

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Чалуб Халид З Чалуб

Математическое моделирование проблем транспортной  
логистики на основе распределительной задачи  
линейного программирования

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, профессор  
Панюков Анатолий Васильевич

Челябинск – 2019

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	6
<b>Глава 1. Проблемы математического моделирования</b>	
<b>региональной транспортной логистики</b> . . . . .	28
1.1. Проблемы и перспективы применения информационных технологий в транспортной логистике . . . . .	29
1.2. Математическая модель для решения оперативной проблемы региональных грузоперевозок . . . . .	38
1.2.1. Постановка задачи . . . . .	39
1.2.2. Безтранзитные перевозки . . . . .	40
1.2.3. Введение транзитных маршрутов . . . . .	41
1.3. Выводы к первой главе . . . . .	45
<b>Глава 2. Математическая модель распределения товаров</b>	
<b>по логистическим центрам</b> . . . . .	47
2.1. Постановка задачи . . . . .	48
2.2. Разложимый случай . . . . .	49
2.3. Регуляризация . . . . .	51
2.4. Выводы к второй главе . . . . .	53

### Глава 3. Аппроксимация матрицы с положительными

элементами матрицей единичного ранга . . . . .	55
3.1. Постановка аппроксимирующей задачи . . . . .	56
3.2. Алгоритм решения задачи . . . . .	58
3.2.1. Пример . . . . .	60
3.3. Доказательство результативности алгоритма . . . . .	64
3.3.1. Пример выполнения алгоритма <i>Log_Decomposition</i> . . . . .	70
3.4. Выводы к третьей главе . . . . .	73

### Глава 4. Комплекс SW2AM компьютерных программ для задачи

аппроксимации матрицы с положительными элементами	
матрицей единичного ранга . . . . .	74
4.1. Общие сведения . . . . .	74
4.2. Условия применения . . . . .	75
4.3. Технические характеристики . . . . .	76
4.3.1. Постановка задачи на разработку программы . . . . .	76
4.3.2. Описание применяемых математических методов . . . . .	77
4.4. Описание функционирования программного обеспечения . . . . .	78
4.4.1. Модуль <i>Gen4DecompPrb</i> . . . . .	78
4.4.2. Модуль « <i>Decomp4Distr.exe</i> » . . . . .	80
4.5. Вычислительный эксперимент с комплексом SW2AM . . . . .	82

4.5.1.	Пример применения программы Gen4DecompPrb . . . . .	82
4.5.2.	Пример применения программы «Decomp4Distr.exe» . . . . .	83
4.6.	Пример численного анализа чувствительности результатов аппроксимации к погрешностям в исходных данных . . . . .	84
4.7.	Выводы по главе 4 . . . . .	89
<b>Глава 5. Программное обеспечение системы моделирования региональных грузоперевозок . . . . .</b>		<b>90</b>
5.1.	Требования к информационной системе . . . . .	90
5.2.	Обоснование выбора платформы для разработки . . . . .	90
5.3.	Описание системы. Пример использования . . . . .	92
5.4.	Выводы по главе 5 . . . . .	100
<b>Заключение . . . . .</b>		<b>101</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>105</b>
<b>Приложение А. . . . .</b>		<b>117</b>
<b>Приложение Б. Листинг с исходным текстом программы «Gen4DecompPrb.exe» . . . . .</b>		<b>118</b>
<b>Приложение В. Листинг с исходным текстом программы «Decomp4Distr.exe» . . . . .</b>		<b>123</b>

Приложение Г. Листинг с исходным текстом программы имитационного моделирования . . . . .	128
---	-----

## Введение

**Актуальность темы исследования.** Роль логистических центров постоянно возрастает. Важную роль в логистической системе играет транспорт, т.к. он определяет наиболее высокую стоимость связанных элементов в логистических системах. Функции транспорта проявляются в различных разделах логистических процессов, поэтому учёт взаимосвязи отношений между транспортными и логистическими предприятиями способствует повышению их эффективности, определяя общую производительность логистической системы.

Исследование логистической системы в широком смысле может помочь повысить их качество. С другой стороны, исследование транспортных систем дает более четкое представление о транспортных приложениях в логистической деятельности [10]. Оперативно управлять технологией транспортировки грузов позволяют терминально-складские комплексы.

Практически любая логистическая деятельность использует транспорт. Основным фактором, определяющим повышение конкурентоспособности компаний, является логистический менеджмент. Следовательно, сделать бизнес более эффективным и легким позволяют электронная коммерция и Интернет.

Математическое моделирование грузовых потоков в реальном времени требует большого количества вычислительных ресурсов [54, 65], совершенствования математических моделей и численных методов, разработки современного программного обеспечения. Широкомасштабная реализация и сокращение теневого сектора требуют решения задач учета и контроля за торговыми потоками, пошлинами и налогами. Чтобы обеспечить возможность моделирования потоков пользователям необходимо вводить свои данные, которые можно хранить на облачной платформе [31]. Поэтому программное обеспечение должно иметь как развитые математические и программные средства решения крупномасштабных задач, так и обеспечивать доступ к соответствующим наборам данных. Также важны средства сбора, хранения и доступа к статистическим данным об импорте, экспорте, расстоянии между транспортными узлами [52].

**Степень разработанности темы исследования.** Впервые задача транспортной маршрутизации сформулирована Г. Данцигом и Дж. Рамсером в 1959 году. В настоящее время сформулировано множество вариантов данной задачи [5], учитывающих различные ограничения. Для этих задач разработаны алгоритмы поиска оптимальных решений.

Проблемам разработки математических методов и моделей организации терминально-складских комплексов, грузового транспорта, а также их

использованию посвящены работы Б.А. Аникина [1], Д. Дж. Бауэрсокса [4], В. А. Демина [10], А. В. Бульбы [7], Д. Дж. Клосса [4], В. М. Курганова [13], Л. Б. Миротина [18], и др. Большая часть этих работ направлена на решение частных задач работы терминально-складских комплексов и грузового транспорта [10]. Следует также отметить, что использование эконометрических методов не дает средств оперативного решения возникающих проблем, в частности, проблемы оперативного управления организацией сетевого маркетинга. Указанные выше сведения обуславливают постановку цели и задач данного исследования.

**Цели и задачи диссертационной работы.** Целью исследования является развитие методов математического моделирования для решения проблем транспортной логистики на основе распределительной задачи линейного программирования.

Для достижения указанной цели поставлены следующие задачи:

- исследовать возможности и особенности применения распределительной задачи линейного программирования для математического моделирования на примерах:
  - оперативной проблемы распределения региональных грузоперевозок с возможностью транзита;
  - проблемы распределения заказов по логистическим центрам;



- разработать эффективные численные методы и алгоритмы решения указанных и близких задач, с учётом найденных особенностей;
- выполнить программную реализацию разработанных численных методов и алгоритмов, провести необходимые вычислительные эксперименты.

**Методология и методы исследования.** В работе использованы методы линейного программирования, теории графов, исследования операций, математическое и компьютерное моделирование.

**Научная новизна.**

- В области математического моделирования.
  - Разработан метод моделирования, основанный на линейной распределительной задаче, заключающийся в аппроксимации матрицы задачи разложимой матрицей, представляющей произведение столбца и строки, и последующему сведению исходной задачи к линейной транспортной задаче:
    - \* предложен метод моделирования проблемы оперативного планирования региональных грузоперевозок с учетом возможности транзита, проведено доказательство унимодулярности разложимой матрицы ограничений оперативной проблемы региональных грузоперевозок с возможностью транзита, что

позволило свести многопродуктовую распределительную задачу к однопродуктовой задаче построения потока минимальной стоимости;

\* разработан метод моделирования проблемы оперативного распределения товаров по логистическим центрам, включая систему поддержки принятия решения в случае несовместности ограничений возникающей проблемы.

- В области численных методов
  - Численные алгоритмы аппроксимации матрицы с положительными элементами в виде произведения столбца и строки, позволяющие реализовать разработанные методы моделирования.
  
- В области комплексов программ
  - Комплекс программ SW2AM для решения задачи аппроксимации матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга, проведены вычислительные эксперименты. Разработаны средства инкапсуляции комплекса программ SW2AM в табличный процессор MS EXCEL для решения оперативной проблемы региональных грузоперевозок.

**Теоретическая и практическая значимость.** Современные математические методы решения задач требуют решения линейных задач большой размерности. Чтобы снизить вычислительную сложность этих задач используется специальная структура соответствующих этим задачам матриц. Способ приближенной декомпозиции блоков матрицы с положительными элементами в виде произведения столбца и строки рассмотренный в данной работе может быть применен в задачах аэро-, гидро- и электродинамики, в прикладной статистике и логистике.

Теоретическая значимость работы заключается в универсальности разработанного в работе эффективного алгоритма наилучшей аппроксимации матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования разработанных алгоритмов специалистами отдела логистики и планирования, а также в учебном процессе.

### **Положения выносимые на защиту**

- Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п. 2 паспорта специальности 05.13.18).
  - Необходимость аппроксимации оперативной проблемы распределения региональных грузоперевозок с возможностью транзита и проблемы распределения заказов по логистическим центрам посред-

ством разложимой задачей, т.е. решения задачи аппроксимации матрицы с положительными элементами в виде произведения столбца и строки;

- Доказательство унимодулярности матрицы ограничений разложимой оперативной проблемы региональных грузоперевозок с возможностью транзита и сведение многопродуктовой распределительной задачи к однопродуктовой транспортной задаче.
- Способ организация системы поддержки принятия решения для разложимой проблемы оперативного распределения товаров по логистическим центрам в случае несовместности ее ограничений.
- Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (п. 3 паспорта специальности 05.13.18).
  - Численный алгоритм аппроксимации матрицы с положительными элементами в виде произведения столбца и строки (т.е. матрицей ранга 1) с вычислительной сложностью  $O(m \cdot n \cdot \log(m \cdot n))$ .
- Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента (п. 4 паспорта специальности 05.13.18).

- Комплекс программ SW2AM для решения задачи аппроксимации матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга, результаты вычислительных экспериментов с ним. Средства инкапсуляции комплекса программ SW2AM в табличный процессор MS EXCELL для решения оперативной проблемы региональных грузоперевозок.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность результатов исследования определяется корректным использованием современных математических методов и доказательств, успешными вычислительными экспериментами, а также докладами и обсуждениями на следующих конференциях:

1. Восьмая научная конференции аспирантов и докторантов ЮУрГУ. Февраль, 2016. г. Челябинск;
2. IV международная конференция «Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений». Май 2016 г., Уфа;
3. Симпозиум Института инженеров электротехники и электроники в области компьютерных приложений и промышленной электроники. Апрель 2018 г., о. Пенанг. <https://sites.google.com/site/iscaie2018/> ;

4. VII Международная конференция «Проблемы Оптимизации и их приложения» Optimization Problems and Their Applications (ОПТА-2018). Июль 2018 г. Омск. <http://opta18.oscsbras.ru> ;
5. 70-я конференция преподавателей и сотрудников ЮУрГУ. Май 2018 г Челябинск, ЮУрГУ.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 11 печатных работах, из них *три* статьи: [25], [57], [59], – в журналах из перечня ВАК по специальности 05.13.18; одна статья [24] в журнале из перечня ВАК по специальности 08.00.13, *одна* статья: [58] – в рецензируемых изданиях из наукометрических баз Scopus и Web of Science; *одна* зарегистрированная компьютерная программа [34]; *пять* статей: [19], [35], [36], [41], [60] – в сборниках трудов конференций.

**Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все представленные в диссертации результаты, опубликованные в работах с соавторами получены лично автором.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, библиографического списка, включающего 71 наименований, и 4 приложений, содержащих копию свидетельства о регистрации

программы и листинги с исходными текстами разработанных программ.

Общий объём диссертации 130 страниц.

**В первой главе** отмечено, что для поиска альтернативных способов развития региона разумно учитывать его экономическое и географическое положение. Например, географическое расположение города Мосул - это пограничная область, расположенная в треугольнике границы между Ираком и Турцией и Сирией. Город Мосул обладает достаточным потенциалом для того, чтобы занять свое место при транзите товаров из Турции в Ирак. Транзит является одной из перспективных тенденций роста экономики как пограничного города и Ирака в целом. Основными причинами открытия этой линии являются

- географическое расположение города;
- высокая стоимость транспортировки товаров в город из других районов;
- обеспечение развития инфраструктуры;
- проблемы с отслеживанием товаров, потерей товаров;
- отсутствие доверия со стороны посредников, затемнение системы грузовых перевозок.

Повысить качество логистики позволяет внедрение современных информационных технологий, адаптированных к конкретным характеристикам данного

региона. Для моделирования ротации межрегиональной торговли предлагается программный проект, основанный на многомерной модели международной торговли с использованием гравитационной модели транспортных издержек.

Рассмотрена типичная для практики ситуация, когда некоторый логистический центр осуществляет доставку грузов клиентам через промежуточные центры, причем каждый из промежуточных центров обслуживает свою группу клиентов. Приведена формальная постановка в виде четырехиндексной задачи линейного программирования транспортного типа. Отмечены особенности построенной задачи, которые могут позволить построить эффективный алгоритм ее решения и постоптимизационного анализа. Особенности рассматриваемой задачи являются интервальный характер ограничений и явно выраженное наличие четырех блоков. Целью дальнейшего исследования возможности построения эффективного алгоритма решения задачи и ее постоптимизационного анализа.

При оперативном планировании работы региональных логистических центров актуальной является задача оперативного обеспечения грузоперевозок заданных объемов различных товаров при заданных объемах различных транспортных средств.

Если имеется множество  $J$  логистических центров, множество  $R$  видов товаров, множество  $K$  видов транспорта, множество  $D = \{(i, j) : i, j \in J, i \neq j\}$



возможных коммуникаций, заданы обобщённые удельные объёмы  $\lambda^{rk}$  требуемые для перевозки единицы продукта  $r \in R$  на транспорте вида  $k \in K$ , допустимые безтранзитные объёмы  $R_{ij}^k$  перевозок от центра  $i \in J$  до центра  $j \in J$  транспортом вида  $k \in K$ . Тогда, если  $x_{ij}^{rk}$  – объем безтранзитных перевозок продукта  $r \in R$  от центра  $i \in J$  до центра  $j \in J$  транспортом вида  $k \in K$ , то возможно планирование безтранзитных перевозок на маршруте  $(i, j) \in D$  с помощью решения распределительной задачи линейного программирования

$$\min_{x, e} \left\{ \sum_{r \in R} c_{ij}^r e_{ij}^r \left| \begin{array}{l} \sum_{r \in R} \lambda^{rk} x_{ij}^{rk} \leq R_{ij}^k, \quad k \in K; \\ \sum_{k \in K} x_{ij}^{rk} + e_{ij}^r = E_{ij}^r, \quad r \in R; \\ x \geq 0, \quad e \geq 0 \end{array} \right. \right\}, \quad (i, j) \in D, \quad (1)$$

где  $E_{ij}^r$  – объем заказа на перевозку продукта  $r \in R$  от центра  $i \in J$  до центра  $j \in J$ ,  $e_{ij}^r \geq 0$  есть неудовлетворенная часть спроса, так как в общем случае возможен неудовлетворенный спрос, целевая функция определяет объём неустойки.

В случае планирования безтранзитных перевозок критичным является объёмы имеющихся транспортных средств, что в ряде случаев не позволяет выполнить заказы в полном объёме. Уменьшить объем невыполненных заказов позволяет использование транзитных перевозок. Расширение задачи

(1) планирования с учетом возможности транзитных перевозок имеет вид

$$\min_{z, x, e} \left\{ \sum_{(i,j) \in D} \left( \sum_{r \in R} c_{ij}^r e_{ij}^r \right) \left| \begin{array}{l} \sum_{r \in R} \lambda^{rk} x_{ij}^{rk} \leq R_{ij}^k, \quad k \in K, (i, j) \in D; \\ E_{ij}^r + \sum_{l: i \in D(l,j)} z_{lij}^r - \sum_{l \in D(i,j)} z_{ilj}^r = e_{ij}^r + \sum_{k \in K} x_{ij}^{rk}, \\ (i, j) \in D, r \in R; \\ z \geq 0, \quad x \geq 0, \quad e \geq 0 \end{array} \right. \right\}, \quad (2)$$

где  $z_{ilj}^r$  есть объем продукта  $r \in R$ , перенесенный с маршрута  $(i, j) \in D$  на транзитный маршрут  $(i, l, j)$ .

Задачи (1) и (2) является многоиндексными транспортно-распределительными задачами.

Если для всех  $k \in K$  и  $r \in R$  имеет место равенство  $\lambda^{rk} = \alpha_r \beta_k$ , то замена переменных  $\alpha_r x_{ij}^{rk} = y_{ij}^{rk}$ ,  $\alpha_r e_{ij}^r = f_{ij}^r$ ,  $\alpha_r z_{ij}^r = \zeta_{ij}^r$  позволяет от задачи (2) перейти к задаче

$$\min_{\zeta, y, f} \left\{ \sum_{(i,j) \in D} \left( \sum_{r \in R} \frac{c_{ij}^r}{\alpha_r} f_{ij}^r \right) \left| \begin{array}{l} - \sum_{r \in R} y_{ij}^{rk} \geq - \frac{R_{ij}^k}{\beta_k}, \quad k \in K, (i, j) \in D; \\ f_{ij}^r + \sum_{k \in K} y_{ij}^{rk} - \sum_{l: i \in D(l,j)} \zeta_{lij}^r + \sum_{l \in D(i,j)} \zeta_{ilj}^r = E_{ij}^r \alpha_r, \\ (i, j) \in D, r \in R; \\ \zeta \geq 0, \quad y \geq 0, \quad f \geq 0 \end{array} \right. \right\}. \quad (3)$$

Показано, что матрица ограничений задачи (3) является матрицей инцидентности орграфа с множеством вершин

$$V(G) = V_K(G) \cup V_R(G), \quad V_K(G) = (K \times D), \quad V_R(G) = (R \times D)$$

и множеством дуг

$$G : E(G) = E_{KR}(G) \cup E_{RR}(G), \quad E_{KR}(G) = ((K \times D) \times (R \times D)),$$

$$E_{RR}(G) = \{R \times \{((i, j), (l, j)) : (i, j) \in D, (l, j) \in D\}\}.$$

Таким образом, разложимость матрицы  $\{\lambda^{rk}\}_{r \in R, k \in K}$  удельных объёмов позволяет существенно повысить эффективность решения рассмотренных задач. Результаты первой главы опубликованы в работах [59], [57], [41], [35] и [19].

**Во второй главе** рассмотрена проблема распределения множества  $I$  товаров по множеству логистических центров  $J$ . Пусть  $x_{ij}$  – объем товара  $i \in I$ , распределенного в центр  $j \in J$ . Пусть  $p_{ij}$  – предельная прибыль от продажи единицы товара  $i \in I$  в центре  $j \in J$ . Пусть  $\lambda_{ij}$  – стоимость распределения единицы товара  $i \in I$  в центре  $j \in J$ . Пусть  $d_i$  – эффективный спрос на товар  $i \in I$ . Пусть  $b_j$  – ресурс для поддержания центра  $j \in J$ .

Формальная постановка задачи состоит в нахождении распределения товаров  $i \in I$  в центрах  $j \in J$ , для которых предельная прибыль максимальна

$$x^o = \arg \max_{x \in D} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij}, \quad (4)$$

эффективный спрос на все товары удовлетворен

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = d_i, \quad i \in I, \quad (5)$$

ресурсы для всех центров были достаточны

$$\sum_{i \in I} \lambda_{ij} x_{ij} \leq b_j, \quad j \in J, \quad (6)$$

выполнено условие неотрицательности

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (7)$$

Проблема (4) – (7) является известна как распределительная задача линейного программирования. В общем, для этой задачи не известны методы, учитывающие ее специфику, поэтому для ее решения применяются универсальные методы линейного программирования. Для крупномасштабных задач этот подход требует коммерческого программного обеспечения. Кроме того, если проблема (4)–(7) не имеет решения, то не ясен принцип принятия приемлемого решения для данного случая.

Работа представляет интерес еще и предложенными алгоритмами по решению задачи (4) – (7), которая заключается в расчете размещения и пересылки товара по центрам, логистически связанным в сеть. Это решение представляет интерес также потому, что здесь учитывается необходимость в системе поддержки для своевременного реагирования и принятых в реальном времени решений по внезапно возникшим вопросам или проблемам:

- представлен эффективный метод регулировать разложимую распределительную задачу, которая может быть сведена в данном случае в матричную транспортную задачу;
- в результате научного поиска найден и также представлен как результат данной работы алгоритм решения, позволяющий осуществить эффективную аппроксимацию неразложимой задачи в разложимую задачу;
- модель принятия решений также приобрела более свежий вид за счет использования новых критериев: «маржинальная прибыль» и «объем неудовлетворенного спроса», – что позволило привести расчеты к более объективной и адекватной оценке, соотносимой с действительным положением дел в большей степени.

В условиях, где допустимые фиксированные значения обесчечивающих экзогенную переменную допускают решать разложимую распределительную задачу, можно зафиксировать оптимальное решение по методу Парето.

Экзогенные переменные отличаются в научной традиции трудностью выбора для них конкретных значений, но данная проблема обычно формализуется с искажениями, и в рядовых случаях прибегают к вовлечению в ее решение того или иного лица, уполномоченного принимать решение. В

данной работе, алгоритмы, предлагаемые для реализации, могут быть легко инкапсулированы в программные продукты системы MS Office без потери своего основного функционала, что позволит в свою очередь значительно упростить алгоритм принятия решений.

Результаты второй главы опубликованы в работах [24], [58].

**В третьей главе** предложен эффективный алгоритм аппроксимации для матриц, включающих положительные элементы, матрицей, которую принято называть «матрицей единичного ранга», т. е. такой, которая бывает представлена как произведение столбца на строку. Данный алгоритм позволяет эффективно решать описанные в предыдущих главах задачи.

По большей части в современной традиции точных наук, таких как естествознание, техника, экономика, принято использовать математические методы решения задач, которые предусматривают линейную задачу большой размерности как основной способ достижения результата. Чтобы не так широко задействовать ресурсы и вычислительные мощности, часто применяются особые структуры матричного построения, которое отражает суть данных задач. Блочно-малоранговую матрицу можно считать удачным приближением по точности результатов к плотной матрице в формате рассмотрения малых параметров. Те блоки, которые представляют собой части малых рангов, могут быть представлены как результат умножения нескольких

матриц еще более малого порядка. Таким образом, разбиение крупных задач на последовательность быстро рассчитываемых мелких позволяет бережно обходиться с машинной памятью, чьи ресурсы тратятся не в таких больших разовых объемах. Актуальными для аэродинамических, гидродинамических, электродинамических задач, и в научной сфере, рассматривающей прикладную статистику и логистику являются методы включающие приближенную факторизацию блочно-малоранговых матриц, так как они способны давать приближенное решение и преобуславливание систем, в которых есть плотные матрицы.

Алгебраические методы часто бывают задействованы для построений по малопараметрическим представлениям матриц, в свою очередь обусловленных малоранговыми аппроксимациями того или иного блока.

Аппроксимацией блоков матрицы и положительных элементов матрицы, обладающей единичным рангом (являющейся произведением столбца и строки), достигается приближенное представление элемента к точному значению, которое, в свою очередь находится из ряда, включающего допустимые представления, минимизирующие среднее значение модулей логарифмов.

Для решения полученной задачи предложен алгоритм **Decomposition**.

## Алгоритм Decomposition

**Вход:**  $I, J, \Lambda = \{\lambda_{ij}\}_{i \in I, j \in J}$ ;

**Выход:**  $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in I}, \beta = \{\beta_j\}_{j \in J}, F_\Lambda(\alpha, \beta)$ ;

**Шаг 1.** (Построение матрицы  $\hat{\Lambda}$ ). Для каждой строки  $i \in I$  матрицы  $\Lambda$  выполнить:

- Определить порядковый номер элементов строки  $i \in I$  в отсортированном в порядке возрастания списке ее элементов

$$\Lambda[i] = \left\{ \lambda_{ij^{(k)}}^{(k)} : \right. \\ \left. k = 1, 2, \dots, |J|, j^{(k)} \in J, \lambda_{ij^{(1)}}^{(1)} \leq \lambda_{ij^{(2)}}^{(2)} \leq \dots \leq \lambda_{ij^{(|J|)}}^{(|J|)}, \right\}.$$

- Вычислить  $k_- = \left\lfloor \frac{|J|+1}{2} \right\rfloor, k_+ = \left\lceil \frac{|J|+1}{2} \right\rceil, \alpha_i = \sqrt{\lambda_{ij^{(k_+)}}^{(k_+)} \cdot \lambda_{ij^{(k_-)}}^{(k_-)}}.$
- Для  $k = 1, 2, \dots, |J|$  вычислить  $\hat{\lambda}_{ij^{(k)}}^{(k)} = \frac{\lambda_{ij^{(k)}}^{(k)}}{\alpha_i}.$

**Шаг 2.** (Построить матрицу  $\tilde{\Lambda}$ ). Для каждого столбца  $j \in J$  матрицы  $\hat{\Lambda}$  выполнить:

- Для элементов  $j \in J$  определить его порядковый номер в отсортированном в порядке возрастания списке его элементов

$$\hat{\Lambda}[*][j] = \left\{ \hat{\lambda}_{i^{(k)}j}^{(k)} : \right. \\ \left. k = 1, 2, \dots, |I|, i^{(k)} \in I, \hat{\lambda}_{i^{(1)}j}^{(1)} \leq \hat{\lambda}_{i^{(2)}j}^{(2)} \leq \dots \leq \hat{\lambda}_{i^{(|I|)j}}^{(|I|)} \right\}.$$



- Вычислить  $k_- = \left\lfloor \frac{|I|+1}{2} \right\rfloor$ ,  $k_+ = \left\lceil \frac{|I|+1}{2} \right\rceil$ ,  $\beta_j = \sqrt{\hat{\lambda}_{i^{(k_+)j}}^{(k_+)} \cdot \hat{\lambda}_{i^{(k_-)j}}^{(k_-)}}$ .
- Для  $k = 1, 2, \dots, |I|$  вычислить  $\tilde{\lambda}_{i^{(k)j}}^{(k)} = \frac{\hat{\lambda}_{i^{(k)j}}^{(k)}}{\beta_j}$ .

**Шаг 3.** (Нормализация).

- Вычислить  $c = \sqrt{\frac{\max_{i \in I} \alpha_i}{\max_{j \in J} \beta_j}}$ .
- Для всех  $i \in I$  вычислить  $\alpha_i = \alpha_i / c$ .
- Для всех  $j \in J$  вычислить  $\beta_j = \beta_j \cdot c$ .

**Шаг 4.** Вычислить  $F_\Lambda(\alpha, \beta) = \sum_{i \in I, j \in J} \left| \log \frac{\alpha_i \beta_j}{\lambda_{ij}} \right|$ .

**Шаг 5.** Вернуть  $\left\{ \alpha = \{\alpha_i\}_{i \in I}, \beta = \{\beta_j\}_{j \in J}, F_\Lambda(\alpha, \beta) \right\}$ .

**Окончание описания алгоритма.**

Показано, что алгоритм **Decomposition** решает задачу одноранговой аппроксимации  $m \times n$ -матрицы с положительными элементами. Его алгебраическая вычислительная сложность не превышает величины  $O(m \cdot n \cdot \log(m \cdot n))$ .

Результаты третьей главы опубликованы в работах [25, 58, 60].

**В четвертой главе** дано описание разработанного комплекса компьютерных программ SW2AM (Soft Ware to Approximate Matrixes) для задачи аппроксимации матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга.

Программный комплекс SW2AM содержит модуль Decomp4Distr для решения задачи аппроксимации заданной матрицы матрицей единичного ранга с оценкой точности, модуль Gen4DecomPrb для генерации тестовых примеров с известными решениями, и соответствующие вызывающие программы.

Исходными данными для модуля Decomp4Distr является матрица с положительными элементами. Исходными данными для модуля Gen4DecomPrb – размеры генерируемой задачи, число для инициализации датчика случайных чисел и уровень искажения.

Для каждого  $(m, n, e)$ -варианта генерировались матрицы

$$L^{(k)} = \left( A^{(k)\top} \cdot B^{(k)} \right) \otimes Er^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, 100,$$

для которых искалась наилучшая аппроксимация

$$\left( \widetilde{A^{(k)\top}}, \widetilde{B^{(k)}}, \widetilde{Er^{(k)}} \right) = \arg \min_{A \in R^{m^{(k)}}, B \in R^{n^{(k)}}, E \in R^{m^{(k)} \times n^{(k)}}} \left\{ \|E\| : L^{(k)} = (A^\top \cdot B) \otimes E \right\}, k = 1, 2, \dots, 100.$$

Результаты моделирования показывают:

- 1)  $\|Er\| > \left\| \mathbf{M} \widetilde{Er} \right\|$ , т.е., как и следовало ожидать, погрешность аппроксимации не превосходит уровень вводимой погрешности;
- 2) случайная погрешность (т.е. среднее квадратичное отклонение) более чем в пятьдесят раз ниже систематической погрешности (т.е. среднего значения).

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [34], [36].

**В пятой главе** сформулированы требования к системе математического моделирования товарных потоков: удобство использования, предоставление надежных и непротиворечивых данных, возможность интеграции и дальнейшего использования данных. Приведено обоснование выбора платформ MS Excel(VBA) и C++ в качестве среды разработки. В первом случае это удобный интерфейс и степень освоения персонала приложений Microsoft Office по сравнению с другими программными продуктами. Решающим фактором выбора C++ является кроссплатформенность и применимость для решения больших задач.

Предложенная система удовлетворяет требованиям надежности и целостности данных, то есть верифицирует правильность и непротиворечивость данных, вводимых пользователем. Система обеспечит эффективное решение планируемых задач, удобно пользователю с точки зрения пользовательского интерфейса.

Результаты пятой главы опубликованы в работе [57].

**В Заключении** подведены итоги исследования, даны рекомендации по использованию полученных результатов, намечены перспективы дальнейших исследований.

## Проблемы математического моделирования региональной транспортной логистики

Развитие транспортно-логистического комплекса стимулирует расширение интеграции в ЕАЭС. Новые производства и мобильная доступность трудовых ресурсов, рост транспортных транзитных перевозок по Союзу, задействующих международный транспортный коридор (так называемый МТК) «Восток-Запад» и «Север-Юг» [64] представляют лишь общие, генеральные следствия действия развитой инфраструктуры на территории страны.

Выстроенная, как система, инфраструктура открывает новые перспективы и возможности построения для формирования портфеля заказов другим секторам экономики, что в перспективе обеспечит качественное взаимодействие экономических систем стран, ускорит и усилит мультипликативные процессы в экономике.

## 1.1. Проблемы и перспективы применения информационных технологий в транспортной логистике

Последние сорок лет претерпели глубокие и далеко идущие изменения в функциях логистики: от тяжелой концентрации на физических процессах компании до целостного процесса и ориентированного на клиента управления. Это привело к постоянным исследованиям и вкладу математических приложений в логистику. Обзор развития логистики с течением времени и связанных с этим областей оптимизации представлен на рисунке 1 работы [39].

Классическая логистика в 1970-х годах была в основном связана с потоком материалов и товаров. Целью было гарантировать доступность материалов и товаров в процессе производства. 1980-е годы характеризовались развитием логистического менеджмента. Логистика имела функцию поперечного сечения с целью оптимизации функциональных комплексных последовательностей.

Управление логистикой оптимизирует логистические услуги путем комплексного учета ранее отдельно запланированных и возглавляемых функций.

Функциональная интеграция и комплексная интеграция компании - это две разработки, зафиксированные в 1990-х годах, когда произошла трансформация с функциональной точки зрения на перспективу, ориентированную

на поток. В центре внимания были построение и оптимизация цепочек процессов как функциональной интеграции, так и цепочек создания стоимости как комплексной интеграции компании. Сегодня логистика выходит за границы одной компании, и это глобальная интеграция цепочек создания стоимости. Горизонт логистики расширился от эффективного управления потоками материалов и товаров до комплексной, ориентированной на клиента оптимизации общих цепочек поставок. Логистика является стратегическим инструментом управления бизнесом и решающим фактором конкуренции [56]

Глобализация логистики, инновационные сетевые структуры и сотрудничество, растущий спрос на превосходные логистические услуги, растущий спрос на индивидуальные логистические решения, логистика как ключ к снижению затрат, тенденция «аутсорсинга», накопленные и усиленные правила безопасности, растущая важность интеллектуальных информационных и коммуникационных технологий, повышение требований к персоналу логистики, повышение гибкости труда, изменение экономической структуры с точки зрения логистики, устойчивое управление логистическими системами, интеграция логистики в бизнес-стратегии, конкурентные и локальные преимущества логистики. факторы для воздействия на логистику и вклад в устойчивое развитие [46]. Глобальная логистика влечет за собой компромиссы в расположении объекта, распределительных сетях, маршрутизации и

планировании поставок различными способами передвижения (например, воздух, вода, грузовик, рельс), закупки и общее управление международными цепочками поставок [40].

Чтобы понять вклад математики в логистику, полезно взглянуть на определения логистики, которые предлагались, несмотря на ее постоянное развитие. Современная логистика включает оперативную логистику, аналитическую логистику и управление производительными сетями. Задача оперативной логистики или четырех прав логистики гласит, что логистика должна наиболее эффективно предоставлять нужные количества товаров в нужном месте и в нужном порядке в нужное время.

Задачи аналитической логистики заключаются в проектировании оптимальных сетей поставок и логистических систем, разработке стратегий планирования, составления графиков и операций, а также организации эффективных процессов заказов и выполнения. В работе [20] отмечено, что задачи аналитической логистики заключаются в разработке и организации оптимальных процессов, структур, систем и сетей для оперативной логистики.

Логистическое управление зиждется на таких вещах, как планирование, внедрение и эксплуатация рабочих сетей, а в особенности распределение и прогнозирование получения заказов, добычи ресурсов и создания запасов.

Многие района Ирака на сегодняшний день не обладают выстроенной экономической структурой, она не может стать конкурентоспособной из-за несистематически выстроенного распределения, отсутствия логистики и ориентацию на невыгодные сектора экономики. По вышеперечисленным причинам, состояние кризиса в отдельных районах затрагивает социально-экономические сферы жизни населения.

Существует также связь с зависимостью региональной экономики от бывших секторов экономики (текстиль, кожа, черные металлы, уголь, растительные масла и т.п.). Их присутствие является фактором, способствующим дисбалансу регионального развития.

В городе Мосул уровень доходов на душу населения отличается от среднего уровня по Ираку. Кроме этого, имеется высокая степень зависимости местной экономики от сырья.

Мосул - большой город на севере Ирака. Мосул расположен примерно в 400 километрах к северу от Багдада и расположен на западном берегу реки Тигр, напротив древнего ассирийского города Ниневии на восточном побережье, и является вторым по численности населения городом в стране после Багдада. Мосул давно известен своей важностью как важного коммерческого центра, поскольку он является географическим положением



северных ворот в Ирак, а Мосул является пограничным треугольником, соединяющим Ирак с Турцией и Сирией.

Мосул был и остается центром крупнейших площадей производства зерна и других сельскохозяйственных продуктов, таких как бобовые и овощи в Ираке, и он стал называться иракской хлебной корзиной, где находится половина площадей, засеянных пшеницей, а Мосул обеспечивал эти продукты для остальной части страны. На город влияют хорошие и плохие сельскохозяйственные сезоны, поскольку экономический доход людей колеблется четко и влияет на многие аспекты его экономической жизни. Сельское хозяйство расширилось и диверсифицировалось после завершения некоторых ирригационных проектов на Мосульской плотине и реке Заб, а некоторые технические культуры, такие как кукуруза и хлопок, выращиваются в рамках традиционных и современных ирригационных систем.

Открытие нефти в Мосуле с тридцатых годов двадцатого века для города приобрело большое значение на международных рынках, будь то сырье или рафинированные продукты масла, а город также известен производством мягких хлопчатобумажных тканей, из которых происходит имя основателей, и известной хлопчатобумажной одежды. В Мосуле есть также самые важные сахарные заводы в Ираке, так как есть три цементных завода.

Транспорт является одним из важных экономических факторов для города Мосул во всех его типах. Первый поезд между Багдадом и Мосулом был проведен в 1940 году, когда Мосул находился на железной дороге Берлин-Багдад, а железнодорожный вокзал был построен в Мосуле, а из-за войн и напряженных отношений между Ираком и его соседями большинство поездов было из Мосула. Он направляется на юг в Багдад за счет Сирии и Турции. Однако международная служба возвращалась в определенные периоды, поэтому она вернулась в 2001 году нашей эры, а затем остановилась после условий в Ираке после 2003 года, то есть после американской оккупации Ирака до 2010 года нашей эры, затем она возобновила работу и поездки в турецкий город Газиантеп через Сирию, но спустя месяцы Эта линия была полностью остановлена из-за условий в городе Мосул, где она была оккупирована террористической организацией (ИГИЛ). Инфраструктура этой линии была разрушена, что привело к ее приостановке из эксплуатации.

У Мосула есть пять мостов, связывающих две стороны города, самый старый из которых относится ко времени английской эры, и Управление дорог и мостов мухафазы Мосул объявило, что скоро начнет строительство шестого моста.

Исходя из вышесказанного можно утверждать, что город Мосул расположен географически выгодно для использования его как перевалочного пункта

для транзитной доставки турецких товаров в Ирак. Перспектива его развития как транзитного центра должна быть учтена и как приоритетное направление для экономического развития. То, что Мосул является пограничным городом, а Ирак в целом – настоящей «пограничной страной», позволяет расширить взгляд на их экономические перспективы до общего и принять постулат о том, что транзитное сообщение может служить местом для заметного экономического роста города и всей страны.

Учет складских запасов [50] уже был разработан в достаточной степени для рынков внутри Ирака, однако транспортные компании, которые занимаются и проблемами транспортной логистики, не обеспечиваются современными средствами, такими как ПО (программное обеспечение), вовремя. Так, программа 1С [32] способна помочь развести потоки по складированию, но существует невыдуманная опасность потерять из поля зрения максимальную видимость расходов, а в перспективе расстаться и с правильностью их отображения, что сразу повлияет на управленческий учет и его факторы (такие, например, как маршрутизация потоков).

В свете этих обстоятельств становится понятен вновь активизировавшийся интерес к математическому моделированию, как инструменту создания адекватных расчетов по логистическим системам. Системы усложняются с каждым годом все больше, их задачи приобретают разветвленность, покрытие

маршрутами площадей также растет, поэтому возобновляется заинтересованность фирм, производств и компаний к деятельности аналитиков, способных создать системы, просчитываемые в нужном ключе и способные дать ответы по тем аспектам, которые интересуют заказчика за самое небольшое время. Чтобы осветить проблему целиком, мы обратимся к литературным источникам, описывающим применение инструментария математической науки для работы в сфере логистики и расчетных способов рассмотрения систем, приспособленных под логистические задачи. В работе [59] рассмотрен вклад математики для становления логистики и проиллюстрировано применение новых методов из аппарата математической науки в том, что касается логистики, перспектив ее развития, прогнозирования и успешного применения в разных областях знания.

Современные информационные технологии делают применение логистических данных и расчетов более доступным и подходящим для каждой отдельной области, в силу индивидуальной проработки требований [48]. В современном комплексе продуктов и услуг, разработанных для реализации решений по логистическим задачам, существует богатый выбор программного обеспечения, как пример – зарубежная программа Shipnet [67], которая может быть применима, однако в самом схематичном виде, так как в ее потенциале нет параметров для учета национальных особенностей логистики региона.

Поэтому ее применение ограничивается не самыми широкими областями, в основном, касающимися учета [49].

Пусть  $p \in \{1, 2, \dots, N\}$  – перевозимый продукт,  $\kappa \in \{1, 2, \dots, K\}$  – это вероятно используемые виды транспорта для перевозки,  $i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$  представляют возможные логистические центры. Гравитационная модель транспортных расходов может быть представлена следующим образом  $\hat{v}_{ij}^{p\kappa} = \exp\left(\hat{d}^{p\kappa} \Delta_{ij}\right)$  где  $\hat{v}_{ij}^p$  есть априорно заданный поток продукта  $p$  из центра  $i$  в центр  $j$ ,  $\Delta_{ij}$  есть оценка географического расстояния между центрами  $i$  и  $j$ ,  $\hat{d}^{p\kappa}$  есть параметры, отвечающие за чувствительность потока к расстоянию для  $p$  продукта и вида  $\kappa$  используемого для его перевозки транспорта.

В качестве допущения мы принимаем возможность того, что некоторая недоступность информации может существовать для отдельных групп. В случаях подобного стечения обстоятельств, предлагается использование подхода по моделированию транспортного потока наряду с другими транспортными потоками в общей сети коммуникаций, согласно которому происходит моделирование по принципу вероятнейшего значения распределений потоков [37, 55, 62]. Доработка такого подхода и приспособление его к модели по торговым потокам может вылиться в оптимизацию и минимизацию заданного нелинейного равенства:

$$\min_x \left[ \sum_{(i,j) \in J^2 \setminus \text{diag}(J^2)} \sum_{p=1}^N \sum_{\kappa=1}^K \left( x_{ij}^{p\kappa} \ln \left( \frac{\hat{v}_{ij}^{p\kappa}}{x_{ij}^{p\kappa}} \right) \right) \right] \quad (1.1)$$

где  $x_{ij}^{p\kappa}$  есть неизвестное количество продукта типа  $p$  доставленного из центра  $i$  в центр  $j$  транспортом вида  $\kappa$ ,  $\hat{v}_{ij}^p$  принимается как уже априорно определенный поток продуктов из центра  $i$  в центр  $j$ .

Вдобавок для баланса системы принимаются граничные условия для импорта/экспорта

$$\sum_{\kappa=1}^K \sum_{i=1}^M x_{ij}^{p\kappa} \geq \sum_{\kappa=1}^K \sum_{i=1}^M \hat{v}_{ij}^{p\kappa} = V_j^p, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad p = 1, 2, \dots, N, \quad (1.2)$$

$$\sum_{\kappa=1}^K \sum_{j=1}^M x_{ij}^{p\kappa} \geq \sum_{\kappa=1}^K \sum_{j=1}^M \hat{v}_{ij}^{p\kappa} = W_i^p, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad p = 1, 2, \dots, N, \quad (1.3)$$

$$x_{ij}^{p\kappa} \geq \varepsilon > 0, \quad i, j = 1, \dots, M, \quad p = 1, 2, \dots, N, \quad \kappa = 1, 2, \dots, K. \quad (1.4)$$

Ограничения (1.2)-(1.4) представлены в форме неравенств с целью учета торговых потоков в регионы, которые не учитываются в модели.

## 1.2. Математическая модель для решения оперативной проблемы региональных грузоперевозок

При оперативном планировании работы логистических центров актуальной является задача оперативного обеспечения грузоперевозок заданных объёмов различных товаров при заданных количествах различных транспортных средств [19].

### 1.2.1. Постановка задачи

Пусть имеется множество  $J$  логистических центров, множество  $R$  видов товаров, множество  $K$  видов транспорта. Будем рассматривать множество  $D = \{(i, j) : i, j \in J, i \neq j\}$  возможных коммуникаций. Пусть  $\lambda^{rk}$  есть обобщенный удельный объем требуемый для перевозки единицы продукта  $r \in R$  на транспорте вида  $k \in K$ ,  $R_{ij}^k$  есть допустимый безтранзитный объем перевозок от центра  $i \in J$  до центра  $j \in J$  транспортом вида  $k \in K$ . Таким образом, если  $x_{ij}^{rk}$  равен объему безтранзитных перевозок продукта  $r \in R$  от центра  $i \in J$  до центра  $j \in J$  транспортом вида  $k \in K$ , то необходимо выполнение ограничения

$$\sum_{r \in R} \lambda^{rk} x_{ij}^{rk} \leq R_{ij}^k, \quad (i, j) \in D, \quad k \in K. \quad (1.5)$$

Пусть  $E_{ij}^r$  равен объему заказа на перевозку продукта  $r \in R$  от центра  $i \in J$  до центра  $j \in J$ , т.е. объемы  $x_{ij}^{rk}$  безтранзитных перевозок продукта  $r \in R$  должны удовлетворять условию

$$E_{ij}^r = e_{ij}^r + \sum_{k \in K} x_{ij}^{rk}, \quad (i, j) \in D, \quad r \in R \quad (1.6)$$

где  $e_{ij}^r \geq 0$  есть неудовлетворенная часть спроса, так как в общем случае при для всех система ограничений (1.5)–(1.6) может оказаться несовместной.

Хотя неудовлетворенная часть текущего спроса может быть удовлетворена в

следующий период планирования, предприятие платит неустойку

$$P_{ij} = \sum_{r \in R} c_{ij}^r e_{ij}^r, \quad (i, j) \in D. \quad (1.7)$$

### 1.2.2. Безтранзитные перевозки

Изложенное выше показывает возможность планирования безтранзитных перевозок на маршруте  $(i, j) \in D$  с помощью решения распределительной задачи [27], [66] линейного программирования

$$\min_{x, e} \left\{ \sum_{r \in R} c_{ij}^r e_{ij}^r \left| \begin{array}{l} \sum_{r \in R} \lambda^{rk} x_{ij}^{rk} \leq R_{ij}^k, \quad k \in K; \\ \sum_{k \in K} x_{ij}^{rk} + e_{ij}^r = E_{ij}^r, \quad r \in R; \\ x \geq 0, \quad e \geq 0 \end{array} \right. \right\}, \quad (i, j) \in D \quad (1.8)$$

Задача (1.8)  $(i, j) \in D$  для каждой безтранзитной линии  $(i, j) \in D$  имеет  $|R| \cdot |K| + |R|$  переменных и  $|K| + |R|$  ограничений для неотрицательных переменных. Если для всех  $k \in K$  и  $r \in R$  имеет место равенство

$$\lambda^{rk} = \alpha_r \beta_k \quad (1.9)$$

то замена переменных  $\alpha_r x_{ij}^{rk} = y_{ij}^{rk}$ ,  $\alpha_r e_{ij}^r = f_{ij}^r$  позволяет от задачи (1.8)

перейти к задаче

$$\min_{y, f} \left\{ \sum_{r \in R} \frac{c_{ij}^r}{\alpha_r} f_{ij}^r \left| \begin{array}{l} \sum_{r \in R} y_{ij}^{rk} \leq \frac{R_{ij}^k}{\beta_k}, \quad k \in K; \\ \sum_{k \in K} y_{ij}^{rk} + f_{ij}^r = \alpha_r E_{ij}^r, \quad r \in R; \\ y \geq 0, \quad f \geq 0 \end{array} \right. \right\}, \quad (i, j) \in D \quad (1.10)$$



Задача (1.10) известна как транспортная задача в матричной постановке [27]. Для ее решения известны эффективные алгоритмы [21].

### 1.2.3. Введение транзитных маршрутов

Уменьшить суммарную величину неустойки

$$P = \sum_{(i,j) \in D} P_{ij} = \sum_{(i,j) \in D} \left( \sum_{r \in R} c_{ij}^r e_{ij}^r \right) \quad (1.11)$$

можно за счет введения транзитных маршрутов. Действительно, определим для каждого  $(i, j) \in D$  множество

$$D(i, j) = \{l \in J : (i, l), (l, j) \in D\} \quad (1.12)$$

логистических центров, через которые возможен транзитный маршрут  $(i, l, j) : (i, l), (l, j) \in D$ .

Пусть  $z_{ilj}^r$  есть объем продукта  $r \in R$ , перенесенный с маршрута  $(i, j) \in D$  на транзитный маршрут  $(i, l, j)$ . В случае возможности транзитных перевозок аналогом уравнения (1.6) баланса между заказом на перевозку  $E_{ij}^r$  и объемами  $x_{ij}^{rk} \geq 0$  перевозок является уравнение

$$E_{ij}^r + \sum_{l: i \in D(l, j)} z_{lij}^r - \sum_{l \in D(i, j)} z_{ilj}^r = e_{ij}^r + \sum_{k \in K} x_{ij}^{rk}, \quad (i, j) \in D, \quad r \in R \quad (1.13)$$

В (1.13) объем заказа модифицируется за счет включения в маршрут  $(i, j) \in D$  объемов транзита из более удаленных пунктов (первая сумма), и исключение транзита через менее удаленные пункты (вторая сумма).

Расширение задачи (1.8) планирования с учетом возможности транзитных перевозок имеет вид

$$\min_{z, x, e} \left\{ \sum_{(i,j) \in D} \left( \sum_{r \in R} c_{ij}^r e_{ij}^r \right) \left| \begin{array}{l} \sum_{r \in R} \lambda^{rk} x_{ij}^{rk} \leq R_{ij}^k, \quad k \in K, (i, j) \in D; \\ E_{ij}^r + \sum_{l: i \in D(l, j)} z_{lij}^r - \sum_{l \in D(i, j)} z_{ilj}^r = e_{ij}^r + \sum_{k \in K} x_{ij}^{rk}, \\ (i, j) \in D, r \in R; \\ z \geq 0, \quad x \geq 0, \quad e \geq 0 \end{array} \right. \right\} \quad (1.14)$$

Задача (1.14) является многоиндексной транспортной задачей, для ее решения известны специальные варианты симплекс-метода [27].

Если для всех  $k \in K$  и  $r \in R$  имеет место равенство (1.9), то замена переменных

$$\alpha_r x_{ij}^{rk} = y_{ij}^{rk}, \quad \alpha_r e_{ij}^r = f_{ij}^r, \quad \alpha_r z_{ij}^r = \zeta_{ij}^r$$

позволяет от задачи 1.14 перейти к задаче

$$\min_{\zeta, y, f} \left\{ \sum_{(i,j) \in D} \left( \sum_{r \in R} \frac{c_{ij}^r}{\alpha_r} f_{ij}^r \right) \left| \begin{array}{l} - \sum_{r \in R} y_{ij}^{rk} \geq -\frac{R_{ij}^k}{\beta_k}, \quad k \in K, (i, j) \in D; \\ f_{ij}^r + \sum_{k \in K} y_{ij}^{rk} - \sum_{l: i \in D(l, j)} \zeta_{lij}^r + \sum_{l \in D(i, j)} \zeta_{ilj}^r = \alpha_r E_{ij}^r, \\ (i, j) \in D, r \in R; \\ \zeta \geq 0, \quad y \geq 0, \quad f \geq 0 \end{array} \right. \right\} \quad (1.15)$$

**Теорема 1.** Матрица ограничений задачи (11) является матрицей инцидентности орграфа с множеством вершин

$$V(G) = V_K(G) \cup V_R(G), \quad V_K(G) = (K \times D), \quad V_R(G) = (R \times D)$$

и множеством дуг

$$G : E(G) = E_{KR}(G) \cup E_{RR}(G), \quad E_{KR}(G) = ((K \times D) \times (R \times D)),$$

$$E_{RR}(G) = \{R \times \{(i, j), (l, j)\} : (i, j) \in D, (l, j) \in D\}$$

**Доказательство.** Очевидно, что имеется взаимно-однозначное соответствие между вершинами  $\langle (i, j) \in D, k \in K \rangle$  орграфа  $G$  и ограничениями первой группы задачи (1.15), а также между вершинами  $\langle (i, j) \in D, r \in R \rangle$  орграфа  $G$  и ограничениями второй группы задачи (1.15). Таким образом установлено взаимно-однозначное соответствие между вершинами графа  $G$  и строками матрицы ограничений задачи (1.15).

Пусть  $i, j, l \in J, r \in R$ . Ненулевые элементы матрицы ограничений, соответствующие переменным  $z_{\pi}^r, r \in R$ , где  $\pi$  — перестановка попарно различных фиксированных  $i, j, l \in J$ , приведены в таблице 1.1.

Из таблицы видно, что при любом  $r \in R$  и любых попарно различных  $i, j, l \in J$  переменную  $z_{ijl}^r$  можно интерпретировать как поток по дуге  $\langle r, ((i, l), (j, l)) \rangle \in E_{RR}$ . Таким образом  $z$ -подматрица (содержащая только столбцы соответствующие переменным группы  $z$ ) матрицы задачи (1.15)

Таблица 1.1. The fragment of the incidence matrix of graph  $G$ 

Restrictions / Nodes	Variables / Arcs					
	$z_{ij}^r /$ $\langle r, \begin{matrix} (l,j) \\ (i,j) \end{matrix} \rangle$	$z_{ilj}^r /$ $\langle r, \begin{matrix} (i,j) \\ (l,j) \end{matrix} \rangle$	$z_{ijl}^r /$ $\langle r, \begin{matrix} (i,l) \\ (j,l) \end{matrix} \rangle$	$z_{lji}^r /$ $\langle r, \begin{matrix} (l,i) \\ (j,i) \end{matrix} \rangle$	$z_{jli}^r /$ $\langle r, \begin{matrix} (j,i) \\ (l,i) \end{matrix} \rangle$	$z_{jil}^r /$ $\langle r, \begin{matrix} (j,l) \\ (i,l) \end{matrix} \rangle$
$\langle r, (i, j) \rangle$	1	-1	0	0	0	0
$\langle r, (j, i) \rangle$	0	0	0	1	-1	0
$\langle r, (i, l) \rangle$	0	0	-1	0	0	1
$\langle r, (l, i) \rangle$	0	0	0	-1	1	0
$\langle r, (j, l) \rangle$	0	0	1	0	0	-1
$\langle r, (l, j) \rangle$	-1	1	0	0	0	0

является матрицей инцидентности подграфа  $G(V_R(G))$ . Очевидно, что данный подграф содержит все дуги из множества  $E_{RR}$  и только их.

Легко заметить, что  $y$ -подматрица является матрицей инцидентности суграфа  $H(E_{KR})$  орграфа  $G$  для всех дуг из множества дуг  $E_{KR}$ , не вошедшего в подграф  $G(V_R(G))$ . По построению орграф  $G$  и его матрица инцидентности являются соединением орграфов  $G(V_R(G))$ ,  $H(E_{KR})$  и их матриц инцидентности соответственно.

Теорема доказана.

Как известно, матрица инцидентности ориентированного графа является вполне унимодулярной [12, 12]. Следовательно, задача (1.15) имеет целочис-

ленное оптимальное решение при целочисленности правой части ее системы ограничений. В работе [21] изложены эффективные алгоритмы нахождения целочисленного оптимального решения для задач большой размерности.

### 1.3. Выводы к первой главе

Инновационные реформы в работе логистических центров, такие, как своевременное обновление ПО, отчетливо и положительно влияют на динамику развития многих областей. Например, внешняя торговля, транспортная инфраструктура, региональная политика региона. Своевременно обновленное ПО помогает отвечать на вызовы времени как отдельному предприятию, так и государственной структуре, принимать необходимые и выгодные решения для дальнейшего экономического роста. Все это в свою очередь влияет на устойчивость положительной динамики развития области в целом, а также напрямую воздействует на привлекательность данного региона как области инвестирования старым партнерам и новым инвесторам.

Особенностями задач региональной транспортной логистики являются интервальный характер ограничений и явно выраженная многоиндексность. Необходимо развивать методы решения и постоптимизационного анализа таких задач.

Предложенная математическая модель для решения оперативной проблемы региональных многопродуктовых грузоперевозок в форме разложимой задачи (1.10) в силу доказанной выше теоремы 1 сводится к однопродуктовой транспортной задаче в сетевой постановке, следовательно имеет целочисленное оптимальное решение при целочисленности правой части ее системы ограничений. Известны эффективные алгоритмы нахождения целочисленного оптимального решения подобных задач большой размерности.

Требуется разработка алгоритмов аппроксимации задачи (1.14) разложимой задачей (1.10). Для этого необходимо решить проблему аппроксимации матрицы удельных объемов матрицей единичного ранга, т.е. матрицей представимой в виде произведения столбца на строку.

## Глава 2

## Математическая модель распределения товаров по логистическим центрам

Предприятие представляет собой сложную и динамичную систему, активно взаимодействующую с внешней средой [15, 54]. В настоящее время эффективное управление логистикой признано ключевым фактором повышения эффективности компаний и их конкурентоспособности [9, 68]. В. Г. Будашевский и О. Н. Пастухова [6] предлагают конструктивный сравнительный анализ методов и моделей для оценки спроса, используемого в экономике и маркетинге, и системных технологий для анализа и прогнозирования потребительских предпочтений. И. А. Баев и Д. А. Дрозин [3] рассматривают вопросы динамики потребительского спроса. А. Л. Левина отмечает [16], что эти методы не предоставляют средств для быстрого решения множества возникающих проблем, в частности для эффективного оперативного управления организацией сетевого маркетинга.

В работах автора [24?] предложены алгоритмы анализа и решения проблемы распределения товаров логистическими центрами, в том числе система поддержки принятия решений в случае выявленной возникающей

проблемы. Программная реализация этих алгоритмов легко инкапсулирована в систему MS Office [53].

В первом разделе дана формальная постановка проблемы и введены основные обозначения. Во втором разделе рассмотрен разложимый случай задачи, приводимый к транспортной задаче в матричной постановке. В третьем разделе предложен метод регуляризации разложимой задачи. В четвертом разделе предлагается метод аппроксимации исходной задачи разложимой задачей.

## 2.1. Постановка задачи

Рассматривается проблема распределения множества  $I$  товаров по множеству логистических центров  $J$ . Пусть  $x_{ij}$  – объем товара  $i \in I$ , распределенного в центр  $j \in J$ . Пусть  $p_{ij}$  – предельная прибыль от продажи единицы товара  $i \in I$  в центре  $j \in J$ . Пусть  $\lambda_{ij}$  – стоимость распределения единицы товара  $i \in I$  в центре  $j \in J$ . Пусть  $d_i$  – эффективный спрос на товар  $i \in I$ . Пусть  $b_j$  – ресурс для поддержания центра  $j \in J$ . Формальная постановка задачи состоит в нахождении распределения товаров  $i \in I$  в центрах  $j \in J$ , для которых предельная прибыль максимальна

$$x^o = \arg \max_{x \in D} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij}, \quad (2.1)$$



эффективный спрос на все товары удовлетворен

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = d_i, \quad i \in I, \quad (2.2)$$

ресурсы для всех центров были достаточны

$$\sum_{i \in I} \lambda_{ij} x_{ij} \leq b_j, \quad j \in J, \quad (2.3)$$

выполнено условие неотрицательности

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (2.4)$$

Проблема (2.1)-(2.4) является известна как распределительная задача линейного программирования. В общем, для этой задачи не известны методы, учитывающие ее специфику, поэтому для ее решения применяются универсальные методы линейного программирования. Для крупномасштабных задач этот подход требует коммерческого программного обеспечения. Кроме того, если проблема (2.1)-(2.4) не имеет решения, то не ясен принцип принятия приемлемого решения для данного случая.

## 2.2. Разложимый случай

В некоторых случаях параметр  $\lambda_{ij}$  может быть представлен как произведение

$$\lambda_{ij} = \alpha_i \cdot \beta_j, \quad i \in I, \quad j \in J \quad (2.5)$$

где  $\alpha_i$  – ресурсоемкость товара  $i \in I$  в условных единицах,  $\beta_j$  – стоимость обслуживания условной единицы в центре  $j \in J$ . Этот случай проблемы (2.1)–(2.4) называют разложимым.

Разложимая задача (2.1)–(2.4) сводится к транспортной задаче в матричной постановке. Действительно, для всех  $j \in J$  имеем

$$\left( \sum_{i \in I} \lambda_{ij} x_{ij} \leq b_j \right) \Leftrightarrow \left( \sum_{i \in I} \alpha_i \beta_j x_{ij} \leq b_j \right) \Leftrightarrow \left( \sum_{i \in I} \alpha_i x_{ij} \leq \frac{b_j}{\beta_j} \right) \Leftrightarrow \left( \sum_{i \in I} y_{ij} \leq \frac{b_j}{\beta_j} \right),$$

где  $y_{ij} = \alpha_i \cdot x_{ij}$  для всех  $i \in I, j \in J$ . Замена переменных  $y_{ij} = \alpha_i \cdot x_{ij}$  for all  $i \in I, j \in J$  в задаче (2.1)–(2.4) дает

$$\left( \sum_{j \in J} x_{ij} = d_i \right) \Leftrightarrow \left( \sum_{j \in J} \alpha_i x_{ij} = d_i \right) \Leftrightarrow \left( \sum_{j \in J} y_{ij} = d_i \alpha_i \right), \quad i \in I,$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \frac{p_{ij} y_{ij}}{\alpha_i}.$$

Таким образом задача (2.1)–(2.4) эквивалентна следующей

$$y^o = \arg \max_{x \in D} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \frac{p_{ij} y_{ij}}{\alpha_i}, \quad (2.6)$$

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = d_i \alpha_i, \quad i \in I \quad (2.7)$$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} \leq \frac{b_j}{\beta_j}, \quad j \in J, \quad (2.8)$$

$$y_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J. \quad (2.9)$$

Задача (2.6)-(2.9) является открытой матричной транспортной задачей [27, 66].

Инкапсулированное в системном программном обеспечении MS Office решение таких задач большой размерности известно [53].

### 2.3. Регуляризация

Задача (2.6)-(2.9) (а следовательно и задача (2.1)-(2.4)) имеет решение когда спрос не превышает предложение

$$S = \sum_{i \in I} d_i \alpha_i - \sum_{j \in J} \frac{b_j}{\beta_j} \leq 0.$$

В противном случае (т.е. если  $S > 0$ ), задачи (2.1)-(2.4) и (2.6)-(2.9) не имеют допустимых решений, поэтому корректировка исходной задачи, чтобы найти подходящее решение.

Возможные способы настройки условий этих задач:

1. Позволить поставку всего товара ниже эффективного спроса

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = d_i \alpha_i - y_{i0}, \quad y_{i0} \geq 0, \quad i \in I;$$

2. Совершенствовать инфраструктуру всех маршрутов для эффективной поддержки эффективного спроса

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = \frac{b_j}{\beta_j} + y_{0j}, \quad y_{0j} \geq 0, \quad j \in J,$$

где  $y_{0j}$  – объем инвестиций (в условных единицах) при разработке маршрута  $j \in J$ .

Пусть  $k_i$  – допустимая доля неудовлетворенного спроса на товар  $i \in I$  (i.e.  $y_{i0} \leq k_i d_i$ ). Пусть  $p_{0j}$  – сумма инвестиций, необходимых для расширения ресурсов центра  $j \in J$  на одну условную единицу.

Рассмотрим исправленную задачу с учетом переменных и ограничений, введенных в этом разделе.

$$y^o = \arg \max_{y \in D} \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} \frac{p_{ij} y_{ij}}{\alpha_i} - p_{0j} y_{0j} \right), \quad (2.10)$$

$$\sum_{j \in J} y_{ij} + y_{i0} = d_i \alpha_i, \quad i \in I, \quad (2.11)$$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} - y_{0j} = \frac{b_j}{\beta_j}, \quad j \in J, \quad (2.12)$$

$$y_{i0} \leq k_i d_i \alpha_i, \quad i \in I, \quad (2.13)$$

$$y_{ij}, y_{i0}, y_{0j} \geq 0, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (2.14)$$

Задача (2.10)-(2.14) является закрытой транспортной задачей в матричной постановке [27]. Известно инкапсулированное в систему MS Office [53] программном обеспечении решение таких задач большой размерности.

Очевидно, что задача (2.10)-(2.14) имеет оптимальное решение. Регуляризация осуществлена введением дополнительных эндогенных переменных  $y_{i0}, y_{0j} \geq 0, i \in I, j \in J$ , экзогенных переменных  $k_i, i \in I$  и константы  $p_{0j}, j \in J$ .

Из построенной модели видно, что поддержание эффективного спроса по фиксированным ценам приводит к уменьшению предельной прибыли. Сохранение предельной прибыли требует увеличения отпускной цены на товары, что может привести к необратимому снижению спроса и снижению предельной прибыли. Таким образом, возникает задача принятия решений в условиях риска и неопределенности. В этом случае управляемыми параметрами являются экзогенные переменные  $k_i$ ,  $i \in I$ .

Будем использовать предельную прибыль  $M$  и сумму неудовлетворенного спроса  $S$  в качестве критериев в модели принятия решений. Очевидно, что все решения задачи (2.10)-(2.14) являются оптимальными по Парето для фиксированных значений экзогенных переменных  $k_i$ ,  $i \in I$ . Проблема выбора конкретных значений этих переменных трудно формализовать и требует участия лица, принимающего решения (ЛПР).

## 2.4. Выводы к второй главе

Предлагаемые алгоритмы решают проблемы анализа распределения товаров логистическими центрами, в том числе позволяют выработать рекомендации для системы поддержки принятия решений в случае несовместности системы ограничений задачи.

Требуется разработка алгоритмов аппроксимации задачи (2.1)-(2.4) разложимой задачей. Для этого необходимо решить проблему аппроксимации матрицы удельных объемов матрицей единичного ранга, т.е. матрицей представимой в виде произведения столбца на строку.

## Аппроксимация матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга

Большинство современных математических методов решения задач естествознания, техники, экономики требуют решения линейных задач большой размерности. Для понижения вычислительной сложности используется специальная структура матриц, соответствующих этим задачам. За данной структурой лежит следующий общий физический смысл:

- строки и столбцы таких матриц ассоциированы с некоторыми элементами в пространстве,
- задана некоторая функция взаимодействия этих элементов,
- если функция взаимодействия асимптотически гладкая, то взаимодействие разнесённых в пространстве групп элементов можно приблизить малым числом параметров [70] (критерий разделения).

Таким образом, блоки, ассоциированные с хорошо разделёнными в пространстве группами элементов, обладают малым рангом.

Методы приближенной факторизации блочно-малоранговых матриц могут быть применены [28, 69] в задачах аэро , гидро- и электродинамики, а также в прикладной статистике и логистике.

Известны алгебраические методы построения малопараметрических представлений матриц, основанные на малоранговых аппроксимациях отдельных блоков [29, 45, 47]. В данной работе рассмотрен эффективный способ аппроксимации блоков матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга, т. е. в виде произведения столбца на строку.

В первом разделе дана постановка аппроксимирующей задачи. Во втором разделе дано описание алгоритма решения аппроксимирующей задачи и приведен пример, иллюстрирующий работу алгоритма. В третьем разделе установлена биекция между аппроксимирующей задачей и транспортной задачей в матричной постановке и алгоритмами их решения. Дано доказательство результативности предложенных алгоритмов и доказано, что их вычислительная сложность равна  $O(mn \log(mn))$ .

### 3.1. Постановка аппроксимирующей задачи

Пусть дана матрица  $\Lambda = \{\lambda_{ij} > 0 : i \in I, j \in J\}$ . Рассматриваемая задача состоит в нахождении таких матриц  $\mathbf{A} = \{\alpha_i > 0 : i \in I\}$  и  $\mathbf{B} = \{\beta_j > 0 : j \in J\}$ , что  $\Lambda = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$ , т.е. разложения матрицы в произведения



столбца и строки. Данная задача эквивалентна нахождению решения системы алгебраических уравнений .

$$\lambda_{ij} = \alpha_i \beta_j, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (3.1)$$

Понятно, что при произвольных положительных значениях данная система уравнений может оказаться несовместной.

Для построения аппроксимирующей задачи воспользуемся методом наименьших модулей [14, 17, 23]. Введем функцию

$$F_\lambda(\alpha, \beta) = \frac{1}{|I| \cdot |J|} \sum_{i \in I, j \in J} \left| \log \frac{\alpha_i \beta_j}{\lambda_{ij}} \right|, \quad (3.2)$$

значение которой равно среднему значению модулей логарифмов отношения приближенно-го значения элемента матрицы к точному значению этого элемента.

Очевидно, что  $\inf F_\lambda = 0$  тогда и только тогда, когда система уравнений (3.1) совместна. Из неотрицательности функции  $F_\lambda$  следует, что значение  $\inf F_\lambda$  можно рассматривать как степень несовместности системы (3.1). При  $\lambda > 0$  функция  $F(\lambda)$  является непрерывной в окрестности любого минимума, поэтому инфимум достигается, а оптимальным приближенным решением системы (3.1) с минимальной степенью несовместности можно считать

$$(\alpha^0, \beta^0) = \arg \min_{\substack{\{\beta_j > 0: j \in J\} \\ \{\alpha_i > 0: i \in I\}}} \left[ \sum_{i \in I, j \in J} \left| \log \frac{\alpha_i \beta_j}{\lambda_{ij}} \right| \right]. \quad (3.3)$$

Легко заметить, что из оптимальности решения  $(\alpha^o, \beta^o)$  следует оптимальность множества решений  $D = \{(\alpha^o \cdot c, \beta^o/c) : c > 0\}$ . Мы будем считать решением аппроксимирующей задачи

$$(\alpha^*, \beta^*) = \arg \min_{(\alpha, \beta) \in D} \|(\alpha, \beta)\|_\infty \quad (3.4)$$

Заметим, что если  $(\alpha, \beta) \in D$  то

$$\alpha^* = \left\{ a_k \cdot \sqrt{\frac{\max_{j \in J} \beta_j}{\max_{i \in I} \alpha_i}} \right\}_{k \in I}, \quad \beta^* = \left\{ \beta_k \cdot \sqrt{\frac{\max_{i \in I} \alpha_i}{\max_{j \in J} \beta_j}} \right\}_{k \in J}. \quad (3.5)$$

Таким образом, корректная постановка аппроксимирующей задачи является двухуровневой, но для ее решения достаточно найти любое решение задачи (3.3) нижнего уровня.

## 3.2. Алгоритм решения задачи

Представленный далее алгоритм решает задачу (3.4).

Алгоритм **Decomposition**

**Вход:**  $I, J, \Lambda = \{\lambda_{ij}\}_{i \in I, j \in J}$ ;

**Выход:**  $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in I}, \beta = \{\beta_j\}_{j \in J}, F_\Lambda(\alpha, \beta)$ ;

**Шаг 1.** (Построение матрицы  $\hat{\Lambda}$ ). Для каждой строки  $i \in I$  матрицы  $\Lambda$  выполнить шаги 1.1, 1.2 и 1.3, затем перейти на шаг 2.

**Шаг 1.1.** Для элементов каждой строки  $i \in I$  определить порядковый номер в отсортированном в порядке возрастания списке элементов

данной строки

$$\Lambda [i] = \left\{ \lambda_{ij^{(k)}}^{(k)} : \right. \\ \left. k = 1, 2, \dots, |J|, j^{(k)} \in J, \lambda_{ij^{(1)}}^{(1)} \leq \lambda_{ij^{(2)}}^{(2)} \leq \dots \leq \lambda_{ij^{(|J|)}}^{(|J|)}, \right\}.$$

**Шаг 1.2.** Вычислить  $k_- = \left\lfloor \frac{|J|+1}{2} \right\rfloor$ ,  $k_+ = \left\lceil \frac{|J|+1}{2} \right\rceil$ ,  $\alpha_i = \sqrt{\lambda_{ij^{(k_+)}}^{(k_+)} \cdot \lambda_{ij^{(k_-)}}^{(k_-)}}$ .

**Шаг 1.3.** Для  $k = 1, 2, \dots, |J|$  вычислить  $\hat{\lambda}_{ij^{(k)}}^{(k)} = \frac{\lambda_{ij^{(k)}}^{(k)}}{\alpha_i}$ .

**Шаг 2.** (Построить матрицу  $\tilde{\Lambda}$ ). Для каждого столбца  $j \in J$  матрицы  $\tilde{\Lambda}$  выполнить шаги 2.1, 2.2 и 2.3, затем перейти на шаг 3.

**Шаг 2.1.** Для элементов каждого столбца  $j \in J$  определить порядковый номер в отсортированном в порядке возрастания списке элементов данного столбца

$$\hat{\Lambda} [*] [j] = \left\{ \hat{\lambda}_{i^{(k)}j}^{(k)} : \right. \\ \left. k = 1, 2, \dots, |J|, j^{(k)} \in J, \hat{\lambda}_{i^{(1)}j}^{(1)} \leq \hat{\lambda}_{i^{(2)}j}^{(2)} \leq \dots \leq \hat{\lambda}_{i^{(|J|)j}}^{(|J|)} \right\}.$$

**Шаг 2.2.** Вычислить  $k_- = \left\lfloor \frac{|I|+1}{2} \right\rfloor$ ,  $k_+ = \left\lceil \frac{|I|+1}{2} \right\rceil$ ,  $\beta_j = \sqrt{\hat{\lambda}_{i^{(k_+)j}^{(k_+)}} \cdot \hat{\lambda}_{i^{(k_-)j}^{(k_-)}}$ .

**Шаг 2.3.** Для  $k = 1, 2, \dots, |I|$  вычислить  $\tilde{\lambda}_{i^{(k)}j}^{(k)} = \frac{\hat{\lambda}_{i^{(k)}j}^{(k)}}{\beta_j}$ .

**Шаг 3.** (Нормализация). Выполнить шаги 3.1, 3.2, и 3.3, затем перейти на шаг 4.

**Шаг 3.1.** Вычислить  $c = \sqrt{\frac{\max_{i \in I} \alpha_i}{\max_{j \in J} \beta_j}}$ .

**Шаг 3.2.** Для всех  $i \in I$  вычислить  $\alpha_i = \alpha_i / c$ .

**Шаг 3.3.** Для всех  $j \in J$  вычислить  $\beta_j = \beta_j \cdot c$ .

**Шаг 4.** Вычислить  $F_\Lambda(\alpha, \beta) = \sum_{i \in I, j \in J} \left| \log \frac{\alpha_i \beta_j}{\lambda_{ij}} \right|$ .

**Шаг 5.** Вернуть  $\left\{ \alpha = \{\alpha_i\}_{i \in I}, \beta = \{\beta_j\}_{j \in J}, F_\Lambda(\alpha, \beta) \right\}$ .

**Окончание описания алгоритма.**

### 3.2.1. Пример

Пусть исходная матрица следующий имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3.2 & 8.8 & 15 & 3 & 6 \\ 3.8 & 12 & 21 & 4 & 7.5 \\ 1.5 & 2 & 5.8 & 2 & 3 \\ 1.5 & 8 & 7 & 1.5 & 3.8 \end{pmatrix}$$

Результат выполнения шага 1.1 представлен в таблице [3.1](#).

Значения элементов в скобках равны их порядковому номеру в списке элементов каждой строки отсортированном в порядке возрастания их величины.

Результат выполнения шага 1.2 представлен в таблице [3.2](#)

Таблица 3.1. Результат выполнения шага 1.1

$i$	$j$					$k_-$	$k_+$	$\alpha_i$
	1	2	3	4	5			
1	3.2(2)	8.8(4)	15(5)	3(1)	6(3)	5	5	6
2	3.8(1)	12(4)	21(5)	4(2)	7.5(3)	5	5	7.5
3	1.5(1)	2(2)	5.8(5)	2(3)	3(4)	2	4	2
4	1.5(1)	8(5)	7(4)	1.5(2)	3.8(3)	5	5	3.8

Таблица 3.2. Результат выполнения шага 1.2

$i$	$j$					$k_-$	$k_+$	$\alpha_i$
	1	2	3	4	5			
1	3.2(2)	8.8(4)	15(5)	3(1)	6(3)	5	5	6
2	3.8(1)	12(4)	21(5)	4(2)	7.5(3)	5	5	7.5
3	1.5(1)	2(2)	5.8(5)	2(3)	3(4)	2	4	2
4	1.5(1)	8(5)	7(4)	1.5(2)	3.8(3)	5	5	3.8

Таблица 3.3. Результат выполнения шага 2

$i$	$j$				
	1	2	3	4	5
1	0.5333(3)	1.4667(2)	2.5(2)	0.5(2)	1
2	0.5067(2)	1.6(3)	2.8(3)	0.5333(3)	1
3	0.75(4)	1(1)	2.9(4)	1(4)	1.5
4	0.39474(1)	2.1053(4)	1.8421(1)	0.3947(1)	1
$k_-$	2	1	1	1	1
$k_+$	1	2	2	2	4
$\beta$	0.5198	1.5319	2.6457	0.5164	1

Матрица  $\hat{\Lambda}$ , полученная в результате выполнения шага 1.2 имеет вид

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0.5333 & 1.4667 & 2.5 & 0.5 & 1 \\ 0.5067 & 1.6 & 2.8 & 0.5333 & 1 \\ 0.75 & 1 & 2.9 & 1 & 1.5 \\ 0.39474 & 2.1053 & 1.8421 & 0.3947 & 1 \end{pmatrix}$$

Результат выполнения шага 2 представлен в таблице 3.3. Значения элементов в скобках равны их порядковому номеру в списке элементов каждого столбца отсортированном в порядке возрастания их величины.

Матрица  $\tilde{\Lambda}$ , полученная в результате выполнения шага 2 имеет вид

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1.0260 & 0.9574 & 0.9449 & 0.9682 & 1 \\ 0.9747 & 1.0445 & 1.0583 & 1.0328 & 1 \\ 1.4428 & 0.6528 & 1.0961 & 1.9365 & 1.5 \\ 0.7594 & 1.3743 & 0.6962 & 0.7644 & 1 \end{pmatrix}$$

В результате выполнения шагов 1 и 2 вычисляются ненормированные значения

$$\alpha^T = (6, 7.5, 2, 3.8), \quad \beta^T = (0.5198, 1.5319, 2.6457, 0.5164, 1)$$

На шаге 3 вычисляется нормирующий множитель

$$c = \sqrt{\frac{\max_{i \in I} \alpha_i}{\max_{j \in J} \beta_j}} = \sqrt{\frac{7.5}{2.6457}} = 1.6837.$$

и нормированные значения

$$\alpha^{*T} = (3.5637, 4.4546, 1.1879, 2.2570),$$

$$\beta^{*T} = (1.0379, 2.0390, 4.4546, 0.8694, 2.0621),$$

представляющие искомое разложение:

$$\alpha^{*T} \cdot \beta^{*T} = \begin{pmatrix} 3.6986 & 7.2663 & 15.8745 & 3.0983 & 7.3484 \\ 4.6233 & 9.0829 & 19.8431 & 3.8729 & 9.1855 \\ 1.2328 & 2.4221 & 5.29150 & 1.0327 & 2.4494 \\ 2.3424 & 4.6020 & 10.0538 & 1.9623 & 4.6540 \end{pmatrix}.$$

### 3.3. Доказательство результативности алгоритма

В данном разделе установлена биекция между аппроксимирующей задачей и транспортной задачей в матричной постановке и алгоритмами их решения. Результатом является доказательство следующей далее теоремы 2.

**Теорема 2.** *Алгоритм Decomposition находит решение задачи (3.2). Его алгебраическая вычислительная сложность не превышает величины  $O(|I| \cdot |J| \cdot \log(|I| \cdot |J|))$ .*

**Доказательство.** Монотонность логарифмической функции влечет

$$\begin{aligned} \left( \log \frac{\alpha_i \beta_j}{\lambda_{ij}} = 0 \right) &\Leftrightarrow (-\log \lambda_{ij} + \log \alpha_i + \log \beta_j = 0) \\ &\Leftrightarrow (-l_{ij} + x_i - y_j = 0, \quad l_{ij} = \log \lambda_{ij}, \quad x_i = \log \alpha_i, \quad y_j = \log \beta_j), \quad i \in I, j \in J, \end{aligned}$$

Поэтому задача (3.2) эквивалентна задаче

$$(x^o, y^o) = \arg \min_{\substack{x \in \mathbf{R}^{|I|} \\ y \in \mathbf{R}^{|J|}}} \sum_{i \in I, j \in J} |-l_{ij} + x_i - y_j| \quad (3.6)$$

и имеется взаимно-однозначное соответствие между решениями этих задач.

Задача (3.6) эквивалентна задаче линейного следующей программирования

$$\sum_{i \in I, j \in J} w_{ij} \rightarrow \min_{x, y, w} \quad (3.7)$$

$$-w_{ij} \leq -l_{ij} + x_i + y_j \leq w_{ij}, \quad w_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J. \quad (3.8)$$



Двойственной задачей для (3.7)-(3.8) является задача

$$\sum_{i \in I, j \in J} l_{ij} (f_{ij} - f_{ji}) \rightarrow \max_f, \quad (3.9)$$

$$\sum_{j \in J} (f_{ij} - f_{ji}) = 0, \quad i \in I, \quad (3.10)$$

$$\sum_{i \in I} (f_{ij} - f_{ji}) = 0, \quad j \in J, \quad (3.11)$$

$$f_{ij} + f_{ji} \leq 1, \quad f_{ij}, f_{ji} \geq 0, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (3.12)$$

Сделав замену переменных  $g_{ij} = f_{ij} - f_{ji}$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$  в задаче (3.9)-(3.12)

получаем задачу построения циркуляции минимального веса

$$\sum_{i \in I, j \in J} l_{ij} g_{ij} \rightarrow \max_g, \quad (3.13)$$

$$\sum_{j \in J} g_{ij} = 0, \quad i \in I, \quad (3.14)$$

$$\sum_{i \in I} g_{ij} = 0, \quad j \in J, \quad (3.15)$$

$$-1 \leq g_{ij} \leq 1, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (3.16)$$

Двойственной задачей для (3.13)-(3.16) является задача

$$T_{\Lambda}(r, s, t) = \sum_{i \in I, j \in J} (t_{ij} + t_{ji}) \rightarrow \min_{r, s, t}, \quad (3.17)$$

$$r_i + s_j + t_{ij} - t_{ji} = l_{ij}, \quad t_{ij}, t_{ji} \geq 0, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (3.18)$$

Сравнивая системы ограничений задачи (3.7)-(3.8) с системой ограничений

задачи (3.17)-(3.18) легко заметить, что допустимость базисного решения

$(r, s, t)$  задачи (3.17)-(3.18) влечет допустимость решения

$$R = (x = r, \quad y = s, \quad w = \{w_{ij} = t_{ij} + t_{ji} : i \in I, j \in J\})$$

для задачи (3.7)-(3.8). Более того, если  $(r, s, t)$  является оптимальным решением задачи (3.17)-(3.18), то  $R$  является оптимальным решением задачи (3.7)-(3.8), поскольку двойственные задачи (3.9)-(3.12) и (3.13)-(3.16) имеют соответствующие оптимальные решения.

Компиляция алгоритма **Decomposition** с использованием терминов  $(x, y, l)$  может быть представлена в виде алгоритма **Log\_Decomposition**.

Алгоритм **Log\_Decomposition**

**Вход:**  $I, J, \mathbf{L} = \{l_{ij} : i \in I, j \in J\}$ ;

**Выход:**  $\mathbf{x} = \{x_i : i \in I\}, \mathbf{y} = \{y_j : j \in J\}, F_L(x, y)$ ;

**Шаг 1.** (Построение  $\hat{L}$ ). Для каждой строки  $i \in I$  матрицы  $\mathbf{L}$  выполнить шаги 1.1, 1.2 и 1.3, затем перейти на шаг 2.

**Шаг 1.1.** Для элементов каждой строки  $i \in I$  определить порядковый номер в отсортированном в порядке возрастания списке элементов данной строки

$$\mathbf{L}[i] = \left\{ l_{ij^{(k)}}^{(k)} : \right. \\ \left. k = 1, 2, \dots, |J|, j^{(k)} \in J, l_{ij^{(1)}}^{(1)} \leq l_{ij^{(2)}}^{(2)} \leq \dots \leq l_{ij^{(|J|)}}^{(|J|)} \right\}.$$

**Шаг 1.2.** Вычислить  $k_- = \left\lfloor \frac{|J|+1}{2} \right\rfloor$ ,  $k_+ = \left\lceil \frac{|J|+1}{2} \right\rceil$ ,  $r_i = \frac{l_{ij^{(k_+)}}^{(k_+)} + l_{ij^{(k_-)}}^{(k_-)}}{2}$ .

**Шаг 1.3.** Для  $k = 1, 2, \dots, |J|$  вычислить  $\hat{l}_{ij^{(k)}}^{(k)} = l_{ij^{(k)}}^{(k)} - r_i$ .

**Шаг 2.** (Построение матрицы  $\hat{\mathbf{L}}$ ). Для каждого столбца  $j \in J$  матрицы  $\hat{\mathbf{L}}$  выполнить шаги 2.1, 2.2 и 2.3, затем перейти на шаг AUX.

**Шаг 2.1.** Для элементов каждого столбца  $j \in J$  определить порядковый номер в отсортированном в порядке возрастания списке элементов данного столбца

$$\hat{\mathbf{L}}[*][j] = \left\{ \hat{l}_{i^{(k)}j}^{(k)} : \right. \\ \left. k = 1, 2, \dots, |J|, j^{(k)} \in J, \hat{l}_{i^{(1)}j}^{(1)} \leq \hat{l}_{i^{(2)}j}^{(2)} \leq \dots \leq \hat{l}_{i^{(|J|)j}^{(|J|)}} \right\}.$$

**Шаг 2.2.** Вычислить  $k_- = \left\lfloor \frac{|I|+1}{2} \right\rfloor$ ,  $k_+ = \left\lceil \frac{|I|+1}{2} \right\rceil$ ,  $s_j = \frac{\hat{l}_{i^{(k_+)j}^{(k_+)}} + \hat{l}_{i^{(k_-)j}^{(k_-)}}}{2}$ .

**Шаг 2.3.** Для  $k = 1, 2, \dots, |I|$  вычислить  $\tilde{l}_{i^{(k)}j}^{(k)} = \hat{l}_{i^{(k)}j}^{(k)} - s_j$ .

**Шаг AUX.** (Построение матрицы T) Для всех  $i \in I, j \in J$  выполнить шаги AUX.1 и AUX.2, затем перейти на Шаг 3.

**Шаг AUX.1** Если  $\tilde{l}_{ij} > 0$ , то положить  $t_{ij} = \tilde{l}_{ij}$ ,  $t_{ji} = 0$ , иначе положить

$$t_{ji} = -\tilde{l}_{ij}, t_{ij} = 0.$$

**Шаг AUX.2** Вычислить

$$T_{\Lambda}(r, s, t) = \sum_{i \in I, j \in J} (t_{ij} + t_{ji}).$$

**Шаг 3.** (Нормализация). Выполнить Шаги 3.1, 3.2, и 3.3, затем перейти на Шаг 4.

**Шаг 3.1.** Вычислить  $c = \frac{\max_{i \in I} x_i - \max_{j \in J} y_j}{2}$ .

**Шаг 3.2.** Для всех  $i \in I$  вычислить  $r_i = r_i - c$ .

**Шаг 3.3.** Для всех  $j \in J$  вычислить  $s_j = s_j + c$ .

**Шаг 4.** Вернуть  $\left\{ \mathbf{x} = \{r_i\}_{i \in I}, \mathbf{y} = \{s_j\}_{j \in J}, T_\Lambda(r, s, t) \right\}$ .

**End.**

Вспомогательный шаг AUX вводится для доказательства эффективности алгоритма. На этом шаге вычисляются оптимальные значения переменных  $t_{ij}, t_{ji}, i \in I, j \in J$  и оптимальное значение  $T_\Lambda(r, s, t)$  для задачи (3.17)-(3.18).

Очевидно, что построенное алгоритмом **Log\_Decomposition** решение  $(r, s, t)$  удовлетворяет всем ограничениям задачи (3.17)-(3.18). С другой стороны, проблема (3.13)-(3.16) имеет целочисленное оптимальное решение [12], т.е. в оптимальном решении  $g$  для всех  $i \in I, j \in J$  имеет место включение  $g_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ . Построим решение  $\{g_{ij} : i \in I, j \in J\}$  задачи (3.13)-(3.16), используя условия комплиментарности относительно решения  $(r, s, t)$  двойственной задачи (3.17)-(3.18), т.е. положим

(1)  $g_{ij} = -1$  для всех  $i \in I, j \in J$  таких, что  $t_{ij} = 0, t_{ji} > 0$ ;

(2)  $g_{ij} = 1$  для всех  $i \in I, j \in J$  таких, что  $t_{ij} > 0, t_{ji} = 0$ ;

(3)  $g_{ij} = 0; i \in I, j \in J$  таких, что  $t_{ij} = t_{ji} = 0$ .

Легко заметить, что построенное решение  $\{g_{ij} : i \in I, j \in J\}$  является допустимым решением задачи (3.13)-(3.16). Из второй теоремы двойственности в линейном программировании следует, что  $(r, s, t)$  и  $\{g_{ij} : i \in I, j \in J\}$  являются оптимальными решениями задач (3.13)-(3.16) и (3.17)-(3.18) соответственно. Результативность алгоритма **Log\_Decomposition**, а следовательно и алгоритма **Decomposition** доказана

Перейдем к оценке вычислительной сложности. Тело Шага 1 содержит сортировку элементов строки (вычислительная сложность  $O(|J| \cdot \log_2 |J|)$ ) и пересчет ее элементов (вычислительная сложность  $O(|J|)$ ). Следовательно, вычислительная сложность Шага 1 не будет превосходить величины  $O(|I| \cdot |J| \cdot \log_2(|J|))$ .

Аналогичные рассуждения относительно Шага 2 приводят к справедливости утверждения, что вычислительная сложность Шага 2 не будет превосходить величины  $O(|I| \cdot |J| \cdot \log_2(|I|))$ . Поэтому суммарная вычислительная сложность Шагов 1 и 2 не будет превосходить величины  $O(|I| \cdot |J| \cdot \log_2(|I| \cdot |J|))$ .

Шаг AUX имеет вычислительную сложность не более  $O(|I| \cdot |J|)$ .

Шаг 3 состоит в вычислении  $c$  и пересчете значений элементов матриц  $\alpha = \{\alpha_i : i \in I\}$ ,  $\beta = \{\beta_j : j \in J\}$ , его вычислительная сложность не превосходит величины  $O(|I| + |J|)$ .

Таблица 3.4. Матрица  $\mathbf{L}$ 

1(1)	4(4)	3(3)	2(2)	5(5)	6(6)	$(4+3)/2=3.5$
7(5)	3(2)	5(4)	9(6)	1(1)	3(3)	$(5+3)/2=4$
11(5)	13(6)	9(4)	7(3)	5(2)	1(1)	$(9+7)/2=8$
13(4)	15(5)	11(3)	17(6)	9(2)	7(1)	$(13+11)/2=12$
19(5)	21(6)	17(4)	13(3)	11(2)	9(1)	$(13+17)/2=15$
						$r$

Таким образом, вычислительная сложность алгоритма не превосходит величины  $O(|I| \cdot |J| \cdot \log_2(|I| \cdot |J|))$ .

Теорема доказана.

### 3.3.1. Пример выполнения алгоритма *Log\_Decomposition*

В следующей далее таблице 3.4 приведена исходная матрица  $\mathbf{L}$ . Рядом со значением каждого элемента в скобках указан его порядковый номер в отсортированном в порядке возрастания списке элементов соответствующей строки. В последнем столбце приведены значения элементов вектора  $r$ .

В таблице 3.5 приведены значения элементов матрицы  $\hat{L}$ , вычисленные на шаге 1. Рядом со значением каждого элемента в скобках указан его порядковый номер в отсортированном в порядке возрастания списке элементов

Таблица 3.5. Матрица  $\hat{\mathbf{L}}$ 

-2,5(1)	0,5(2)	-0,5(2)	-1,5(2)	1,5(5)	2,5(5)	
3(3)	-1(1)	1(3)	5(4)	-3(4)	-1(4)	
3(4)	5(4)	1(4)	-1(3)	-3(3)	-7(1)	
1(2)	3(3)	-1(1)	5(5)	-3(2)	-5(3)	
4(5)	6(5)	2(5)	-2(1)	-4(1)	-6(2)	
3	3	1	-1	-3	-5	$s$

соответствующего столбца. В последней строке приведены значения элементов вектора  $s$ .

В таблице 3.6 приведены значения элементов матрицы  $\tilde{\mathbf{L}}$ , вычисленные на шаге 2. Величины данных элементов равны невязкам в представлении соответствующих элементов матрицы  $\mathbf{L}$ . Значение

$$c = (r_5 - s_1) / 2 = (15 - 3) / 2 = 6,$$

вычисленно на шаге 4. Последние столбец и строка табл. 3 содержат модифицированные на шаге 4 векторы  $r$  и  $s^T$  соответственно

В таблице 3.7 приведены значения элементов матрицы  $\mathbf{r} \oplus \mathbf{s}^T$ , являющейся образом матрицы  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$ , в ней операции перемножения элементов столбца и строки соответствует операция сложения логарифмов элементов.

Таблица 3.6. Матрица  $\tilde{\mathbf{L}}$ 

-5,5	-2,5	-1,5	-0,5	4,5	7,5	-2,5
0	-4	0	6	0	-4	-2
0	2	0	0	0	-2	2
-2	0	-2	6	0	0	6
1	3	1	-1	-1	-1	9
9	9	7	5	3	4	

Таблица 3.7. Матрица  $\tilde{\mathbf{L}}$ 

6,5	6,5	4,5	2,5	0,5	-1,5
7	7	5	3	1	-1
11	11	9	7	5	3
15	15	13	11	9	7
18	18	16	14	12	10



### 3.4. Выводы к третьей главе

Алгоритм **Decomposition** решает задачу аппроксимации блоков матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга, т. е. в виде произведения столбца на строку. Алгоритм имеет алгебраическую вычислительную сложность не более  $O(|I| \cdot |J| \cdot \log_2(|I| \cdot |J|))$ , где  $|I|, |J|$  – размеры матрицы.

Алгоритм **Decomposition** решает проблему наилучшей аппроксимации распределительной задачи линейного программирования разложимой задачей, сводимой к транспортной задаче в матричной постановке.

## Глава 4

**Комплекс SW2AM компьютерных программ  
для задачи аппроксимации матрицы  
с положительными элементами матрицей  
единичного ранга**

Разработанные в работе алгоритмы реализованы в виде комплекса компьютерных программ SW2AM (Soft Ware to Approximate Matrixes) для задачи аппроксимации матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга. Программный комплекс содержит модуль Decompr4Distr для решения задачи аппроксимации заданной матрицы матрицей единичного ранга с оценкой точности, модуль Gen4DecomPrb для генерации тестовых примеров с известными решениями, и соответствующие вызывающие программы.

#### **4.1. Общие сведения**

**Назначение.** Основными функциями комплекса SW2AM является предоставление программам пользователя средства решения задачи аппроксимации

матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга, а также средства тестирования работоспособности данной программы.

**Область применения.** Комплекс программ SW2AM предназначен для использования при численном решении задачи аппроксимации матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга, а также для имитационного моделирования данных задач.

**Ограничения, накладываемые на область применения комплекса**

Скомпилированное программное обеспечение предназначено только для работы под управлением 32-х и 64-х битных ОС семейства Windows XP и старше, и компиляцией программы только компилятором Microsoft Visual C++ v10.0. Программное обеспечение не имеет видимого графического интерфейса.

## 4.2. Условия применения

**Требования к техническим (аппаратным) средствам**

В состав используемых технических средств должны входить:

- IBM PC с процессором семейства x86 или x86\_64;
- ОЗУ более 512 Мбайт;

- наличие свободного места на жестком диске более 5 Мбайт.

### Требования к программным средствам (другим программам)

- 32-х или 64-х разрядная операционная система семейства Windows.
- Компилятор Microsoft Visual C++ v10.0.

## 4.3. Технические характеристики

### 4.3.1. Постановка задачи на разработку программы

Большинство современных математических методов решения задач естествознания, техники, экономики требуют решения линейных задач большой размерности. Для снижения вычислительной сложности используется специальная структура матриц, соответствующих этим задачам.

В *первой и второй* главах показано (см. 1.9 и 2.5), что в случае если матрица

$$\Lambda = \{\lambda_{ij} > 0 : i \in I, j \in J\} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T,$$

$$\mathbf{A} = \{\alpha_i > 0 : i \in I\}, \quad \mathbf{B} = \{\beta_j > 0 : j \in J\},$$

то соответствующие распределительные задачи сводятся к однопродуктовым задачам транспортного типа.

Комплекс программ SW2AM должен предоставить интерфейс, средства решения проблемы (3.4) и имитационного моделирования. Комплекс программ SW2AM должен иметь возможность инкапсуляции в Microsoft Excel.

Программный комплекс SW2AM содержит модуль `Decomp4Distr` для решения задачи аппроксимации заданной матрицы матрицей единичного ранга с оценкой точности, модуль `Gen4DecomPrb` для генерации тестовых примеров с известными решениями, и соответствующие вызывающие программы.

Исходными данными для модуля `Gen4DecomPrb` – размеры генерируемой задачи, число для инициализации датчика случайных чисел и уровень искажения. Исходными данными для модуля `Decomp4Distr` является матрица с положительными элементами.

#### **4.3.2. Описание применяемых математических методов**

Описание используемого алгоритма решения задачи (3.4) приведено в разделе 3.2, там же дано доказательство его результативности и рассмотрен пример его применения.

## 4.4. Описание функционирования программного обеспечения

### 4.4.1. Модуль Gen4DecompPrb

Данный модуль предназначен для генерации матрицы

$$L^{(k)} = \left( A^{(k)T} \cdot B^{(k)} \right) \otimes Er^{(k)},$$

где  $A, B$  – заданные столбцы,  $Er$  – матрица случайных ошибок,  $\otimes$  – операция поэлементного перемножения матриц. Листинг программы приведен в приложении Б.

**В строках 12–15** дано описание используемого датчика случайных чисел.

**В строках 16–19** дано описание используемых переменных.

**В строках 20–56** реализуется ввод данных из файла "DataGnrtn.txt":

- ввод числа  $m$  строк генерируемой матрицы (строка 23 листинга),
- выделение памяти под строку  $A$  и под указатели на строки матриц  $L$  и  $Er$  (строки 25 -27),
- ввод числа  $n$  столбцов генерируемой матрицы (строки 28-30)
- выделение памяти под столбец  $B$  (строка 31) и под столбцы матриц  $L$  и  $Er$  (строки 32 -35)

- определение значения параметра  $id$  для инициализации датчика случайных чисел (строки 36-38) и максимальная вносимая ошибка  $e$  (строки строки 39-41),
- строки 42-43 – завершение ввода,
- строки 44-55 – обработка исключительных ситуаций возможных при вводе.

**Строка 57** Вычисление диапазона  $D$  генерируемых случайных значений.

**Строки 58–65** описание эхо-печати на консоль введенных ранее данных.

**Строки 66-71.** Генерация ответа задачи.

- Открытие файла "Answer.txt" для вывода ответа генерируемой задачи (строки 66-70).
- Генерация и вывод вектора  $A$  (строки 72-75).
- Генерация и вывод вектора  $B$  (строки 76-80).
- Генерация и вывод матрицы ошибок  $Er$  (строки 81-90).
- Закрытие файла "Answer.txt" (строка 91).

**Строки 92-102.** Генерация условий задачи.

- Подготовка файла "DataPrb.txt" для вывода условия генерируемой задачи (строки 92-94).

- Генерация и вывод матрицы  $L$  (строки 95-101).
- Закрытие файла "DataPrb.txt" (строка 102).

В строках 103-106 сообщение на консоль о результатах генерации.

#### 4.4.2. Модуль «Decomp4Distr.exe»

Данный модуль предназначен для решения задачи аппроксимации матрицы в заданной файле "DataPrb.txt" матрицей единичного ранга с оценкой точности, что позволяет прогнозировать развитие процесса. Найденные оценки передаются в файл вывода "Out.txt".

Листинг программы приведен в приложении В.

Строки 3–53 содержат описание программы Decompr, являющейся программной реализацией алгоритма **Decomposition**, описание которого приведено в разделе 3.2.

В строках 4-7 дано описание параметров программы:

- размеры  $m$ ,  $n$  декомпозируемой матрицы  $L$ ;
- указатель  $l$  адреса памяти, содержащей элементы матрицы  $L$ ;
- указатели  $a$  и  $b$  адресов памяти для размещения результатов декомпозиции.

Строки 8-24 представляют программную реализацию Шага 1.



**Строки 25-42** представляют программную реализацию Шага 2.

**Строки 43-46** представляют программную реализацию Шага 3.

**Строки 47-50** представляют программную реализацию Шага 4.

**Строка 51:** возвращение вычисленного значения невязки аппроксимации.

**Строки 54-100** содержат описание вызываемой программы.

**В строках 54-59** описана проверка корректности обращения к программе.

**В строках 60-65** описана инициализация потока ввода исходных данных.

**В строках 66-72** описана ввод исходных данных.

**В строках 73-80** инициализация потока вывода и эхо-печать исходных данных.

**В строках 81-82** выделение оперативной памяти под результаты декомпозиции.

**В строке 83** вызов программы Desomp.

**В строках 84-100** вывод результатов.

## 4.5. Вычислительный эксперимент с комплексом SW2AM

### 4.5.1. Пример применения программы Gen4DecompPrb

Листинг файла "DataGnrtn.txt" с исходными данными может быть таким как показано на рис. 4.1. Данный пример следует использовать как шаблон.

```

количество строк матрицы m=:4

количество столбцов матрицы n=:5

значение для инициализации датчика случайных чисел id=:666

параметр возмущения e=:50

```

Рис. 4.1. Пример листинга файла "DataGnrtn.txt"

Актуальные численные данные указывают после знака двоеточия.

Используя датчик случайных чисел формируется решение генерируемой задачи, т.е. значения векторов  $A$ ,  $B$  и матрицы  $Err$  добавленных ошибок. Сгенерированные данные передаются программой «Gen4DecompPrb.exe» в файл "Answer.txt". Пример ответа для генерируемой задачи передается в файл "Answer.txt". Листинг файла сформированного программой Gen4DecompPrb приведен на рис.4.2

Матрица условий генерируемой задачи вычисляется по формуле

$$Gen = (A \cdot B^T) \otimes Err.$$

```

column A:
6.753540e+000  6.937866e+001  7.321777e+001  1.541748e+001

column B:
9.109192e+001  1.696472e+001  5.149231e+001  4.892578e+001  9.121399e+001

matrix Err:
6.209331e-001  1.387515e+000  7.766173e-001  1.647011e+000  1.211913e+000
8.386735e-001  6.855925e-001  1.172549e+000  1.234383e+000  1.221045e+000
9.231006e-001  8.547713e-001  8.880081e-001  7.168958e-001  1.150010e+000
1.145177e+000  7.357578e-001  6.241438e-001  6.493238e-001  1.104267e+000

```

Рис. 4.2. Листинг файла "Answer.txt" сформированного программой Gen4DecompPrb

Сгенерированная матрица передаётся в файл "DataPrb.txt". Листинг файла сформированного программой Gen4DecompPrb файл "DataPrb.txt" приведен на рис.4.3 В первых двух строках указываются соответственно количество строк и столбцов в сгенерированной матрице. Далее построчно выводится сгенерированная матрица  $L$ .

#### 4.5.2. Пример применения программы «Decomp4Distr.exe»

Пусть листинг исходного файла "DataPrb.txt" имеет вид, приведенный на рис.4.4

В первых двух строках указывают соответственно количество строк и столбцов декомпозируемой матрицы. Далее построчно перечисляют ее элементы.

```

4
5
3.819936e+002  1.589703e+002  2.700728e+002  5.442092e+002  7.465591e+002
5.300278e+003  8.069352e+002  4.188892e+003  4.189996e+003  7.727144e+003
6.156663e+003  1.061728e+003  3.347926e+003  2.568091e+003  7.680324e+003
1.608295e+003  1.924399e+002  4.954963e+002  4.897929e+002  1.552920e+003

```

Рис. 4.3. Листинг файла "DataPrb.txt" сформированного программой Gen4DecompPrb

Введенные исходные данные программы «Decomp4Distr.exe» и результат ее вычислений передаются в файл "DataPrb.out". Листинг файла приведен на рис.4.5.

Первая часть файла содержит эхо-печать условия задачи: количество строк  $N$ , количество столбцов  $M$  и декомпозируемую матрицу  $C$ . Затем выведены результаты разложения (матрицы  $A$ ,  $B$   $A^T B$ ) и матрицы отношений  $\{A^T B\}_{ij}/C_{ij}$ .

## 4.6. Пример численного анализа чувствительности

### результатов аппроксимации к погрешности

#### в исходных данных

Для проведения численного анализа чувствительности результатов аппроксимации к погрешности в исходных данных с использованием комплекса

5					
6					
1	4	3	2	5	6
2	8	6	4	10	12
4	16	12	8	20	24
3	12	9	6	15	18
7	28	21	14	35	42

Рис. 4.4. Листинг исходного файла "DataPrb.txt"

программ SW2AM составлена программа имитационного моделирования вызывающая модули Gen4DecompPrb и Decomp4Distr [36]. Листинг программы имитационного моделирования приведен в приложении Г.

**Строки 2-13** Содержат описание данных для программы Gen4DecompPrb:

- возможные размеры  $m$ ,  $n$  генерируемых задач (строка 3);
- возможные значения погрешности  $e$  (строка 4);
- количество  $N$  генерируемых примеров для каждого  $(m, n, e)$ -варианта задачи (строка 5);
- выделение оперативной памяти для исходных данных модуля Gen4DecompPrb и условия сгенерированной им задачи (строки 6-13).

```

N=6      M= 5

InPut

1      4      3      2      5      6
2      8      6      4      10     12
4      16     12     8      20     24
3      12     9      6      15     18
7      28     21     14     35     42

A=
0.92582  1.85164  3.70328  2.77746  6.48074

B=
1.08012  4.32049  3.24037  2.16025  5.40062  6.48074

At*B

1      4      3      2      5      6
2      8      6      4      10     12
4      16     12     8      20     24
3      12     9      6      15     18
7      28     21     14     35     42

log10(ERR) = -0.0

(At*B)/L

1      1      1      1      1      1
1      1      1      1      1      1
1      1      1      1      1      1
1      1      1      1      1      1
1      1      1      1      1      1

```

Рис. 4.5. Листинг файла "DataPrb.txt" сформированного программой Gen4DecompPrb

**Строки 14-17** – выделение оперативной памяти для формирования ответа программой Gen4DecompPrb.

**Строки 18-45** – имитационное моделирование и формирование отчета по его результатам:

- Описание файла для вывода результатов (строка 19).
- Три вложенных цикла (по числу строк  $m$ , по числу столбцов  $n$ , по добавляемой ошибке  $e$ ) (строки 20-45) для перебора  $(m, n, e)$ -вариантов задачи.

До завершения внешнего цикла (т.е. по  $m$ ) выполняется:

- генерация и решения Num задач, сохранение ошибки аппроксимации решенной задачи в массиве AEr и подсчет суммарной ошибки аппроксимации сгенерированных вариантов  $(m, n, e)$ -задач в переменной mAEr (строки 29-34);
- вычисление средней ошибки аппроксимации сгенерированных вариантов  $(m, n, e)$ -задач

$$M = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{m^{(k)} \cdot n^{(k)}} \cdot \sum_{i=1}^{m^{(k)}} \sum_{j=1}^{n^{(k)}} \left| \log_{10} \frac{A_i^{(k)} B_j^{(k)}}{L_{ij}^{(k)}} \right| \right)$$

и ее вывод в файл результатов (строки 35-36);

– вычисление среднего квадратичного отклонения ошибки аппроксимации сгенерированных вариантов  $m, n, e$ -задач

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[ \left( \frac{1}{m^{(k)} \cdot n^{(k)}} \sum_{i=1}^{m^{(k)}} \sum_{j=1}^{n^{(k)}} \left| \log_{10} \frac{A_i^{(k)} B_j^{(k)}}{L_{ij}^{(k)}} \right| \right) - M \right]^2}$$

и ее вывод в файл результатов (строки 37-43);

В таблице 4.1 приведены результаты имитационного моделирования двенадцати  $(m, n, e)$ -вариантов. Для каждого  $(m, n, e)$ -варианта генерировались матрицы

$$L^{(k)} = \left( A^{(k)\top} \cdot B^{(k)} \right) \otimes Er^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, 100,$$

для которых искалась наилучшая аппроксимация

$$\left( \widetilde{A}^{(k)\top}, \widetilde{B}^{(k)}, \widetilde{Er}^{(k)} \right) =$$

$$\arg \min_{A \in R^{m^{(k)}}, B \in R^{n^{(k)}}, E \in R^{m^{(k)} \times n^{(k)}}} \left\{ \|E\| : L^{(k)} = (A^\top \cdot B) \otimes E \right\},$$

$$k = 1, 2, \dots, 100,$$

Результаты моделирования показывают:

- 1)  $\|Er\| > \left\| M \widetilde{Er} \right\|$ , т.е., как и следовало ожидать, погрешность аппроксимации не превосходит уровень вводимой погрешности;
- 2) случайная погрешность (т.е. среднее квадратичное отклонение) более чем в пятьдесят раз ниже систематической погрешности (т.е. среднего значения).



Исходные данные			Результаты	
Число строк $m$	Число столбцов $n$	Погрешность $ e $	Средняя ошибка $M$	СКО $S$
10	20	0	0	0
		0.1	0.0255912	0.00189457
		0.2	0.0497436	0.0497436
20	10	0	0	0
		0.1	0.0267894	0.00279262
		0.2	0.0515085	0.00466571
20	40	0	0	0
		0.1	0.0258069	0.00115392
		0.2	0.0501536	0.00214659
40	20	0	0	0
		0.1	0.0277298	0.00244273
		0.2	0.0529795	0.00351985

Таблица 4.1. Статистика результатов имитационного моделирования

## 4.7. Выводы по главе 4

Разработанный в ходе выполнения диссертационного исследования комплекс компьютерных программ SW2AM адекватно решает задачу аппроксимации произвольной матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга.

## Глава 5

# Программное обеспечение системы моделирования региональных грузоперевозок

### 5.1. Требования к информационной системе

Для информационных систем поддержки транспортной логистики характерна замкнутость их использования. Каждое предприятие использует свою систему, из-за этого возникает проблема как сопоставимости данных, так и информационного обмена. Многие системы оказываются сложны для понимания и работы специалистов логистического отдела и требуют некоторого времени на обучение. Особое внимание стоит уделить разработке системы, которая будет способствовать консолидации данных, так как это является одним из основных препятствий для развития транспортной логистики.

### 5.2. Обоснование выбора платформы для разработки

В качестве среды для внесения исходных данных используется Microsoft Excel. Microsoft Office 365 является самым популярным пакетным приложением для офиса по всему миру [27], а его табличный процессор

- MS Excel – достаточно прост в использовании. Большинство офисных сотрудников владеет продуктами от Microsoft для работы в офисе на среднем уровне. Поэтому не возникнет необходимости обучать персонал работе с информационной системой, если им знаком интерфейс MS Excel. Более того, расчёты и отчёты на множестве предприятий производятся и хранятся на MS Excel. Поэтому внесение исходных данных, а также работа с полученными результатами при помощи MS Excel представляются наиболее удобными.

Однако, решение поставленной задачи средствами MS Excel не представляется возможным ввиду ограниченных вычислительных возможностей программы. Поэтому решение задачи происходит при помощи программы, написанной на C++. Данный язык программирования является кроссплатформенным и позволяет решать задачи больших размеров. Это делает возможным продолжение разработки решения данной задачи путём её усложнения (например, добавления пунктов транзита).

Microsoft Excel (MS Excel) — табличный процессор, входящий в пакте приложений Microsoft Office 365 для Microsoft Windows, Windows NT и Mac OS. Помимо возможности проведения экономических, статистических и инженерных расчётов и их графической визуализации, в MS Excel, как и в других приложениях Microsoft Office, предоставляет возможность макропрограммирования на встроенном языке VBA (Visual Basic for Applications). При

помощи VBA пользователь может автоматизировать расчеты, создавать свои функции и взаимодействовать с другими приложениями Microsoft Office.

При этом корпорация Microsoft продолжает развивать своё одно из наиболее популярных офисных приложений. Разрабатываются технологии, позволяющие связать Microsoft Excel с массивными вычислительными возможностями Windows Azure. Среди таких технологий на сегодняшний день доступны Excel DataScope и ML Excel. Первая представляет собой дополнительную ленту в интерфейсе Microsoft Excel, а вторая – надстройку. Таким образом, обеспечен доступ к функциям ресурсоемкой обработки данных. Эти функции: поиск закономерностей, определение скрытых ассоциаций, обнаружение сходства и прогнозирование временных последовательностей, – невозможно реализовать на уровне отдельного персонального компьютера [53]. В 2017 г. для таблиц, сохраненных в облачном хранилище OneDrive, добавлена функция одновременного редактирования несколькими пользователями в режиме реального времени.

### **5.3. Описание системы. Пример использования**

Наглядно процесс использования системы представлен на рис. 5.1.

Распределение товаров и услуг по транспортным средствам по заказам происходит в соответствии с описанной в разделе 1.2 математической

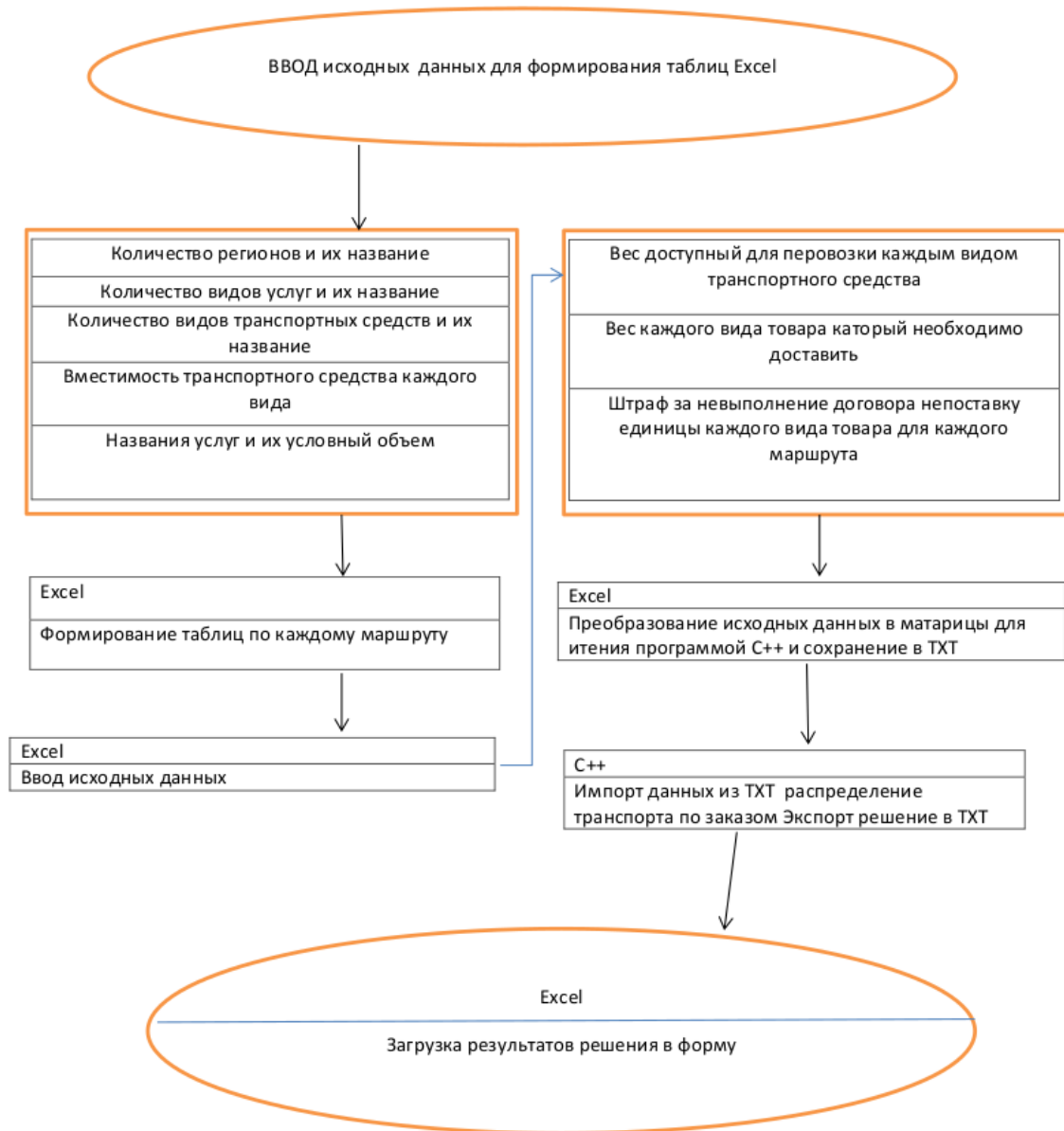


Рис. 5.1. Схема процесса построения распределения транспортных средств по заказам моделью. Будем рассматривать задачу формирования допустимого плана безтранзитных перевозок, удовлетворяющего при этом всем наложенным ограничениям. В дальнейшем планируется оптимизация плана перевозок, полученного в данной работе путём введения транзитных пунктов.

**Входные данные:**

- Множество допустимых маршрутов  $D$ .
- Номенклатура  $K_d$  доступных транспортных средств на маршруте  $d \in D$ .
- Номенклатура  $R$  перевозимых товаров.
- Объемы  $E_d^r$  заказов на доставку товара  $r \in R$  по маршруту  $d \in D$ .
- Матрица обобщенных удельных объемов  $\{\lambda^{rk}\}_{\substack{r \in R \\ k \in K}}$  требуемых для перевозки единицы продукта  $r \in R$  на транспорте вида  $k \in K$ .
- Матрица допустимых объемов  $\{R_d^k\}_{\substack{d \in D \\ k \in K}}$  безтранзитных перевозок по маршруту  $d \in D$  транспортом вида  $k \in K$ .
- Матрица штрафов  $\{c_d^r\}_{\substack{r \in R \\ d \in D}}$  за единицу неудовлетворенного спроса на доставку товара  $r \in R$  по маршруту  $d \in D$ .

Ввод исходных данных осуществляется в EXCEL-таблицы (рис. 5.2 и рис. 5.3).

На основе исходных данных формируются ограничения задачи (1.8), которые используются в дальнейшем для поиска допустимого плана поставок.

После внесения необходимой информации они экспортируются в файл формата `txt` для применения комплекса компьютерных программ SW2AM [36].

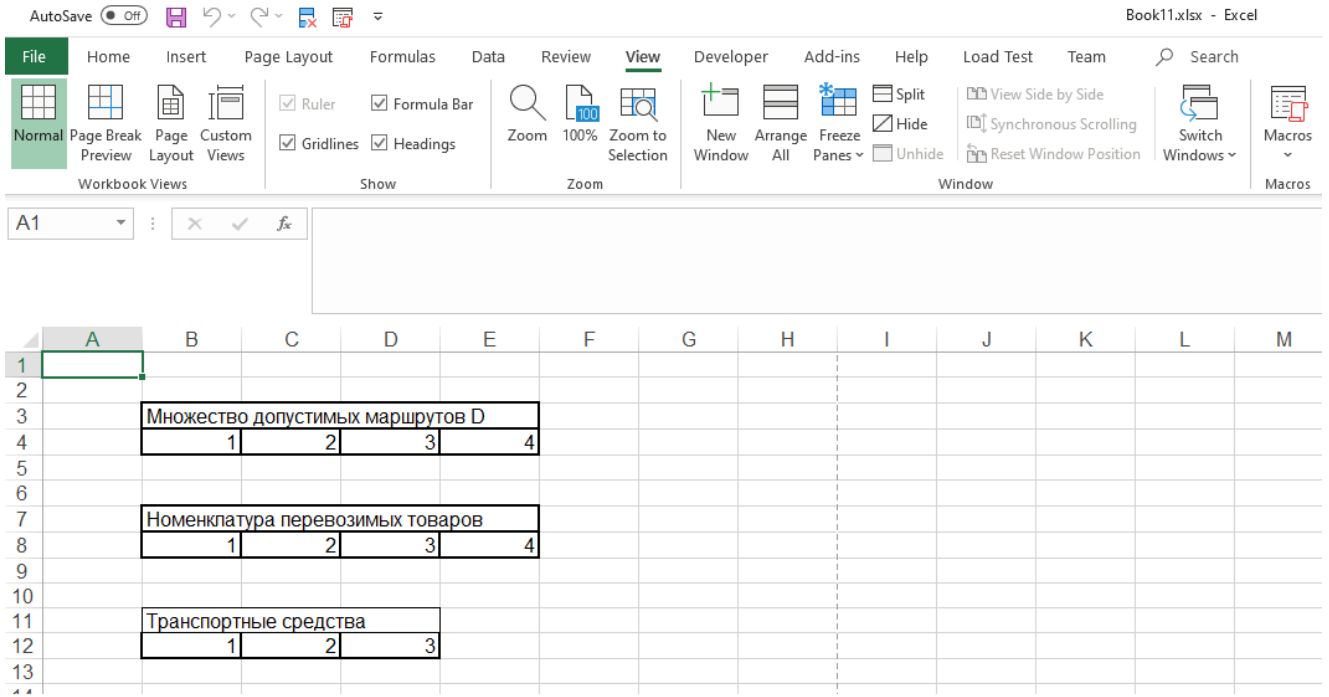


Рис. 5.2. Номенклатура товаров и услуг

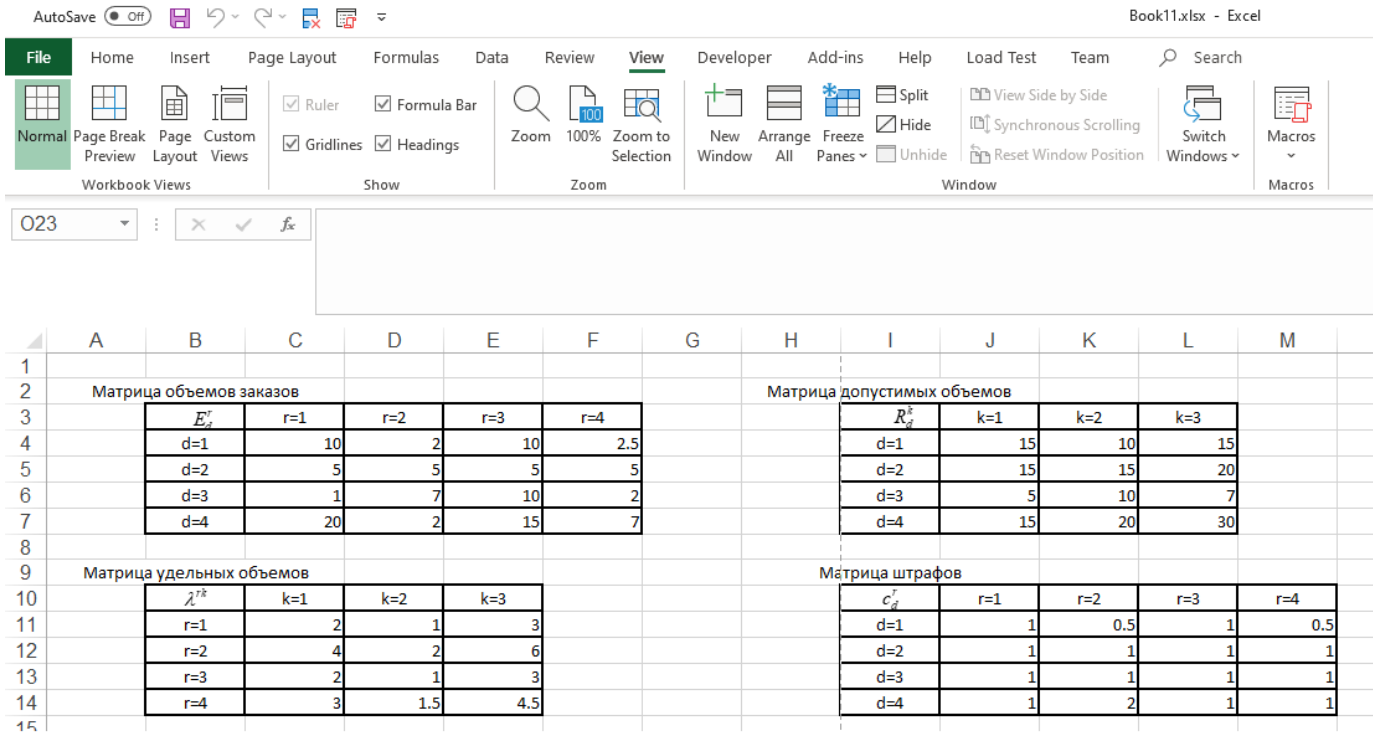


Рис. 5.3. Матрицы исходных данных

### Выходные данные:

- Декомпозиция матрицы обобщенных удельных объемов

$$\{\lambda^{rk}\}_{\substack{r \in R \\ k \in K}} = \{\beta_r^o > 0 : r \in R\} \times \{\alpha_k^o > 0 : k \in K\}^\top,$$

где

$$(\alpha^o, \beta^o) = \arg \min_{\substack{\{\beta_r > 0 : r \in R\} \\ \{\alpha_k > 0 : k \in K\}}} \left[ \sum_{r \in R, k \in K} \left| \log \frac{\alpha_r \beta_k}{\lambda_{rk}} \right| \right].$$

- Удельные объемы распределения заказов и неудовлетворенного спроса

$$(y_d^*, f_d^*) = \arg \min_{y, f} \left\{ \sum_{r \in R} \frac{c_d^r}{\alpha_r} f_d^r \quad \left| \quad \begin{array}{l} \sum_{r \in R} y_d^{rk} \leq \frac{R_d^k}{\beta_k}, \quad k \in K; \\ \sum_{k \in K} y_d^{rk} + f_d^r = E_d^r \alpha_r, \quad r \in R; \\ y \geq 0, \quad f \geq 0 \end{array} \right. \right\}, \quad d \in D.$$

- Фактические объемы распределения заказов и неудовлетворенного спроса

$$x_d^{rk} = \frac{y_d^{*rk}}{\alpha_r}, \quad e_d^r = \frac{f_d^{*r}}{\alpha_r}, \quad d \in D, r \in R.$$

Результаты применения комплекса компьютерных программ SW2AM импортируются в систему в виде EXCEL-таблиц результатов рис. 5.4–5.8.



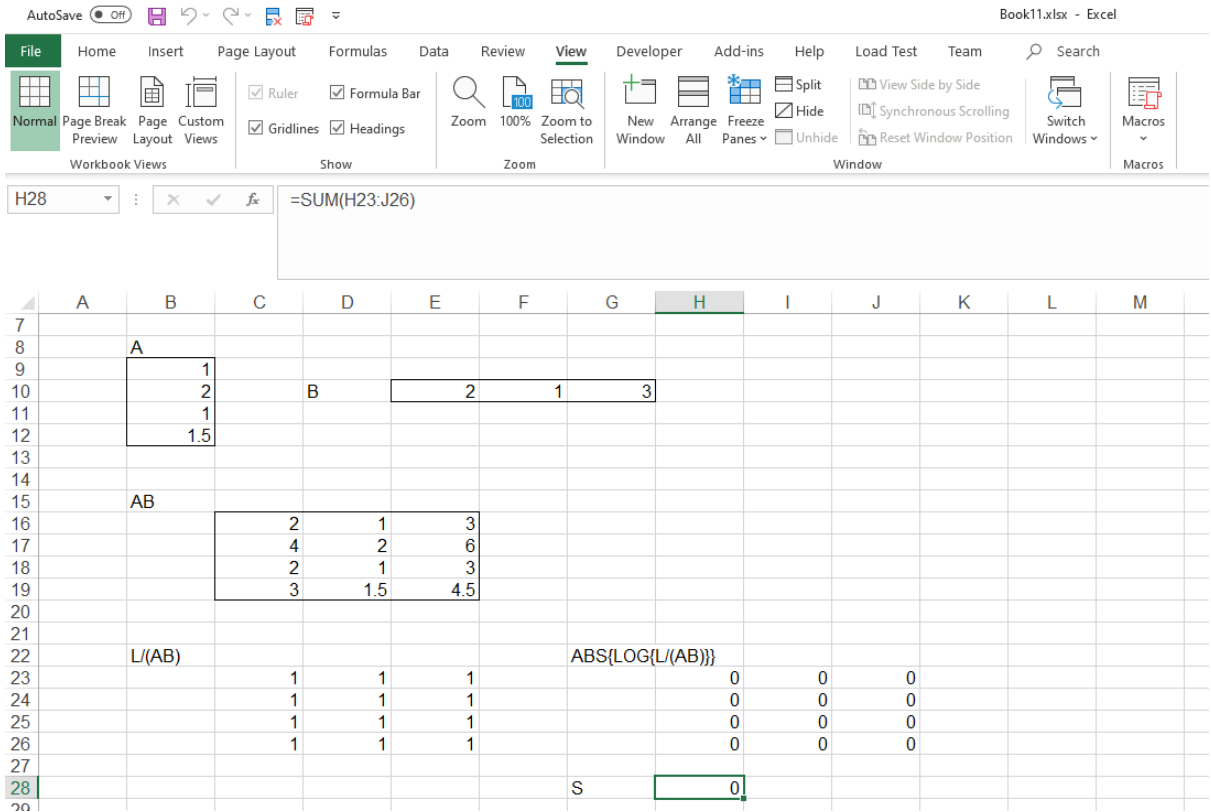


Рис. 5.4. Результаты декомпозиции матрицы обобщенных удельных объемов

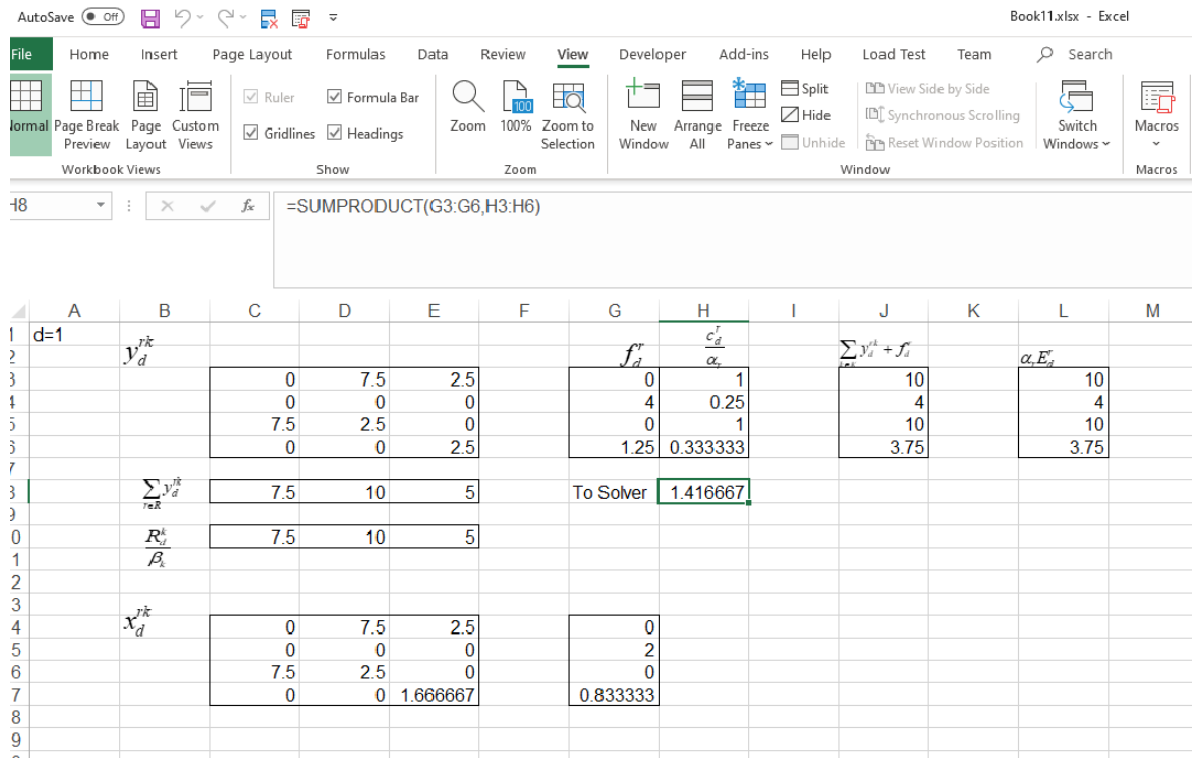


Рис. 5.5. Распределение товаров по транспортным средствам на маршруте 1

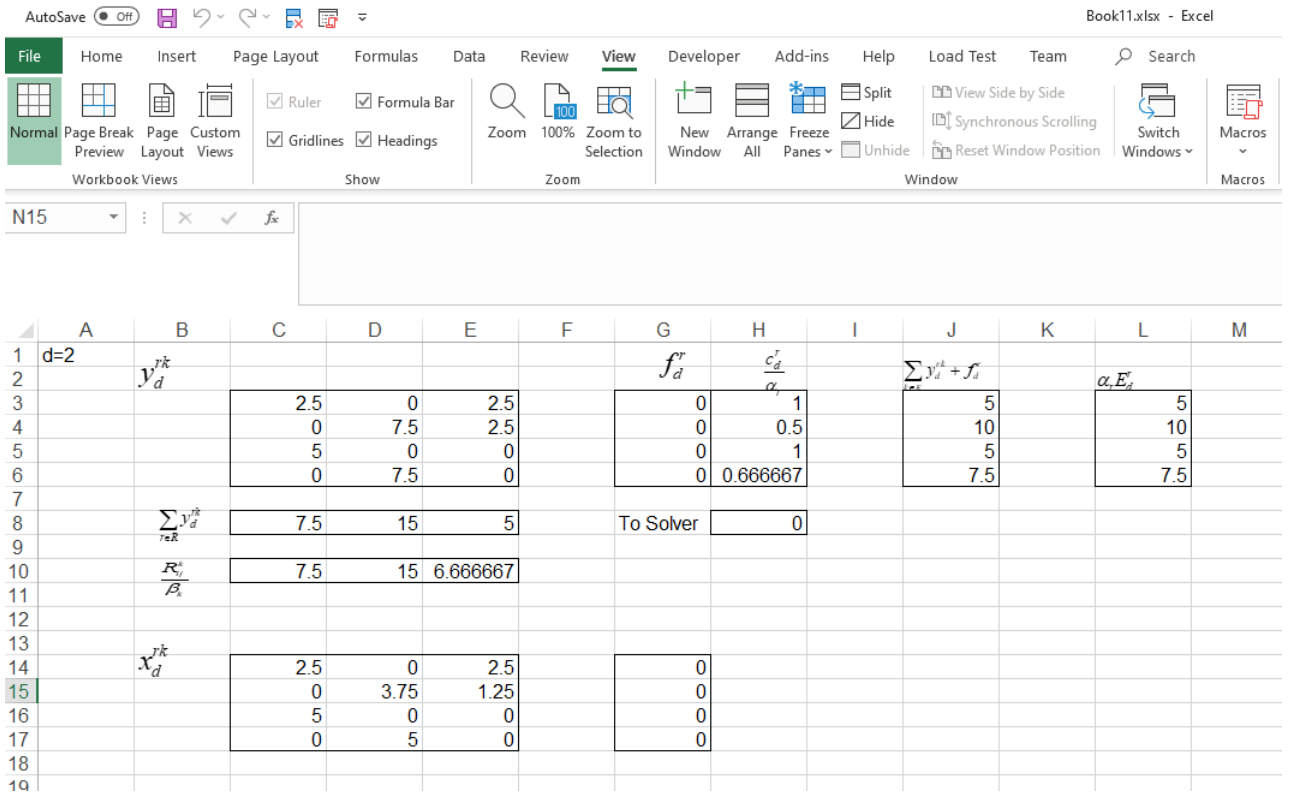


Рис. 5.6. Распределение товаров по транспортным средствам на маршруте 2

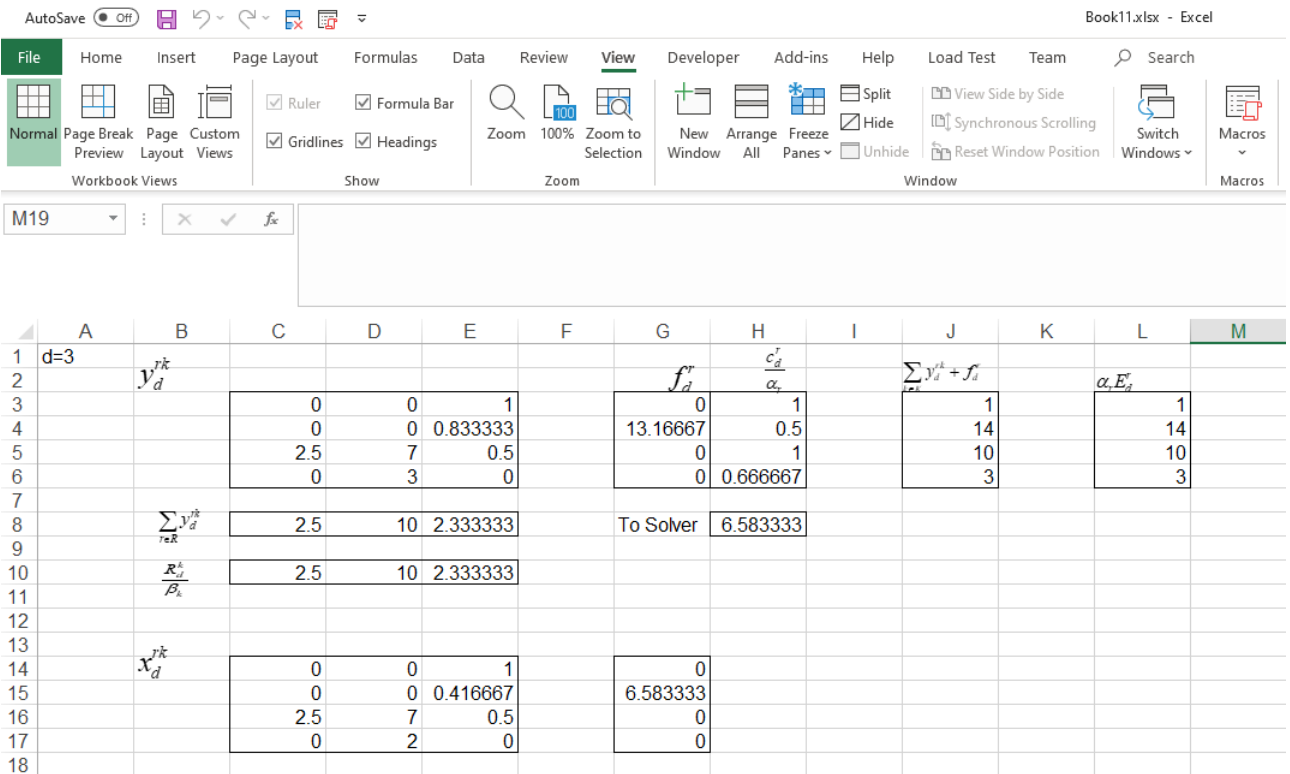


Рис. 5.7. Распределение товаров по транспортным средствам на маршруте 3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	d=4	$y_d^{jk}$					$f_d^r$	$\frac{c_d^r}{\alpha_r}$		$\sum_{j,k} y_d^{jk} + f_d^r$		$\alpha_r E_d^r$
2			0	10	10		0	1		20		20
3			0	4	0		0	1		4		4
4			7.5	6	0		1.5	1		15		15
5			0	0	0		10.5	0.666667		10.5		10.5
6												
7												
8		$\sum_{j,k} y_d^{jk}$	7.5	20	10		To Solver	8.5				
9												
10		$\frac{R_d^k}{B_k}$	7.5	20	10							
11												
12												
13												
14		$X_d^{jk}$	0	10	10		0					
15			0	2	0		0					
16			7.5	6	0		1.5					
17			0	0	0		7					
18												
19												

Рис. 5.8. Распределение товаров по транспортным средствам на маршруте 4

Расчитанные варианты распределения отражены на отдельных вкладках для каждого маршрута. Таким образом, разработанная информационная система позволяет распределять товары по транспортным средствам для доставки по каждому маршруту без учета транзита.

#### 5.4. Выводы по главе 5

Предложенная система удовлетворяет требованиям надежности и целостности данных, то есть верифицирует правильность и непротиворечивость данных, вводимых пользователем. Система позволяет эффективно решать планируемые задачи, обеспечивая удобный пользовательский интерфейс.

## Заключение

Эффективность работы логистических центров может быть повышена за счет внедрения современного программного обеспечения. Это способствует развитию внешней торговли, улучшению транспортной инфраструктуры, помогает в принятии решений не только на уровне отдельного предприятия, но и на уровне региональной политики развития региона, способствует устойчивому развитию региона и, соответственно, привлечению новых партнеров и инвесторов.

**Результаты исследования** При выполнении исследования получены результаты, обладающие научной новизной и соответствующие цели и поставленным задачам:

- развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п. 2 паспорта специальности 05.13.18):
  - исследованы возможности и особенности применения распределительной задачи линейного программирования при математическом моделировании оперативной проблемы распределения региональных грузоперевозок с возможностью транзита и проблемы распределения заказов по логистическим центрам, которые показывают необходимость ее аппроксимации разложимой задачей,

т.е. в решения задачи аппроксимации матрицы с положительными элементами в виде произведения столбца и строки;

- для разложимой оперативной проблемы региональных грузоперевозок с возможностью транзита доказана унимодулярность ее матрицы ограничений, что позволило свести многопродуктовую распределительную задачу к однопродуктовой транспортной задаче;
- для разложимой проблемы оперативного распределения товаров по логистическим центрам разработан способ организация системы поддержки принятия решения в случае некорректности проблемы;
- разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (п. 3 паспорта специальности 05.13.18):
  - разработан численный метод аппроксимации матрицы с положительными элементами в виде произведения столбца и строки (т.е. матрицей ранга 1) с вычислительной сложностью  $O(m \cdot n \cdot \log(m \cdot n))$ ;
- реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента (п. 4 паспорта специальности 05.13.18):

- разработан комплекс программ SW2AM для решения задачи аппроксимации матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга и средства инкапсуляции комплекса программ SW2AM в табличный процессор MS EXCELL для решения оперативной проблемы региональных грузоперевозок, проведены вычислительные эксперименты с ним.

Таким образом, в диссертационном исследовании решены все поставленные задачи и достигнута цель исследования. Материалы диссертации опубликованы в 11 печатных работах, из них *три* статьи: [25], [57], [59], – в журналах из перечня ВАК по специальности 05.13.18; одна статья [24] в журнале из перечня ВАК по специальности 08.00.13, *одна* статья: [58] – в рецензируемых изданиях из наукометрических баз Scopus и Web of Science; *одна* зарегистрированная компьютерная программа [34]; *пять* статей: [19], [35], [36], [41], [60] – в сборниках трудов конференций.

## Рекомендации

Разработанные алгоритмы и программное обеспечение рекомендуется использовать специалистам отдела логистики и планирования, а также в учебном процессе.

## **Перспективы дальнейшей разработки темы исследования**

Особенностями задач региональной транспортной логистики являются интервальный характер ограничений и явно выраженная многоиндексность. Необходимо развивать методы решения и постоптимизационного анализа таких задач.



## Список литературы

1. Аникина, Я. А. Логистика и управление цепями поставок. Теория и практика. Основы логистики / Я. А. Аникина, Т. А. Ролкина. — М.: Проспект, 2013. — 344 с.
2. Афраймович, Л.Г. Многоиндексные транспортные задачи с 1-вложенной структурой /Л.Г.Афраймович, А.С.Катеров, М.Х.Прилуцкий // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 11. — С. 18-42.
3. Баев, И. А. Динамика покупательского спроса инновационного товара / И. А. Баев, Д. А. Дрозин // Вестник ЮУрГУ. Серия: Экономика и менеджмент. — 2014. — Т. 8, № 2. — С. 80–85.
4. Бауэрсокс, Д. Дж. Логистика: интегрированная цепь поставок. 2-е изд. / Пер. с англ. / Д. Дж. Бауэрсокс, Д. Д. Клосс. — М.: ЗАО «Олимп-Бизнес, 2005. — 640 с.
5. Бронштейн, Е. М. Детерминированные оптимизационные задачи транспортной логистики / Е. М. Бронштейн, Т. А. Зайко// Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 10. — С. 133-147.
6. Будашевский, В. Г. Технология адаптивного управления синергетическим взаимодействием спроса и предложения на основе проектно-исследовательского комплексного маркетингового эксперимента / В. Г. Будашевский, О. Н. Пастухова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Экономика и менеджмент. —

2016. — Т. 10, № 4. — С. 60–65.
7. Бульба, А. В. Оптимизация складских технологических процессов и расчет складских мощностей при обработке материального потока в терминально-складских комплексах / А. В. Бульба, В. А. Демин // Интегрированная логистика. — 2009. — № 2. — С. 2–5.
  8. Величко, А. С. Облачный сервис для интерактивного моделирования межтерриториальной торговли / А. С. Величко, В. В. Грибова // Моделирование и анализ информационных систем. — 2016. — Т. 23, № 4. — С. 412–426.
  9. Галяутдинов, Р. Р. Механизмы взаимодействия потоков и запасов на предприятии с точки зрения логистики / Р. Р. Галяутдинов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Экономика и менеджмент. — 2016. — Т. 10, № 1. — С. 157–163.
  10. Демин, В. А. Организация взаимодействия складов и грузового автомобильного транспорта / В. А. Демин // Транспорт: наука, техника, управление. — 2009. — № 7. — С. 34–39.
  11. Долгов, А. В. Проблемы оценки логистических процессов в международных рейтингах / А. Долгов // Логистика: проблемы и решения. — 2010. — Т. 6. — С. 50–61.

12. Емеличев, В. А. Многогранники, графы, оптимизация / В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. — 1981. — 344 с.
13. Курганов, В. М. Международные перевозки / В. М. Курганов, Л. Б. Миротин. — М. : Изд. центр «Академия». — 2013. — 304 с.
14. Лакеев, А. В. Метод наименьших модулей для линейной регрессии: число нулевых ошибок аппроксимации / А. В. Лакеев, С. И. Носков // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2012. — №. 2. — С. 48–50.
15. Ламберт, Д. Стратегическое управление логистикой / Д. Ламберт // — М.: ИНФРА. — 2005. — 797 с.
16. Левина, А. Л. Классификация предприятия розничной торговли с учетом признаков логистической интеграции / А. Л. Левина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Экономика и менеджмент. — 2016. — Т. 10, № 4. — С. 170–175.
17. Мезал, Я. А. Устойчивое оценивание параметров авторегрессионных моделей с экзогенными переменными на основе обобщенного метода наименьших модулей / Я. А. Мезал, А. В. Панюков // Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений: Труды V Всерос. конф. — Т. 1. — ГОУ ВПО УГАТУ(Уфа), 2017. — С. 151–155. — Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=30520221>.

18. Миротин, Л. Б. Транспортная логистика / Л. Б.Миротин. — М.: Экзамен, 2003. — 512 с.
19. Панюков, А. В. Математическая модель для решения оперативной проблемы региональных грузоперевозок / А. В. Панюков, Ю. В. Пивоварова, Х. Чалуб // Тр. 70-й конф. преподавателей и сотрудников ЮУрГУ. Челябинск, ЮУрГУ. Май 2018 г. — Изд. центр ЮУрГУ, 2018. — С. 71-76.
20. Панюков, А.В. Развитие транспортной логистики в Челябинской области: проблемы и перспективы применения информационных технологий / А.В. Панюков, Ю.В. Пивоварова // *Вестник ЮУрГУ. Серия: Экономика и менеджмент*. — 2017. — Т. 11, № 1. — С. 7–11.
21. Панюков, А. В. Техника программной реализации потоковых алгоритмов / А. В. Панюков, В. А. Телегин. // *Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование* — 2008. — Т.27. — № 1 — С.78–99.
22. Панюков, А. В. Применение массивно-параллельных вычислений для решения задач линейного программирования с абсолютной точностью / А. В. Панюков, В. В. Горбик // *Автоматика и телемеханика*. — 2012. — № 2. — С. 73–88.
23. Панюков, А. В. Взаимосвязь взвешенного и обобщенного вариантов метода наименьших модулей / А.В. Панюков., А.Н. Тырсин // *Изв. Челяб. науч. центра*. — 2007. — № 1. — С. 6–11. — Режим доступа: <https://elibrary.ru/>

[item.asp?id=9572542](#).

24. Панюков, А. В Проблема распределения товаров по логистическим центрам / А.В Панюков Х. З.Чалуб // Вестник ЮУрГУ. Серия Экономика и менеджмент. — 2018. — Т. 12, № 1. — С. 175–180.
25. Панюков, А. В. Аппроксимация матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга / А. В Панюков, Х. З Чалуб, Я.А Мезал // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. — 2018. — Т. 10, № 2. — С. 28–36.
26. Пападимитриу, Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность/ Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. — М.: Мир. — 1985. — 340 с.
27. Раскин, Л. Г. Многоиндексные задачи линейного программирования / Л.Г. Раскин, И.О Кириченко. — М.: Радио и связь. — 1982. — 242 с.
28. Сушникова, Д. А. Приложение блочно-малоранговых матриц для задачи регрессии на основе гауссовских процессов / Д. А Сушникова // Вычислит. методы и программирование. — 2017. — Т. 18, № 3. — С. 214–220.
29. Твил, Д. Теория линейных экономических моделей / Д.Твил. — М.: Мир. — 1969. — 178 с.
30. Титюхин, Н. О. Инструмент повышения конкурентоспособности транспортного рынка России / Н.О. Титюхин // Логинфо. — 2011. — № 1-2. — С. 9–13.

31. Транспортно-логистические центры: зарубежный опыт [Электронный ресурс]. — Режим доступа: [URL:http://www.elc-ua.com/ru/news/60](http://www.elc-ua.com/ru/news/60).
32. Фирма 1С. — Режим доступа: <http://1c.ru/map.jsp>.
33. Хегай, Ю. А. Перспективы и проблемы развития рынка транспортно-логистических услуг / Ю.А Хегай // Теория и практика общественного развития. — 2014. — Т. 3. — С. 267–271.
34. Чалуб, Х. З. Программный комплекс для задачи аппроксимации матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга: свид. о гос.рег. № 2018666326 / Х.З. Чалуб (IQ), А. В. Панюков (RU); правообладатель ФГАОУ ВО "ЮУрГУ(НИУ)". — Заявка № 20178664133; заявл. 06.12.2018; зарегистр. 17.12.2018, реестр программ для ЭВМ.
35. Чалуб, Х. З. Задача транспортной логистики с промежуточными центрами обслуживания / Х.З Чалуб // Науч поиск: материалы восьмой научной конференции аспирантов и докторантов / Челябинск: Издат центр ЮУрГУ, 2016. — С. 245.
36. Чалуб, Х. З. Вычислительный эксперимент с комплексом программ SW2AM / Х.З Чалуб // Научный обозреватель. — 2019. — №. 9. — С. 44–46. <http://nauchoboz.ru/wp-content/uploads/2019/10/Nauchoboz-9-2019.pdf>

37. Alvarenga, G. B. A genetic and set partitioning two-phase approach for the vehicle routing problem with time windows / G.B Alvarenga, G.R Mateus , G. de Tomi // Computers & Operations Research. — 2007. — Vol. 34, no. 6. — P. 1561–1584.
38. Baran, J. Multiple criteria evaluation of transportation performance for selected agribusiness companies / J. Baran, J. Dark // Procedia of Social and Behavioral Sciences. — 2013. — Vol. 34, no. 6. — P. 1561–1584.
39. Baumgarten, H. Trends und Strategien in der Logistik 2000+ / H. Baumgarten and S/Walter // Eine Untersuchung der Logistik in Industrie, Handel, Logistik-Dienstleistung und anderen Dienstleistungsunternehmen. — Berlin: Techn. Univ, 2000.
40. Bookbinder, J. H. Handbook of Global Logistics Chains /J. H. Bookbinder // Transportation in International Supply. — Springer, 2012.
41. Chalooob, Kh. Problem of Transport Logistics with Intermediate Service Centers / Kh. Chalooob, A.V Panyukov // Proceedings of the 4th International Conference "Information Technologies for Intelligent Decision Making Support", May 17-19, Ufa, Russia. — 2016. — Vol. 1. — P. 92–93.
42. Cordeau, J.-F Combining multicriteria analysis and tabu search for dial-a-ride problems / J.-F Cordeau., G. Laporte, M. Pascoal // Transportation Research. Part B. Methodological. — 2013. — Vol. 52. — P. 1–16.

43. Demir, E. A review of recent research on green road freight transportation / E. Demir, T. Bektas, G. Laporte // *European Journal of Operational Research*. — 2014. — Vol. 237. — P. 775–793.
44. Dib, O. Advance modeling approach for computing multicriteria shortest paths in multimodal transportation networks / O. Dib, M. Manier, L. Moalic // 2016 IEEE Int. Conf. on Intelligent Transportation Engineering. — 2016. — P. 40–44.
45. Dolgov, S. Low-rank solution to an optimization problem constrained by the Navier–Stokes equations / S. Dolgov, M. Stoll // [SIAM Journal on Scientific Computing](#). — 2017. — Vol. 31, no. 1. — P. A255–A280.
46. Flotzinger, C. W. The Impact on Logistics and the Contribution to a Sustainable Development. Austria: Competence Centre for Logistics and Enterprise networks C. W. Flotzinger, H. Hofmann-Prokopczyk, F., Starkl // *Future Scenarios*. — 2008.
47. Ford, J. M. Matrix approximations and solvers using tensor products and non-standard wavelet transforms related to irregular grids / J. M. Ford, I. V. Oseledets, E. E. Tyrtyshnikov // *Rus. J. Numer. Anal. and Math. Modelling*. — 2004. — Vol. 19(2). — P. 185–204.
48. Goldsby, T. The critical role of transportation in business and the economy. Definitive guide to transportation. The principles, strategies, and decisions



- for the effective flow of goods and services / T. Goldsby, D. Tyengar, S. Rao. — Access mode: <http://www.informit.com/articles/article.aspx?p=2171313>. (accessed on 09.03.2018).
49. Hildager, C Shipnet: Ceo”s keynote speech / C. Hildager // ISS reporter. — 2014. — Issue 32. — P.12-14. — Access mode: <http://www.iss-shipping.com/Attachments/flipbook32/files/inc/7d51432eb7.pdf>.
50. International LPI global ranking. — Access mode: <http://lpi.worldbank.org/international/global>.
51. Jabirand, E. Multi-objective optimization model for a green vehicle routing problem / E. Jabirand, V. Panicker, R. Sridharan // Procedia at Social and Behavioral Sciences.—2015. — Vol. 189. — P. 33–39.
52. L’och, M. Evaluation quality the freight transport through application of methods multi-criteria decision / M. L’och, A. Dolinayova // Procedia Economics and Finance. — 2015. — Vol. 32. — P. 210–216.
53. Microsoft научила excel обрабатывать гигантские массивы данных [Интернет-портал]. — Access mode: URL:[http://www.cnews.ru/news/top/microsoft\\_nauchila\\_excel\\_obrabatyvat](http://www.cnews.ru/news/top/microsoft_nauchila_excel_obrabatyvat).
54. Minimizing transportation cost of a joint inventory location model using modified adaptive differential evolution algorithm / A. Jha, K. Somani, M. K. Tiwari et al. // International Journal of Advanced Manufacturing

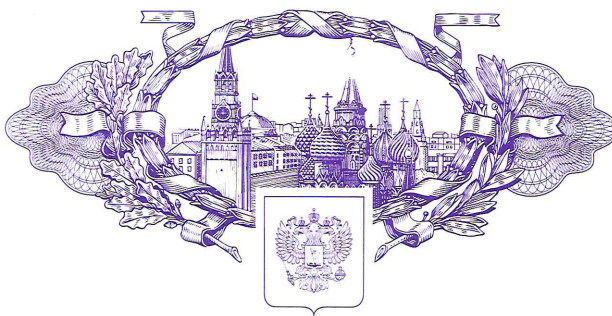
- Technology. — 2012. — Vol. 60, no. 1–4. — P. 329–341.
55. Ojha, A. Transportation policies for single and multi-objective transportation problem using fuzzy logic / A. Ojha, M. K. Mondal, M. Maiti // *Mathematical and Computer Modelling*. — 2011. — Vol. 53, no. 9-10. — P. 1637–1646.
56. Neubauer, R. M. *Business Models in the Area of Logistics*. 1st edition. / R. M. Neubauer. — Gabler Verlag. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8349-6533-2> (accessed on 26.02.2020).
57. Panyukov, A. V. Problems and Prospects of Information Technology Application To Development of Transport Logistics for the Mosul Region / A. V. Panyukov, Kh. Z. Chalob // *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. 2018. Vol. 5, Issue 1. P. 57–62.
58. Panyukov, A. V. Problem of distribution of goods by logistics centers / A. V. Panyukov, Kh. Chalob // *Proceedings of the School-Seminar on Optimization Problems and their Applications (OPTA-SCL 2018)*. Omsk, Russia, July 8-14, 2018. / Ed. by Sergey Belim, Alexander Kononov, Yulia Kovalenko ; Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia. — Vol. 2098. — CEUR Workshop Proceedings (CEUR-WS.org), 2018. — P. 304–314. — Access mode: <http://ceur-ws.org/Vol-2098/paper26.pdf>.

59. Panyukov, A.V. Mathematical model for solving operational problem of regional cargo transportation / A. Panyukov, Y. Pivovarova, Kh. Chalob // Journal of Computational and Engineering Mathematics. — 2019. — Vol. 6, no. 1.— P. 68–73
60. Panyukov A. V., Chalob K. Z., Mezaal Y. A. [Approximation of a Matrix with Positive Elements by a Matrix of a Unit Rank](#) // 2018 IEEE Symposium on Computer Applications and Industrial Electronics (ISCAIE 2018). 28 – 29 April 2018 Penang, Malaysia. Penang, Malaysia: IEEE, 2018. ”— April. P. 234–237.
61. Panyukov, A. V. Stable estimation of autoregressive model parameters with exogenous variables on the basis of the generalized least absolute deviation method / A.V. Panyukov, Ya. A. Mezaal // IFAC-PapersOnLine. — 2018. — V. 51, no 11. — P.1666-1669.
62. Pilot, C. A model for allocated versus actual costs in assignment and transportation problems / C. Pilot, S. Pilot // European Journal of Operational Research. — 1999. — Vol. 112, no. 3. — P. 570–581.
63. Redmer, K. J. Multiple objective optimization of the fleet sizing problem for road freight transportation / K.J. Redmer, A. Sawicki // Journal of Advanced Transportation. — 2011. — Vol. 42. — P. 379–427.

64. Romanova, A.A. Problems of the formation of a single transport space on sections of international transport corridors / A. Romanova, et all // Procedia Computer Science. — 2019. — Vol. 149. — P. 537–541. — Access mode: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>.
65. Sawik, B. Multi objective traveling salesman and transportation problems with environmental aspects. / B. Sawik, J. Faulin // Applications of Management Science — 2017. — Vol. 18. — P. 21–55.
66. Seraya, O. V. Allocation problem of linear programming / O. V. Seraya // Systems of Information Processing. — 2013. — № 2(109). — P. 168–170.
67. Shipnet. — Access mode: <http://www.shipnet.no/Home>.
68. Stok, J. R. Strategic Logistics Management / J. R. Stok, V. Lambert. — N.-Y.: McGraw-Hill, 2000. — 872 p.
69. Sushnikova, D. A. Preconditioners for hierarchical matrices based on their extended sparse form / D.A. Sushnikova, I.V. Oseledets // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2016. — Vol. 31. — P. 29–40.
70. Tyrtysnikov, E. E. Mosaic-skeleton approximations / E. E Tyrtysnikov // Calcolo. — 1996. — Vol. 33, no. 1. — P. 47–57.
71. World economic forum global competitiveness reports. — Access mode: <http://www.weforum.org/reports>.

## Приложение А

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018666326

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ЗАДАЧИ  
АППРОКСИМАЦИИ МАТРИЦЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ  
ЭЛЕМЕНТАМИ МАТРИЦЕЙ ЕДИНИЧНОГО РАНГА

Правообладатель: *федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» (ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)» (RU)*

Авторы: *Чалуб Халид З Чалуб (IQ),  
Панюков Анатолий Васильевич (RU)*

Заявка № 2018664133

Дата поступления 06 декабря 2018 г.

Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ 17 декабря 2018 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

*Г.П. Ивлиев* Г.П. Ивлиев



## Приложение Б

## Листинг с исходным текстом программы

## «Gen4DecomPrb.exe»

```
1. // Gen4DecomPrb.cpp : Defines the entry point for the console application.
2. // This applicatin generates the matrix  $L=A*B^t+Err$ , here A,B are columns,
3. // Err is an random error matrix
4. // Input file "Data4Gnrt.txt" containes:
5. // size of A, size of B, value id for random generator initiation,
6. // and range variable D
7. // Output file "DataPrb.txt" containes:
8. // size of A, size of B, and matrix L
9. //Output file "Answer.txt" contains the columns A and B, and matrix Err
11. #include "stdafx.h"
12. double random(double d){
13. double r=((double)rand()/(1.+RAND_MAX));
14. return (d*r);
15. }
16. int main(int argc, char* argv[]){
17. int m,n,id,e;
18. double *A,*B,**L,**Err, D;
19. char c;
20. try{ // Input from file "DataGnrtn.txt"
```

```
21.     ifstream f("DataGnrtn.txt"); if(!f) throw 1;
22.     do f>>c; while (c!=':');
23.     f>>m;     // number of rows
24. if(m<2)throw 2;
25. A= new double [m+1];
26. L=new double* [m+1];
27. Err=new double*[m+1];
28. do f>>c; while (c!=':');
29. f>>n; // number of columns
30. if(n<2)throw 3;
31. B=new double [n+1];
32. for(int i=0;i<m;i++) {
33. L[i]=new double[n+1];
34. Err[i]=new double[n+1];
35. }
36. do f>>c; while (c!=':');
37. f>>id; // random initializer
38. if(!id) throw 4;
39. do f>>c; while (c!=':');
40. f>>e;     // distribution parameter (%)
41. if((e<0)||e>100) throw 5;
42. f.close();
43. } catch(int i){
44. switch (i) {
```

```

45.         case 1: cout<<'\n'<<"File ""DataGnrtn.txt"" does not exist"<<'\n';
46.     return(1);
47.         case 2: cout<<'\n'<<"Illegal m="<<n<<'\n';
48.     return (2);
49.     case 3: cout<<'\n'<<"Illegal n="<<m<<'\n';
50.         return(3);
51.     case 4: cout<<'\n'<<"Illegal id="<<id<<'\n';
52.         return(4);
53.     case 5: cout<<'\n'<<"Illegal e="<<e<<'\n';
54.     default: break;
55. };
56. };
57. D=(double)e/50.;
58. cout<<"This applicatin generates the matrix  $L=A*B^t+Err$ , here A,B
59.         are random columns, Err is an random matrix"<<'\n';
60. cout<<" Input data file ""DataGnrtn.txt"
61.         " contains generator parameters:"<<'\n';
62. cout<<" Number of rows: "<<m<<'\n';
63. cout<<" Number of columns: "<<n<<'\n';
64. cout<<" Initiator ID: "<<id<<'\n';
65. cout<<" Range value: "<<D<<'\n';
66. ofstream g("Answer.txt");
67. g.setf(ios::scientific|ios::showpos);
68.     // %Seed the random-number generator with current time so that

```



```
69. // %the numbers will be different every time we run.
70. if(id) srand(id); else srand( (unsigned)time( NULL ) );
71. g<<"column A:"<<'\n';
72. for(int i=0; i<m;i++){
73. A[i]=random(100.);
74. g<<A[i]<<'\t';
75. }
76. g<<'\n'<<"column B:"<<'\n';
77. for(int j=0; j<n;j++){
78. B[j]=random(100.);
79. g<<B[j]<<'\t';
80. }
81. g<<'\n'<<"matrix Err:"<<'\n';
82. for(int i=0; i<m;i++){
83. for(int j=0; j<n;j++){
84. double err=0.5*D - random(D);
85. err=exp(err);
86. Err[i][j]=err;
87. g<<Err[i][j]<<'\t';
88. }
89. g<<'\n';
90. }
91. g.close();
92. ofstream f("DataPrb.txt");
```

```
93. f<<m<<'\\n'<<n<<'\\n';
94. f.setf(ios::scientific|ios::showpos);
95. for(int i=0; i<m;i++){
96. for(int j=0; j<n;j++){
97. L[i][j]=A[i]*B[j]*Err[i][j];
98. f<<L[i][j]<<'\\t';
99. }
100. f<<'\\n';
101. }
102. f.close();
103. cout<<'\\n'<<"Problem is generated and written
                                in file ""DataPrb.txt"" "<<'\\n';
104. cout<<'\\n'<<"File ""AnswerPrb.txt"" contains the answer
                                of it problem "<<'\\n';
105. cout<<"Input any simbol...";
106. cin>>c;
107. return(0);
108. }
```

## Приложение В

## Листинг с исходным текстом программы

## «Decomp4Distr.exe»

```
1. // Decomp4Distr %.cpp : Defines the entry point for the console application.
2. #include "stdafx.h"
3. double Decomp(
4. int m, int n, //Size of matrix L
5. double **l, // Items of matrix L
6. double *a, double *b // Result of decomposition
7. ){
8. int *I=new int[n+m];
9. int Km=floor((n-1.)/2.);
10. int Kp=ceil((n-1.)/2.);
11. double A=0.;
12. for(int i=0;i<m;i++){
13. for(int j=0; j<n; j++)I[j]=j;
14. for(int j=1; j<n; j++)
15. for(int k=0; k<n-j; k++)
16. if(l[i][I[k]]>l[i][I[k+1]]){
17. int temp=I[k+1];
18. I[k+1]=I[k];
19. I[k]=temp;
```

```

20. }

21. a[i]=sqrt(l[i][I[Km]]*l[i][I[Kp]]);

22. for(int j=0; j<n; j++)l[i][j]/=a[i];

23. A=(A>a[i])? A : a[i];

24. }

25. int *J=I;

26. int Qm=floor((m-1.)/2.);

27. int Qp=ceil((m-1.)/2.);

28. double B=0.;

29. for(int j=0;j<n;j++){

30. for(int i=0; i<m; i++)J[i]=i;

31. for(int i=1; i<m; i++)

32. for(int k=0; k<m-i; k++)

33. if(l[J[k]][i]>l[J[k+1]][i]){

34. int temp=J[k+1];

35. J[k+1]=J[k];

36. J[k]=temp;

37. }

38. b[j]=sqrt(l[J[Qm]][j]*l[J[Qp]][j]);

39. for(int i=0; i<m; i++)l[i][j]/=b[j];

40. B=(B>b[j])? B : b[j];

41. }

42. delete[] I;

43.

```

```
44. double C=sqrt(A/B);
45. for(int i=0; i<m;i++)a[i]/=C;
46. for(int j=0; j<n;j++)b[j]*=C;
47. double E=0.;
48. for(int i=0; i<m;i++)
49. for(int j=0; j<n;j++)
50. E+=log10(l[i][j]);
51. return (E);
52. }
54. int main(int argc, char* argv[]){
55. if(argc!=3){
56. cout<<'\\n'<<"Correct call is 'Decomp4Distr <path to input file> ";
57.     cout <<" <path to output file>' "<<'\\n';
58. return (1);
59. }
60. fstream f;
61. try{
62. f.open(argv[1]); if(!f) throw "Input File Is Absent";
63. }catch(char *s){
64. cout<<'\\n'<<s<< "Generated object is empty"<<'\\n';
65. }
66. unsigned N, M;
67. f>>M; f>>N;
68. double**L=new double*[M+1];
```

```

69. for(int i=0; i<M; i++){
70. L[i]=new double[N+1];
71. for(int j=0; j<N; j++) f>>L[i][j];
72. }
73. // Echo Print
74. ofstream g(argv[2]);
75. g<<"M="<<M<<" N= "<<N<<'\n';
76. g<< "InPut"<<'\n';
77. for(int i=0; i<M; i++) {
78. for(int j=0; j<N; j++) g<<L[i][j]<< '\t';
79. g<<'\n';
80. }
81. double*A=new double[M+1];
82. double*B=new double[N+1];
83. double err=Decomp(M,N,L,A,B);
84. g<<"A="<<'\n';
85. for(int i=0; i<M; i++) g<<A[i]<<'\t'; g<<'\n';
86. g<<"B="<<'\n';
87. for(int j=0; j<N; j++) g<<B[j]<<'\t'; g<<'\n';
88. g<< "A*B"<<'\n';
89. for(int i=0; i<M; i++) {
90. for(int j=0; j<N; j++) g<<A[i]*B[j]<< '\t';
91. g<<'\n';
92. }

```

```
93. g<< "(A*B)/L"<<'\n';
94. for(int i=0; i<M; i++) {
95. for(int j=0; j<N; j++) g<<A[i]*B[j]/L[i][j]<< '\t';
96. g<<'\n';
97. }
98. g<< "Log_10(ERR)="<< err<<'\n';
99. g.close(); return 0;
100. }
```

## Приложение Г

**ЛИСТИНГ С ИСХОДНЫМ ТЕКСТОМ ПРОГРАММЫ  
ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

```
1. int main(void){
2.     // Данные для генератора
3.     int MN[3]={10,20,40};
4.     double e[3]={0,10,20};
5.     int Num=100;
6.     double *A= new double [42];
7.     double *B=new double [42];
8.     double **L=new double* [42];
9.     double **Err=new double*[42];
10.    for(int i=0;i<42;i++) {
11.        L[i]=new double[42];
12.        Err[i]=new double[42];
13.    }
14.    // Данные для ответа
15.    double *AA= new double [41];
16.    double *AB=new double [41];
17.    double *AEr=new double [101];
18.    // Данные для отчета
19.    ofstream f("ResSim.txt");
```



```

20. for(int m=0; m<3; m++){
21. int M=MN[m];
22. f<<"m="<<M<<'\n';
23. for(int n=0; n<3; n++){
24. int N=MN[n];
25. f<<"n="<<N<<'\n';
26. for(int k=0; k<3; k++){
27. double E=e[k];
28. f<<"e(%)="<<E<<'\t';
29. double mAEr=0.;
30. for(int id=1; id<=Num; id++){
31. Gen(M, N, E, id, A, B, Err, L);
32. AEr[id]=Decomp(M, N, L, AA, AB);
33. mAEr+=AEr[id];
34. }
35. mAEr/=Num;
36. f<<"Me="<<mAEr<<'\t';
37. double dAEr=0;
38. for(int id=1; id<=Num; id++)
39.             dAEr+=((mAEr-AEr[id])*(mAEr-AEr[id]));
40. dAEr/=Num;
41. dAEr=sqrt(dAEr);
42. f<<"De="<<dAEr<<'\n';
43.             }

```

```
44.         }
```

```
45.     }
```

```
46. return 0;
```

```
47. }
```