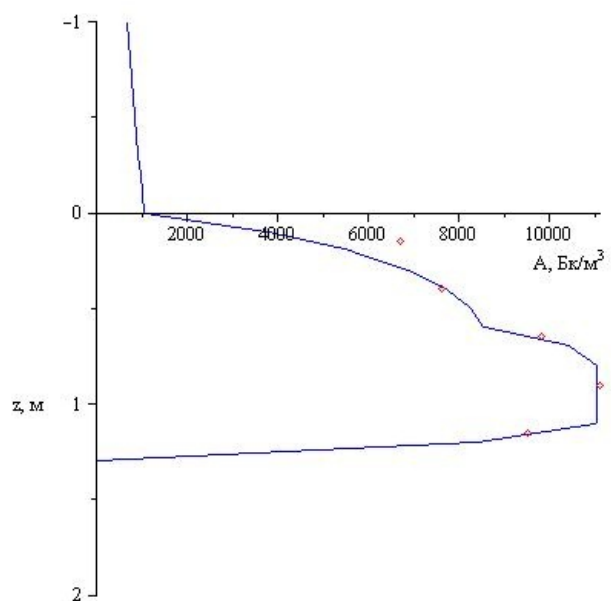


Рис. 4.8. График функции ОАР

Значения параметров изменены на следующие:

$n = 4$ – количество слоев;

$t = 2419200$ с (28 дней) – время;

$\lambda = 2.1 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ – постоянная распада радона;

$z_0 = 0 \text{ м}, z_1 = 0.67 \text{ м}, z_2 = 1.2 \text{ м}$ – границы слоев;

$d_{0.0} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}, d_{1.0} = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}, d_{2.0} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с},$
 $d_{3.0} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$ – коэффициенты диффузии в каждом слое соответственно;

$v_{0.0} = v_{1.0} = v_{2.0} = v_{3.0} = 0 \text{ м/с}$ – скорости адвекции в каждом слое соответственно;

$\rho_{1.s} = \rho_{2.s} = 1500 \text{ кг/м}^3$ – плотности гранитного отсева;

$\eta_1 = 0.2, \eta_2 = 0.1,$ – пористости гранитного отсева;

$K_{1.em} = K_{2.em} = 0.15$ – коэффициенты эманирования гранитного отсева;

$A_{1.Ra} = A_{2.Ra} = 55 \text{ Бк/кг}$ – удельные активности ^{226}Ra .

Значение ОАР, находящегося в радиоактивном равновесии с радием в остальных слоях расчетной модели, $A_{0.\infty} = A_{3.\infty} = 0 \text{ Бк/м}^3$.

Результаты расчетов подтверждают целесообразность введения этого слоя (рис. 4.8).

Таким образом, натурные эксперименты также показали адекватность и достоверность предложенных модели и метода решения задачи для случая кусочно-однородных сред.

4.3. Перенос радона. Анизотропный случай

В соответствии с разработанным алгоритмом, приведенным в главе 2, для нахождения функции аномального поля радона, а следовательно, и искомой функции объемной активности радона, необходимо решить вспомогательную задачу для функции Грина. Поэтому, в первую очередь, целесообразно привести результаты численных расчетов конкретно для функции Грина, пользуясь при этом соответствующими функциями FGRIN и LAPLACE.

Значения основных параметров расчетной модели для нахождения функции Грина соответствуют случаю диффузионно-адвективной модели переноса радона для пятислойной горизонтально-слоистой среды с плоско-параллельными границами, рассмотренному выше (параграф 4.1, стр. 62-64). При этом точечный источник находится в последнем слое $\Omega_{4,0}$, в точке $Q(0, 0, 8)$.

Время работы программного комплекса для нахождения функции Грина в рассматриваемом случае составляет не более 27 с.

Результаты в различные моменты времени представлены на рис. 4.9.

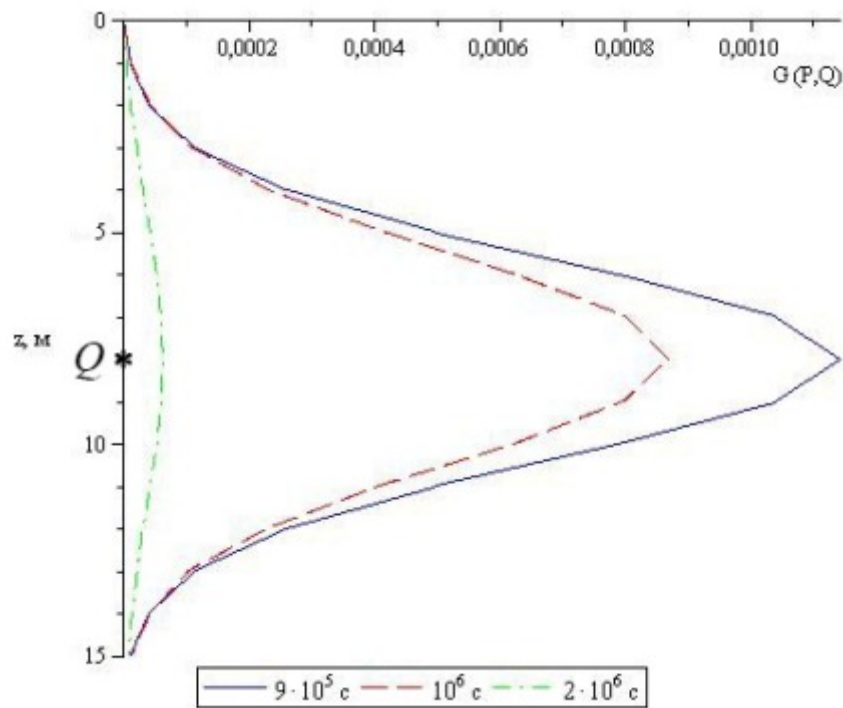


Рис. 4.9. Значения функции Грина в различные моменты времени t

Проведены численные расчеты функции распределения объемной активности радона в кусочно-однородной плоско-параллельной горизонтально-слоистой среде с шарообразным включением $\Omega_{4,1}$ радиуса $R = 0.5$ м с центром в точке $(1, 1, 7)$ (рис. 4.10). Значения параметров среды представлены на стр. 62 (параграф 4.1).

Физические свойства данного включения описываются симметричным тензором диффузии $D_{4.1} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$ и скоростью адвекции со значением $v_{4.1} = 4 \cdot 10^{-5}$ м/с.

Время работы программного комплекса для нахождения искомой функции объемной активности радона в одной точке составляет в среднем около 9-10 ч.

Результаты численного моделирования приведены на рис. 4.11.

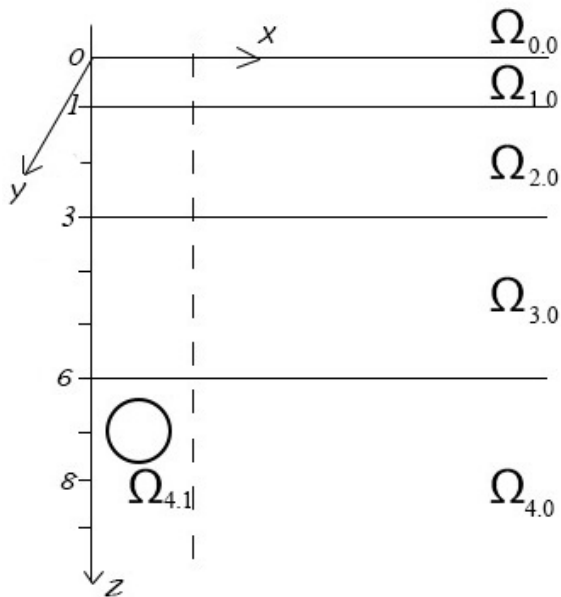


Рис. 4.10. Геометрия среды

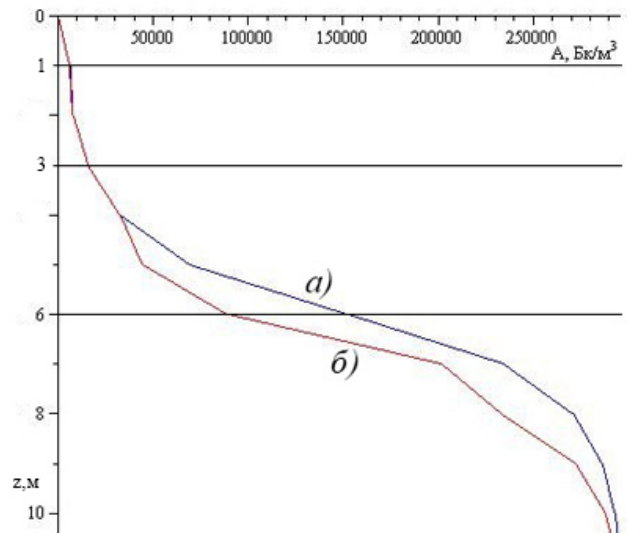


Рис. 4.11. График функции ОАР

На рис. 4.11 (а) изображен график функции нормального поля радона при $t = 10^6$ с. Влияние включения отражено на рис. 4.11 (б).

Для среды, геометрия которой представлена на 4.10, проведены вычислительные эксперименты по влиянию различных параметров расчетной модели на значение искомой функции объемной активности радона: времени, расстояния до включения, местоположения и геометрических размеров

включения, коэффициента диффузии и скорости адвекции слоя, в котором находится включение, а также толщины слоев среды.

На рис. 4.12 показано, как меняется объемной активности радона при различных значениях времени t : $0.9 \cdot 10^6$ с, $1 \cdot 10^6$ с, $2 \cdot 10^6$ с. Тонкой сплошной линией изображен график функции нормального поля радона при $t = 10^6$ с. Геометрия среды соответствует рис. 4.10.

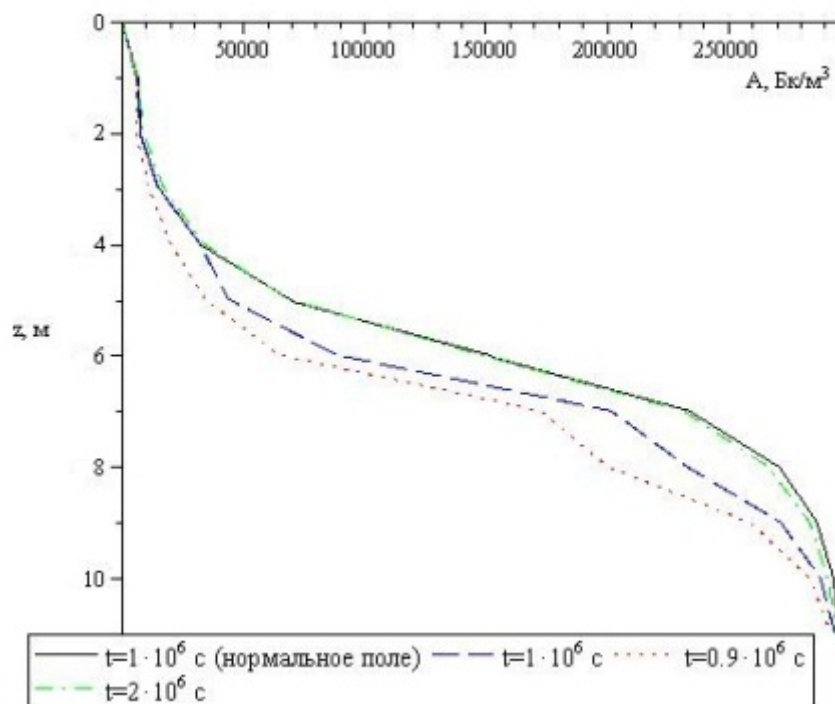


Рис. 4.12. Зависимость ОАР от времени

Видно, что с увеличением времени t значения искомой функции объемной активности радона A также увеличиваются и стремятся к значениям функции нормального поля радона. Это означает, что с увеличением времени уменьшается в целом влияние включений на поле радона.

На рис. 4.13 показана зависимость искомой функции объемной активности радона от расстояния r до включения: $r = 1$ м, $r = 2$ м, $r = 3$ м. Тонкой сплошной линией изображен график функции нормального поля радона при $r = 1$ м. Геометрия среды соответствует рис. 4.10.

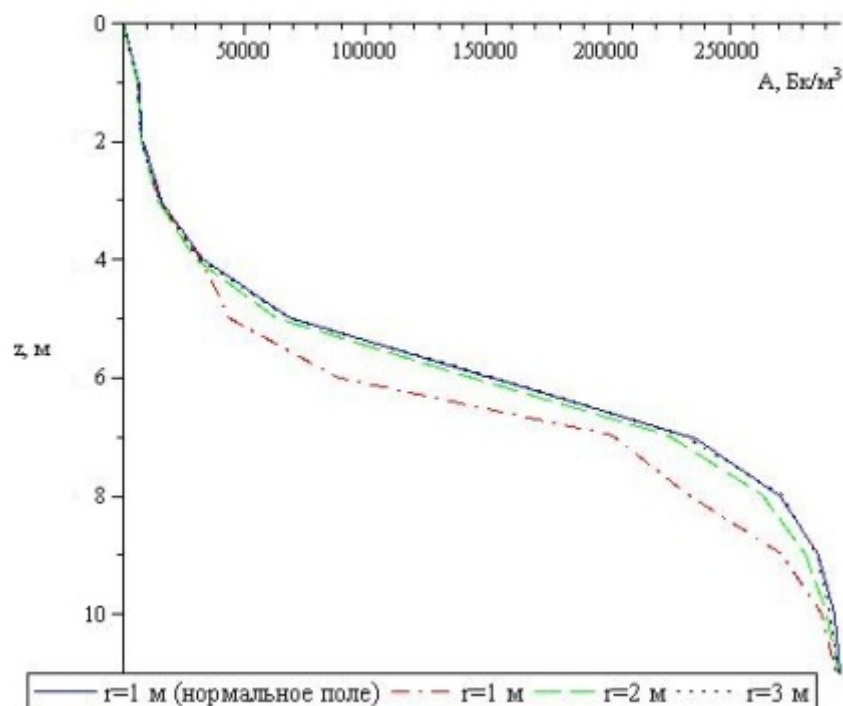


Рис. 4.13. Зависимость ОАР от расстояния r до включения

Видно, что при удалении от включения влияние на него уменьшается (что естественно), значения искомой функции объемной активности радона также стремятся к значениям функции нормального поля радона.

Рис. 4.14 иллюстрирует влияние местоположения включения на искомую функцию объемной активности радона. Геометрия среды соответствует рис. 4.10. При проведении эксперимента рассматривались случаи местоположения шарообразного включения в первом (центр включения в точке $(1,1,0.5)$) и четвертом (центр включения в точке $(1,1,7)$) слоях.

Видно, что в случае местоположения включения в первом слое кривая объемной активности радона практически сливается с кривой нормального поля, за исключением значений, находящихся в пределах первого слоя.

На рис. 4.15 показана зависимость объемной активности радона от радиуса R шарообразного включения $\Omega_{4,1}$: $R = 0.5$ м, $R = 1$ м, $R = 1.5$ м. В данном случае центр включения находится в точке $(1, 1, 8)$.

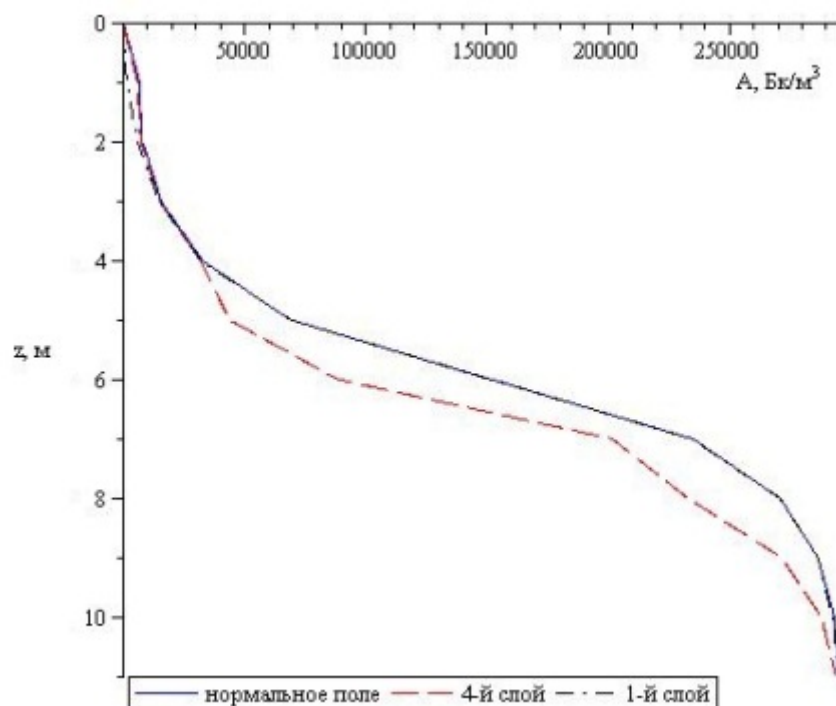


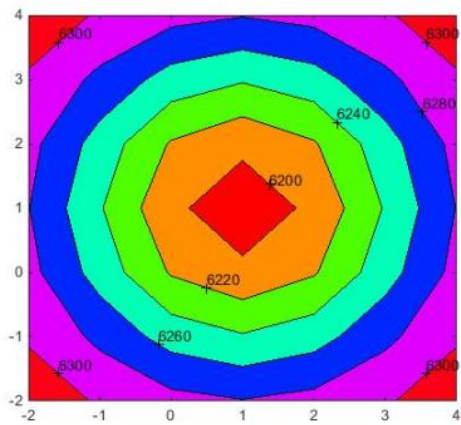
Рис. 4.14. Зависимость ОАР от местоположения включения

На рис. 4.16 показана зависимость объемной активности радона от коэффициента диффузии $d_{4.0}$ слоя, в котором находится включение $\Omega_{4.1}$: $d = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $d = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, $d = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$. Геометрия среды соответствует рис. 4.10.

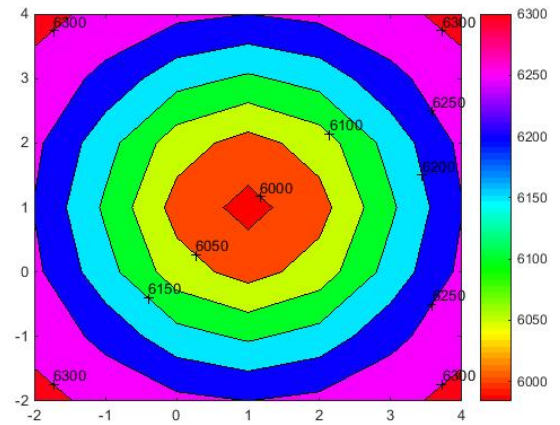
На рис. 4.17 показана зависимость объемной активности радона от скорости адвекции $v_{4.0}$ слоя, в котором находится включение $\Omega_{4.1}$: $v = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}/\text{с}$, $v = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м}/\text{с}$. Геометрия среды соответствует рис. 4.10.

На рис. 4.18 показана зависимость объемной активности радона от ширины слоев: $z_0 = 0 \text{ м}$, $z_1 = 1 \text{ м}$, $z_2 = 3 \text{ м}$, $z_3 = 6 \text{ м}$; $z_0 = 0 \text{ м}$, $z_1 = 2 \text{ м}$, $z_2 = 4 \text{ м}$, $z_3 = 6 \text{ м}$; $z_0 = 0 \text{ м}$, $z_1 = 3 \text{ м}$, $z_2 = 5 \text{ м}$, $z_3 = 6 \text{ м}$. Геометрия среды соответствует рис. 4.10.

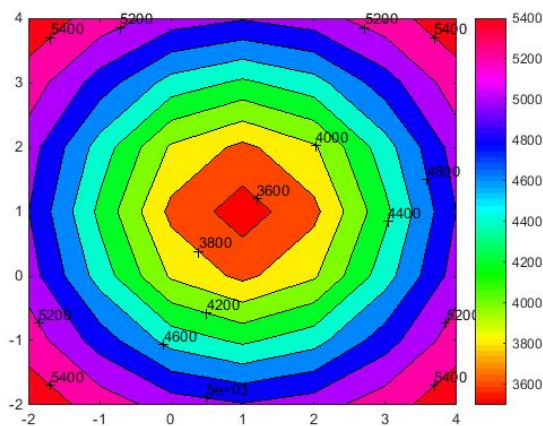
Особый интерес с геофизической точки зрения представляет построение поверхности функции диффузионного поля над включением, что соответствует площадным измерениям.



а) $R = 0.5$ м



б) $R = 1$ м

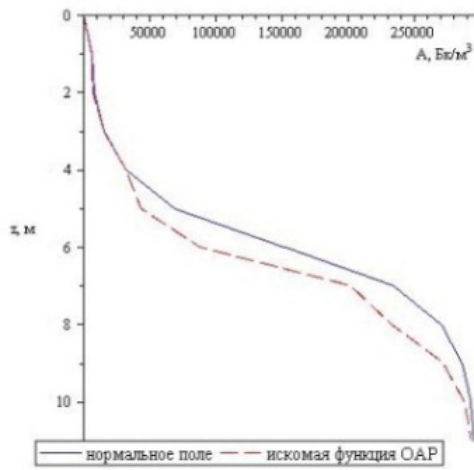


в) $R = 1.5$ м

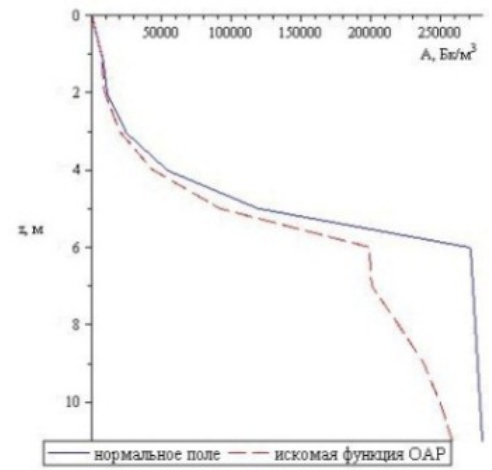
Рис. 4.15. Зависимость ОАР от радиуса включения

Для среды, геометрия которой представлена на рис. 4.10 построен график поверхности искомой функции объемной активности радона в изолиниях, в прямоугольнике $x, y \in [-2; 4]$, в плоскости $z = 1$ м (рис. 4.19).

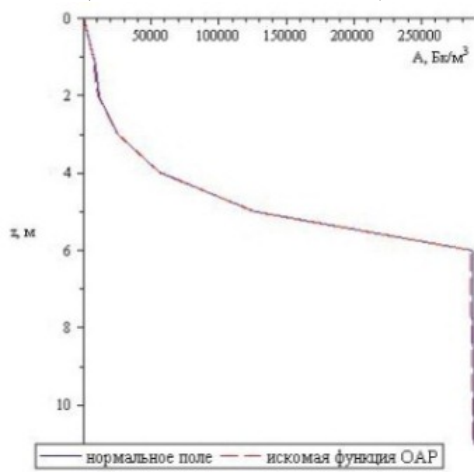
В случае анизотропного шарообразного включения $\Omega_{4,1}$, диффузионные свойства которого описываются тензором $D_{4,1} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^{-5} & 10^{-5} & 0 \\ 10^{-5} & 5 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$, график поверхности искомой функции объемной активности радона в изолиниях имеет вид (рис. 4.20).



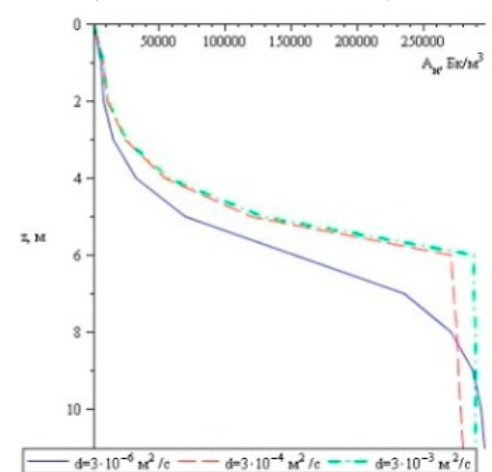
а) $d = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$



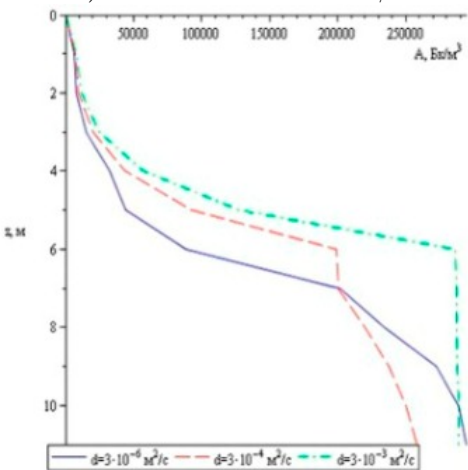
б) $d = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$



в) $d = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$

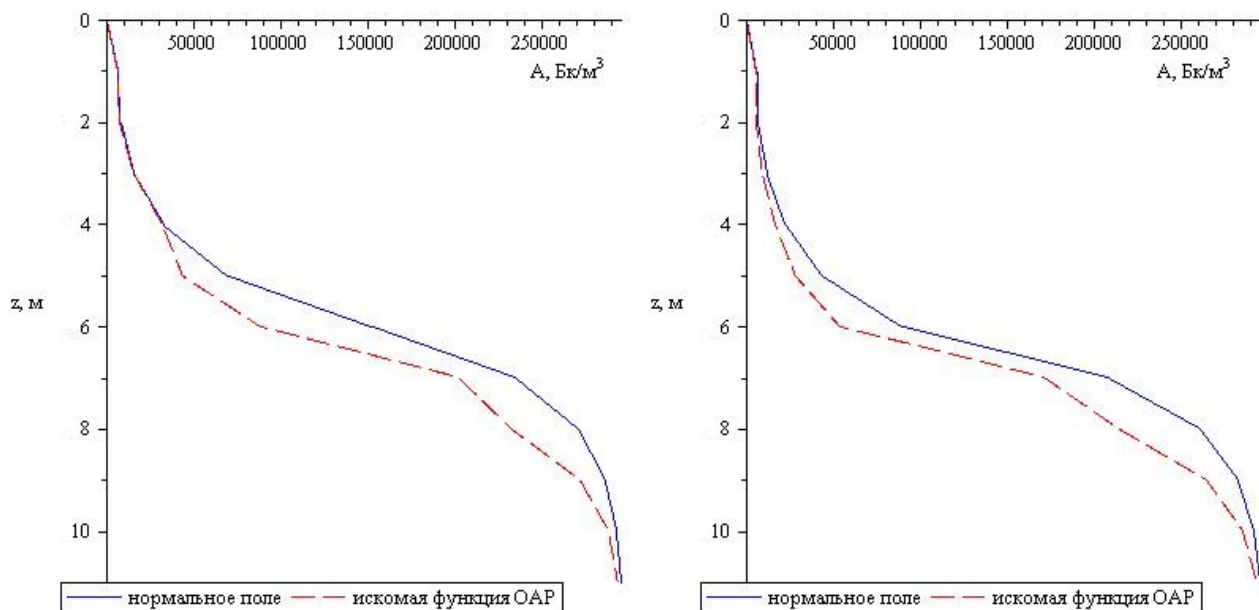


г) нормальное поле радона



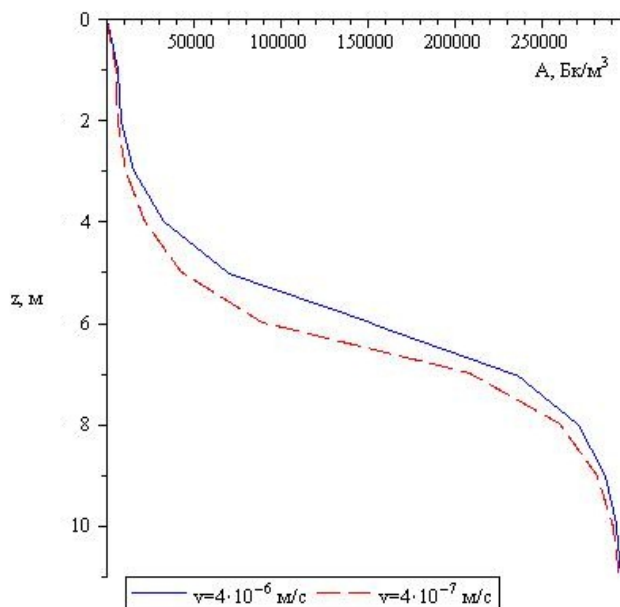
д) искомая функция ОАР

Рис. 4.16. Зависимость ОАР от коэффициента диффузии слоя включения



а) $d = 4 \cdot 10^{-6}$ м/с

б) $d = 4 \cdot 10^{-7}$ м/с

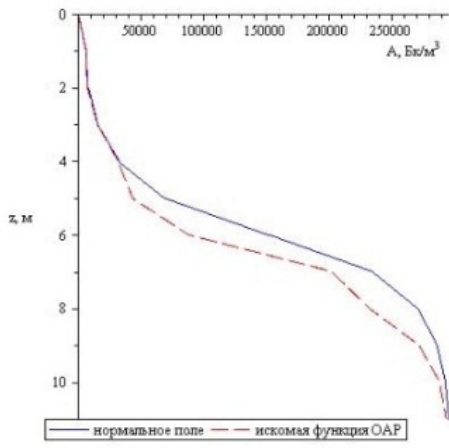


в) нормальное поле радона

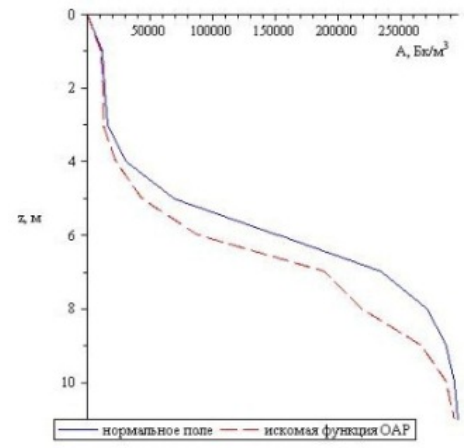
г) искомая функция ОАР

Рис. 4.17. Зависимость ОАР от скорости адвекции слоя включения

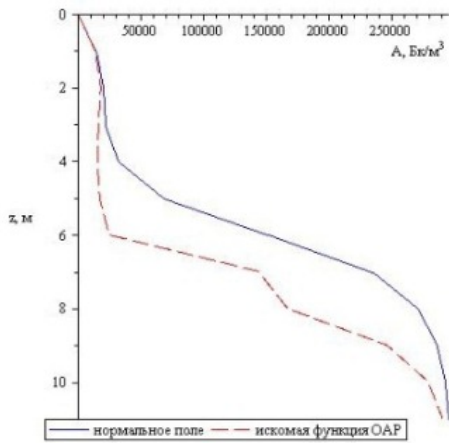
В случае изменения тензора диффузии включения $\Omega_{4.1}$, в частности, при $D_{4.1} = \begin{pmatrix} 0 & 10^{-5} & 3 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 5 \cdot 10^{-5} & 10^{-5} \\ 3 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, график поверхности искомой функции объемной активности радона в изолиниях примет вид (рис. 4.21).



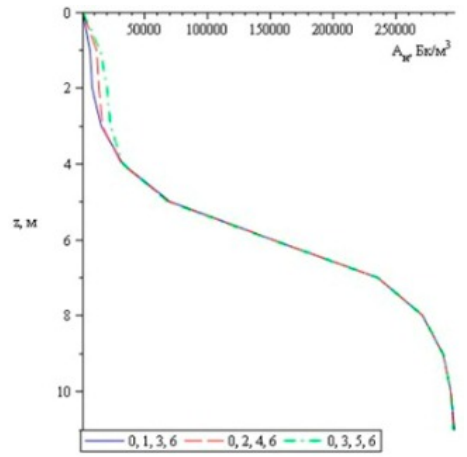
а) $z_0 = 0$ м, $z_1 = 1$ м,
 $z_2 = 3$ м, $z_3 = 6$ м



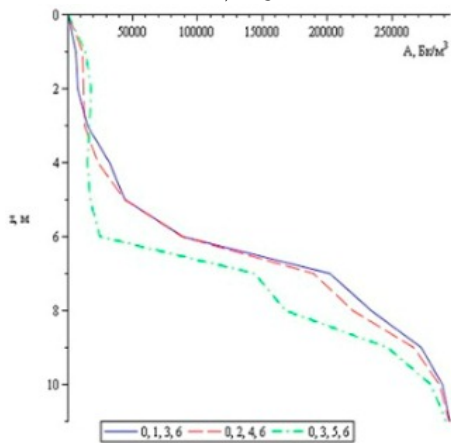
б) $z_0 = 0$ м, $z_1 = 2$ м,
 $z_2 = 4$ м, $z_3 = 6$ м



в) $z_0 = 0$ м, $z_1 = 3$ м,
 $z_2 = 5$ м, $z_3 = 6$ м



г) нормальное поле радона



д) искомая функция ОАР

Рис. 4.18. Зависимость ОАР от толщины слоев

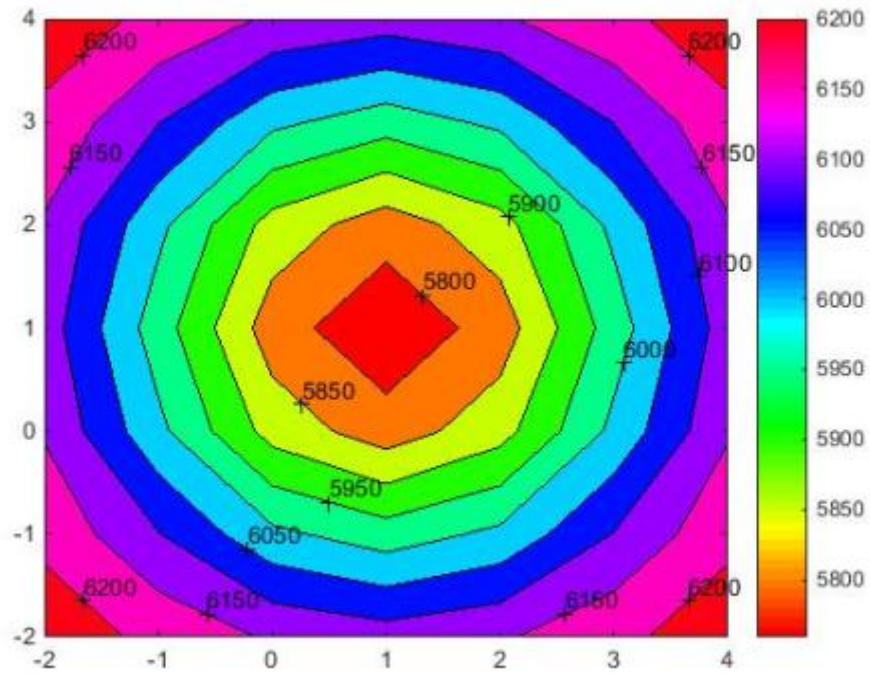


Рис. 4.19. График поверхности в изолиниях функции распределения ОАР

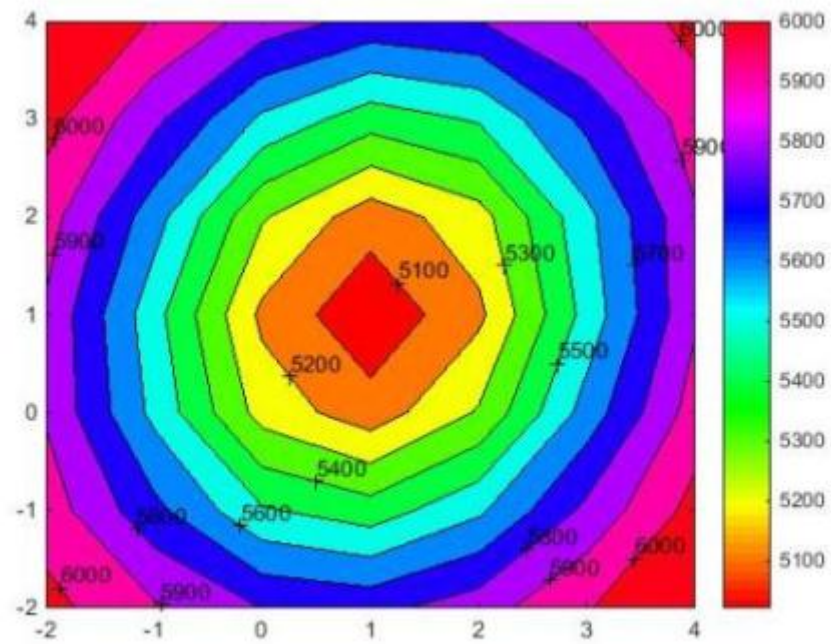


Рис. 4.20. График поверхности в изолиниях функции распределения ОАР с учетом анизотропии включения

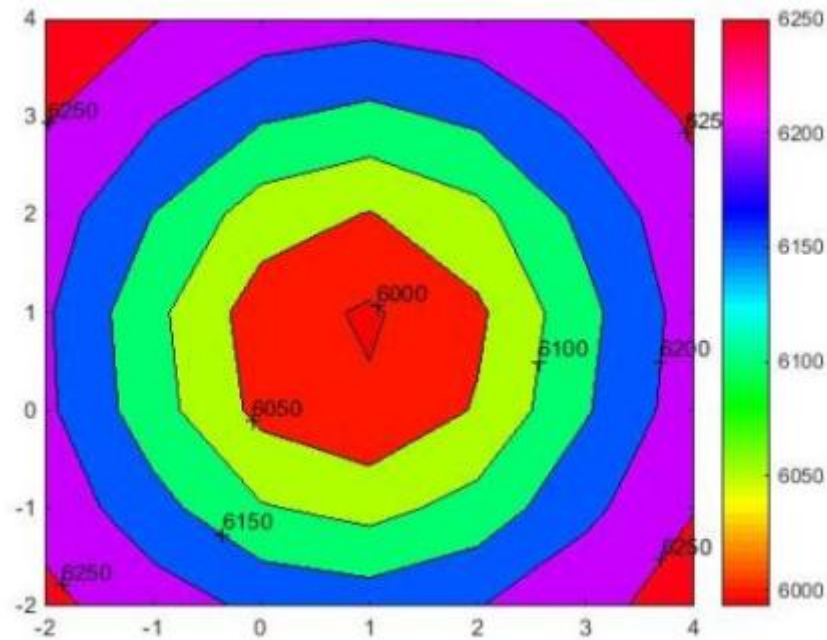


Рис. 4.21. График поверхности в изолиниях функции распределения ОАР при изменении тензора диффузии

Таким образом, учет анизотропии при моделировании процессов переноса радона в геологических средах приводит к существенному изменению поля объемной активности радона и является значимым фактором, необходимым при описании математической модели.

4.4. Выводы

С помощью разработанного комплекса программ математического моделирования процессов переноса радона "DAR" произведены численные расчеты с целью проверки правильности построенной модели и разработанных алгоритмов, а также анализа влияния физических и геометрических параметров сред на распределение поля радона:

- обращения интегрального преобразования Лапласа;
- нахождения функции нормального поля радона в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами –

для сравнительного сопоставления результатов компьютерного моделирования рассмотрены публикации отечественных и зарубежных авторов;

- вычисления функции Грина в горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами;
- определения функции аномального поля радона (по вертикальному профилю и поверхности) – на конкретном примере показано влияние включения и его параметров на функцию объемной активности радона.

Заключение

Основные результаты работы, выносимые на защиту:

В рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей получены:

1. Математическая модель трехмерной задачи диффузии-адвекции в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями, учитывающая анизотропию диффузионных свойств подобластей среды.
2. Формулы интегрального представления решения поставленной задачи.
3. Аналитические формулы представления решения задач для функции нормального поля радона и функции Грина для случая горизонтально-слоистого плоско-параллельного пространства.

В рамках разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий получены:

1. Алгоритм нахождения функции нормального поля радона в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами.
2. Алгоритм вычисления функции Грина в горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами.
3. Алгоритм определения функции аномального поля радона, учитывающей влияние включений.

В рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов получены:

1. Комплекс программ, имеющий следующую модульную структуру:

– программный модуль, реализующий алгоритм нахождения функции нормального поля радона в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами;

– программный модуль, реализующий алгоритм вычисления функции Грина в горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами;

– программный модуль, реализующий алгоритм обращения интегрального преобразования Лапласа.

Алгоритмы численно реализованы в комплексе оригинальных программ автора. Основные программные средства зарегистрированы в Объединенном фонде электронных ресурсов «Наука и образование» (ОФЭР-НИО) Министерства образования и науки Российской Федерации.

Проведены сравнения с известными моделями и натурными экспериментами для случая однородных кусочно-постоянных сред и вычислительные эксперименты по исследованию процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями и взаимному влиянию параметров математической модели.

Таким образом, в работе решены все поставленные задачи и достигнута цель исследования, что позволяет говорить о соответствии диссертационной работы следующим областям исследования паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»:

1) развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п.2);

2) разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (п.3);

3) реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов (п. 4).

Литература

1. *Андреев, А.И.* Радон как индикатор сейсмогеодинамической активности / А.И. Андреев, А.А. Коковкин, М.Б. Медведева // Безопасность в техносфере. – 2011. – №5. – С. 8-13.
2. *Апкин, Р.Н.* Радон в почвенном воздухе в окрестностях г. Казань / Р.Н. Апкин, А.А. Забелин // Безопасность в техносфере. – 2012. – №3. – С. 19-22.
3. *Арбузов, С.И.* Геохимия радиоактивных элементов / С.И. Арбузов, Л.П. Рихванов; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 300 с.
4. *Арсенин, В.Я.* Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1984. – 384 с.
5. *Баранов, В.И.* Радиометрия / В. И. Баранов. – М.: АН СССР, 1956. – 344 с.
6. *Бейтмен, Г.* Таблицы интегральных преобразований. Том 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1968. – 344 с.
7. *Бекман, И.Н.* Эксхалиция радона. Лекция 7 / И.Н. Бекман. // Радон: враг, врач и помощник. Курс лекций [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://profbeckman.narod.ru/rad.htm>
8. *Березинский, Н.А.* Влияние процессов подготовки землетрясений на концентрацию радона и электропроводность приземной атмосферы / Н.А. Березинский и др. // Геология и геофизика Юга России. – 2011. – №2. – С. 14-22.
9. *Бондаренко, В.М.* Квадратичная зависимость плотности потока радона с земной поверхности от объемной активности подпочвенного радо-

- на / В.М. Бондаренко, Н.В. Демин, А.И. Соболев // Известия высших учебных заведений. Геология и разведка. – 2009. – №6. – С. 55-60.
10. Булашевич, Ю.П. К теории диффузии эманации в пористых средах / Ю.П. Булашевич, Р.К. Хайретдинов // Известия АН СССР. Сер. геофизическая. – 1959. – №18. – С. 1787-1792.
 11. Булашевич, Ю.П. Некоторые нестационарные задачи диффузии частиц с ограниченным временем жизни / Ю.П. Булашевич // В кн. Ядерно-геофизические исследования. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975. – С. 3-15.
 12. Бутаев, А.М. Естественные радионуклиды в породах и почвах Дагестана и содержание радона в воздухе жилых помещений / А.М. Бутаев, А.С. Абдулаева, М.А. Гуруев // Вестник Дагестанского научного центра. – 2006. – №23. – С. 59-65.
 13. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
 14. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
 15. Влацкий, Ф.Д. Исследование содержания радона в жилых помещениях Первомайского района Оренбургской области / Ф.Д. Влацкий // Вестник Оренбургского государственного университета. Естественные и технические науки. – 2005. – Т. 2, №10. – С. 68-73.
 16. Граммаков, А.Г. Радиометрические методы поисков и разведки урановых руд / А.Г. Граммаков, А.И. Никонов, Г.П. Тарфеев. – М.: Госгеолтехиздат, 1957. – 610 с.
 17. Гудзенко, В.В. Радон в газах грязевых вулканов / В.В. Гудзенко // Геология и полезные ископаемые Мирового океана. – 2008. – №2. – С. 116-127.

18. *Гулабянц, Л.А.* Мощность «активного» слоя грунта при диффузионном переносе радона в грунтовом основании здания / Л.А. Гулабянц, Б.Ю. Заболотский // Аппаратура и новости радиационных измерений (АНРИ). – 2001. – №4(27). – С. 38-40.
19. *Далатказин, Т.Ш.* Влияние структурных особенностей горного массива на достоверность геодинамического районирования на основе режимных наблюдений за полем радоновых эманаций / Т.Ш. Далатказин // Литосфера. – 2013. – №1. – С. 158-161.
20. *Далатказин, Т.Ш.* Экспериментальные исследования возможности использования радонометрии для геодинамического районирования / Т.Ш. Далатказин, Ю.П. Коновалова, В.И. Ручкин // Литосфера. – 2013. – №3. – С. 146-150.
21. *Дёч, Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Дёч. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
22. *Джрбашян, М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости / М.М. Джрбашян. – М.: Наука, 1966. – 672 с.
23. *Диткин, В.А.* Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.
24. *Дмитриев, В.И.* Обратные задачи геофизики: монография / В.И. Дмитриев. – М.: МАКС Пресс, 2012. – 340 с.
25. *Дорожко, А.Л.* Природный радон: проблемы и решения / А.Л. Дорожко // Разведка и охрана недр. – 2010. – №8. – С. 50-56.
26. *Жуковский, М.В.* Радон: история и современность / М.В. Жуковский // Вестник Уральского отделения РАН. – 2009. – №4(30). – С. 32-40.
27. *Ионизирующие излучения: источники и биологические эффекты* // Доклад на Генеральной Ассемблее ООН за 1988. – Т.1. – 882 с.

28. *Камнев, Е.Н.* Прогнозирование землетрясений с помощью измерений концентраций и потока радона на земной поверхности / Е.Н. Камнев, А.О. Сизова, А.В. Касаткин, Т.С. Самородова. – М.: Горная книга, 2012. – 33 с.
29. *Канторович, Л.В.* Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 697 с.
30. *Кафтанова, Ю.В.* Специальные функции математической физики / Ю.В. Кафтанова. – Х.: Новое слово, 2009. – 596 с.
31. *Киляков, А.В.* История развития эманационных методов и их роль в нефтяной геологии на современном этапе / А.В. Киляков // Известия Саратовского университета. Науки о Земле. – 2013. – Т.13. – С. 57-60.
32. *Климшин, А.В.* Влияние промерзания поверхностного слоя грунтов на перенос радона / А.В. Климшин и др. // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. – 2010. – №2(16). – С. 146-151.
33. *Климшин, А.В.* Актуальные проблемы оценки потенциальной радоноопасности участков застройки / А.В. Климшин // Аппаратура и новости радиационных измерений (АНРИ). – 2008. – №2(53). – С. 18-20.
34. *Клово, А.Г.* Моделирование процессов переноса подпочвенного радона в грунте и его эксхалации в приземный слой атмосферы / А.Г. Клово, Г.В. Куповых, О.В. Новикова // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2011. – Т. 121, №8. – С. 153-159.
35. *Козлов, В.П.* Двумерные осесимметричные нестационарные задачи теплопроводности / В.П. Козлов; под ред. А.Г. Шашкова. – Мн.: Наука и техника, 1986. – 392 с.
36. *Козлов, Ф.В.* Справочник по радиационной безопасности / Ф.В. Козлов. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 352 с.

37. *Козлова, И.А.* Влияние искусственных источников упругих колебаний на изменение объемной активности радона в диффузионном и конвективном режиме измерений / И.А. Козлова, А.К. Юрков // Материалы международной конференции: «Структура, свойства, динамика и минералогия литосферы Восточно-Европейской платформы». – 2010. – Т.1. – С. 339-342.
38. *Козлова, И.А.* Методические вопросы измерения содержания радона-222 в почвенном воздухе при мониторинговых наблюдениях / И.А. Козлова, А.К. Юрков // Уральский геофизический вестник. – 2005. – №7. – С. 30-34.
39. *Коршунов, Г.И.* Мониторинг напряженно-деформированного состояния массива горных пород на основе наблюдения за радиогенными газами / Г.И. Коршунов и др. // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2012. – №6. – С. 197-200.
40. *Кризский, В.Н.* Математическое моделирование потенциальных геоэлектрических полей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 05.13.18 / Кризский Владимир Николаевич. – Стерлитамак, 2004. – 360 с.
41. *Кризский, В.Н.* О способе вычисления физических полей в кусочно-анизотропных средах. Часть II. Нестационарные поля / В.Н. Кризский // Вестник Башкирского университета. – 2009. – Т. 14, №4. – С. 1302-1306.
42. *Крисюк, Э.М.* Радиационный фон помещений / Э.М. Крисюк. – Л.: Недра, 1989. – 404 с.
43. *Крылов, В.И.* Справочная книга по численному интегрированию / В.И. Крылов, Л.Т. Шульгина. – М.: Наука, 1966. – 370 с.
44. *Кузнецов, Ю.В.* Проблема достоверности измерений плотности потока радона / Ю.В. Кузнецов, В.П. Ярына // Аппаратура и новости радиационных измерений (АНРИ). – 2001. – №4(27). – С. 26-29.

45. *Куповых, Г.В.* Теория электродного эффекта в атмосфере / Г.В. Куповых, В.Н. Морозов, Я.М. Шварц. – Таганрог: ТрГУ, 1998. – 122 с.
46. *Курант, Р.* Методы математической физики / Р. Курант, Д. Гильберт. – М.-Л.: ГТТИ, 1945. – 620 с.
47. *Лаврентьев, М.М.* Теория операторов и некорректные задачи / М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. – Новосибирск: Издательство Ин-та математики, 2010. – 912 с.
48. *Лукьянов, А.Ю.* Программно-аппаратный комплекс мониторинга радона / А.Ю. Лукьянов, А.А. Когут, Б.З. Белашев // Труды Карельского научного центра РАН. – 2014. – №4. – С. 93-99.
49. *Матвеева, Т.А.* Некоторые методы обращения преобразования Лапласа и их приложения: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07 / Матвеева Татьяна Александровна. – С.-П., 2003. – 117 с.
50. *Микляев, П.С.* Влияние свойств глинистых пород на эманирование радона / П.С. Микляев и др. // Вестник Московского университета. Химия. – 2009. – Т. 50, №5. – С. 392-395.
51. *Михлин, С.Г.* Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники / С.Г. Михлин. – М.-Л.: ОГИЗ, 1947. – 304 с.
52. *Никифоров, А.Ф.* Специальные функции математической физики / А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. – М.: Наука, 1984. – 344 с.
53. *Новиков, Г.Ф.* Радиометрическая разведка / Г.Ф. Новиков. – Л.: Наука, 1989. – 407 с.
54. *Новиков, Г.Ф.* Радиоактивные методы разведки / Г.Ф. Новиков, Ю.Н. Капков. – Л.: Недра, 1965. – 759 с.
55. *Павлов, И.В.* Математическая модель процесса эксгаляции радона с поверхности земли и критерии оценки потенциальной радоноопасности территории застройки / И.В. Павлов // Аппаратура и новости радиационных измерений (АНРИ). – 1996/97. – №5(11). – С. 15-26.

56. *Пантелеев, А.В.* Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Высш. шк., 2005. – 544 с.
57. *Паровик, Р.И.* Алгоритм определения коэффициентов обратной задачи массопереноса радона (^{222}Rn) в приземный слой атмосферы / Р.И. Паровик // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. – 2007. – №1(9). – С. 145-149.
58. *Паровик, Р.И.* Алгоритм расчета плотности потока радона (^{222}Rn) с поверхности земли / Р.И. Паровик, П.П. Фирстов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2008. – №3. – С. 96-101.
59. *Паровик, Р.И.* Апробация новой методики расчета плотности потока радона с поверхности (на примере Петропавловск-Камчатского геодинимического полигона) / Р.И. Паровик, П.П. Фирстов // Аппаратура и новости радиационных измерений (АНРИ). – 2009. – №3 (58). – С. 52-57.
60. *Паровик, Р.И.* Математическая диффузионная модель массопереноса радона (^{222}Rn) в грунте и его эксхалиции в приземный слой атмосферы / Р.И. Паровик, И.А. Ильин, П.П. Фирстов // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. – 2006. – №1(7). – С. 110-114.
61. *Паровик, Р.И.* Модель нестационарной диффузии-адвекции радона в системе грунт-атмосфера / Р.И. Паровик // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2010. – №1(1). – С. 39-45.
62. *Паровик, Р.И.* Обобщенная одномерная модель массопереноса радона и его эксхалиция в приземный слой атмосферы / Р.И. Паровик, И.А. Ильин, П.П. Фирстов // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19, №11. – С. 43-50.
63. *Пестова, О.В.* Моделирование процессов переноса почвенного радона в грунте и его эксхалиции в приземный слой атмосферы / О.В.

- Пестова, Д.А. Пестов, А.В. Шишеня // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – №6. – С. 871-879.
64. *Радиоэкология. Курс лекций* / Под ред. д.г.-м.н. Талалая А.Г. – Екатеринбург: УГГГА, 2001. – 351 с.
65. *Решетов, В.В.* Результаты совместных измерений объемной активности радона в почвенном воздухе и плотности потока радона с поверхности почво-грунтов на территории Санкт-Петербурга и Ленинградской области / В.В. Решетов, П.В. Бердников // *Аппаратура и новости радиационных измерений (АНРИ)*. – 2001. – №4(27). – С. 34-37.
66. *Рогалис, В.С.* Исследования влияния временных и погодных условий на потоки радона на строительных площадках г. Москвы / В.С. Рогалис, С.Г. Кузьмич, О.Г. Подольский // *Аппаратура и новости радиационных измерений (АНРИ)*. – 2001. – №4(27). – С. 57-61.
67. *Рудаков, В.П.* Мониторинг напряженно-деформированного состояния пород сейсмоактивного региона эманационным методом / В.П. Рудаков // *Геохимия*. – 1986. – №9. – С. 1337-1342.
68. *Рудаков, В.П.* Эманационный мониторинг геосред и процессов / В.П. Рудаков. – М.: Научный мир, 2009. – 176 с.
69. *Самарский, А.А.* Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Издательство ЛКИ, 2009. – 480 с.
70. *Сердюкова, А.С.* Изотопы радона и продукты их распада в природе / А.С. Сердюкова, Ю.Т. Капитанов. – М.: Атомиздат, 1975. – 296 с.
71. *Синицын, А.Я.* Ядерногеохимические методы поиска месторождений твердых полезных ископаемых / А.Я. Синицын, Ю.О. Козында. – Л.: Недра, 1991. – 296 с.
72. *Смирнов, С.Н.* Радиационная экология. Физика ионизирующих излучений / С.Н. Смирнов, Д.Н. Герасимов. – М.: МЭИ, 2006. – 326 с.

73. *Соболев, Г.А.* Основы прогноза землетрясений / Г.А. Соболев. – М.: Наука, 1993. – 313 с.
74. *Стольниц, М.М.* Математическая модель диффузии лекарственных препаратов и иммерсионных жидкостей в тканях человека / М.М. Стольниц, А.Н. Башкатов, Э.А. Генина, В.В. Тучин // Известия Саратовского университета. – 2008. – Т.8, №1. – С. 15-20.
75. *Сухоруков, М.В.* Особенности миграции радона (^{222}Rn) по нарушениям среды горного массива во времени на малых глубинах / М.В. Сухоруков // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2010. – №9. – С. 372-374.
76. *Тихонов, А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
77. *Уломов, В.И.* Предвестник Ташкентского землетрясения / В.И. Уломов, Б.З. Мавашев // Ташкентское землетрясение 26 апреля 1966 г. – 1971. – С. 182-188.
78. *Уткин, В.И.* Динамика выделения радона из массива горных пород как краткосрочный предвестник землетрясения / В.И. Уткин, А.К. Юрков // Доклады АН. – 1998. – Т.358, №5. – С. 675-680.
79. *Уткин, В.И.* Газовое дыхание Земли / В.И. Уткин // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – №1. – С. 57-64.
80. *Уткин, В.И.* Метод мгновенного источника для расчета параметров диффузии радона в горных породах / В.И. Уткин и др. // Активные геологические и геофизические процессы в литосфере: Материалы межд. конф. – 2006. – С. 231-233.
81. *Уткин, В.И.* Радон и проблема тектонических землетрясений / В.И. Уткин // Соросовский образовательный журнал. – 2000. – Т.6, №12. – С. 64-70.

82. *Уткин, В.И.* Радон как индикатор геодинамических процессов / В.И. Уткин, А.К. Юрков // Геология и геофизика. – 2010. – Т.51, №2. – С. 277-286.
83. *Фирстов, П.П.* Возможности прогноза сильных землетрясений по данным радонового мониторинга на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне / П.П. Фирстов // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. – 2014. – №1(23). – С. 35-49.
84. *Хайкович, И.М.* Математическое моделирование процессов миграции радона / И.М. Хайкович // Аппаратура и новости радиационных измерений (АНРИ). – 1996/97. – №3(9). – С. 99-107.
85. *Хайкович, И.М.* Моделирование процессов измерения концентраций радона и его потока / И.М. Хайкович // Аппаратура и новости радиационных измерений (АНРИ). – 2001. – №4(27). – С. 53-57.
86. *Черник, Д.А.* Обоснование измерений объемной активности радона в грунтовой среде при оценке радоноопасности территории / Д.А. Черник, В.К. Титов, А.Б. Лашков, Д.А. Амосов // Аппаратура и новости радиационных измерений (АНРИ). – 2001. – №4(27). – С. 29-33.
87. *Юрков, А.К.* К вопросу применения радоновых исследований при изучении неглубоко залегающих карстовых полостей / А.К. Юрков, И.А. Козлова, А.Н. Антипин // Глубинное строение, геодинамика, тепловое поле Земли, интерпретация геофизических полей. Восьмые научные чтения памяти Ю.П. Булашевича. Материалы конференции. – 2015. – С. 383-385.
88. *Яковлева, В.С.* Диффузионно-адвективный перенос радона в многослойных геологических средах / В.С. Яковлева // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т.315, №2. – С. 67-72.
89. *Яковлева, В.С.* Методы измерения плотности потока радона и торона с поверхности пористых материалов: монография / В.С. Яковлева

- ва. – Томск: Издательство Томского политехнического университета, 2011. – 174 с.
90. *Яковлева, В.С.* Метод оценки плотности потока радона с поверхности земли по измеренной концентрации радона в почвенном воздухе / В.С. Яковлева, Н.К. Рыжакова // Аппаратура и новости радиационных измерений (АНРИ). – 2002. – №4(31). – С. 18-21.
91. *Яковлева, В.С.* Моделирование влияния состояния и изменчивости атмосферы и литосферы на плотность потоков радона и торона с поверхности земли / В.С. Яковлева // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т.317, №2. – С. 162-166.
92. *Яковлева, В.С.* Численное решение уравнения диффузии–адвекции радона в многослойных геологических средах / В.С. Яковлева, Р.И. Паровик // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2011. – №1(2). – С. 45-55.
93. *Яковлева, В.С.* Полевой метод измерения коэффициента диффузии радона и торона в грунте / В.С. Яковлева // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2014. – №1(8). – С. 81-85.
94. *Янке, Е.* Специальные функции: Формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1964. – 344 с.
95. *Antonopoulos-Domis, M.* Experimental and theoretical study of radon distribution in soil / M. Antonopoulos-Domis et al. // Health Physics. – 2009. – Vol.97, No.4. – pp. 322-331.
96. *Ball, T.K.* Behavior of radon in the geological environment: a review / T.K. Ball et al. // Quarterly Journal of Engineering Geology and Hydrogeology. – 1991. – Vol.24. – pp. 169-182.
97. *Cozmuta, I.* Moisture dependence of radon transport in concrete: measurements and modeling / I. Cozmuta, E.R. van der Graaf, R.J. de Meijer // Health Physics. – 2003. – Vol.85, No.4. – pp. 438-456.

98. *Cozmuta, I.* Methods for measuring diffusion coefficients of radon in building materials / I. Cozmuta, E.R. van der Graaf // The Science of the Total Environment. – 2001. – No.272. – pp. 323-335.
99. *Dennis, G.Z.* A First Course in Differential Equations with Modeling Applications, Ninth Edition. / G.Z. Dennis. – USA, Belmont, 2009. – 362 p.
100. *Dubinchuk, V.T.* Radon as a precursor of earthquakes / V.T. Dubinchuk // Isotopic geochemical precursors of earthquakes and volcanic eruption. Proceedings of an Advisory Group Meeting held in Vienna, 9-12 September 1991. – pp. 9-22.
101. *Elafify, M.M.* Mathematical modeling of radon concentration measurements in air by charcoal canisters without diffusion barriers using finite difference technique / M.M. Elafify, M.A.A. Al-Saeed Sakr // Asian Journal of Applied Sciences. – 2012. – Vol.5, No.3. – pp. 183-191.
102. *Etioppe, G.* Migration of carrier and trace gases in the geosphere: an overview / G. Etioppe, G. Martinelli // Physics of the Earth and Planetary Interiors. – 2002. – Vol.129, No.3-4. – pp. 185-204.
103. *Etioppe, G.* Radon in geogas microbubbles: a new perspective of earthquake precursor / G. Etioppe, W. Zhang // Journal of Earthquake Prediction Research. – 1998. – Vol.7, No.3. – pp. 382-390.
104. *Goto, M.* Estimation of global radon exhalation rate distribution / M. Goto et al. // The Natural Radiation Environment – 8th International Symposium. – 2008. – Vol.1034, No.1. – pp. 169-172.
105. *Jiranek, M.* Radon diffusion coefficient in radon-proof membranes—determination and applicability for the design of radon barriers / M. Jiranek, J. Hulka // International Journal on Architectural Science. – 2000. – Vol.1, No.4. – pp. 149-155.
106. *Khan, H.A.* Radon: a friend or a foe? / H.A. Khan // Nuclear Tracks and Radiation Measurements. – 1991. – Vol.19, No.1-4. – pp. 353-362.

107. *Kohl, T.* Numerical simulation of radon transport from subsurface to buildings / T. Kohl, F. Medici, L. Rybach // Journal of Applied Geophysics. – 1994. – No.31. – pp. 145-152.
108. *Martinelli, G.* Gas geochemistry and ^{222}Rn migration processes / G. Martinelli // Radiat Prot Dosimetry. – 1998. – Vol.78, No.1. – pp. 77-82.
109. *Meisenberg, O.* Specific properties of a model of thoron and its decay products in indoor atmospheres / O. Meisenberg, J. Tschiersch // Nukleonika. – 2010. – Vol.55, No.4. – pp. 463-469.
110. *Nazaroff, W.W.* Radon transport from soil to air / W.W. Nazaroff // Reviews of Geophysics. – 1992. – Vol.30, No.2. – pp. 137-160.
111. *Rasmuson, A.* Migration of radionuclides in fissured rock: analytical solution for the case of constant source strength / A. Rasmuson // Water Resources Research. – 1984. – Vol.20, No.10. – pp. 1435-1442.
112. *Rybalkin, A.* Numerical and analytical assessment of radon diffusion in various media and potential of charcoal as radon detector / A. Rybalkin. – The University of Utah, 2012. – 159 p.
113. *Sasaki, T.* Mathematical Modeling of Radon Emanation / T. Sasaki, Y. Gunji, T. Okuda // Journal of Nuclear Science and Technology. – 2004. – Vol.41, No.2. – pp. 142-151.
114. *Savovic, S.* Explicit finite difference solution of the diffusion equation describing the flow of radon through soil / S. Savovic et al. // Applied Radiation and Isotopes. – 2011. – No.69. – pp. 237-240.
115. *Schery, S.D.* Exhalation of radon and thoron: the question of the effect of thermal gradients in soil / S.D. Schery, A.G. Petschek // Earth and Planetary Science Letters. – 1983. – Vol.64, No.1. – pp. 56-60.
116. *Schery, S.D.* Transport of radon from fractured rock / S.D. Schery, D.H. Gaeddert, M.H. Wilkening // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. – 1982. – Vol.87, No.84. – pp. 2969-2976.

117. *Speelman, W.J.* Modeling and measurement of radon diffusion through soil for application on mine tailings dams / W.J. Speelman. – University of the Western Cape, 2004. – 108 p.
118. *Suaro, I.* Modeling of radon diffusion through soil / I. Suaro. – Odisha, India: National Institute of Technology, Rourkela, 2014. – 35 p.
119. *Toutain, J.P.* Gas geochemistry and seismo-tectonics: a review / J.P. Toutain, J.C. Baubron // *Tectonophysics*. – 1999. – Vol.304, No.1. – pp. 1-27.
120. *Varchegyi, A.* Radon migration model for covering U mine and ore processing tailings / A. Varhegyi, J. Somlai, and Z. Sas // *Romanian Journal of Physics*. – 2013. – Vol.58. – pp. 298-310.
121. *Watson, G.N.* A treatise on the theory of Bessel functions / G.N. Watson. – Cambridge: The University press, 1922. – 818 p.
122. *Кризский, В.Н.* О вычислении температурных и диффузионных полей в кусочно-постоянных анизотропных средах / В.Н. Кризский, А.Р. Бикбаева // *Вестник Башкирского университета*. – 2013. – Т.18, №2. – С. 313-316.
123. *Кризский, В.Н.* Математическое моделирование процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями / В.Н. Кризский, А.Р. Нафикова // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Математическое моделирование и программирование*. – 2014. – Т.7, №2. – С. 38-45.
124. *Нафикова, А.Р.* Свидетельство о регистрации электронного ресурса №20598 «Программный модуль «Функция нормального поля радона», 04.12.2014 г. / А.Р. Нафикова, В.Н. Кризский // *Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование» (ОФЭРНИО)*.
125. *Нафикова, А.Р.* Свидетельство о регистрации электронного ресурса №20600 «Программный модуль «Функция Грина», 04.12.2014 г. / А.Р.

- Нафикова, В.Н. Кризский // Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование» (ОФЭРНИО).
126. *Бикбаева, А.Р.* Программный модуль «Численное обращение преобразования Лапласа» / А.Р. Бикбаева, В.Н. Кризский // Материалы Межвуз. науч.-практ. конф. по прикладной математике, РБ, г. Стерлитамак, 3-4 апреля 2012 г. – С. 63-64.
127. *Бикбаева, А.Р.* О вычислении температурных и диффузионных полей в кусочно-анизотропных средах / А.Р. Бикбаева, В.Н. Кризский // Тез. докл. Междунар. науч.-практ. конф. «Измерения: состояние, перспективы, развитие», Челябинск, 25-27 сентября 2012 г.: в 2 т. – Т.1. – С. 48-50.
128. *Бикбаева, А.Р.* Способ вычисления температурных и диффузионных полей в кусочно-анизотропных средах / А.Р. Бикбаева // Тез. докл. Междунар. shk.-конф. для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», Уфа, 14-18 октября 2012 г. – С. 253.
129. *Бикбаева, А.Р.* Способ вычисления температурных и диффузионных полей в кусочно-анизотропных средах / А.Р. Бикбаева // Сб. тр. Междунар. shk.-конф. для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», Уфа, 14-18 октября 2012 г. – Т.1. – С. 35-42.
130. *Бикбаева, А.Р.* Решение задачи нестационарной диффузии-адвекции радона в кусочно-анизотропных слоистых средах с включениями / А.Р. Бикбаева, В.Н. Кризский // Тез. Всерос. молодежной науч.-практ. конф. «Актуальные вопросы науки и образования», Уфа, 25-27 апреля 2013 г. – С. 96.
131. *Бикбаева, А.Р.* Решение задачи нестационарной диффузии-адвекции радона в кусочно-анизотропных средах с включениями / А.Р. Бикба-

- ева, В.Н. Кризский // Материалы Всерос. науч.-практ. конф. «Современные проблемы науки и образования в техническом вузе», Стерлитамак, 24-26 июня 2013 г. – Т.2. – С. 4-8.
132. *Бикбаева, А.Р.* Решение задачи нестационарной диффузии-адвекции радона в кусочно-анизотропных средах / А.Р. Бикбаева, В.Н. Кризский // Тр. Междунар. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы», Стерлитамак, 26-30 июня 2013 г.: в 2 т. – Т.2. – С. 187-192.
133. *Бикбаева, А.Р.* О способе решения задачи нестационарной диффузии радона в кусочно-анизотропных средах / А.Р. Бикбаева, В.Н. Кризский // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т.15, №2. – С. 8-11.
134. *Нафикова, А.Р.* Математическое моделирование процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-анизотропных слоистых средах с включениями / А.Р. Нафикова, В.Н. Кризский // Сб. тр. II Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием «Математическое моделирование процессов и систем», Стерлитамак, 28-29 ноября 2013 г. – С. 86-91.
135. *Нафикова, А.Р.* О способе решения задачи диффузии-адвекции радона в кусочно-анизотропных слоистых средах с включениями / А.Р. Нафикова // Сб. докл. XV Уральской молодежной науч. шк. по геофизике, Екатеринбург, 24-29 марта 2014 г. – С. 166-168.
136. *Кризский, В.Н.* О решении прямых и граничных обратных задач математической физики в кусочно-анизотропных квазифрактальных средах / В.Н. Кризский, А.Р. Нафикова, Р.Р. Яматов // Тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти В.К. Иванова «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», Челябинск, 10-14 ноября 2014 г. – С. 127-128.
137. *Нафикова, А.Р.* Вычисление функции Грина для задачи диффузии-адвекции радона в горизонтально-слоистой среде / А.Р. Нафикова,

- В.Н. Кризский // Материалы III Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием «Математическое моделирование процессов и систем», Стерлитамак, 4-6 декабря 2014 г. – С. 43-49.
138. *Нафикова, А.Р.* О решении задачи теплопроводности и диффузии в кусочно-постоянных анизотропных средах / А.Р. Нафикова, В.Н. Кризский // Материалы 42-й сессии Междунар. науч. семинара им. Д.Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей», Пермь, 26-30 января 2015 г. – С. 153-155.
139. *Нафикова, А.Р.* К задаче диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями / А.Р. Нафикова // Сб. науч. материалов XVI Уральской молодежной науч. шк. по геофизике, Пермь, 16-20 марта 2015 г. – С. 231-235.
140. *Нафикова, А.Р.* Программный комплекс исследования процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-анизотропных слоистых средах с включениями / А.Р. Нафикова // Сб. материалов II Всерос. науч.-метод. конф. «Современные проблемы геометрии и ее приложений», Стерлитамак, 28-29 марта 2015 г. – С. 182-186.

Приложение А. Свидетельства о регистрации программных средств комплекса



Рис. А.1. Свидетельство о регистрации программного средства «Функция нормального поля радона»



Рис. А.2. Свидетельство о регистрации программного средства «Функция Грина»