

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



ЛУТ АЛЕКСАНДР ВАЛЕРЬЕВИЧ

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ  
ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРА ВНЕШНЕГО  
ВОЗДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
УПРУГОСТИ, АКУСТИКИ И ГИДРОДИНАМИКИ**

1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д-р физ.-мат. наук, проф.  
А.А. Замышляева

Челябинск – 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>4</b>
<b>1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОЦЕССОВ УПРУГОСТИ, АКУСТИКИ И ГИДРОДИНАМИКИ</b>	<b>21</b>
1.1 Информационно-логическая модель исследования обратных задач для математических моделей . . . . .	21
1.2 Аналитические методы исследования математических моделей, на основе теории уравнений соболевского типа высокого порядка	26
1.3 Математическая модель Буссинеска – Лява и ее разрешимость . .	28
1.4 Математическая модель продольных колебаний в конструкции из стержней и ее разрешимость . . . . .	33
1.5 Математическая модель ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле и ее разрешимость . . . . .	37
<b>2 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БУССИНЕСКА – ЛЯВА</b>	<b>42</b>
2.1 Метод аналитического исследования математической модели Буссинеска – Лява на основе теории относительно полиномиально ограниченных пучков операторов . . . . .	42
2.2 Аналитическое исследование восстановления параметра внешней нагрузки . . . . .	54
2.3 Алгоритм численного исследования математической модели Буссинеска – Лява с восстановлением параметра внешних сил . .	58
2.4 Описание программного комплекса для моделирования продольных колебаний в тонком упругом стержне с восстановлением коэффициента внешней нагрузки на стержень	62
2.5 Результаты обработки информации для моделирования продольных колебаний в стержне и восстановления параметра внешних сил . . . . .	70
2.6 Верификация результатов по восстановлению параметра внешнего воздействия для математической модели Буссинеска – Лява в стержне . . . . .	76
<b>3 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БУССИНЕСКА – ЛЯВА В КОНСТРУКЦИИ ИЗ ТОНКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ</b>	<b>82</b>
3.1 Метод аналитического исследования математической модели в конструкции из стержней на основе относительно спектрально ограниченных операторов . . . . .	82

3.2	Аналитическое исследование восстановления параметра внешней нагрузки на конструкцию из стержней . . . . .	92
3.3	Алгоритм численного исследования математической модели Буссинеска – Лява в конструкции из тонких упругих стержней с восстановлением параметра внешних сил . . . . .	96
3.4	Описание программного комплекса для моделирования продольных колебаний в элементах конструкций из двух тонких упругих стержней с восстановлением коэффициента внешней нагрузки . . . . .	99
3.5	Результаты обработки информации для моделирования продольных колебаний в конструкции из тонких упругих стержней и восстановления параметра внешних сил . . . . .	104
3.6	Верификация результатов по восстановлению параметра внешнего воздействия для математической модели Буссинеска – Лява в конструкции из стержней . . . . .	112
<b>4</b>	<b>ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ</b>	<b>118</b>
4.1	Метод аналитического исследования математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле на основе теории относительно полиномиально ограниченных пучков операторов . . . . .	118
4.2	Аналитическое исследование восстановления параметра внешнего воздействия магнитного поля на математическую модель ионно-звуковых волн в плазме . . . . .	130
4.3	Алгоритм численного исследования математической модели ионно-звуковых волн в плазме с восстановлением параметра внешнего воздействия магнитного поля . . . . .	134
4.4	Описание программы для моделирования ионно-звуковых волн в плазме с восстановлением коэффициента внешнего воздействия магнитного поля . . . . .	138
4.5	Результаты обработки информации для моделирования ионно-звуковых волн в плазме и восстановления параметра силы внешнего воздействия магнитного поля . . . . .	142
	<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	<b>149</b>
	<b>СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ</b>	<b>152</b>
	<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b>	<b>153</b>
	<b>ПРИЛОЖЕНИЯ</b>	<b>169</b>

## ВВЕДЕНИЕ

### Актуальность темы исследования

Большое число теоретических и прикладных работ, связанных с обработкой и анализом информации, посвящены построению и использованию алгоритмов и методов математического моделирования. Системный анализ и математическое моделирование позволяет изучить объекты тогда, когда натурные эксперименты либо ресурсозатратны, либо небезопасны, либо вообще невозможны. При этом в большинстве работ, как правило, изучается сам процесс или явление, но зачастую этого недостаточно, и требуется восстановление параметра, а иногда и несколько параметров, характеризующих объект исследования. Такие математические модели сводятся к изучению обратных задач, а полученная информация используется специалистами для определения дальнейшего поведения объекта в различных условиях или определения параметров, характеризующих исследуемую среду. Следовательно, получаемая информация будет очень важна в различных областях знаний.

В данной работе рассматриваются обратные задачи по восстановлению параметра внешнего воздействия для трех математических моделей упругости, акустики и гидродинамики. Эти математические модели редуцируются к классу уравнений соболевского типа, которые в настоящее время переживают период интенсивного роста, насчитывая огромное количество публикаций в данной области [4, 9, 16, 20, 31, 45, 48, 56, 70, 71, 84, 102, 103]. Формируются научные направления, в рамках которых создаются и развиваются научные школы. Во многих имеющихся работах получены результаты для «прямых задач», а «обратные задачи», в силу своей более сложной структуры, являются менее исследованными, что приводит к изучению следующих обратных задач.

### Постановка изучаемых обратных задач

**1. Математическая модель Буссинеска – Лява.** В цилиндре  $\Omega \times [0; T]$ , где  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , рассмотрим следующую задачу:

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')v_t + \beta(\Delta - \lambda'')v + qf, \quad (0.0.1)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (0.0.2)$$

$$v(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (0.0.3)$$

$$\int_{\Omega} v(x, t)K(x)dx = \Phi(t). \quad (0.0.4)$$

Данная математическая модель в зависимости от области  $\Omega$  может описывать различные процессы и явления: процессы распространения волн на мелководье, продольные колебания в тонком упругом стержне при внешней нагрузке с учетом инерции, волновые процессы в плазме и некоторые другие физические процессы. Обратной задачей для математической модели Буссинеска – Лява назовем задачу отыскания пары функций  $q(t)$  и  $v(x, t)$  из (0.0.1)–(0.0.4). Искомые функции  $q(t)$  и  $v(x, t)$  описывают коэффициент внешнего воздействия и происходящий процесс в данной среде, соответственно. Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$  уравнения (0.0.1) задают параметры исследуемой среды, например, коэффициент Пуассона, модуль Юнга, плотность материала и радиус инерции относительно центра тяжести или число Бонда, глубину и гравитационную постоянную. Условия (0.0.2) и (0.0.3) задают начальные и граничные значения для нахождения искомого процесса. Условие переопределения (0.0.4) задает некоторое усреднение функции  $v(x, t)$  на всей рассматриваемой области  $\Omega$ . Исследование обратной задачи для этой математической модели поможет избежать негативных последствий «абразии» на прибрежные мелководные порты.

**2. Математическая модель продольных колебаний в конструкции из стержней.** Пусть дан конечный связный ориентированный граф  $G = G(\mathfrak{D}, \mathfrak{E})$ , где  $\mathfrak{D} = \{V_i\}$  – множество вершин и  $\mathfrak{E} = \{E_j\}$  – множество ребер. Заданы  $l_j, d_j \in \mathbb{R}_+$  – длина и площадь поперечного сечения ребра  $E_j$ , соответственно. Рассмотрим следующую задачу:

$$(\alpha - \Delta)v_{tt} = \beta(\Delta - \gamma)v + qf, \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_j, \dots), \quad (0.0.5)$$

$$\sum_{j:E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j v_{jx}(0, t) - \sum_{m:E_m \in E^\omega(V_i)} d_m v_{mx}(l_m, t) = 0, \quad (0.0.6)$$

$$v_j(0, t) = v_k(0, t) = v_m(l_m, t) = v_n(l_n, t), \quad (0.0.7)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (0.0.8)$$

$$\langle v(x, t), K(x) \rangle = \Phi(t), \quad (0.0.9)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение в  $L_2(G) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$ , а через  $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$  обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине  $V_i$ . Данная математическая модель описывает продольные колебания в конструкции из тонких упругих стержней, представленной в виде графа  $G$ , при внешней нагрузке с учетом инерции. Обратной задачей для математической модели продольных колебаний в конструкции из стержней назовем задачу отыскания пары функции  $v(x, t)$  и  $q(t)$  из (0.0.5)–(0.0.9). Искомые функции  $q(t)$  и  $v(x, t)$  описывают внешнее воздействие на элементы конструкции и продольные колебания в точке  $x$  в момент времени  $t$  на  $j$ -ом элементе конструкции, соответственно. Коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma$  уравнения (0.0.5) задают параметры, описывающие свойства материала, из которого сделаны элементы конструкции. Условия (0.0.6) и (0.0.7) задают баланс потока и непрерывность решения в каждой вершине графа, соответственно. Условие (0.0.8) задает начальное положение и начальную скорость продольных колебаний в каждом элементе конструкции. Условие переопределения (0.0.9) задает некоторое усреднение вектор-функции  $v(x, t)$  на всем графе  $G$ . Примерами конструкций, описываемых этой математической моделью, могут быть волноводы, которые часто используются для генерации, передачи и усиления механических колебаний, например, в акустических преобразователях [65], а также «фермы» – несущие конструкции сооружений, механизмов и машин состоящие из стержней [55].

**3. Математическая модель ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.** В цилиндре  $\Omega \times [0; T]$ , при  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , рассмотрим следующую задачу:

$$(\Delta - \alpha)v_{tttt} + \beta(\Delta - \gamma)v_{tt} + \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + qf = 0, \quad (0.0.10)$$

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \\ v_{tt}(x, 0) &= v_2(x), \quad v_{ttt}(x, 0) = v_3(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (0.0.11)$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad (0.0.12)$$

$$\int_{\Omega} v(x, t)K(x)dx = \Phi(t). \quad (0.0.13)$$

Данная математическая модель описывает ионно-звуковые волны в плазме во внешнем магнитном поле. Обратной задачей для математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле назовем задачу отыскания функций  $q(t)$  и  $v(x, t)$  из (0.0.10)–(0.0.13). Искомые функции  $q(t)$  и  $v(x, t)$  описывают воздействие внешнего магнитного поля и обобщенный потенциал электрического поля, соответственно. Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$  уравнения (0.0.10) связывают такие величины как радиус Дебая, ионную гирочастоту и частоту Ленгмюра. Условия (0.0.11) и (0.0.12) задают начальные и граничные значения для нахождения обобщенного потенциала электрического поля. Условие переопределения (0.0.13) задает некоторое усреднение функции  $v(x, t)$  на всей рассматриваемой области  $\Omega$ . Изучение обратной задачи для этой математической модели позволит проводить мониторинг объектов, находящихся в околоземной космической плазме.

Исследуемые в работе математические модели удастся редуцировать к задаче Коши для одного класса уравнений соболевского вида высокого порядка при  $t \in [0, T]$  с условиями переопределения:

$$Av^{(n)}(t) = B_{n-1}v^{(n-1)}(t) + \dots + B_1v'(t) + B_0v(t) + \chi(t)q(t) + f(t), \quad (0.0.14)$$

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1, \quad \dots, \quad v^{(n-1)}(0) = v_{n-1}, \quad (0.0.15)$$

$$Cv(t) = \Psi(t), \quad (0.0.16)$$

где операторы  $A, B_0, B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ , то есть линейные и непрерывные операторы, определенные на  $\mathcal{U}$  и действующие в  $\mathcal{F}$ ,  $\ker A \neq \{0\}$ ,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ ,  $\chi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{F})$ , заданы функции  $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$ , а  $\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{Y}$  – банаховы пространства. Обратная задача заключается в отыскании из уравнений (0.0.14)–(0.0.16) пары функций  $v(t) \in C^n([0, T]; \mathcal{U})$  и  $q(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ .

Уравнение вида (0.0.14) относится к уравнению соболевского типа, потому что оператор  $A$  может быть вырожденным. Первые результаты исследования уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, впервые были опубликованы А. Пуанкаре в 1885 году [88]. Затем такие уравнения изучались в различных работах математиков, механиков и физиков. В большинстве случаев, эти исследования связывали с изучением уравнений гидродинамики. Первый,

кто рассмотрел уравнение

$$\Delta u_{tt} + \omega^2 u_{zz} = 0, \quad (0.0.17)$$

моделирующее малые колебания вращающейся жидкости, был С. Л. Соболев в 1954 году [57]. Позднее, такие уравнения, которые не разрешены относительно старшей производной по времени, стали называть «уравнениями соболевского типа».

Абстрактные дифференциальные операторные уравнения вида

$$L\dot{u} = Mu$$

первыми начали изучать М. И. Вишик в 1956 году [12], а С. Г. Крейн и его ученики – в 70-х годах двадцатого века [28, 35].

Отметим, что в данной работе будут рассмотрены три математические модели, построенные на уравнении (0.0.14), но полученные результаты могут быть применены и к другим математическим моделям соболевского типа высокого порядка, в частности, малых колебаний вращающейся вязкой жидкости, гравитационно-гироскопических и внутренних волн, звуковых волн в смектиках. Таким образом, разработка новых аналитических и численных методов и алгоритмов исследования обратных задач для математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме является актуальной.

### **Степень разработанности**

Впервые изучаемые модели были представлены в работах А. Лява [39], А. Г. Свешникова, А. Б. Альшина, М. О. Корпусова и Ю. Д. Плетнера [53]. В дальнейшем стали проводиться исследования «прямых» задач с различными начальными и граничными условиями [20–22, 24, 26, 61, 104, 105, 108], а исследование обратных задач для данных моделей ранее не проводилось.

Обратные задачи рассматривались для невырожденных абстрактных дифференциальных уравнений в работах А. И. Прилепко и Д. Г. Орловского [89] и для уравнений соболевского типа первого порядка А. В. Уразаевой, Н. Д. Ивановой и А. А. Баязитовой [4, 64]. Обратные задачи изучались и другими авторами для математических моделей, отличных от рассматриваемых в данной



диссертационной работе, с различными условиями переопределения [1–3, 9, 14, 15, 19, 29–31, 33, 34, 41–43, 46, 48–52, 58, 59, 67–70, 79, 82, 84, 86, 89, 93, 96], и это лишь некоторые из них. Среди этих работ стоит отметить работы Я. Т. Мегралиева [42, 43, 84], А. И. Кожанова [33, 34], С. Г. Пяткова [50] и его ученика С. Н. Шергина [67] потому, что они наиболее близки к теме исследования, а их авторы и в настоящее время вносят новый вклад в развитие обратных задач. Приведем краткие описания работ из представленного списка по изучению обратных задач. Две задачи нахождения пары функций  $u(x, t)$  и  $q(t)$  для уравнений

$$u_{tt} - \alpha \Delta u_t + \Delta^2 u + q(t)u = f(x, t) \quad \text{и} \quad u_{tt} - \alpha \Delta u_t + \Delta^2 u + q(t)u_t = f(x, t)$$

были изучены А. И. Кожановым и Л. А. Телешевой в [33] с помощью метода срезов и метода регуляризации. Исследование М. Ю. Кокурина посвящено установлению единственности решения коэффициентной обратной задачи волновой томографии в неперепределенной постановке [79]. А. Д. Сариевым, А. Т. Шыганаковой и С. Д. Сариевым изучались вопросы непрерывности решения обратных задач для уравнения переноса в многозонной области, в которых находился коэффициент рассеяния и интенсивность излучения [51]. Исследование М. Б. Моисеева посвящено нахождению функции электромагнитного поля по известной функции спектра, имеющей конечное число нулей на интервале частот [86]. В работе Х. М. Гамзаева рассматривался процесс нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе с проницаемой стенкой, где дополнительно находился коэффициент проницаемости этой стенки [14]. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором Римана–Лиувилля и Капуто в прямоугольной области изучена Б. И. Исломовым и У. Ш. Убайдуллаевым [29]. Критерий единственности решения обратной задачи включающего поиск элементов правых частей для уравнения Лаврентьева – Бицадзе установлен в [41]. Кроме того, обратные задачи были изучены для уравнений теплопроводности А. Р. Зайнулловым и В. П. Танана [19, 58], а также С. С. Павловым для многомерного волнового уравнения второго порядка [46]. Также обратные задачи были рассмотрены Г. А. Свиридуюком, Н. Ф. Валеевым, В. А. Юрко, А. А. Касымалиевой, А. А. Баязитовой и другими [9, 31, 45, 48, 54, 70].

Одной из рассматриваемых моделей в данной работе является модель рас-

пространения ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле. Можно отметить работы в этой области А. А. Замышляевой [104, 105], К. Ю. Вагина и Т. В. Мамонтовой [6–8], М. В. Кузелева и Е. А. Хапаевой [36] и другие [17, 18, 44, 47, 63]. Перечислим краткие сведения об исследованиях в этих работах. Изучению наклонных ионно-звуковых волн в плазме, где ионы движутся однонаправленно, посвящена работа А. Е. Дубинова и И. Н. Китаева [18]. Численно-аналитическое исследование А. А. Фролова и Е. В. Чижонкова показало влияние внешнего магнитного поля на плоские релятивистские нелинейные колебания и волны [63], а численное исследование В. Г. Мизоновой предлагает матричный алгоритм для нахождения решения задачи распространения электромагнитной волны в плоскостойкой неоднородной магнитоактивной плазме [44]. Работы К. Ю. Вагина, Т. В. Мамонтовой и С. А. Урюпина приводят дисперсионные свойства продольных электронных волн в плазме, в которой распределение фотоэлектронов имеет несколько обособленных пиков [6, 8]. Работа В. Г. Дорофеевко, В. Б. Красовицкого, В. А. Турикова показала, что сильное внешнее магнитное поле оказывает большое влияние на эффективность ввода энергии лазерного излучения в плазму [17]. Работы О. Н. Цыпленковой и А. А. Замышляевой содержат результаты как аналитического, так и численного исследования оптимального управления решениями начально-конечной задачи для модели линейных волн в плазме [104, 105], не касаясь вопросов решения обратных задач.

Представленная диссертационная работа опирается на результаты исследований уравнений соболевского типа, разработанные Г. А. Свиридюком и его учениками [54, 77, 97, 102], в частности, А. А. Замышляевой об исследовании уравнений соболевского типа [20, 22–24, 27, 101, 103–109, 111, 113, 118, 119, 121] и математических моделей высокого порядка [21, 26]. Одно из первых исследований уравнений соболевского типа проведено в [94]. Изучение уравнений соболевского типа проводится многими исследователями [5, 27, 32, 34, 40, 54, 61, 66, 73, 75, 76, 78, 80, 81, 90, 91, 94, 95, 97, 98, 100–102, 106–109, 111, 119, 121], т. к. они находят свое применение в различных областях. Например, в математическом моделировании природных процессов и явлений [27, 98, 106] таких, как моделирова-

ние колебаний вращающейся вязкой жидкости; моделирование гравитационно-гироскопических и внутренних волн; моделирование звуковых волн в смектиках; моделирование продольных колебаний в стержне и конструкции из них. Уравнения соболевского типа вида (0.0.14) в случае первого порядка производной по времени, на данный момент, хорошо изучены, что подтверждают работы Г. А. Свиридюка, А. Фавини, Н. А. Манаковой и других авторов [34, 40, 54, 78, 92, 97]. Кроме этого, появляются работы, посвященные изучению уравнений второго [111], а также более высокого порядка [5, 26, 27, 33, 66, 81, 101–103]. Приведем описание некоторых работ, посвященных уравнениям соболевского типа. Статья Н. А. Манаковой посвящена изучению оптимального управления решениями полулинейных моделей соболевского типа  $s$ -монотонным,  $p$ -коэрцитивным оператором [40]. М. О. Корпусов в [80] рассмотрел задачу Коши для класса нелинейных уравнений соболевского типа и показал что для них существует критический показатель, от которого локальное слабое решение либо существует и единственно, либо не существует. В статье Я. Банасяка, Н. А. Манаковой, Г. А. Свиридюка [73] приведены достаточные условия существования позитивных решений как задачи Шоуолтера – Сидорова, так и задачи Коши для абстрактного линейного уравнения соболевского типа первого порядка ( $n = 1$ ). Работа [75] М. Х. Бештокова посвящена начально-краевым задачам для уравнения соболевского типа с дробной производной Герасимова – Капуто с эффектом памяти. В [76] Е. В. Бычковым рассматривается начально-краевая задача для модифицированного уравнения Буссинеска, описывающего распространение волн на мелкой воде при условии сохранения массы в слое и с учетом капиллярных эффектов. Есть и совсем недавние работы [74, 85, 119], посвященные приложениям теории уравнений соболевского типа.

В работе используется теория относительно ограниченные операторов, но есть и работы посвященные случаю относительно секториальных [5, 66, 73, 77, 97] и относительно радиальных [78, 83, 91] операторов. Например, на основе детерминированных результатов, полученных в [78] А. Фавини и его соавторами, было построено решение стохастического уравнения соболевского типа первого порядка с  $(L, p)$ -радиальным оператором  $M$  в пространствах случайных про-

цессов. В дополнение следует отметить, что существуют системы леонтьевского типа [92], которые можно рассматривать в рамках теории уравнений соболевского типа.

Разработка алгоритмов обработки информации для нахождения приближенного решения «прямых» задач для математических моделей разного порядка уже проводилось [10, 12, 24, 30, 49, 59, 71, 75, 76, 85, 91, 98], неоднократно используя в своей основе большое количество методов. В одних для нахождения приближенного решения использовался метод Галеркина [76, 85], в других – метод последовательных приближений, в-третьих – метод конечных элементов и конечных разностей [67]. Например, траектории численных решений задачи Шоуолтера – Сидорова для стохастического варианта уравнения Гинзбурга – Ландау представлены Д. Е. Шафрановым [91]. Также, проводились численные исследования и для обратных задач [1, 10, 30, 49, 71, 109, 114] в невырожденном случае. В [30] Е. А. Калинина представила различные подходы при решении обратной задачи для двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии, также приводятся результаты вычислительных экспериментов, реализованных в среде Matlab. Численное исследование ретроспективной обратной задачи конвекции-диффузии привели В. И. Васильев и О. А. Тихонова [10]. Работа [1] Д. В. Аникиева, Б. М. Каштана, А. С. Благовещенского и В. А. Мулдера предлагает один из эффективных методов решения математической динамической обратной задачи сейсмики на основе интегральных уравнений Гельфанда – Левитана.

Стоит также выделить работы [31, 42, 43, 64, 67, 84, 103], в которых проводились исследования, схожие с данной диссертационной работой, но каждая из них имела либо отличие в рассматриваемых моделях, либо отличались подходы к исследованию. Например, В. Е. Федоров, А. В. Уразаева и Н. Д. Иванова изучали обратную задачу по восстановлению коэффициента  $q(t)$  лишь для уравнения соболевского типа первого порядка [64]. С. Н. Шергин рассматривал обратные задачи для математических моделей первого и второго порядка, в частности, математическую модель Буссинеска – Лява, но без учета вырожденности оператора  $A$  [67]. А. А. Баязитовой были получены результаты исследо-

вания обратной задачи для математической модели Хоффа по восстановлению параметров, характеризующих свойства материала. Из всего сказанного можно сделать вывод, что «схожих» исследований проводилось большое количество, рассматриваемые в работе обратные задачи для трех математических моделей ранее не исследовались.

### **Цель и задачи**

Основная **цель** диссертационной работы – разработка аналитических и численных методов исследования обратных задач для математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле, включающего обработку информации по восстановлению параметров внешнего воздействия, с построением алгоритмов и реализацией комплекса программ.

Для достижения выше указанной цели необходимо последовательно выполнить следующие **задачи**:

1. Провести структурный системный анализ предметной области обратных задач для математического моделирования с применением информационно-логического метода.

2. Разработать и применить аналитические методы исследования математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме, включающего нахождение решения и восстановление параметра внешнего воздействия.

3. Разработать численные методы по нахождению приближенного решения, включающего восстановление параметра внешнего воздействия, для математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.

4. Создать комплекс программ по нахождению приближенного решения, включающего восстановление параметра внешнего воздействия для математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и по обработке информации для математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.

5. Провести вычислительные эксперименты с обработкой информации

для нахождения приближенного решения, включающего восстановление параметра внешнего воздействия, для математических моделей Буссинеска – Лява в стержне, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.

6. Верифицировать, полученные в разработанных комплексах программ, результаты обработки информации восстанавливающей параметр внешнего воздействия методами имитационного моделирования.

### **Научная новизна**

Впервые проведено аналитическое исследование обратной задачи для рассматриваемых математических моделей на основе изучения обратных задач для абстрактного уравнения соболевского типа высокого порядка. Также, разработан новый численный метод восстановления параметра внешнего воздействия для трех математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме на основе теории полиномиально ограниченных пучков операторов, проекционного метода и метода последовательных приближений.

*В области математического моделирования:* получены новые аналитические методы исследования обратной задачи для трех математических моделей: Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней, ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.

*В области численных методов:* разработаны новые алгоритмы численных методов нахождения приближенного решения обратных задач для трех математических моделей: Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.

*В области комплексов программ:* разработаны комплексы программ по нахождению приближенного решения, включающего восстановление параметра внешнего воздействия, для математических моделей: Буссинеска – Лява в стержне, продольных колебаний в конструкции из стержней, по нахождению потенциала электрического поля и восстановления потенциала магнитного поля в математической модели ионно-звуковых волн в плазме.

*В области системного анализа:* построена информационно-логическая

модель исследования обратных задач для математических моделей высокого порядка с целью проектирования исследования, формализации задач и представления о проблематике исследования; проведена обработка информации по восстановлению параметров внешнего воздействия на основе вычислительных экспериментов по восстановлению параметра уравнения для трех исследуемых математических моделей.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Данное исследование дополнит уже имеющиеся **теоретические** результаты: по исследованию вопросов однозначной разрешимости обратных задач для математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней, ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле, дополняющих теорию обратных задач; по получению достаточных условий существования и единственности решения обратной задачи для уравнений соболевского типа высокого порядка, дополняющих теорию уравнений соболевского типа и относительно полиномиально ограниченных пучков операторов; по построению новых конструктивных схем и алгоритмов, которые могут быть использованы при построении численных методов нахождения решения обратных задач для уравнений соболевского типа; по системному анализу предметной области обратных задач для математических моделей соболевского типа высокого порядка.

**Практическая значимость** диссертационной работы обусловлена: построением новых численных методов обработки информации, нахождения решения обратных задач и разработкой комплексов программ для математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней, ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле, применимых для решения актуальных практических задач. Например, результаты исследования математической модели Буссинеска – Лява применимы для описания распространения волн на мелкой воде, вблизи портов, с целью предотвращения негативного фактора – «абразия» [62]. Изучение ионно-звуковых волн, порождаемых объектами, которые движутся в околоземной космической плазме, позволит проводить мониторинг их местоположения для предотвращения

негативных последствий [87].

Кроме этого, разработанные методы аналитического и численного исследования могут помочь в дальнейшем в изучении других математических моделей в различных областях, например, в моделировании возмущений свободной поверхности несжимаемой жидкости, в предположении потенциальности движения и сохранение массы в слое [99]; моделировании процессов в плазме и смектиках [37]; волновых процессов [60]; продольных колебаний в упругом стержне или их конструкции с учетом других условий или другом состоянии конструкции [22–25, 60, 107, 111]; при решении различных технических задач [32]; при моделировании возможных процессов и явлений происходящих в природе [54, 111]; в биологии [72].

### **Методология и методы исследования**

Основополагающими в работе являются методы математического моделирования и системного анализа. Методы системного анализа и построенная информационно-логическая модель позволили определить объекты исследования, выбрать используемые методы и алгоритмы для формализации задач и представления о проблематике исследования. Метода математического моделирования позволили изучить процессы продольных колебаний в стержне и конструкции из них, распространения ионно-звуковых волн в плазме, а также восстановить параметры внешнего воздействия на эти процессы.

При исследовании обратной задачи для исследуемых уравнений предполагается, что пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен, а оператор  $A$  может быть вырожден. Этот факт позволяет, используя методы относительной полиномиальной ограниченности пучков, представленные в работе [21, 102], и метод фазового пространства, редуцировать исходную задачу (0.0.14)–(0.0.16) к двум эквивалентным (в совокупности) задачам: регулярной и сингулярной. Сначала рассматривается регулярная задача, для исследования которой используется метод последовательных приближений. Затем, применяя теорию, описанную в работе [21], получен результат для сингулярной задачи. Таким образом, объединяя результаты регулярного и сингулярного аналитического исследования, были получены условия для существования и единственности решения задачи



(0.0.14)–(0.0.16).

В ходе исследования обратных задач для трех математических моделей (0.0.1)–(0.0.13), а именно для восстановления параметра, отвечающего за внешнее воздействие  $q(t)$ , был использован метод последовательных приближений, который позволил обработать входящую информацию и вычислить каждое последующее  $[i + 1]$  приближение искомой функции через результат, полученный на предыдущем  $[i]$  приближении. Последовательные приближения (при проведении численного исследования) выполнялись до тех пор, пока норма разности двух последовательных приближений превышала заранее заданное число. Стоит сказать, скорость сходимости зависит от правой части уравнения и начального приближения [11], следовательно выбор начального приближения имеет значение, но не принципиальное.

### Краткое содержание диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, содержащего 114 наименований, и трех приложений. Во **введении** обоснована актуальность, приведен анализ литературы, поставлены цель и задачи, сформулированы положения, выносимые на защиту, указана степень достоверности и апробация результатов диссертационной работы. В **первой** главе приведен системный анализ предметной области с применением метода информационно-логического моделирования; содержатся предварительные сведения, которые включают: вспомогательные аналитические методы полученные в работе [21]; выводы математических моделей Буссинеска – Лява (0.0.1)–(0.0.4), продольных колебаний в конструкции из стержней (0.0.5)–(0.0.9) и ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле (0.0.10)–(0.0.13) из физических законов; результаты работ [21, 26, 102] в которых получен результат исследования «прямых» задач (без восстановления параметра  $q(t)$ ) для этих моделей. Во **второй** главе приведены все этапы исследования математической модели Буссинеска – Лява (0.0.1)–(0.0.4). В **третьей** главе приведены все этапы исследования математической модели продольных колебаний в конструкции из стержней (0.0.5)–(0.0.9). В **четвертой** главе приведены все этапы исследования математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном

поле (0.0.10)–(0.0.13). В **заключении** излагаются основные выводы, приводятся перспективы дальнейших разработок в данной области и возможные приложения к практическим задачам.

### **Положения, выносимые на защиту**

Согласно специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ на защиту выносятся:

– *в рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.* Аналитические методы исследования обратной задачи для трех математических моделей: Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней, ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле;

– *в рамках разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.* Алгоритмы численных методов для нахождения приближенного решения и восстановления параметра внешнего воздействия для трех математических моделей: Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней, ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле с проведением вычислительных экспериментов и определением точности нахождения приближенного решения;

– *в рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.* Программа для моделирования продольных колебаний в элементах конструкции из тонких упругих стержней и программные комплексы для моделирования продольных колебаний в тонком упругом стержне с возможностью восстановления внешней нагрузки на стержень, для моделирования продольных колебаний в элементах конструкций из двух тонких упругих стержней с восстановлением коэффициента внешней нагрузки.

Согласно специальности 2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации на защиту выносятся:

– *в рамках формализации и постановки задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.*

Информационно-логическая модель предметной области исследования обратных задач для математических моделей соболевского типа высокого порядка;

— *в рамках разработки специального математического и программного обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.* Программа для обработки информации при моделировании ионно-звуковых волн в плазме с восстановлением параметра воздействия внешнего магнитного поля.

### **Степень достоверности**

Результаты, представленные в работе, подтверждаются строгими математическими доказательствами, согласованностью всех проводимых вычислительных экспериментов, корректным использованием методов математического моделирования, а также согласованы и не противоречат исследованиям других авторов [26, 67]. Выносимые на защиту результаты были опубликованы и получены автором, также имеют окончательный и исчерпывающий характер.

### **Апробация результатов**

По всем результатам работы были представлены **доклады** на различных конференциях и семинарах [108, 112, 116, 117, 122, 123]: стендовый доклад на 3-й научной выставке-конференции научно технических и творческих работ студентов Южно-Уральского государственного университета [108]; доклады на семинарах «Молодых ученых и талантливой молодежи» ЮУрГУ в период с 2017 по 2021 гг.; участие в 11, 12 и 13-й научных конференциях аспирантов и докторантов ЮУрГУ с докладами «Обратная задача соболевского типа второго порядка» в 2019 году, «Решение обратной задачи для математической модели Буссинеска – Лява» в 2020 году, «Исследование обратных задач для уравнений соболевского типа второго порядка» в 2021 году; очное участие в работе международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа», состоявшаяся в период с 16 по 19 октября 2019 года в г. Уфа, Башкирский государственный университет [112]; участие в международной конференции «Operator Semigroups of Operators (OPSO)» с 5 по 9 апреля 2021 года и с 14 по 18 февраля 2022 года в г. Нижний Новгород, НИУ ВШЭ [116, 122]. Кроме того, результаты работы включены в список основных научных и научно-технических

разработок ЮУрГУ, полученных в 2020 и 2021 годах [117, 123].

### **Личный вклад автора**

В диссертацию включены только опубликованные и полученные лично А. В. Лутом результаты. Они не затрагивают интересы соавторов в представленных публикациях. Научному руководителю А. А. Замышляевой принадлежит общая постановка задачи исследования.

### **Публикации**

Результаты диссертационного исследования представлены в двенадцати печатных изданиях [109–111, 113–115, 118–121, 124, 125], из которых:

- 1) шесть входят в перечень ВАК [109, 111, 114, 118, 119, 124];
- 2) пять содержатся в системах цитирования Web of Science и Scopus [109, 111, 113, 118, 121];
- 3) четыре свидетельства о регистрации программ ЭВМ [110, 115, 120, 125], которые представлены в приложениях А–Г.

### **Благодарности**

Автор выражает искреннюю и глубокую благодарность своему научному руководителю Замышляевой Алене Александровне за помощь на всех этапах выполнения диссертации; коллективам кафедр уравнений математической физики, математического и компьютерного моделирования, прикладной математики и программирования Южно-Уральского государственного университета за плодотворные обсуждения и конструктивную критику; своим родным, близким за понимание и поддержку.

### **Финансовая поддержка**

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90137.

# 1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОЦЕССОВ УПРУГОСТИ, АКУСТИКИ И ГИДРОДИНАМИКИ

Параграф 1.1 содержит результат системного анализа предметной области с применением метода информационно-логического моделирования. В параграфах 1.2–1.5 приведены вспомогательные сведения и методы, полученные в работах [21, 26], на которые опирается данное исследование рассматриваемых трех математических моделей. Кроме этого, в параграфах 1.3–1.5 содержатся выводы исследуемых математических моделей, полученные ранее [39] и [53].

## 1.1 Информационно-логическая модель исследования обратных задач для математических моделей

На данный момент, проведено большое количество аналитических и численных исследований различных моделей математической физики. Следовательно, требуется определить место данного исследования, например, посредством использования метода информационно-логического моделирования. Данный метод представляет объекты информации, их атрибуты и отношения между ними.

Сначала построим контекстную диаграмму, представленную на рисунке 1.1.1. Данная диаграмма состоит из 7-ми этапов и показывает весь процесс работы с математической моделью. На первом этапе (рисунок 1.1.2) происходит наблюдение за процессом или объектом, которое позволит начать работу с ним. На втором (рисунок 1.1.3), по наблюдению, составляется соответствующая математическая модель. На третьем (рисунок 1.1.4), задается соответствующая обратная задача. На четвертом (рисунок 1.1.5), применяются или разрабатываются математические методы для исследования математической модели. На пятом (рисунок 1.1.6), разрабатывается и применяются программы/комплексы программ для ЭВМ. На шестом, полученные результаты подвергаются анализу, по которому строятся качественные выводы. На седьмом, даются рекомендации по дальнейшему исследованию данной модели. Стоит отметить, что на каждом из этапов со 2-го по 6-ой необходимо проверять адекватность построения,

исследования и при необходимости внесение корректировок, для устранения недостатков.

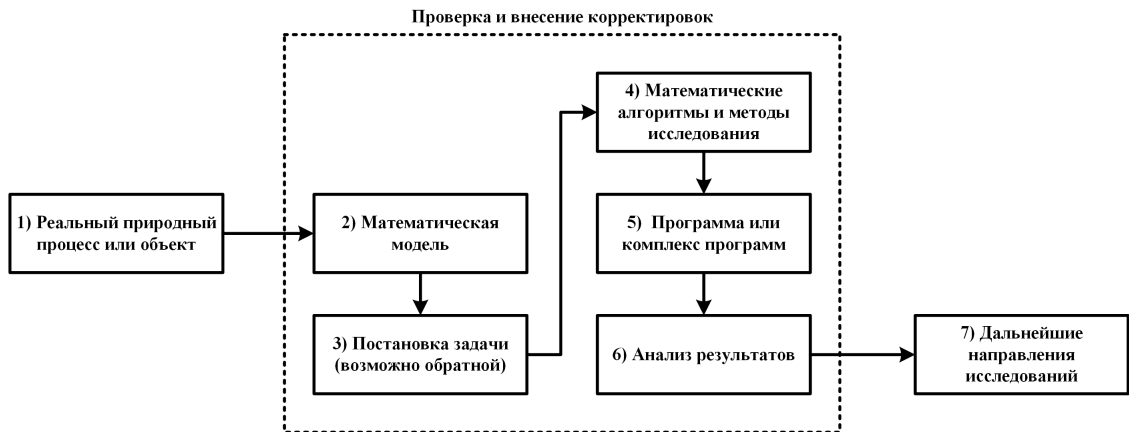


Рисунок 1.1.1 – Контекстная диаграмма процесса работы с задачами для математических моделей

Проведем функциональную декомпозицию описанного процесса работы, которая представлена на рисунках 1.1.2 – 1.1.6. На них пунктирный контур показывает не рассматриваемые этапы в работе.

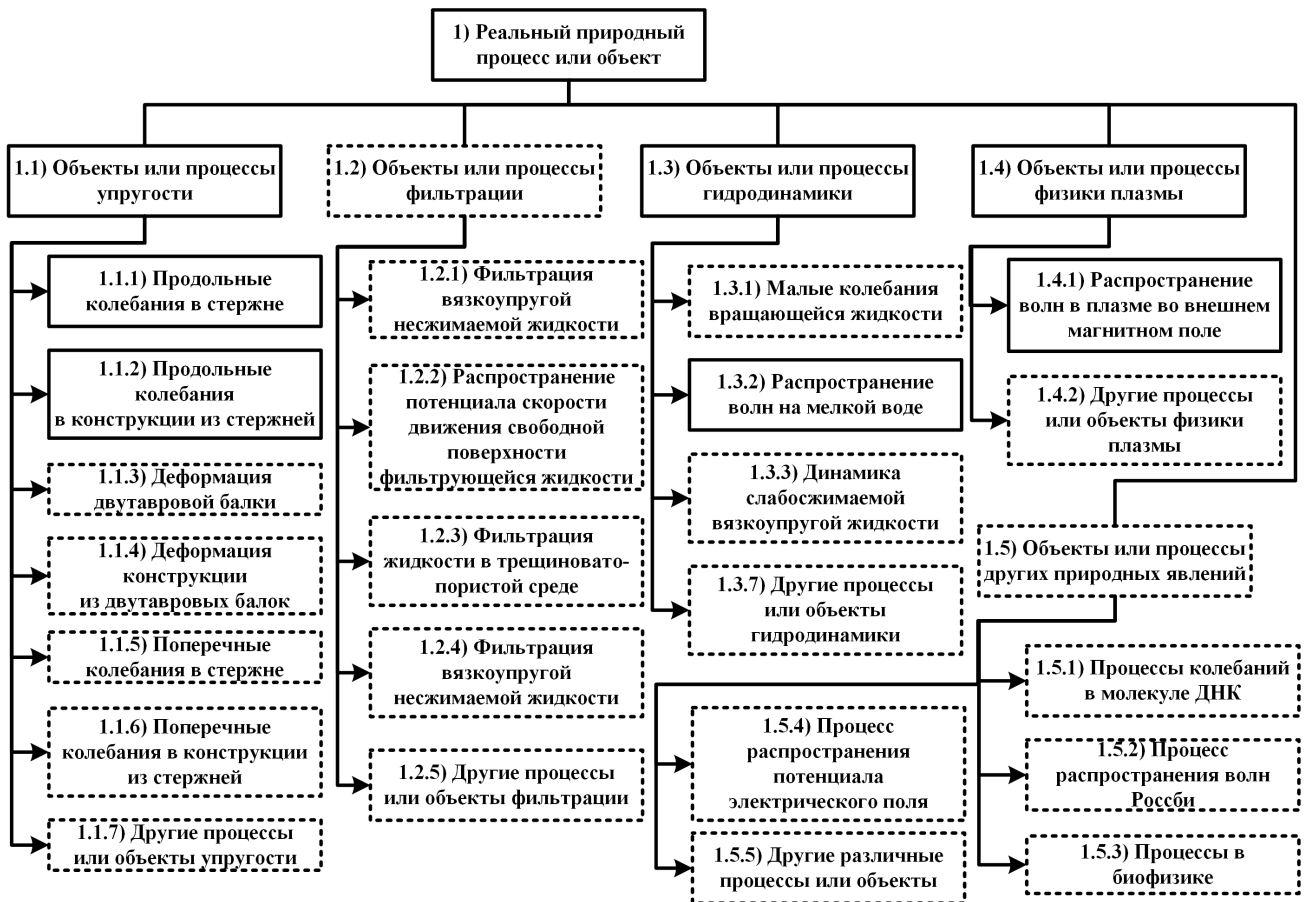


Рисунок 1.1.2 – Диаграмма декомпозиции этапа 1 для работы с математическими моделями

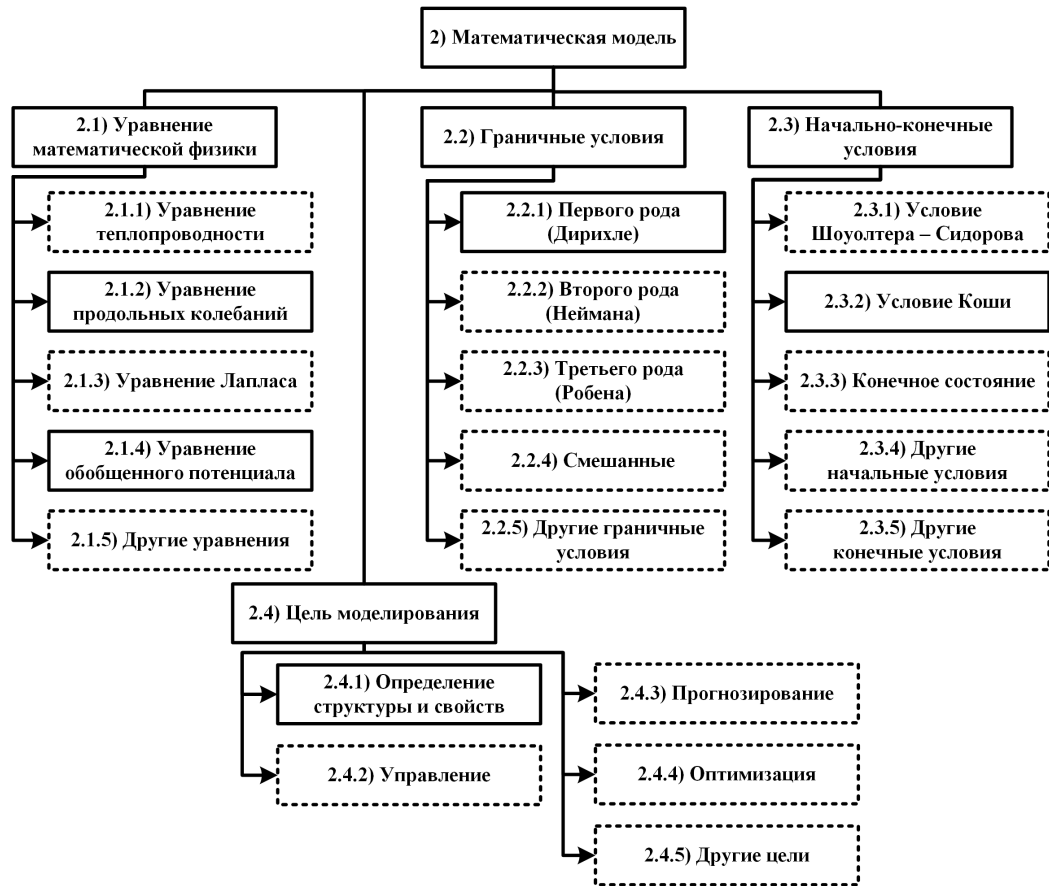


Рисунок 1.1.3 – Диаграмма декомпозиции этапа 2 для работы с математическими моделями

Декомпозиции показывают основные особенности, отличающие данную работу от многих других. Особый интерес представляет рисунок 1.1.4 на нем указано какое место занимает данная работа в области обратных задач.

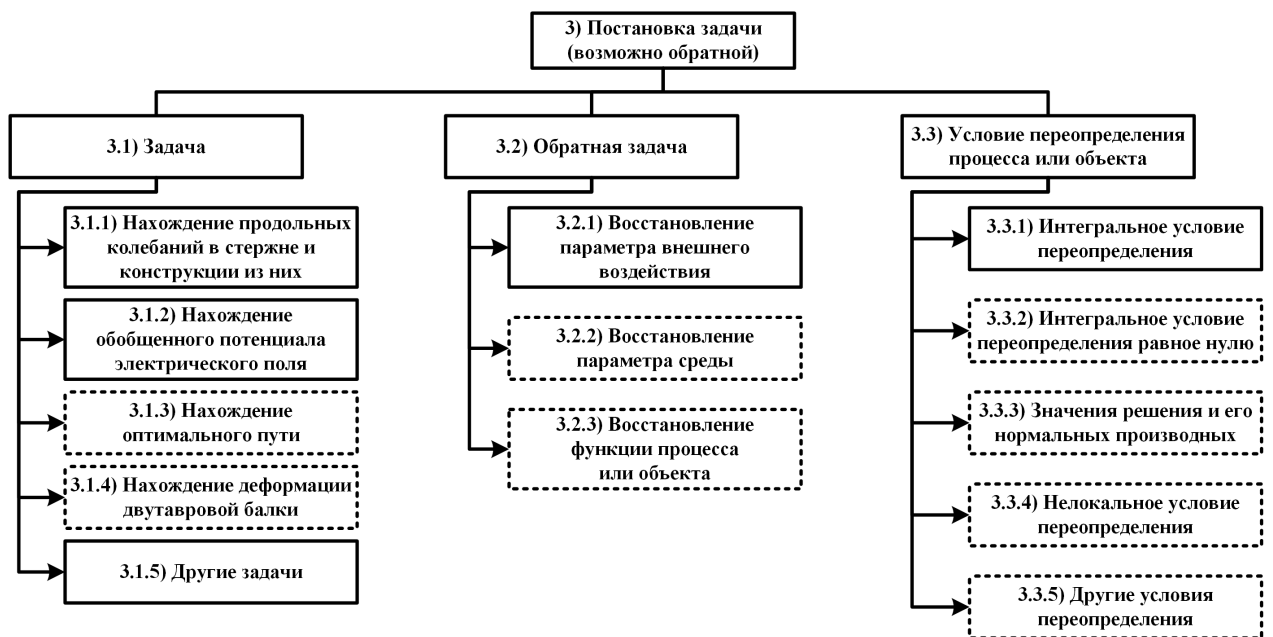


Рисунок 1.1.4 – Диаграмма декомпозиции этапа 3 для работы с математическими моделями

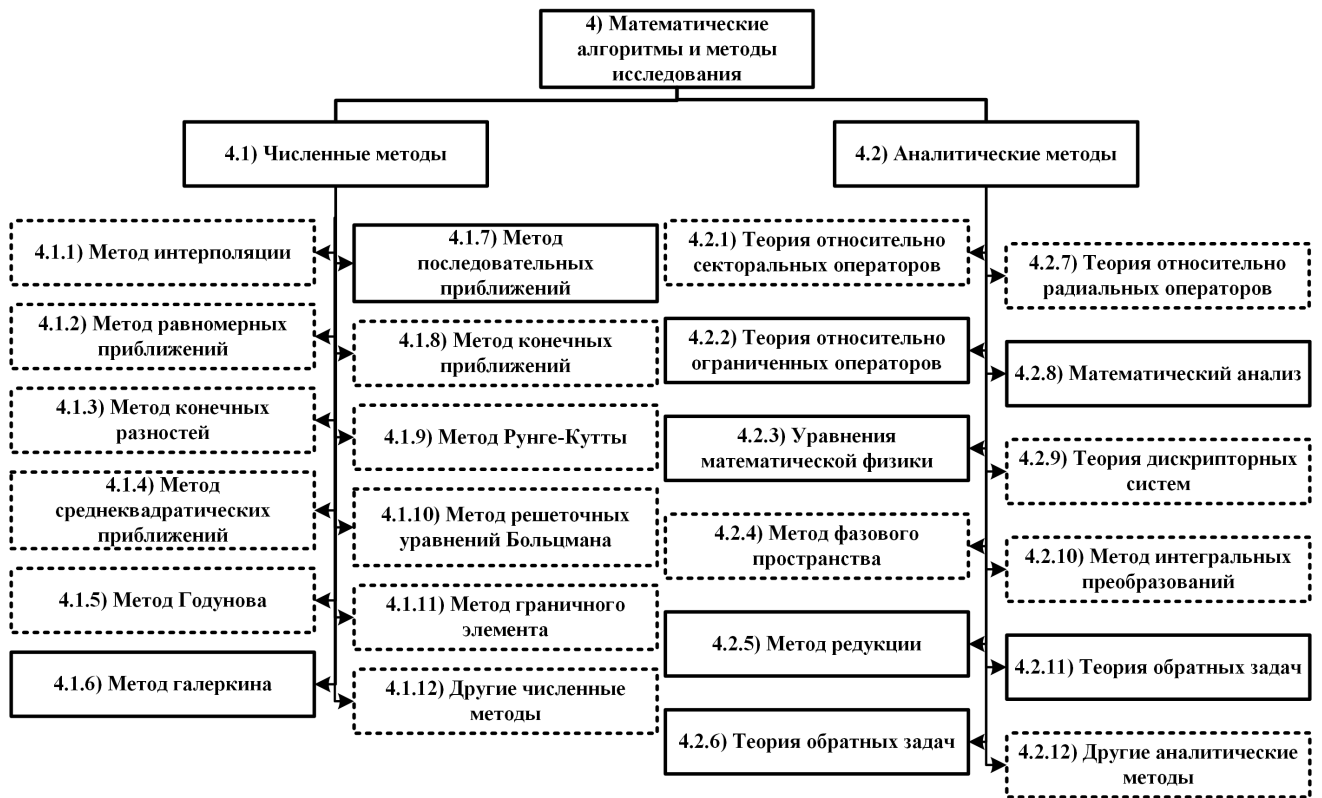


Рисунок 1.1.5 – Диаграмма декомпозиции этапа 4 для работы с математическими моделями

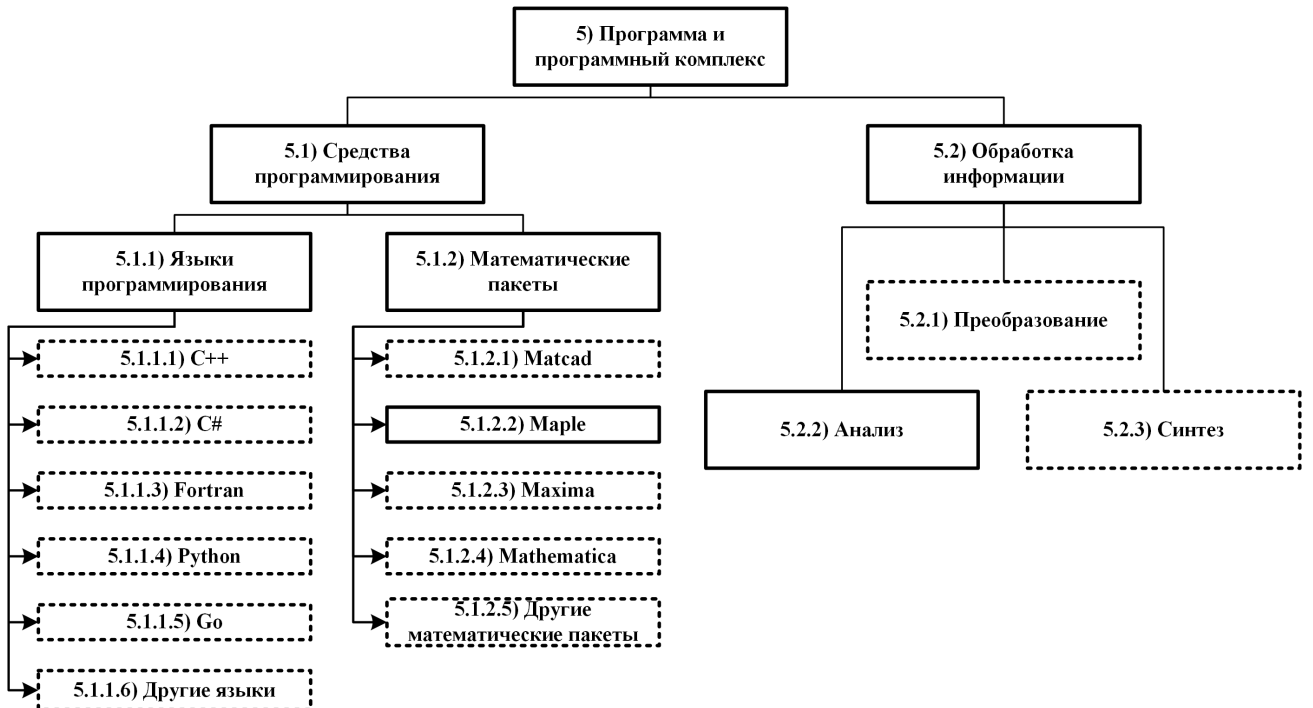


Рисунок 1.1.6 – Диаграмма декомпозиции этапа 5 для работы с математическими моделями

Применим метод информационно-логического моделирования к исследованию трех математических моделей: Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме во внешнем



магнитном поле. Общие элементы характерные для всех трех математических моделей выделены в закругленный овал. Эти элементы и показывают единую концепцию данного исследования, а различающиеся элементы характеризуются отличием в поведении, в характеристиках, в условиях и в различных других особенностях рассматриваемых моделей. Линии показывают связи между элементами «многие ко многим» или «один ко многим».

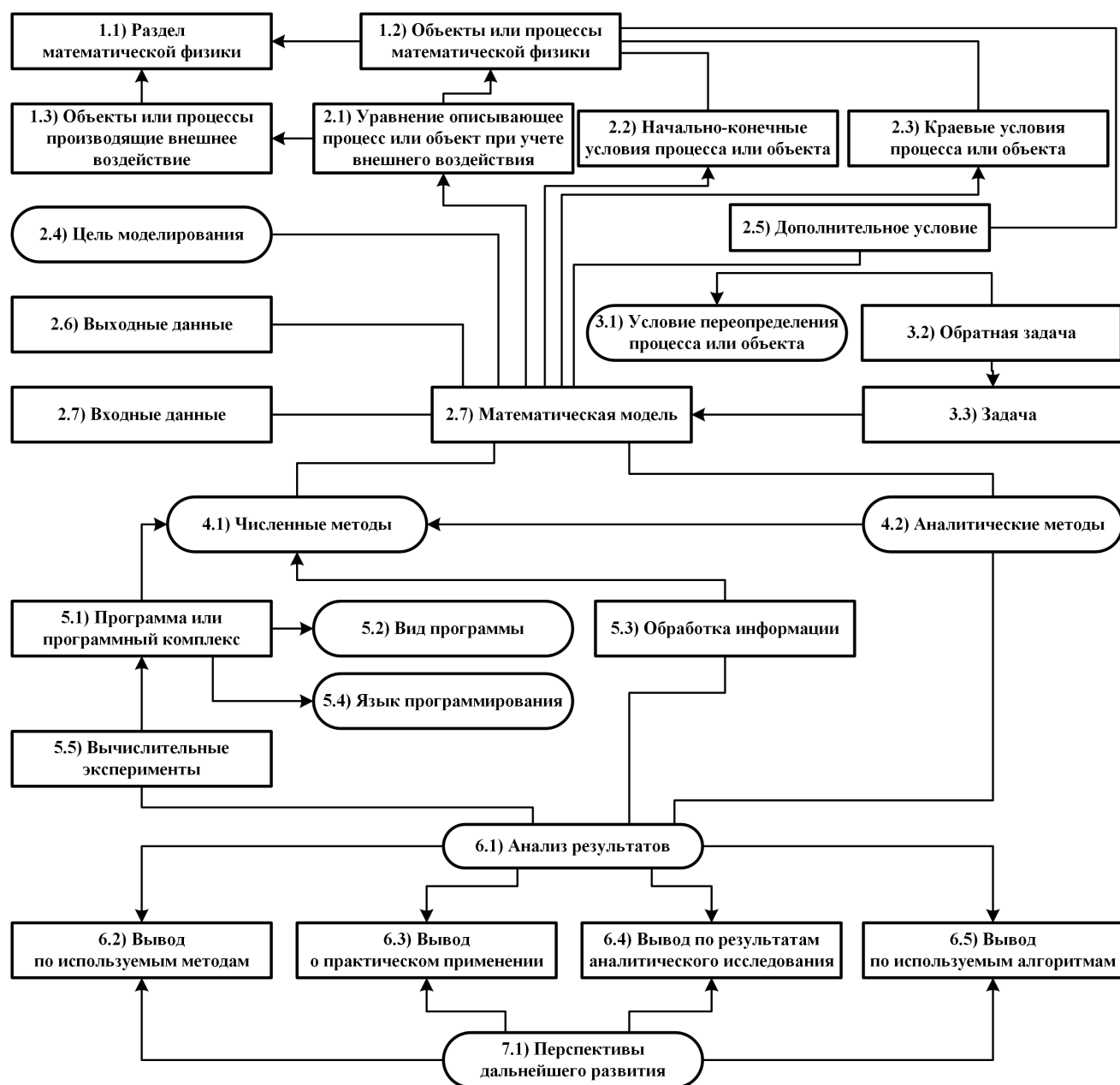


Рисунок 1.1.7 – Информационно-логическая модель исследования обратных задач для математических моделей

В ходе проведения данного исследования каждый элемент приведенной схемы для трех рассматриваемых математических моделей будет раскрыт и приведен в работе.

## 1.2 Аналитические методы исследования математических моделей, на основе теории уравнений соболевского типа высокого порядка

Введем дополнительные сведения из [21, 26], которые будут использоваться для аналитического исследования, рассматриваемых в работе, математических моделей. Для этого, сначала, обозначим через  $\vec{B}$  пучок операторов  $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ .

**Определение 1.2.1** [21] Множества

$$\rho^A(\vec{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^n A - \mu^{n-1} B_{n-1} - \dots - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})\}$$

и  $\sigma^A(\vec{B}) = \bar{\mathbb{C}} \setminus \rho^A(\vec{B})$  будем называть  $A$ -резольвентным множеством и  $A$ -спектром пучка  $\vec{B}$ , соответственно.

**Определение 1.2.2** [21] Пучок операторов  $\vec{B}$  называется полиномиально  $A$ -ограниченным, если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow \left( R_\mu^A(\vec{B}) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U}) \right),$$

где  $R_\mu^A(\vec{B}) = (\mu^n A - \mu^{n-1} B_{n-1} - \dots - \mu B_1 - B_0)^{-1}$  —  $A$ -резольвента операторного пучка  $\vec{B}$ .

Зададим необходимое условие следующего вида

$$\int_{\gamma} \mu^k R_\mu^A(\vec{B}) d\mu \equiv \mathbb{O}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2. \quad (1.2.1)$$

Здесь контур  $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ .

**Замечание 1.2.1** [21] Условие (1.2.1) выполняется, если существует обратный оператор  $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{U})$ .

**Лемма 1.2.1** [21] Пусть пучок операторов  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен и выполняется условие (1.2.1). Тогда проекторами будут следующие операторы:

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mu^{n-1} A R_\mu^A(\vec{B}) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{F}),$$

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_\mu^A(\vec{B}) \mu^{n-1} A d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{U}).$$

Зададим  $\mathcal{U}^0 = \ker P$ ,  $\mathcal{U}^1 = \operatorname{im} P$ , а также,  $\mathcal{F}^0 = \ker Q$ ,  $\mathcal{F}^1 = \operatorname{im} Q$ .  
Использував лемму 1.2.1, получим, что

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1 \text{ и } \mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1.$$

Обозначим  $A^k(B_l^k)$  – сужение оператора  $A(B_l)$  на  $\mathcal{U}^k$ ,  $k = 0, 1$ ;  $l = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Теорема 1.2.1** [21] *При полиномиальной  $A$ -ограниченности операторного пучка  $\vec{B}$  и выполнении условия (1.2.1) действия операторов расщепляются следующим образом:*

- i)  $A^k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^k; \mathcal{F}^k)$ ,  $k = 0, 1$ ;*
- ii)  $B_l^k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^k; \mathcal{F}^k)$ ,  $k = 0, 1$ ,  $l = 0, 1, \dots, n-1$ ;*
- iii) существует обратный к  $A^1$  оператор  $(A^1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$ ;*
- iv) существует обратный к  $B_0^0$  оператор  $(B_0^0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$ .*

**Определение 1.2.3** [21] Семейства операторов  $\{K_q^1, K_q^2, \dots, K_q^n\}$  определим следующим образом:

$$K_0^1 = \mathbb{O}, K_0^2 = \mathbb{O}, \dots, K_0^{n-1} = \mathbb{O}, K_0^n = \mathbb{I},$$

$$K_1^1 = H_0, K_1^2 = -H_1, \dots, K_1^{n-1} = -H_{n-2}, K_1^n = H_{n-1},$$

$$K_{q+1}^1 = K_q^n H_0, K_{q+1}^2 = K_q^1 - K_q^n H_1, \dots, K_{q+1}^n = K_q^{n-1} - K_q^n H_{n-1}.$$

Здесь  $H_0 = (B_0^0)^{-1} A^0$ ,  $H_1 = (B_0^0)^{-1} B_1^0$ , ...,  $H_{n-1} = (B_0^0)^{-1} B_{n-1}^0$ , а  $q = 1, 2, \dots$ .

**Определение 1.2.4** [21] Точку  $\infty$  будем называть:

*i) устранимой особой точкой  $A$ -резольвенты операторного пучка  $\vec{B}$ , если  $K_1^1 \equiv \mathbb{O}$ ,  $K_1^2 \equiv \mathbb{O}$ , ...,  $K_1^n \equiv \mathbb{O}$ ;*

*ii) полюсом порядка  $p \in \mathbb{N}$  для  $A$ -резольвенты операторного пучка  $\vec{B}$ , если  $\exists p$  такое, что  $K_p^1 \not\equiv \mathbb{O}$ ,  $K_p^2 \not\equiv \mathbb{O}$ , ...,  $K_p^n \not\equiv \mathbb{O}$ , но  $K_{p+1}^1 \equiv \mathbb{O}$ ,  $K_{p+1}^2 \equiv \mathbb{O}$ , ...,  $K_{p+1}^n \equiv \mathbb{O}$ ;*

*iii) существенно особой точкой  $A$ -резольвенты операторного пучка  $\vec{B}$  если  $K_p^n \not\equiv \mathbb{O}$  при любом  $p \in \mathbb{N}$ .*

### 1.3 Математическая модель Буссинеска – Лява и ее разрешимость

Прежде, чем привести постановку математической модели Буссинеска – Лява, получим лежащее в ее основе уравнение. Стоит учитывать, что в зависимости от  $\Omega$  данная математическая модель описывает различные процессы и явления. Приведем вывод лишь для одной из них. Пусть  $\Omega = [0, l] \subset \mathbb{R}$ . Воспользуемся [39], считая, что  $v(x, t)$  описывает продольные колебания в упругом и тонком стержне длины  $l$ , которые будут характеризоваться периодическими удлинениями и сокращениями элементов оси стержня. Такие колебания, иногда, называют «колебаниями удлинения». Изобразим на рисунке 1.2.1 стержень длины  $l$ .

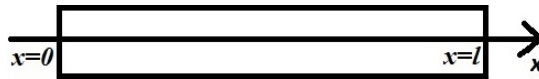


Рисунок 1.2.1 – Тонкий, упругий стержень

Ось  $Ox$  направим вдоль оси рассматриваемого стержня. В момент, когда стержень находится в состоянии покоя, его концы располагаются в точках:  $x = 0$  и  $x = l$ .

Функция  $v(x, t)$  будет означать смещение центра тяжести сечения в сторону направления касательной к упругой линии в каком-нибудь произвольном месте на некотором расстоянии  $x$  от фиксированной точки этой линии. Поэтому, удлинение стержня равно  $\frac{\partial v}{\partial x}$ , а соответствующее растягивающее усилие  $Ew \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ , где  $w$  – площадь сечения, а  $E$  – модуль Юнга. Сила инерции, отнесенная к единице длины упругой линии, равна  $\rho w \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)$ . Здесь  $\rho$  – плотность материала рассматриваемого стержня. Аналогично уравнению равновесия [39], несложно получить уравнение движения:

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Условия, что концы стержня будут закреплены, можно задать следующими уравнениями

$$v(0, t) = v(l, t) = 0.$$

Обозначим через  $x$  и  $y$  – координаты произвольной точки сечения, отнесенные к осям, проходящим через его центр тяжести. Поэтому, боковое смеще-

ние точки зададим в следующем виде

$$-\sigma x \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \quad -\sigma y \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right).$$

Здесь  $\sigma$  – это коэффициент Пуассона.

Кинетическая энергия стержня единичной длины примет вид

$$\frac{1}{2}pw \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \sigma^2 K^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right)^2 \right\},$$

где  $K$  – это радиус инерции сечения относительно центра тяжести.

Приведем потенциальную энергию стержня единичной длины:

$$\frac{1}{2}Ew \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2.$$

Исходя из этого, вариационное уравнение движения примет вид:

$$\delta \int dt \int \left[ \frac{1}{2}pw \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \sigma^2 K^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right)^2 \right\} - \frac{1}{2}Ew \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] ds = 0,$$

где интеграл по  $x$  распространяется на всю длину стержня.

При варьировании используем тождества:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \delta v \right), \quad \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \delta v = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \delta v \right), \\ 2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} \delta v \right) &= \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \delta v \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial x} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} \delta v \right). \end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям и приравняем к нулю коэффициент при  $\delta v$  под знаком двойного интеграла, можно получить уравнение:

$$p \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \sigma^2 K^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} \right) = E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Заменим  $\lambda = \frac{1}{\sigma^2 K^2}$  и  $a = \frac{E}{p\sigma^2 K^2}$ . Получим уравнение Буссинеска – Лява [39] следующего вида:

$$\lambda v_{tt} - v_{xxtt} = \alpha v_{xx}.$$

Добавив в уравнение учет инерции, функции внешней нагрузки  $f(x, t)$  и ее параметра  $q(t)$ , можно получить уравнение

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')v_t + \beta(\Delta - \lambda'')v + qf. \quad (1.3.1)$$

Теперь, к уравнению (1.3.1) добавим начальные условия:

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x). \quad (1.3.2)$$

Наконец, зададим граничное условие

$$v(0, t) = v(l, t) = 0. \quad (1.3.3)$$

Следовательно, получим математическую модель Буссинеска – Лява (1.3.1)–(1.3.3) при  $\Omega = [0, l] \subset \mathbb{R}$ , описывающую продольные колебания в тонком, упругом стержне, с учетом инерции и внешней нагрузки. Его коэффициенты  $\lambda, \alpha, \lambda', \beta, \lambda''$  задают свойства материала, из которого сделан стержень, связывая между собой такие величины как коэффициент Пуассона, модуль Юнга, плотность материала и радиус инерции относительно центра тяжести. Известная функция  $f(x, t)$  будет задавать создаваемую, внешними силами, нагрузку на стержень, а  $q(t)$  ее параметр. Условия (1.3.2) задают, в момент времени  $t = 0$ , начальное положение и начальную скорость, соответственно. Условие (1.3.3) закрепляет концы стержня.

В случае, если  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , тогда уравнение (1.3.1) описывает распространение волн на мелкой воде, а его параметры связывают величины: число Бонда, глубину, гравитационную постоянную. Условия (1.3.2) задают начальное положение и начальную скорость волны, соответственно. Граничное условие (1.3.3) означает отсутствие волны на границе области. Функция  $f(x, t)$  будет задавать внешнее воздействие на волну (источники или стоки), а  $q(t)$  его параметр. Функция  $v(x, t)$  определяет высоту волны в момент времени  $t$  в точке  $x$ .

Обобщив все возможные случаи, получим математическую модель Буссинеска – Лява (1.3.1)–(1.3.3) в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Разрешимость этой математической модели исследована в [21]. Получены условия, при которых у задачи (1.3.1)–(1.3.3) существует единственное решение  $v(x, t)$ . Данная задача называется «прямой» задачей для математической модели продольных колебаний.

Используем результаты [21]. Пусть операторы  $A = \alpha - \Delta$ ,  $B_1 = \alpha(\Delta - \lambda')$ ,  $B_0 = \beta(\Delta - \lambda'')$ , а через  $\sigma(\Delta)$  обозначим спектр однородной задачи (1.3.3) для оператора Лапласа  $\Delta$  в области  $\Omega$ . Отметим, что  $\sigma(\Delta)$  дискретен, отрицателен, конечнократен и сгущается к  $-\infty$ ; множество собственных значений  $\{\lambda_k\}$

занумеровано по невозрастанию (с учетом кратности); семейство соответствующих собственных функций  $\{\mathbb{X}_k\}$ , ортонормировано относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  в  $L_2(\Omega)$ .

Так как собственные функции  $\{\mathbb{X}_k\} \subset C^\infty(\Omega)$ , то

$$\begin{aligned} & \mu^2 A - \mu B_1 - B_0 = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \left( (\lambda - \lambda_k) \mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k) \mu + \beta(\lambda'' - \lambda_k) \right) \langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k. \end{aligned}$$

**Лемма 1.3.1** [21] Пусть выполняется одно из следующих условий:

- i)  $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ ;
- ii)  $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$ ;
- iii)  $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$ .

Тогда пучок операторов  $\vec{B}$  будет полиномиально  $A$ -ограничен.

В случае (i) леммы 1.3.1  $A$ -спектр пучка  $\vec{B}$

$$\sigma^A(\vec{B}) = \{\mu_k^{1,2} : k \in \mathbb{N}\},$$

где  $\mu_k^{1,2}$  – это корни следующего уравнения

$$(\lambda - \lambda_k) \mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k) \mu + \beta(\lambda'' - \lambda_k) = 0. \quad (1.3.4)$$

В случае (ii) леммы 1.3.1

$$\sigma^A(\vec{B}) = \{\mu_{l,k}^{1,2} : k \in \mathbb{N}\},$$

где  $\mu_{l,k}^{1,2}$  – это корни уравнения (1.3.4) при  $\lambda = \lambda_l$ .

В случае (iii) леммы 1.3.1

$$\sigma^A(\vec{B}) = \{\mu_{l,k}^{1,2} : k \in \mathbb{N}, k \neq l\}.$$

**Замечание 1.3.1** [21] Операторный пучок  $\vec{B}$  не будет являться полиномиально  $A$ -ограниченным в случае, когда  $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda' = \lambda'')$ , .

Проверим ранее введенное условие (1.2.1). В случае (i) леммы 1.3.1 существует оператор  $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$ , следовательно, в силу замечания 1.2.1, условие (1.2.1) будет выполнено. В случае (ii) леммы 1.3.1

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k d\mu}{(\lambda - \lambda_k) \mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k) \mu + \beta(\lambda'' - \lambda_k)} = \sum_{\lambda=\lambda_k} \frac{\langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle}{\alpha(\lambda' - \lambda_k)} \mathbb{X}_k \neq \mathbb{O},$$

это означает, что условие (1.2.1) не выполняется, следовательно этот случай исключим из дальнейших рассмотрений. В случае (iii) леммы 1.3.1 условие (1.2.1) будет выполняться.

**Лемма 1.3.2** [21] Пусть выполняется одно из условий (i) или (iii) леммы 1.3.1, тогда точка  $\infty$  будет устранимой особой точкой  $A$ -резольвенты операторного пучка  $\vec{B}$ . Кроме этого, если выполнено условие (ii) леммы 1.3.1, тогда точка  $\infty$  будет существенно особой точкой  $A$ -резольвенты операторного пучка  $\vec{B}$ .

Построим проекторы. В случае (i) леммы 1.3.1 проекторы  $P = \mathbb{I}$  и  $Q = \mathbb{I}$ , а в случае (iii) леммы 1.3.1

$$P = \mathbb{I} - \sum_{\lambda=\lambda_k} \langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k, \quad (1.3.5)$$

а проектор  $Q$  будет иметь такой же вид, но будет определяться на  $\mathcal{F}$ .

**Теорема 1.3.1** [21] Пусть задана вектор-функция

$$f \in C([0, T]; \mathcal{F}) \cap C^1((0, T); \mathcal{F})$$

i) и выполняется условие (i) леммы 1.3.1. Тогда при любых  $v_k \in \mathcal{U}$ ,  $k = 0, 1$  решение задачи (1.3.1)–(1.3.3) существует, единственно и имеет вид

$$\begin{aligned} v(t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_k^1(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^1 - \mu_k^2)} e^{\mu_k^1 t} + \frac{\mu_k^2(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^2 - \mu_k^1)} e^{\mu_k^2 t} \right) \times \\ & \times \langle v_0, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}}{\mu_k^1 - \mu_k^2} \langle v_1, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{e^{\mu_k^1(t-s)} - e^{\mu_k^2(t-s)}}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^1 - \mu_k^2)} \langle q(s)f(s), \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k ds, \quad t \in (0, T); \end{aligned}$$

ii) и выполняется условие (iii) леммы 1.3.1. Тогда при любых  $v_k \in \mathcal{U}$ ,  $k = 0, 1$  таких, что

$$\sum_{\lambda=\lambda_k} \left( \langle v_0, \mathbb{X}_k \rangle + \frac{\langle q(0)f(0), \mathbb{X}_k \rangle}{\beta(\lambda'' - \lambda_k)} \right) =$$



$$= \sum_{\lambda=\lambda_k} \left( \langle v_1, \mathbb{X}_k \rangle + \frac{\langle q'(0)f(0) + q(0)f'(0), \mathbb{X}_k \rangle}{\beta(\lambda'' - \lambda_k)} \right) = 0$$

существует единственное решение задачи (1.3.1)–(1.3.3) в виде

$$\begin{aligned} v(t) = & - \sum_{\lambda=\lambda_k} \frac{\langle q(t)f(t), \mathbb{X}_k \rangle}{\beta(\lambda'' - \lambda_k)} \mathbb{X}_k + \\ & + \sum_{\lambda \neq \lambda_k} \left( \frac{\mu_k^1(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^1 - \mu_k^2)} e^{\mu_k^1 t} + \frac{\mu_k^2(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^2 - \mu_k^1)} e^{\mu_k^2 t} \right) \times \\ & \times \langle v_0, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k + \sum_{\lambda \neq \lambda_k} \frac{e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}}{\mu_k^1 - \mu_k^2} \langle v_1, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k + \\ & + \sum_{\lambda \neq \lambda_k} \int_0^t \frac{e^{\mu_k^1(t-s)} - e^{\mu_k^2(t-s)}}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^1 - \mu_k^2)} \langle q(s)f(s), \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k ds, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Здесь  $\mu_k^{1,2}$  – корни уравнения:  $(\lambda - \lambda_k)\mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k) + \beta(\lambda'' - \lambda_k) = 0$ , а пространства

$$\mathcal{U} = \{v \in W_q^{l+2}(\Omega) : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad \mathcal{F} = W_q^l(\Omega), \quad \text{при } l = 0, 1, \dots \text{ и } 2 \leq q.$$

Таким образом, полученная в работе [21] теорема 1.3.1 представляет условия, при которых прямая задача для математической модели (1.3.1)–(1.3.3) однозначно разрешима.

#### 1.4 Математическая модель продольных колебаний в конструкции из стержней и ее разрешимость

Теперь, модифицируем полученную модель (1.3.1)–(1.3.3), рассмотрев ее в конструкции из стержней. Данную конструкцию будем представлять в виде графа. Пусть дан конечный, связный, ориентированный граф  $G = G(\mathfrak{D}, \mathfrak{E})$ , где  $\mathfrak{D} = \{V_i\}$  – множество вершин, а  $\mathfrak{E} = \{E_j\}$  – множество ребер. Каждому ребру  $E_j$  поставим в соответствие два числа  $l_j, d_j \in \mathbb{R}_+$ , обозначающие длину и площадь поперечного сечения, соответственно. На графе  $G$  рассмотрим неполное уравнение Буссинеска – Лява

$$(\alpha - \Delta)v_{tt} = \beta(\Delta - \gamma)v + qf, \quad (1.4.1)$$

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_j, \dots), \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_j, \dots).$$

Зададим условия в каждой вершине  $V_i$  графа

$$\sum_{j: E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j v_{jx}(0, t) - \sum_{m: E_m \in E^\omega(V_i)} d_m v_{mx}(l_m, t) = 0, \quad (1.4.2)$$

$$v_j(0, t) = v_k(0, t) = v_m(l_m, t) = v_n(l_n, t). \quad (1.4.3)$$

Начальные условия (1.3.2) примут вид

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (1.4.4)$$

$$v_0 = (v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^j, \dots), \quad v_1 = (v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^j, \dots).$$

Здесь  $f(x, t)$ ,  $v_0(x)$ ,  $v_1(x)$  – заданные вектор-функции. Таким образом, получим математическую модель Буссинеска – Лява (1.4.1)–(1.4.4) в конструкции из стержней (на графе). Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  уравнения (1.4.1), характеризуют свойства материала, из которого сделана конструкция. Компоненты вектор-функций:  $v(x, t)$  описывают продольные смещения в точке  $x$  в момент времени  $t$  на  $j$ -ом элементе конструкции;  $v_0$  задают начальные положения, а  $v_1$  начальные скорости смещений;  $f(x, t)$  характеризуют создаваемую, внешними силами, нагрузку на каждый  $j$ -ый элемент конструкции, а  $q(t)$  – параметр этой нагрузки. Обычно, (1.4.2) называют условием «баланса потока», а (1.4.3) – условием «непрерывности» решения  $v(x, t)$ .

Разрешимость математической модели продольных колебаний в конструкции из стержней (1.4.1)–(1.4.4) изучена в [26]. Приведем условия, при которых у задачи (1.4.1)–(1.4.4) существует единственное решение  $v(x, t)$ . Здесь  $v(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $v_0(x)$  и  $v_1(x)$  – вектор-функции. Данную задачу будем называть «прямой» задачей для математической модели продольных колебаний в конструкции из стержней.

Воспользуемся результатами [26]. Пусть операторы  $A = (\alpha - \Delta)\mathbb{I} - D$ ,  $B_1 = \mathbb{O}$ ,  $B_0 = \beta((\Delta - \gamma)\mathbb{I} - D)$ , где оператор  $D$  задан формулой

$$\langle Du, v \rangle = \sum_{j: E_j \in \mathfrak{E}} \int_0^{l_j} u_{jx}(x, t) v_{jx}(x) dx.$$

Спектр однородной задачи Дирихле  $\sigma(A) = \{\lambda_k\}$  сгущается к  $-\infty$ , а

$$\{\mathbb{X}_k\} = (X_k^1, X_k^2, \dots, X_k^j, \dots)$$

– семейство соответствующих собственных функций ортонормированных относительно скалярного произведения

$$\langle a, b \rangle = \sum_{j: E_j \in \mathfrak{E}} \int_0^{l_j} a_j(x) b_j(x) dx$$

в  $L_2(G) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$ .

Так как собственные функции  $\{\mathbb{X}_k\} \subset C^\infty(G)$ , то

$$\mu^2 A - B_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left( (\alpha - \lambda_k) \mu^2 + \beta(\gamma - \lambda_k) \right) \langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k.$$

**Лемма 1.4.1** [26] Пусть параметры  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , выполняется одно из следующих условий:

- i)  $0 \notin \sigma(A)$ ;
- ii)  $(0 \in \sigma(A)) \wedge (\alpha \neq \gamma)$ .

Тогда пучок операторов  $\vec{B}$  будет полиномиально  $A$ -ограничен, причем  $\infty$  является несущественной особой точкой  $A$ -резольвенты пучка  $\vec{B}$ .

В случае (i) леммы 1.4.1 любой вектор  $X \in \ker A \setminus \{0\}$  имеет вид

$$X = \sum_{j=1}^l a_j X_j, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^l |a_j| > 0,$$

где  $\ker A = \text{span}\{X_0, X_1, \dots, X_j\}$ ,  $l = \dim \ker A$ .

В случае (ii) леммы 1.4.1

$$B_0 X = B_0 \left( \sum_{j=1}^l a_j X_j \right) = \beta(\alpha - \gamma) \sum_{j=1}^l a_j X_j \notin \text{im} A.$$

**Замечание 1.4.1** [26] Операторный пучок  $\vec{B}$  не будет являться полиномиально  $A$ -ограниченным в случае, когда  $(0 \in \sigma(A)) \wedge (\alpha = \gamma)$ .

Проверим ранее введенное условие (1.2.1). В случае (i) леммы 1.4.1 существует оператор  $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$ , следовательно, в силу замечания 1.2.1, условие

(1.2.1) будет выполнено. В случае (ii) леммы 1.4.1 условие (1.2.1) будет выполняться, т. к.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k d\mu}{(\alpha - \lambda_k)\mu^2 + \beta(\gamma - \lambda_k)} = \mathbb{O}.$$

В случае (i) леммы 1.4.1 проекторы  $P = \mathbb{I}$  и  $Q = \mathbb{I}$ , а в случае (ii)

$$P = \mathbb{I} - \sum_{\alpha=\lambda_k} \langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k, \quad (1.4.5)$$

а проектор  $Q$  будет иметь такой же вид, но будет определяться на  $\mathcal{F}$ .

**Теорема 1.4.1** [26] Пусть  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , задана вектор-функция

$$f \in C([0, T]; \mathcal{F}) \cap C^1((0, T); \mathcal{F})$$

i) и выполняется условие (i) леммы 1.4.1. Тогда при любых  $v_k \in \mathcal{U}$ ,  $k = 0, 1$  решение задачи (1.4.1)–(1.4.4) существует, единственно и имеет вид

$$\begin{aligned} v(t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^1 e^{\mu_k^1 t} - \mu_k^2 e^{\mu_k^2 t}}{\mu_k^1 - \mu_k^2} \langle v_0, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}}{\mu_k^1 - \mu_k^2} \langle v_1, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{e^{\mu_k^1(t-s)} - e^{\mu_k^2(t-s)}}{(\alpha - \lambda_k)(\mu_k^1 - \mu_k^2)} \langle q(s)f(s), \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k ds, \quad t \in (0, T); \end{aligned}$$

ii) и выполняется условие (ii) леммы 1.4.1. Тогда при любых  $v_k \in \mathcal{U}$ ,  $k = 0, 1$  таких, что

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=\lambda_k} \left( \langle v_0, \mathbb{X}_k \rangle + \frac{\langle q(0)f(0), \mathbb{X}_k \rangle}{\beta(\gamma - \lambda_k)} \right) = \\ & = \sum_{\alpha=\lambda_k} \left( \langle v_1, \mathbb{X}_k \rangle + \frac{\langle q'(0)f(0) + q(0)f'(0), \mathbb{X}_k \rangle}{\beta(\gamma - \lambda_k)} \right) = 0 \end{aligned}$$

существует единственное решение задачи (1.4.1)–(1.4.4) в виде

$$\begin{aligned} v(t) = & - \sum_{\alpha=\lambda_k} \frac{\langle q(t)f(t), \mathbb{X}_k \rangle}{\beta(\gamma - \lambda_k)} \mathbb{X}_k + \sum_{\alpha \neq \lambda_k} \frac{\mu_k^1 e^{\mu_k^1 t} - \mu_k^2 e^{\mu_k^2 t}}{\mu_k^1 - \mu_k^2} \langle v_0, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k + \\ & + \sum_{\alpha \neq \lambda_k} \frac{e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}}{\mu_k^1 - \mu_k^2} \langle v_1, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k + \\ & + \sum_{\alpha \neq \lambda_k} \int_0^t \frac{e^{\mu_k^1(t-s)} - e^{\mu_k^2(t-s)}}{(\alpha - \lambda_k)(\mu_k^1 - \mu_k^2)} \langle q(s)f(s), \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k ds, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Здесь  $\mu_k^{1,2}$  – корни уравнения:  $(\alpha - \lambda_k)\mu^2 + \beta(\gamma - \lambda_k) = 0$ , а пространства

$$\mathcal{U} = \{v \in W_q^{l+2}(G) : v(x) = 0, x \in \partial G\}, \quad \mathcal{F} = W_q^l(G), \quad \text{при } l = 0, 1, \dots \text{ и } 2 \leq q.$$

Таким образом, полученная в работе [26] теорема 1.4.1 представляет условия, при которых прямая задача для математической модели (1.4.1)–(1.4.4) однозначно разрешима.

## 1.5 Математическая модель ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле и ее разрешимость

Аналогично параграфу 1.3 перед постановкой математической модели получим уравнение, на котором она основана. Вначале, стоит сказать, что ионно-звуковые волны – волны, в которых существенные колебания испытывают ионная и электронная плотности. Такие колебания существуют при температуре ионов намного меньше температуры электронов [38]:

$$T_i \ll T_e.$$

Ионно-звуковые волны в бесстолкновительной плазме во внешнем однородном магнитном поле  $B_0 = B_0 e_3$  описываются линеаризованной системой уравнений [47]:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{e}{M} \nabla \varphi - \omega_{B_i}(e_3, v_i), \quad \frac{\partial P}{\partial t} = e n_0 v_i, \quad (1.5.1)$$

$$\operatorname{div} D = -4\pi e n_e, \quad (1.5.2)$$

$$D = 4\pi P - \nabla \varphi, \quad (1.5.3)$$

$$n_e = \frac{e\varphi n_0}{T_e}. \quad (1.5.4)$$

Здесь  $n_0$  – невозмущенная плотность частиц,  $n_e = n_0(e^{\frac{e\varphi}{T_e}} - 1)$  – возмущенная часть плотности электронов,  $v_i$  – гидродинамическая скорость,  $P$  – вектор поляризации плазмы, вызванный движением ионов,  $D$  – вектор индукции электрического поля, а  $\omega_{B_i} = \frac{eB_0}{Mc}$ . Для простоты, не станем учитывать давление ионов в уравнении движения. С помощью [53] можно получить вектор поляризации плазмы

$$P_l = -\widehat{\chi}_{lj} * \varphi_{x_j}(x, t) + \frac{F_{l0}(x, t)}{4\pi}. \quad (1.5.5)$$

Здесь  $\widehat{\chi}_{lj}^*$  – сверточный вольтеровский оператор:

$$\widehat{\chi}_{lj}^* f(t) = \int_0^t \chi_{lj}(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

а  $\widehat{\chi} = \widehat{\chi}_{lj}^*$  – операторный тензор электрической восприимчивости:

$$\widehat{\chi} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \widehat{\chi}_1^* & \widehat{\chi}_2^* & 0 \\ -\widehat{\chi}_2^* & \widehat{\chi}_1^* & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{\chi}_3^* \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\chi}_1^* = \frac{\omega_{p_i}^2}{\omega_{B_i}} \widehat{S}_{\sin(\omega_{B_i} t)}^*, \quad \widehat{\chi}_2^* = \frac{\omega_{p_i}^2 \omega_{B_i} \widehat{S}_{t^2}^*}{2}, \quad \widehat{\chi}_3^* = \omega_{p_i}^2 \widehat{S}_t^*,$$

$$F_{l0}(x, t) = 4\pi P_{l0}(x) + 4\pi e n_0 (\widehat{A}_i^{-1})_{lj} f_j^{(i)}(x) \frac{t^2}{2},$$

$$\widehat{A}_i^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} - \omega_{B_i} \widehat{S}_{\sin(\omega_{B_i} t)}^* & \omega_{B_i} \widehat{S}_1^* & 0 \\ -\omega_{B_i} \widehat{S}_1^* & \mathbb{I} - \omega_{B_i} \widehat{S}_{\sin(\omega_{B_i} t)}^* & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}.$$

Подставим (1.5.5) в (1.5.3). Выражение, которое получится, подставим в уравнение Пуассона (1.5.2). Взяв во внимание (1.5.4), получим интегродифференциальное уравнение ионно-звуковых волн в «замагниченной» плазме

$$\begin{aligned} \Delta_3 \varphi - \frac{\varphi}{r_D^2} + \omega_{p_i}^2 \left( \int_0^t d\tau (t - \tau) \varphi_{x_3 x_3}(x, \tau) + \right. \\ \left. + \int_0^t d\tau \frac{\sin(\omega_{B_i}^2 (t - \tau))}{\omega_{B_i}^2} \Delta_2 \varphi(x, \tau) \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

где  $\omega_{B_i}^2 = \frac{eB_0}{Mc}$  – ионная гирочастота,  $\omega_{p_i}^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{M}$  – частота Ленгмюра для ионов,  $r_D^2 = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n_0 e^2}}$  – радиус Дебая.

Введем  $\Phi(x, t)$  – обобщенный потенциал, который связан с кулоновским потенциалом электрического поля  $\varphi(x, t)$  соотношением

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{B_i}^2 \right) \Phi(x, t) = \varphi(x, t),$$

удовлетворяющий калибровочным начальным условиям

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \Phi(x, t)|_{t=0} = 0,$$

где  $k = 0, 1, 2, 3$ . Тогда из уравнения (1.5.6) получим дифференциальное уравнение для обобщенного потенциала электрического поля

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{B_i}^2 \right) \left( \Delta_3 \Phi - \frac{\Phi}{r_D^2} \right) + \omega_{p_i}^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_3 \Phi + \omega_{B_i}^2 \omega_{p_i}^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0. \quad (1.5.7)$$

Можно также заметить, что вывод уравнения ионно-звуковых волн в «немагнитной» плазме с постановкой начально-краевых задач представлен в [13].

Перегруппируем слагаемые в уравнении (1.5.7)

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} \left( \Delta_3 - \frac{1}{r_D^2} \right) \Phi + \left( \omega_{B_i}^2 + \omega_{p_i}^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \Delta_3 - \frac{\omega_{B_i}^2}{r_D^2 (\omega_{B_i}^2 + \omega_{p_i}^2)} \right) \Phi + \omega_{B_i}^2 \omega_{p_i}^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0.$$

Сделав замену  $\alpha = \frac{1}{r_D^2}$ ,  $\beta = \omega_{B_i}^2 + \omega_{p_i}^2$ ,  $\gamma = \frac{\omega_{B_i}^2}{r_D^2 (\omega_{B_i}^2 + \omega_{p_i}^2)}$ ,  $\kappa = \omega_{B_i}^2 \omega_{p_i}^2$ ,  $v = \Phi$  и добавив функцию воздействия внешнего магнитного поля  $f(x, t)$  с его коэффициентом  $q(t)$  получим, уравнение

$$(\Delta - \alpha)v_{ttt} + \beta(\Delta - \gamma)v_{tt} + \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + qf = 0 \quad (1.5.8)$$

рассматриваемое в цилиндре  $\Omega \times (0; T)$ , где  $\Omega = (0, a) \times (0, b) \times (0, c) \subset \mathbb{R}^3$ .

Добавим к уравнению (1.5.8) условия Коши – Дирихле

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (1.5.9)$$

$$v_{tt}(x, 0) = v_2(x), \quad v_{ttt}(x, 0) = v_3(x), \quad x \in \Omega$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (1.5.10)$$

Таким образом, получаем математическую модель ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.

Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  уравнения (1.5.8) связывают радиус Дебая, ионную гирочастоту и частоту Ленгмюра. Функция  $v(x, t)$  задает обобщенный потенциал электрического поля, функция  $f(x, t)$  задает внешнее воздействие магнитного поля, а  $q(t)$  – параметр этого воздействия. Условия (1.5.9) задают начальные значения для обобщенного потенциала электрического поля.

Разрешимость математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле (1.5.8)–(1.5.10) изучена в [26]. Приведем условия, при которых у задачи (1.5.8)–(1.5.10) существует единственное решение  $v(x, t)$ . Данную задачу будем называть «прямой» задачей для математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.

Воспользуемся результатами [26]. Пусть операторы  $A = \Delta - \alpha$ ,  $B_3 = \mathbb{O}$ ,  $B_2 = \beta(\Delta - \gamma)$ ,  $B_1 = \mathbb{O}$ ,  $B_0 = \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}$ , а

$$\mathbb{X}_{kmn} = \left\{ \sin\left(\frac{\pi k x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m x_2}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi n x_3}{c}\right) \right\}, \quad k, m, n \in \mathbb{N}$$

– собственные функции оператора Лапласа  $\Delta$  определенного в области  $\Omega = (0, a) \times (0, b) \times (0, c) \subset \mathbb{R}^3$ , удовлетворяющие (1.5.10), а

$$\lambda_{kmn} = -\pi^2 \left( \left(\frac{k}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2 \right)$$

– соответствующие собственные значения. Спектр  $\sigma(\Delta)$  – дискретен, конечно-кратен, отрицателен и сгущается к  $-\infty$ . Поскольку  $\{\mathbb{X}_{kmn}\} \subset C^\infty(\Omega)$ , тогда

$$\begin{aligned} & \mu^4 A - \mu^2 B_2 - B_0 = \\ & = \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \left( (\lambda_{kmn} - \alpha)\mu^4 - \beta(\lambda_{kmn} - \gamma)\mu^2 + \kappa \left(\frac{\pi n}{c}\right)^2 \right) \langle \cdot, \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn}. \end{aligned}$$

**Замечание 1.5.1** [26]

*i)* в случае  $\alpha \notin \sigma(\Delta)$  спектр  $\sigma^A(\Delta) = \{\mu_{kmn}^j : k, m, n \in \mathbb{N}, j = 1, 2, 3, 4\}$ , где  $\mu_{kmn}^j$  – корни уравнения

$$(\lambda_{kmn} - \alpha)\mu^4 - \beta(\lambda_{kmn} - \gamma)\mu^2 + \kappa \left(\frac{\pi n}{c}\right)^2 = 0; \quad (1.5.11)$$

*ii)* в случае  $(\alpha \in \sigma(\Delta)) \wedge (\alpha \neq \gamma)$  спектр  $\sigma^A(\Delta) = \{\mu_{lk}^j : k \in \mathbb{N}\}$ , где  $\mu_{lk}^j$  – корни уравнения (1.5.11) при  $\alpha = \lambda_l$ ;

*iii)* в случае  $(\alpha \in \sigma(\Delta)) \wedge (\alpha = \gamma)$  спектр  $\sigma^A(\Delta) = \{\mu_{lk}^j : k \in \mathbb{N}, k \neq l\}$ .

Проверим ранее введенное условие (1.2.1). В случае *(i)* замечания 1.5.1 существует оператор  $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$ , следовательно, в силу замечания 1.2.1, условие (1.2.1) будет выполнено. В случае *(ii)* замечания 1.5.1

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \frac{\mu^r \langle \cdot, \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn} d\mu}{(\lambda_{kmn} - \alpha)\mu^4 - \beta(\lambda_{kmn} - \gamma)\mu^2 + \kappa \left(\frac{\pi n}{c}\right)^2} =$$



$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k,m,n=1} \frac{\mu^r \langle \cdot, \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn} d\mu}{-\beta(\lambda_{kmn} - \gamma)\mu^2 + \kappa \left(\frac{\pi n}{c}\right)^2} \neq \mathbb{O},$$

при  $r = 1$ , то есть это означает, что условие (1.2.1) не выполняется, следовательно этот случай исключим из дальнейших рассмотрений. В случае замечания 1.5.1 условие (1.2.1) будет выполняться.

**Лемма 1.5.1** [26] Пусть  $\alpha \notin \sigma(\Delta)$  или  $(\alpha \in \sigma(\Delta)) \wedge (\alpha = \gamma)$ . Тогда пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $(A, 0)$ -ограничен.

В случае  $\alpha \notin \sigma(\Delta)$  проекторы  $P = \mathbb{I}$  и  $Q = \mathbb{I}$ .

В случае  $(\alpha \in \sigma(\Delta)) \wedge (\alpha = \gamma)$

$$P = \mathbb{I} - \sum_{\alpha=\lambda_{kmn}} \langle \cdot, \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn}, \quad (1.5.12)$$

а проектор  $Q$  будет иметь такой же вид, но будет определяться на  $\mathcal{F}$ .

Зададим пространства при  $l = 0, 1, \dots$  и  $2 \leq q$

$$\mathcal{U} = \{v \in W_q^{l+2}(\Omega) : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad \mathcal{F} = W_q^l(\Omega),$$

$$\mathcal{U}^1 = \text{im } P = \left\{ v \in \mathcal{U} : \sum_{\alpha=\lambda_{kmn}} \langle v, \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn} = 0 \right\}.$$

**Теорема 1.5.1** [26] Пусть

i) выполняется условие  $\alpha \notin \sigma(\Delta)$ . Тогда при любых  $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{U}$  существует единственное решение задачи (1.5.8)–(1.5.10);

ii) выполняется условие  $(\alpha \in \sigma(\Delta)) \wedge (\alpha = \gamma)$ . Тогда при любых  $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{U}^1$ , то есть

$$\sum_{\alpha=\lambda_{kmn}} \langle v_j, \mathbb{X}_{kmn} \rangle = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

существует единственное решение задачи (1.5.8)–(1.5.10).

Таким образом, полученная в работе [26] теорема 1.5.1 представляет условия, при которых прямая задача для математической модели (1.5.8)–(1.5.10) однозначно разрешима.

## 2 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БУССИНЕСКА – ЛЯВА

В данной главе содержится все этапы исследования математической модели Буссинеска – Лява. Параграфы 2.1 и 2.2 представляют результаты аналитического исследования данной модели, параграфы 2.3 и 2.4 приводят результаты ее численного исследования, параграф 2.5 – результаты обработки информации, 2.6 – верификацию результатов.

### 2.1 Метод аналитического исследования математической модели Буссинеска – Лява на основе теории относительно полиномиально ограниченных пучков операторов

Для аналитического изучения математической модели Буссинеска – Лява в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  будем использовать теорию полиномиальной ограниченности пучков операторов  $\vec{B}$ , представленную в параграфе 1.1 и метод последовательных приближений. В данном параграфе представлены результаты изучения для абстрактного полного, неоднородного уравнения соболевского типа второго порядка с условиями Коши и переопределения для того, чтобы в дальнейшем провести аналитическое исследование математической модели Буссинеска – Лява.

Пусть  $\mathcal{U}, \mathcal{Y}, \mathcal{F}$  – банаховы пространства. Операторы  $A, B_0, B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ ,  $\ker A \neq \{0\}$ ,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ ,  $\chi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{F})$ , а функции  $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$ . Рассмотрим следующую задачу при  $t \in [0, T]$

$$Av''(t) = B_1v'(t) + B_0v(t) + \chi(t)q(t) + f(t), \quad (2.1.1)$$

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1, \quad (2.1.2)$$

$$Cv(t) = \Psi(t). \quad (2.1.3)$$

Обратной задачей для полного, неоднородного уравнения соболевского типа второго порядка назовем отыскание двух функции  $q(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$  и  $v(t) \in C^2([0, T]; \mathcal{U})$  из уравнений (2.1.1)–(2.1.3).

Если операторный пучок  $\vec{B}$  (состоящий из двух компонент  $B_1$  и  $B_0$ ) будет полиномиально  $A$ -ограничен и выполнено условие (1.2.1), тогда

$$v(t) = (\mathbb{I} - P)v(t) + Pv(t) = \omega(t) + u(t).$$

Потребуем, чтобы  $\mathcal{U}^0 \subset \ker C$ , тогда используя теорему 3.1.1 и лемму 1.2.1 задача (2.1.1)–(2.1.3) эквивалентна задаче поиска функций  $u \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^1)$ ,  $\omega \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^0)$ ,  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$  из соотношений

$$u''(t) = S_1 u'(t) + S_0 u(t) + (A^1)^{-1} Q \chi(t) q(t) + (A^1)^{-1} Q f(t), \quad (2.1.4)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad (2.1.5)$$

$$Cu(t) = \Psi(t) \equiv Cv(t), \quad (2.1.6)$$

$$H_0 \omega''(t) = H_1 \omega'(t) + \omega(t) + (B_0^0)^{-1} (\mathbb{I} - Q) \chi(t) q(t) + (B_0^0)^{-1} (\mathbb{I} - Q) f(t), \quad (2.1.7)$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad \omega'(0) = \omega_1, \quad (2.1.8)$$

где  $S_0 = (A^1)^{-1} B_0^1$ ,  $S_1 = (A^1)^{-1} B_1^1$ ,  $u_0 = Pv_0$ ,  $u_1 = Pv_1$ ,  $\omega_0 = (\mathbb{I} - P)v_0$ ,  $\omega_1 = (\mathbb{I} - P)v_1$ ,  $H_0 = (B_0^0)^{-1} A^0$ ,  $H_1 = (B_0^0)^{-1} B_1^0$ ,  $t \in [0, T]$ . Обратную задачу (2.1.4)–(2.1.6) назовем регулярной, а задачу (2.1.7) и (2.1.8) – сингулярной.

Перепишем (2.1.4)–(2.1.6) в обозначениях [89]. Пусть  $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$ , операторы  $S_0, S_1 \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X})$ ,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ . Оператор-функция  $\Phi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})$ , а функции  $h : [0, T] \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$ . Следовательно, при  $t \in [0, T]$ , получим

$$u''(t) = S_1 u'(t) + S_0 u(t) + \Phi(t) q(t) + h(t), \quad (2.1.9)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad (2.1.10)$$

$$Cu(t) = \Psi(t). \quad (2.1.11)$$

**Теорема 2.1.1** Пусть пучок операторов  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен и выполнено условие (1.2.1), кроме этого,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ ,  $\Phi \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X}))$ ,  $h \in C^1([0, T]; \mathcal{X})$ ,  $\Psi \in C^3([0, T]; \mathcal{Y})$ , кроме этого,  $\forall t \in [0, T]$  оператор  $C\Phi(t)$  имеет обратный оператор, причем  $(C\Phi)^{-1} \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}))$ . При выполнении условия согласования  $Cu_1 = \Psi'(0)$  существует, причем единственное, решение обратной задачи (2.1.9)–(2.1.11) для функций класса  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $u \in C^2([0, T]; \mathcal{X})$ .

*Доказательство.* Проведем редукцию задачи (2.1.9)–(2.1.11) к задаче для уравнения первого порядка при  $t \in [0, T]$

$$z'(t) = Az(t) + Q(t)q(t) + F(t), \quad (2.1.12)$$

$$z(0) = z_0, \quad (2.1.13)$$

$$Bz(t) = Z(t), \quad (2.1.14)$$

$$\text{где } z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ S_0 & S_1 \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix},$$

$$z(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & C \end{pmatrix}, \quad Z(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi'(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть  $R(t) = -(C\Phi(t))^{-1}$ . При этом, выполняются все указанные условия теоремы 6.2.3 [89], а функция  $q(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} q(t) = & q_0(t) + R(t)CS_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s)\Phi(s)q(s)ds + \\ & + R(t)CS_1 \int_0^t V_{2,2}(t-s)\Phi(s)q(s)ds, \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

где

$$\begin{aligned} q_0(t) = & -R(t) \left[ \Psi''(t) - Ch(t) - \right. \\ & - CS_0 \left( V_{1,1}(t)u_0 - V_{1,2}(t)u_1 - \int_0^t V_{1,2}(t-s)h(s)ds \right) - \\ & \left. - CS_1 \left( V_{2,1}(t)u_0 - V_{2,2}(t)u_1 - \int_0^t V_{2,2}(t-s)h(s)ds \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Следовательно, решение обратной задачи (2.1.12)–(2.1.14) существует и единственно для класса функций  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $z \in C^1([0, T]; \mathcal{X}^2)$ . Таким образом, получим, что решение регулярной обратной задачи (2.1.9)–(2.1.11) существует и единственно, причем  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ , а  $u \in C^2([0, T]; \mathcal{X})$ .  $\square$

Для нахождения решения сингулярной задачи, потребуется гладкость решения  $q$  регулярной задачи больше, чем класс  $C^1([0, T]; \mathcal{Y})$  из теоремы 2.1.1.

**Лемма 2.1.1** Пусть  $l \in \mathbb{N}$ ,  $V \in C^{l-1}([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{X}))$ ,  $g \in C^l([0, T]; \mathcal{X})$ .

Тогда

$$\left( \int_0^t V(t-s)g(s)ds \right)^{(l)} = \sum_{k=0}^{l-1} V^{(l-k-1)}(t)g^{(k)}(0) + \int_0^t V(t-s)g^{(l)}(s)ds. \quad (2.1.17)$$

*Доказательство.* Применим метод математической индукции. Сначала покажем, что для  $l = 1$  формула (2.1.17) верна. Найдем производную по  $t$

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t V(t-s)g(s)ds \right)'_t &= V(0)g(t) + \int_0^t \frac{d}{dt} [V(t-s)]g(s)ds = \\ &= V(0)g(t) - \int_0^t \frac{d}{ds} [V(t-s)]g(s)ds = V(t)g(0) + \int_0^t V(t-s)g'(s)ds. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Подставим  $l = 1$  в (2.1.17) и упростим получившееся выражение, получим

$$\left( \int_0^t V(t-s)g(s)ds \right)'_t = V(t)g(0) + \int_0^t V(t-s)g'(s)ds. \quad (2.1.19)$$

Сравнив (2.1.18) и (2.1.19) сделаем вывод, что формула (2.1.17) для  $l = 1$  верна.

Теперь, покажем, что если равенство (2.1.17) верно для  $l$ , тогда оно верно и для  $l + 1$

$$\begin{aligned} \left( \left( \int_0^t V(t-s)g(s)ds \right)^{(l)} \right)'_t &= \left( \sum_{k=0}^{l-1} V^{(l-k-1)}(t)g^{(k)}(0) + \int_0^t V(t-s)g^{(l)}(s)ds \right)'_t = \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} V^{(l-k)}(t)g^{(k)}(0) + V(0)g^{(l)}(t) - \int_0^t \frac{d}{ds} [V(t-s)]g^{(l)}(s)ds = \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} V^{(l-k)}(t)g^{(k)}(0) + V(t)g^{(l)}(0) + \int_0^t V(t-s)g^{(l+1)}(s)ds = \\ &= \sum_{k=0}^l V^{(l-k)}(t)g^{(k)}(0) + \int_0^t V(t-s)g^{(l+1)}(s)ds = \left( \int_0^t V(t-s)g(s)ds \right)^{(l+1)}_t. \quad \square \end{aligned}$$

Следующая теорема предоставляет достаточные условия существования более гладкого (при  $p \in \mathbb{N}$ ) решения  $q \in C^{p+2}([0, T], \mathcal{Y})$  регулярной задачи.

**Теорема 2.1.2** Пусть пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен и выполнено условие (1.2.1), кроме того,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ ,  $p \in \mathbb{N}_0$ ,  $\Phi \in C^{p+2}([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X}))$ ,  $h \in C^{p+2}([0, T]; \mathcal{X})$ ,  $\Psi \in C^{p+4}([0, T]; \mathcal{Y})$ , для любого  $t \in [0, T]$  оператор  $C\Phi(t)$  обратим, причем  $(C\Phi)^{-1} \in C^{p+2}([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}))$ . Также, требуется выполнение

условия согласования  $Cu_1 = \Psi'(0)$ , при некотором  $u_1 \in \mathcal{U}$ . Следовательно, обратная задача (2.1.9)–(2.1.11) имеет единственное решение  $q \in C^{p+2}([0, T]; \mathcal{Y})$ .

*Доказательство.* Обозначим

$$\begin{aligned} V_{1,1}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} (\mu A - B_1) e^{\mu t} d\mu, \\ V_{1,2}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} A e^{\mu t} d\mu, \\ V_{2,1}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} B_0 e^{\mu t} d\mu, \\ V_{2,2}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \mu A e^{\mu t} d\mu \end{aligned}$$

как пропагаторы однородного уравнения (2.1.9).

Ранее при доказательстве теоремы 2.1.1 было установлено, что функция  $q(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению (2.1.15). Возьмем натуральное число  $l \leq p+2$  и предполагая, что  $q \in C^l([0, T]; \mathcal{Y})$  получим, в силу леммы 2.1.1, равенство

$$\begin{aligned} q^{(l)}(t) &= q_0^{(l)}(t) + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,2}^{(l-k-m-1)}(t) (\Phi q)^{(m)}(0) + \\ &+ \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) C S_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s) \Phi^{(m)}(s) q^{(l-k-m)}(s) ds + \\ &+ \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) C S_1 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{2,2}^{(l-k-m-1)}(t) (\Phi q)^{(m)}(0) + \\ &+ \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) C S_1 \int_0^t V_{2,2}(t-s) \Phi^{(m)}(s) q^{(l-k-m)}(s) ds, \end{aligned}$$

где  $C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}$ ,  $C_l^{k,m} = \frac{l!}{k!m!(l-k-m)!}$ . При этом

$$q_0^{(l)}(t) = - \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) \left( \Psi^{(l-k+2)}(t) - C S_0 V_{1,1}^{(l-k)}(t) u_0 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -CS_1 V_{2,1}^{(l-k)}(t)u_0 - CS_0 V_{1,2}^{(l-k)}(t)u_1 - CS_1 V_{2,2}^{(l-k)}(t)u_1 - \\
& -CS_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s)h^{(l-k)}(s)ds - CS_1 \int_0^t V_{2,2}(t-s)h^{(l-k)}(s)ds - \\
& -Ch^{(l-k)}(t) \Big) + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t)CS_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,2}^{(l-k-m-1)}(t)h^{(m)}(0) + \\
& + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t)CS_1 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{2,2}^{(l-k-m-1)}(t)h^{(m)}(0)
\end{aligned}$$

существуют из условий данной теоремы при  $l = 0, 1, \dots, p + 2$ .

Покажем, что  $q \in C^{p+2}([0, T], \mathcal{Y})$ , для этого обозначим  $r_0 = q_0(0)$ , а при  $l = 1, 2, \dots, p + 2$  последовательно определим следующие величины

$$\begin{aligned}
r_l &= q_0^{(l)}(0) + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(0)CS_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,2}^{(l-k-m-1)}(0) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0)r_{m-j} + \\
& + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(0)CS_1 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{2,2}^{(l-k-m-1)}(0) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0)r_{m-j}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_0(t) &= q_0(t) + R(t) \left( CS_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s)\Phi(s)\tilde{q}_0(s)ds + \right. \\
& \left. + CS_1 \int_0^t V_{2,2}(t-s)\Phi(s)\tilde{q}_0(s)ds \right), \\
\tilde{q}_l(t) &= q_0^{(l)}(t) + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t)CS_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,2}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0)r_{m-j} + \\
& + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t)CS_1 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{2,2}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0)r_{m-j} + \tag{2.1.20} \\
& + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t)CS_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s)\Phi^{(m)}(s)\tilde{q}_{l-k-m}(s)ds + \\
& + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t)CS_1 \int_0^t V_{2,2}(t-s)\Phi^{(m)}(s)\tilde{q}_{l-k-m}(s)ds, \quad l = 1, \dots, p + 2.
\end{aligned}$$

Систему (2.1.20) приведем к уравнению Вольтерра второго рода

$$g(t) = g_0(t) + \int_0^t K(t, s)g(s)ds$$

на следующем пространстве  $(C([0, T]; \mathcal{Y}))^{p+3}$  с операторной функцией  $K(t, s)$ , матричного вида, которая задана на треугольнике

$$\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq t\}.$$

Так как все данные в системе (2.1.20) непрерывны, она имеет единственное решение

$$(\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{p+2}) \in (C([0, T]; \mathcal{Y}))^{p+3}.$$

Это решение будет являться пределом последовательности приближений

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{0,i}(t) &= q_0(t) + R(t) \left( CS_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s)\Phi(s)\tilde{q}_{0,i-1}(s)ds + \right. \\ &\quad \left. + CS_1 \int_0^t V_{2,2}(t-s)\Phi(s)\tilde{q}_{0,i-1}(s)ds \right), \\ \tilde{q}_{l,i}(t) &= q_0^{(l)}(t) + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,2}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS_1 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{2,2}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \quad (2.1.21) \\ &\quad + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s)\Phi^{(m)}(s)\tilde{q}_{l-k-m,i-1}(s)ds + \\ &\quad + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS_1 \int_0^t V_{2,2}(t-s)\Phi^{(m)}(s)\tilde{q}_{l-k-m,i-1}(s)ds, \\ &\quad l = 1, \dots, p+2, \quad i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

которые при  $i \rightarrow \infty$  на отрезке  $[0, T]$  сходятся равномерно к функциям  $\tilde{q}_l$  при  $l = 0, \dots, p+2$ . Зададим начальное приближение  $\tilde{q}_{l,0} \equiv 0$  при  $l = 0, \dots, p+2$ , тогда  $\tilde{q}_{l+1,0} = \tilde{q}'_{l,0}$  при  $l = 0, \dots, p+1$ . Кроме этого, из (2.1.21) следует, что

$$\tilde{q}_{l,i}(0) = r_l, \quad l = 0, \dots, p+2, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (2.1.22)$$



Сделаем предположение, что при всех  $\tau = 1, 2, \dots, i$  верны равенства

$$\tilde{q}_{l+1,\tau}(t) = \tilde{q}'_{l,\tau}(t), \quad l = 0, 1, \dots, p+1.$$

Тогда с помощью леммы 2.1.1 и равенств (2.1.22) получим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m,i}(s) ds \right) = \\ & = \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS_0 V_{1,2}(t) \Phi^{(m)}(0) \tilde{q}_{l-k-m,i}(0) + \\ & + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k+1)}(t) CS_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m,i}(s) ds + \\ & + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s) \Phi^{(m+1)}(s) \tilde{q}_{l-k-m,i}(s) ds + \\ & + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds = \quad (2.1.23) \\ & = \sum_{k=1}^{l+1} \sum_{m=0}^{l-k+1} C_l^{k-1,m} R^{(k)}(t) CS_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds + \\ & + \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) CS_0 V_{1,2}(t) \sum_{m=0}^{l-k} C_{l-k}^m \Phi^{(m)}(0) r_{l-k-m} + \\ & + \sum_{k=0}^l \sum_{m=1}^{l-k+1} C_l^{k,m-1} R^{(k)}(t) CS_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds + \\ & + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds. \end{aligned}$$

Обозначим через

$$a_{k,m} = R^{(k)}(t) CS_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds, \quad l = 2, 3, \dots, p+2.$$

Следовательно, учитывая равенства

$$C_l^k + C_l^{k-1} = C_{l+1}^k, \quad C_l^{k,m} + C_l^{k-1,m} + C_l^{k,m-1} = C_{l+1}^{k,m}$$

получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} a_{k,m} + \sum_{k=1}^{l+1} \sum_{m=0}^{l-k+1} C_l^{k-1,m} a_{k,m} + \sum_{k=0}^l \sum_{m=1}^{l-k+1} C_l^{k,m-1} a_{k,m} = \\ & = \left( \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^{l-k} C_l^{k,m} a_{k,m} + \sum_{k=1}^l C_l^{k,0} a_{k,0} + \sum_{m=0}^l C_l^{0,m} a_{0,m} \right) + \left( C_l^{l,0} a_{l+1,0} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^{l-k} C_l^{k-1,m} a_{k,m} + \sum_{k=1}^l C_l^{k-1,0} a_{k,0} + \sum_{k=1}^l C_l^{k-1,l-k+1} a_{k,l-k+1} \right) + \\ & + \left( \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^{l-k} C_l^{k,m-1} a_{k,m} + \sum_{m=1}^{l+1} C_l^{0,m-1} a_{0,m} + \sum_{k=1}^l C_l^{k,l-k} a_{k,l-k+1} \right) = \quad (2.1.24) \\ & = \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^{l-k} C_{l+1}^{k,m} a_{k,m} + \sum_{k=1}^l C_{l+1}^{k,0} a_{k,0} + \sum_{m=1}^l C_{l+1}^{0,m} a_{0,m} + \sum_{k=1}^l C_{l+1}^{k,0} a_{k,l-k+1} + \\ & \quad + C_{l+1}^{l,0} a_{l+1,0} + C_{l+1}^{0,l} a_{0,l+1} + C_{l+1}^{0,0} a_{0,0} = \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{m=0}^{l-k+1} C_{l+1}^{k,m} a_{k,m}. \end{aligned}$$

Для  $l = 0, 1$  выполнение (2.1.24) можно проверить непосредственно.

Из (2.1.23) и (2.1.24) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m,i}(s) ds \right) = \\ & = \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{m=0}^{l-k+1} C_{l+1}^{k,m} R^{(k)}(t) CS_0 \int_0^t V_{1,2}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds + \quad (2.1.25) \\ & \quad + \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) CS_0 V_{1,2}(t) \sum_{m=0}^{l-k} C_{l-k}^m \Phi^{(m)}(0) r_{l-k-m}. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить, что

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS_1 \int_0^t V_{2,2}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m,i}(s) ds \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{m=0}^{l-k+1} C_{l+1}^{k,m} R^{(k)}(t) C S_1 \int_0^t V_{2,2}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds + \quad (2.1.26) \\
&\quad + \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) C S_1 V_{2,2}(t) \sum_{m=0}^{l-k} C_{l-k}^m \Phi^{(m)}(0) r_{l-k-m}.
\end{aligned}$$

Меняя индексы суммирования и перегруппировывая слагаемые, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,2}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,2}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \\
&+ \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k+1)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,2}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} = \\
&= \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,2}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \\
&+ \sum_{k=1}^l C_l^{k-1} R^{(k)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k} V_{1,2}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} = \\
&= \left( \sum_{k=1}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,2}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \right. \\
&\quad \left. + C_l^0 R(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-1} V_{1,2}^{(l-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} \right) + \quad (2.1.27) \\
&+ \left( \sum_{k=1}^{l-1} C_l^{k-1} R^{(k)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,2}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \right. \\
&\quad + \sum_{k=1}^{l-1} C_l^{k-1} R^{(k)}(t) C S_0 V_{1,2}(t) \sum_{j=0}^{l-k} C_{l-k}^j \Phi^{(j)}(0) r_{l-k-j} + \\
&\quad \left. + C_l^{l-1} R^{(l)}(t) C S_0 V_{1,2}(t) C_0^0 \Phi(0) r_0 \right) = \\
&= \sum_{k=0}^l C_{l+1}^k R^{(k)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k} V_{1,2}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} -
\end{aligned}$$

$$- \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) C S_0 V_{1,2}(t) \sum_{m=0}^{l-k} C_{l-k}^m \Phi^{(m)}(0) r_{l-k-m}.$$

Аналогичным образом получим, что

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) C S_1 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{2,2}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} \right) = \\ & = \sum_{k=0}^l C_{l+1}^k R^{(k)}(t) C S_1 \sum_{m=0}^{l-k} V_{2,2}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} - \\ & \quad - \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) C S_1 V_{2,2}(t) \sum_{m=0}^{l-k} C_{l-k}^m \Phi^{(m)}(0) r_{l-k-m}. \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

Продифференцировав (2.1.21), а также используя (2.1.25)–(2.1.28), получим равенства  $\tilde{q}'_{l,i+1} = \tilde{q}_{l+1,i+1}$ ,  $l = 0, \dots, p+1$ . Исходя из всего, выше сказанного, последовательность  $\tilde{q}_{0,i}$  будет сходиться при  $i \rightarrow \infty$  к функции  $\tilde{q}_0$ , причем равномерно на отрезке  $[0, T]$ , а последовательность  $\tilde{q}'_{0,i} = \tilde{q}_{1,i}$  будет сходиться при  $i \rightarrow \infty$  к функции  $\tilde{q}_1$  также равномерно на отрезке  $[0, T]$ . Следовательно, функция  $\tilde{q}_0$  непрерывно дифференцируема и  $\tilde{q}'_0 = \tilde{q}_1$ . Аналогично можно доказать  $\tilde{q}'_l = \tilde{q}_{l+1}$ ,  $l = 1, \dots, p+1$ , из которых следует, что

$$\tilde{q}_0 \equiv q \in C^{p+2}([0, T]; \mathcal{Y}) \quad \text{и} \quad q^{(l)} = \tilde{q}_l, \quad l = 1, \dots, p+2. \quad \square$$

Теперь, получим решение сингулярной задачи (2.1.7), (2.1.8), для этого перепишем ее в обозначениях [21]. Пусть  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{F}$  это банаховы пространства, операторы  $H_0$ ,  $H_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$  и  $(B_0^0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$ , оператор-функция  $f^0 = (\mathbb{I} - Q)\chi(t)q(t) + (\mathbb{I} - Q)f(t)$ , а функции  $u(t) = \omega(t)$ ,  $v_0^0 = \omega_0$ ,  $v_1^0 = \omega_1$  тогда

$$H_0 u''(t) = H_1 u'(t) + u(t) + (B_0^0)^{-1} f^0, \quad (2.1.29)$$

$$u(0) = v_0^0, \quad u'(0) = v_1^0. \quad (2.1.30)$$

**Теорема 2.1.3** [21] Пусть пучок операторов  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен и выполняется условие (1.2.1), причем точка  $\infty$  является полюсом порядка  $p \in \mathbb{N}_0$  для  $A$ -резольвенты операторного пучка  $\vec{B}$ . Пусть вектор-функция  $f^0 \in C^{p+2}([0, T]; \mathcal{F}^0)$ . Кроме этого,  $v_k^0 \in U^0$  – начальные значения,

которые удовлетворяют

$$v_k^0 = - \sum_{j=0}^p K_j^2(B_0^0)^{-1} \frac{d^{j+k}}{dt^{j+k}} f^0(0), \quad k = 0, 1. \quad (2.1.31)$$

Тогда решение  $u \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^0)$  задачи (2.1.29), (2.1.30) существует и представимо в следующем виде

$$u(t) = - \sum_{j=0}^p K_j^2(B_0^0)^{-1} \frac{d^j}{dt^j} f^0(t). \quad (2.1.32)$$

*Доказательство.* Все условия леммы 2.7.2 [21] выполнены, а начальные значения  $v_k^0$  удовлетворяют (2.1.31). Следовательно, существует решение обратной задачи (2.1.29), (2.1.30) и оно представимо в виде (2.1.32) для класса функций  $u \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^0)$ .  $\square$

Исходя из всего вышесказанного, в данном параграфе сформулируем условия однозначной разрешимости исходной обратной задачи (2.1.1)–(2.1.3).

**Теорема 2.1.4** Пусть пучок операторов  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен и выполняются условие (1.2.1), кроме того, точка  $\infty$  – полюс порядка  $p \in \mathbb{N}_0$   $A$ -резольвенты операторного пучка  $\vec{B}$ . Операторы  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ ,  $\mathcal{U}^0 \subset \ker C$ ,  $\Psi \in C^{p+4}([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $f \in C^{p+2}([0, T]; \mathcal{F})$ ,  $\chi \in C^{p+2}([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{F}))$ , также,  $\forall t \in [0, T]$  оператор  $C(A^1)^{-1}Q\chi$  обратим, причем принадлежит классу  $(C(A^1)^{-1}Q\chi)^{-1} \in C^{p+2}([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}))$  и выполняется условие согласования  $Cu_1 = \Psi'(0)$ , для некоторого начального значения  $u_1 \in \mathcal{U}^1$ , а значения  $w_k = (\mathbb{I} - P)v_k \in \mathcal{U}^0$  примут вид

$$w_k = - \sum_{j=0}^p K_j^2(B_0^0)^{-1} \frac{d^{j+k}}{dt^{j+k}} \left[ (\mathbb{I} - Q)(\chi(0)q(0) + f(0)) \right], \quad k = 0, 1. \quad (2.1.33)$$

Тогда существует единственное решение  $(v, q)$  для исследуемой обратной задачи (2.1.1)–(2.1.3), причем  $q \in C^{p+2}([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $v = u + w$ , где  $u \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^1)$  решение задачи (2.1.4)–(2.1.6), а функция  $w \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^0)$  является решением задачи (2.1.7), (2.1.8), которое представимо в виде

$$w(t) = - \sum_{j=0}^p K_j^2(B_0^0)^{-1} \frac{d^j}{dt^j} \left[ (\mathbb{I} - Q)(\chi(t)q(t) + f(t)) \right]. \quad (2.1.34)$$

*Доказательство.* Условия теорем 2.1.1 и 2.1.2 выполнены, а следовательно существует единственное решение  $(q, u)$  задачи (2.1.4)–(2.1.6), где  $u \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^1)$ , а  $q \in C^{p+2}([0, T]; \mathcal{Y})$ .

Применим теорему 2.1.3 и используем полученную гладкость функции  $q$ , тем самым, получим, что существует единственное решение  $w \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^0)$  рассматриваемой сингулярной задачи (2.1.7), (2.1.8) вида (2.1.34).  $\square$

## 2.2 Аналитическое исследование восстановления параметра внешней нагрузки

В данном параграфе приведена редукция исследуемой обратной задачи для математической модели Буссинеска – Лява к уравнению соболевского типа второго порядка, теорема о разрешимости которого была получена в предыдущем параграфе. Таким образом, получим достаточные условия для восстановления параметра внешней нагрузки. Для этого, сначала, зададим область  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ . Рассмотрим ранее представленную модель Буссинеска – Лява (1.3.1)–(1.3.3) в цилиндре  $\Omega \times [0; T]$

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')v_t + \beta(\Delta - \lambda'')v + qf. \quad (2.2.1)$$

с заданными начальными и граничным условиями

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (2.2.2)$$

$$v(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.2.3)$$

Дополнительно, зададим интегральное условие переопределения

$$\int_{\Omega} v(x, t)K(x)dx = \Phi(t), \quad (2.2.4)$$

где  $K(x)$  – заданная функция. Обратной задачей для математической модели Буссинеска – Лява назовем задачу отыскания функций  $q(t)$  и  $v(x, t)$  из (2.2.1)–(2.2.4). Условие переопределения (2.2.4), интегрального вида, возникло из необходимости нахождения, помимо функции  $v(x, t)$ , параметра  $q(t)$  – коэффициент внешней нагрузки. Обычно, условие определения такого вида означает некоторое усреднение функции решения  $v(x, t)$  на всей рассматриваемой области  $\Omega$  к функции  $\Phi(t)$ , указанной в правой части (2.2.4).

Задачу (2.2.1)–(2.2.4) редуцируем к рассмотренной в предыдущем параграфе, обратной задаче (2.1.1)–(2.1.3) для уравнения соболевского типа второго порядка при  $t \in [0, T]$

$$Av''(t) = B_1v'(t) + B_0v(t) + \chi(t)q(t), \quad (2.2.5)$$

с условиями

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1, \quad (2.2.6)$$

$$Cv(t) = \Psi(t). \quad (2.2.7)$$

Для редукции положим

$$\mathcal{U} = \{v \in W_q^{l+2}(\Omega) : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad \mathcal{F} = W_q^l(\Omega), \quad \mathcal{Y} = \mathcal{F},$$

где  $W_q^l(\Omega)$  – пространства Соболева,  $2 \leq q < \infty$ ,  $l = 0, 1, \dots$ . Зададим операторы

$$A = (\lambda - \Delta), \quad B_0 = \beta(\Delta - \lambda''), \quad B_1 = \alpha(\Delta - \lambda'), \quad Cv = \int_{\Omega} v(x)K(x)dx,$$

функцию  $\Psi(t) = \Phi(t)$  и оператор умножения на функцию  $\chi(t) = f(x, t)$ . Здесь  $\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{Y}$  – банаховы пространства, операторы  $A, B_0, B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ ,  $\ker A \neq \{0\}$ ,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ ,  $\chi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{F})$ , а функция  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$ .

Воспользуемся результатами главы 1 и параграфа 2.1. Пусть операторный пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен и выполняется (1.2.1), тогда

$$v(t) = (\mathbb{I} - P)v(t) + Pv(t) = w(t) + u(t).$$

Пусть  $\mathcal{U}^0 \subset \ker C$ . Тогда применив теорему 3.1.1 и лемму 1.2.1 обратная задача (2.2.5)–(2.2.7) эквивалентна задаче нахождения функций  $u \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^1)$ ,  $w \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^0)$ ,  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$  из соотношений

$$u''(t) = S_1u'(t) + S_0u(t) + (A^1)^{-1}Q\chi(t)q(t), \quad (2.2.8)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad (2.2.9)$$

$$Cu(t) = \Psi(t) \equiv Cv(t), \quad (2.2.10)$$

$$H_0w''(t) = H_1w'(t) + w(t) + (B_0^0)^{-1}(\mathbb{I} - Q)\chi(t)q(t), \quad (2.2.11)$$

$$w(0) = w_0, \quad w'(0) = w_1, \quad (2.2.12)$$

где  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{\lambda_k \neq \lambda} \frac{\beta(\lambda_k - \lambda'')}{\lambda - \lambda_k} \langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k, & S_1 &= \sum_{\lambda_k \neq \lambda} \frac{\alpha(\lambda_k - \lambda')}{\lambda - \lambda_k} \langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k, \\ u_0 &= \sum_{\lambda_k \neq \lambda} \langle v_0, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k, & u_1 &= \sum_{\lambda_k \neq \lambda} \langle v_1, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k, \\ \omega_0 &= \sum_{\lambda_k = \lambda} \langle v_0, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k, & \omega_1 &= \sum_{\lambda_k = \lambda} \langle v_1, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k \\ H_0 &= \sum_{\lambda_k = \lambda} \frac{\lambda - \lambda_k}{\beta(\lambda_k - \lambda'')} \langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k, & H_1 &= \sum_{\lambda_k = \lambda} \frac{\alpha(\lambda_k - \lambda')}{\beta(\lambda_k - \lambda'')} \langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k. \end{aligned}$$

**Теорема 2.2.1** Пусть выполняется одно из условий (i) или (iii) леммы 1.3.1.  $K, u_0, u_1 \in \mathcal{U}^1, \Phi \in C^4([0, T]; \mathcal{Y}), f \in C^4([0, T]; \mathcal{F}), \sum_{\lambda \neq \lambda_k} \frac{\langle f(\cdot, t), K \rangle}{\lambda - \lambda_k} \neq 0$ . Кроме этого, выполнено, при некотором начальном значении  $v_1 \in \mathcal{U}^1$ , условие согласования  $\int_{\Omega} v_1(x) K(x) dx = \Phi'(0)$ , а начальные значения  $w_k = (\mathbb{I} - P)v_k \in \mathcal{U}^0$  удовлетворяют

$$\langle v_0 + \frac{q(0)f(\cdot, 0)}{\beta(\lambda_k - \lambda'')}, \mathbb{X}_k \rangle = 0 \quad \text{для } k : \lambda_k = \lambda, \quad (2.2.13)$$

$$\langle v_1 + \frac{q(0)f_t(\cdot, 0) + q'(0)f(\cdot, 0)}{\beta(\lambda_k - \lambda'')}, \mathbb{X}_k \rangle = 0 \quad \text{для } k : \lambda_k = \lambda. \quad (2.2.14)$$

Тогда существует решение  $(v, q)$  обратной задачи (2.2.1)–(2.2.4), которое единственно, причем  $q \in C^2([0, T]; \mathcal{Y}), v = u + w$ , где  $u \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^1)$  это решение регулярной задачи (2.2.8)–(2.2.10), а функция  $w \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^0)$  является решением сингулярной задачи (2.2.11), (2.2.12) которое представимо в виде

$$w(t) = - \sum_{\lambda = \lambda_k} \langle \frac{q(t)f(\cdot, t)}{\beta(\lambda_k - \lambda'')}, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k. \quad (2.2.15)$$

*Доказательство.* В силу леммы 1.3.1 получим, что пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен и выполнено условие (1.2.1), причем  $\infty$  – устранимая особая точка  $A$ -резольвенты операторного пучка  $\vec{B}$ .

Получим условие (2.2.13). Воспользуемся (2.1.33) при  $p = 0, k = 0$

$$w_0 = -K_0^2(B_0^0)^{-1} \left( (\mathbb{I} - Q) (\chi(0)q(0)) \right).$$



Теперь, используем  $w_0 = (\mathbb{I} - P)v_0$ ,  $\chi(0) = f(x, 0)$ , а из определения 1.2.3 возьмем  $K_0^2 = \mathbb{I}$ , следовательно

$$(\mathbb{I} - P)v_0 = -(B_0^0)^{-1} \left[ (\mathbb{I} - Q)(q(0)f(\cdot, 0)) \right].$$

Подействуем следующими операторами

$$\mathbb{I} - P = \sum_{\lambda=\lambda_k} \langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k \text{ получен из (1.5.12),}$$

$\mathbb{I} - Q$  с тем же видом что и  $\mathbb{I} - P$ , но определенном на  $\mathcal{F}$ ,

$$(B_0^0)^{-1} = \sum_{\lambda=\lambda_k} \frac{\langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle}{\beta(\lambda_k - \lambda'')} \mathbb{X}_k,$$

получим

$$\sum_{\lambda=\lambda_k} \langle v_0, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k = - \sum_{\lambda=\lambda_k} \frac{\langle q(0)f(\cdot, 0), \mathbb{X}_k \rangle}{\beta(\lambda_k - \lambda'')} \mathbb{X}_k.$$

Следовательно, осталось лишь перенести все в одну сторону

$$\langle v_0 + \frac{q(0)f(\cdot, 0)}{\beta(\lambda_k - \lambda'')}, \mathbb{X}_k \rangle = 0 \text{ для } k : \lambda_k = \lambda.$$

Получим условие (2.2.14). Воспользуемся (2.1.33) при  $p = 0$ ,  $k = 1$ ,  $\chi(0) = f(x, 0)$ , получим

$$w_1 = -K_0^2(B_0^0)^{-1} \frac{d}{dt} \left[ (\mathbb{I} - Q)(q(t)f(\cdot, t)) \right].$$

Начнем поочередно преобразовывать правую часть получившегося выражения

$$w_1 = -K_0^2(B_0^0)^{-1} \sum_{\lambda=\lambda_k} \langle q(0)f_t(\cdot, 0) + q'(0)f(\cdot, 0), \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k.$$

$$w_1 = - \sum_{\lambda=\lambda_k} \left\langle \frac{q(0)f_t(\cdot, 0) + q'(0)f(\cdot, 0)}{\beta(\lambda_k - \lambda'')}, \mathbb{X}_k \right\rangle \mathbb{X}_k.$$

Теперь, воспользуемся  $w_1 = (\mathbb{I} - P)v_1$  и подействуем оператором  $\mathbb{I} - P$  на предыдущее выражение

$$\sum_{\lambda=\lambda_k} \langle v_1, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k = - \sum_{\lambda=\lambda_k} \left\langle \frac{q(0)f_t(\cdot, 0) + q'(0)f(\cdot, 0)}{\beta(\lambda_k - \lambda'')}, \mathbb{X}_k \right\rangle \mathbb{X}_k.$$

Перенеся все в левую часть, получим

$$\langle v_1 + \frac{q(0)f_t(\cdot, 0) + q'(0)f(\cdot, 0)}{\beta(\lambda_k - \lambda'')}, \mathbb{X}_k \rangle = 0 \text{ для } k : \lambda_k = \lambda.$$

Теперь, получим выражение (2.2.15). Воспользуемся (2.1.34) при  $p = 0$ ,  $\chi(t) = f(x, t)$ , получим

$$w(t) = -K_0^2(B_0^0)^{-1} \left[ (\mathbb{I} - Q)(q(t)f(\cdot, t)) \right].$$

Будем поочередно преобразовывать правую часть получившегося выражения

$$w(t) = -K_0^2(B_0^0)^{-1} \sum_{\lambda=\lambda_k} \langle q(t)f(\cdot, t), \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k.$$

$$w(t) = -K_0^2 \sum_{\lambda=\lambda_k} \left\langle \frac{q(t)f(\cdot, t)}{\beta(\lambda_k - \lambda'')}, \mathbb{X}_k \right\rangle \mathbb{X}_k.$$

$$w(t) = - \sum_{\lambda=\lambda_k} \left\langle \frac{q(t)f(\cdot, t)}{\beta(\lambda_k - \lambda'')}, \mathbb{X}_k \right\rangle \mathbb{X}_k.$$

Так как  $K \in \mathcal{U}^1$ , тогда  $\mathcal{U}^0 \subset \ker C$ . Для  $y \in \mathcal{Y}$  в силу ортонормированности системы собственных функций в  $L_2(\Omega)$  имеем

$$C(A^1)^{-1}Qy = \left( \sum_{\lambda \neq \lambda_k} \frac{\langle f(\cdot, t), \mathbb{X}_k \rangle \langle \mathbb{X}_k, K \rangle}{\lambda - \lambda_k} \right) y = \left( \sum_{\lambda \neq \lambda_k} \frac{\langle f(\cdot, t), K \rangle}{\lambda - \lambda_k} \right) y.$$

Если выполнено

$$\sum_{\lambda \neq \lambda_k} \frac{\langle f(\cdot, t), K \rangle}{\lambda - \lambda_k} \neq 0,$$

то для оператора  $C(A^1)^{-1}Q$  существует обратный из  $\mathcal{Y}$ . В силу условий на  $\chi(t) = f(x, t)$  обратный оператор  $(C(A^1)^{-1}Q)^{-1}$  будет непрерывно дифференцируемым по  $t$  в силу условий на функцию  $f(\cdot, t)$ .

Все условия теоремы 2.1.4 выполнены, поэтому решение  $(v, q)$  обратной задачи (2.2.1)–(2.2.4) существует и единственно, причем  $q \in C^2([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $v = u + w$ , где  $u \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^1)$  – решение регулярной задачи (2.2.8)–(2.2.10), а функция  $w \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^0)$  является решением сингулярной задачи (2.2.11), (2.2.9) которое представимо в виде (2.2.15).  $\square$

### 2.3 Алгоритм численного исследования математической модели Буссинеска – Лява с восстановлением параметра внешних сил

На основе полученных выше результатов, разработан алгоритм численного метода для нахождения решения обратной задачи для математической

модели Буссинеска – Лява

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')v_t + \beta(\Delta - \lambda'')v + qf, \quad (2.3.1)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (2.3.2)$$

$$v(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.3.3)$$

$$\int_{\Omega} v(x, t)K(x)dx = \Phi(t), \quad (2.3.4)$$

где заданы функции:  $K(x)$ ,  $f(x, t)$ ,  $v_0(x)$ ,  $v_1(x)$ . Для нахождения приближенного решения математической модели (2.3.1)–(2.3.4) требуется найти приближенное значение двух функций  $q(t)$  и  $v(x, t)$ , удовлетворяющих (2.3.1)–(2.3.4).

**Этап 1.** Нахождение решения вспомогательной задачи Штурма – Ливилля

$$\mathbb{X}_k''(x) - \lambda_k \mathbb{X}_k(x) = 0, \quad \mathbb{X}_k(0) = \mathbb{X}_k(l) = 0$$

получив собственные функции  $\mathbb{X}_k$  и собственные значения  $\lambda_k$ .

**Этап 2.** Нахождение выражения для функции  $q[i+1](t)$ , для проведения последовательных приближений. Используя формулу (2.1.15), при учете, что  $\mu_k^{1,2}$  (точки относительного спектра) – корни уравнения

$$(\lambda - \lambda_k)\mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k)\mu + \beta(\lambda'' - \lambda_k) = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} q[i+1](t) = & q_0(t) - \frac{1}{\sum_1 \frac{\langle f(x,t), K(x) \rangle}{\lambda - \lambda_k}} \times \\ & \times \int_0^t \left( \sum_1 \frac{(e^{\mu_k^1(t-s)} - e^{\mu_k^2(t-s)})\beta(\lambda_k - \lambda'')}{(\mu_k^1 - \mu_k^2)(\lambda - \lambda_k)^2} \langle f(x, s)q[i](s), K(x) \rangle + \right. \\ & \left. + \sum_1 \frac{(\mu_k^1 e^{\mu_k^1(t-s)} - \mu_k^2 e^{\mu_k^2(t-s)})\alpha(\lambda_k - \lambda')}{(\mu_k^1 - \mu_k^2)(\lambda - \lambda_k)^2} \langle f(x, s)q[i](s), K(x) \rangle \right) ds - \\ & - \int_0^t \frac{\langle f(x, s)q[i](s), K(x) \rangle}{2 \sum_2 \frac{\langle f(x,t), K(x) \rangle}{\lambda - \lambda_k}} \times \\ & \times \left( \sum_2 \frac{\mu_k^1 e^{\mu_k^1(t-s)}\beta(\lambda_k - \lambda'') + (e^{\mu_k^1(t-s)} + (\mu_k^1)^2 e^{\mu_k^1(t-s)})\alpha(\lambda_k - \lambda')}{(\lambda - \lambda_k)^2} \right) ds - \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

$$-\frac{1}{\sum_3 \frac{\langle f(x,t), K(x) \rangle}{\lambda - \lambda_k}} \int_0^t \left( \sum_3 \sin(t-s) \frac{\beta(\lambda_k - \lambda'')}{(\lambda - \lambda_k)^2} \langle f(x,s)q[i](s), K(x) \rangle - \right. \\ \left. - \sum_3 \left( \cos(t-s) + \frac{\lambda(\lambda_k - \lambda')}{2(\lambda - \lambda_k)} \sin(t-s) \right) \frac{\alpha(\lambda_k - \lambda')}{(\lambda - \lambda_k)^2} \langle f(x,s)q[i](s), K(x) \rangle \right) ds,$$

где  $\sum_1$  означает сумму при  $k : (\mu_k^{1,2} \in \mathbb{R}) \wedge (\lambda_k \neq \lambda) \wedge (\mu_k^1 \neq \mu_k^2)$ ,  $\sum_2$  означает сумму при  $k : (\mu_k^{1,2} \in \mathbb{R}) \wedge (\lambda_k \neq \lambda) \wedge (\mu_k^1 = \mu_k^2)$ ,  $\sum_3$  означает сумму при  $k : (\mu_k^{1,2} \in \mathbb{C}) \wedge (\lambda_k \neq \lambda)$ , а элемент  $q_0(t)$  получен из (2.1.16) и примет вид:

$$q_0(t) = \frac{1}{\sum_1 \frac{\langle f(x,t), K(x) \rangle}{\lambda - \lambda_k}} \left[ \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} - \sum_1 \frac{\beta(\lambda_k - \lambda'')}{(\lambda - \lambda_k)^2} \langle v_0(x), K(x) \rangle \times \right. \\ \times \frac{\left( \mu_k^1(\lambda - \lambda_k) - \alpha(\lambda_k - \lambda') \right) e^{\mu_k^1 t} - \left( \mu_k^2(\lambda - \lambda_k) - \alpha(\lambda_k - \lambda') \right) e^{\mu_k^2 t}}{\mu_k^1 - \mu_k^2} - \\ - \sum_1 \frac{(e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}) \alpha(\lambda_k - \lambda') \beta(\lambda_k - \lambda'')}{(\mu_k^1 - \mu_k^2)(\lambda - \lambda_k)^2} \langle v_0(x), K(x) \rangle - \\ - \sum_1 \frac{(e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}) \beta(\lambda_k - \lambda'')}{(\mu_k^1 - \mu_k^2)(\lambda - \lambda_k)} \langle v_1(x), K(x) \rangle - \\ \left. - \sum_1 \frac{(\mu_k^1 e^{\mu_k^1 t} - \mu_k^2 e^{\mu_k^2 t}) \alpha(\lambda_k - \lambda')}{(\mu_k^1 - \mu_k^2)(\lambda - \lambda_k)} \langle v_1(x), K(x) \rangle \right] + \\ + \frac{1}{4 \sum_2 \frac{\langle f(x,t), K(x) \rangle}{\lambda - \lambda_k}} \left[ \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} - \langle v_0(x), K(x) \rangle \times \right. \\ \times \sum_2 \left( e^{\mu_k^1 t} + (\mu_k^1)^2 e^{\mu_k^1 t} - \frac{\alpha(\lambda_k - \lambda') \mu_k^1 e^{\mu_k^1 t}}{\lambda - \lambda_k} \right) \frac{\beta(\lambda_k - \lambda'')}{\lambda - \lambda_k} - \\ - \sum_2 \frac{\beta(\lambda_k - \lambda'') \mu_k^1 e^{\mu_k^1 t} \alpha(\lambda_k - \lambda')}{(\lambda - \lambda_k)^2} \langle v_0(x), K(x) \rangle - \\ - \sum_2 \frac{\beta(\lambda_k - \lambda'') \mu_k^1 e^{\mu_k^1 t}}{\lambda - \lambda_k} \langle v_1(x), K(x) \rangle - \\ \left. - \sum_2 \frac{\alpha(\lambda_k - \lambda') \left( e^{\mu_k^1 t} + (\mu_k^1)^2 e^{\mu_k^1 t} \right)}{\lambda - \lambda_k} \langle v_1(x), K(x) \rangle \right] + \\ + \frac{1}{\sum_3 \frac{\langle f(x,t), K(x) \rangle}{\lambda - \lambda_k}} \left[ \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} - \sum_3 \frac{\beta(\lambda_k - \lambda'')}{(\lambda - \lambda_k)^2} \langle v_0(x), K(x) \rangle \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( (\lambda - \lambda_k) \cos(t) + \frac{\alpha(\lambda_k - \lambda')}{2} \sin(t) - \alpha(\lambda_k - \lambda') \sin(t) \right) - \\
& - \sum_3 \sin(t) \frac{\alpha(\lambda_k - \lambda') \beta(\lambda_k - \lambda'')}{(\lambda - \lambda_k)^2} \langle v_0(x), K(x) \rangle - \\
& - \sum_3 \sin(t) \frac{\beta(\lambda_k - \lambda'')}{\lambda - \lambda_k} \langle v_1(x), K(x) \rangle - \\
& - \sum_3 \left( \cos(t) + \frac{\alpha(\lambda_k - \lambda') \sin(t)}{2(\lambda - \lambda_k)} \right) \frac{\alpha(\lambda_k - \lambda')}{\lambda - \lambda_k} \langle v_1(x), K(x) \rangle \Big].
\end{aligned}$$

**Этап 3.** Проведение процедуры последовательных приближений для функции  $q(t)$ . Для этого, сначала, зададим начальное приближение  $q[0](t) = 0$ . Последующее приближение  $q[1](t)$  найдем из формулы (2.3.5), подставив предыдущее (начальное) приближение  $q[0](t)$ . Затем необходимо проверить норму разности двух полученных приближений  $\|q[1](t) - q[0](t)\|_{L_2(\Omega)}$  и если она превышает заданное допустимое значение погрешности, то вычисляется следующее приближение  $q[2](t)$ , также, из формулы (2.3.5), с учетом полученного приближения  $q[1](t)$ . Этот процесс повторяется до тех пор, пока оценка  $\|q[i+1](t) - q[i](t)\|_{L_2(\Omega)}$  не достигнет значения, меньшего либо равного допустимому отклонению между последовательными приближениями функции  $q(t)$ . В силу теоремы 2.2.1 искомая оценка будет достигнута за конечное число шагов. Как только она будет получена, произойдет остановка процедуры последовательных приближений, а за приближенное значение функции  $q(t)$  возьмется подсчитанное по формуле (2.3.5) на  $i$ -ом шаге приближение  $q[i+1](t)$ .

**Этап 4.** Представим решение  $u(x, t)$  регулярной задачи (2.2.8)–(2.2.10) в виде галеркинских приближений:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^N T_k(t) \mathbb{X}_k(x) \quad (2.3.6)$$

где  $\mathbb{X}_k(x)$  – ортонормированные собственные функции оператора  $-\Delta$ , полученные на этапе 1, а  $T_k(t)$  – функции только переменной  $t$ .

Подставляя приближенное решение (2.3.6) в уравнение (2.3.1), получим

$$\sum_{k=1}^N \mathbb{X}_k(x) \left( (\lambda - \lambda_k) T_k''(t) + \alpha(\lambda' - \lambda_k) T_k'(t) + \beta(\lambda'' - \lambda_k) T_k(t) \right) + qf = 0. \quad (2.3.7)$$

Аппроксимируем начальные функции  $v_0(x)$  и  $v_1(x)$

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^N v_0^k \mathbb{X}_k, \quad \text{где } v_0^k = \langle v_0, \mathbb{X}_k \rangle_{L_2(\Omega)},$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^N v_1^k \mathbb{X}_k, \quad \text{где } v_1^k = \langle v_1, \mathbb{X}_k \rangle_{L_2(\Omega)}.$$

Умножим получившееся уравнение (2.3.7) на  $\mathbb{X}_s(x)$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$  скалярно в  $L_2(\Omega)$ . Получим следующую систему:

$$\begin{cases} (\lambda - \lambda_1)T_1''(t) + \alpha(\lambda' - \lambda_1)T_1'(t) + \beta(\lambda'' - \lambda_1)T_1(t) = - \langle qf, \mathbb{X}_1(x) \rangle, \\ (\lambda - \lambda_2)T_2''(t) + \alpha(\lambda' - \lambda_2)T_2'(t) + \beta(\lambda'' - \lambda_2)T_2(t) = - \langle qf, \mathbb{X}_2(x) \rangle, \\ \dots \\ (\lambda - \lambda_N)T_N''(t) + \alpha(\lambda' - \lambda_N)T_N'(t) + \beta(\lambda'' - \lambda_N)T_N(t) = - \langle qf, \mathbb{X}_N(x) \rangle. \end{cases}$$

В зависимости от  $\alpha, \lambda, \lambda'$  уравнения могут быть алгебраическими, или дифференциальными первого или второго порядка. Решим получившуюся систему уравнений вместе с начальными условиями, относительно  $T_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .

**Этап 5.** Найдем решение  $w(x, t)$  сингулярной задачи (2.2.11), (2.2.9), используя формулу (2.2.15), которая принимает вид

$$w(t) = - \sum_{\lambda=\lambda_k} \left\langle \frac{q(t)f(\cdot, t)}{\beta(\lambda_k - \lambda'')}, \mathbb{X}_k \right\rangle \mathbb{X}_k.$$

**Этап 6.** Складывая полученные решения  $u(x, t)$  регулярной и  $w(x, t)$  сингулярной задач, получим приближенное решение

$$v(x, t) = u(x, t) + w(x, t)$$

исходной задачи (2.3.1)–(2.3.4).

## 2.4 Описание программного комплекса для моделирования продольных колебаний в тонком упругом стержне с восстановлением коэффициента внешней нагрузки на стержень

Представленный ранее алгоритм был реализован в среде Maple в виде программного комплекса [115]. Он предназначен для специалистов в области математической физики и математического моделирования. Исследуемая конструкция состоит из тонкого упругого закрепленного на концах стержня. Комплекс

позволяет находить решения как прямой, так и обратной задачи для математической модели Буссинеска – Лява, которая описывает продольные колебания в конструкции с учетом внешней нагрузки. Решение находится в виде галеркинских приближений, а для восстановления внешней нагрузки используется метод последовательных приближений. В программе реализованы формы для ввода данных, по которым будет получено решение выбранной задачи, с построением графиков искомых функций.

Программный комплекс состоит из файла с командами, которые выполняются последовательно после запуска. На входе задаются начальные параметры и функции. На выходе выводятся графики и функции полученного решения. Приведем описание разработанного программного комплекса решения обратной задачи для математической модели Буссинеска – Лява (2.3.1)–(2.3.4) в стержне по шагам, соответствующим блокам, схемы представленной на рисунках 2.4.1–2.4.2.

Начало программы.

**Шаг 0.** Подключение вспомогательных пакетов: окна ввода и вывода – «with(Maplets[Elements])»; построение графиков – «with(plots)».

**Шаг 1.** Ввод параметров:  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – параметры уравнения Буссинеска – Лява;  $l$  – длина конструкции;  $T$  – ограничение по времени;  $\varepsilon$  – допустимое отклонение между соседними последовательными приближениями функции  $q(t)$ ;  $N$  – необходимое количество слагаемых галеркинских приближений с помощью функции отображения окон для ввода «Maplets[Display](Maplet(...))».

**Шаг 2.** Ввод функций:  $f(x, t)$  – известная функция внешней нагрузки;  $v_0(x)$  – начальное положение стержня;  $v_1(x)$  – начальная скорость;  $K(x)$  – ядро в условии переопределения;  $F(t)$  – правая часть условия переопределения. Осуществляется аналогично вводу параметров.

**Шаг 3.** Проверка согласования введенных функций  $v_0(x)$  и  $v_1(x)$  с граничными условиями (2.3.3). Если условие не выполнено, тогда переход к следующему шагу, иначе переход к шагу 5. Осуществляется с помощью оператора выбора «if ... then ... else ... end if».

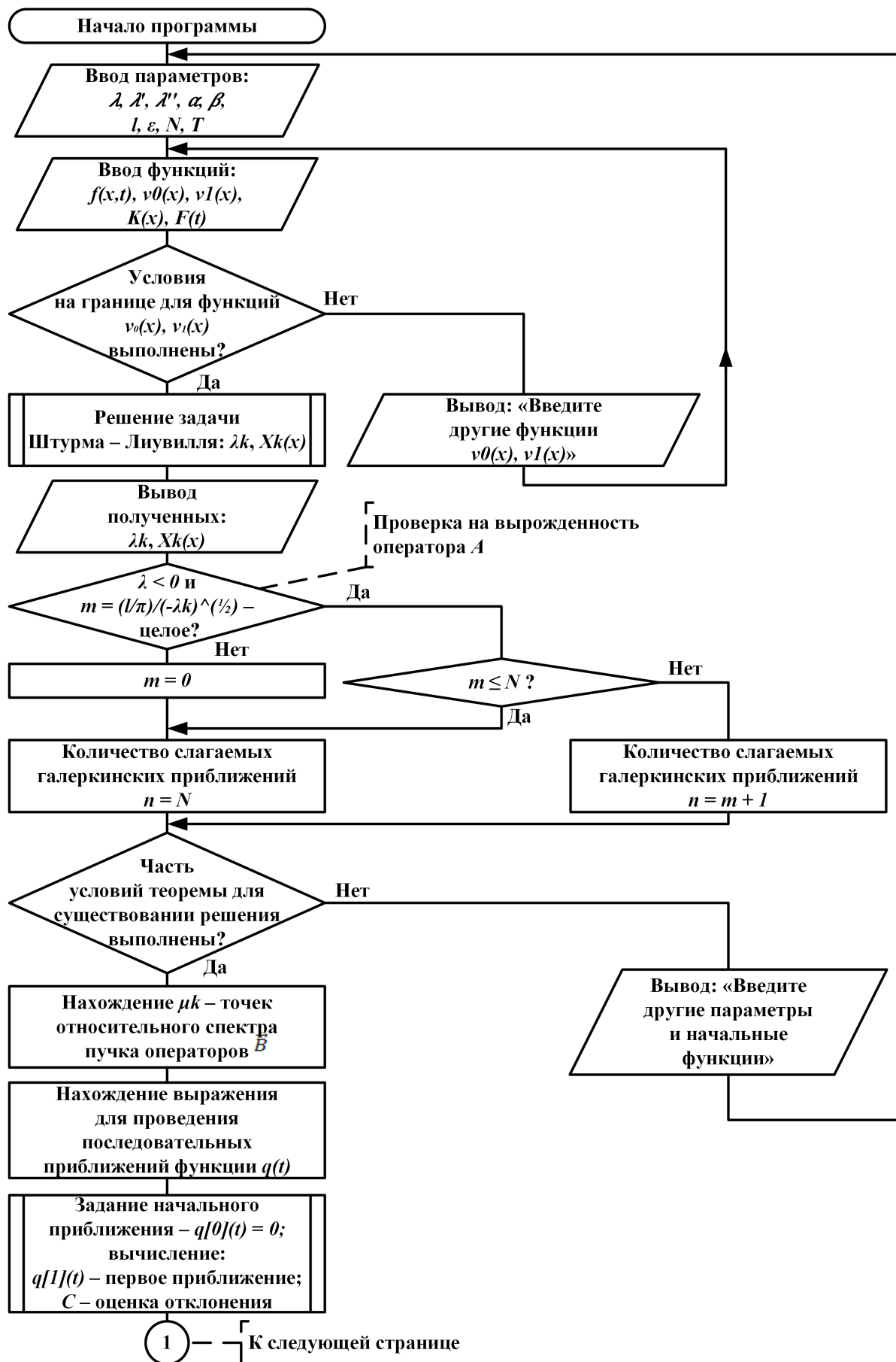


Рисунок 2.4.1 – Схема алгоритма «Обратная задача для математической модели Бусинеска – Лява в стержне» (часть 1)



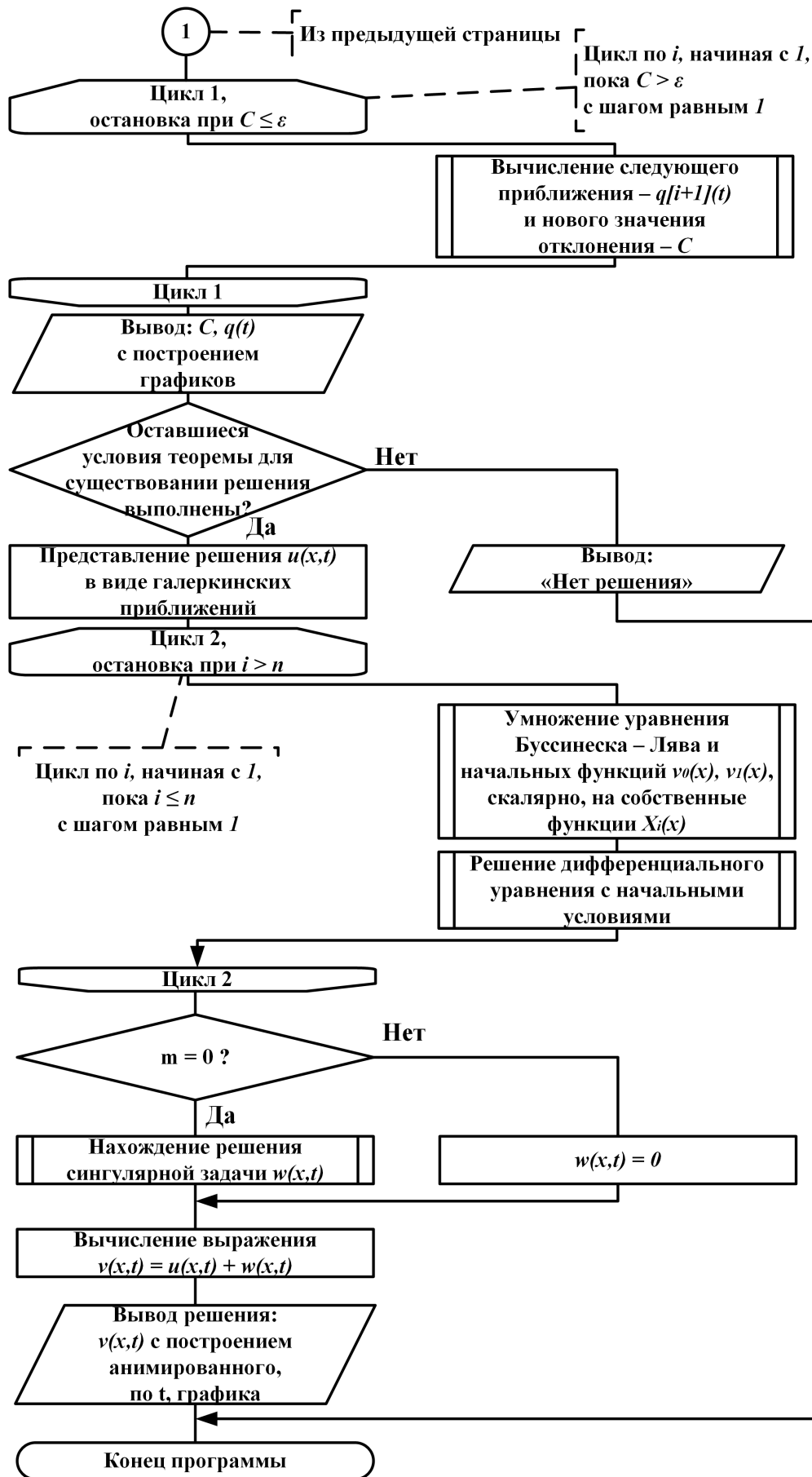


Рисунок 2.4.2 – Схема алгоритма «Обратная задача для математической модели Буссинеска – Лява в стержне» (часть 2)

**Шаг 4.** Вывод: «Введите другие функции  $v_0(x), v_1(x)$ ». Переход к шагу 2. Осуществляется с помощью функции создания окна «Window(...)».

**Шаг 5.** Решение задачи Штурма – Лиувилля. В результате получаем: собственные значения  $\lambda_k$  и собственные функции  $\mathbb{X}_k$ .

**Шаг 5.1.** Нахождение общего решения дифференциального уравнения из соответствующей задачи Штурма – Лиувилля. Осуществляется с помощью функции решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) «dsolve(...)».

**Шаг 5.2.** Формирование системы уравнений, представленной в виде матрицы, относительно неизвестных коэффициентов, полученных из условий задачи Штурма – Лиувилля. Осуществляется с помощью операторной функции генерации матрицы системы «linalg[genmatrix](...)».

**Шаг 5.3.** Вычисление определителя полученной системы. Осуществляется с помощью функции нахождения определителя матрицы «linalg[det](...)».

**Шаг 5.4.** Нахождение  $\lambda_k$  из равенства 0 полученного определителя. Осуществляется с помощью функции решения уравнения «solve(...)».

**Шаг 5.5.** Нахождение собственных функций  $\mathbb{X}_k(x)$  при уже полученных собственных значениях  $\lambda_k$ . Осуществляется с помощью функции решения ОДУ «dsolve(...)».

**Шаг 5.6.** Вычисление константы в собственных функциях  $\mathbb{X}_k(x)$  из условия нормировки. Осуществляется с помощью функций вычисления определенного интеграла «int(...)», зависимости от переменных «unapply(...)» и решения уравнения «solve(...)».

**Шаг 6.** Вывод полученного решения задачи Штурма – Лиувилля. Осуществляется с помощью функции создания окна «Window(...)».

**Шаг 7.** Исследование параметра уравнения  $\lambda$  на возможное совпадение с собственными значениями  $\lambda_k$ , другими словами, определение, является ли оператор  $A$  вырожденным. Для этого достаточно проверить два условия  $\lambda < 0$  и что число  $m = \frac{l\sqrt{-\lambda_k}}{\pi}$  будет целым. Если совпадение обнаружено, тогда переход к следующему шагу, иначе переход к шагу 10. Осуществляется с помощью оператора выбора «if ...».

**Шаг 8.** Проверка, что  $k$ , при котором обнаружено совпадение, меньше или равен введенному ранее значению  $N$ , другими словами, проверка того, что  $m \leq N$ . Если условие не выполнено, тогда переход к следующему шагу, иначе переход к шагу 11. Осуществляется с помощью оператора выбора «if ...».

**Шаг 9.** Задание количества слагаемых галеркинских приближений  $n = (m + 1)$ . Переход к шагу 12. Осуществляется с помощью оператора присваивания «...:=...».

**Шаг 10.** Задание значения  $m = 0$ , означающего что оператор  $A$  не вырожден. Осуществляется с помощью оператора присваивания «...:=...».

**Шаг 11.** Задание количества слагаемых галеркинских приближений  $n = N$ , то есть оно будет равно введенному ранее параметру  $N$ . Осуществляется с помощью оператора присваивания «...:=...».

**Шаг 12.** Проверка трех условий из теоремы 2.2.1 «о существовании и единственности решения», в которых не участвует функция  $q(t)$ , на выполнение:

- i*) одного из условий  $\lambda \notin \sigma(\Delta)$  или  $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$ ;
- ii*) условия  $\sum_{\lambda \neq \lambda_k} \frac{\langle f(\cdot, t), K \rangle}{\lambda - \lambda_k} \neq 0$ ;
- iii*) при заданном  $v_1 \in \mathcal{U}^1$  условия  $\int_{\Omega} v_1(x) K(x) dx = \Phi'(0)$ .

Если хотя бы одно условие не выполнено, то переход к следующему шагу, иначе переход к шагу 14. Осуществляется с помощью оператора выбора «if ...» и функции интегрирования «int(...)».

**Шаг 13.** Вывод: «Введите другие параметры и начальные функции». Переход к шагу 1. Осуществляется с помощью функции вывода окна «Window(...)».

**Шаг 14.** Нахождение точек  $\mu_k$  относительного спектра пучка операторов  $\vec{B}$ . Распределение  $\mu_k$  по трем суммам, когда они: вещественные, комплексные или равны между собой. Осуществляется с помощью функции решения уравнения «solve(...)», операторов цикла «for ... from ... to ... do ... end do» и выбора «if ...».

**Шаг 15.** Нахождение выражения  $q[i + 1](t)$  для проведения последовательных приближений искомой функции  $q(t)$  из формулы (2.3.5). Осуществляется с помощью функции интегрирования «int(...)», операторов выбора «if ...» и цикла «for ...».

**Шаг 16.** Задание начального приближения  $q[0](t) = 0$  для функции  $q(t)$ . Вычисление первого приближения  $q[1](t)$  по заданному начальному приближению  $q[0](t) = 0$ , используя формулу (2.3.5). Вычисление оценки отклонения последовательных приближений  $C$ , которая равна норме разности 1-го приближения  $q[1](t)$  и начального  $q[0](t)$ . Осуществляется с помощью оператора присваивания «...:=...», функций вычисления квадратного корня «sqrt(...)», подстановки «subs(...)» и интегрирования «int(...)».

**Шаг 17.** Начало цикла 1, по переменной  $i$  от 1 пока  $C > \varepsilon$ . Если условие остановки цикла не выполнено, то переход к следующему шагу, иначе переход к шагу 20. Осуществляется с помощью оператора цикла «while ... do ... end do».

**Шаг 18.** Вычисление последующего приближения  $q[i + 1](t)$  используя предыдущее приближение  $q[i](t)$ , по формуле (2.3.5). Вычисление нового значения отклонения  $C$ , которая равна норме разности функций  $(i + 1)$ -го приближения и  $i$ -го. Осуществляется с помощью функций подстановки «subs(...)», интегрирования «int(...)» и вычисления квадратного корня «sqrt(...)».

**Шаг 19.** Следующая итерацией цикла 1 по индексу  $i$  с шагом, равным единице. Переход к шагу 17. Осуществляется с помощью оператора присваивания «...:=...».

**Шаг 20.** Вывод найденного приближенного решения функции  $q(t)$ , а также полученного значения для отклонения  $C$  между последовательными приближениями функции  $q(t)$ . Они соответствуют последнему шагу проведения последовательных приближений. Построение графика найденной функции  $q(t)$  и графика функций всех полученных последовательных приближений. Осуществляется с помощью функций создания окна «Window(...)» и построения графика «plot(...)».

**Шаг 21.** Проверка двух оставшихся условий согласования:

$$i) < v_0 + \frac{q(0)f(\cdot,0)}{\beta(\lambda_k - \lambda'')}, \mathbb{X}_k >= 0 \text{ для } k : \lambda_k = \lambda;$$

$$ii) < v_1 + \frac{q(0)f_t(\cdot,0) + q'(0)f(\cdot,0)}{\beta(\lambda_k - \lambda'')}, \mathbb{X}_k >= 0 \text{ для } k : \lambda_k = \lambda$$

найденной функции  $q(t)$  и начальных функций из теоремы 2.2.1 «о существовании и единственности решения». Если хотя бы одно условие не выполнено, то переход к следующему шагу, иначе переход к шагу 23. Осуществляется с

помощью оператора выбора «if ...» и функции интегрирования «int(...)».

**Шаг 22.** Вывод: «Нет решения». Переход к концу программы. Осуществляется с помощью функции создания окна «Window(...)».

**Шаг 23.** Представление решения  $u(x, t)$  в виде галеркинских приближений. Осуществляется с помощью функций суммирования «sum(...)» и зависимости от переменной «unapply(...)».

**Шаг 24.** Начало цикла 2, по переменной  $i$  от 1 пока  $i \leq n$ . Если условие остановки цикла не выполнено, то переход к следующему шагу, иначе переход к шагу 28. Осуществляется с помощью оператора цикла «for ...».

**Шаг 25.** Умножение уравнения Буссинеска – Лява и аппроксимированных начальных условий  $v_0(x), v_1(x)$ , скалярно на собственные функции  $X_i(x)$ . Осуществляется с помощью функции интегрирования «int(...)».

**Шаг 26.** Решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с начальными условиями. Осуществляется с помощью функции решения ОДУ «dsolve(...)».

**Шаг 27.** Следующая итерация цикла 2 по индексу  $i$  с шагом равным единице. Переход к шагу 24. Осуществляется с помощью оператора присваивания «...:=...».

**Шаг 28.** Проверка, что оператор  $A$  вырожден, осуществляется с помощью сравнения значения  $m$  с нулем. Если оператор не вырожден, переход к следующему шагу, иначе переход к шагу 30. Осуществляется с помощью оператора выбора «if ...»

**Шаг 29.** Присваивание решение сингулярной задачи значения, равного нулю. Переход к шагу 31. Осуществляется с помощью оператора присваивания «...:=...».

**Шаг 30.** Вычисление решения сингулярной задачи  $w(x, t)$  по формуле (2.2.15), указанной в теореме 2.2.1. Осуществляется с помощью функции интегрирования «int(...)» и оператора цикла «for ...».

**Шаг 31.** Вычисление функции  $v(x, t)$ , как суммы двух, полученных ранее, функций  $u(x, t)$  и  $w(x, t)$ . Осуществляется с помощью функций подстановки «subs(...)» и суммирования «sum(...)».

**Шаг 32.** Вывод полученной функции  $v(x, t)$  и построение ее анимированного графика, по переменной  $t$ . Осуществляется с помощью функций создания окна «Window(...)» и 2-х мерной анимации «animate(plot, ...)».

Конец программы.

## 2.5 Результаты обработки информации для моделирования продольных колебаний в стержне и восстановления параметра внешних сил

Приведем результаты проведения обработки информации по разработанному алгоритму, который был реализован в среде Maple в виде программного комплекса.

**Пример 2.5.1** Пусть задана следующая входная информация:

$$\lambda = 2, \lambda' = -2, \lambda'' = -2, \alpha = 5, \beta = 0.5,$$

$$\varepsilon = 1, N = 4, l = \pi, T = 1,$$

$$f(x, t) = \cos(x),$$

$$v_0(x) = \cos(2x) - 1, \quad v_1(x) = \frac{2(\cos(2x) - 1)}{\pi},$$

$$K(x) = \cos(x), \quad F(t) = -\cos(t).$$

Следовательно, обратная задача для математической модели Буссинеска – Лява (2.2.1)–(2.2.4) примет вид

$$(2 - \Delta)v_{tt} = 5(\Delta + 2)v_t + \frac{(\Delta + 2)v}{2} + q(t) \cos(x),$$

$$v(x, 0) = \cos(2x) - 1, \quad v_t(x, 0) = \frac{2(\cos(2x) - 1)}{\pi},$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(\pi, t) = 0,$$

$$\int_0^{\pi} v(x, t) \cos(x) dx = -\cos(t).$$

Для этой входной информации все условия теоремы 2.2.1 выполнены. С помощью разработанного алгоритма информация была обработана и восстановлен параметр уравнения

$$q(t) = 0.9847712101 \cos(t),$$

достигнув допустимого отклонения  $0.8398455189 < \varepsilon$  между соседними приближениями функции  $q(t)$ , на 1-ом шаге последовательных приближений. На рисунке 2.5.1 представлен график функции  $q(t)$ .



Рисунок 2.5.1 – График функции  $q(t)$

Далее в программе была найдена функция

$$\begin{aligned}
 v(x, t) = & \left( -0.01012960282e^{-0.106850176t} + 0.04356559336e^{-1.559816491t} - \right. \\
 & \left. -0.03343599057 \cos(t) + 0.06687198114 \sin(t) \right) \sin(2x) + \\
 & + \left( -0.0005125689663e^{-0.1027128383t} + 0.001245084196e^{-3.786176051t} + \right. \\
 & \left. +0.004661460546 \sin(t) - 0.0007325152288 \cos(t) \right) \sin(4x) + \\
 & + \left( 0.4693881454e^{-0.1033574395t} - 0.1298576008e^{-3.078460742t} \right) \sin(3x) - \\
 & -0.4505142218 \sin(x)e^{1.76129406t} - 1.247138503 \sin(x)e^{-0.09462739385t}
 \end{aligned}$$

представляющая продольные колебания в стержне. Последним шагом программы стало построение анимированного, по времени  $t$ , графика найденной функции  $v(x, t)$ . На рисунке 2.5.2 приведен график функции  $v(x, t)$  в различные моменты времени  $t$ .

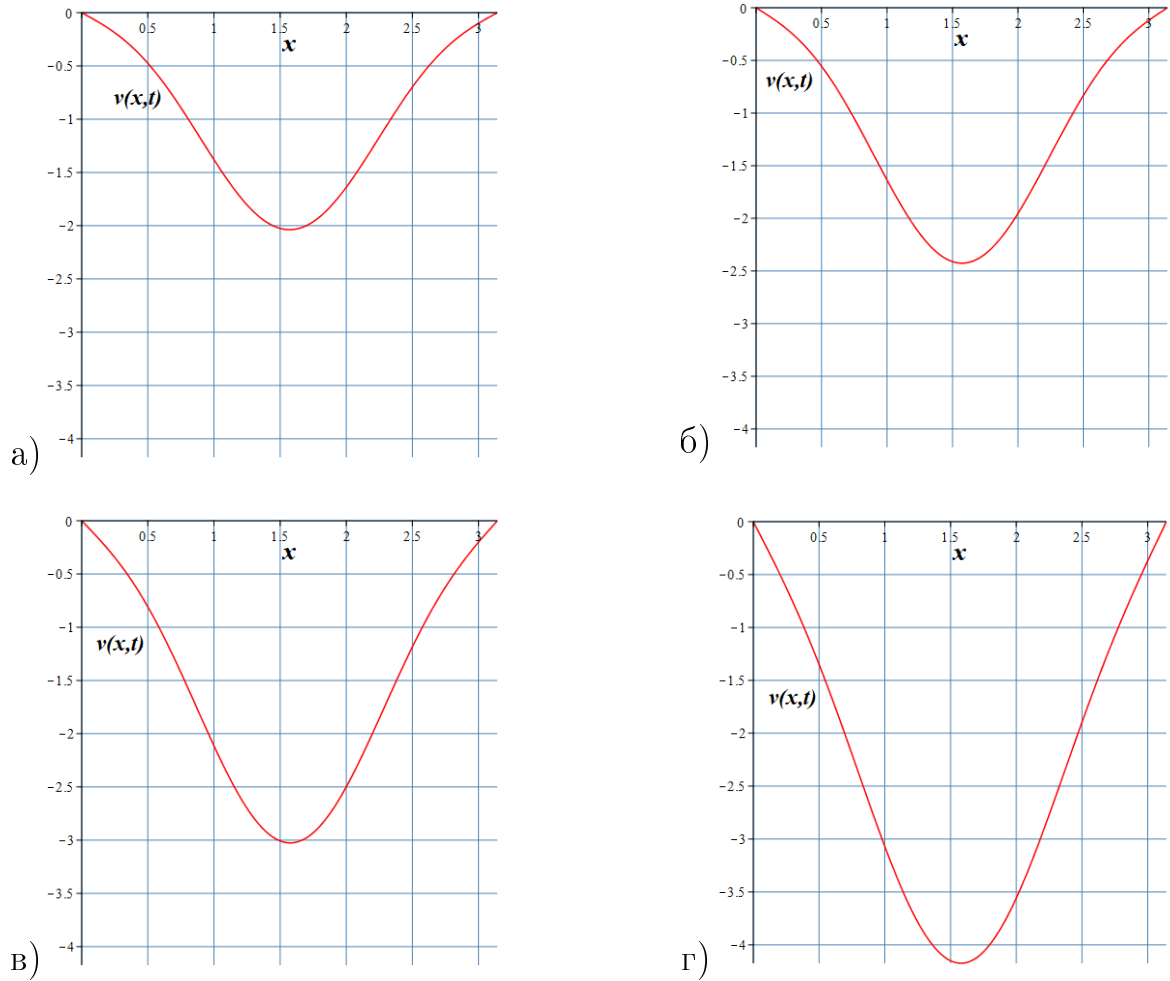


Рисунок 2.5.2 – График функции  $v(x, t)$  при:  
а)  $t = 0$ ; б)  $t = 0.33333$ ; в)  $t = 0.65657$ ; г)  $t = 1$

В примере 2.5.1 получен результат, который показал, что, задав достаточно большое значение  $\varepsilon$  результатом будет лишь одно последовательное приближение функции  $q(t)$ . Далее, в примере 2.5.2, попробуем уменьшить это значение таким образом, чтобы получить большее количество приближений, а также возьмем другую входную информацию.

**Пример 2.5.2** Пусть задана следующая входная информация:

$$\lambda = 4, \quad \lambda' = 1, \quad \lambda'' = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \varepsilon = 1, \quad N = 2, \quad l = \pi, \quad T = 1,$$

$$f(x, t) = \cos(x), \quad v_0(x) = \sin(2x), \quad v_1(x) = \sin(2x),$$

$$K(x) = \cos(x), \quad F(t) = \frac{4 \sin(t)}{3}.$$

Следовательно, обратная задача для математической модели Буссинеска – Лява (2.2.1)–(2.2.4) примет вид

$$(4 - \Delta)v_{tt} = (\Delta - 1)v_t + (\Delta - 1)v + q(t) \cos(x),$$



$$v(x, 0) = \sin(2x), \quad v_t(x, 0) = \sin(2x),$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(\pi, t) = 0, \quad \int_0^{\pi} v(x, t) \cos(x) dx = \frac{4 \sin(t)}{3}.$$

Для этой входной информации все условия теоремы 2.2.1 выполнены. С помощью разработанного алгоритма информация была обработана и восстановлен параметр уравнения

$$q(t) = -1.271274436 \cos^2(t) + \left( 3.102208713 \sin(t) + 7.293336477 \right) \cos(t) - 1.870029261 \sin(t) - 0.6679265225,$$

достигнув допустимого отклонения  $0.9858701780 < \varepsilon$  между соседними приближениями функции  $q(t)$ , на 2-ом шаге последовательных приближений. На рисунке 2.5.3 представлен график функции  $q(t)$  и график её последовательных приближений.

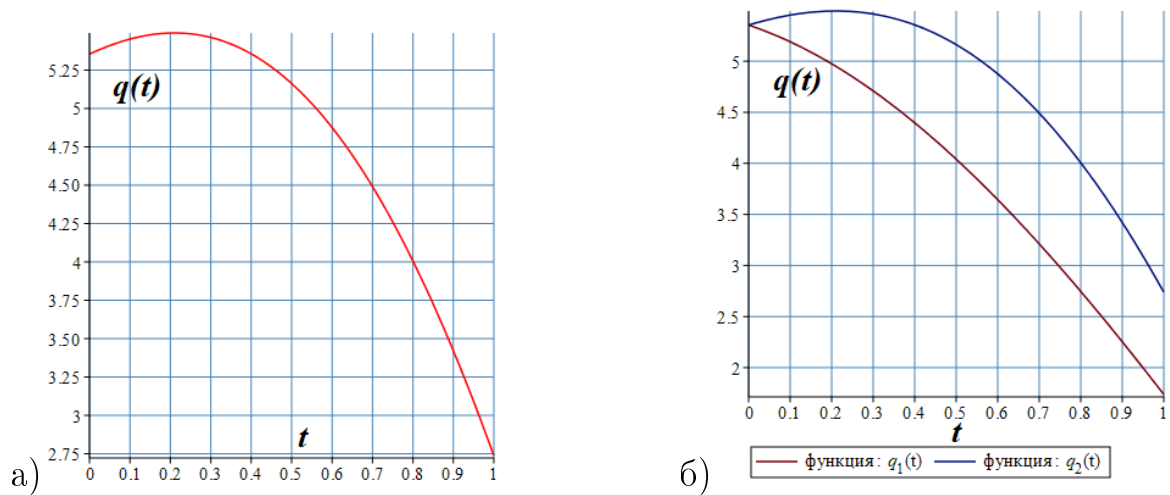


Рисунок 2.5.3 – График: а) функции  $q(t)$ ;  
б) функций последовательных приближений функции  $q(t)$

Далее в программе была найдена функция

$$v(x, t) = \left( 0.7259796297 e^{-0.3125t} \sin(0.7261843774t) + 1.532423266 e^{-0.3125t} \times \right.$$

$$\times \cos(0.7261843774t) + 0.003381300972 \cos^2(t) - 0.09877961292 \cos(t) \sin(t) -$$

$$\left. - 0.312814063 \cos(t) + 1.050466817 \sin(t) - 0.2229905041 \right) \sin(2x)$$

представляющая продольные колебания в стержне. Последним шагом программы стало построение анимированного, по времени  $t$ , графика найденной функции  $v(x, t)$ . На рисунке 2.5.4 приведен график функции  $v(x, t)$  в различные моменты времени  $t$ .

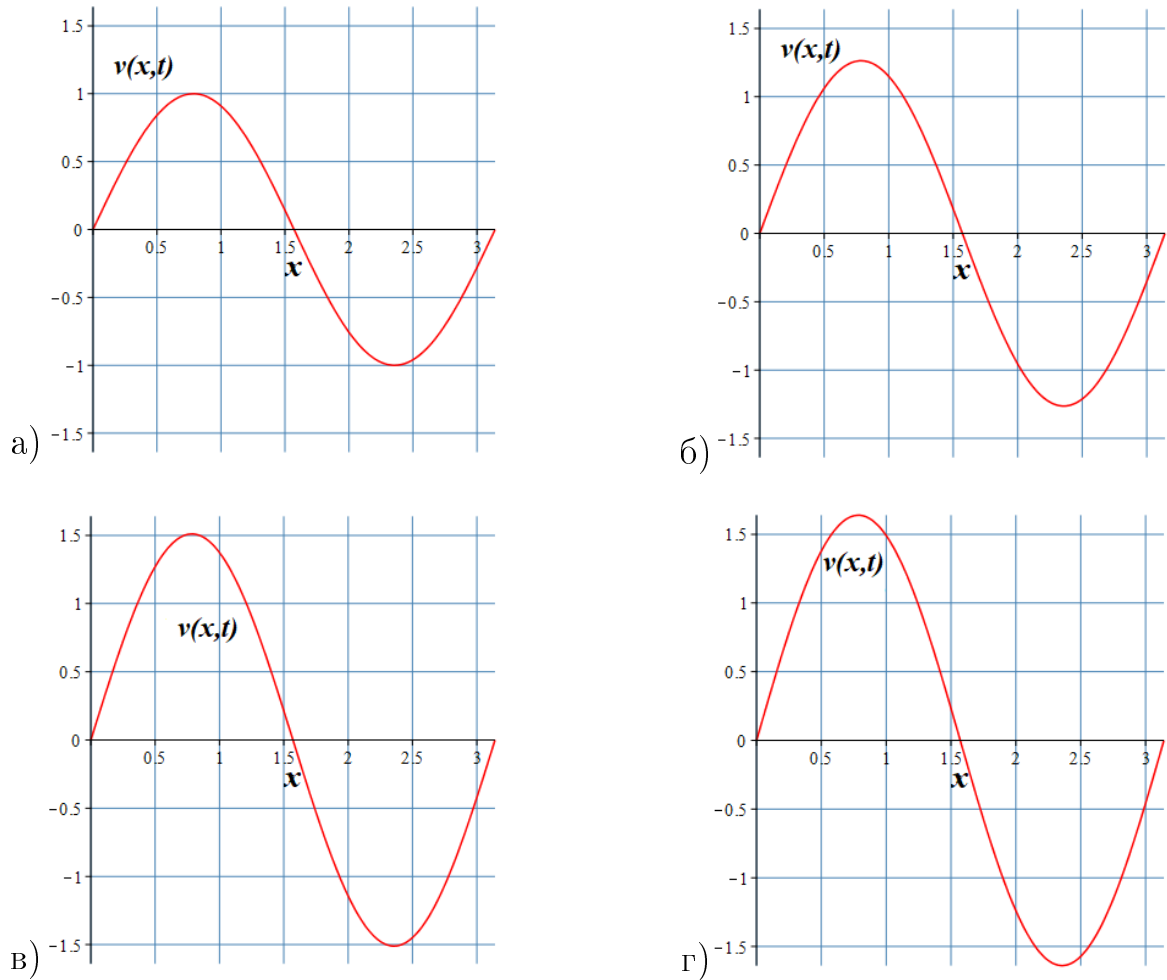


Рисунок 2.5.4 – График функции  $v(x, t)$  при:  
 а)  $t = 0$ ; б)  $t = 0.29293$ ; в)  $t = 0.66667$ ; г)  $t = 1$

Полученный результат в примере 2.5.2 продемонстрировал, получение уже двух последовательных приближений функции  $q(t)$ , при этом, также изменилось и значение функции  $v(x, t)$ . Отметим, что примеры 2.5.1 и 2.5.2 представляют регулярный случай.

**Пример 2.5.3** Пусть задана следующая входная информация:

$$\lambda = -1, \quad \lambda' = -1, \quad \lambda'' = -2, \quad \alpha = 2, \quad \beta = -2, \quad \varepsilon = 4, \quad N = 2, \quad l = \pi, \quad T = 1,$$

$$f(x, t) = \cos(x), \quad v_0(x) = \sin(2x), \quad v_1(x) = \sin(2x),$$

$$K(x) = \cos(x), \quad F(t) = \frac{4 \sin(t)}{3}.$$

Следовательно, обратная задача для математической модели Буссинеска – Лява (2.2.1)–(2.2.4) примет вид

$$(-1 - \Delta)v_{tt} = 2(\Delta + 1)v_t - 2(\Delta + 2)v + q(t) \cos(x),$$

$$v(x, 0) = \sin(2x), \quad v_t(x, 0) = \sin(2x),$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(\pi, t) = 0, \quad \int_0^{\pi} v(x, t) \cos(x) dx = \frac{4 \sin(t)}{3}.$$

Для этой входной информации все условия теоремы 2.2.1 выполнены. Вырожденность задачи (наличие сингулярного случая) обнаружено при  $k = 1 (\lambda = \lambda_1)$ . С помощью разработанного алгоритма информация была обработана и восстановлен параметр уравнения

$$q(t) = -0.8182355205e^{0.5275252316t} + 2.515888246e^{-2.527525231t} - 2.546479089 \sin(t),$$

достигнув допустимого отклонения  $1.944964447 < \varepsilon$  между соседними приближениями функции  $q(t)$ , на 1-ом шаге последовательных приближений. На рисунке 2.5.5 представлен график функции  $q(t)$ .

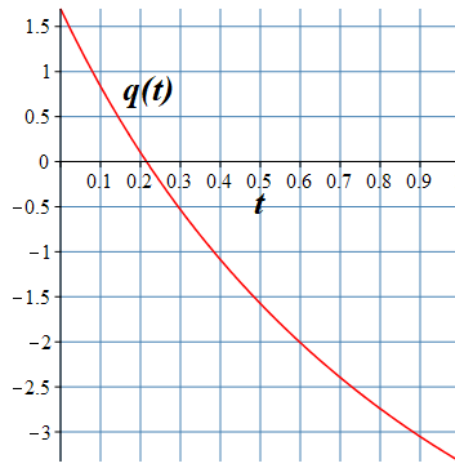


Рисунок 2.5.5 – График функции  $q(t)$

Далее в программе была найдена функция

$$v(x, t) = u(x, t) + w(x, t),$$

где  $w(x, t) = 0$ , а

$$u(x, t) = \left( 0.1525777823 \cos(t) - 0.3087883688e^{-t}t \cosh(1.527525232t) + \right. \\ \left. + 0.1572273415e^{-t}t \sinh(1.527525232t) + 1.295037968e^{-t} \sinh(1.527525232t) + \right. \\ \left. + 0.1780074126 \sin(t) + 0.8474222167e^{-t} \cosh(1.527525232t) \right) \sin(2x)$$

представляющая продольные колебания в стержне. Последним шагом программы стало построение анимированного, по времени  $t$ , графика найденной функ-

ции  $v(x, t)$ . На рисунке 2.5.6 приведен график функции  $v(x, t)$  в различные моменты времени  $t$ .

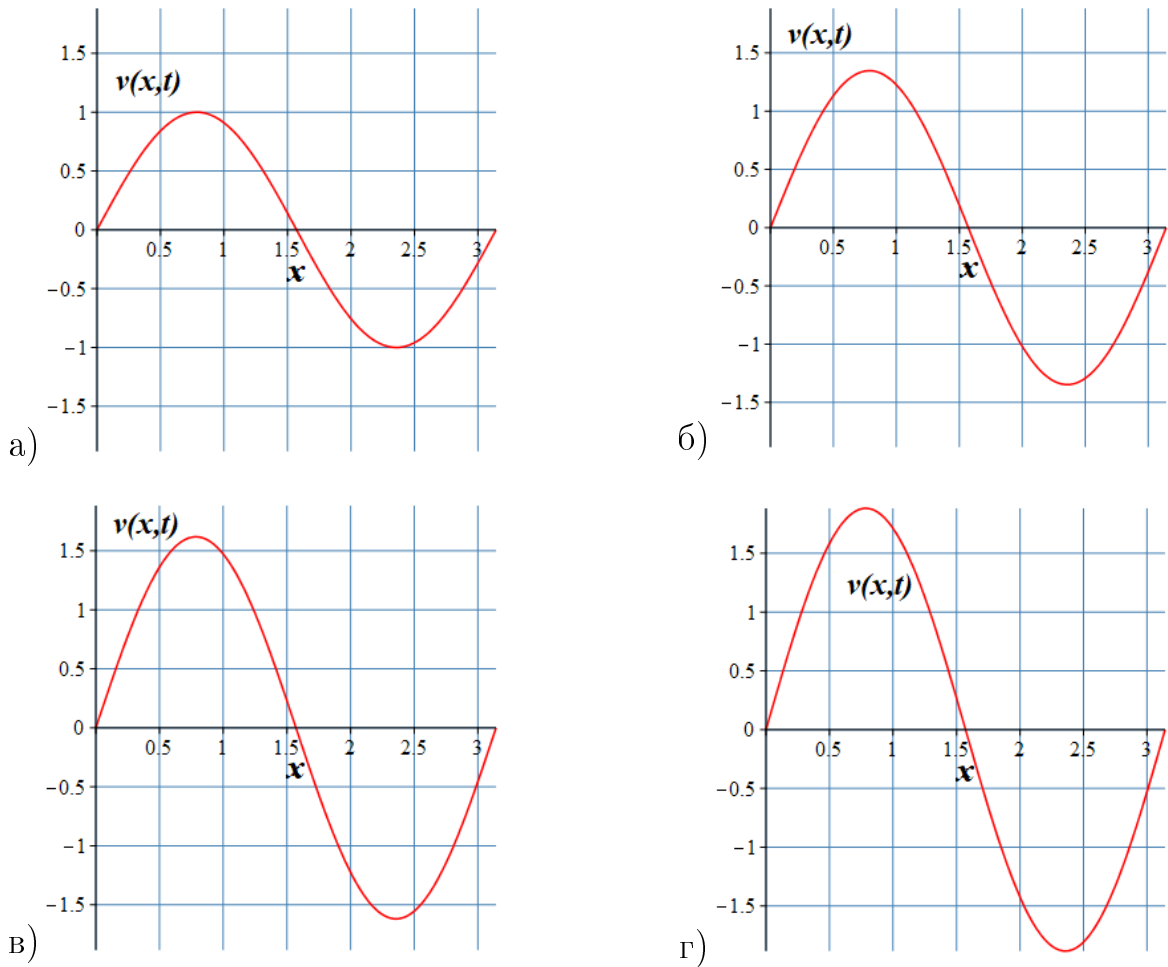


Рисунок 2.5.6 – График функции  $v(x, t)$  при:  
а)  $t = 0$ ; б)  $t = 0.36364$ ; в)  $t = 0.67677$ ; г)  $t = 1$

## 2.6 Верификация результатов по восстановлению параметра внешнего воздействия для математической модели Буссинеска – Лява в стержне

В данном параграфе приведем верификацию разработанного метода обработки информации для восстановления параметра внешней нагрузки  $q(t)$  на стержень. За основу взяты примеры из предыдущего параграфа. Приведем алгоритм верификации результатов:

- i*) зададим точное значение параметра  $q(t)$ ;
- ii*) решим прямую задачу (1.3.1)–(1.3.3);
- iii*) вычислим правую часть  $F(t)$  условия переопределения (2.2.4);
- iv*) решим обратную задачу (2.2.1)–(2.2.4) при полученной  $F(t)$  с помощью

разработанного метода;

*v*) вычислим значение погрешности сравнив точное значение  $q(t)$  с полученным приближенным, на каждом шаге по формуле

$$\langle qToch(t) - q[i](t), qToch(t) - q[i](t) \rangle = \int_0^T (qToch(t) - q[i](t))^2 dt. \quad (2.6.1)$$

Стоит отметить, чем меньше значение принимает погрешность приближения, тем ближе становится приближенное значение к точному.

**Пример 2.6.1** Рассмотрим математическую модель из примера 2.5.1 предыдущего параграфа.

$$(2 - \Delta)v_{tt} = 5(\Delta + 2)v_t + \frac{(\Delta + 2)v}{2} + q(t) \cos(x),$$

$$v(x, 0) = \cos(2x) - 1, \quad v_t(x, 0) = \frac{2(\cos(2x) - 1)}{\pi}, \quad v(0, t) = 0, \quad v(\pi, t) = 0.$$

Для наглядности результатов последовательных приближений зададим новые значения  $\varepsilon = 0.5$  (допустимое отклонение между соседними последовательными приближениями функции  $q(t)$ ) и  $N = 5$  (количество слагаемых галеркинских приближений). Также, введем точное значение функции  $q(t)$ , как  $qToch(t) = t$ .

При решении задачи с известным  $qToch(t)$  с помощью программного комплекса была найдена функция

$$\begin{aligned} F(t) = & 0.2588804620e^{-0.1027128383t} - 0.0001905228916e^{-3.786176051t} - \\ & - 0.05335852276e^{-1.559816491t} + 11.37104336e^{-0.1068501760t} + \\ & + 1.157637478t - 11.57637478. \end{aligned}$$

Рассмотрим условие переопределения

$$\int_0^{\pi} v(x, t) \cos(x) dx = F(t)$$

с полученной функцией  $F(t)$ . Методом обработки информации, описанным в параграфе 2.3 с учетом полученной функции  $F(t)$  с помощью программного комплекса восстановлена функция

$$q(t) = 0.002257053519e^{-0.1027128383t} - 0.002257053519e^{-3.786176051t} -$$

$$\begin{aligned}
& -0.1072862141e^{-1.559816491t} + 0.1072862141e^{-0.106850176t} + \\
& + 0.0002813704564e^{4.995363373t} + 5.4129734(10^{-6})e^{-0.2007890496t} - \\
& - 0.0002813704564e^{1.31190016t} - 5.4129734(10^{-6})e^{-3.884252262t} + \\
& + 0.01337459248e^{4.991226035t} + 0.00025729891e^{-0.2049263874t} - \\
& - 0.01337459248e^{3.53825972t} - 0.00025729891e^{-1.657892702t}
\end{aligned}$$

достигнув допустимого отклонения  $0.4607872720 < \varepsilon$  между соседними приближениями функции  $q(t)$ , на 3-ем шаге последовательных приближений. На рисунке 2.6.1 представлены графики функции  $qToch(t)$  и всех найденных последовательных приближений.

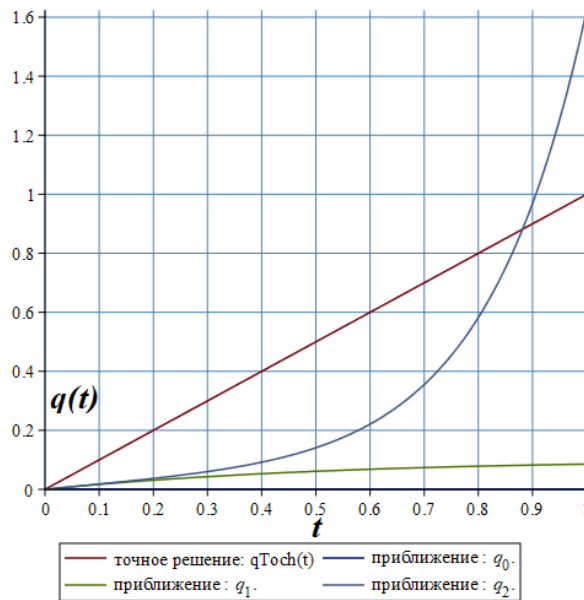


Рисунок 2.6.1 – График функции  $qToch(t)$  и функций всех последовательных приближений

Кроме того, для верификации метода была найдена погрешность каждого  $i$ -ого шага последовательных приближений (см. таблицу 2.6.1), относительно известного (заданного) точного решения, по формуле (2.6.1).

Таблица 2.6.1 – Результаты оценки погрешности в зависимости от номера приближения

Номер приближения	Значение погрешности
$i = 1$	0.5773502692
$i = 2$	0.5178659161
$i = 3$	0.2737267961

Получаем, что отклонения функций  $q[i](t)$  от точного уменьшаются с увеличением количества итераций, на 3-ем шаге их отклонение достигло значения меньше 0.3. Теперь, возьмем другой пример и посмотрим на полученное значение погрешности для него.

**Пример 2.6.2** Рассмотрим математическую модель из примера 2.5.2 предыдущего параграфа.

$$(4 - \Delta)v_{tt} = (\Delta - 1)v_t + (\Delta - 1)v + q(t) \cos(x),$$

$$v(x, 0) = \sin(2x), \quad v_t(x, 0) = \sin(2x), \quad v(0, t) = 0, \quad v(\pi, t) = 0.$$

Для наглядности результатов последовательных приближений зададим новые значения  $\varepsilon = 2$  (допустимое отклонение между соседними последовательными приближениями функции  $q(t)$ ) и  $N = 3$  (количество слагаемых галеркинских приближений). Также, введем точное значение функции  $q(t)$ , как  $qToch(t) = \sin(t) + 6$ .

При решении задачи с известным  $qToch(t)$  с помощью программного комплекса была найдена функция

$$\begin{aligned} F(t) = & 0.1416476940t^{-0.3125000000t} \cos(0.7261843774t) + \\ & + 2.034552392e^{-0.3125000000t} \sin(0.7261843774t) - \\ & - 0.1664365418 \cos(t) - 0.09986192506 \sin(t) + 1.358122181. \end{aligned}$$

Рассмотрим условие переопределения

$$\int_0^{\pi} v(x, t) \cos(x) dx = F(t)$$

с полученной функцией  $F(t)$ . Методом обработки информации, описанным в параграфе 2.3 с учетом полученной функции  $F(t)$  с помощью программного комплекса восстановлена функция

$$\begin{aligned} q(t) = & \left( \left( 0.5978364934 \cos(t) - 0.8428774455 \sin(t) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2.156866410 \right) \cos(0.7261843774t) + \left( 0.4919422493 \cos(t) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -0.6935793162 \sin(t) - 1.774822590) \sin(0.7261843774t) \Big) e^{-0.3125t} - \\
& -3.837038847 \cos^2(t) + (3.651206031 \sin(t) + 10.84934350) \cos(t) + \\
& + 0.8298366180 + 2.123495814 \sin(t)
\end{aligned}$$

достигнув допустимого отклонения  $1.842901017 < \varepsilon$  между соседними приближениями функции  $q(t)$ , на 3-ем шаге последовательных приближений. На рисунке 2.6.2 представлены графики функции  $qToch(t)$  и всех найденных последовательных приближений.

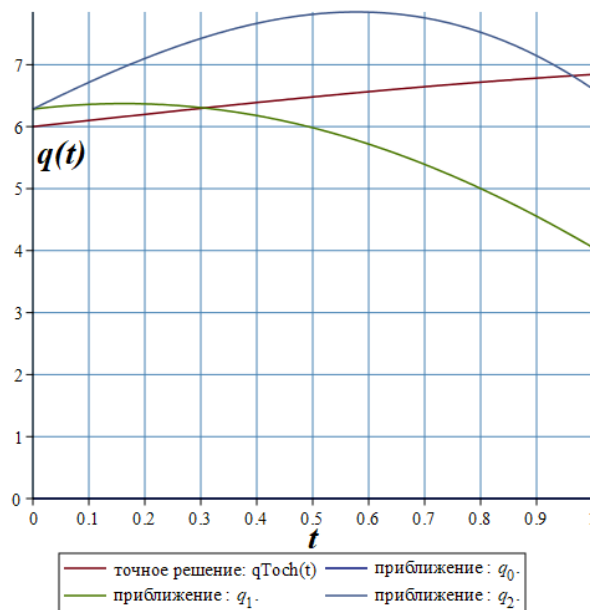


Рисунок 2.6.2 – График функции  $qToch(t)$  и функций всех последовательных приближений

Кроме того, для верификации результата была найдена погрешность каждого  $i$ -ого шага последовательных приближений (см. таблицу 2.6.2), относительно известного (заданного) точного решения, по формуле (2.6.1).

Таблица 2.6.2 – Результаты оценки погрешности в зависимости от номера приближения

Номер приближения	Значение погрешности
$i = 1$	6.464444908
$i = 2$	1.193684402
$i = 3$	0.9789269382

Получаем, что отклонение функций  $q[i]$  от точного уменьшаются с увеличением количества итераций, на 3-ем шаге их отклонение достигло значения меньше 1.



При необходимости, для каждого примера можно получить более точное значение параметра  $q(t)$  увеличив количество последовательных приближений. Таким образом, из примеров этого параграфа, можно сказать, что используемый метод обработки информации достаточно эффективен для восстановления параметра  $q(t)$  математической модели (2.3.1)–(2.3.4), т. к. получаемая погрешность приближенного решения получается достаточно малой относительно точного и при увеличении количества приближений получаемое решение стремится к точному.

### 3 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БУССИНЕСКА – ЛЯВА В КОНСТРУКЦИИ ИЗ ТОНКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Глава содержит все этапы исследования математической модели Буссинеска – Лява в конструкции из стержней. Параграфы 3.1 и 3.2 содержат результаты аналитического исследования, параграфы 3.3 и 3.4 – результаты численного исследования, параграф 3.5 – результаты обработки информации, 3.6 – верификацию результатов.

#### 3.1 Метод аналитического исследования математической модели в конструкции из стержней на основе относительно спектрально ограниченных операторов

Аналогично параграфу 2.1 аналитическое изучение математической модели Буссинеска – Лява в конструкции из стержней будет использовать теорию полиномиальной  $A$ -ограниченности пучков операторов  $\vec{B}$ , представленную в параграфе 1.1 и метод последовательных приближений. В этом параграфе представлены результаты изучения абстрактного неполного, неоднородного уравнения соболевского типа высокого порядка с условием Коши и переопределения для последующего их применения в качестве метода аналитического исследования математической модели продольных колебаний в конструкции из стержней. Пусть  $\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{Y}$  – банаховы пространства, операторы  $L, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ ,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ ,  $\ker L \neq \{0\}$ ,  $\chi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{F})$  и функции  $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$ . Рассмотрим следующую задачу при  $t \in [0, T]$

$$Lv^{(n)}(t) = Mv(t) + \chi(t)q(t) + f(t), \quad (3.1.1)$$

$$v(0) = v_0, \quad \dots, \quad v^{(n-1)}(0) = v_{n-1}, \quad (3.1.2)$$

$$Cv(t) = \Psi(t), \quad (3.1.3)$$

где (3.1.1) это неполное, неоднородное уравнение соболевского типа высокого порядка, (3.1.2) – условие Коши, а (3.1.3) – условие переопределения. Обратной задачей будем называть задачу отыскания из отношений (3.1.1)–(3.1.3) пары функций  $v \in C^n([0, T]; \mathcal{U})$  и  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ .

**Определение 3.1.1** [21] Оператор  $M$  называется  $(L, \sigma)$ -ограниченным, если  $\exists a \in \mathbb{R}_+ \forall \mu \in \mathbb{C} (|\mu| > a) \Rightarrow ((\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U}))$ .

**Замечание 3.1.1** [21] Если оператор  $M$   $(L, \sigma)$ -ограничен, а  $\infty$  – полюс порядка  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$   $L$ -резольвенты оператора  $M$ , то оператор  $M$  называется  $(L, p)$ -ограниченным.

**Теорема 3.1.1** [21] При полиномиальной  $A$ -ограниченности операторного пучка  $\vec{B}$  и выполнении условия (1.2.1) действия операторов расщепляются следующим образом:

- i)  $L^k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^k; \mathcal{F}^k)$ ,  $k = 0, 1$ ;
- ii)  $M^k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^k; \mathcal{F}^k)$ ,  $k = 0, 1$ ;
- iii) существует обратный к  $L^1$  оператор  $(L^1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$ ;
- iv) существует обратный к  $M^0$  оператор  $(M^0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$ .

Пусть оператор  $M$   $(L, p)$ -ограничен, тогда  $v(t)$  можно представить как  $v(t) = Pv(t) + (\mathbb{I} - P)v(t)$ . Обозначим  $Pv(t) = u(t)$ ,  $(\mathbb{I} - P)v(t) = \omega(t)$ . Пусть  $\mathcal{U}^0 \subset \ker C$ . Тогда в силу теоремы 3.1.1 и леммы 1.2.1 задача (3.1.1)–(3.1.3) эквивалентна задаче нахождения функций  $u \in C^n([0, T]; \mathcal{U}^1)$ ,  $\omega \in C^n([0, T]; \mathcal{U}^0)$ ,  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$  из соотношений

$$u^{(n)}(t) = Su(t) + (L^1)^{-1}Q\chi(t)q(t) + (L^1)^{-1}Qf(t), \quad (3.1.4)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}, \quad (3.1.5)$$

$$Cu(t) = \Psi(t) \equiv Cv(t), \quad (3.1.6)$$

$$H\omega^{(n)}(t) = \omega(t) + (M^0)^{-1}(\mathbb{I} - Q)\chi(t)q(t) + (M^0)^{-1}(\mathbb{I} - Q)f(t), \quad (3.1.7)$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad \dots, \quad \omega^{(n-1)}(0) = \omega_{n-1}, \quad (3.1.8)$$

где  $u_0 = Pv_0$ ,  $\dots$ ,  $u_{n-1} = Pv_{n-1}$ ;  $\omega_0 = (\mathbb{I} - P)v_0$ ,  $\dots$ ,  $\omega_{n-1} = (\mathbb{I} - P)v_{n-1}$ ;  $H = (M^0)^{-1}L^0$ ;  $S = (L^1)^{-1}M^1$ ;  $t \in [0, T]$ . Обратную задачу (3.1.4)–(3.1.6) назовем регулярной, а задачу (3.1.7), (3.1.8) – сингулярной.

Перепишем задачу (3.1.4)–(3.1.6) в обозначениях [89]. Пусть  $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$ , операторы  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ ,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , оператор-функция  $\Phi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})$ , функции  $h : [0, T] \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$ . Следовательно, при  $t \in [0, T]$ , получим

$$u^{(n)}(t) = Su(t) + \Phi(t)q(t) + h(t), \quad (3.1.9)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}, \quad (3.1.10)$$

$$Cu(t) = \Psi(t). \quad (3.1.11)$$

**Теорема 3.1.2** Пусть оператор  $M$   $(L, p)$ -ограничен, кроме этого,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ ,  $\Phi \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X}))$ ,  $h \in C^1([0, T]; \mathcal{X})$ ,  $\Psi \in C^{n+1}([0, T]; \mathcal{Y})$ , для любого  $t \in [0, T]$  оператор  $C\Phi(t)$  обратим и  $(C\Phi)^{-1} \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}))$ . Если условие согласованности  $Cu_{n-1} = \Psi^{(n-1)}(0)$  выполнено, тогда решение обратной задачи (3.1.9)–(3.1.11) существует и единственно для класса функций  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $u \in C^n([0, T]; \mathcal{X})$ .

*Доказательство.* Проведем редукцию задачи (3.1.9)–(3.1.11) к задаче для уравнения первого порядка, при  $t \in [0, T]$ , получим

$$z'(t) = Az(t) + Q(t)q(t) + H(t), \quad (3.1.12)$$

$$z(0) = z_0, \quad (3.1.13)$$

$$Bz(t) = \bar{\Psi}(t), \quad (3.1.14)$$

$$\text{где } z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \vdots \\ u^{(n-2)}(t) \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{I} \\ S & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad z(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u^{(n-2)}(0) \\ u^{(n-1)}(0) \end{pmatrix},$$

$$H(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Phi(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Psi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Пусть  $R(t) = -(C\Phi(t))^{-1}$ . При этом выполняются все условия теоремы 6.2.3 из работы [89], а функция  $q(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$q(t) = q_0(t) + R(t)CS \int_0^t V_{1,n}(t-s)\Phi(s)q(s)ds, \quad (3.1.15)$$

где

$$q_0(t) = -R(t) \left( \Psi^{(n)}(t) - CSV_{1,1}(t)u_0 - CSV_{1,2}(t)u_1 - \dots - \right. \\ \left. - CSV_{1,n}(t)u_{n-1} - CS \int_0^t V_{1,n}(t-s)h(s)ds - Ch(t) \right). \quad (3.1.16)$$

Следовательно, решение обратной задачи (3.1.12)–(3.1.14) существует и единственно в классе функций  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $z \in C^1([0, T]; \mathcal{X}^n)$ . Таким образом, получим, что решение регулярной обратной задачи (3.1.9)–(3.1.11) существует и единственно, причем  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $u \in C^n([0, T]; \mathcal{X})$ .  $\square$

Для того чтобы получить решение сингулярной задачи, понадобится большая гладкость решения  $q$  регулярной задачи, чем класс  $C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ . Следующая теорема предоставляет достаточные условия существования более гладкого решения  $q \in C^{n(p+1)}([0, T], \mathcal{Y})$  регулярной задачи. Также, воспользуемся леммой 2.1.1.

**Теорема 3.1.3** Пусть оператор  $M$   $(L, p)$ -ограничен,  $p \in \mathbb{N}_0$ , кроме того,  $\Phi \in C^{n(p+1)}([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X}))$ ,  $h \in C^{n(p+1)}([0, T]; \mathcal{X})$ ,  $\Psi \in C^{n(p+2)}([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ , для любого  $t \in [0, T]$  оператор  $C\Phi(t)$  обратим, причем  $(C\Phi)^{-1} \in C^{n(p+1)}([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}))$  и условие согласования  $Cu_{n-1} = \Psi^{(n-1)}(0)$  выполнено, при некотором  $u_{n-1} \in \mathcal{U}^1$ . Тогда существует единственное решение задачи (3.1.9)–(3.1.11)  $q \in C^{n(p+1)}([0, T]; \mathcal{Y})$ .

*Доказательство.* Укажем пропагаторы однородного уравнения (3.1.9) в матричном виде, определяющие разрешающую группу уравнения (3.1.12)

$$V(t) = \begin{pmatrix} V_{1,1}(t) & V_{1,2}(t) & \dots & V_{1,n-1}(t) & V_{1,n}(t) \\ V_{2,1}(t) & V_{2,2}(t) & \dots & V_{2,n-1}(t) & V_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_{n-1,1}(t) & V_{n-1,2}(t) & \dots & V_{n-1,n-1}(t) & V_{n-1,n}(t) \\ V_{n,1}(t) & V_{n,2}(t) & \dots & V_{n,n-1}(t) & V_{n,n}(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu^n L - M)^{-1} \begin{pmatrix} \mu^{n-1}L & \mu^{n-2}L & \dots & \mu L & \mathbb{I} \\ M & \mu^{n-1}L & \dots & \mu^2 L & \mu \mathbb{I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu^{n-3}M & \mu^{n-4}M & \dots & \mu^{n-1}L & \mu^{n-2}\mathbb{I} \\ \mu^{n-2}M & \mu^{n-3}M & \dots & M & \mu^{n-1}\mathbb{I} \end{pmatrix} e^{\mu t} d\mu,$$

где  $\mathbb{I}$  – тождественный оператор.

Ранее, при доказательстве теоремы 3.1.2 было установлено, что функция  $q(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению (3.1.15). Возьмем натуральное число  $l \leq n(p+1)$ . Предполагая, что  $q \in C^l([0, T]; \mathcal{Y})$  получим, в силу леммы 2.1.1 равенство

$$q^{(l)}(t) = q_0^{(l)}(t) + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m-1)}(t) (\Phi q)^{(m)}(0) + \\ + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) q^{(l-k-m)}(s) ds,$$

где  $C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}$ ,  $C_l^{k,m} = \frac{l!}{k!m!(l-k-m)!}$ , а

$$q_0^{(l)}(t) = - \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) \left( \Psi^{(l-k+n)}(t) - CS V_{1,1}^{(l-k)}(t) u_0 - \right. \\ \left. - CS V_{1,2}^{(n-k)}(t) u_1 - \dots - CS V_{1,n}^{(n-k)}(t) u_{n-1} - CS \int_0^t V_{1,n}(t-s) h^{(l-k)}(s) ds - \right. \\ \left. - Ch^{(l-k)}(t) \right) + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m-1)}(t) h^{(m)}(0)$$

существуют из условий данной теоремы при  $l = 0, 1, \dots, n(p+1)$ .

Покажем, что  $q \in C^{n(p+1)}([0, T], \mathcal{Y})$ , для этого обозначим  $r_0 = q_0(0)$ , а при  $l = 1, 2, \dots, n(p+1)$  последовательно определим следующие величины

$$r_l = q_0^{(l)}(0) + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(0) CS \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m-1)}(0) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j}.$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\tilde{q}_0(t) = q_0(t) + R(t) CS \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi(s) \tilde{q}_0(s) ds,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_l(t) &= q_0^{(l)}(t) + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \\
&+ \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m}(s) ds. \\
& \qquad \qquad \qquad l = 1, 2, \dots, n(p+1)
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Систему (3.1.17) редуцируем к уравнению Вольтерра второго рода

$$g(t) = g_0(t) + \int_0^t K(t, s) g(s) ds$$

в пространстве  $(C([0, T]; \mathcal{Y}))^{n(p+1)+1}$  с матричной оператор-функцией  $K(t, s)$  заданной на треугольнике  $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq t\}$ . В силу непрерывности всех данных системы (3.1.17) она имеет единственное решение

$$(\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{n(p+1)}) \in (C([0, T]; \mathcal{Y}))^{n(p+1)+1}.$$

Это решение будет являться пределом последовательности приближений

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_{0,i}(t) &= q_0(t) + R(t) CS \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi(s) \tilde{q}_{0,i-1}(s) ds, \\
\tilde{q}_{l,i}(t) &= q_0^{(l)}(t) + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \\
&+ \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m,i-1}(s) ds, \\
& \qquad \qquad \qquad l = 1, 2, \dots, n(p+1), \quad i \in \mathbb{N},
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

которые при  $i \rightarrow \infty$  на отрезке  $[0, T]$  сходятся равномерно к функциям  $\tilde{q}_l$ ,  $l = 0, 1, \dots, n(p+1)$ . Зададим начальное приближение

$$\tilde{q}_{l,0} \equiv 0, \quad l = 0, 1, \dots, n(p+1),$$

тогда

$$\tilde{q}_{l+1,0} = \tilde{q}'_{l,0}, \quad l = 0, 1, \dots, n(p+1) - 1.$$

Кроме этого, из (3.1.18) следует, что

$$\tilde{q}_{l,i}(0) = r_l, \quad l = 0, 1, \dots, n(p+1); \quad i \in \mathbb{N}. \quad (3.1.19)$$

Предположим, что при всех  $\tau = 1, 2, \dots, i$  верны равенства

$$\tilde{q}_{l+1,\tau}(t) = \tilde{q}'_{l,\tau}(t), \quad l = 0, 1, \dots, n(p+1) - 1.$$

Тогда с помощью леммы 2.1.1 и равенств (3.1.19) получим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m,i}(s) ds \right) = \\ & = \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k+1)}(t) CS \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m,i}(s) ds + \\ & \quad + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS V_{1,n}(t) \Phi^{(m)}(0) \tilde{q}_{l-k-m,i}(0) + \\ & \quad + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m+1)}(s) \tilde{q}_{l-k-m,i}(s) ds + \\ & + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds = \quad (3.1.20) \\ & = \sum_{k=1}^{l+1} \sum_{m=0}^{l-k+1} C_l^{k-1,m} R^{(k)}(t) CS \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds + \\ & \quad + \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) CS V_{1,n}(t) \sum_{m=0}^{l-k} C_{l-k}^m \Phi^{(m)}(0) r_{l-k-m} + \\ & \quad + \sum_{k=0}^l \sum_{m=1}^{l-k+1} C_l^{k,m-1} R^{(k)}(t) CS \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds + \\ & \quad + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds. \end{aligned}$$

Обозначим через

$$a_{k,m} = R^{(k)}(t) CS \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds, \quad l = 2, 3, \dots, n(p+1).$$



Следовательно, учитывая равенства

$$C_l^k + C_l^{k-1} = C_{l+1}^k, \quad C_l^{k,m} + C_l^{k-1,m} + C_l^{k,m-1} = C_{l+1}^{k,m},$$

получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} a_{k,m} + \sum_{k=1}^{l+1} \sum_{m=0}^{l-k+1} C_l^{k-1,m} a_{k,m} + \sum_{k=0}^l \sum_{m=1}^{l-k+1} C_l^{k,m-1} a_{k,m} = \\ & = \left( \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^{l-k} C_l^{k,m} a_{k,m} + \sum_{k=1}^l C_l^{k,0} a_{k,0} + \sum_{m=0}^l C_l^{0,m} a_{0,m} \right) + \\ & + \left( \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^{l-k} C_l^{k-1,m} a_{k,m} + \sum_{k=1}^l C_l^{k-1,0} a_{k,0} + \sum_{k=1}^l C_l^{k-1,l-k+1} a_{k,l-k+1} + \right. \\ & \left. + C_l^{l,0} a_{l+1,0} \right) + \left( \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^{l-k} C_l^{k,m-1} a_{k,m} + \sum_{m=1}^{l+1} C_l^{0,m-1} a_{0,m} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^l C_l^{k,l-k} a_{k,l-k+1} \right) = \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^{l-k} C_{l+1}^{k,m} a_{k,m} + \sum_{k=1}^l C_{l+1}^{k,0} a_{k,0} + \\ & + \sum_{m=1}^l C_{l+1}^{0,m} a_{0,m} + \sum_{k=1}^l C_{l+1}^{k,0} a_{k,l-k+1} + C_l^{0,0} a_{0,0} + \\ & + C_l^{0,l} a_{0,l+1} + C_l^{l,0} a_{l+1,0} = \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{m=0}^{l-k+1} C_{l+1}^{k,m} a_{k,m}. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

При  $l = 0, 1$  выполнение (3.1.21) можно проверить непосредственно.

Из (3.1.20) и (3.1.21) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m,i}(s) ds \right) = \\ & = \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{m=0}^{l-k+1} C_{l+1}^{k,m} R^{(k)}(t) CS \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{n-k-m+1,i}(s) ds + \\ & + \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) CS V_{1,n}(t) \sum_{m=0}^{l-k} C_{l-k}^m \Phi^{(m)}(0) r_{l-k-m}. \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Меняя индексы суммирования и перегруппировывая слагаемые, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} \right) = \\
& = \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \\
& + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k+1)}(t) CS \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} = \\
& = \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \\
& + \sum_{k=1}^l C_l^{k-1} R^{(k)}(t) CS \sum_{m=0}^{l-k} V_{1,n}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} = \\
& = \left( \sum_{k=1}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \right. \\
& \quad \left. + C_l^0 R(t) CS \sum_{m=0}^{l-1} V_{1,n}^{(l-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} \right) + \\
& + \left( \sum_{k=1}^{l-1} C_l^{k-1} R^{(k)}(t) CS \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \right. \\
& \quad + \sum_{k=1}^{l-1} C_l^{k-1} R^{(k)}(t) CS V_{1,n}(t) \sum_{j=0}^{l-k} C_{l-k}^j \Phi^{(j)}(0) r_{l-k-j} + \\
& \quad \left. + C_l^{l-1} R^{(l)}(t) CS V_{1,n}(t) C_0^0 \Phi(0) r_0 \right) = \\
& = \sum_{k=0}^l C_{l+1}^k R^{(k)}(t) CS \sum_{m=0}^{l-k} V_{1,n}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} - \\
& \quad - \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) CS V_{1,n}(t) \sum_{m=0}^{l-k} C_{l-k}^m \Phi^{(m)}(0) r_{l-k-m}.
\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

Продифференцировав (3.1.18), а также используя (3.1.22) и (3.1.23), получим равенства

$$\tilde{q}'_{l,i+1} = \tilde{q}_{l+1,i+1}, \quad l = 0, 1, \dots, n(p+1) - 1.$$

Таким образом, последовательность  $\tilde{q}_{0,i}$  сходится при  $i \rightarrow \infty$  к функции  $\tilde{q}_0$  равномерно на отрезке  $[0, T]$ , а последовательность  $\tilde{q}'_{0,i} = \tilde{q}_{1,i}$  сходится при  $i \rightarrow \infty$  к функции  $\tilde{q}_1$  равномерно на отрезке  $[0, T]$ . Поэтому функция  $\tilde{q}_0$  непрерывно дифференцируема и  $\tilde{q}'_0 = \tilde{q}_1$ . Аналогично доказываются равенства

$$\tilde{q}'_l = \tilde{q}_{l+1}, \quad l = 1, 2, \dots, n(p+1) - 1,$$

из которых следует, что  $\tilde{q}_0 \equiv q \in C^{n(p+1)}([0, T]; \mathcal{Y})$  и, следовательно,

$$q^{(l)} = \tilde{q}_l, \quad l = 1, 2, \dots, n(p+1). \quad \square$$

Сформулируем условия разрешимости обратной задачи (3.1.1)–(3.1.3).

**Теорема 3.1.4** Пусть оператор  $M$   $(L, p)$ -ограничен,  $p \in \mathbb{N}_0$ , оператор  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ ,  $\mathcal{U}^0 \subset \ker C$ ,  $\chi \in C^{n(p+1)}([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{F}))$ ,  $f \in C^{n(p+1)}([0, T]; \mathcal{F})$ ,  $\Psi \in C^{n(p+2)}([0, T]; \mathcal{Y})$ , для любого  $t \in [0, T]$  оператор  $C(L^1)^{-1}Q\chi$  обратим, причем  $(C(L^1)^{-1}Q\chi)^{-1} \in C^{n(p+1)}([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}))$ , и выполняется условие согласования  $Cu_{n-1} = \Psi^{(n-1)}(0)$  при некотором начальном значении  $u_{n-1} \in \mathcal{U}^1$ , а начальные значения  $w_k = (\mathbb{I} - P)v_k \in \mathcal{U}^0$  удовлетворяют

$$w_k = - \sum_{j=0}^p H^j (M^0)^{-1} \frac{d^{nj+k}}{dt^{nj+k}} \left[ (\mathbb{I} - Q)(\chi(0)q(0) + f(0)) \right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Тогда существует единственное решение  $(v, q)$  обратной задачи (3.1.1)–(3.1.3), причем  $q \in C^{n(p+1)}([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $v = u + w$ , где  $u \in C^n([0, T]; \mathcal{U}^1)$  – решение задачи (3.1.4)–(3.1.6), а функция  $w \in C^n([0, T]; \mathcal{U}^0)$  является решением задачи (3.1.7), (3.1.8), которое можно представить в виде

$$w(t) = - \sum_{j=0}^p H^j (M^0)^{-1} \frac{d^{nj}}{dt^{nj}} \left[ (\mathbb{I} - Q)(\chi(t)q(t) + f(t)) \right]. \quad (3.1.24)$$

*Доказательство.* Условия теорем 3.1.2 и 3.1.3 выполнены, а следовательно существует единственное решение  $(q, u)$  задачи (3.1.4)–(3.1.6), где  $u \in C^n([0, T]; \mathcal{U}^1)$ ,  $q \in C^{n(p+1)}([0, T]; \mathcal{Y})$ .

Воспользовавшись результатом работы [26] (аналогичен теореме 2.1.3) и необходимой гладкостью функции  $q$ , получим, что существует единственное решение задачи (3.1.7), (3.1.8)  $w \in C^n([0, T]; \mathcal{U}^0)$ , представимое в виде (3.1.24).  $\square$

### 3.2 Аналитическое исследование восстановления параметра внешней нагрузки на конструкцию из стержней

В данном параграфе приведена редукция исследуемой обратной задачи для математической модели Буссинеска – Лява в конструкции из стержней к неполному уравнению соболевского типа высокого порядка, теорема о разрешимости которого была получена в предыдущем параграфе. Таким образом, получим достаточные условия для восстановления параметра внешней нагрузки на конструкцию из стержней. Для этого, сначала, зададим конечный связный ориентированный граф  $G = G(\mathfrak{D}, \mathfrak{E})$ , где  $\mathfrak{D} = \{V_i\}$  – множество вершин, а  $\mathfrak{E} = \{E_j\}$  – множество ребер. Для каждого ребра поставим в соответствие два числа  $l_j, d_j \in \mathbb{R}_+$ , обозначающие длину и площадь поперечного сечения ребра  $E_j$ , соответственно. Рассмотрим ранее представленную математическую модель Буссинеска – Лява на геометрическом графе  $G$  (конструкции из стержней)

$$(\alpha - \Delta)v_{tt} = \beta(\Delta - \gamma)v + qf, \quad (3.2.1)$$

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_j, \dots), \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_j, \dots),$$

с условиями в каждой вершине  $V_i$  графа

$$\sum_{j: E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j v_{jx}(0, t) - \sum_{m: E_m \in E^\omega(V_i)} d_m v_{mx}(l_m, t) = 0, \quad (3.2.2)$$

$$v_j(0, t) = v_k(0, t) = v_m(l_m, t) = v_n(l_n, t), \quad (3.2.3)$$

начальными условиями

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (3.2.4)$$

$$v_0 = (v_1^0, v_2^0, \dots, v_j^0, \dots), \quad v_1 = (v_1^1, v_2^1, \dots, v_j^1, \dots).$$

Зададим условие переопределения

$$\langle v(x, t), K(x) \rangle = \Phi(t), \quad K = (K_1, K_2, \dots, K_j, \dots), \quad (3.2.5)$$

где заданы вектор-функции  $f(x, t)$ ,  $v_0(x)$ ,  $v_1(x)$ ,  $K(x)$  и функция  $\Phi(t)$ ,

$$\langle v(x, t), K(x) \rangle = \sum_{j: E_j \in \mathfrak{E}} \int_0^{l_j} v_j(x, t) K_j(x) dx$$

это скалярное произведение в пространстве  $L_2(G)$ , а через  $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$  обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине  $V_i$ . Функция  $v_j(x, t)$  описывает продольное смещение в точке  $x$  в момент времени  $t$  на  $j$ -ом элементе конструкции. Обратной задачей для математической модели Буссинеска – Лява на конструкции из стержней будем называть задачу отыскания из отношений (3.2.1)–(3.2.5) пары функций  $v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t), \dots, v_j(x, t), \dots)$ , где  $v_j(x, t)$  обозначает продольные колебания в момент времени  $t$  в  $j$ -ом стержне и  $q(t)$  – параметр внешних сил. Условие (3.2.5) появилось из-за необходимости восстановления параметра  $q(t)$  уравнения (3.2.1) и оно задает усредненное значение искомой вектор-функции  $v(x, t)$  в виде функции  $\Phi(t)$ .

Задачу (3.2.1)–(3.2.5) редуцируем к рассмотренной в предыдущем параграфе обратной задаче (3.1.1)–(3.1.3) для неполного уравнения соболевского типа высокого порядка при  $t \in [0, T]$

$$Lv''(t) = Mv(t) + \chi(t)q(t), \quad (3.2.6)$$

с условиями

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1, \quad (3.2.7)$$

$$Cv(t) = \Psi(t). \quad (3.2.8)$$

Здесь  $\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{Y}$  – банаховы пространства, операторы  $L, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ ,  $\ker L \neq \{0\}$ ,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ ,  $\chi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{F})$ , а функция  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$ .

Для редукции положим банаховы пространства  $\mathcal{F} = W_2^1(G)$ ,

$$\mathcal{U} = \{v = (v_1, v_2, \dots, v_j, \dots) : v_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ и выполняется (3.2.2)}\}, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{F},$$

где  $W_2^1(0, l_j)$  – пространства Соболева. Зададим операторы  $L = (\alpha - \Delta)\mathbb{I} + D$ ,  $M = \beta((\Delta - \gamma)\mathbb{I} + D)$ ,  $Cv = \langle v(x, t), K(x) \rangle$ , оператор умножения на функцию  $\chi(t) = f(x, t)$  и функцию  $\Psi(t) = \Phi(t)$ , где оператор  $D$  задан формулой

$$\langle Du, v \rangle = \sum_{j: E_j \in \mathfrak{E}} \int_0^{l_j} u_{jx}(x, t) v_{jx}(x) dx.$$

Следовательно,  $L, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ ,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ .

Воспользуемся результатами главы 1 и параграфа 3.1. Аналогично параграфу 2.2 задачу (3.2.6)–(3.2.8) можно редуцировать к задаче нахождения функций  $u \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^1)$ ,  $w \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^0)$ ,  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$  из соотношений

$$u''(t) = Su(t) + (L^1)^{-1}Qq(t)f(t), \quad (3.2.9)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad (3.2.10)$$

$$Cu(t) = \Psi(t) \equiv Cv(t), \quad (3.2.11)$$

$$Hw''(t) = w(t) + (M^0)^{-1}Pq(t)f(t), \quad (3.2.12)$$

$$w(0) = w_0, \quad w'(0) = w_1, \quad (3.2.13)$$

где

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\lambda_k \neq \alpha} \frac{\beta(\lambda_k - \gamma)}{\alpha - \lambda_k} \langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k; & H &= \sum_{\lambda_k = \alpha} \frac{\alpha - \lambda_k}{\beta(\lambda_k - \gamma)} \langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k; \\ Q &= \sum_{\lambda_k \neq \alpha} \langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k; & P &= \mathbb{I} - Q = \sum_{\lambda_k = \alpha} \langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k; \\ (L^1)^{-1} &= \sum_{\lambda_k \neq \alpha} \frac{\langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle}{\alpha - \lambda_k} \mathbb{X}_k; & (M^0)^{-1} &= \sum_{\lambda_k = \alpha} \frac{\langle \cdot, \mathbb{X}_k \rangle}{\beta(\lambda_k - \gamma)} \mathbb{X}_k; & C &= \sum_{\lambda_k \neq \alpha} \langle \cdot, K(x) \rangle; \\ u_0 &= \sum_{\lambda_k \neq \alpha} \langle v_0, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k; & u_1 &= \sum_{\lambda_k \neq \alpha} \langle v_1, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k; \\ w_0 &= \sum_{\lambda_k = \alpha} \langle v_0, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k; & w_1 &= \sum_{\lambda_k = \alpha} \langle v_1, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k; & \mathcal{U}^0 &= \ker P; & \mathcal{U}^1 &= \text{im } P. \end{aligned}$$

Здесь  $\{\lambda_k\}$  – множество собственных значений оператора  $D$ , а  $\{\mathbb{X}_k\}$  – семейство соответствующих им, ортонормированных в  $L_2(G)$ , собственных функций.

**Теорема 3.2.1** Пусть  $\Phi \in C^4([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $f \in C^2([0, T]; \mathcal{F})$ ,  $K, u_0, u_1 \in \mathcal{U}^1$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , выполнено одно из условий  $(0 \in \sigma(A)) \wedge (\alpha \neq \gamma)$  или  $0 \notin \sigma(A)$ . Также выполняются условия

$$\sum_{\lambda_k \neq \alpha} \frac{\langle f(\cdot, t), K(x) \rangle}{\alpha - \lambda_k} \neq 0, \quad \text{и} \quad \sum_{\lambda_k \neq \alpha} \langle v_1, K(x) \rangle = \Phi'(0)$$

при некотором начальном значении  $v_1 \in \mathcal{U}^1$ , а начальные значения  $w_k = (\mathbb{I} - P)v_k \in \mathcal{U}^0$ ,  $k = 0, 1$  удовлетворяют

$$\langle v_0 + \frac{q(0)f(\cdot, 0)}{\beta(\lambda_k - \gamma)}, \mathbb{X}_k \rangle = 0 \text{ для } k : \lambda_k = \alpha, \quad (3.2.14)$$

$$\langle v_1 + \frac{q(0)f_t(\cdot, 0) + q'(0)f(\cdot, 0)}{\beta(\lambda_k - \gamma)}, \mathbb{X}_k \rangle = 0 \text{ для } k : \lambda_k = \alpha. \quad (3.2.15)$$

Тогда существует единственное решение  $(v, q)$  обратной задачи (3.2.1)–(3.2.5), причем  $q \in C^2([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $v = u + w$ , где  $u \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^1)$  – решение задачи (3.2.9)–(3.2.11), а функция  $w \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^0)$  является решением задачи (3.2.12), (3.2.13) которое можно представить в виде

$$w(t) = - \sum_{\lambda_k = \alpha} \langle \frac{q(t)f(\cdot, t)}{\beta(\lambda_k - \gamma)}, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k. \quad (3.2.16)$$

*Доказательство.* Условия леммы 1.3.1 выполнены. Так как  $K \in \mathcal{U}^1$ , тогда  $\mathcal{U}^0 \subset \ker C$ . Для  $y \in \mathcal{Y}$  в силу ортонормированности системы собственных функций в  $L_2(G)$  имеем

$$C(L^1)^{-1}Qy = \left( \sum_{\lambda \neq \lambda_k} \frac{\langle f(\cdot, t), \mathbb{X}_k \rangle \langle \mathbb{X}_k, K \rangle}{\lambda - \lambda_k} \right) y = \left( \sum_{\lambda \neq \lambda_k} \frac{\langle f(\cdot, t), K \rangle}{\lambda - \lambda_k} \right) y.$$

Этот оператор обратим в  $\mathcal{Y}$  тогда, когда

$$\sum_{\lambda \neq \lambda_k} \frac{\langle f(\cdot, t), K \rangle}{\lambda - \lambda_k} \neq 0,$$

а обратный оператор непрерывно дифференцируем по  $t$  в силу условий на  $f(\cdot, t)$ . Условия (3.2.14), (3.2.15) и формулу (3.2.16) можно получить аналогичным образом, как было представлено при доказательстве теоремы 2.2.1.

Таким образом, все условия теоремы 3.1.4 выполнены, тогда существует единственное решение  $(v, q)$  обратной задачи (3.2.1)–(3.2.5), причем  $q \in C^2([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $v = u + w$ , где  $u \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^1)$  – решение задачи (3.2.9)–(3.2.11), а функция  $w \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^0)$  является решением задачи (3.2.12), (3.2.13) которое можно представить в виде (3.2.16).  $\square$

### 3.3 Алгоритм численного исследования математической модели Буссинеска – Лява в конструкции из тонких упругих стержней с восстановлением параметра внешних сил

Используя все полученные выше результаты был разработан алгоритм численного метода для нахождения решения обратной задачи для математической модели Буссинеска – Лява (3.2.1)–(3.2.5) в конструкции из стержней. Рассмотрим ранее представленную математическую модель Буссинеска – Лява на геометрическом графе  $G$  (конструкции из стержней)

$$(\alpha - \Delta)v_{tt} = \beta(\Delta - \gamma)v + qf, \quad (3.3.1)$$

$$\sum_{j:E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j v_{jx}(0, t) - \sum_{m:E_m \in E^\omega(V_i)} d_m v_{mx}(l_m, t) = 0, \quad (3.3.2)$$

$$v_j(0, t) = v_k(0, t) = v_m(l_m, t) = v_n(l_n, t), \quad (3.3.3)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (3.3.4)$$

$$\langle v(x, t), K(x) \rangle = \Phi(t), \quad (3.3.5)$$

где заданы: вектор-функции  $f(x, t) = (f_1(x, t), f_2(x, t), \dots, f_j(x, t), \dots)$ ,  $v_0(x) = (v_1^0(x), v_2^0(x), \dots, v_j^0(x), \dots)$ ,  $v_1(x) = (v_1^1(x), v_2^1(x), \dots, v_j^1(x), \dots)$ ,  $K(x) = (K_1(x), K_2(x), \dots, K_j(x), \dots)$  и функция  $\Phi(t)$ , а

$$\langle v(x, t), K(x) \rangle = \sum_{j:E_j \in \mathfrak{E}_0} \int_0^{l_j} v_j(x, t) K_j(x) dx$$

это скалярное произведение в пространстве  $L_2(G)$ . Для нахождения приближенного решения математической модели (3.3.1)–(3.3.5) требуется найти приближенное значение функции  $q(t)$  и вектор-функции

$$v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t), \dots, v_j(x, t), \dots).$$

**Этап 1.** Нахождение решения вспомогательной задачи Штурма – Ливилля

$$\mathbb{X}_k''(x) - \lambda_k \mathbb{X}_k(x) = 0, \quad \text{где } \mathbb{X}_k(x) = (X_k^1(x), X_k^2(x), \dots, X_k^j(x), \dots)$$

и условий (3.3.2) и (3.3.3), получив собственные функции  $\mathbb{X}_k(x)$  и собственные значения  $\lambda_k$ .



**Этап 2.** Нахождение выражения для функции  $q[i+1](t)$ , для проведения последовательных приближений. Используем формулу (3.1.15), при учете, что  $\mu_k^{1,2}$  (точки относительного спектра) – корни уравнения

$$(\alpha - \lambda_k)\mu^2 + \beta(\gamma - \lambda_k) = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} q[i+1](t) &= q_0(t) - \frac{1}{\sum_1 \frac{\langle f(x,t), K(x) \rangle}{\alpha - \lambda_k}} \times \\ &\times \sum_1 \int_0^t \frac{(e^{\mu_k^1(t-s)} - e^{\mu_k^2(t-s)})\beta(\lambda_k - \gamma)}{(\mu_k^1 - \mu_k^2)(\alpha - \lambda_k)^2} \langle f(x,s)q[i](s), K(x) \rangle ds - \\ &- \int_0^t \frac{\langle f(x,s)q[i](s), K(x) \rangle}{2\sum_2 \frac{\langle f(x,t), K(x) \rangle}{\alpha - \lambda_k}} \sum_2 \frac{\mu_k^1 e^{\mu_k^1(t-s)}\beta(\lambda_k - \gamma)}{(\alpha - \lambda_k)^2} ds - \\ &- \int_0^t \frac{\langle f(x,s)q[i](s), K(x) \rangle}{\sum_3 \frac{\langle f(x,t), K(x) \rangle}{\alpha - \lambda_k}} \sum_3 \sin(t-s) \frac{\beta(\lambda_k - \gamma)}{(\alpha - \lambda_k)^2} ds, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

где  $\sum_1$  означает сумму при  $k : (\mu_k^{1,2} \in \mathbb{R}) \wedge (\lambda_k \neq \lambda) \wedge (\mu_k^1 \neq \mu_k^2)$ ,  $\sum_2$  означает сумму при  $k : (\mu_k^{1,2} \in \mathbb{R}) \wedge (\lambda_k \neq \lambda) \wedge (\mu_k^1 = \mu_k^2)$ ,  $\sum_3$  означает сумму при  $k : (\mu_k^{1,2} \in \mathbb{C}) \wedge (\lambda_k \neq \lambda)$ , а элемент  $q_0(t)$  получен из (3.1.16) и примет вид:

$$\begin{aligned} q_0(t) &= \frac{1}{\sum_1 \frac{\langle f(x,t), K(x) \rangle}{\alpha - \lambda_k}} \left( \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} - \sum_1 \frac{(\mu_k^1 e^{\mu_k^1 t} - \mu_k^2 e^{\mu_k^2 t})\beta(\lambda_k - \gamma)}{(\mu_k^1 - \mu_k^2)(\alpha - \lambda_k)} \times \right. \\ &\times \left. \langle v_0(x), K(x) \rangle - \sum_1 \frac{(e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t})\beta(\lambda_k - \gamma)}{(\mu_k^1 - \mu_k^2)(\alpha - \lambda_k)} \langle v_1(x), K(x) \rangle \right) + \\ &+ \frac{1}{4\sum_2 \frac{\langle f(x,t), K(x) \rangle}{\alpha - \lambda_k}} \left( \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} - \sum_2 \left( e^{\mu_k^1 t} + (\mu_k^1)^2 e^{\mu_k^1 t} \right) \frac{\beta(\lambda_k - \gamma)}{\alpha - \lambda_k} \times \right. \\ &\times \left. \langle v_0(x), K(x) \rangle - \sum_2 \frac{\beta(\lambda_k - \gamma)\mu_k^1 e^{\mu_k^1 t}}{\alpha - \lambda_k} \langle v_1(x), K(x) \rangle \right) + \\ &+ \frac{1}{\sum_3 \frac{\langle f(x,t), K(x) \rangle}{\alpha - \lambda_k}} \left( \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} - \sum_3 \frac{\beta(\lambda_k - \gamma) \cos(t)}{\alpha - \lambda_k} \langle v_0(x), K(x) \rangle - \right. \\ &\left. - \sum_3 \frac{\beta(\lambda_k - \gamma) \sin(t)}{\alpha - \lambda_k} \langle v_1(x), K(x) \rangle \right). \end{aligned}$$

**Этап 3.** Проведение процедуры последовательных приближений для функции  $q(t)$ . Для этого, сначала, зададим начальное приближение  $q[0](t) = 0$ . Последующее приближение  $q[1](t)$  найдем из формулы (3.3.6), подставив предыдущее (начальное) приближение  $q[0](t)$ . Затем необходимо проверить норму разности двух полученных приближений  $\|q[1](t) - q[0](t)\|_{L_2(G)}$  и если она превышает заданное допустимое значение погрешности, то вычисляется следующее приближение  $q[2](t)$ , также, из формулы (3.3.6), с учетом полученного приближения  $q[1](t)$ . Этот процесс повторяется до тех пор, пока оценка  $\|q[i+1](t) - q[i](t)\|_{L_2(G)}$  не достигнет значения, меньшего либо равного допустимому отклонению между последовательными приближениями функции  $q(t)$ . В силу теоремы 3.2.1 искомая оценка будет достигнута за конечное число шагов. Как только она будет получена, произойдет остановка процедуры последовательных приближений, а за приближенное значение функции  $q(t)$  возьмется подсчитанное по формуле (3.3.6) на  $i$ -ом шаге приближение  $q[i+1](t)$ .

**Этап 4.** Представим решение  $u(x, t) = (u^1(x, t), u^2(x, t), \dots, u^j(x, t), \dots)$  регулярной задачи (3.2.9)–(3.2.11) в виде галеркинских приближений:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^N T_k(t) \mathbb{X}_k(x), \quad (3.3.7)$$

где  $T_k(t)$  – функции переменной  $t$ , а  $\mathbb{X}_k(x)$  – уже полученные ортонормированные собственные функции.

Подставляя приближенное решение (3.3.7) в уравнение (3.3.1), получим

$$\sum_{k=1}^N \mathbb{X}_k(x) \left( (\alpha - \lambda_k) T_k''(t) + \beta(\gamma - \lambda_k) T_k(t) \right) + qf = 0. \quad (3.3.8)$$

Аппроксимируем начальные вектор-функции  $v_0(x)$  и  $v_1(x)$

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^N v_0^k \mathbb{X}_k, \quad \text{где } v_0^k = \langle v_0, \mathbb{X}_k \rangle_{L_2(G)},$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^N v_1^k \mathbb{X}_k, \quad \text{где } v_1^k = \langle v_1, \mathbb{X}_k \rangle_{L_2(G)}.$$

Умножим получившееся уравнение (3.3.8) на  $\mathbb{X}_s(x)$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$  скаляр-

но в  $L_2(G)$ . Получим следующие системы:

$$\begin{cases} (\alpha - \lambda_1)T_1''(t) + \beta(\gamma - \lambda_1)T_1(t) = - \langle qf, \mathbb{X}_1(x) \rangle, \\ (\alpha - \lambda_2)T_2''(t) + \beta(\gamma - \lambda_2)T_2(t) = - \langle qf, \mathbb{X}_2(x) \rangle, \\ \dots \\ (\alpha - \lambda_N)T_N''(t) + \beta(\gamma - \lambda_N)T_N(t) = - \langle qf, \mathbb{X}_N(x) \rangle. \end{cases}$$

В зависимости от  $\alpha$  уравнения могут быть алгебраическими, или дифференциальными второго порядка. Решим получившиеся системы уравнений вместе с начальными условиями, относительно  $T_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .

**Этап 5.** Найдем решение  $w(x, t) = (w^1(x, t), w^2(x, t), \dots, w^j(x, t), \dots)$  сингулярной задачи (3.2.12), (3.2.13) используя формулу (3.2.16), которая принимает вид

$$w(t) = - \sum_{\lambda_k = \alpha} \langle \frac{q(t)f(\cdot, t)}{\beta(\lambda_k - \gamma)}, \mathbb{X}_k \rangle \mathbb{X}_k.$$

**Этап 6.** Складывая полученные решения  $u(x, t)$  регулярной и  $w(x, t)$  сингулярной задач, получим приближенное решение

$$v(x, t) = u(x, t) + w(x, t)$$

задачи (3.3.1)–(3.3.5).

### **3.4 Описание программного комплекса для моделирования продольных колебаний в элементах конструкций из двух тонких упругих стержней с восстановлением коэффициента внешней нагрузки**

Представленный ранее алгоритм был реализован в среде Maple в виде программного комплекса [120]. Он предназначен для специалистов в области математической физики и математического моделирования. Конструкция состоит из двух тонких упругих соединенных стержней. Комплекс реализует алгоритм для нахождения решения обратной задачи для математической модели Буссинеска – Лява на двухреберных графах, которая описывает продольные колебания в конструкции с учетом внешней нагрузки. Решение находится в виде галеркинских приближений, а для восстановления коэффициента внешней на-

грузки используется метод последовательных приближений. В начале программы происходит ввод необходимых данных с указанием матрицы инцидентности соответствующего графа, по которым будет получено решение на выбранной конструкции, с построением графиков искомых функций.

Программный комплекс состоит из файла с командами, которые выполняются последовательно после запуска. На входе задаются начальные параметры и функции. На выходе выводятся графики и функции полученного решения. Приведем описание разработанного программного комплекса решения обратной задачи для математической модели Буссинеска – Лява (3.3.1)–(3.3.5) в стержне по шагам, соответствующим блокам, схемы представленной на рисунке 3.4.1.

Начало программы.

**Шаг 0.** Подключение вспомогательного пакета построения графиков – «with(plots)».

**Шаг 1.** Ввод матрицы инцидентности, для определения графа, и параметров:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – параметры уравнения Буссинеска – Лява;  $l_j$  – длины ребер графа;  $T$  – ограничение по времени;  $\varepsilon$  – допустимое отклонение между соседними последовательными приближениями функции  $q(t)$ ;  $N$  – минимальное количество слагаемых в галеркинских приближений. Ввод функций:  $f(x, t)$  – известная внешняя нагрузка;  $v_0(x)$  – начальное положение ребер графа;  $v_1(x)$  – их начальная скорость;  $K(x)$  – ядро в условии переопределения;  $\Phi(t)$  – правая часть условия переопределения осуществляется с помощью оператора присваивания «...:=...».

**Шаг 2.** Решение задачи Штурма – Лиувилля на графе и получение значения  $n$  – количество слагаемых галеркинских приближений.

**Шаг 2.1.** Нахождение  $\lambda_k$  из системы уравнений. Осуществляется с помощью оператора присваивания «...:=...», функций решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) «dsolve(...)», решения уравнения «solve(...)», функциональных операторов генерации матрицы системы «linalg[genmatrix](...)» и нахождения ее определителя «linalg[det](...)».

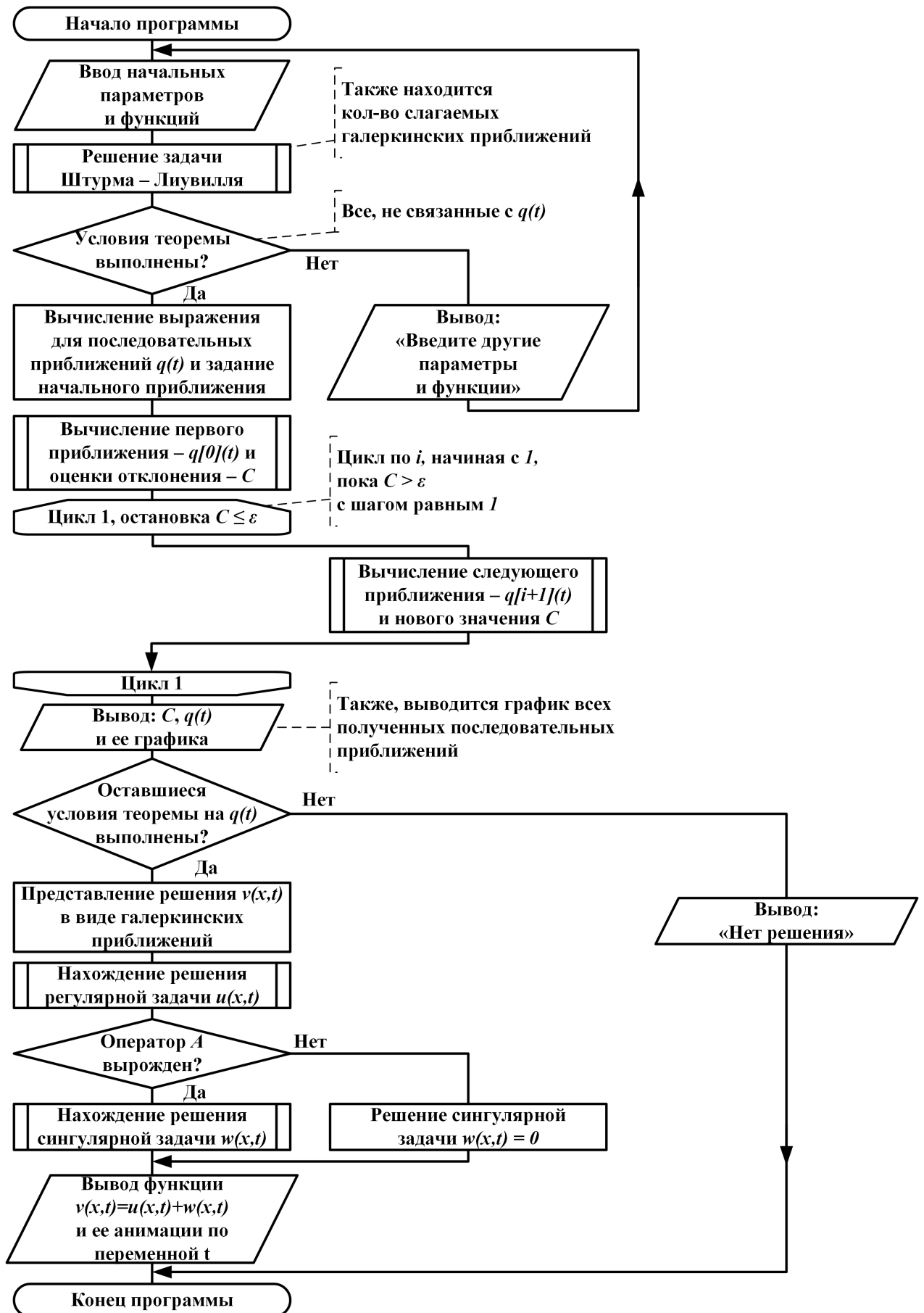


Рисунок 3.4.1 – Схема алгоритма «Обратная задача для математической модели Буссинеска – Лява на конструкции из стержней»

**Шаг 2.2.** Нахождение нормированных собственных функций  $\mathbb{X}_k(x)$  на графе, с помощью собственных значений  $\lambda_k$ . Осуществляется с помощью функций решения ОДУ «dsolve(...)», вычисления определенного интеграла «int(...)», решения уравнения «solve(...)» и зависимости от переменных «unapply(...)».

**Шаг 2.3.** Задание числа слагаемых галеркинских приближений при учете заданного  $N$  и возможного совпадения  $\lambda_k$  с параметром  $\alpha$ , при некотором  $k$ . Осуществляется с помощью операторов выбора «if ... then ... else ... end if» и присваивания «...:=...».

**Шаг 3.** Проверка условий теоремы 3.2.1, не содержащих функцию  $q(t)$ , на выполнение:

- i)* одного из условий  $\alpha \notin \sigma(\Delta)$  или  $(\alpha \in \sigma(\Delta)) \wedge (\alpha \neq \gamma)$ ;
- ii)* условия  $\sum_{\lambda_k \neq \alpha} \frac{\langle f(\cdot, t), K(x) \rangle}{\alpha - \lambda_k} \neq 0$ ;
- iii)* при заданном  $v_1 \in \mathcal{U}^1$ , условия  $\sum_{\lambda_k \neq \alpha} \langle v_1, K(x) \rangle = \Phi'(0)$ .

Если все условия выполнены, то переход к шагу 5, иначе переход к шагу 4. Осуществляется с помощью оператора выбора «if ...» и функции интегрирования «int(...)».

**Шаг 4.** Вывод: «Введите другие параметры и функции». Переход к шагу 1. Осуществляется с помощью функции печати выражения в формате строки «printf()».

**Шаг 5.** Составление выражения для проведения последовательных приближений функции  $q(t)$ , используя формулу (3.3.6). Осуществляется с помощью операторов выбора «if ...», цикла «for ... from ... to ... do ... end do» и функции интегрирования «int(...)».

**Шаг 6.** Вычисление первого приближения  $q[1](t)$  с заданным начальным приближением  $q[0](t) = 0$ , используя формулу (3.3.6). Осуществляется с помощью функции подстановки «subs(...)». Вычисление оценки отклонения —  $C$ , которая равна норме (в пространстве  $L_2(G)$ ) разности 1-го приближения и начального. Осуществляется с помощью функций интегрирования «int(...)» и вычисления квадратного корня «sqrt(...)».

**Шаг 7.** Цикл по  $i$ , начиная с единицы, пока  $C > \varepsilon$ . Если условие цик-

ла выполнено переход к шагу 8, иначе переход к шагу 10. Осуществляется с помощью оператора цикла «while ... do ... end do»

**Шаг 8.** Вычисление следующего приближения  $q[i + 1](t)$  с помощью предыдущего  $q[i](t)$  по формуле (3.3.6). Вычисление новой оценки отклонения  $-C$ , которая равна норме разности  $(i + 1)$ -го приближения и  $i$ -го. Осуществляется с помощью функций интегрирования «int(...)», вычисления квадратного корня «sqrt(...)» и подстановки «subs(...)».

**Шаг 9.** Индекс  $i$  увеличивается на единицу, переход к шагу 7. Осуществляется с помощью оператора присваивания «...:=...».

**Шаг 10.** Вывод полученного приближенного решения  $q(t)$ , а также получившейся оценки отклонения  $-C$  для последнего приближения. Осуществляется с помощью «printf()». Построение графиков: функции  $q(t)$  и функций всех ее последовательных приближений. Осуществляется с помощью функции построения графика «plot(...)».

**Шаг 11.** Проверка оставшихся условий теоремы 3.2.1, которые связаны с найденной функцией  $q(t)$ :

$$i) \langle v_0 + \frac{q(0)f(\cdot,0)}{\beta(\lambda_k-\gamma)}, \mathbb{X}_k \rangle = 0 \text{ для } k : \lambda_k = \alpha;$$

$$ii) \langle v_1 + \frac{q(0)f_t(\cdot,0)+q'(0)f(\cdot,0)}{\beta(\lambda_k-\gamma)}, \mathbb{X}_k \rangle = 0 \text{ для } k : \lambda_k = \alpha.$$

Если выполнены все условия, то переход к шагу 13, иначе переход к шагу 12. Осуществляется с помощью оператора выбора «if ...» и функции интегрирования «int(...)».

**Шаг 12.** Вывод: «Нет решения». Остановка программы. Осуществляется с помощью функции печати выражения в формате строки «printf()».

**Шаг 13.** Представление решения  $v(x, t)$  в виде галеркинских приближений. Осуществляется с помощью функций определенного суммирования «sum(...)» и зависимости от переменных «unapply(...)».

**Шаг 14.** Получение приближенного решения уравнения Буссинеска – Лява при вычисленной функции  $q(t)$ . Начало цикла по  $i$ , начиная с единицы, пока  $i \leq N$  с шагом равным 1. Умножение уравнения Буссинеска – Лява, а также начальных условий, скалярно на собственную функцию  $\mathbb{X}_i$  на каждом ребре графа. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений второго поряд-

ка с начальными условиями. Переход к следующей итерации. Итог: получение решения регулярной задачи  $u(x, t)$  из (3.2.9)–(3.2.11). Осуществляется с помощью операторов цикла «for ...», присваивания «...:=...», функций подстановки «subs(...)», интегрирования «int(...)» и решения ОДУ «dsolve(...)».

**Шаг 15.** Проверка на вырожденность. Если вырожденность не обнаружена, то переход к шагу 16, иначе переход к шагу 17. Осуществляется с помощью оператора выбора «if ...».

**Шаг 16.** Решение  $w(x, t)$  сингулярной задачи (3.2.12), (3.2.13) равно нулю. Переход к шагу 18. Осуществляется с помощью оператора присваивания «...:=...».

**Шаг 17.** Нахождение решения  $w(x, t)$  сингулярной задачи (3.2.12), (3.2.13) по формуле (3.2.16). Осуществляется с помощью функции интегрирования «int(...)» и оператора цикла «for ...».

**Шаг 18.** Вычисление искомой функции  $v(x, t)$  как суммы двух полученных ранее функций  $u(x, t)$  и  $w(x, t)$ . Вывод полученной функции  $v(x, t)$ . Построение анимированного, по переменной  $t$ , графика функции  $v(x, t)$ . Осуществляется с помощью функций подстановки «subs(...)», печати выражения в формате строки «printf()» и создания двумерной анимации «animate(plot, ...)».

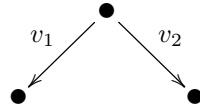
Конец алгоритма.

### 3.5 Результаты обработки информации для моделирования продольных колебаний в конструкции из тонких упругих стержней и восстановления параметра внешних сил

Приведем результаты проведения обработки информации по разработанному алгоритму, который был реализован в среде Maple в виде программного комплекса. Примеры 3.5.1–3.5.3 имеют отличие по входной информации, т.е. разные начальные значения, начальные функции и направления ребер в графах. В примере 1, продемонстрирован случай существования сингулярной задачи (3.2.12), (3.2.13).

**Пример 3.5.1** Пусть граф  $G_1$  (см. рисунок 3.5.1) состоит из двух ребер, соединяющих три вершины



Рисунок 3.5.1 – Граф  $G_1$ 

для которого задана следующая входная информация:

$$\alpha = -0.25, \beta = -3, \gamma = 1, \varepsilon = 1, n = 3, T = 1, l_1 = l_2 = \pi,$$

$$v_0(x) = \left( \cos(2x) - 1, \cos(2(x - \pi)) - 1 \right),$$

$$v_1(x) = \left( \frac{2(\cos(2x) - 1)}{\pi}, \frac{2(\cos(2(x - \pi)) - 1)}{\pi} \right),$$

$$f(x) = \left( \sin(6x), \sin(6x) \right), \quad K(x) = \left( \cos(x), \cos(x) \right), \quad F(t) = -\cos(t) + 1.$$

Следовательно, математическая модель Буссинеска – Лява (3.2.1)–(3.2.5) на графе  $G_1$  примет вид

$$(-0.25 - \Delta)v_{1tt} = -3(\Delta - 1)v_{1t} + q(t) \sin(6x),$$

$$(-0.25 - \Delta)v_{2tt} = -3(\Delta - 1)v_{2t} + q(t) \sin(6x),$$

$$v_{1x}(\pi, t) = 0, \quad v_{1x}(0, t) + v_{2x}(0, t) = 0,$$

$$v_{2x}(\pi, t) = 0, \quad v_1(0, t) = v_2(0, t),$$

$$v_1(x, 0) = \cos(2x) - 1, \quad v_2(x, 0) = \cos(2(x - \pi)) - 1,$$

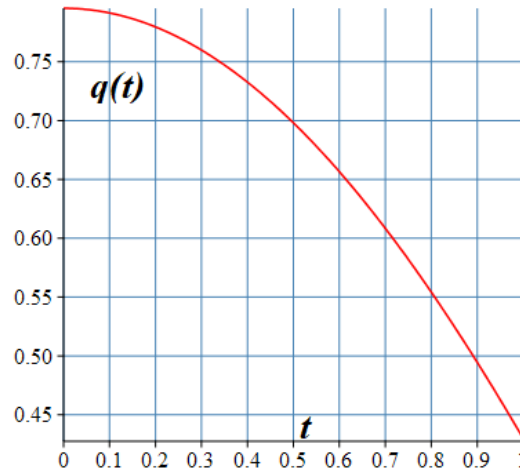
$$v_{1t}(x, 0) = \frac{2(\cos(2x) - 1)}{\pi}, \quad v_{2t}(x, 0) = \frac{2(\cos(2(x - \pi)) - 1)}{\pi},$$

$$\int_0^\pi v_1(x, t) \cos(x) dx = -\cos(t) + 1, \quad \int_0^\pi v_2(x, t) \cos(x) dx = -\cos(t) + 1.$$

Для этой входной информации выполняются все условия теоремы 3.2.1. С помощью разработанного алгоритма информация была обработана и восстановлен параметр уравнения

$$q(t) = 0.7954545455 \cos(t),$$

достигнув допустимого отклонения  $0.6783899940 < \varepsilon$  между соседними приближениями функции  $q(t)$ , на 1-ом шаге последовательных приближений. На рисунке 3.5.2 представлен график функции  $q(t)$ .

Рисунок 3.5.2 – График функции  $q(t)$ 

Далее в программе, были найдена вектор-функция  $v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t))$

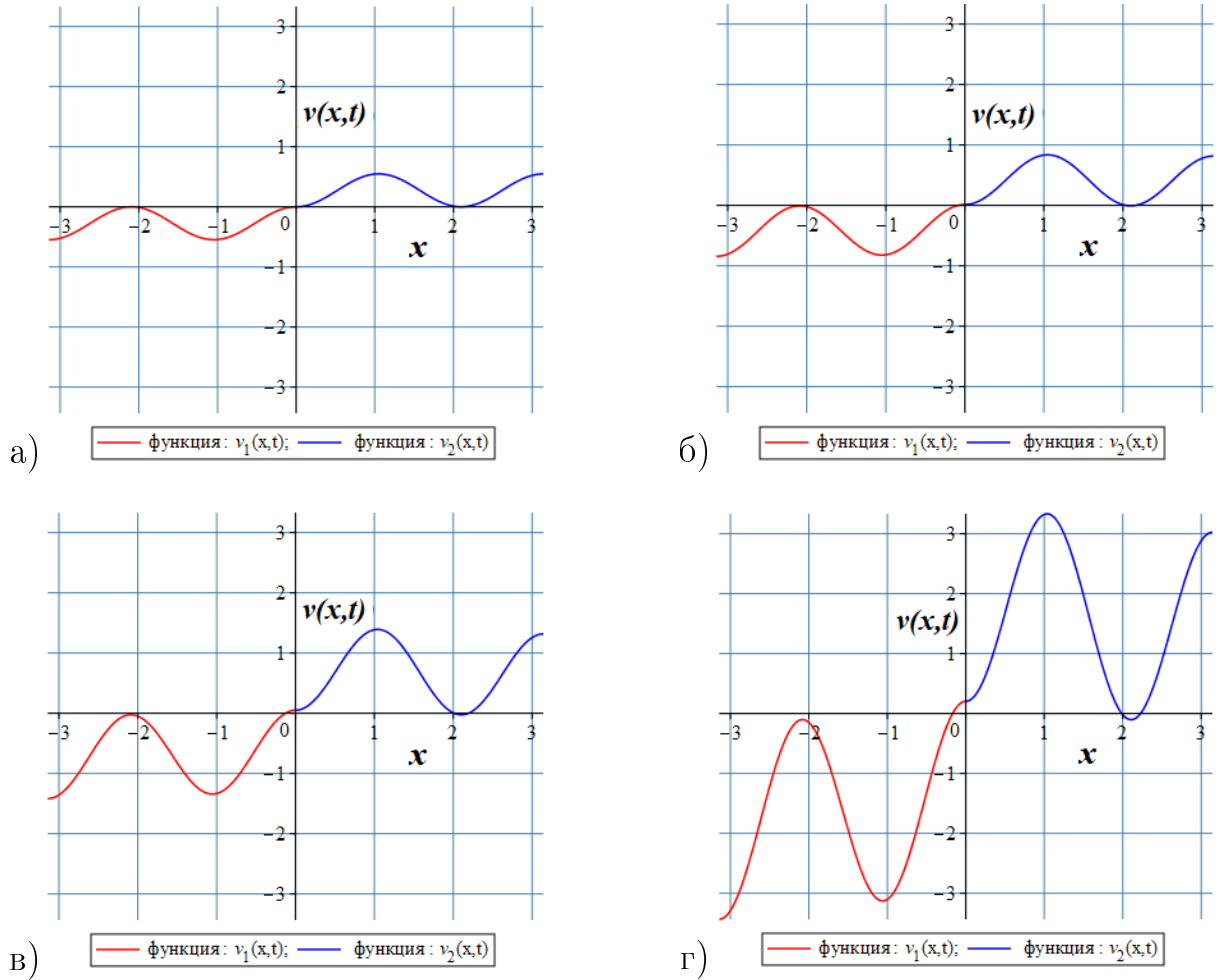
$$v_1(x, t) = u_1(x, t) + w_1(x, t),$$

$$v_2(x, t) = u_2(x, t) + w_2(x, t),$$

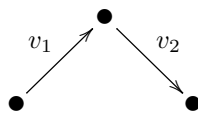
где  $w_1(x, t) = 0$ ,  $w_2(x, t) = 0$ , а

$$\begin{aligned} u_1(x, t) = & \left( 0.1947526274 \cos^2(1.5x) - 0.1947526274 \right) e^{-2.207940216t} + \\ & + \left( 0.3525605065 \cos^2(1.5x) - 0.3525605065 \right) e^{2.207940216t} - \\ & - 0.025722011 \cos(x) \cos(t) + 0.01286100550 \cos(x) e^{-2.828427124t} + \\ & + 0.01286100550 \cos(x) e^{2.828427124t}, \\ u_2(x, t) = & \left( -0.1947526274 \cos^2(1.5x) + 0.1947526274 \right) e^{-2.207940216t} + \\ & + \left( 0.3525605065 - 0.3525605065 \cos^2(1.5x) \right) e^{2.207940216t} - \\ & - 0.025722011 \cos(x) \cos(t) + 0.01286100550 \cos(x) e^{-2.828427124t} + \\ & + 0.01286100550 \cos(x) e^{2.828427124t} \end{aligned}$$

представляющая продольные колебания на графе  $G_1$ . Последним шагом программы было построение, анимированного по времени, графика найденной вектор-функции  $v(x, t)$ . На рисунке 3.5.3 представлен график вектор-функции  $v(x, t)$  в различные моменты времени  $t$ .

Рисунок 3.5.3 – График функции  $v(x, t)$  при:а)  $t = 0$ ; б)  $t = 0.33$ ; в)  $t = 0.6$ ; г)  $t = 1$ 

**Пример 3.5.2** Пусть граф  $G_2$  (см. рисунок 3.5.4) состоит из двух ребер, соединяющих три вершины

Рисунок 3.5.4 – Граф  $G_2$ 

для которого задана следующая входная информация:

$$\alpha = 4, \beta = 1, \gamma = 1, \varepsilon = 0.8, n = 3, T = 10, l_1 = l_2 = \pi,$$

$$v_0(x) = \left( \cos(x), \cos(x + \pi) \right), \quad v_1(x) = \left( \cos(5x), \cos(5(x + \pi)) \right),$$

$$f(x) = \left( \cos(x), \cos(x) \right), \quad K(x) = \left( \cos(x), \cos(x) \right), \quad F(t) = \frac{4 \cos(t)}{3}.$$

Следовательно, математическая модель Буссинеска – Лява (3.2.1)–(3.2.5) на графе  $G_2$  примет вид

$$(4 - \Delta)v_{1tt} = (\Delta - 1)v_{1t} + q(t) \cos(x), \quad (4 - \Delta)v_{2tt} = (\Delta - 1)v_{2t} + q(t) \cos(x),$$

$$v_{1x}(0, t) = 0, \quad v_{1x}(\pi, t) = v_{2x}(0, t), \quad v_{2x}(\pi, t) = 0, \quad v_1(\pi, t) = v_2(0, t),$$

$$v_1(x, 0) = \cos(x), \quad v_2(x, 0) = -\cos(x), \quad v_{1t}(x, 0) = \cos(5x), \quad v_{2t}(x, 0) = -\cos(5x),$$

$$\int_0^\pi v_1(x, t) \cos(x) dx = \frac{4 \cos(t)}{3}, \quad \int_0^\pi v_2(x, t) \cos(x) dx = \frac{4 \cos(t)}{3}.$$

Для этой входной информации выполняются все условия теоремы 3.2.1. С помощью разработанного алгоритма информация была обработана и восстановлен параметр уравнения

$$q(t) = -0.1086630414 \left( \cos^2(t) - 4.561460764 \cos(t) + 10.12254201 \right) \cos(t),$$

достигнув допустимого отклонения  $0.6551933817 < \varepsilon$  между соседними приближениями функции  $q(t)$ , на 3-ем шаге последовательных приближений. На рисунке 3.5.5 представлены графики функции  $q(t)$  и всех её полученных последовательных приближений.

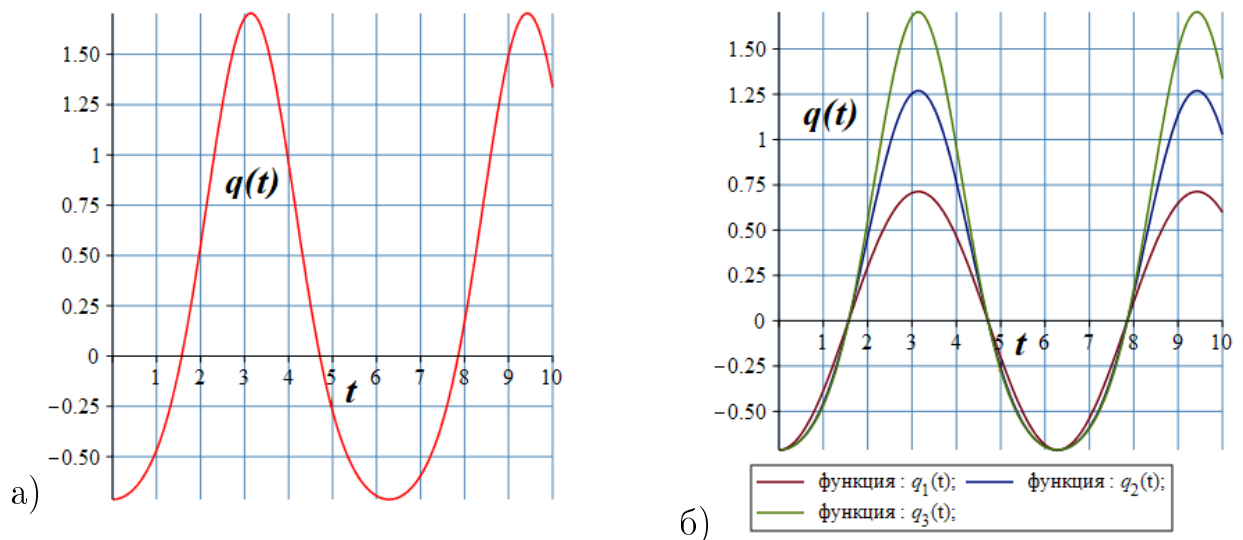


Рисунок 3.5.5 – График: а) функции  $q(t)$ ;  
б) функций всех последовательных приближений

Далее в программе, была найдена вектор-функция  $v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t))$ ,

$$v_1(x, t) = \left( 0.2155045464 \cos(0.721110255t) - 0.01642038657 \sin(0.721110255t) \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \cos^2(1.5x) + \left( \left( -0.2155045464 \sin(1.5x) - 0.3507939797 \right) \cos(0.721110255t) + \right. \\
& \quad \left. + 0.01642038657 \sin(0.721110255t) \sin(1.5x) + 0.3008521127 \cos(t) - \right. \\
& \quad \left. - 0.008704782265 \cos(2t) + 0.0003915681549 \cos(3t) + 0.05825508129 \right) \cos(1.5x) + \\
& \quad + \left( 0.1197247481 \cos(0.5423261445t) + 0.006689743258 \sin(0.5423261445t) \right) \times \\
& \times \cos^2(0.5x) + \left( \left( 0.1197247481 \sin(0.5x) - 0.2449196273 \right) \cos(0.5423261445t) + \right. \\
& \quad \left. + 0.006689743258 \sin(0.5423261445t) \sin(0.5x) + 0.1671400626 \cos(t) - \right. \\
& \quad \left. - 0.006678272105 \cos(2t) + 0.0003116082915 \cos(3t) + 0.08414622853 \right) \cos(0.5x), \\
v_2(x, t) = & \left( \left( 0.2155045465 \cos(1.5x) - 0.3507939798 \right) \cos(0.721110255t) - \right. \\
& \quad \left. - 0.01642038657 \cos(1.5x) \sin(0.721110255t) + 0.3008521127 \cos(t) - \right. \\
& \quad \left. - 0.008704782265 \cos(2t) + 0.0003915681549 \cos(3t) + 0.05825508129 \right) \sin(1.5x) + \\
& \quad + \left( \left( -0.1197247480 \cos(0.5x) + 0.2449196273 \right) \cos(0.5423261445t) - \right. \\
& \quad \left. - 0.006689743258 \cos(0.5x) \sin(0.5423261445t) - 0.1671400626 \cos(t) + \right. \\
& \quad \left. + 0.006678272105 \cos(2t) - 0.0003116082915 \cos(3t) - 0.08414622853 \right) \sin(0.5x) + \\
& \quad + \left( 0.1197247480 \cos^2(0.5x) - 0.1197247480 \right) \cos(0.5423261445t) + \\
& \quad + \left( 0.2155045465 \cos^2(1.5x) - 0.2155045465 \right) \cos(0.721110255t) + \\
& \quad + 0.006689743258 \cos^2(0.5x) \sin(0.5423261445t) - \\
& \quad - 0.01642038657 \cos^2(1.5x) \sin(0.721110255t) - \\
& \quad - 0.006689743258 \sin(0.5423261445t) + 0.01642038657 \sin(0.721110255t)
\end{aligned}$$

представляющая продольные колебания на графе  $G_2$ . Последним шагом программы было построение, анимированного по времени, графика найденной вектор-функции  $v(x, t)$ . На рисунке 3.5.6 представлен график вектор-функции  $v(x, t)$  в различные моменты времени  $t$ .

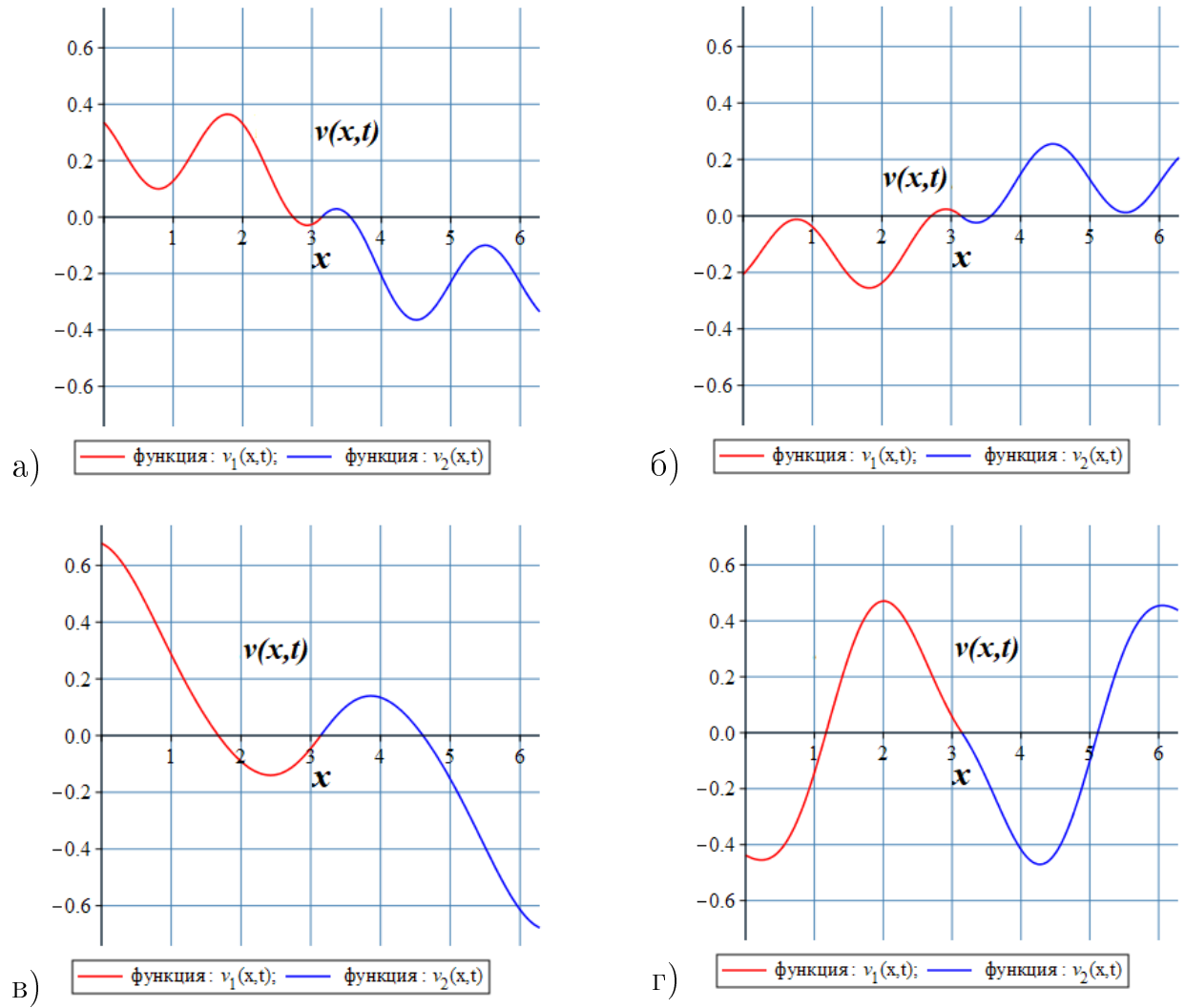


Рисунок 3.5.6 – График функции  $v(x, t)$  при:

а)  $t = 0$ ; б)  $t = 3.33$ ; в)  $t = 6.66$ ; г)  $t = 10$

**Пример 3.5.3** Пусть граф  $G_3$  (см. рисунок 3.5.7) состоит из двух ребер, соединяющих три вершины

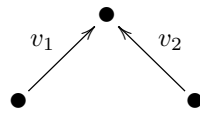


Рисунок 3.5.7 – Граф  $G_3$

для которого задана следующая входная информация:

$$\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 2, \varepsilon = 3, n = 7, T = 10, l_1 = l_2 = 2\pi,$$

$$v_0(x) = \left( \cos\left(\frac{x}{2}\right), \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right), v_1(x) = \left( \cos\left(\frac{x}{2}\right), \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right), f(x) = (x+1, x-1),$$

$$K(x) = \left( 2x^2, \frac{x}{2} \right), F(t) = \left( \frac{512(175\pi^2 - 6808)}{1575\pi} + \frac{64(5\pi - 62)}{45\pi} \right)t.$$

Следовательно, математическая модель Буссинеска – Лява (3.2.1)–(3.2.5) на графе  $G_3$  примет вид

$$(1 - \Delta)v_{1tt} = 3(\Delta - 2)v_1 + q(t)(x + 1), \quad (1 - \Delta)v_{2tt} = 3(\Delta - 2)v_2 + q(t)(x - 1),$$

$$v_1(2\pi, t) = v_2(2\pi, t), \quad v_{1t}(0, t) = 0, \quad v_{1t}(2\pi, t) + v_{2t}(2\pi, t) = 0, \quad v_{2t}(0, t) = 0,$$

$$v_1(x, 0) = \cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad v_2(x, 0) = \cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad v_{1t}(x, 0) = \cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad v_{2t}(x, 0) = \cos\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$\int_0^{2\pi} 2x^2 v_1(x, t) dx = \left( \frac{512(175\pi^2 - 6808)}{1575\pi} + \frac{64(5\pi - 62)}{45\pi} \right) t,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{xv_2(x, t)}{2} dx = \left( \frac{512(175\pi^2 - 6808)}{1575\pi} + \frac{64(5\pi - 62)}{45\pi} \right) t.$$

Для этой входной информации выполняются все условия теоремы 3.2.1. С помощью разработанного алгоритма информация была обработана и восстановлен параметр уравнения

$$q(t) = -0.9091669126 \cos(t) - 0.9091669126 \sin(t),$$

достигнув допустимого отклонения  $2.917272673 < \varepsilon$  между соседними приближениями функции  $q(t)$ , на 1-ом шаге последовательных приближений. На рисунке 3.5.8 представлены график функции  $q(t)$ .

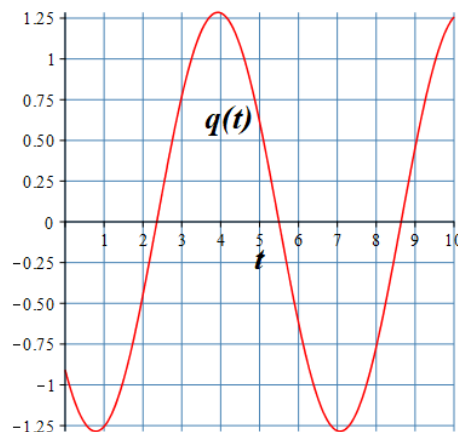


Рисунок 3.5.8 – График функции  $q(t)$

Далее в программе, была найдена вектор-функция  $v(x, t)$  представляющая продольные колебания на графе  $G_3$ . Вид функции не приведен, из-за большого объема, но последним шагом программы было построение, анимированного по времени, графика найденной вектор-функции  $v(x, t)$ . На рисунке 3.5.9 представлен график вектор-функции  $v(x, t)$  в различные моменты времени  $t$ .

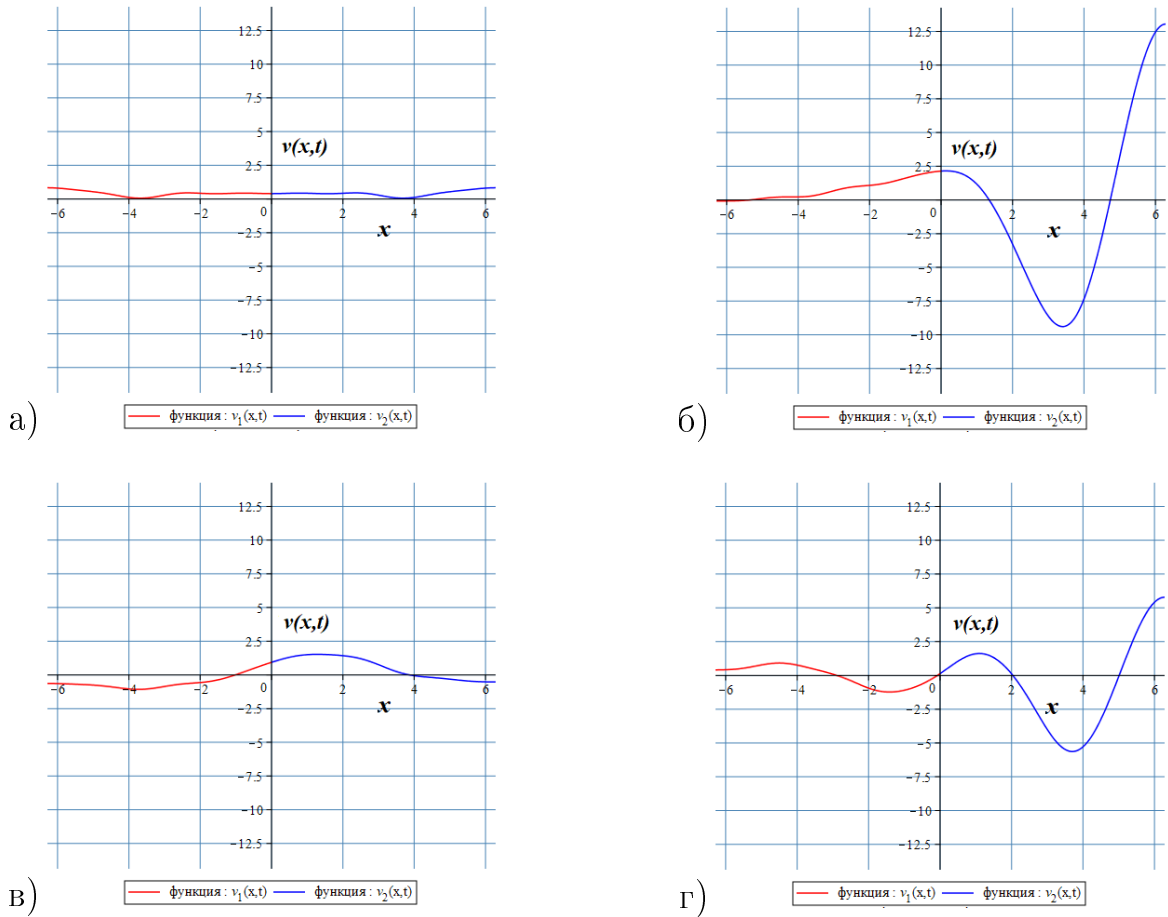


Рисунок 3.5.9 – График функции  $v(x, t)$  при:  
 а)  $t = 0$ ; б)  $t = 3.5354$ ; в)  $t = 6.2626$ ; г)  $t = 10$

### 3.6 Верификация результатов по восстановлению параметра внешнего воздействия для математической модели Буссинеска – Лява в конструкции из стержней

В данном параграфе приведем верификацию разработанного метода обработки информации для восстановления параметра внешней нагрузки  $q(t)$  на конструкцию из стержней. Алгоритм верификации аналогичен представленному в параграфе 2.6, только рассматривается для соответствующей прямой (1.4.1)–(1.4.4) и обратной задачи (3.2.1)–(3.2.5).

**Пример 3.6.1** Рассмотрим математическую модель из примера 3.5.2 предыдущего параграфа для графа  $G_2$ .

$$(4 - \Delta)v_{1tt} = (\Delta - 1)v_{1t} + q(t) \cos(x), \quad (4 - \Delta)v_{2tt} = (\Delta - 1)v_{2t} + q(t) \cos(x),$$

$$v_{1t}(0, t) = 0, \quad v_{1t}(\pi, t) = v_{2t}(0, t), \quad v_{2t}(\pi, t) = 0, \quad v_1(\pi, t) = v_2(0, t),$$

$$v_1(x, 0) = \cos(x), \quad v_2(x, 0) = -\cos(x), \quad v_{1t}(x, 0) = \cos(5x), \quad v_{2t}(x, 0) = -\cos(5x).$$



Для наглядности результатов последовательных приближений зададим новое значение  $\varepsilon = 0.007$  (допустимое отклонение между соседними последовательными приближениями функции  $q(t)$ ). Также, введем точное значение функции  $q(t)$ , как  $qToch(t) = 0$ .

При решении задачи с известным  $qToch(t)$  с помощью программного комплекса была найдена функция

$$F(t) = 0.01050822413 \sin(0.5423261445t) + 0.1880631945 \cos(0.5423261445t).$$

Рассмотрим условия переопределения

$$\int_0^{\pi} v_1(x, t) \cos(x) dx = F(t), \quad \int_0^{\pi} v_2(x, t) \cos(x) dx = F(t)$$

с полученной функцией  $F(t)$ . Методом обработки информации, описанным в параграфе 3.3 с учетом полученной функции  $F(t)$  с помощью программного комплекса получена функция

$$\begin{aligned} q(t) = & 2.206113274(10^{-8}) \left( \cos^4(t) - 4 \cos^3(t) + 6 \cos^2(t) - 4 \cos(t) + 44.04778719 \right) \times \\ & \times \left( \cos^2(t) - 2 \cos(t) + 7.561081251 \right) \left( \cos^8(t) - 8 \cos^7(t) + 28 \cos^6(t) - 56 \cos^5(t) + \right. \\ & \left. + 70 \cos^4(t) - 56 \cos^3(t) + 28 \cos^2(t) - 8 \cos(t) + 1854.111982 \right) \left( \cos(t) - \right. \\ & \left. - 3.561460765 \right) \cos(0.5423261445t) + 1.232688449(10^{-9}) \left( \cos^4(t) - 4 \cos^3(t) + \right. \\ & \left. + 6 \cos^2(t) - 4 \cos(t) + 44.04778719 \right) \left( \cos^2(t) - 2 \cos(t) + 7.561081251 \right) \left( \cos^8(t) - \right. \\ & \left. - 8 \cos^7(t) + 28 \cos^6(t) - 56 \cos^5(t) + 70 \cos^4(t) - 56 \cos^3(t) + 28 \cos^2(t) - 8 \cos(t) + \right. \\ & \left. + 1854.111982 \right) \left( \cos(t) - 3.561460765 \right) \sin(0.5423261445t) + \\ & + 2.912035545(10^{-7}) \left( -1 + \cos(t) \right)^{16} \end{aligned}$$

достигнув допустимого отклонения  $0.006521415643 < \varepsilon$  между соседними приближениями функции  $q(t)$ , на 17-ом шаге последовательных приближений. На рисунке 3.6.1 представлены графики функции  $qToch(t)$  и всех найденных последовательных приближений.

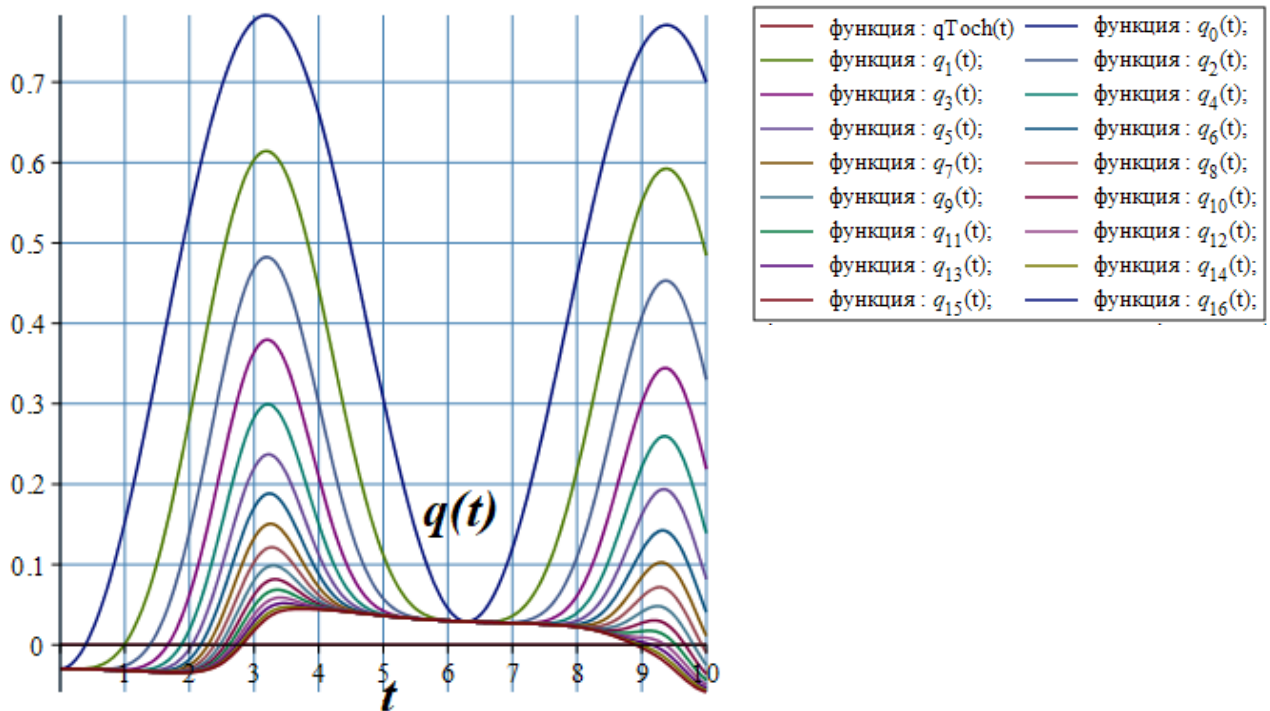


Рисунок 3.6.1 – График функции  $qToch(t)$  и функций всех последовательных приближений

Кроме того, для верификации метода была найдена погрешность каждого  $i$ -ого шага последовательных приближений (см. таблицу 3.6.1), относительно известного (заданного) точного решения, по формуле (2.6.1).

Таблица 3.6.1 – Результаты оценки погрешности в зависимости от номера приближения

Номер приближения	Значение погрешности	Номер приближения	Значение погрешности
$i = 1$	3.162277660	$i = 10$	0.1533508963
$i = 2$	1.580707372	$i = 11$	0.1296694029
$i = 3$	1.072857505	$i = 12$	0.1150269894
$i = 4$	0.7682937475	$i = 13$	0.1066301363
$i = 5$	0.5631312341	$i = 14$	0.1022310097
$i = 6$	0.4188380270	$i = 15$	0.1002002078
$i = 7$	0.3156228297	$i = 16$	0.09947418145
$i = 8$	0.2416799393	$i = 17$	0.09941421820
$i = 9$	0.1893569642		

Получаем, что отклонения функции  $q[i]$  от точного уменьшаются с увеличением количества итераций, на 16-ом шаге их отклонение достигло значения

меньше 0.1. Теперь, приведем другой пример и посмотрим на его результат.

**Пример 3.6.2** Рассмотрим математическую модель из примера 3.5.2 предыдущего параграфа для графа  $G_2$ .

$$(4 - \Delta)v_{tt} = (\Delta - 1)v_t + q(t) \cos(x),$$

$$v_{1t}(0, t) = 0, \quad v_{1t}(\pi, t) = v_{2t}(0, t), \quad v_{2t}(\pi, t) = 0, \quad v_1(\pi, t) = v_2(0, t),$$

$$v_1(x, 0) = \cos(x), \quad v_2(x, 0) = -\cos(x), \quad v_{1t}(x, 0) = \cos(5x), \quad v_{2t}(x, 0) = -\cos(5x).$$

Для наглядности результатов последовательных приближений зададим новые значения  $\varepsilon = 0.3$  (допустимое отклонение между соседними последовательными приближениями функции  $q(t)$ ),  $N = 5$  (количество слагаемых галеркинских приближений) и  $T = 5$  (время). Также, введем точное значение функции  $q(t)$ :

$$\begin{aligned} qToch(t) = & 2.090255737(10^{-45}) \cos(t) \left( -1.108006137(10^9) + \right. \\ & \left. + 3.51203537(10^8) \cos(t) \right) \left( 1.233439244(10^{17}) \cos^2(t) - \right. \\ & \left. - 5.124795987(10^{17}) \cos(t) + 9.618858497(10^{17}) \right) \left( 1.233439244(10^{17}) \cos^2(t) + \right. \\ & \left. + 1.910390113(10^{16}) \cos(t) + 4.303023498(10^{17}) \right). \end{aligned}$$

При решении задачи с известным  $qToch(t)$  с помощью программного комплекса была найдена функция

$$\begin{aligned} F(t) = & -0.2800540832 \cos(0.5423261445t) - 0.1502453974 \cos(0.8410214463t) + \\ & + 0.01050822413 \sin(0.5423261445t) - 1.091856363 \cos(0.7211102550t) - \\ & - 0.0001429042909 \cos^6(t) + 0.001480900569 \cos^5(t) - \\ & - 0.007880744052 \cos^4(t) + 0.03136160735 \cos^3(t) - \\ & - 0.1262140248 \cos^2(t) + 1.230981610 \cos(t) + 0.5806325931. \end{aligned}$$

Рассмотрим условия переопределения

$$\int_0^\pi v_1(x, t) \cos(x) dx = F(t), \quad \int_0^\pi v_2(x, t) \cos(x) dx = F(t).$$

с полученной функцией  $F(t)$ . Методом обработки информации, описанным в параграфе 3.3 с учетом полученной функции  $F(t)$  с помощью программного комплекса получена функция

$$\begin{aligned}
 q(t) = & -0.003203801151(\cos^2(t) - 2\cos(t) + 5.643521585)(\cos(t) - \\
 & -3.154883195)\cos(0.5423261445t) - 0.004133499406(\cos^2(t) - 2\cos(t) + \\
 & +5.643521585)(\cos(t) - 3.154883195)\cos(0.8410214463t) + \\
 & +0.0001202134253(\cos^2(t) - 2\cos(t) + 5.643521585)(\cos(t) - \\
 & -3.154883195)\sin(0.5423261445t) - 0.02208367843(\cos^2(t) - 2\cos(t) + \\
 & +5.643521585)(\cos(t) - 3.154883195)\cos(0.7211102550t) + \\
 & +0.04637725741(\cos(t) - 1)^4 - 0.0002001014943(\cos^6(t) - \\
 & -7.196447124\cos^5(t) + 23.67644794\cos^4(t) - 49.10754787\cos^3(t) + \\
 & +79.75174002\cos^2(t) - 202.7020943\cos(t) - \\
 & -49.06703799)(\cos^2(t) - 2\cos(t) + 5.643521585)(\cos(t) - 3.154883195)
 \end{aligned}$$

достигнув допустимого отклонения  $0.2816853932 < \varepsilon$  между соседними приближениями функции  $q(t)$ , на 5-ом шаге последовательных приближений. На рисунке 3.6.2 представлены графики функции  $qToch(t)$  и всех найденных последовательных приближений.

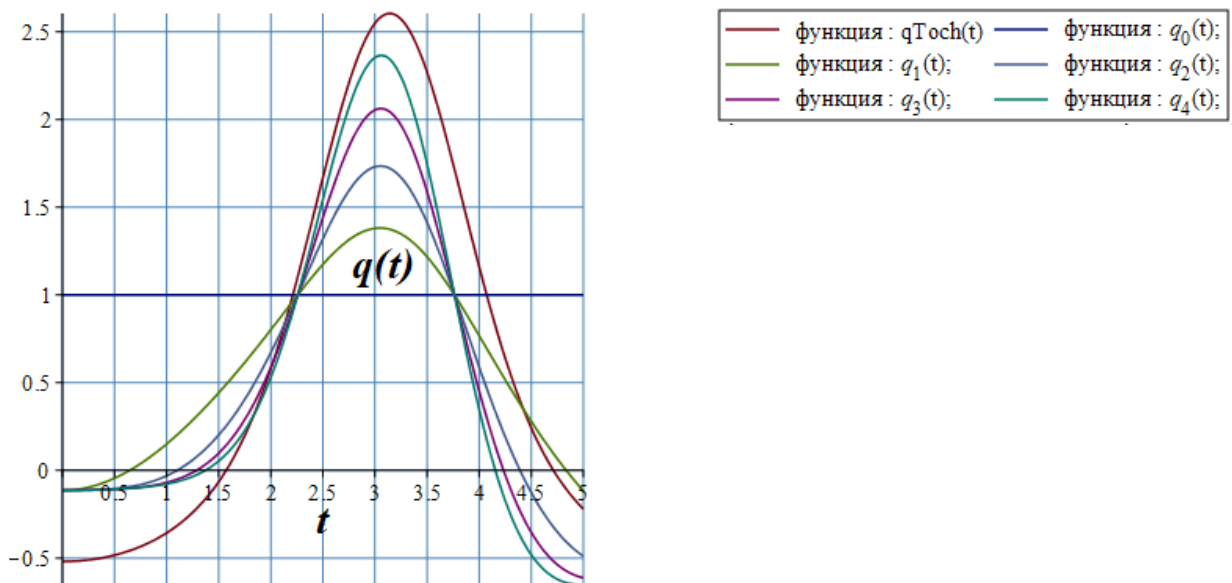


Рисунок 3.6.2 – График функции  $qToch(t)$  и функций всех последовательных приближений

Кроме того, для верификации метода была найдена погрешность каждого  $i$ -ого шага последовательных приближений (см. таблицу 3.6.1), относительно известного (заданного) точного решения, по формуле (2.6.1).

Таблица 3.6.2 – Результаты оценки погрешности в зависимости от номера приближения

Номер приближение	Значение погрешности
$i = 1$	2.474471714
$i = 2$	1.363676459
$i = 3$	1.104521657
$i = 4$	1.010146151
$i = 5$	0.9862291869

Получаем, что отклонения функции  $q[i]$  от точного уменьшаются с увеличением количества итераций, на 5-ом шаге их отклонение достигло значения меньше 1.

При необходимости, для каждого примера можно получить более точное значение параметра  $q(t)$  увеличив количество последовательных приближений. Таким образом, из примеров этого параграфа, можно сказать, что используемый метод обработки информации достаточно эффективен для восстановления параметра  $q(t)$  математической модели (3.3.1)–(3.3.5), т. к. получаемая погрешность приближенного решения получается достаточно малой относительно точного и при увеличении количества приближений получаемое решение стремится к точному.

## 4 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Глава содержит все этапы исследования математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле. Параграфы 4.1 и 4.2 содержат результаты аналитического исследования, 4.3, 4.4 – численного исследования, а 4.5 – результаты обработки информации.

### 4.1 Метод аналитического исследования математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле на основе теории относительно полиномиально ограниченных пучков операторов

Аналогично параграфам 2.1 и 3.1 аналитическое изучение математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле будет использовать теорию полиномиальной  $A$ -ограниченности пучков операторов  $\vec{B}$ , представленную в параграфе 1.1 и метод последовательных приближений. В этом параграфе приведены результаты изучения абстрактного полного, неоднородного уравнения соболевского типа высокого порядка с условием Коши и переопределения для их использования в качестве метода аналитического исследования математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.

Пусть  $\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{Y}$  – банаховы пространства, операторы  $A, B_0, B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ ,  $\ker A \neq \{0\}$ ,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ ,  $\chi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{F})$  и заданы функции  $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$ . Рассмотрим следующую задачу

$$Av^{(n)}(t) = B_{n-1}v^{(n-1)}(t) + \dots + B_1v'(t) + B_0v(t) + \chi(t)q(t) + f(t), \quad (4.1.1)$$

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1, \quad \dots, \quad v^{(n-1)}(0) = v_{n-1}, \quad (4.1.2)$$

$$Cv(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.1.3)$$

Обратной задачей будем называть задачу отыскания из отношений (4.1.1)–(4.1.3) пары функций  $v(t) \in C^n([0, T]; \mathcal{U})$  и  $q(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ .

Пусть пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен и выполнено условие (1.2.1), тогда  $v(t)$  можно представить как  $v(t) = Pv(t) + (\mathbb{I} - P)v(t) = u(t) + \omega(t)$ .

Предположим, что  $\mathcal{U}^0 \subset \ker C$ . Тогда в силу теоремы 3.1.1 и леммы 1.2.1 задача (4.1.1)–(4.1.3) эквивалентна задаче нахождения функций  $u \in C^n([0, T]; \mathcal{U}^1)$ ,  $\omega \in C^n([0, T]; \mathcal{U}^0)$ ,  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$  из соотношений

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t) = & S_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + S_1u'(t) + S_0u(t) + \\ & + (A^1)^{-1}Q\chi(t)q(t) + (A^1)^{-1}Qf(t), \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}, \quad (4.1.5)$$

$$Cu(t) = \Psi(t) \equiv Cv(t), \quad (4.1.6)$$

$$\begin{aligned} H_0\omega^{(n)}(t) = & H_{n-1}\omega^{(n-1)}(t) + \dots + H_2\omega''(t) + H_1\omega'(t) + \omega(t) + \\ & + (B_0^0)^{-1}(\mathbb{I} - Q)\chi(t)q(t) + (B_0^0)^{-1}(\mathbb{I} - Q)f(t), \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad \omega'(0) = \omega_1, \quad \dots, \quad \omega^{(n-1)}(0) = \omega_{n-1}, \quad (4.1.8)$$

где

$$S_0 = (A^1)^{-1}B_0^1, \quad S_1 = (A^1)^{-1}B_1^1, \quad \dots, \quad S_{n-1} = (A^1)^{-1}B_{n-1}^1,$$

$$u_0 = Pv_0, \quad u_1 = Pv_1, \quad \dots, \quad u_{n-1} = Pv_{n-1},$$

$$H_0 = (B_0^0)^{-1}A^0, \quad H_1 = (B_0^0)^{-1}B_1^0, \quad \dots, \quad H_{n-1} = (B_0^0)^{-1}B_{n-1}^0$$

$$\omega_0 = (\mathbb{I} - P)v_0, \quad \omega_1 = (\mathbb{I} - P)v_1, \quad \dots, \quad \omega_{n-1} = (\mathbb{I} - P)v_{n-1}, \quad t \in [0, T].$$

Обратную задачу (4.1.4)–(4.1.6) назовем регулярной, а задачу (4.1.7), (4.1.8) – сингулярной.

Перепишем задачу (4.1.4)–(4.1.6) в обозначениях [89]. Пусть  $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$ , операторы  $S_0, S_1, \dots, S_{n-1} \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X})$ ,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , функции  $h : [0, T] \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$ , оператор-функция  $\Phi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})$ . Следовательно,

$$u^{(n)}(t) = S_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + S_1u'(t) + S_0u(t) + \Phi(t)q(t) + h(t), \quad (4.1.9)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}, \quad (4.1.10)$$

$$Cu(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.1.11)$$

**Теорема 4.1.1** Пусть пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен и выполнено условие (1.2.1), кроме этого,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ ,  $\Phi \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X}))$ ,  $h \in C^1([0, T]; \mathcal{X})$ ,  $\Psi \in C^{n+1}([0, T]; \mathcal{Y})$ , для любого  $t \in [0, T]$  оператор  $C\Phi(t)$  обратим  $(C\Phi)^{-1} \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}))$ . Если условие согласования  $Cu_{n-1} = \Psi^{n-1}(0)$

выполнено, тогда решение обратной задачи (4.1.9)–(4.1.11) существует и единственно для класса функций  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $u \in C^n([0, T]; \mathcal{X})$ .

*Доказательство.* Проведем редукцию задачи (4.1.9)–(4.1.11) к задаче для уравнения первого порядка при  $t \in [0, T]$

$$z'(t) = Az(t) + Q(t)q(t) + H(t), \quad (4.1.12)$$

$$z(0) = z_0, \quad (4.1.13)$$

$$Bz(t) = \bar{\Psi}(t), \quad (4.1.14)$$

$$\text{где } z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \vdots \\ u^{(n-2)}(t) \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{I} \\ S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Phi(t) \end{pmatrix},$$

$$H(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}, \quad z(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u^{(n-2)}(0) \\ u^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Psi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Пусть  $R(t) = -(C\Phi(t))^{-1}$ . При этом выполняются все условия теоремы 6.2.3 [89], а функция  $q(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$q(t) = q_0(t) + R(t) \left( CS_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s)\Phi(s)q(s)ds + \right. \\ \left. + CS_1 \int_0^t V_{2,n}(t-s)\Phi(s)q(s)ds + \dots + CS_{n-1} \int_0^t V_{n,n}(t-s)\Phi(s)q(s)ds \right), \quad (4.1.15)$$

где

$$q_0(t) = -R(t) \left( \Psi^{(n)}(t) - CS_0 V_{1,1}(t)u_0 - CS_1 V_{2,1}(t)u_0 - \dots - CS_{n-1} V_{n,1}(t)u_0 - \right. \\ \left. - CS_0 V_{1,2}(t)u_1 - CS_1 V_{2,2}(t)u_1 - \dots - CS_{n-1} V_{n,2}(t)u_1 - \dots - \right. \\ \left. - CS_0 V_{1,n}(t)u_{n-1} - CS_1 V_{2,n}(t)u_{n-1} - \dots - CS_{n-1} V_{n,n}(t)u_{n-1} - \right) \quad (4.1.16)$$



$$\begin{aligned}
& -CS_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s)h(s)ds - CS_1 \int_0^t V_{2,n}(t-s)h(s)ds - \\
& \quad \dots - CS_{n-1} \int_0^t V_{n,n}(t-s)h(s)ds - Ch(t) \Big).
\end{aligned}$$

Следовательно, решение обратной задачи (4.1.12)–(4.1.14) существует и единственно для класса функций  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $z \in C^1([0, T]; \mathcal{X}^n)$ . Таким образом, получим что решение регулярной обратной задачи (4.1.9)–(4.1.11) существует и единственно, причем  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $u \in C^n([0, T]; \mathcal{X})$ .  $\square$

Для того чтобы получить решение сингулярной задачи, понадобится большая гладкость решения  $q$  регулярной задачи, чем класс  $C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ . Следующая теорема предоставляет достаточные условия существования более гладкого (при  $p \in \mathbb{N}$ ) решения  $q \in C^{p+n}([0, T], \mathcal{Y})$  регулярной задачи. Также, воспользуемся леммой 2.1.1.

**Теорема 4.1.2** Пусть пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен и выполнено условие (1.2.1),  $p \in \mathbb{N}_0$ , кроме того,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ ,  $\Phi \in C^{p+n}([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X}))$ ,  $h \in C^{p+n}([0, T]; \mathcal{X})$ ,  $\Psi \in C^{p+2n}([0, T]; \mathcal{Y})$ , для любого  $t \in [0, T]$  оператор  $C\Phi(t)$  обратим, причем  $(C\Phi)^{-1} \in C^{p+n}([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}))$  и выполняется условие согласования  $Cu_{n-1} = \Psi^{(n-1)}(0)$  при некотором  $u_{n-1} \in \mathcal{U}^1$ . Тогда решение обратной задачи (4.1.9)–(4.1.11) существует и единственно, причем  $q \in C^{p+n}([0, T]; \mathcal{Y})$ .

*Доказательство.* Запишем пропагаторы однородного уравнения (4.1.9), записанные в матричном виде, определяя разрешающую группу однородного уравнения (4.1.12)

$$V(t) = \begin{pmatrix} V_{1,1}(t) & V_{1,2}(t) & \dots & V_{1,n-1}(t) & V_{1,n}(t) \\ V_{2,1}(t) & V_{2,2}(t) & \dots & V_{2,n-1}(t) & V_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_{n-1,1}(t) & V_{n-1,2}(t) & \dots & V_{n-1,n-1}(t) & V_{n-1,n}(t) \\ V_{n,1}(t) & V_{n,2}(t) & \dots & V_{n,n-1}(t) & V_{n,n}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^A(\vec{B}) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mu^{n-1}A - \mu^{n-2}B_{n-1} - \dots - B_1 & \mu^{n-2}A - \mu^{n-3}B_{n-1} - \dots - B_2 & \dots \\ B_0 & \mu^{n-1}A - \mu^{n-2}B_{n-1} - \dots - \mu B_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \mu^{n-3}B_0 & \mu^{n-3}B_1 + \mu^{n-4}B_0 & \dots \\ \mu^{n-2}B_0 & \mu^{n-2}B_1 + \mu^{n-3}B_0 & \dots \\ \dots & \mu A - B_{n-1} & \mathbb{I} \\ \dots & \mu^2 A - \mu B_{n-1} & \mu \mathbb{I} \\ \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mu^{n-1}A - \mu^{n-2}B_{n-1} & \mu^{n-2}\mathbb{I} \\ \dots & \mu^{n-2}B_{n-2} + \mu^{n-3}B_{n-3} + \dots + B_0 & \mu^{n-1}\mathbb{I} \end{pmatrix} e^{\mu t} d\mu,$$

где  $R_\mu^A(\vec{B}) = (\mu^n A - \mu^{n-1}B_{n-1} - \dots - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ ,  $\mathbb{I}$  – единичный оператор. Ранее при доказательстве теоремы 4.1.1 было установлено, что функция  $q(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению (4.1.15). Возьмем натуральное число  $l \leq p + n$ . Предположим, что  $q \in C^l([0, T]; \mathcal{Y})$  получим, в силу леммы 2.1.1, равенство

$$\begin{aligned} q^{(l)}(t) &= q_0^{(l)}(t) + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m-1)}(t) (\Phi q)^{(m)}(0) + \\ &+ \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) C S_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) q^{(l-k-m)}(s) ds + \\ &\quad \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) C S_1 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{2,n}^{(l-k-m-1)}(t) (\Phi q)^{(m)}(0) + \\ &+ \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) C S_1 \int_0^t V_{2,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) q^{(l-k-m)}(s) ds + \dots + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) C S_{n-1} \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{n,n}^{(l-k-m-1)}(t) (\Phi q)^{(m)}(0) + \\ &+ \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) C S_{n-1} \int_0^t V_{n,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) q^{(l-k-m)}(s) ds, \end{aligned}$$

где  $C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}$ ,  $C_l^{k,m} = \frac{l!}{k!m!(l-k-m)!}$  и

$$\begin{aligned}
q_0^{(l)}(t) = & - \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) \left( \Psi^{(l-k+n)}(t) - \right. \\
& - CS_0 V_{1,1}^{(l-k)}(t) u_0 - CS_1 V_{2,1}^{(l-k)}(t) u_0 - \dots - CS_{n-1} V_{n,1}^{(l-k)}(t) u_0 - \\
& - CS_0 V_{1,2}^{(l-k)}(t) u_1 - CS_1 V_{2,2}^{(l-k)}(t) u_1 - \dots - CS_{n-1} V_{n,2}^{(l-k)}(t) u_1 - \dots - \\
& - CS_0 V_{1,n}^{(l-k)}(t) u_{n-1} - CS_1 V_{2,n}^{(l-k)}(t) u_{n-1} - \dots - CS_{n-1} V_{n,n}^{(l-k)}(t) u_{n-1} - \\
& - CS_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s) h^{(l-k)}(s) ds - CS_1 \int_0^t V_{2,n}(t-s) h^{(l-k)}(s) ds - \dots - \\
& \left. - CS_{n-1} \int_0^t V_{n,n}(t-s) h^{(l-k)}(s) ds - Ch^{(l-k)}(t) \right) + \\
& + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m-1)}(t) h^{(m)}(0) + \\
& + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS_1 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{2,n}^{(l-k-m-1)}(t) h^{(m)}(0) + \dots + \\
& + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS_{n-1} \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{n,n}^{(l-k-m-1)}(t) h^{(m)}(0)
\end{aligned}$$

существуют из условий данной теоремы при  $l = 0, 1, \dots, p+n$ .

Покажем, что  $q \in C^{p+n}([0, T], \mathcal{Y})$ , для этого обозначим  $r_0 = q_0(0)$ , а при  $l = 1, 2, \dots, p+n$  последовательно определим следующие величины

$$\begin{aligned}
r_l = & q_0^{(l)}(0) + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(0) CS_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m-1)}(0) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \\
& + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(0) CS_1 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{2,n}^{(l-k-m-1)}(0) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \dots + \\
& + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(0) CS_{n-1} \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{n,n}^{(l-k-m-1)}(0) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_0(t) &= q_0(t) + R(t) \left( CS_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s)\Phi(s)\tilde{q}_0(s)ds + \right. \\
&+ CS_1 \int_0^t V_{2,n}(t-s)\Phi(s)\tilde{q}_0(s)ds + \dots + CS_{n-1} \int_0^t V_{n,n}(t-s)\Phi(s)\tilde{q}_0(s)ds \left. \right), \\
\tilde{q}_l(t) &= q_0^{(l)}(t) + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \\
&+ \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS_1 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{2,n}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \dots + \\
&+ \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS_{n-1} \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{n,n}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \\
&+ \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s)\Phi^{(m)}(s)\tilde{q}_{l-k-m}(s)ds + \\
&+ \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS_1 \int_0^t V_{2,n}(t-s)\Phi^{(m)}(s)\tilde{q}_{l-k-m}(s)ds + \dots + \\
&+ \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) CS_{n-1} \int_0^t V_{n,n}(t-s)\Phi^{(m)}(s)\tilde{q}_{l-k-m}(s)ds, \quad l = 1, 2, \dots, p+n.
\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

Систему (4.1.17) редуцируем к уравнению Вольтерра второго рода

$$g(t) = g_0(t) + \int_0^t K(t,s)g(s)ds$$

на пространстве  $(C([0, T]; \mathcal{Y}))^{p+n+1}$  с матричной оператор-функцией  $K(t, s)$ , заданной на треугольнике  $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq t\}$ . В силу непрерывности всех данных системы (4.1.17) она имеет единственное решение

$$(\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{p+n}) \in (C([0, T]; \mathcal{Y}))^{p+n+1}.$$

Это решение будет являться пределом последовательности приближений

$$\tilde{q}_{0,i}(t) = q_0(t) + R(t) \left( CS_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s)\Phi(s)\tilde{q}_{0,i-1}(s)ds + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +CS_1 \int_0^t V_{2,n}(t-s)\Phi(s)\tilde{q}_{0,i-1}(s)ds + \dots + CS_{n-1} \int_0^t V_{n,n}(t-s)\Phi(s)\tilde{q}_{0,i-1}(s)ds \Big), \\
\tilde{q}_{l,i}(t) &= q_0^{(l)}(t) + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t)CS_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0)r_{m-j} + \\
& + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t)CS_1 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{2,n}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0)r_{m-j} + \dots + \\
& + \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t)CS_{n-1} \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{n,n}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0)r_{m-j} + \quad (4.1.18) \\
& + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t)CS_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s)\Phi^{(m)}(s)\tilde{q}_{l-k-m,i-1}(s)ds + \\
& + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t)CS_1 \int_0^t V_{2,n}(t-s)\Phi^{(m)}(s)\tilde{q}_{l-k-m,i-1}(s)ds + \dots + \\
& + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t)CS_{n-1} \int_0^t V_{n,n}(t-s)\Phi^{(m)}(s)\tilde{q}_{l-k-m,i-1}(s)ds, \\
& \quad l = 1, 2, \dots, p+n; \quad i \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

которые при  $i \rightarrow \infty$  на отрезке  $[0, T]$  сходятся равномерно к функциям  $\tilde{q}_l$ ,  $l = 0, 1, \dots, p+n$ . Зададим начальное приближение  $\tilde{q}_{l,0} \equiv 0$ ;  $l = 0, 1, \dots, p+n$ , тогда  $\tilde{q}_{l+1,0} = \tilde{q}'_{l,0}$ ;  $l = 0, 1, \dots, p+n-1$ . Кроме этого, из (4.1.18) следует, что

$$\tilde{q}_{l,i}(0) = r_l; \quad l = 0, 1, \dots, p+n; \quad i \in \mathbb{N}. \quad (4.1.19)$$

Сделаем предположение, что при всех  $\tau = 1, 2, \dots, i$  верны равенства

$$\tilde{q}_{l+1,\tau}(t) = \tilde{q}'_{l,\tau}(t); \quad l = 0, 1, \dots, p+n-1.$$

Тогда с помощью леммы 2.1.1 и равенств (4.1.18), получим

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t)CS_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s)\Phi^{(m)}(s)\tilde{q}_{l-k-m,i}(s)ds \right) = \\
& = \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k+1)}(t)CS_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s)\Phi^{(m)}(s)\tilde{q}_{l-k-m,i}(s)ds +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) C S_0 V_{1,n}(t) \Phi^{(m)}(0) \tilde{q}_{l-k-m,i}(0) + \\
& + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) C S_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m+1)}(s) \tilde{q}_{l-k-m,i}(s) ds + \\
& + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) C S_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds = \quad (4.1.20) \\
& = \sum_{k=1}^{l+1} \sum_{m=0}^{l-k+1} C_l^{k-1,m} R^{(k)}(t) C S_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds + \\
& \quad + \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) C S_0 V_{1,n}(t) \sum_{m=0}^{l-k} C_{l-k}^m \Phi^{(m)}(0) r_{l-k-m} + \\
& \quad + \sum_{k=0}^l \sum_{m=1}^{l-k+1} C_l^{k,m-1} R^{(k)}(t) C S_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds + \\
& \quad + \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) C S_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds.
\end{aligned}$$

Обозначим

$$a_{k,m} = R^{(k)}(t) C S_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds, \quad l = 2, 3, \dots, p+n.$$

Следовательно, учитывая равенства

$$C_l^k + C_l^{k-1} = C_{l+1}^k, \quad C_l^{k,m} + C_l^{k-1,m} + C_l^{k,m-1} = C_{l+1}^{k,m}$$

получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} a_{k,m} + \sum_{k=1}^{l+1} \sum_{m=0}^{l-k+1} C_l^{k-1,m} a_{k,m} + \sum_{k=0}^l \sum_{m=1}^{l-k+1} C_l^{k,m-1} a_{k,m} = \\
& = \left( \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^{l-k} C_l^{k,m} a_{k,m} + \sum_{k=1}^l C_l^{k,0} a_{k,0} + \sum_{m=0}^l C_l^{0,m} a_{0,m} \right) + \\
& + \left( \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^{l-k} C_l^{k-1,m} a_{k,m} + \sum_{k=1}^l C_l^{k-1,0} a_{k,0} + \sum_{k=1}^l C_l^{k-1,l-k+1} a_{k,l-k+1} + C_l^{l,0} a_{l+1,0} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^{l-k} C_l^{k,m-1} a_{k,m} + \sum_{m=1}^{l+1} C_l^{0,m-1} a_{0,m} + \sum_{k=1}^l C_l^{k,l-k} a_{k,l-k+1} \right) = \quad (4.1.21) \\
& = \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^{l-k} C_{l+1}^{k,m} a_{k,m} + \sum_{k=1}^l C_{l+1}^{k,0} a_{k,0} + \sum_{m=1}^l C_{l+1}^{0,m} a_{0,m} + \sum_{k=1}^l C_{l+1}^{k,0} a_{k,l-k+1} + \\
& \quad + C_l^{0,0} a_{0,0} + C_l^{0,l} a_{0,l+1} + C_l^{l,0} a_{l+1,0} = \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{m=0}^{l-k+1} C_{l+1}^{k,m} a_{k,m}.
\end{aligned}$$

Для  $l = 0, 1$  выполнение равенства (4.1.21) можно проверить непосредственно.

Из (4.1.20) и (4.1.21) следует, что

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) C S_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m,i}(s) ds \right) = \\
& = \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{m=0}^{l-k+1} C_{l+1}^{k,m} R^{(k)}(t) C S_0 \int_0^t V_{1,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds + \quad (4.1.22) \\
& \quad + \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) C S_0 V_{1,n}(t) \sum_{m=0}^{l-k} C_{l-k}^m \Phi^{(m)}(0) r_{l-k-m}.
\end{aligned}$$

Аналогично, получим результат для последующего интегрального элемента из (4.1.18)

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) C S_1 \int_0^t V_{2,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m,i}(s) ds \right) = \\
& = \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{m=0}^{l-k+1} C_{l+1}^{k,m} R^{(k)}(t) C S_1 \int_0^t V_{2,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds + \quad (4.1.23) \\
& \quad + \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) C S_1 V_{2,n}(t) \sum_{m=0}^{l-k} C_{l-k}^m \Phi^{(m)}(0) r_{l-k-m}.
\end{aligned}$$

Продолжая процедуру для всех последующих интегральных элементов (4.1.18), приведем результат для последнего

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{l-k} C_l^{k,m} R^{(k)}(t) C S_{n-1} \int_0^t V_{n,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m,i}(s) ds \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{m=0}^{l-k+1} C_{l+1}^{k,m} R^{(k)}(t) C S_{n-1} \int_0^t V_{n,n}(t-s) \Phi^{(m)}(s) \tilde{q}_{l-k-m+1,i}(s) ds + \quad (4.1.24) \\
&\quad + \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) C S_{n-1} V_{n,n}(t) \sum_{m=0}^{l-k} C_{l-k}^m \Phi^{(m)}(0) r_{l-k-m}.
\end{aligned}$$

Меняя индексы суммирования и перегруппировывая слагаемые, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \\
&+ \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k+1)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} = \\
&= \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \\
&+ \sum_{k=1}^l C_l^{k-1} R^{(k)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k} V_{1,n}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} = \\
&= \left( \sum_{k=1}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \right. \\
&\quad \left. + C_l^0 R(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-1} V_{1,n}^{(l-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} \right) + \quad (4.1.25) \\
&+ \left( \sum_{k=1}^{l-1} C_l^{k-1} R^{(k)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{1,n}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} + \right. \\
&\quad + \sum_{k=1}^{l-1} C_l^{k-1} R^{(k)}(t) C S_0 V_{1,n}(t) \sum_{j=0}^{l-k} C_{l-k}^j \Phi^{(j)}(0) r_{l-k-j} + \\
&\quad \left. + C_l^{l-1} R^{(l)}(t) C S_0 V_{1,n}(t) C_0^0 \Phi(0) r_0 \right) = \\
&= \sum_{k=0}^l C_{l+1}^k R^{(k)}(t) C S_0 \sum_{m=0}^{l-k} V_{1,n}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} -
\end{aligned}$$



$$- \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) CS_0 V_{1,n}(t) \sum_{m=0}^{l-k} C_{l-k}^m \Phi^{(m)}(0) r_{l-k-m}.$$

Аналогично, получим результат для последующего неинтегрального элемента из (4.1.18)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS_1 \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{2,n}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} \right) = \\ & = \sum_{k=0}^l C_{l+1}^k R^{(k)}(t) CS_1 \sum_{m=0}^{l-k} V_{2,n}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} - \\ & \quad - \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) CS_1 V_{2,n}(t) \sum_{m=0}^{l-k} C_{l-k}^m \Phi^{(m)}(0) r_{l-k-m}. \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

Продолжая процедуру для всех последующих неинтегральных элементов (4.1.18), приведем результат для последнего

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k R^{(k)}(t) CS_{n-1} \sum_{m=0}^{l-k-1} V_{n,n}^{(l-k-m-1)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} \right) = \\ & = \sum_{k=0}^l C_{l+1}^k R^{(k)}(t) CS_{n-1} \sum_{m=0}^{l-k} V_{n,n}^{(l-k-m)}(t) \sum_{j=0}^m C_m^j \Phi^{(j)}(0) r_{m-j} - \\ & \quad - \sum_{k=0}^l C_l^k R^{(k)}(t) CS_{n-1} V_{n,n}(t) \sum_{m=0}^{l-k} C_{l-k}^m \Phi^{(m)}(0) r_{l-k-m}. \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

Продифференцировав (4.1.18), а также используя (4.1.22)–(4.1.27), получим

$$\tilde{q}'_{l,i+1} = \tilde{q}_{l+1,i+1}; \quad l = 0, 1, \dots, p+n-1.$$

Таким образом, последовательность  $\tilde{q}_{0,i}$  сходится при  $i \rightarrow \infty$  к функции  $\tilde{q}_0$  равномерно на отрезке  $[0, T]$ , а последовательность  $\tilde{q}'_{0,i} = \tilde{q}_{1,i}$  сходится при  $i \rightarrow \infty$  к функции  $\tilde{q}_1$  равномерно на отрезке  $[0, T]$ . Поэтому функция  $\tilde{q}_0$  непрерывно дифференцируема и  $\tilde{q}'_0 = \tilde{q}_1$ . Аналогично доказываются равенства

$$\tilde{q}'_l = \tilde{q}_{l+1}; \quad l = 1, 2, \dots, p+n-1$$

из которых следует, что  $\tilde{q}_0 \equiv q \in C^{p+n}([0, T]; \mathcal{Y})$  и, следовательно,

$$q^{(l)} = \tilde{q}_l; \quad l = 1, 2, \dots, p+n. \quad \square$$

**Теорема 4.1.3** Пусть пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен и выполнено условие (1.2.1), кроме того,  $\infty$  – полюс порядка  $p \in \mathbb{N}_0$   $A$ -резольвенты пучка  $\vec{B}$ , оператор  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ ,  $\mathcal{U}^0 \subset \ker C$ ,  $\chi \in C^{p+n}([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{F}))$ ,  $f \in C^{p+n}([0, T]; \mathcal{F})$ ,  $\Psi \in C^{p+2n}([0, T]; \mathcal{Y})$ , для любого  $t \in [0, T]$  оператор  $C(A^1)^{-1}Q\chi$  обратим, причем  $(C(A^1)^{-1}Q\chi)^{-1} \in C^{p+n}([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}))$ , и выполняется условие согласования  $Cu_{n-1} = \Psi^{(n-1)}(0)$  при некотором начальном значении  $u_{n-1} \in \mathcal{U}^1$ , а начальные значения  $w_k = (\mathbb{I} - P)v_k \in \mathcal{U}^0$  удовлетворяют

$$w_k = - \sum_{j=0}^p K_j^n(B_0^0)^{-1} \frac{d^{j+k}}{dt^{j+k}} \left[ (\mathbb{I} - Q)(\chi(0)q(0) + f(0)) \right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Тогда существует единственное решение  $(v, q)$  обратной задачи (4.1.1)–(4.1.3), причем  $q \in C^{p+n}([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $v = u + w$ , где  $u \in C^n([0, T]; \mathcal{U}^1)$  – решение задачи (4.1.4)–(4.1.6), а функция  $w \in C^n([0, T]; \mathcal{U}^0)$  является решением задачи (4.1.7), (4.1.8), которое можно представить в виде

$$w(t) = - \sum_{j=0}^p K_j^n(B_0^0)^{-1} \frac{d^j}{dt^j} \left[ (\mathbb{I} - Q)(\chi(t)q(t) + f(t)) \right]. \quad (4.1.28)$$

*Доказательство.* Условия теорем 4.1.1 и 4.1.2 выполнены, а следовательно существует единственное решение  $(q, u)$  задачи (4.1.4)–(4.1.6), где  $u \in C^n([0, T]; \mathcal{U}^1)$ ,  $q \in C^{p+n}([0, T]; \mathcal{Y})$ .

Воспользовавшись результатом работы [26] (аналогичен теореме 2.1.3) и необходимой гладкостью функции  $q$ , получим что существует единственное решение задачи (4.1.7), (4.1.8)  $w \in C^n([0, T]; \mathcal{U}^0)$ , представимое в виде (4.1.28).  $\square$

## 4.2 Аналитическое исследование восстановления параметра внешнего воздействия магнитного поля на математическую модель ионно-звуковых волн в плазме

В данном параграфе приведена редукция исследуемой обратной задачи для математической модели ионно-звуковых волн в плазме к полному уравнению соболевского типа высокого порядка, теорема о разрешимости которого была получена в предыдущем параграфе. Таким образом, получим достаточные условия для восстановления параметра внешней нагрузки. Для этого, сначала, зададим  $\Omega = (0, a) \times (0, b) \times (0, c) \subset \mathbb{R}^3$ , а в цилиндре  $\Omega \times (0; T)$  рассмотрим

уравнение

$$(\Delta - \alpha)v_{tttt} + \beta(\Delta - \gamma)v_{tt} + \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + qf = 0 \quad (4.2.1)$$

с условиями Коши – Дирихле

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (4.2.2)$$

$$v_{tt}(x, 0) = v_2(x), \quad v_{ttt}(x, 0) = v_3(x), \quad x \in \Omega$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0; T]. \quad (4.2.3)$$

Зададим условие переопределения

$$\int_{\Omega} v(x, t)K(x)dx = \Phi(t). \quad (4.2.4)$$

Здесь заданы функции  $f(x, t)$ ,  $K(x)$ ,  $v_0(x)$ ,  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ ,  $v_3(x)$ ,  $\Phi(t)$ , причем

$$\int_{\Omega} v(x, t)K(x)dx = \langle v(x, t)K(x) \rangle$$

скалярное произведение  $L_2(\Omega)$ . Функция  $v(x, t)$  описывает ионно-звуковые волны в плазме во внешнем магнитном поле. Обратной задачей для ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле будем называть задачу отыскания из соотношений (4.2.1)–(4.2.4) пары функций  $v(x, t)$  и  $q(t)$ , где  $q(t)$  – параметр внешнего воздействия магнитного поля. Условие (4.2.4) появилось из-за необходимости восстановления параметра  $q(t)$  уравнения (3.2.1) и оно усредняет значение искомой функции  $v(x, t)$  к функции  $\Phi(t)$ .

Задачу (4.2.1)–(4.2.4) редуцируем к рассмотренной в предыдущем параграфе обратной задаче (4.1.1)–(4.1.3) для полного уравнения соболевского типа высокого порядка при  $t \in [0, T]$

$$Av^{(n)}(t) = B_{n-1}v^{(n-1)}(t) + \dots + B_1v'(t) + B_0v(t) + \chi(t)q(t), \quad (4.2.5)$$

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1, \quad \dots, \quad v^{(n-1)}(0) = v_{n-1}, \quad (4.2.6)$$

$$Cv(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.2.7)$$

Здесь  $\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{Y}$  – банаховы пространства, операторы  $A, B_0, B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ ,  $\ker A \neq \{0\}$ ,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ ,  $\chi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{F})$ , а функции  $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$ .

Для редукции положим пространства

$$\mathcal{U} = \{v \in W_2^{l+2}(\Omega) : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad \mathcal{F} = W_2^l(\Omega), \quad \mathcal{Y} = \mathcal{F},$$

где  $W_2^l(\Omega)$  – пространства Соболева  $l = 0, 1, \dots$ . Зададим операторы

$$A = \Delta - \alpha, \quad B_2 = \beta(\Delta - \gamma), \quad B_0 = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad B_3 = B_1 = \mathbb{O}, \quad Cv = \int_{\Omega} v(x, t) K(x),$$

оператор умножения на функцию  $\chi(t) = f(x, t)$  и функция  $\Psi(t) = \Phi(t)$ . Следовательно,  $A, B_0, B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ , а  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ .

Воспользуемся результатами главы 1 и параграфа 4.1. Аналогично параграфу 2.2 задачу (4.2.5)–(4.2.7) можно редуцировать к задаче нахождения функций  $u \in C^4([0, T]; \mathcal{U}^1)$ ,  $w \in C^4([0, T]; \mathcal{U}^0)$ ,  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$  из соотношений

$$u''''(t) = S_2 u''(t) + S_0 u(t) + (A^1)^{-1} Q q(t) f(t), \quad (4.2.8)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u''(0) = u_2, \quad u'''(0) = u_3, \quad (4.2.9)$$

$$Cu(t) = \Psi(t) \equiv Cv(t), \quad (4.2.10)$$

$$H_0 w''''(t) = H_2 w''(t) + w(t) + (B_0^0)^{-1} P q(t) f(t), \quad (4.2.11)$$

$$w(0) = w_0, \quad w'(0) = w_1, \quad w''(0) = w_2, \quad w'''(0) = w_3, \quad (4.2.12)$$

где  $\mathcal{U}^0 = \ker P$ ,  $\mathcal{U}^1 = \text{im } P$ ,

$$S_0 = - \sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \frac{\kappa \pi^2 n^2}{(\lambda_{kmn} - \alpha) c^2} \langle \cdot, \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn},$$

$$S_2 = \sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \frac{\beta(\lambda_{kmn} - \gamma)}{\lambda_{kmn} - \alpha} \langle \cdot, \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn},$$

$$(A^1)^{-1} = \sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \frac{\langle \cdot, \mathbb{X}_{kmn} \rangle}{\lambda_{kmn} - \alpha} \mathbb{X}_{kmn}, \quad (B_0^0)^{-1} = - \sum_{\lambda_{kmn} = \alpha} \frac{c^2}{\kappa \pi^2 n^2} \langle \cdot, \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn},$$

$$Q = \sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \langle \cdot, \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn}, \quad P = \mathbb{I} - Q = \sum_{\lambda_{kmn} = \alpha} \langle \cdot, \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn},$$

$$u_j = \sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \langle v_j, \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn}, \quad w_j = \sum_{\lambda_{kmn} = \alpha} \langle v_j, \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn}, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

$$H_0 = - \sum_{\lambda_{kmn} = \alpha} \frac{(\lambda_{kmn} - \alpha) c^2}{\kappa \pi^2 n^2} \langle \cdot, \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn},$$

$$H_2 = - \sum_{\lambda_{kmn}=\alpha} \frac{\beta(\lambda_{kmn} - \gamma)c^2}{\kappa\pi^2 n^2} \langle \cdot, \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn}, \quad C = \sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \langle \cdot, K(x) \rangle.$$

Здесь  $\lambda_{kmn} = -\pi^2 \left( \left(\frac{k}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2 \right)$  – собственные значения оператора Лапласа, а  $\mathbb{X}_{kmn} = \left\{ \sin\left(\frac{\pi k x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m x_2}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi n x_3}{c}\right) \right\}$  – семейство соответствующих собственных функций, при  $k, m, n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 4.2.1** Пусть  $\Phi \in C^6([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $f \in C^4([0, T]; \mathcal{F})$ ,  $K, u_0, u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{U}^1$ , выполнено одно из условий  $\alpha \notin \sigma(\Delta)$  или  $(\alpha \in \sigma(\Delta)) \wedge (\alpha = \gamma)$ . Также выполняются условия

$$\sum_{\alpha=\lambda_{kmn}} \langle v_j, \mathbb{X}_{kmn} \rangle = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

$$\sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \frac{\langle f(\cdot, t), K(x) \rangle}{\lambda_{kmn} - \alpha} \neq 0, \quad \langle v_3, K(x) \rangle = \Phi'''(0)$$

при некотором начальном значении  $v_3 \in \mathcal{U}^1$ , а начальные значения  $w_j = (\mathbb{I} - P)v_j \in \mathcal{U}^0$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$  удовлетворяют

$$\langle v_j - \left(\frac{c^2}{\kappa\pi^2 n^2}\right) \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left( q(t) f(\cdot, t) \right) \Big|_{t=0}, \mathbb{X}_{kmn} \rangle = 0 \text{ для } k : \lambda_{kmn} = \alpha, \quad (4.2.13)$$

Тогда существует единственное решение  $(v, q)$  обратной задачи (4.2.1)–(4.2.4), причем  $q \in C^2([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $v = u + w$ , где  $u \in C^4([0, T]; \mathcal{U}^1)$  – решение задачи (4.2.8)–(4.2.10), а функция  $w \in C^4([0, T]; \mathcal{U}^0)$  является решением задачи (4.2.11), (4.2.12) которое можно представить в виде

$$w(t) = \sum_{\lambda_{kmn}=\alpha} \left(\frac{c^2}{\kappa\pi^2 n^2}\right) \langle q(t) f(\cdot, t), \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn}. \quad (4.2.14)$$

*Доказательство.* Условия леммы 1.3.1 выполнены. Так как  $K \in \mathcal{U}^1$ , тогда  $\mathcal{U}^0 \subset \ker C$ . Для  $y \in \mathcal{Y}$  в силу ортонормированности системы собственных функций в  $L_2(\Omega)$  имеем

$$\begin{aligned} C(A^1)^{-1} Qy &= \left( \sum_{\lambda \neq \lambda_{kmn}} \frac{\langle f(\cdot, t), \mathbb{X}_{kmn} \rangle \langle \mathbb{X}_{kmn}, K \rangle}{\lambda_{kmn} - \alpha} \right) y = \\ &= \left( \sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \frac{\langle f(\cdot, t), K(x) \rangle}{\lambda_{kmn} - \alpha} \right) y. \end{aligned}$$

Этот оператор обратим в  $\mathcal{Y}$  тогда, когда

$$\sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \frac{\langle f(\cdot, t), K(x) \rangle}{\lambda_{kmn} - \alpha} \neq 0,$$

а обратный оператор непрерывно дифференцируем по  $t$  в силу условий на функцию  $f(\cdot, t)$ . Условия (3.2.14), (3.2.15) и формулу (3.2.16) можно получить аналогичным образом, как было представлено при доказательстве теоремы 2.2.1.

Таким образом, все условия теорем 1.5.1 и 4.1.3 выполнены, тогда существует единственное решение  $(v, q)$  обратной задачи (4.2.1)–(4.2.4), причем  $q \in C^2([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $v = u + w$ , где  $u \in C^4([0, T]; \mathcal{U}^1)$  – решение задачи (4.2.8)–(4.2.10), а функция  $w \in C^4([0, T]; \mathcal{U}^0)$  является решением задачи (4.2.11), (4.2.9) которое можно представить в виде (4.2.14).  $\square$

### 4.3 Алгоритм численного исследования математической модели ионно-звуковых волн в плазме с восстановлением параметра внешнего воздействия магнитного поля

Используя все полученные выше результаты был разработан алгоритм численного метода для нахождения решения обратной задачи для математической модели ионно-звуковых волн (3.2.1)–(3.2.5) в плазме во внешнем магнитном поле. Рассмотрим ранее представленную математическую модель ионно-звуковых волн в  $\Omega \times (0; T)$  при  $\Omega = (0, a) \times (0, b) \times (0, c) \subset \mathbb{R}^3$

$$(\Delta - \alpha)v_{tttt} + \beta(\Delta - \gamma)v_{tt} + \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + qf = 0, \quad (4.3.1)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (4.3.2)$$

$$v_{tt}(x, 0) = v_2(x), \quad v_{ttt}(x, 0) = v_3(x), \quad x \in \Omega,$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0; T], \quad (4.3.3)$$

$$\int_{\Omega} v(x, t)K(x)dx = \Phi(t), \quad (4.3.4)$$

где заданы функции  $f(x, t)$ ,  $v_0(x)$ ,  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ ,  $v_3(x)$ ,  $K(x)$ ,  $\Phi(t)$ , а

$$\int_{\Omega} v(x, t)K(x)dx = \langle v(x, t), K(x) \rangle$$

это скалярное произведение в пространстве  $L_2(\Omega)$ . Для нахождения приближенного решения математической модели (4.3.1)–(4.3.4) требуется найти приближенное значение функций  $q(t)$  и  $v(x, t)$ .

**Этап 1.** Нахождение решения вспомогательной задачи Штурма – Ливилля

$$\mathbb{X}_{kmn}''(x) - \lambda_{kmn}\mathbb{X}_{kmn}(x) = 0,$$

и условия (4.3.3), получив собственные функции  $\mathbb{X}_{kmn}(x)$  и собственные значения  $\lambda_{kmn}$ .

**Этап 2.** Нахождение выражения для функции  $q[i+1](t)$ , для проведения последовательных приближений. Используем формулу (4.1.15), при учете, что  $\mu_{kmn}^{1,2,3,4}$  (точки относительного спектра) – корни уравнения

$$(\lambda_{kmn} - \alpha)\mu^4 - \beta(\lambda_{kmn} - \gamma)\mu^2 + \kappa\left(\frac{\pi n}{c}\right)^2 = 0.$$

получим

$$\begin{aligned} q[i+1](t) = & q_0(t) + \frac{1}{\sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \frac{\langle f(x,t), K(x) \rangle}{\lambda_{kmn} - \alpha}} \times \\ & \times \left( \sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \frac{\kappa\pi^2 n^2}{c^2(\lambda_{kmn} - \alpha)^2} \int_0^t \left( \sum_{j=1}^4 \frac{e^{\mu_{kmn}^j(t-s)}}{M_j} \right) \langle f(x, s)q[i](s), K(x) \rangle ds - \right. \\ & \left. - \sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \frac{\beta(\lambda_{kmn} - \gamma)}{(\lambda_{kmn} - \alpha)^2} \int_0^t \left( \sum_{j=1}^4 \frac{(\mu_{kmn}^j)^2 e^{\mu_{kmn}^j(t-s)}}{M_j} \right) \langle f(x, s)q[i](s), K(x) \rangle ds \right), \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

а элемент  $q_0(t)$  получим из формулы (4.1.16)

$$\begin{aligned} q_0(t) = & \frac{1}{\sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \frac{\langle f(x,t), K(x) \rangle}{\lambda_{kmn} - \alpha}} \left[ \frac{\partial^4 F(t)}{\partial t^4} + \right. \\ & + \sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \frac{\kappa\pi^2 n^2}{c^2(\lambda_{kmn} - \alpha)^2} \left( \left[ \sum_{j=1}^4 \frac{((\mu_{kmn}^j)^3(\lambda_{kmn} - \alpha) - \mu_{kmn}^j \beta(\lambda_{kmn} - \gamma)) e^{\mu_{kmn}^j t}}{M_j} \right] + \right. \\ & \left. + \beta(\lambda_{kmn} - \gamma) \left[ \sum_{j=1}^4 \frac{\mu_{kmn}^j e^{\mu_{kmn}^j t}}{M_j} \right] \right) \langle v_0(x), K(x) \rangle + \\ & + \sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \frac{\kappa\pi^2 n^2}{c^2(\lambda_{kmn} - \alpha)^2} \left( \left[ \sum_{j=1}^4 \frac{((\mu_{kmn}^j)^2(\lambda_{kmn} - \alpha) - \beta(\lambda_{kmn} - \gamma)) e^{\mu_{kmn}^j t}}{M_j} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \beta(\lambda_{kmn} - \gamma) \left[ \sum_{j=1}^4 \frac{e^{\mu_{kmn}^j t}}{M_j} \right] \Big) \langle v_1(x), K(x) \rangle + \\
& + \sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \frac{1}{\lambda_{kmn} - \alpha} \left( \frac{\kappa \pi^2 n^2}{c^2} \left[ \sum_{j=1}^4 \frac{\mu_{kmn}^j e^{\mu_{kmn}^j t}}{M_j} \right] - \right. \\
& \left. - \beta(\lambda_{kmn} - \gamma) \left[ \sum_{j=1}^4 \frac{(\mu_{kmn}^j)^3 e^{\mu_{kmn}^j t}}{M_j} \right] \right) \langle v_2(x), K(x) \rangle + \\
& + \sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \frac{1}{(\lambda_{kmn} - \alpha)^2} \left( \frac{\kappa \pi^2 n^2}{c^2} \left[ \sum_{j=1}^4 \frac{e^{\mu_{kmn}^j t}}{M_j} \right] - \right. \\
& \left. - \beta(\lambda_{kmn} - \gamma) \left[ \sum_{j=1}^4 \frac{(\mu_{kmn}^j)^2 e^{\mu_{kmn}^j t}}{M_j} \right] \right) \langle v_3(x), K(x) \rangle \Big],
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
M_1 &= (\mu_{kmn}^1 - \mu_{kmn}^2)(\mu_{kmn}^1 - \mu_{kmn}^3)(\mu_{kmn}^1 - \mu_{kmn}^4), \\
M_2 &= (\mu_{kmn}^2 - \mu_{kmn}^1)(\mu_{kmn}^2 - \mu_{kmn}^3)(\mu_{kmn}^2 - \mu_{kmn}^4), \\
M_3 &= (\mu_{kmn}^3 - \mu_{kmn}^1)(\mu_{kmn}^3 - \mu_{kmn}^2)(\mu_{kmn}^3 - \mu_{kmn}^4), \\
M_4 &= (\mu_{kmn}^4 - \mu_{kmn}^1)(\mu_{kmn}^4 - \mu_{kmn}^2)(\mu_{kmn}^4 - \mu_{kmn}^3).
\end{aligned}$$

**Этап 3.** Проведение процедуры последовательных приближений для функции  $q(t)$ . Для этого, сначала, зададим начальное приближение  $q[0](t) = 0$ . Последующее приближение  $q[1](t)$  найдем из формулы (4.3.5), подставив предыдущее (начальное) приближение  $q[0](t)$ . Затем необходимо проверить норму разности двух полученных приближений  $\|q[1](t) - q[0](t)\|_{L_2(G)}$  и если она превышает заданное допустимое значение погрешности, то вычисляется следующее приближение  $q[2](t)$ , также, из формулы (4.3.5), с учетом полученного приближения  $q[1](t)$ . Этот процесс повторяется до тех пор, пока оценка  $\|q[i+1](t) - q[i](t)\|_{L_2(G)}$  не достигнет значения, меньшего либо равного допустимому отклонению между последовательными приближениями функции  $q(t)$ . В силу теоремы 4.2.1 искомая оценка будет достигнута за конечное число шагов. Как только она будет получена, произойдет остановка процедуры последовательных приближений, а за приближенное значение функции  $q(t)$  возьмется подсчитанное по формуле (4.3.5) на  $i$ -ом шаге приближение  $q[i+1](t)$ .



**Этап 4.** Представим решение  $u(x, t)$  регулярной задачи (4.2.8)–(4.2.10) в виде галеркинских приближений:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K T_{kmn}(t) \mathbb{X}_{kmn}(x), \quad (4.3.6)$$

где  $\mathbb{X}_{kmn}(x)$  – ортонормированные собственные функции оператора  $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , полученные на этапе 1, а  $T_{kmn}(t)$  – функции только переменной  $t$ .

Подставляя приближенное решение (4.3.6) в уравнение (4.3.1), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \mathbb{X}_{kmn}(x) \left( (\lambda_{kmn} - \alpha) T_{kmn}''''(t) + \right. \\ & \left. + \beta(\lambda_{kmn} - \gamma) T_{kmn}''(t) - \kappa \left( \frac{\pi n}{c} \right)^2 T_{kmn}(t) \right) + qf = 0. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Аппроксимируем начальные функции  $v_0(x)$ ,  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$  и  $v_3(x)$

$$u_j(x) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K v_j^{kmn} \mathbb{X}_{kmn}, \quad \text{где } v_j^{kmn} = \langle v_j, \mathbb{X}_{kmn} \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Умножим получившееся уравнение (4.3.7) на  $\mathbb{X}_{kmn}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  скалярно в  $L_2(\Omega)$ . Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & (\lambda_{kmn} - \alpha) T_{kmn}''''(t) + \beta(\lambda_{kmn} - \gamma) T_{kmn}''(t) - \kappa \left( \frac{\pi n}{c} \right)^2 T_{kmn}(t) = \\ & = - \langle qf, \mathbb{X}_{kmn}(x) \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

В зависимости от  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  уравнения могут быть алгебраическими, дифференциальными четвертого или второго порядка. Решим получившуюся систему уравнений вместе с начальными условиями, относительно  $T_{kmn}$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

**Этап 5.** Найдем решение  $w(x, t)$  сингулярной задачи (4.2.11), (4.2.12) используя формулу (4.2.14), которая принимает вид

$$w(t) = - \sum_{\lambda_{kmn}=\alpha} \left( \frac{c^2}{\kappa \pi^2 n^2} \right) \langle q(t) f(\cdot, t), \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn}.$$

**Этап 6.** Складывая полученные решения  $u(x, t)$  регулярной и  $w(x, t)$  сингулярной задач, получим приближенное решение  $v(x, t) = u(x, t) + w(x, t)$  задачи (4.3.1)–(4.3.4).

#### 4.4 Описание программы для моделирования ионно-звуковых волн в плазме с восстановлением коэффициента внешнего воздействия магнитного поля

Представленный ранее алгоритм был реализован в среде Maple в виде программы [125]. Она предназначена для специалистов в области математической физики и математического моделирования. Программа реализует алгоритм обработки информации для математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле. Решение представляет собой обобщенный потенциал электрического поля, который находится в виде галеркинских приближений, а для восстановления коэффициента воздействия внешнего магнитного поля используется метод последовательных приближений. В начале программы происходит ввод входной информации, по которой будет получено решение для данной модели, с построением графиков искомых функций.

Программа состоит из файла с командами, которые выполняются последовательно после запуска. На входе задаются начальные параметры и функции. На выходе выводятся графики и функции полученного решения. Приведем описание разработанной программы нахождения решения обратной задачи для математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле (4.3.1)–(4.3.4), соответствующим блокам, схемы представленной на рисунке 4.4.1.

Начало программы.

**Шаг 0.** Подключение вспомогательного пакета построения графиков – «with(plots)».

**Шаг 1.** Ввод параметров:  $a, b, c$  – верхние границы области;  $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$  – параметры уравнения ионно-звуковых волн (4.3.1);  $T$  – ограничение по времени;  $\varepsilon$  – допустимое отклонение между соседними последовательными приближениями функции  $q(t)$ ;  $K, M, N$  – минимальные количества слагаемых галеркинских приближений. Ввод функций:  $f(x, t)$  – известная внешняя нагрузка;  $v_0(x), v_1(x), v_2(x), v_3(x)$  – начальные значения обобщенного потенциала электрического поля;  $K(x)$  – ядро в условии переопределения;  $\Phi(t)$  – правая часть условия переопределения осуществляется с помощью оператора присваивания «...:=...».

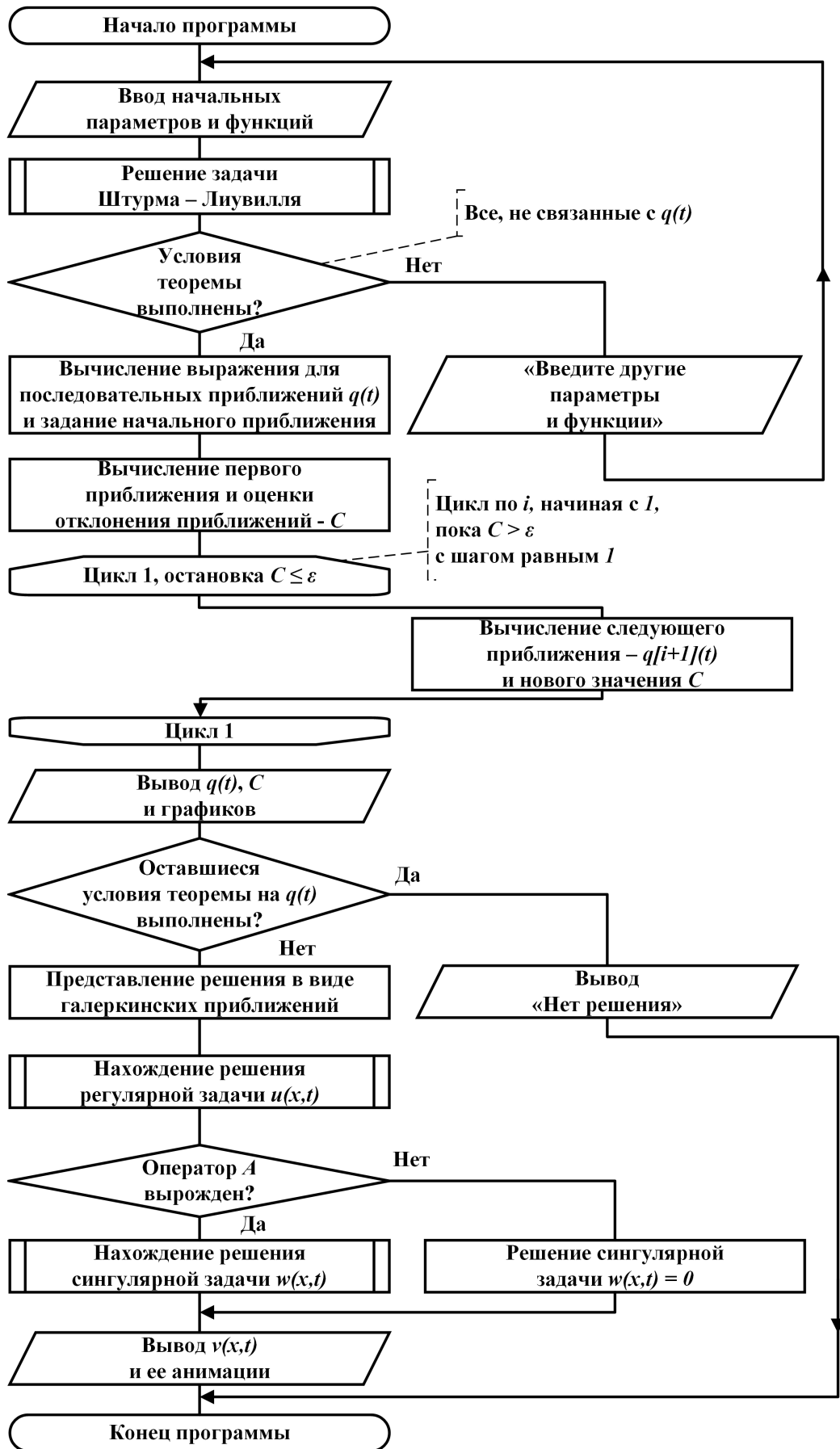


Рисунок 4.4.1 – Схема алгоритма «Обратная задача для математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле»

**Шаг 2.** Решение задачи Штурма – Лиувилля и получение значения  $k$ ,  $m$ ,  $n$  – количество слагаемых галеркинских приближений.

**Шаг 2.1.** Нахождение  $\lambda_{kmn}$  из системы уравнений. Осуществляется с помощью оператора присваивания «...:=...», функций решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) «dsolve(...)», решения уравнения «solve(...)», функциональных операторов генерации матрицы системы «linalg[genmatrix](...)» и нахождения ее определителя «linalg[det](...)».

**Шаг 2.2.** Нахождение нормированных собственных функций  $\mathbb{X}_{kmn}$ , с помощью собственных значений  $\lambda_{kmn}$ . Осуществляется с помощью функций решения ОДУ «dsolve(...)», вычисления определенного интеграла «int(...)», решения уравнения «solve(...)» и зависимости от переменных «unapply(...)».

**Шаг 2.3.** Задание числа слагаемых галеркинских приближений при учете заданных  $K$ ,  $M$ ,  $N$  и возможного совпадения  $\lambda_{kmn}$  с параметром  $\alpha$ , при некоторых  $k$ ,  $m$ ,  $n$ . Осуществляется с помощью операторов выбора «if ... then ... else ... end if» и присваивания «...:=...».

**Шаг 3.** Проверка условий теоремы 4.2.1 не содержащих функцию  $q(t)$ , на выполнение:

- i*) одного из условий:  $\alpha \notin \sigma(\Delta)$  или  $(\alpha \in \sigma(\Delta)) \wedge (\alpha = \gamma)$ ;
- ii*) условия  $\sum_{\alpha=\lambda_{kmn}} \langle v_j, \mathbb{X}_{kmn} \rangle = 0$  при  $j = 0, 1, 2, 3$ ;
- iii*) условия  $\sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \frac{\langle f(\cdot, t), K(x) \rangle}{\lambda_{kmn} - \alpha} \neq 0$ ;
- iv*) при заданном  $v_3 \in \mathcal{U}^1$ , условия  $\langle v_3, K(x) \rangle = \Phi'''(0)$ .

Если все условия выполнены, то переход к шагу 5, иначе переход к шагу 4. Осуществляется с помощью оператора выбора «if ...» и функции интегрирования «int(...)».

**Шаг 4.** Вывод: «Введите другие параметры и функции». Переход к шагу 1. Осуществляется с помощью функции печати выражения в формате строки «printf()».

**Шаг 5.** Составление выражения для проведения последовательных приближений функции  $q(t)$ , используя формулу (4.3.5). Осуществляется с помощью операторов выбора «if ...», цикла «for ... from ... to ... do ... end do» и функции интегрирования «int(...)».

**Шаг 6.** Вычисление первого приближения  $q[1](t)$  с заданным начальным приближением  $q[0](t) = 0$ , используя формулу (4.3.5). Осуществляется с помощью функции подстановки «subs(...)». Вычисление оценки отклонения –  $C$ , которая равна норме (в пространстве  $L_2(\Omega)$ ) разности 1-го приближения и начального. Осуществляется с помощью функций интегрирования «int(...)» и вычисления квадратного корня «sqrt(...)».

**Шаг 7.** Цикл по  $i$  начиная с единицы пока  $C > \varepsilon$ . Если условие цикла выполнено переход к шагу 8, иначе переход к шагу 10. Осуществляется с помощью оператора цикла «while ... do ... end do»

**Шаг 8.** Вычисление следующего приближения  $q[i + 1](t)$  с помощью предыдущего  $q[i](t)$  по формуле (4.3.5). Вычисление новой оценки отклонения –  $C$ , которая равна норме разности  $(i + 1)$ -го приближения и  $i$ -го. Осуществляется с помощью функций интегрирования «int(...)», вычисления квадратного корня «sqrt(...)» и подстановки «subs(...)».

**Шаг 9.** Индекс  $i$  увеличивается на единицу, переход к шагу 7. Осуществляется с помощью оператора присваивания «...:=...».

**Шаг 10.** Вывод полученного приближенного решения  $q(t)$ , а также получившейся оценки отклонения –  $C$  для последнего приближения. Осуществляется с помощью «printf()». Построение графиков: функции  $q(t)$  и функций всех ее последовательных приближений. Осуществляется с помощью функции построения графика «plot(...)».

**Шаг 11.** Проверка оставшихся условий теоремы 4.2.1, которые связаны с найденной функцией  $q(t)$ :

$$\langle v_j + \left( \frac{c^2}{\kappa \pi^2 n^2} \right) \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left( q(t) f(\cdot, t) \right) \Big|_{t=0}, \mathbb{X}_{kmn} \rangle = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3 \text{ для } k : \lambda_{kmn} = \alpha.$$

Если выполнены все условия, то переход к шагу 13, иначе переход к шагу 12. Осуществляется с помощью оператора выбора «if ...» и функции интегрирования «int(...)».

**Шаг 12.** Вывод: «Нет решения». Остановка программы. Осуществляется с помощью функции печати выражения в формате строки «printf()».

**Шаг 13.** Представление решения  $v(x, t)$  в виде галеркинских приближений. Осуществляется с помощью функций определенного суммирования

«sum(...)» и зависимости от переменных «unapply(...)».

**Шаг 14.** Получение приближенного решения уравнения ионно-звуковых волн (4.3.1) при вычисленной функции  $q(t)$ . Начало циклов по  $k$ ,  $m$ ,  $n$ , начиная с единицы, пока  $k \leq K$ ,  $m \leq M$ ,  $n \leq N$  с шагом равным 1, по каждой переменной. Умножение уравнения (4.3.1), а также начальных условий, скалярно на собственную функцию  $X_{kmn}$ . Решение обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с начальными условиями. Переход к следующей итерации. Итог: получение решения регулярной задачи  $u(x, t)$  из (4.2.8)–(4.2.10). Осуществляется с помощью операторов цикла «for ...», присваивания «...:=...», функций подстановки «subs(...)», интегрирования «int(...)» и решения ОДУ «dsolve(...)».

**Шаг 15.** Проверка на вырожденность. Если вырожденность не обнаружена, то переход к шагу 16, иначе переход к шагу 17. Осуществляется с помощью оператора выбора «if ...».

**Шаг 16.** Решение  $w(x, t)$  сингулярной задачи (4.2.11), (4.2.12) равно нулю. Переход к шагу 18. Осуществляется с помощью оператора присваивания «...:=...».

**Шаг 17.** Нахождение решения  $w(x, t)$  сингулярной задачи (4.2.11), (4.2.12) по формуле (4.2.14). Осуществляется с помощью функции интегрирования «int(...)» и оператора цикла «for ...».

**Шаг 18.** Вычисление искомой функции  $v(x, t)$  как суммы двух функций  $u(x, t)$  и  $w(x, t)$ . Вывод полученной функции  $v(x, t)$ . Построение анимированного, по переменной  $t$ , графика функции  $v(x, t)$ . Осуществляется с помощью функций подстановки «subs(...)», печати выражения в формате строки «printf()» и создания 3-х мерной анимации «animate(plot3d, ...)».

#### 4.5 Результаты обработки информации для моделирования ионно-звуковых волн в плазме и восстановления параметра сил внешнего воздействия магнитного поля

Приведем результаты проведения обработки информации по разработанному алгоритму, который был реализован в среде Maple в виде программы. Примеры 4.5.1 и 4.5.2 имеют отличия по входной информации, т.е. разные на-

чальные значения и начальные функции.

**Пример 4.5.1** Пусть задана следующая входная информация:

$$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -4, \kappa = -4, \varepsilon = 0.01, T = 2,$$

$$k = 2, m = 1, n = 1, a = \pi, b = \pi, c = \pi$$

$$v_0(x) = \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_3),$$

$$v_1(x) = 2 \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_3) - \sin(2x_1) \sin(2x_2) \sin(2x_3),$$

$$v_2(x) = \sin(2x_1) \sin(x_2) \sin(x_3) - \sin(x_1) \sin(2x_2) \sin(1x_3),$$

$$v_3(x) = \pi \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_3),$$

$$f(x) = \sin(x_1), \quad K(x) = \sin(\pi x_1), \quad F(t) = \frac{-4\pi}{\pi^2 - 1} \cos(t + \pi^2).$$

Следовательно, математическая модель ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле (4.3.1)–(4.3.4) примет вид

$$(\Delta - 1)v_{tttt} + 2(\Delta + 4)v_{tt} - 4\frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + q(t) \sin(x_1) = 0,$$

$$v(0, x_2, x_3, t) = v(\pi, x_2, x_3, t) = v(x_1, 0, x_3, t) = 0,$$

$$v(x_1, \pi, x_3, t) = v(x_1, x_2, 0, t) = v(x_1, x_2, \pi, t) = 0,$$

$$v(x, 0) = \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_3),$$

$$v_t(x, 0) = 2 \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_3) - \sin(2x_1) \sin(2x_2) \sin(2x_3),$$

$$v_{tt}(x, 0) = \sin(2x_1) \sin(x_2) \sin(x_3) - \sin(x_1) \sin(2x_2) \sin(x_3),$$

$$v_{ttt}(x, 0) = \pi \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_3),$$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi v(x, t) \sin(\pi x_1) dx = \frac{-4\pi}{\pi^2 - 1} \cos(t + \pi^2).$$

Для этой входной информации выполняются все условия теоремы 4.2.1. С помощью разработанного алгоритма информация была обработана и восстановлен параметр уравнения

$$q(t) = \left( -0.081055 \cos^3(t) + 0.61029 \cos^2(t) - 2.6403 \cos(t) + 9.6429 \right) \cos(t + 9.8696) + \\ + 0.045293 \cos^4(t) + \left( 0.077974 \sin(t) - 0.34103 \right) \cos^3(t) + \left( -0.58710 \sin(t) + \right.$$

$$+1.4754) \cos^2(t) + (-5.3884 + 2.5400 \sin(t)) \cos(t) - 9.2764 \sin(t)$$

достигнув допустимого отклонения  $0.0009094859448 < \varepsilon$  между соседними приближениями функции  $q(t)$ , на 4-ом шаге последовательных приближений. На рисунке 4.5.1 представлен график функции  $q(t)$  и график её последовательных приближений.

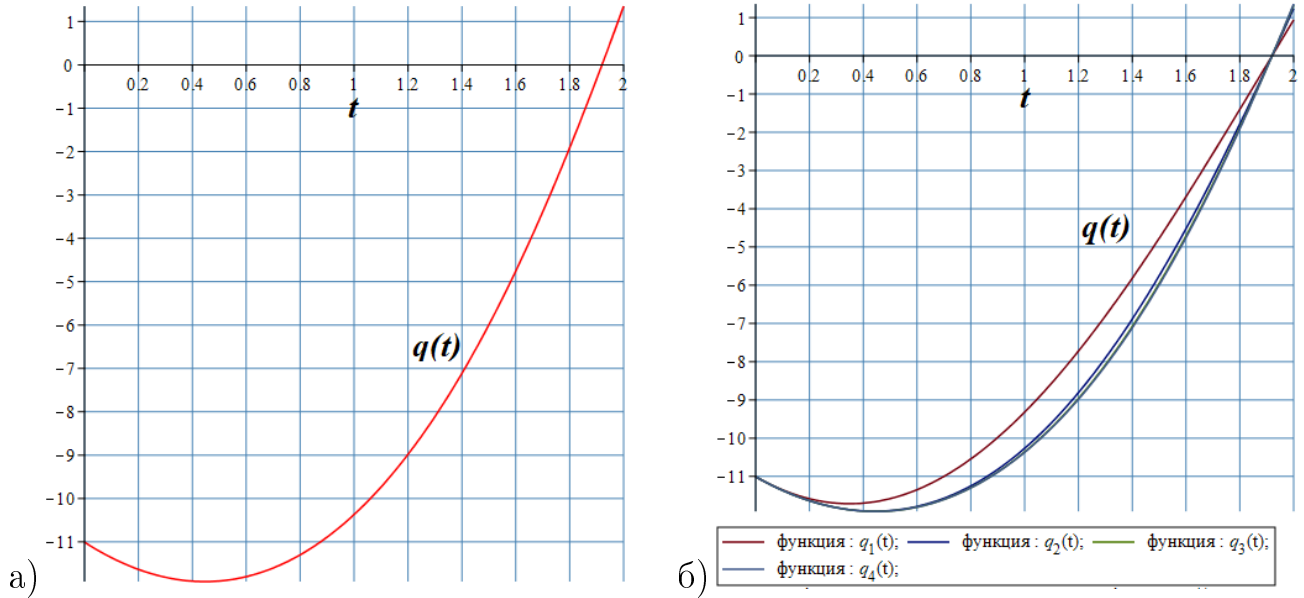


Рисунок 4.5.1 – График: а) функции  $q(t)$ ;

б) функций последовательных приближений функции  $q(t)$

Далее в программе, были найдена функция

$$v(x, t) = 0.047409 \sin(x_3) \left( -2.9295 \sin(x_1) 10^{-76} \left( 2.4808 e^{-1.1317t} 10^{77} - \right. \right. \\ \left. \left. -2 \left( 10^{77} 5.7697 \cos(0.88362t) - 10^{77} 1.4254 \sin(0.88362t) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. -10^{77} 2.8901 e^{1.1317t} \right) + 10^{-8} 3.4606 \sin(2x_1) \left( 10^8 7.3082 e^{-0.72278t} - \right. \right. \\ \left. \left. -10^8 14.6164 \cos(1.0459t) + 10^8 7.3082 e^{0.72278t} \right) + \sin(x_1) (\cos(2t) - \right. \\ \left. -0.022559 \cos(3t) + 0.000481313 \cos(4t) + 0.35839 \sin(2t) - 0.0082070 \sin(3t) + \right. \\ \left. +0.00017510 \sin(4t) - 252.39 \cos(t) - 89.047 \sin(t) - 16.873 \right) \sin(x_2)$$

представляющая обобщенный потенциал электрического поля. Последним шагом программы было построение, анимированного по времени, графика найденной функции  $v(x, t)$ . На рисунке 4.5.2 представлен график функции  $v(x, t)$  в различные моменты времени  $t$  в сечении  $x_3 = \frac{1}{2}$ .



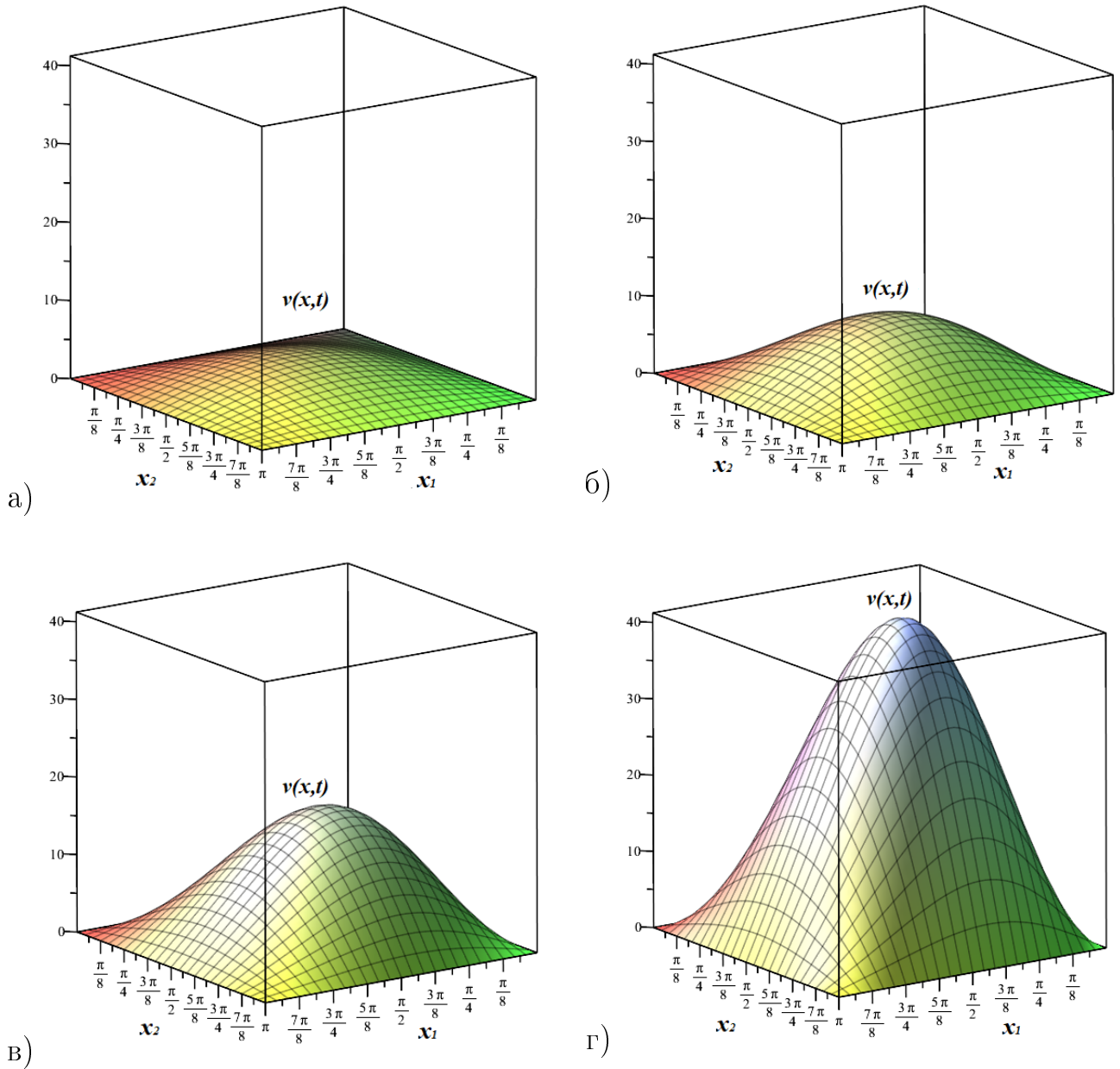


Рисунок 4.5.2 – График функции  $v(x, t)$  при  $x_3 = \frac{1}{2}$  и:  
 а)  $t = 0$ ; б)  $t = 0.52$ ; в)  $t = 1.16$ ; г)  $t = 2$

**Пример 4.5.2** Пусть задана следующая входная информация:

$$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -4, \kappa = -4, \varepsilon = 1, T = 3,$$

$$k = 2, m = 1, n = 1, a = \pi, b = \pi, c = \pi$$

$$v_0(x) = x_1 x_2 x_3 (x_1 - \pi)(x_2 - \pi)(x_3 - \pi), \quad v_1(x) = 2 \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_3),$$

$$v_2(x) = \sin(2x_1) \sin(x_2) \sin(x_3), \quad v_3(x) = \pi \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_3),$$

$$f(x) = \sin(x_1), \quad K(x) = \sin(\pi x_1), \quad F(t) = \frac{-4\pi}{\pi^2 - 1} \cos(t + \pi^2).$$

Следовательно, математическая модель ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле (4.3.1)–(4.3.4) примет вид

$$(\Delta - 1)v_{tttt} + 2(\Delta + 4)v_{tt} - 4\frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + q(t) \sin(x_1) = 0,$$

$$v(0, x_2, x_3, t) = v(\pi, x_2, x_3, t) = v(x_1, 0, x_3, t) = 0,$$

$$v(x_1, \pi, x_3, t) = v(x_1, x_2, 0, t) = v(x_1, x_2, \pi, t) = 0,$$

$$v(x, 0) = x_1 x_2 x_3 (x_1 - \pi)(x_2 - \pi)(x_3 - \pi), \quad v_t(x, 0) = 2 \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_3),$$

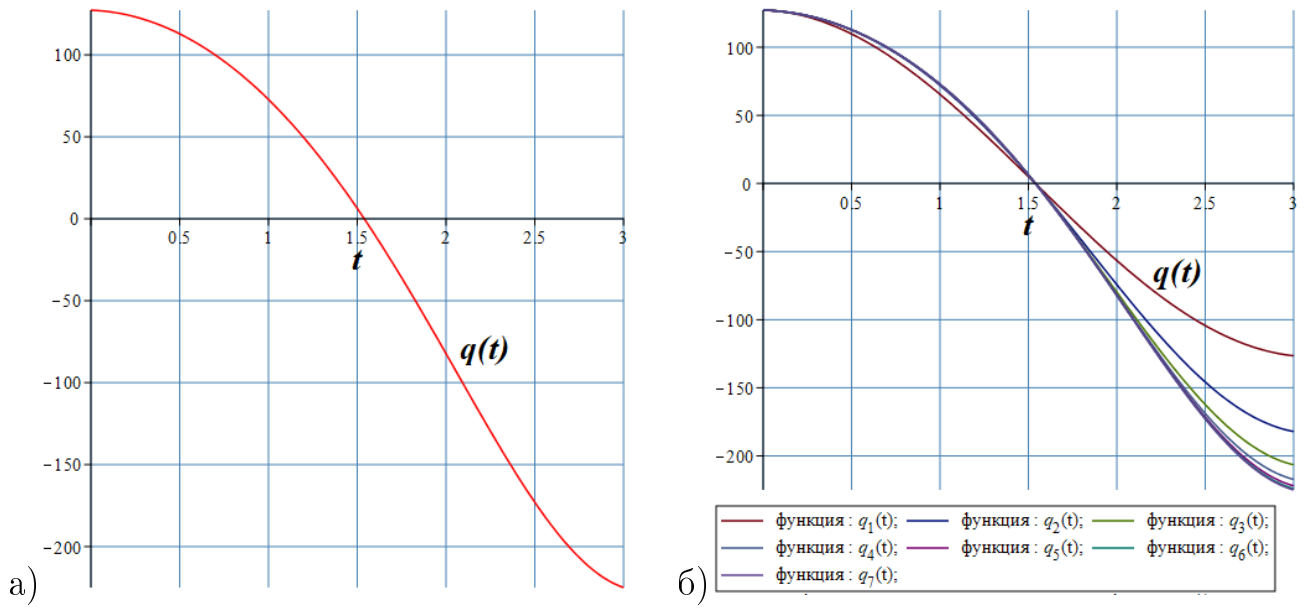
$$v_{tt}(x, 0) = \sin(2x_1) \sin(x_2) \sin(x_3), \quad v_{ttt}(x, 0) = \pi \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_3),$$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi v(x, t) \sin(\pi x_1) dx = \frac{-4\pi}{\pi^2 - 1} \cos(t + \pi^2).$$

Для этой входной информации выполняются все условия теоремы 4.2.1. С помощью разработанного алгоритма информация была обработана и восстановлен параметр уравнения

$$\begin{aligned} q(t) = & \left( 0.00087227 \cos^6(t) - 0.0091845 \cos^5(t) + 0.050734 \cos^4(t) - \right. \\ & - 0.20959 \cos^3(t) + 0.77026 \cos^2(t) - 2.7369 \cos(t) + \\ & \left. + 9.6657 \right) \cos(t + 9.8696) + 0.015525 \cos^7(t) + \\ & + \left( - 0.00083912 \sin(t) - 0.16347 \right) \cos^6(t) + \left( 0.0088354 \sin(t) + \right. \\ & + 0.90295 \left. \right) \cos^5(t) + \left( - 0.048805 \sin(t) - 3.7303 \right) \cos^4(t) + \left( 13.709 + \right. \\ & + 0.20162 \sin(t) \left. \right) \cos^3(t) + \left( - 0.74098 \sin(t) - 48.711 \right) \cos^2(t) + \\ & + \left( 172.03 + 2.6329 \sin(t) \right) \cos(t) - 9.2983 \sin(t) \end{aligned}$$

достигнув допустимого отклонения  $0.2728150334 < \varepsilon$  между соседними приближениями функции  $q(t)$ , на 7-ом шаге последовательных приближений. На рисунке 4.5.3 представлен график функции  $q(t)$  и график её последовательных приближений.

Рисунок 4.5.3 – График: а) функции  $q(t)$ ;б) функций последовательных приближений функции  $q(t)$ 

Далее в программе, были найдена функция

$$\begin{aligned}
 v(x, t) = & -0.59513 \sin(x_3) \left[ 10^{-118} 9.2729 \sin(x_1) \left( 10^{118} 1.9353 e^{-1.1317t} + \right. \right. \\
 & + 2 \left( 10^{119} 1.8136 \cos(0.88362t) - 10^{117} 3.6171 \sin(0.88362t) \right) + 10^{117} 5.8378 e^{1.1317t} \left. \right) - \\
 & - 10^{-9} 2.7567 \sin(2x_1) \left( 10^8 7.3082 e^{-0.72278t} - 10^8 14.6164 \cos(1.0459t) + \right. \\
 & \left. + 10^8 7.3082 e^{0.72278t} \right) + \sin(x_1) \left( \cos(2t) - 0.028418 \cos(3t) + \right. \\
 & + 0.0012215 \cos(4t) - 0.000059042 \cos(5t) + 10^{-6} 2.5151 \cos(6t) - \\
 & - 10^{-8} 6.4679 \cos(7t) - 0.030293 \sin(2t) + 0.00086642 \sin(3t) - \\
 & - 0.000037649 \sin(4t) + 10^{-6} 1.8426 \sin(5t) - 10^{-8} 7.9150 \sin(6t) + \\
 & \left. \left. + 10^{-9} 2.0354 \sin(7t) - 236.45 \cos(t) + 7.1436 \sin(t) - 16.682 \right) \right] \sin(x_2)
 \end{aligned}$$

представляющая обобщенный потенциал электрического поля. Последним шагом программы было построение, анимированного по времени, графика найденной функции  $v(x, t)$ . На рисунке 4.5.4 представлен график функции  $v(x, t)$  в различные моменты времени  $t$  в сечении  $x_2 = \frac{1}{2}$ .

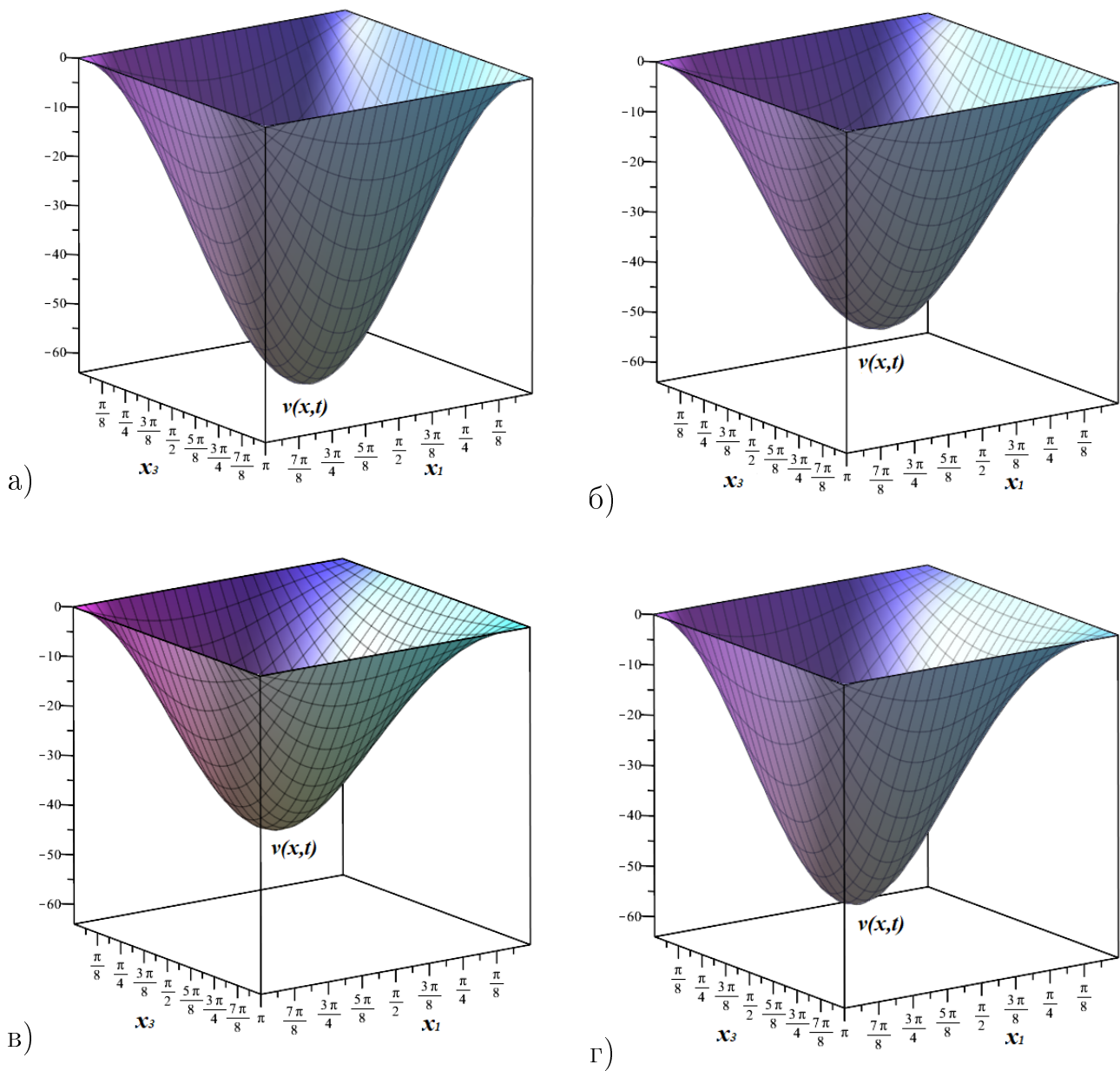


Рисунок 4.5.4 – График функции  $v(x, t)$  при  $x_2 = \frac{1}{2}$  и:  
 а)  $t = 0$ ; б)  $t = 1.03$ ; в)  $t = 2.28$ ; г)  $t = 3$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Итоги выполненного исследования

В диссертационной работе приведены результаты численного и аналитического исследования обратных задач для математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле. Получены условия существования и единственности решений изучаемых обратных задач. Разработаны алгоритмы численных методов нахождения решения, включающего поиск параметров внешнего воздействия, для рассматриваемых математических моделей. Сформулируем основные результаты.

1. Применены инструменты системного анализа в виде метода информационно-логического моделирования для проектирования исследования, формализации задач и представления проблематики обратных задач для математических моделей соболевского типа высокого порядка.

2. Проведено аналитическое исследование обратных задач для класса математических моделей упругости, акустики и гидродинамики с доказательством их однозначной разрешимости.

3. На основе аналитических результатов разработаны алгоритмы и численные методы нахождения решений обратных задач для математических моделей продольных колебаний в конструкции из стержней, Буссинеска – Лява и ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.

4. Разработанные численные методы и алгоритмы реализованы в виде комплексов программ по нахождению приближенного решения, включающего восстановление параметров внешнего воздействия в исследуемых математических моделях.

5. Проведены вычислительные эксперименты с целью обработки информации по восстановлению параметров внешнего воздействия для трех математических моделей.

6. Проведена верификация результатов обработки информации по восстановлению параметра внешнего воздействия на основе имитационного моде-

лирования, которая показала эффективность разработанных алгоритмов.

Таким образом, выполнены все поставленные задачи и, тем самым, достигнута цель диссертационной работы.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что данная работа является новой и соответствует специальностям:

1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ в части развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей; разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий; реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации в части формализации и постановки задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации; разработки специального математического и программного обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

### **Рекомендации**

Разработанные аналитические методы восстановления параметров внешнего воздействия предлагается применять для моделирования других процессов и явлений, построенных на уравнениях соболевского типа высокого порядка. Также, рекомендуется использовать полученные результаты численного исследования для предотвращения влияния негативных факторов, например, процессов разрушения мелководных берегов, разрушения несущих конструкций из стержней или повреждения космических станций или других важных объектов в околоземной космической плазме.

### **Перспективы дальнейшей разработки**

1. Исследование вопроса разрешимости обратных задач для математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле с другими условиями переопределения.

2. Рассмотрение других способов обработки информации для исследуемых трех математических моделей с последующим выяснением наиболее эффективного и точного из них.

3. Исследование вопроса устойчивости обратных задач для математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.

4. Исследование вопроса разрешимости обратных задач для других математических моделей, построенных на основе уравнений соболевского типа высокого порядка.

5. Численное и аналитическое исследование восстановления других параметров состояния среды для математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.

6. Программные комплексы могут быть модифицированы для решения актуальных практических задач упругости, акустики и гидродинамики.

7. Информационно-логическая модель может быть дополнена, а её данные перенесены в базу данных для хранения.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ОДУ – обыкновенные дифференциальные уравнения;

$\mathbb{I}$  – единичный оператор;

$\mathbb{O}$  – нулевой оператор;

$\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел;

$\mathbb{R}$  – множество действительных чисел;

$\mathbb{C}$  – множество комплексных чисел;

$\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{Y}, \mathcal{X}$  – банаховы пространства;

$L_2(\Omega)$  – пространства Лебега;

$W_q^b(\Omega)$  – пространства Соболева;

$\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  – множество линейных непрерывных операторов действующих из пространства  $\mathcal{U}$  в пространство  $\mathcal{F}$ ;

$C^\infty(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  – множество операторов имеющих непрерывные производные любого порядка;

$\Delta$  – оператор Лапласа;

$\text{im } L$  – образ оператора  $L$ ;

$\text{ker } L$  – ядро оператора  $L$ ;

$\vec{B}$  – пучок операторов  $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ ;

Символ  $\square$  лежит в конце доказательства;

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение в соответствующем пространстве;

$\| \cdot \|$  – норма в соответствующем пространстве.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Аникиев, Д. В. Точный динамический метод решения обратной задачи сейсмологии на основе интегральных уравнений Гельфанда – Левитана / Д. В. Аникиев, Б. М. Каштан, А. С. Благовещенский, В. А. Мулдер // Ученые записки СПбГУ. Вопросы геофизики. – 2011. – Вып. 44. – С. 49–81.

2 Асылбеков, Т. Д. Коэффициентная обратная задача для линейного уравнения в частных производных четвертого порядка / Т. Д. Асылбеков, М. К. Чамашев // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317, № 2. – С. 22–25.

3 Баев, А. В. О решении одной обратной задачи для уравнений мелкой воды в бассейне с переменной глубиной / А. В. Баев // Математическое моделирование. – 2020. – Т. 32. – С. 3–15.

4 Баязитова, А. А. Задача Штурма – Лиувилля на геометрическом графе / А. А. Баязитова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 5. – С. 4–10.

5 Бычков, Е. В. Об одной полулинейной математической модели соболевского типа высокого порядка / Е. В. Бычков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 111–117.

6 Вагин, К. Ю. Дисперсия и затухание продольных электронных волн в плазме, образующейся при многофотонной ионизации атомов / К. Ю. Вагин, Т. В. Мамонтова, С. А. Урюпин // Лазерные, плазменные исследования и технологии - ЛАПЛАЗ-2018. – 2018. – С. 203–204.

7 Вагин, К. Ю. Высокочастотные квазипотенциальные волны в плазме, образованной при туннельной ионизации атомов / К. Ю. Вагин, Т. В. Мамонтова, С. А. Урюпин // Физика плазмы. – 2018. – Т. 44, № 8. – С. 613–623.

8 Вагин, К. Ю. Волны в плазме с несколькими пиками в распределении фотоэлектронов / К. Ю. Вагин, Т. В. Мамонтова, С. А. Урюпин // Лазерные, плазменные исследования и технологии ЛАПЛАЗ-2019. – 2019. – С. 61–62.

9 Валеев, Н. Ф. Решение модельной обратной спектральной задачи для оператора Штурма – Лиувилля на графе / Н. Ф. Валеев, Ю. В. Мартынова, Я. Т. Султанаев // Вычислительные методы и программирование. – 2016. – Т. 17, № 3. – С. 204–211.

10 Васильев В. И. Численное решение обратной задачи для нестационарного уравнения конвекции-диффузии / В. И. Васильев, О. А. Тихонова // Математические заметки СВФУ. – 2009. – Т. 16, № 1. – С. 116–127.

11 Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения. Методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – Наукова думка, 1986. – 544 с.

12 Вишик, М. И. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения / М. И. Вишик // Математический сборник. – 1956. – Т. 39, № 1. – С. 51–148.

13 Габов, С. А. Новые задачи математической теории волн / С. А. Габов. – Москва: Физматлит. – 1998. – 448 с.

14 Гамзаев, Х. М. Обратная задача нестационарного течения несжимаемой жидкости в трубе с проницаемой стенкой / Х. М. Гамзаев // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2020. – Т. 12, № 1. – С. 24–30.

15 Гласко, Ю. В. Обратная задача интерпретации гравитационной и магнитной аномалий месторождения углеводородов / Ю. В. Гласко // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2020. – Т. 14. – С. 46–55.

16 Диаб, А. Т. О кратности собственных значений в задаче Штурма – Лиувилля на графах / А. Т. Диаб, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев // Научные ведомости. Серия: Математика. Физика. – 2012. – Т. 27, № 11. – С. 48–59.

17 Дорофеев, В. Г. Неустойчивость необыкновенной электромагнитной волны в нагретой плазме / В. Г. Дорофеев, В. Б. Красовицкий, В. А. Туриков // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: математика, информатика, физика. – 2014. – № 3. – С. 145–153.

18 Дубинов, А. Е. Нелинейная теория обратных и боковых ионно-звуковых волн в плазме с однонаправлено движущимися ионами / А. Е. Дубинов, И. Н. Китаев // Журнал технической физики. – 2020. – Т. 90, № 1. – С. 53–58.

19 Зайнуллов, А. Р. Обратная задача для двумерного уравнения теплопроводности по отысканию начального распределения / А. Р. Зайнуллов // Вестник Самарского государственного университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 19, № 4. – С. 667–679.

20 Замышляева, А. А. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява / А. А. Замышляева, А. В. Юзеева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 16 (192). – Вып. 5. – С. 23–31.

21 Замышляева, А. А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка: монография / А. А. Замышляева. – Челябинск: Издательство ЮУрГУ, – 2012. – 107 с.

22 Замышляева, А. А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска – Лява / А. А. Замышляева, О. Н. Цыпленкова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 5 (264). – Вып. 11. – С. 13–24.

23 Замышляева, А. А. Фазовое пространство модифицированного уравнения Буссинеска / А. А. Замышляева, Е. В. Бычков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 18 (277). – Вып. 12. – С. 13–19.

24 Замышляева, А. А. Об алгоритме численного моделирования волн Буссинеска – Лява / А. А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2013. – Т. 13, № 4. – С. 24–29.

25 Замышляева, А. А. Оптимальное управление решениями задачи Шоултера – Сидорова – Дирихле для уравнения Буссинеска – Лява / А. А. Замыш-

ляева, О. Н. Цыпленкова // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 11. – С. 1390–1398.

26 Замышляева, А. А. Исследование линейных математических моделей соболевского типа высокого порядка: специальность 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»: диссертация на соискание ученой степени доктора физико–математических наук / Замышляева Алена Александровна; ФБГОУ ВПО «ЮУрГУ» (НИУ). – Челябинск, 2013. – 276 с.

27 Замышляева, А. А. Исследование одной полулинейной математической модели соболевского типа высокого порядка / А. А. Замышляева, Е. В. Бычков // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. – 2020. – Т. 8. – С. 3–6.

28 Зубова, С. П. О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной / С. П. Зубова, К. И. Чернышов // Дифференциальные уравнения и их применение. – 1976. – Вып. 14. – С. 21–39.

29 Исломов, Б. И. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в прямоугольной области / Б. И. Исломов, У. Ш. Убайдуллаев // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2021. – Т. 65. – С. 25–42.

30 Калинина, Е. А. Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии / Е. А. Калинина // Дальневосточный математический журнал. – 2004. – Т. 5, № 1. – С. 89–99.

31 Касымалиева, А. А. Обратные задачи для уравнения Буссинеска – Лява: автореферат / А. А. Касымалиева. – Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына, 2014. – 19 с.

32 Келлер, А. В. Задача оптимального измерения для модели измерительного устройства с детерминированным мультипликативным воздействием и инерционностью / А. В. Келлер, М. А. Сагадеева // Вестник ЮУрГУ. Се-

рия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 134–138.

33 Кожанов, А. И. Нелинейные обратные задачи с интегральным переопределением для некоторых нестационарных дифференциальных уравнений высокого порядка / А. И. Кожанов, Л. А. Телешева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2017. – Т. 10, № 2. – С. 24–37.

34 Кожанов, А. И. Линейные обратные задачи для одного класса уравнений соболевского типа / А. И. Кожанов, Г. В. Намсараева // Челябинский физико-математический журнал. – 2018. – Т. 3. – Вып. 2. – С. 153–171.

35 Крейн С. Г. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве: препринт / С. Г. Крейн. – Новосибирск, 1979. – 18 с.

36 Кузелев, М. В. К теории электромагнитных взаимодействий релятивистского электронного пучка и плазмы в коаксиальном волноводе во внешнем магнитном поле / М. В. Кузелев, Е. А. Хапаева // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. – 2014. – № 6. – С. 75–80.

37 Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – Москва: Наука, 1987. – Т. VII – 248 с.

38 Ландау, Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – Москва: Наука. – 1992. – 664 с.

39 Ляв, А. Математическая теория упругости / А. Ляв; пер. с англ. Б. В. Булгаков, В. Я. Натанзон. – Москва; Ленинград: ОНТИ, 1935. – 674 с.

40 Манакова, Н. А. Математические модели и оптимальное управление процессами фильтрации и деформации / Н. А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8. – Вып. 3. – С. 5–24.

41 Мартемьянова, Н. В. Обратная задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе по определению сомножителей правой части / Н. В. Мартемьянова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2020. – Т. 64. – С. 40–57.

42 Мегралиев, Я. Т. Обратная краевая задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения второго порядка / Я. Т. Мегралиев, А. Х. Сатторов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2010. – Т. 53, № 4. – С. 248–256.

43 Мегралиев, Я. Т. Обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода / Я. Т. Мегралиев, Г. Н. Искендерова // Проблемы физики математики и технологий. – 2016. – № 1 (26). – С. 42–47.

44 Мизонова, В. Г. Матричный алгоритм приближенного решения волновых уравнений в неоднородной магнитоактивной плазме / В. Г. Мизонова // Физика плазмы. – 2019. – Т. 45, № 8. – С. 745–754.

45 Нуман Эльшейх, М. Х. Операторы Лапласа для уравнения Шредингера на графах / М. Х. Нуман Эльшейх, В. Ж. Сакбаев // Труды МФТИ. – 2014. – Т. 6, № 2. – С. 61–67.

46 Павлов, С. С. Разрешимость обратной задачи восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении / С. С. Павлов // Вестник ЧелГУ. – 2011. – № 26. – С. 27–37.

47 Петвиашвили, В. И. Уединенные волны в плазме и атмосфере / В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов. – Москва: Атомиздат. – 1989. – 200 с.

48 Петрова, Е. В. Обобщенная задача Неймана на графе-звезде / Е. В. Петрова, В. В. Провоторов // Математика и ее приложения. Журнал ивановского математического общества. – 2011. – № 1. – С. 85–94.

49 Пузынина, Т. П. О численном решении прямой и обратной задачи рассеяния на сферически симметричных потенциалах, зависящих от параметров / Т. П. Пузынина, Во Чонг Тхак // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. – 2012. – № 4. – С. 73–86.

50 Пятков, С. Г. Обратные задачи для некоторых квазилинейных параболических систем с интегральными условиями переопределения / С. Г. Пятков, М. В. Уварова, Т. В. Пронькина // Математические заметки СВФУ. – 2020. – Т. 27, № 4. – С. 43–59.

51 Сариев, А. Д. Непрерывность решения обратных задач для уравнения переноса излучений / А. Д. Сариев, А. Т. Шыганакова, С. Д. Сариев и др. // Международный научно-исследовательский журнал. – 2020. – Т. 1, № 91. – С. 6–11.

52 Сафиуллова, Р. Р. Обратная задача для гиперболического уравнения второго порядка с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени / Р. Р. Сафиуллова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 4. – С. 73–86.

53 Свешников, А. Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов и др. – Москва: Физматлит. – 2004. – 737 с.

54 Свиридюк, Г. А. Уравнения Осколкова на геометрических графах как математическая модель дорожного движения / Г. А. Свиридюк, С. А. Загребина, А. С. Конкина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8. – Вып. 3. – С. 148–154.

55 Серазутдинов, М. Н. Несущая способность стержневых элементов конструкций, усиливаемых в напряженном состоянии / М. Н. Серазутдинов, Х. А. Абрагим // Вестник Казанского технологического университета. – 2010. – №. 9. – С. 512–518.

56 Смирнов, А. О. Двухзонные 3-эллиптические решения уравнений Буссинеска и Кортвега–де Фриза / А. О. Смирнов, Г. М. Головачёв, Е. Г. Амосёнок // Нелинейная динамика. – 2011. – Т. 7, № 2. – С. 239–256.

57 Соболев, С. Л. Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Известия АН СССР. Серия: математика. – 1954. – Т. 18. – Вып. 1. – С. 3–50.

58 Танана, В. П. О сведении обратной граничной задачи к последовательному решению двух некорректных задач / В. П. Танана // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2020. – Т. 13. – С. 180–192.

59 Тимонов, А. Новый метод численного решения гибридной обратной задачи визуализации электрической проводимости / А. Тимонов // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2021. – Т. 499. – С. 105–128.

60 Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – Москва: Мир, 1977. – 638 с.

61 Умаров, Х. Г. Задача Коши для уравнения нелинейных длинных продольных волн в вязкоупругом стержне / Х. Г. Умаров // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 61, № 1. – С. 198–209.

62 Фоменко, Н. А. Моделирование распространения морских волн на мелководье и возможность их фокусировки // Н. А. Фоменко // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – №4 (141). – С. 44–53.

63 Фролов, А. А. О численном моделировании медленной необыкновенной волны в магнитоактивной плазме / А. А. Фролов, Е. В. Чижонков // Вычислительные методы и программирование. – 2020. – Т. 21, № 4. – С. 420–439.

64 Федоров, В. Е. Линейная эволюционная обратная задача для уравнений соболевского типа / В. Е. Федоров, А. В. Уразаева // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Издательство Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН. – 2010. – С. 293–310.

65 Федотов, И. А. Продольные колебания стержня Рэлея-Бишопа / И. А. Федотов, А. Д. Полянин, М. Ю. Шаталов, Э. М. Тенкам // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 435, № 5. – С. 613–618.

66 Цыпленкова, О. Н. Оптимальное управление в математических моделях соболевского типа высокого порядка с  $(A, p)$ -ограниченными операторами / О. Н. Цыпленкова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7. – Вып. 2. – С. 129–135.

67 Шергин, С. Н. Аналитическое и численное исследование одного класса математических моделей фильтрации и гидродинамики на основе теории обратных задач: специальность 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»: диссертация на соискание ученой сте-



пени кандидата физико–математических наук / Шергин Сергей Николаевич; ФГБОУ ВО «ЮГУ». – Ханты-Мансийск, 2019. – 168 с.

68 Шимелевич, М. И. О методе расчета модуля непрерывности обратного оператора и его модификаций с приложением к нелинейным задачам геоэлектрики / М. И. Шимелевич // Вычислительные методы и программирование. – 2020. – Т. 21. – С. 350–372.

69 Юлдашев, Т. К. Обратная задача для квазилинейных интегродифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка / Т. К. Юлдашев, А. И. Середкина // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Вып. 3 (32). – С. 46–55.

70 Юрко, В. А. Обратная задача для операторов Штурма – Лиувилля на графе-еже / В. А. Юрко // Математические заметки. – 2011. – Т. 89. – Вып. 3. – С. 459–471.

71 Яваров, А. В. Численные и аналитические решения задач о действии внешних нагрузок на упругое полупространство / А. В. Яваров, И. Э. Сергеев, Ю. В. Рязанцева // Строительство уникальных зданий и сооружений. – 2015. – Вып. 1 (28). – С. 40–51.

72 Banasiak, J. Chaotic Behavior of Semigroups Related to the Process of Gene Amplification-Deamplification with Cell Proliferation / J. Banasiak, M. Lachowicz, M. Moszynski // Mathematical Biosciences. – 2007. – V. 206, № 2. – P. 200–215.

73 Banasiak, J. Positive Solutions to Sobolev Type Equations with Relatively  $p$ -Sectorial Operators / J. Banasiak, N. A. Manakova, G. A. Sviridyuk // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2020. – V. 13, № 2. – P. 17–32.

74 Baranovskii, E. S. Strong solutions of the incompressible Navier–Stokes–Voigt model / E. S. Baranovskii // Mathematics. – 2020. – V. 8, № 181.

75 Beshtokov, M. Kh. Numerical study of initial-boundary value problems for a Sobolev type equation with a time-fractional derivative / M. Kh. Beshtokov //

Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2019. – V. 59, № 2. – P. 175–192.

76 Bychkov, E. V. Analytical study of the mathematical model of wave propagation in shallow water by the Galerkin method / E. V. Bychkov // Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2021. – V. 14, № 1. – P. 26–38.

77 Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively  $p$ -Sectorial Operators in Space of «Noises» / A. Favini, G. A. Sviridyuk, N. A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – P. 1–8.

78 Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively  $p$ -Radial Operators in Space of «Noises» / A. Favini, G. A. Sviridyuk, M. A. Sagadeeva // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2016. – V. 13. – P. 4607–4621.

79 Kokurin, M. Y. Completeness of asymmetric products of solutions of a second order elliptic equation and uniqueness of a solution to an inverse problem for a wave equation / M. Y. Kokurin // Differential Equations. – 2021. – V. 57, № 2. – P. 241–250.

80 Korpusov, M. O. On the Critical Exponent «Instantaneous Blowup» Versus «Local Solubility» in the Cauchy Problem for a Model Equation of Sobolev Type / M. O. Korpusov, A. A. Panin, A. E. Shishkov // Izvestiya: Mathematics. – 2021. – V. 85. – P. 111–144.

81 Kozhanov, A. I. Boundary value problems for fourth-order Sobolev type equations / A. I. Kozhanov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2021. – V. 14, № 4. – P. 425–432.

82 Lovetski, K. P. Solving the inverse problem for determining the optical characteristics of materials / K. P. Lovetski, A. A. Zhukov, M. V. Paukshto and other // Discrete and continuous models and applied computational science. – 2020. – V. 28, № 4. – P. 378–397.

83 Manakova, N. A. An Optimal Control of the Solutions of the Initial-Final Problem for Linear Sobolev Type Equations with Strongly Relatively  $p$ -Radial Operator / N. A. Manakova, G. A. Sviridyuk // Semigroups of Operators – Theory

and Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2015. – V. 113. – P. 213–224.

84 Merhraliyev, Y. T. On Solvability of an Inverse Boundary Value Problem for the Boussinesq – Love Equation / Y. T. Merhraliyev // Journal of Siberian Federal university. Mathematics and Physics. – 2013. – V. 6, № 4. – P. 485–494.

85 Mohan, M. T. On the three dimensional Kelvin-Voigt fluids: Global solvability, exponential stability and exact controllability of Galerkin approximations / M. T. Mohan // Evolution Equations and Control Theory. – 2020. – V. 9. – P. 301–339.

86 Moiseev, M. B. An inverse problem of the theory of the electromagnetic radiation for a function spectrum with a finite number of zeros / M. B. Moiseev // Mathematical structures and modeling. – 2020. – V. 3, № 55. – P. 22–30.

87 Mukherjee, A. Dynamical study of nonlinear ion acoustic waves in presence of charged space debris at Low Earth Orbital (LEO) plasma region / A. Mukherjee, S. P. Acharya, M. S. Janaki // Astrophysics and Space Science. – 2021. – № 7. – 366.

88 Poincare, H. Sur les courbes definies par les equations differentielles (III) / H. Poincare // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. – 1885. – V. 1. – P. 167–244.

89 Prilepko, A. I. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin. – New York: Marcel Dekker, 2000. – 744 p.

90 Shafranov, D. E. Solvability of the Showalter – Sidorov problem for Sobolev type equations with operators in the form of first-order polynomials from the Laplace – Beltrami operator on differential forms / D. E. Shafranov, N. V. Adukova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2017. – V. 4, № 3. – P. 27–34.

91 Shafranov, D. E. On numerical solution in the space of differential forms for one stochastic sobolev-type equation with a relatively radial operator /

D. E. Shafranov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2020. – V. 7, № 4. – P. 48–55.

92 Shestakov, A. L. The theory of optimal measurements / A. L. Shestakov, A. V. Keller, G. A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – V. 1, № 1. – P. 3–16.

93 Shirokova, E. A. Inverse Boundary Value Problem of the Plane Theory of Elasticity / E. A. Shirokova // Russian Mathematics. – 2020. – V. 64. – P. 66–73.

94 Showalter, R. E. The Sobolev type equations / R. E. Showalter // I. Applicable Analysis. – 1975. – V. 5. – P. 15–22.

95 Solovyova, N. N. Positive solutions of sobolev type equations / N. N. Solovyova, S. A. Zagrebina, G. A. Sviridyuk // Mathematical Methods in Technics and Technologies - MMTT. – 2020. – V. 8. – P. 12–15.

96 Sulaimanov, B. E. Inverse Problem for Differential Equations in Individual Derivatives / B. E. Sulaimanov, Z. K. Myrzapayazova, A. S. Toktogulova // Bulletin of the Kyrgyz State Technical University named after Razzakov. – 2020. – V. 2, № 54. – P. 95–102.

97 Sviridyuk, G. A. On the Identities of Analytic Semigroups of Operators with Kernels / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov // Siberian Mathematical Journal. – 1998. – V. 39. – P. 522–533.

98 Vasiuchkova, K. V. Numerical simulation of the starting control for a single model the physics of semi-conductors / K. V. Vasiuchkova, N. A. Manakova // Mathematical Methods in Technics and Technologies – MMTT. – 2020. – V. 9. – P. 17–20.

99 Wang, S. Small Amplitude Solutions of the Generalized IMBq Equation / S. Wang, G. Chen // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2002. – V. 274, № 2. – P. 846–866.

100 Zagrebina, S. A. The Multipoint Initial-Final Value Condition for the Navier – Stokes Linear Model / S. A. Zagrebina, A. S. Konkina // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2015. – V. 8, № 1. – P. 132–136.

101 Zamyshlyayeva, A. A. Optimal Control of Solutions to the Initial-Final Problem for the Sobolev Type Equation of Higher Order / A. A. Zamyshlyayeva, O. N. Tsyplenkova, E. V. Bychkov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. – V. 3, № 2. – P. 57–67.

102 Zamyshlyayeva, A. A. Nonclassical Equations of Mathematical Physics. Linear Sobolev Type Equations of Higher order / A. A. Zamyshlyayeva, G. A. Sviridyuk // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics. – 2016. – V. 8, № 4. – P. 5–16.

103 Zamyshlyayeva, A. A. The Cauchy Problem for the Sobolev Type Equation of Higher Order / A. A. Zamyshlyayeva, E. V. Bychkov // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2018. – V. 11, № 1. – P. 5–14.

104 Zamyshlyayeva, A. A. Optimal control of solutions to the initial-final problem for the model of linear waves in a plasma / A. A. Zamyshlyayeva, O. N. Tsyplenkova // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics. – 2019. – V. 11, № 4. – P. 26–31.

105 Zamyshlyayeva, A. A. Numerical solution of optimal control problem for the model of linear waves in plasma / A. A. Zamyshlyayeva, O. N. Tsyplenkova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2019. – V. 6, № 4. – P. 69–78.

106 Zamyshlyayeva, A. A. Optimal Control in Linear Sobolev Type Mathematical Models / A. A. Zamyshlyayeva, N. A. Manakova, O. N. Tsyplenkova // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2020. – V. 13, № 1. – P. 5–27.

### **Публикации автора**

107 Zamyshlyayeva, A. A. Boussinesq – Love mathematical model on a geometrical graph / A. A. Zamyshlyayeva, **A. V. Lut** // Journal of computational and engineering mathematics. – 2015. – V. 2, № 2. – P. 82–97.

108 **Лут, А. В.** Математическая модель Буссинеска – Лява на геометрическом графе / **А. В. Лут, А. А. Замышляева** // Молодой исследователь: материалы 3-й научной выставки-конференции научно-технических и творческих работ студентов. – Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 2016. – Т. 1. – С. 161–168.

109 Zamyshlyayeva, A. A. Numerical investigation of the Boussinesq – Love mathematical models on geometrical graphs / A. A. Zamyshlyayeva, **A. V. Lut** // Bulletin of the South Ural State University. Series: mathematical modelling, programming and computer software. – 2017. – V. 10, № 2. – P. 137–143.

110 Моделирование продольных колебаний в элементах конструкции из тонких упругих стержней: Свидетельство № 2017616658 / **Лут А. В.** (RU), Замышляева А. А. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2017613618; заявл. 20.04.2017; зарегистр. 09.06.2017, реестр программ для ЭВМ.

111 Zamyshlyayeva, A. A. Inverse problem for Sobolev type mathematical models / A. A. Zamyshlyayeva, **A. V. Lut** // Bulletin of the South Ural State University. Series: mathematical modelling, programming and computer software. – 2019. – V. 12, № 2. – P. 25–36.

112 **Лут, А. В.** Решение обратной задачи второго порядка для математической модели Буссинеска – Лява / **А. В. Лут** // Уфимская осенняя математическая школа: сборник тезисов Международной научной конференции. Ответственный редактор З. Ю. Фазуллин, 2019. – С. 140–142.

113 Zamyshlyayeva, A. A. Inverse problem for the Boussinesq – Love mathematical model / A. A. Zamyshlyayeva, **A. V. Lut** // Semigroups of operators – theory and applications. – 2020. – V. 325. – P. 427–434.

114 **Lut, A. V.** Numerical investigation of the inverse problem for the Boussinesq – Love mathematical model / **A. V. Lut** // Journal of computational and engineering mathematics. – 2020. – V. 7, № 3. – P. 45–59.

115 Программный комплекс для моделирования продольных колебаний в тонком упругом стержне с возможностью восстановления внешней нагрузки на стержень: Свидетельство № 2020660939 / **Лут А. В.** (RU); правообла-

тель ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 20200660072; заявл. 08.09.2020; зарегистр. 15.09.2020, реестр программ для ЭВМ.

116 **Lut, A. V.** Inverse problem for Sobolev type equation of the second order / **A. V. Lut**, A. A. Zamyshlyayeva // International online conference «One-parameter semigroups of operators», Nizhny Novgorod, 2021. – С. 123–125. – URL: [https://nnov.hse.ru/data/2021/04/10/1392438863/OPSO\\_2021\\_book\\_of\\_abstracts\\_v10.pdf](https://nnov.hse.ru/data/2021/04/10/1392438863/OPSO_2021_book_of_abstracts_v10.pdf) (дата обращения: 04.05.2022).

117 **Лут, А. В.** Исследование обратных задач для уравнений соболевского типа второго порядка / **А. В. Лут**, А. А. Замышляева // Научные разработки ЮУрГУ – 2020: альманах. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2021. – С. 28–29. – URL: [https://www.susu.ru/sites/default/files/book/almanah\\_2020.pdf](https://www.susu.ru/sites/default/files/book/almanah_2020.pdf) (дата обращения: 04.05.2022).

118 Zamyshlyayeva, A. A. Inverse problem for incomplete Sobolev type equation of higher order / A. A. Zamyshlyayeva, **A. V. Lut** // Differential equations and control processes. – 2021. – № 3. – P. 71–84.

119 **Lut, A. V.** Numerical investigation of the inverse problem for the Boussinesq – Love mathematical model on a graph / **A. V. Lut**, A. A. Zamyshlyayeva // Journal of computational and engineering mathematics. – 2021. – V. 8, № 3. – P. 71–85.

120 Программный комплекс для моделирования продольных колебаний в элементах конструкций из двух тонких упругих стержней с восстановлением коэффициента внешней нагрузки: Свидетельство № 2022610567 / **Лут А. В.** (RU), Замышляева А. А. (RU); правообладатель **Лут А. В.** – 2021666112; заявл. 05.10.2021; зарегистр. 13.01.2022, реестр программ для ЭВМ.

121 Zamyshlyayeva, A. Inverse problem for the Sobolev type equation of higher order / A. Zamyshlyayeva, **A. Lut** // Mathematics. – 2021. – V. 9. – 1647.

122 **Lut, A. V.** Inverse problem for incomplete Sobolev type equation of higher order and application / **A. V. Lut**, A. A. Zamyshlyayeva //

International online conference «One-parameter semigroups of operators», Nizhny Novgorod, 2022. – С. 83–85. – URL: [https://nnov.hse.ru/data/2022/02/22/1749107215/OPSO\\_2022\\_book\\_of\\_abstracts\\_v10.pdf](https://nnov.hse.ru/data/2022/02/22/1749107215/OPSO_2022_book_of_abstracts_v10.pdf) (дата обращения: 04.05.2022).

123 **Лут, А. В.** Исследование обратных задач для уравнений соболевского типа второго порядка / **А. В. Лут, А. А. Замышляева** // Научные разработки ЮУрГУ – 2021: альманах. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2022. – С. 106–107. – URL: <https://disk.yandex.ru/i/5wzh5HzsDwQfOg> (дата обращения: 04.05.2022).

124 Zamyshlyayeva, A. A. Processing of information on recovery of the external force parameter for the mathematical model of ion-acoustic waves in plasma / A. A. Zamyshlyayeva, **A. V. Lut** // Journal of computational and engineering mathematics. – 2022. – V. 9, № 1. – P. 59–72.

125 Обработка информации при моделировании ионно-звуковых волн в плазме с восстановлением параметра воздействия внешнего магнитного поля: Свидетельство № 2022616514 / **Лут А. В.** (RU), Замышляева А. А. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2022616271; заявл. 13.04.2022; зарегистр. 13.04.2022, реестр программ для ЭВМ.



## ПРИЛОЖЕНИЯ

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Свидетельство о регистрации программы ЭВМ для моделирования продольных колебаний в элементах конструкции из тонких упругих стержней.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017616658

**Моделирование продольных колебаний в элементах  
конструкции из тонких упругих стержней**

Правообладатель: *федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)» (ФГАОУ ВО  
«ЮУрГУ (НИУ)») (RU)*

Авторы: *Лут Александр Валерьевич (RU),  
Замышляева Алена Александровна (RU)*

Заявка № 2017613618

Дата поступления 20 апреля 2017 г.

Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ 09 июня 2017 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

*Г.П. Ивлиев* Г.П. Ивлиев

D2017-23

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Свидетельство о регистрации программного комплекса для моделирования продольных колебаний в тонком упругом стержне с возможностью восстановления внешней нагрузки на стержень.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020660939

**Программный комплекс для моделирования продольных колебаний в тонком упругом стержне с возможностью восстановления внешней нагрузки на стержень**

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» (RU)*

Автор: *Лут Александр Валерьевич (RU)*

Заявка № **2020660072**

Дата поступления **08 сентября 2020 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **15 сентября 2020 г.**

*Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности*

*Г.П. Ивлиев*



g 20 20 - 22

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

Свидетельство о регистрации программного комплекса для моделирования продольных колебаний в элементах конструкций из двух тонких упругих стержней с восстановлением коэффициента внешней нагрузки.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО  
о государственной регистрации программы для ЭВМ  
№ 2022610567

Программный комплекс для моделирования  
продольных колебаний в элементах конструкций из  
двух тонких упругих стержней с восстановлением  
коэффициента внешней нагрузки

Правообладатель: *Лут Александр Валерьевич (RU)*

Авторы: *Лут Александр Валерьевич (RU), Замышляева  
Алена Александровна (RU)*

Заявка № 2021666112  
Дата поступления 05 октября 2021 г.  
Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ 13 января 2022 г.



Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

*Г.П. Ивлиев* Г.П. Ивлиев

## ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Свидетельство о регистрации программы для обработки информации при моделировании ионно-звуковых волн в плазме с восстановлением параметра воздействия внешнего магнитного поля.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



**СВИДЕТЕЛЬСТВО**  
о государственной регистрации программы для ЭВМ  
**№ 2022616514**

**ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ ПРИ  
МОДЕЛИРОВАНИИ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН В  
ПЛАЗМЕ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ ПАРАМЕТРА  
ВОЗДЕЙСТВИЯ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» (RU)*

Авторы: *Лут Александр Валерьевич (RU), Замышляева Алена Александровна (RU)*

Заявка № **2022616271**  
Дата поступления **13 апреля 2022 г.**  
Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ **13 апреля 2022 г.**

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности  
  
Ю.С. Zubov



2022-04