

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

А.И.К.Т.

Аль Исави Джавад Кадим Тахир

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ
ПРОЦЕССОВ ТЕРМО- И ГИДРОДИНАМИКИ**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент А.А. Замышляева

ЧЕЛЯБИНСК – 2017

Содержание

Обозначения и соглашения	4
Введение	6
Глава 1. Математические модели эволюционных процессов	28
1.1. Математическая модель Дзекцера	28
1.2. Математическая модель Фишера – Колмогорова и математическая модель диффузии четвертого порядка . . .	33
1.3. Математическая модель Кана – Хилларда	36
1.4. Квазибанаховы пространства и линейные операторы	40
1.5. Квазисоболевы пространства и квазиоператоры Лапласа. Редукция математических моделей	44
Глава 2. Аналитические методы исследования класса эволюционных моделей в квазисоболевых пространствах	51
2.1. Относительно секториальные операторы	51
2.2. Вырожденные голоморфные разрешающие полугруппы . . .	54
2.3. Обобщенная задача Шоултера – Сидорова и фазовое пространство эволюционной модели соболевского типа . . .	63
2.4. Задача Коши для неоднородного уравнения	69
2.5. Аналитическое исследование аналога математической модели Дзекцера	75
2.6. Аналитическое исследование аналогов математических моделей Фишера – Колмогорова, Кана – Хилларда и диффузии четвертого порядка	78

Глава 3. Численное исследование класса эволюционных моделей в квазисоболевых пространствах	80
3.1. Качественное исследование математических моделей: инвариантные пространства и экспоненциальные дихотомии	80
3.2. Свойства решений моделей Дзекцера, Фишера – Колмогорова, Кана – Хилларда и диффузии четвертого порядка в квазисоболевых пространствах	85
3.3. Алгоритм численного метода	89
3.4. Описание программ	92
3.5. Вычислительные эксперименты для аналогов моделей в квазисоболевых пространствах	99
3.6. Вычислительные эксперименты для математических моделей Дзекцера и Фишера – Колмогорова	102
Заключение	108
Список литературы	111
Приложение	125

Обозначения и соглашения

1. Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами готического алфавита. Исключения составляют множества с уже устоявшимися названиями, например:

\mathbb{N} — множество натуральных чисел,

\mathbb{R} — множество действительных чисел,

\mathbb{R}_+ — множество $\{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$,

\mathbb{C} — множество комплексных чисел,

$W_q^m(\Omega)$ — пространство Соболева,

ℓ_q — пространство последовательностей,

Элементы множеств обозначаются строчными буквами латинского или, в особых случаях, греческого алфавитов. Например,

$$\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$$

обозначает линейную оболочку векторов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$.

2. Множества отображений множеств (т.е. множества операторов) обозначаются рукописными заглавными буквами латинского алфавита, например:

$\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ — множество линейных непрерывных операторов, определенных на пространстве \mathfrak{U} и действующих в пространство \mathfrak{F} ;

$\mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ — множество линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве \mathfrak{U} и действующих в пространство \mathfrak{F} ;

$\text{dom}M$ — область определения оператора M , $\text{im}M$ — образ оператора M .

Отметим, что вместо $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U})$ и $\mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U})$ ради краткости будем писать соответственно $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $\mathcal{Cl}(\mathfrak{U})$.

3. Элементы множеств операторов мы будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита. Кроме того, символами \mathbb{I} и \mathbb{O} мы будем обозначать соответственно "единичный" и "нулевой" операторы, области определения которых ясны из контекста.

4. Все рассуждения проводятся в вещественных квазибанаховых пространствах, однако при рассмотрении "спектральных" вопросов вводится их естественная комплексификация. Все контуры ориентированы движением "против часовой стрелки" и ограничивают область, лежащую "слева" при таком движении.

5. Символ \bullet лежит в конце доказательства.

Введение

Актуальность темы исследования

В настоящее время большое число работ посвящено изучению эволюционных математических моделей в различных прикладных задачах, в частности, в области гидродинамики, теории фазовых переходов критических точек, а также при описании процессов распада фаз вещества. Примерами таких моделей могут служить эволюционные математические модели на основе уравнений Дзекцера [13], Кана – Хилларда [68], уравнения диффузии 4-го порядка [60, 81, 83, 89, 98], а также обобщенного уравнения Фишера – Колмогорова [73].

Математическая модель Дзекцера

Большой практический интерес [40, 41] в теории движения грунтовых вод представляет уравнение

$$(\lambda - \Delta) \frac{\partial u}{\partial t} = (\beta \Delta - \alpha \Delta^2) u + f(t) \quad (0.1)$$

с граничным условием

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times [0, T],$$

где параметры $\lambda, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+$ описывают характеристики системы, а вектор-функция $f(t)$ отвечает внешнему воздействию на систему.

Уравнение (0.1), которое является обобщением уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью, моделирует эволюцию свободной поверхности фильтрующей жидкости. В литературе его называют уравнением Дзекцера [13]. В силу того, что выражение слева в уравнении (0.1) может обратиться в нуль при некоторых значениях параметра λ , данное уравнение относится к обширному классу неклассических уравнений математической физики [51].

Обобщенная модель Фишера – Колмогорова

Рассмотрим математическую модель на основе обобщенного уравнения Фишера – Колмогорова

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\gamma \Delta^2 u + \Delta u + f(u), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (0.2)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times [0, T],$$

где $f(u) = u - u^3$, $T > 0$, Ω ограниченная область в \mathbb{R}^d , $d \leq 2$, и $\gamma > 0$ – коэффициент гипердиффузии. Уравнение (0.2) является обобщением классического уравнения Фишера – Колмогорова при $\gamma = 0$, которое появилось недавно при изучении фазовых переходов критических точек (точек Лифшица) [73] и исследовалось как модельное уравнение высокого порядка для бистабильных систем [74].

Если выбрать $\gamma > 0$, то модель будет стабильной (устойчивой) на коротких волнах, в противном случае пространственная производная четвертого порядка не существенно изменит качественные особенности однородных состояний $u = \pm 1$ и $u = 0$.

Модель диффузии четвертого порядка

Математическая модель диффузии четвертого порядка с постоянным коэффициентом диффузии, порожденная функционалом энергии

$$H = \int_a^b u_x^2,$$

имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta^2 u \quad (0.3)$$

и граничное условие имеет вид

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times [0, T].$$

Уравнение диффузии четвертого порядка в отличие от уравнений диффузии второго порядка, не подчиняется принципу максимума. В решениях стандартных начально-краевых задач для эволюционного уравнения диффузии четвертого порядка могут появиться новые экстремумы. А именно, при решении эволюционных уравнений четвертого порядка с гладкими начальными условиями можно наблюдать появление новых "структур". Математическая модель диффузии четвертого порядка находит применение во многих областях науки и техники, включая теорию тонких пленок [98]; диффузию на поверхности твердых тел [60, 89]; диффузию поверхностно-активных веществ в ячейках Хеле – Шоу [81]; проектирование специальных кривых на поверхностях [83].

Математическая модель Кана – Хилларда

В цилиндре из \mathbb{R}^3 с границей класса \mathcal{C}^1 рассмотрим математическую модель на основе уравнения Кана – Хилларда [68]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta[F'(u) - \epsilon^2 \Delta u] \quad (0.4)$$

с граничным условием

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times [0, T]$$

Здесь $F(u)$ является плотностью Гельмгольца свободной энергии молекулы однородной системы с составом u , а k – положительная константа. Часто называемая коэффициентом градиента энергии ($k = \epsilon^2, 0 < \epsilon^2 \ll 1$), которая связана с межфазной энергией, $u(x, t)$ представляет собой концентрацию одной из двух компонент $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \Omega = (0, L)$. Концентрацию следует понимать или как объемную долю, или как массовую долю, в зависимости от того какая физическая система исследуется.

Уравнение (0.4) является уравнением математической физики, которое описывает процесс разделения фаз, т.е. механизм с помощью которого смесь двух или более веществ, разделяется на отдельные области с различным химическим составом и физическими свойствами.

Все математические модели, основанные на уравнениях (0.1), (0.2), (0.3) и (0.4), могут быть представлены как граничные задачи для уравнения вида

$$Q_n(\Delta)u_t = R_s(\Delta)u + g, \quad (0.5)$$

где $Q_n(\Delta)$, $R_s(\Delta)$ многочлены степени $n, s \in \mathbb{N}$ от оператора Лапласа $\Delta : W_q^{m+2}(\Omega) \rightarrow W_q^m(\Omega)$, а $W_q^m(\Omega)$ – пространства Соболева, $q \geq 1$, $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Здесь Ω ограниченная область в \mathbb{R}^d с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$. Вектор-функция g описывает внешнее воздействие на систему. Отметим, что во всех приведенных моделях $n < s$.

В последнее время возрос интерес к уравнениям в квазибанаховых пространствах. Начаты исследования операторно-дифференциальных уравнений в квазисоболевых пространствах [3, 4, 22, 44, 55]. Квазинормированные пространства исследуются, как в абстрактных задачах [2, 6, 82], так и в связи с их использованием при решении прикладных задач [8, 38].

Одним из наиболее часто используемых подходов исследования уравнений вида (0.5) является метод, который опирается на разложение искомой функции по собственным функциям оператора Лапласа и ее представлении с помощью коэффициентов этого разложения. В силу чего уравнение (0.5) можно рассматривать в пространствах последовательностей (из коэффициентов ряда Фурье). Более того, в таких пространствах возможно расширить множества значений параметров, характеризующих выбранные пространства. Например, для пространств последовательностей возможен случай $0 < q < 1$, который в пространствах функций рассматривать невозможно [96]. Преимущества такого подхода отмечались при решении некоторых технических задач (см. по этому поводу [8]).

Квазинормированным пространством $(\mathfrak{U}, \|\cdot\|)$ называется линейное пространство \mathfrak{U} над полем \mathbb{R} с квазинормой $\|\cdot\|$, которая отличается от нормы только аксиомой "неравенство треугольника":

$$\forall u, v \in \mathfrak{U} \quad \|u + v\| \leq C(\|u\| + \|v\|),$$

где константа $C \geq 1$. Если $C = 1$, то квазинорма становится нормой, а квазинормированное пространство превращается в нормированное. Вообще говоря, квазинормированное пространство не нормируемо, но метризуемо [6, гл. 3]. Таким образом, для квазинормированного пространства имеют место понятия фундаментальной последовательности и полноты. Полное квазинормированное пространство \mathfrak{U} называется *квазибанаховым*. Любое банахово пространство является квазибанаховым, а обратное – неверно.

Понятие квазибанаховых пространств неразрывно связано с понятием банаховых пространств [6, 65]. Однако самостоятельный интерес к квазибанаховым пространствам, как к объекту исследования, появился сравнительно недавно, примером этого могут служить работы Н. Кэлтона (N. Kalton) [85], кроме того, такие пространства возникают при исследовании абелевых групп [6].

Известно, что в общем случае в функциональных квазибанаховых пространствах не могут быть построены отображения, отличные от нулевого и тождественного [96] (например, в пространстве $L_q[a, b]$, $0 < q < 1$). Вместе с тем, это справедливо не для всех квазибанаховых пространств. Так, в пространствах последовательностей ℓ_q , $0 < q < 1$ и построенных на их основе квазисоболевых пространствах ℓ_q^m , $0 < q < 1$, $m \in \mathbb{R}$ существуют линейные отображения, отличные от тривиальных [3, 6]. Подчеркнем, что в данном диссертационном исследовании рассматриваются только такие квазибанаховы пространства, которые в дальнейшем будем называть квазисоболевыми пространствами.

Актуализирует исследование эволюционных уравнений то, что полученные ранее, более 20 лет назад, результаты в банаховых пространствах, спустя некоторое время оказались применимы в теории динамических измерений [58], в теории оптимального управления [31], теории устойчивости уравнений соболевского типа [43], а также при изучении уравнений соболевского типа высокого порядка [16]. Уравнения соболевского типа возникают при моделировании различных процессов в естественных и технических науках [75, 101]: уравнение Дзекцера, описывающее эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [13], уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной, моделирующее динамику вязко-упругой жидкости в трещиновато-пористой среде [5], уравнение волн Россби [45], система уравнений Соболева, линеаризованная система уравнений Навье – Стокса [28] и многие другие системы уравнений гидродинамики [35, 52, 53]. Для исследования такого рода прикладных задач при более общих условиях необходимо развитие теории вырожденных голоморфных (полу)групп операторов в квазисоболевых пространствах.

Теория вырожденных групп операторов, как средство исследований целого класса математических моделей, показала свою эффективность как при аналитических, так и при численных исследованиях. Поэтому для аналитического исследования класса эволюционных моделей в данной диссертации стала актуальной разработка теории вырожденных полугрупп операторов в квазисоболевых пространствах. Все вышеуказанное свидетельствует об актуальности избранных методов исследования.

Постановка задач

Пусть $Q_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^s d_j \lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих корней, степеней n и s , соответственно, причем $n < s$ и $d_s c_n < 0$. Рассмотрим операторы $Q_n(\Lambda)u = \{Q_n(\lambda_k)u_k\}$, где $\{u_k\} \in \ell_q^{m+2n}$ и $R_s(\Lambda)u = \{R_s(\lambda_k)u_k\}$,

$n \in \mathbb{N}$, где $\{u_k\} \in \ell_q^{m+2s}$, а монотонная последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$. В силу задания (по построению), оператор $Q_n(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а оператор $R_s(\Lambda) \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $\text{dom} R_s(\Lambda) = \ell_q^{m+2s}$, где $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$.

Рассмотрим класс эволюционных уравнений

$$Q_n(\Lambda)\dot{u} = R_s(\Lambda)u \quad (0.6)$$

в квазисоболевых пространствах последовательностей. Положив $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$, будем рассматривать уравнение (0.6) в рамках абстрактного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \quad (0.7)$$

Вектор-функция $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathfrak{U})$ называется решением уравнения (0.7), если при подстановке она обращает (0.7) в тождество. Решение $u = u(t)$ такого уравнения называется решением задачи Коши

$$u(0) = u_0, \quad (0.8)$$

если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (0.8) при некотором элементе $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Рядом исследователей, например в [36, 49, 78], отмечается, что при произвольных начальных данных задача Коши (0.8) неразрешима для уравнения (0.7), поэтому целесообразным является рассмотрение задачи Шоултера–Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \quad (0.9)$$

где P – проектор на образ разрешающей группы операторов уравнения (0.7). Отметим, что задача Шоултера–Сидорова в невырожденном случае совпадает с задачей Коши, а в вырожденном — может быть решена при произвольных начальных данных.

В работе исследована разрешимость начальных задач (0.8) и (0.9) как для уравнения (0.7), так и для неоднородного уравнения вида

$$L\dot{u} = Mu + g, \quad (0.10)$$

где $g : [0, T] \rightarrow \mathfrak{F}$ отвечает внешнему воздействию на систему.

Подчеркнем, что при исследовании задачи (0.8), (0.10) необходимо получение дополнительного условия "согласования начальных данных".

Целью работы является аналитическое и численное исследование класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах, возникающих при описании гидро- и термодинамических процессов, с разработкой методов и алгоритмов численного решения и реализацией их в виде комплекса программ.

Для достижения поставленной цели необходимо реализовать следующие **задачи**:

1. Разработать аналитический метод исследования одного класса эволюционных математических моделей на основе теории вырожденных голоморфных полугрупп в квазибанаховых пространствах последовательностей; изучить качественные свойства решений в виде условий существования дихотомий с построением инвариантных пространств.

2. Исследовать в квазисоболевых пространствах аналоги математической модели Дзекцера; обобщенной математической модели Фишера – Колмогорова; математической модели диффузии четвертого порядка; математической модели Кана – Хилларда с начальными условиями Шоултера – Сидорова или Коши.

3. Разработать численный метод исследования задачи Коши для одного класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах.

4. Разработать комплекс программ нахождения численного решения задачи Коши для моделей, рассматриваемых в квазисоболевых пространствах.

5. Провести вычислительные эксперименты для исследуемых математических моделей.

Историография вопроса

Приведем историографию работ, в которых проводились исследования или разрабатывались методы, сходные с развиваемыми в данной работе. Также представим краткое описание истории исследования представленных математических моделей.

Обобщенное уравнение Фишера – Колмогорова (0.2) было предложено в 1987 году P. Collet, C. Elphick и D. Rapahux [72], а в 1988 году G. Dee и W. van Saarloos [74] как обобщение классического уравнения Фишера – Колмогорова

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u - u^3 \quad (0.11)$$

которое играет важную роль в исследованиях формирования паттернов (шаблонов) в бистабильных системах [62, 93, 97]. Уравнение (0.11) является прототипом уравнения, возникающего при изучении распространения фронта нестабильных состояний. Его можно рассматривать как динамическое уравнение для соответствующих медленных переменных химических волн, когда его расширение в комплексном поле является амплитудой уравнения для динамики близких к порогу различных неустойчивостей. Поскольку диффузное слагаемое $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ стабилизируется, уравнение (0.11) представляет бистабильную систему с двумя пространственно однородными стабильными состояниями $u = \pm 1$. Состояние $u = 0$ нестабильно к длинноволновым возмущениям. Распространение фронтов в этом нестабильном состоянии хорошо изучено [62]. Для достаточно локализованных начальных условий

$$u(x, 0) > 0,$$

фронты развиваются долгое время в виде $u(x - v^*t)$ со скоростью $v^* = 2$. В асимптотической динамике, они представляют собой равномерное движение, соединяющее состояния $u = 0$ и $u = 1$.

Обобщенное уравнение Фишера – Колмогорова (0.2) возникает в различных ситуациях, таких как распространение доменных стенок жидких кристаллов, бегущих волн в реакции-диффузии, а также в мезоскопической теории как модель фазового перехода в бинарной системе вблизи критических точек (точек Лифшица). В этих ситуациях градиентными слагаемыми высшего порядка функционала свободной энергии больше нельзя пренебречь и производная четвертого порядка становится важной.

В последнее время внимание было сосредоточено на стационарном состоянии уравнения (0.2). Целью исследования стационарного состояния уравнения (0.2) является изучение гетероклинического решения (так называемые кинки) связанных с точками равновесия $u = -1$ и $u = 1$.

Обобщенное уравнение Фишера – Колмогорова возникает при изучении особых точек (так называемых точек Лифшица) при фазовых переходах и в качестве эволюционного уравнения в градиентных системах, описываемых функционалом энергии

$$I(u) = \int \left[\frac{\gamma}{2}(u'')^2 + \frac{\beta}{2}(u')^2 + F(u) \right] dx, \quad \gamma > 0, \beta \in \mathbb{R},$$

где потенциал $F(u) = \frac{1}{4}(1 - u^2)^2$. Для получения обобщенного уравнения Фишера – Колмогорова, следует выбирать $\beta = 1$.

Другое важное применение обобщенного уравнения Фишера – Колмогорова было найдено в теории неустойчивости в нематических жидких кристаллах [103].

В исследованиях материалов второго порядка [70] также используется функционал $I(u)$ при $\beta < 0$. Стационарные точки для $I(u)$ эквивалентны равновесным решениям уравнения Свифта – Хоэнберга [71]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u + \alpha u - u^3, \quad \alpha > 0.$$

Уравнение диффузии четвертого порядка (0.3) в банаховых пространствах изучалось многими исследователями в различных отраслях науки,

например, при исследовании теории тонких пленок [98], при проектировании специальных кривых на поверхностях [83], а также при исследовании диффузии на поверхности твердых тел [89, 60] и поверхностно-активных веществ в ячейках Хеле – Шоу [81].

Уравнение Кана – Хилларда (0.4) описывает процесс разделения фаз, т.е. механизм с помощью которого смесь двух или более веществ, разделяется на отдельные области с различным химическим составом и физическими свойствами. Одним из видов фазового разделения является спинодальный распад. Спинодальный распад – это начальная стадия фазового перехода в системе, находящейся вне области термодинамически устойчивых состояний, что происходит в случае достаточно быстрого фазового перехода. Спинодальный распад состоит в расслоении однородного вещества на различные фазы. При спинодальном распаде расслоение происходит однородно по всему объему вещества, в этом отличие от зародышеобразования (нуклеации) для метастабильных состояний. Спинодальный распад определяется диффузией, что позволяет описывать процесс простыми уравнениями, чем в других случаях.

Отметим некоторые результаты [67, 69] исследования уравнений Кана – Хилларда вида (0.4). Новик–Коэн и Сигел одними из первых провели анализ осциллирующих одномерных решений с конечной амплитудой. Эллиот и Сонгму доказали существование глобального решения в L_2 для постоянного коэффициента мобильности и свободной энергии полиномиального роста. Глобальное решение так же получено в работах Каффарелли и Мулера. Существование и единственность решения для двойного потенциала (помех) было показано Бловей и Эллиот, а для логарифмических потенциалов с постоянным коэффициентом мобильности показано Дебуше и Деттори. Миранвилль доказал существование и единственность решения в случае слабого взаимодействия. Отметим также то, что численное моделирование спинодального распада являет-

ся отдельной задачей (см. [39, 63, 64]).

Уравнение Кана – Хилларда (0.4) применяется при исследовании различных задач. Так, например, оно используется при описании: разделения двух и трехкомпонентных фаз жидкой смеси [63]; многофазности текучей среды [67, 86]; потока Тейлора в мини/микроканалах [79]; двухслойного потока в каналах с резкими топографическими особенностями [104]; спиnodального разложения с составом зависящим от тепловых проводимостей [88]; фаз разложения и огрубление шариков припоя [64]; феномена термически индуцированного разделение фаз [102], эволюции произвольной морфологии и комплексной микроструктуры, такой как кристаллизация твердых структурных фазовых переходов [69].

Для аналитического исследования аналогов моделей, основанных на уравнениях (0.1), (0.2), (0.3) и (0.4), в квазисоболевых пространствах будем использовать теорию полугрупп операторов. Для этого исследуем операторно-дифференциальное уравнение вида (0.7) в квазисоболевых пространствах.

Если оператор L непрерывно обратим, то уравнение (0.7) можно редуцировать к паре эквивалентных ему уравнений

$$\dot{u} = Su, \quad \dot{f} = Tf, \quad (0.12)$$

где операторы $S \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, и $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$. Уравнения (0.12) будем рассматривать в рамках уравнения

$$\dot{v} = Av, \quad (0.13)$$

где оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$, а \mathfrak{V} – квазибанахово пространство. Вектор-функцию $v \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathfrak{V})$ назовем решением уравнения (0.13).

Исследования уравнения вида (0.13) в банаховых пространствах являются классическими и им посвящены многие работы (см. напр., [28, 34, 37, 56, 57, 87, 90]). Все эти работы условно можно разделить на два вида. К первому из них следует отнести работы, в которых результаты о раз-

решимости начально–краевых задач для таких уравнений и систем получены посредством использования свойств дифференциальных операторов, входящих в уравнение (0.13). Ко второму можно отнести изучение абстрактных уравнений типа (0.13) с приложением к задачам математической физики. Здесь "прикладные" задачи являются иллюстрациями исследования "абстрактных" задач. Применение теории разрешающих (полу)групп относится ко второму виду.

В свое время полу(группы) уравнения (0.7) в банаховых пространствах рассматривались разным авторами [36, 48, 78]. При этом исследователи отмечали, что характерной чертой (полу)группы уравнения с вырожденным оператором является то, что единицей полугруппы является не тождественный оператор, как в классической теории полугруппы операторов, а проектор на некоторое подпространство. Этот факт, в частности, влечет то, что задача Коши разрешима не для произвольных начальных значений. Такие полугруппы в дальнейшем называются вырожденным, либо полугруппами операторов с ядрами.

Впервые уравнения, неразрешенные относительно производной, начал рассматривать, по-видимому, А. Пуанкаре. Систематическое же их изучение стартовало в 20 веке с работ С.Л. Соболева. Именно поэтому в современных математических исследованиях в отношении уравнений, неразрешенных относительно производной, стал общепринятым термин "уравнения соболевского типа". Заметим, что уравнения соболевского типа называются динамическими, если их решения продолжимы на всю ось \mathbb{R} , и эволюционными, если их решения существуют только на \mathbb{R}_+ .

Исследования уравнений, неразрешенных относительно производной, неразрывно связаны с развитием теории вырожденных голоморфных (полу)групп операторов. В настоящее время уравнения соболевского типа и связанные с ними вырожденные (полу)группы операторов активно изучаются в области неклассических уравнений математической физи-

ки [14, 51, 61, 99, 100]. В последние десятилетия написано большое количество монографий, полностью или частично посвященных этой тематике, сформировались научные направления, вокруг которых сложились научные школы. В этой области активно работают Р.Е. Шоуолтер (R.E. Showalter)[99], А. Фавини (A. Favini), А. Яги (A. Yagi) [78], Г.В. Демиденко[11], И.В. Мельникова [36], С.Г. Пятков [95], Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева [24], В.Е. Федоров [54] и их ученики.

Математические модели на основе линейных уравнений соболевского типа были изучены Г.А. Свиридюком и его учениками [46, 47]. Первая монография этой школы, посвященная голоморфным вырожденным группам и полугруппам, а также вырожденным C_0 -полугруппам, вышла в 2003 году [101]. Необходимо отметить, что результаты, изложенные в этой монографии, получены в банаховых пространствах. В настоящее время в рамках школы, возглавляемой Г.А. Свиридюком, исследовано множество различных задач для моделей математической физики (см., например, [7, 17, 25, 32, 33, 59]) как аналитически, так и численно. Отметим, что при численном исследовании таких систем наиболее часто используется проекционный метод, что ставит перед исследователями задачу поиска собственных чисел краевых дифференциальных операторов, что является отдельной сложной задачей [18, 19, 20, 84].

Используя методы классического и локального преобразования Лапласа и спектральную теорию операторных пучков, А.Г. Руткас [42] исследовал задачу (0.8),(0.10) в случае, когда $\mathcal{U}, \mathfrak{F}$ – банаховы пространства, L, M – линейные ограниченные операторы. В его работе охарактеризованы нормальные решения, корректная и диссипативная задача Коши, описано начальное многообразие при различных условиях. Результаты исследования применяются к задачам рассеяния и прохождения сигналов в дискретных структурах.

А. Favini [76] ввел в рассмотрение задачу

$$\frac{d}{dt}Lu(t) = Mu(t) + f(t) \quad (0 < t < \infty)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} Lu(t) = u_0$$

с замкнутыми линейными операторами L, M . В [77] он рассматривает то же уравнение на конечном отрезке $[0, T]$ с начальным условием $Lu(0) = Lu_0$, $\text{dom}L \supseteq \text{dom}M \ni u_0$, $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$. В терминах оператора $M(\mu L - M)^{-1}$ сформулированы теоремы существования и единственности решения этих задач при некоторых условиях на начальное значение u_0 и гладкость функции $f(t)$.

В работах Дж.К. Аль-Делфи и А.В. Келлер (2015 г.) впервые была исследована разрешимость уравнений соболевского типа в квазисоболевых пространствах и сформирована теория вырожденных разрешающих голоморфных групп операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей с рассмотрением случая относительно ограниченных операторов [4, 22]. Используя эти результаты, Х.Ф. Хасан и М.А. Сагадеева (2016 г.) изучили ограниченность решений класса динамических уравнений соболевского типа в квазисоболевых пространствах [44, 55].

В теории устойчивости решений математических моделей, основанных на динамических и эволюционных дифференциальных уравнениях, важную роль играет понятие экспоненциальной дихотомии как одной из характеристик асимптотического поведения его решений ([10, 34, 56]).

Наиболее глубокие результаты по проблеме устойчивости решений лежат в области обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной. Отправной точкой здесь являются работы А.М. Ляпунова [29]. Наиболее полно результаты по устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений изложены Ф. Гантмахером [9], Б. Демидовичем [12], Э. Коддингтоном и Н. Левинсоном [23].

Системы уравнений, обладающие свойством экспоненциальной дихотомичности изучались в работе [92], посвященной нелинейным возмуще-

ниям таких уравнений, которая была обобщением относящейся к двумерному дискретному случаю работы Ж. Адамара [80]. Эквивалентность экспоненциальной дихотомии системы обыкновенных дифференциальных уравнений условию существования ограниченных решений неоднородного уравнения была впервые установлена А.Д. Майзелем [30]. Аналогичную задачу для нелинейного уравнения со стационарной линейной частью рассматривал П. Боль [66].

М.Г. Крейн [26] впервые изучил вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений в бесконечномерных банаховых пространствах. Подробно эти исследования изложены им в [27]. Классическими работами в области исследования дихотомий решений однородного уравнения (0.13) стали монографии Ю.Л. Далецкого и М.Г. Крейна [10], Х.Л. Массера и Х.Х. Шеффера [34], где рассматривались уравнения с ограниченным оператором S .

В работе Д. Хенри [56] изучается разрешимость задачи Коши стационарного и нестационарного линейных уравнений первого порядка вида (0.13), где S – *секториальный*, т. е. порождающий аналитическую полугруппу, оператор. Получены достаточные условия существования и единственности ограниченных решений уравнения (0.13) и его задачи Коши.

С.Г. Пятковым [94] изучено существование максимальных семидефинитных инвариантных подпространств для J -диссипативных операторов и полугрупповые свойства сужений оператора на эти инвариантные подпространства.

Экспоненциальные дихотомии решений уравнения (0.7) исследовались Г.А. Свиридюком и А.В. Келлер (1997 г.) в случаях (L, σ) -ограниченного и сильно (L, p) -секториального оператора M в банаховых пространствах. В терминах L -спектра оператора M ими были получены условия существования экспоненциальных дихотомий для этого случая [21, 50].

С.А. Загребина и М.А. Сагадеева в монографии 2016 г. аккумулировали результаты, полученные в предыдущие 10-15 лет, посвященные изучению вопросов устойчивости решений полулинейных уравнений соболевского типа в банаховых пространствах [15]. Работы Ф.Л. Хасан (2016 г.) посвящены изучению существования ограниченных решений, экспоненциальных дихотомий и инвариантных подпространств для динамических уравнений в квазисоболевых пространствах [55].

Методы исследования

В данной работе проведены аналитическое и численное исследования аналогов математических процессов гидродинамики и теории фазовых переходов термодинамики в квазисоболевых пространствах. При аналитическом исследовании вырожденных эволюционных уравнений за основу взят подход, суть которого заключается в построении вырожденных разрешающих полугрупп операторов, дающих классическое решение задачи (0.7), (0.8). Особенность разрешающих операторов вырожденного уравнения (0.7) заключается в том, что они обладают нетривиальными ядрами, содержащими ядро оператора при производной. Для построения теории вырожденных голоморфных полугрупп операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей используются классические методы функционального анализа, теории линейных ограниченных операторов, спектральной теории. Для построения операторов разрешающих полугрупп, по аналогии с классическими результатами, используется преобразование Лапласа операторнозначных функций в квазибанаховых пространствах последовательностей, для чего необходимо обоснование аналитичности и интегрируемости таких отображений в квазибанаховых пространствах последовательностей. В основе этого обоснования лежит свойство метризуемости квазибанаховых пространств.

При численном исследовании класса эволюционных математических

моделей получены приближенные решения, которые построены на основе модифицированного проекционного метода. Сходимость приближенного решения к точному обосновано теоретически за счет сходимости соответствующих рядов.

Новизна полученных результатов

В области математического моделирования:

В диссертационной работе впервые проведены аналитическое и численное исследования одного класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах, описывающих процессы в области термо- и гидродинамики. Создана теоретическая основа для качественного и численного исследования изучаемых моделей: доказана однозначная разрешимость задачи Коши и задачи Шоултера – Сидорова для эволюционных операторно-дифференциальных уравнений, а также получены условия существования экспоненциальных дихотомий решений.

В области численных методов:

Разработаны новые алгоритмы численных методов, использующие идеи проекционных методов, позволяющие находить приближенные решения изучаемых математических моделей в квазисоболевых пространствах. Установлена сходимость приближенных решений к точному.

В области комплексов программ:

Разработан комплекс программ нахождения приближенного решения задачи Коши для класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах. Разработанный комплекс программ позволяет: проводить вычислительные эксперименты для изучаемых моделей как в квазисоболевых пространствах, так и в стандартных пространствах.

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично. Достоверность полученных результатов обеспечена

полными доказательствами всех утверждений, соответствующими современному уровню математической строгости.

Теоретическая и практическая значимость исследования

Результаты диссертационной работы, полученные при исследовании математических моделей, вносят вклад в теорию линейных эволюционных операторно-дифференциальных уравнений первого порядка в квазисоболевых пространствах, получены достаточные условия однозначной разрешимости задач Коши и Шоултера – Сидорова для эволюционного линейного операторно-дифференциального уравнения в квазибанаховых пространствах, построены численные методы решения задачи Коши для таких уравнений, доказана сходимость численных методов. Алгоритмы численных методов реализованы программно и позволяют получать численное решение и наглядное представление о поведении приближенных решений эволюционных моделей термо- и гидродинамики с условием Коши в графическом виде. Результаты, полученные при исследовании математических моделей, могут быть полезны в гидродинамике, в термодинамике при изучении процессов фильтрации, плавления, кристаллизации, а также различных диффузионных процессов. Кроме того, полученные результаты создают основу для исследования других эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах.

Апробации

Результаты, изложенные в диссертации, были представлены на:

- Международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа" (Воронеж, 2014, 2016),
- Международной конференции "Дифференциальные уравнения и динамические системы" (Суздаль, 2014),
- Международной конференции "Спектральные задачи, нелинейный

и комплексный анализ"(Уфа, 2015),

– Шестнадцатом всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи, 2015),

– Международной научно-практической конференции "Приоритетные научные исследования и разработки" (Саратов, 2016)

– научных конференциях аспирантов и докторантов ЮУрГУ (Челябинск, 2014, 2015).

– семинаре профессора Г.А. Свиридюка "Уравнения соболевского типа" в Южно-Уральском государственном университете.

Результаты диссертации опубликованы в работах [105] – [115].

Необходимо отметить, что во всех работах [105], [106], [109], [113], выполненных в соавторстве с научным руководителем, последнему принадлежит только постановка задачи и некоторые идеи доказательств. Все доказательства выполнены автором диссертации самостоятельно.

Краткое содержание диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения.

Введение содержит актуальность и предпосылки исследования, постановку задач и цели работы, представлены историография вопроса, описываются методы исследования и новизна полученных результатов, теоретическая и практическая значимость.

Первая глава содержит пять параграфов, в которых описаны эволюционные процессы термо- и гидродинамики, описаны квазисоболевы пространства и проведена редукция исследуемых процессов к абстрактным эволюционным уравнениям в этих пространствах. Все результаты данной главы на защиту не выносятся. В параграфе 1.1 содержится описание модели Дзекцера, описывающей эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости. В п. 1.2 приведено описание обобщенной модели

Фишера – Колмогорова и модели диффузии четвертого порядка. В п. 1.3 описана модель Кана – Хилларда. В п. 1.4 приведено понятие ограниченных и непрерывных, а также замкнутых операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей. В этом пункте содержатся теоремы о продолжении замкнутого оператора и обратимости оператора близкого к единичному, полученные Дж.К. Аль-Делфи [4]. Также здесь рассматриваются функции линейных ограниченных операторов, в том числе и аналитические функции операторов. В п. 1.5 приведены определения и понятия квазисоболевых пространств, приведена теорема о вложениях таких пространств и конструкция квазиоператора Лапласа, также полученные Дж.К. Аль-Делфи [4]. Кроме того, здесь проведена редукция рассматриваемых моделей к абстрактному эволюционному уравнению, рассматриваемому в квазисоболевых пространствах.

Вторая глава посвящена аналитическим методам исследования одного класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах и состоит из шести параграфов. В п. 2.1 приведены сведения об относительном резольвентном множестве и относительном спектре для пары операторов в квазибанаховом пространстве, полученные Дж.К. Аль-Делфи [4]. Здесь также рассмотрены свойства относительных резольвент в квазибанаховых пространствах последовательностей и введено понятие относительно секториального оператора. В п. 2.2 доказано существование вырожденных голоморфных разрешающих полугрупп для однородного уравнения соболевского типа. П. 2.3 содержит исследование однозначной разрешимости обобщенной задачи Шоултера – Сидорова для эволюционного уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах. Введено понятие фазового пространства для исследуемого уравнения в квазисоболевых пространствах. В п. 2.4 исследована разрешимость задачи Коши для неоднородных уравнений рассматриваемого класса. Пп. 2.5 и 2.6 содержат аналитические исследования в

квазисоболевых пространствах модели Дзекцера и обобщенной модели, содержащей модели Кана – Хилларда, модели Фишера – Колмогорова и модели диффузии четвертого порядка.

Третья глава состоит из шести параграфов и посвящена изучению свойств решений одного класса эволюционных математических моделей, а также их численному исследованию. В п. 3.1 доказана относительно спектральная теорема и получены условия, при которых существуют инвариантные пространства для пары эквивалентных уравнений соболевского типа. Доказана теорема о том, что при определенных условиях решения пары эквивалентных уравнений соболевского типа обладают экспоненциальной дихотомией. В п. 3.2 изучаются свойства решений моделей Дзекцера, и обобщенной модели, содержащей модели Кана – Хилларда, модели Фишера – Колмогорова и модели диффузии четвертого порядка в квазисоболевых пространствах. П. 3.3 содержит описание алгоритмов построения приближенного решения эволюционных математических моделей как в квазисоболевых, так и в банаховых пространствах. В п. 3.4 описываются программы реализующие алгоритмы, описанные в п. 3.3. Пп. 3.5 и 3.6 содержат результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующих полученные теоретические результаты.

В **Заключении** представлены выводы о результатах, полученных в диссертации, соответствии их паспорту специальности, а также перспективы и направления развития тематики исследования в дальнейшем.

Приложение содержит свидетельство о регистрации программы.

1. Математические модели эволюционных процессов

В пп. 1.4 и 1.5 данной главы представлены необходимые для последующего изложения сведения и результаты Дж.К. Аль-Делфи. Доказательства утверждений этих пунктов можно найти в работах [3, 4, 22].

1.1. Математическая модель Дзекцера

Большой практический интерес в теории движения грунтовых вод представляет уравнение

$$(\lambda - \Delta) \frac{\partial u}{\partial t} = (\beta \Delta - \alpha \Delta^2) u + f(t) \quad (1.1.1)$$

параметры $\lambda, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+$ характеризуют систему, а вектор-функция $f(t)$ отвечает внешнему воздействию на систему. Уравнение (1.1.1) является обобщением уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью и моделирует эволюцию свободной поверхности фильтрующей жидкости [13]. В силу того, что выражение слева в уравнении (1.1.1) может быть нулевым при некоторых значениях параметра λ , данное уравнение относится к обширному классу неклассических уравнений математической физики [51].

Вывод уравнения Дзекцера

Рассматривается движение грунтовых вод, описываемое фильтрационным уравнением Буссинеска [1, 40, 41]. Предлагается некоторое обобщение этого уравнения.

Введем потенциал скорости фильтрации

$$\phi(x, y, z, t) = -kh(x, y, z, t) = -k \left(\frac{p}{\gamma} + z \right), \quad (1.1.2)$$

где $h(x, y, z, t)$ – напор, p – давление, γ – объемный вес жидкости. Поместим начало координат на горизонтальной плоскости водоупора и направим ось Oz вверх. Обозначим проекции скоростей фильтрации на оси координат

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (1.1.3)$$

Тогда из уравнения неразрывности и (1.1.3) получим, что потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.1.4)$$

Граничные условия будут иметь вид:

на свободной поверхности $z = H(x, y, t)$

$$\mu \frac{dH}{dt} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=H} + \varepsilon_a; \quad (1.1.5)$$

на водоупоре

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \varepsilon_0, \quad (1.1.6)$$

где $H(x, y, t)$ – напор на свободной поверхности, равный мощности грунтового потока, ε_0 и ε_a – модули питания потока соответственно через его подошву и свободную поверхность, μ – коэффициент свободной пористости.

Проинтегрируем (1.1.4) по z в пределах от 0 до $H(x, y, t)$ и получим

$$\int_0^H \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dz + \int_0^H \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dz + \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_0^H = 0. \quad (1.1.7)$$

С учетом условия (1.1.5) величина $\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=H}$ может быть записана как

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=H} = \mu \frac{dH}{dt} - \varepsilon_a = \mu \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) - \varepsilon_a. \quad (1.1.8)$$

Произведем операцию дифференцирования по параметру для интегралов

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^H \frac{\partial \phi}{\partial x} dz = \int_0^H \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dz + \left. \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{z=H}, \quad (1.1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^H \frac{\partial \phi}{\partial y} dz = \int_0^H \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dz + \left. \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{z=H}. \quad (1.1.10)$$

Подставляя в (1.1.7) вместо интегралов их выражения из (1.1.9) и (1.1.10) и, принимая во внимание условия (1.1.6) и (1.1.8), а также, что $\mu \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ и $\mu \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$, получим

$$- \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^H \frac{\partial \phi}{\partial x} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^H \frac{\partial \phi}{\partial y} dz \right] + \varepsilon_a + \varepsilon_0 = \mu \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.1.11)$$

Уравнение (1.1.11) может быть получено также путем составления баланса массы для элементарного объема, включающего плоскости подошвы пласта и свободной поверхности. При этом потоки через боковые поверхности объема будут

$$q_x = \int_0^H \frac{\partial \phi}{\partial x} dz, \quad q_y = \int_0^H \frac{\partial \phi}{\partial y} dz.$$

Разложим функцию $\phi(x, y, z, t)$ в ряд по степеням z :

$$\phi(x, y, z, t) = \phi_0(x, y, t) + z\phi_1(x, y, t) + z^2\phi_2(x, y, t) + \dots \quad (1.1.12)$$

Для определения ϕ_0 и ϕ_1 используем граничные условия на подошве пласта

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \varepsilon_0, \quad \phi(x, y, 0, t) = \phi_0. \quad (1.1.13)$$

Подставляя (1.1.12) в первое равенство (1.1.13), получим

$$\phi_1 = \varepsilon_0. \quad (1.1.14)$$

Для определения ϕ_2 подставим ϕ в уравнение Лапласа (1.1.4) и примем в нем $z = 0$ и $\phi_1 = \varepsilon_0$. Тогда получим

$$\phi_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} \right).$$

Определение $\phi_3, \phi_4, \dots, \phi_n$ производится таким же образом, но (1.1.4) предварительно дифференцируется по z . Тогда вместо (1.1.12), получим

$$\phi(x, z, t) = \phi_0 + \varepsilon_0 z + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{\partial^{2n+2} \phi_0}{\partial x^{2n+2}}. \quad (1.1.15)$$

Предполагается, что ряд (1.1.15) сходится (для этого нужно наложить ограничение на коэффициенты ряда).

Остановимся на первых трех членах выражения (1.1.15) и, принимая во внимание (1.1.2), придем к выражению

$$h(x, y, z, t) = h_0 - z \frac{\varepsilon_0}{k} - \frac{z^2}{2} \left(\frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial y^2} \right), \quad (1.1.16)$$

где $h_0(x, y, t)$ – напор на подошве пласта.

Выражение (1.1.16) может быть получено и другим путем. Считая, что скорости $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ не зависят от z , из (1.1.4) получим

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= - \int_0^z \int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d^2 z = \\ &= - \frac{z^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} \right) + c_1 z + c_2, \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

где $c_1 = \varepsilon_0, c_2 = \phi_0(x, y, 0, t)$, т.е. потенциал ϕ зависит от z . Отсюда получаем

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial c_2}{\partial x} - \frac{z^2}{2} \left(\frac{\partial^3 \phi_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \phi_0}{\partial x \partial y^2} \right). \quad (1.1.18)$$

Из (1.1.18) следует, что $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ зависит от z .

Выражение (1.1.17) совпадает с (1.1.18), если в последнем удерживать только первых три члена.

Подставляя (1.1.16) в уравнение (1.1.11), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[H \frac{\partial h_0}{\partial x} - \frac{H^3}{6} \left(\frac{\partial^3 h_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 h_0}{\partial x \partial y^2} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[H \frac{\partial h_0}{\partial y} - \frac{H^3}{6} \left(\frac{\partial^3 h_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 h_0}{\partial y \partial x^2} \right) \right] = \frac{\mu}{k} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_a}{k}. \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

В (1.1.16) подставим $z = H$ и получим зависимость для определения напора на свободной поверхности

$$H = h_0 - \frac{\varepsilon_a}{k}H - \frac{a}{2}H^2, \quad a = \left(\frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial y^2} \right). \quad (1.1.20)$$

Решим уравнение (1.1.20) относительно H

$$H = \frac{1}{a} \left(\sqrt{\delta^2 + 2ah_0} - \delta \right), \quad \delta = \frac{\varepsilon_0}{k} + 1. \quad (1.1.21)$$

Разложим первый член (радикал) в (1.1.21), в ряд по степеням $2ah_0$:

$$H = \frac{1}{a} \left[-\delta + \delta + \frac{a}{\delta}h_0 + \frac{a}{2\delta^3}h_0^2 + \dots \right] \approx \frac{h_0}{\delta} - \frac{h_0^2}{2\delta^3} \left(\frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial y^2} \right). \quad (1.1.22)$$

Подставим H из (1.1.22) в (1.1.19), и, пренебрегая произведениями производных как величинами высшего порядка малости, получим

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{k} \frac{\partial h_0}{\partial t} = & \\ = & \frac{h_0^2 \mu}{2\delta^2 k} \left(\frac{\partial^3 h_0}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 h_0}{\partial y^2 \partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left[h_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} - \frac{h_0^3}{6\delta^2} \left(\frac{\partial^3 h_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 h_0}{\partial x \partial y^2} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[h_0 \frac{\partial h_0}{\partial y} - \frac{h_0^3}{6\delta^2} \left(\frac{\partial^3 h_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 h_0}{\partial y \partial x^2} \right) \right] + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_a}{k} \delta. \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

Если в (1.1.23) пренебречь третьими и четвертыми производными и считать напор не зависимым от z , то получим уравнение Буссинеска.

Если линейаризовать уравнение (1.1.23), то для одномерного случая фильтрации будем иметь

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = \frac{k \bar{h}_0}{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h_0}{\partial x} - \frac{\bar{h}_0^2}{6\delta^2} \frac{\partial^3 h_0}{\partial x^3} \right) + \frac{\bar{h}_0 \mu}{2\delta^2 k} \frac{\partial^3 h_0}{\partial x^2 \partial t} \right] + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_a}{\mu} \delta, \quad (1.1.24)$$

где \bar{h}_0 – осредненный по t и x напор. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} - \frac{\bar{h}_0^2}{2\delta^2} \frac{\partial^3 h_0}{\partial x^2 \partial t} = \frac{k \bar{h}_0}{\mu} \left[\frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} - \frac{\bar{h}_0^2}{6\delta^2} \frac{\partial^4 h_0}{\partial x^4} \right] + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_a}{\mu} \delta$$

или

$$\frac{2\delta^2}{\bar{h}_0^2} \frac{\partial h_0}{\partial t} - \frac{\partial^3 h_0}{\partial x^2 \partial t} = \frac{2\delta^2 k}{\bar{h}_0 \mu} \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} - \frac{k \bar{h}_0}{3\mu} \frac{\partial^4 h_0}{\partial x^4}.$$

Таким образом, обозначив

$$\lambda = \frac{2\delta^2}{\bar{h}_0^2}, \quad \beta = \frac{2\delta^2 k}{\bar{h}_0 \mu}, \quad \alpha = \frac{k \bar{h}_0}{3\mu},$$

получим уравнение (1.1.1), в котором учитывается изменение напора по вертикали [13].

1.2. Математическая модель Фишера – Колмогорова и математическая модель диффузии четвертого порядка

Обобщенная математическая модель Фишера – Колмогорова

Рассмотрим математическую модель на основе уравнения Фишера – Колмогорова

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\gamma \Delta^2 u + \Delta u + f(u), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (1.2.1)$$

где $f(u) = u - u^3$, $T > 0$, Ω ограниченная область в \mathbb{R}^d , $d \leq 2$ с границей $\partial\Omega$, и $\gamma > 0$ – коэффициент гипердиффузии. Уравнение (1.2.1) является обобщением классического уравнения Фишера – Колмогорова при $\gamma = 0$, которое появилось недавно при изучении фазовых переходов критических точек (точек Лифшица) [73] и исследовалось как модельное уравнение высокого порядка для бистабильных систем [74].

Обобщенное уравнение Фишера – Колмогорова, так же как и классическое уравнение Фишера (Колмогорова – Петровского – Пискунова), моделирует волны различной природы от волн концентрации некоторого вещества до волн популяционных. В случае $\gamma > 0$, в силу физических свойств, модель будет стабильной (устойчивой) на коротких волнах, в противном случае пространственная производная четвертого порядка не существенно изменит качественные особенности однородных состояний равновесия системы $u = \pm 1$ и $u = 0$.

Физический смысл

В исследовании пространственной модели, часто сталкиваются с динамическими системами, для которых пространственно однородное состояние системы теряет устойчивость при некотором значении параметров. Состояние системы становится периодическим по пространственным переменным, и один из центральных вопросов касается выбора длины волны для возникающего состояния. Примеры такого поведения наблюдаются при плавлении кристаллов, «конвекции» жидкости между стенок концентрических цилиндров и реакции-диффузии [73].

В последнее время появились работы, в которых рассматриваются системы, чьи два абсолютно устойчивых состояния пространственно однородны. Однако этого не достаточно, чтобы в полной мере отобразить поведение модели в динамике. Фронт волны, распространяющийся в области неустойчивости системы может создать динамический периодический массив кинков. Кинк это отдельная крупная область, в которой система находится в одном из двух устойчивых состояний. Поэтому пространственные модели перед и после фронта волны довольно сильно отличаются друг от друга. Возникновение областей устойчивости зависит от длины волны, кроме того размеры кинков могут динамически меняться.

Существуют следующие типы пространственных моделей для обобщенного уравнения Фишера-Колмогорова:

- Кинки – гетероклинические орбиты, которые соединяют устойчивые случаи $u = -1$ и $u = 1$. Если $\gamma \leq \frac{1}{8}$ существует единственный монотонный кинк, и если $\gamma > \frac{1}{8}$ существует много кинков. В частном случае, для любого целого $N \geq 0$ существует $2N + 1$ кинков, удовлетворяющие следующему неравенству

$$|u(x)| < \sqrt{2}, x \in \mathbb{R}. \quad (1.2.2)$$

- Периодические модели для любого $\gamma > 0$ и $\mu \in (1, 2)$, здесь μ является значением первого интеграла:

$$-(u')^2 + \frac{1}{2}(1 - u^2)^2 = \frac{\mu}{2}, \quad (1.2.3)$$

существует единственное периодическое решение, которое имеет максимумы ниже $u = 1$. Для $\mu = 0$ новые периодические решения появляются при $\gamma > \frac{1}{8}$. Два ответвления одной рельефности периодических решений $u = \pm\gamma$ создаются из уникального нечетного монотонного кинка при $\gamma = \frac{1}{8}$ и продолжают существовать для всех $\gamma > \frac{1}{8}$.

- Солитоны – гомоклинические орбиты для одного из однородных устойчивых состояний. По методу [91], одиночные и многомерные солитоны стремятся к $u = 1$ или $u = -1$, когда $x \rightarrow \pm\infty$.
- Хаотичные модели. Обобщенное уравнение Фишера – Колмогорова имеет хаотические стационарные модели когда $\gamma > \frac{1}{8}$ и $\mu = 0$.

Уравнение диффузии четвертого порядка

Уравнение диффузии четвертого порядка с постоянным коэффициентом диффузии, порожденное функционалом энергии

$$H = \int_a^b u_x^2,$$

имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta^2 u. \quad (1.2.4)$$

Функционал энергии возникает во многих физических моделях, но не является универсальным среди параболических уравнений высших порядков.

Уравнение диффузии четвертого порядка находит применение во многих областях науки и техники, включая теорию тонких пленок [98]; диффузию на поверхности твердых тел [89, 60]; диффузию

поверхностно-активных веществ и в ячейках Хеле-Шоу [81]; проектирование специальных кривых на поверхностях [83].

Диффузионный процесс моделируется параболическим эволюционным уравнением вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(M(u) \left(\frac{\delta H}{\delta u} \right)_x \right)_x, \quad (1.2.5)$$

которое используется для получения уравнения (1.2.4). Здесь $M(u)$ называется подвижностью или коэффициентом диффузии, а H является функционалом энергии, где $\frac{\delta H}{\delta u}$ – химический потенциал.

1.3. Математическая модель Кана – Хилларда

В ограниченном подмножестве из \mathbb{R}^3 с границей класса \mathcal{C}^1 рассмотрим уравнение Кана – Хилларда (Джон У. Кана и Джон Е. Хилларда) [68]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta[F'(u) - \epsilon^2 \Delta u]. \quad (1.3.1)$$

Здесь $F(u)$ является плотностью Гельмгольца свободной энергии молекулы однородной системы с составом u и $k = \epsilon^2$ – положительная константа, называемая коэффициентом градиента энергии ($0 < \epsilon^2 \ll 1$), которая связана с межфазной энергией, $u(x, t)$ представляет собой концентрацию одной из двух компонент, где $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$, $\Omega = (0, L)$. Концентрацию следует понимать или как объемную долю или как массовую долю, в зависимости от того какая физическая система исследуется.

Уравнение Кана – Хилларда описывает временную эволюцию консервативного (потенциального) поля, которое является непрерывной, в достаточной степени дифференцируемой функцией. Эволюция разделения фаз обусловлена нефиковской диффузией, протекающей по направлению градиента химического потенциала. Первоначально она была предложена для моделирования спинодального разложения двойной системы $A - B$ при фиксированной температуре, которая являлась однородной системой равномерно наполненной C . Мольная доля компонента B ,

самопроизвольно разлагается на две фазы с той же кристаллической структурой, но с различными составами. В этом случае пространственное распределение двух фаз в процессе разложения может быть описано компонентами поля $u(x, t)$, которое является непрерывной, дифференцируемой функцией точки пространства x и времени t . Временная эволюция спинодального распада определяется уравнением Кана – Хилларда:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(M\nabla\mu) = M\Delta\mu, \quad (1.3.2)$$

где M является константой подвижности. Вообще говоря, M – тензорнозначная функция, зависящая от температуры. Здесь μ – локальный химический потенциал, определяемый в виде

$$\mu = F'(u) - k\Delta u. \quad (1.3.3)$$

Вывод уравнения Кана – Хилларда

Существует несколько способов получения уравнения Кана – Хилларда [68], используя основные законы термодинамики. Выведем уравнение Кана – Хилларда, используя градиент потока. Пусть ε вещественнозначный функционал, в котором функция v должна удовлетворять условию $\int_{\Omega} v(x)dx = 0$. Поток градиента определяет динамическую систему относительно переменной времени t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -grad_0\varepsilon(u), \quad (1.3.4)$$

где $grad_0$ – производная Гато от потенциальной функции (*массового сохраняющегося пространства*). Функция u удовлетворяет условию:

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0, j \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad (1.3.5)$$

где \mathbf{n} единичный вектор нормали к $\partial\Omega$ и $j \equiv -M\nabla\mu$. Чтобы найти ограниченный градиент потока ε выберем подходящее пространство. Пусть H гильбертово пространство функций, таких что

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(u + \theta v)|_{\theta=0} = \langle grad_0\varepsilon(u), v \rangle. \quad (1.3.6)$$

Далее необходимо определить $grad_0 \varepsilon(u)$. Пусть полная масса системы ограничена и постоянна

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}, t) dx = \text{const.} \quad (1.3.7)$$

Выберем подпространство \dot{H} пространства H , состоящее из функций v , таких что $\int v(x) dx = 0$, и зададим ограниченное линейное отображение \dot{H}^{-1} на \dot{H} . На плотном подмножестве \dot{H}^{-1} зададим скалярное произведение, следующим образом

$$(v_1, v_2)_{\dot{H}^{-1}} \equiv (\nabla \phi_{v_1}, \nabla \phi_{v_2})_{L^2}, \quad v_1, v_2 \in \dot{H}^{-1} \quad (1.3.8)$$

где $\phi_{v_1}, \phi_{v_2} \in \dot{H}^1$ являются ассоциатами v_1, v_2 , т.е. являются решениями краевой задачи Неймана

$$-\Delta \phi_v = v, \quad \frac{\partial \phi_v}{\partial n} = 0, \quad \int_{\Omega} \phi_v d\mathbf{x} = 0. \quad (1.3.9)$$

Для того, чтобы показать существование и единственность решений задачи 1.3.8, определим билинейный функционал B на \dot{H}^1 , $B: \dot{H}^1 \times \dot{H}^1 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$B[\phi_{v_1}, \phi_{v_2}] = \int_{\Omega} \nabla \phi_{v_1} \cdot \nabla \phi_{v_2} d\mathbf{x} \equiv (\nabla \phi_{v_1}, \nabla \phi_{v_2})_{L^2} \quad (1.3.10)$$

для любого $\phi_{v_1}, \phi_{v_2} \in \dot{H}^1$.

Затем докажем энергетические оценки для билинейной формы $B[\phi_{v_1}, \phi_{v_2}]$. Ограниченность билинейного функционала можно показать с помощью неравенства Гельдера для некоторых констант $C > 0$

$$|B[\phi_{v_1}, \phi_{v_2}]| \leq \|\nabla \phi_{v_1}\|_{L^2} \|\nabla \phi_{v_2}\|_{L^2} \leq C \|\phi_{v_1}\|_{\dot{H}^1} \|\phi_{v_2}\|_{\dot{H}^1}.$$

Таким образом, функционал ограничен. Далее видим, что $B[\phi_{v_1}, \phi_{v_2}]$ коэрцитивен. По определению $B[\phi_{v_1}, \phi_{v_2}]$, имеем

$$\|\nabla \phi_{v_1}\|_{L^2}^2 = B[\phi_{v_1}, \phi_{v_1}] \quad (1.3.11)$$

для любого $\phi_{v_1} \in \dot{H}^1$.

В дополнение к задаче (1.3.8), в которой $(\phi_{v_1})_\Omega = \int_\Omega \nabla \phi_{v_1} d\mathbf{x} / |\Omega|$,

$$\|\phi_{v_1}\|_{L^2}^2 = \int_\Omega \phi_{v_1}^2 d\mathbf{x} = \int_\Omega (\phi_{v_1} - (\phi_{v_1})_\Omega)^2 d\mathbf{x} \leq C \int_\Omega |\nabla \phi_{v_1}|^2 d\mathbf{x} = CB[\phi_{v_1}, \phi_{v_2}],$$

где C зависит от Ω . Сопоставляя это с (1.3.10), получим

$$\frac{1}{C+1} \|\phi_{v_1}\|_{\dot{H}^1}^2 \leq B[\phi_{v_1}, \phi_{v_2}]. \quad (1.3.12)$$

Пусть $\phi_{v_2} \in \dot{H}^1$, определим

$$F(\phi_{v_2}) = \int_\Omega v \phi_{v_2} d\mathbf{x}$$

для любого $v \in \dot{H}^{-1}$.

Функционал F является линейным и ограниченным на \dot{H}^1 . Следовательно, можно применить теорему Лакса – Мильграма, чтобы получить единственный $\phi_{v_1} \in \dot{H}^1$ такой, что

$$B[\phi_{v_1}, \phi_{v_2}] = F(\phi_{v_2})$$

для всех $\phi_{v_2} \in \dot{H}^1$.

Определим $grad_0$ следующим образом: пусть u достаточно гладкая функция и удовлетворяет $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0$ на $\partial\Omega$. Тогда имеем следующее уравнение, в котором дифференциал понимается в смысле Гато, для всех $v \in \mathcal{C}_0^\infty$:

$$\begin{aligned} \langle grad_0 \varepsilon(u), v \rangle &= \frac{d}{d\theta} \varepsilon(u + \theta v) \Big|_{\theta=0} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} [\varepsilon(u + \theta v) - \varepsilon(u)] = \\ &= \int_\Omega [F'(u) - \epsilon^2 \Delta u] v d\mathbf{x} = - \int_\Omega [F'(u) - \epsilon^2 \Delta u] \Delta \phi_v d\mathbf{x} = \\ &= \int_\Omega \nabla [F'(u) - \epsilon^2 \Delta u] \cdot \nabla \phi_v d\mathbf{x} = (\nabla [F'(u) - \epsilon^2 \Delta u], \nabla \phi_v)_{L^2} = \\ &= (-\nabla \nabla [F'(u) - \epsilon^2 \Delta u], -\nabla \nabla \phi_v)_{\dot{H}^{-1}} = (-\Delta [F'(u) - \epsilon^2 \Delta u], v)_{\dot{H}^{-1}} \end{aligned}$$

Заменим v на $-\Delta \phi_v$ и проинтегрируем по частям. Таким образом, в последнем уравнении $\nabla \phi_v$ имеет нулевую нормальную компоненту на $\partial\Omega$ и нулевой поток. Отождествим

$$grad_0 \varepsilon(u) \equiv -\Delta [F'(u) - \epsilon^2 \Delta u] \quad (1.3.13)$$

на множество функций \dot{H}^1 . В итоге уравнение эволюции примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta[F'(u) - \epsilon^2 \Delta u], \quad (1.3.14)$$

где $F'(u)$ является производной по Габо плотности Гельмгольца свободной энергии молекулы однородной системы с составом u , с коэффициентом градиента энергии $0 < \epsilon^2 \ll 1$. Уравнение (1.3.14) известно как уравнение Кана – Хилларда, определенное в открытом и ограниченном подмножестве из \mathbb{R}^3 с границей класса C^1 .

1.4. Квазибанаховы пространства и линейные операторы

Пусть \mathfrak{U} – некоторое линейное пространство; упорядоченная пара $(\mathfrak{U}; \mathfrak{u} \|\cdot\|)$ называется *квазинормированным пространством*, если

(i) $\forall u \in \mathfrak{U} \mathfrak{u} \|u\| \geq 0$, причем $\mathfrak{u} \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0} \in \mathfrak{U}$;

(ii) $\forall u \in \mathfrak{U} \forall \alpha \in \mathbb{R} \mathfrak{u} \|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \mathfrak{u} \|u\|$;

(iii) $\forall u, v \in \mathfrak{U} \mathfrak{u} \|u + v\| \leq C(\mathfrak{u} \|u\| + \mathfrak{u} \|v\|)$, где константа $C \geq 1$ и не зависит от u и v . Функция $\mathfrak{u} \|\cdot\| : \mathfrak{U} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *квазинормой* в случае $C \geq 1$, а в случае $C = 1$ еще и нормой. Таким образом, понятия квазинормированного пространства является обобщением понятия нормированного пространства. В дальнейшем квазинормированное пространство $(\mathfrak{U}; \mathfrak{u} \|\cdot\|)$ будем отождествлять с линейным пространством \mathfrak{U} .

Квазинорма $\mathfrak{u} \|\cdot\|$ естественным образом задает топологию на \mathfrak{U} . Базисом окрестностей служит совокупность всех множеств вида $\{u \in \mathfrak{U} : \mathfrak{u} \|u - v\| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. В случае $C = 1$ эта топология определяется посредством метрики $\rho(u, v) = \mathfrak{u} \|u - v\|$. Однако, квазинормированное пространство метризуемо и в случае $C > 1$.

Лемма 1.4.1. (лемма 3.10.1 [6]). *Пусть \mathfrak{U} – квазинормированное пространство и пусть число ρ определяется уравнением $(2C)^\rho = 2$. Тогда*

на \mathfrak{U} существует метрика $d : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что при всех $u \in \mathfrak{U}$

$$d(\mathbf{0}, u) \leq_{\mathfrak{U}} \|u\|^{\rho} \leq 2d(\mathbf{0}, u). \quad (1.4.1)$$

Лемма 1.4.2. (лемма 3.10.2 [6]). Пусть \mathfrak{U} – квазинормированное пространство и пусть число ρ определяется уравнением $(2C)^{\rho} = 2$. Если $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ (сходимость в \mathfrak{U}), то

$$_{\mathfrak{U}}\|u\| \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} _{\mathfrak{U}}\|u_k\|^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Далее, если \mathfrak{U} полно, то конечность правой части этого неравенства влечет за собой сходимость в \mathfrak{U} ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Из леммы 1.4.1 вытекает, что мы располагаем понятием *фундаментальной последовательности* $\{u_n\} \subset \mathfrak{U} : \lim_{n,l \rightarrow \infty} _{\mathfrak{U}}\|u_n - u_l\| = 0$, а значит, и понятием полноты. Полное квазинормированное пространство называется *квазибанаховым*. Предел $u \in \mathfrak{U}$ сходящейся в квазибанаховом пространстве \mathfrak{U} последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}$ будем обозначать $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$.

Теперь пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}; _{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}; _{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ – квазибанаховы пространства. Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ отображающий пространство \mathfrak{U} в пространство \mathfrak{F} называется *непрерывным*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} Lu_n = L\left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n\right)$ для любой сходящейся в \mathfrak{U} последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}$ и *ограниченным*, если при любом $u \in \mathfrak{U}$

$$_{\mathfrak{F}}\|Lu\| \leq K \cdot _{\mathfrak{U}}\|u\|,$$

где $K \in \mathbb{R}_+$ не зависит от u .

Множество всех линейных $L : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ ограниченных операторов, отображающих пространство \mathfrak{U} в пространство \mathfrak{F} , таких что $\text{dom } L = \mathfrak{U}$ является линейным пространством, которое мы обозначим символом $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. На этом пространстве определим неотрицательную функцию

$$\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})\|L\| = \sup_{_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} _{\mathfrak{F}}\|Lu\|.$$

Определение 1.4.1. Линейный оператор $L : \text{dom}L \rightarrow \mathfrak{F}$ ($\text{dom}L \subset \mathfrak{U}$) называется *замкнутым*, если для любой последовательности $\{u_n\} \subset \text{dom}L$ такой, что $u_n \rightarrow u$ и $Lu_n \rightarrow y$ выполняется $u \in \text{dom}L$ и $y = Lu$.

Замечание 1.4.1. Нетрудно показать, что линейный оператор $L : \text{dom}L \rightarrow \mathfrak{F}$ ($\text{dom}L \subset \mathfrak{U}$) является замкнутым, тогда и только тогда, когда его график $\text{graph}L = \{(u, f) \in \mathfrak{U} \times \mathfrak{F} : f = Lu\}$ замкнут по квазинорме $\text{graph}L \|u\| = \mathfrak{U} \|u\| + \mathfrak{F} \|Lu\|$.

Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ называется *плотно определенным*, если замыкание линеала $\overline{\text{dom}L} = \mathfrak{U}$. Линеал замкнутых плотно определенных операторов обозначим символом $\mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Теорема 1.4.1. [3] Пусть некоторый оператор $\widetilde{M} \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, и его квазинорма

$$\|\widetilde{M}\| = \sup_{u \in \text{dom}M \setminus \{0\}} \frac{\mathfrak{F} \|\widetilde{M}u\|}{\mathfrak{U} \|u\|} < +\infty.$$

Тогда он единственным образом продолжим до оператора $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}) \|M\| = \|\widetilde{M}\|$.

Пусть \mathfrak{F} — квазибанахово пространство, $\mathcal{L}(\mathfrak{F})(\equiv \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{F}))$ — квазибанахово пространство линейных ограниченных операторов.

Теорема 1.4.2. [22] Пусть оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ и $\mathcal{L}(\mathfrak{F}) \|M\| < 1/C$. Тогда оператор $T = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - M$ непрерывно обратим и

$$\mathcal{L}(\mathfrak{F}) \|T^{-1}\| \leq \frac{C}{1 - C \cdot \mathcal{L}(\mathfrak{F}) \|M\|},$$

где C — константа из определения квазинормы.

Интегралы в квазибанаховых пространствах

Пусть \mathfrak{F} — квазибанахово пространство, функция $f(t)$ определена на $[0, \tau]$ со значениями в \mathfrak{F} . Стандартным образом можно определить *интеграл Римана* от функции f по отрезку $[0, \tau]$. При этом, если интеграл

существует как предел соответствующих интегральных сумм, то функция f называется интегрируемой по Риману.

В [96, теорема 3.5.1] доказано, что интегрируемость непрерывной функции имеет место только в локально-выпуклых пространствах. Однако [96, теорема 3.5.2], если пространство \mathfrak{F} – квазибанахово, тогда любая аналитическая функция, определенная на $[0, \tau]$ со значениями в \mathfrak{F} , интегрируема по Риману.

Пусть D – некоторая область в \mathbb{C} . Пусть вектор-функция $f(z)$ определена на D и принимает значения в квазибанаховом пространстве \mathfrak{F} . Аналогично функции действительного аргумента, будем говорить, что $f(z)$ *аналитична в D* , если для любого $z_0 \in D$ существует окрестность \mathcal{O}_{z_0} , в которой функция $f(z)$ может быть представлена как сумма степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^n, \quad f_n \in \mathfrak{F}.$$

Степенной ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n,$$

где $a \in \mathbb{C}$, элементы $c_n \in \mathfrak{F}$, будем называть *рядом Лорана*. Если вектор-функция представима сходящимся рядом Лорана в некоторой проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{C}$, то *вычетом* функции в этой точке назовем коэффициент c_{-1} лорановского разложения. Классификацию изолированных особых точек будем понимать также, как в теории функций комплексного переменного.

Интеграл от вектор-функции $f(z)$ по замкнутому гладкому контуру $\Gamma \subset \mathbb{C}$ будем понимать как сумму вычетов в изолированных особых точках, лежащих внутри контура Γ , умноженную на коэффициент $2\pi i$. Очевидно, что для аналитических вектор-функций справедлива классическая теорема Коши о равенстве нулю интеграла по замкнутому контуру.

Пусть область D ограничена кусочно-гладкой кривой Γ , проходящей через особую точку $z = \infty$. Обозначим через K_ε круг $|z| > \frac{1}{\varepsilon}$. Через D_ε обозначим область D , лежащую вне K_ε , через Γ_ε – часть Γ , лежащую вне K_ε , через γ_ε – часть границы K_ε , лежащую в Γ .

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D , за исключением полюсов $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, и непрерывна вплоть до границы, за исключением точки $z = a$. Если

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

то *несобственный интеграл от $f(z)$ по Γ* определим следующим образом

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z),$$

при условии, что ряд в правой части сходится в квазибанаховом пространстве последовательностей.

1.5. Квазисоболевы пространства и квазиоператор Лапласа. Редукция математических моделей

Квазисоболевы пространства

Пусть $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ – пространство Соболева, а $W_2^{-1}(\Omega)$ – сопряженное к нему относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\Omega)$ пространство с негативной нормой. Из теоремы вложения Соболева вытекает, что

$$\mathring{W}_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow W_2^{-1}(\Omega). \quad (1.5.1)$$

Также хорошо известно, что оператор Лапласа $-\Delta$, определяемый формулой

$$-\langle \Delta u, v \rangle = \sum_{m=1}^n \int_{\Omega} u_{x_m} v_{x_m} dx,$$

задает топологический изоморфизм :

$$-\Delta : \mathring{W}_2^1(\Omega) \rightarrow W_2^{-1}(\Omega). \quad (1.5.2)$$

Далее, пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ — множество собственных значений оператора Лапласа $-\Delta$, занумерованное по неубыванию с учетом их кратности. Построим пространства:

$$\ell_2^1 = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u_k|^2 < +\infty \right\},$$

$$\ell_2^{-1} = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |u_k|^2 < +\infty \right\}$$

и отметим топологические изоморфизмы $\ell_2^1 \cong \overset{\circ}{W} \frac{1}{2}(\Omega)$, $\ell_2^{-1} \cong W_2^{-1}(\Omega)$, а также плотность и непрерывность вложений

$$\ell_2^1 \hookrightarrow \ell_2 \hookrightarrow \ell_2^{-1}, \quad (1.5.3)$$

вытекающие из (1.5.1). Отметим банаховость пространств ℓ_2^1 и ℓ_2^{-1} с нормами $\|u\|_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u_k|^2$ и $\|v\|_{-1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |v_k|^2$ соответственно.

Введем в рассмотрение квазиоператор Лапласа

$$\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}. \quad (1.5.4)$$

Поскольку $\|\Lambda u\|_{-1} = \|u\|_1$, то из (1.5.4) следует топологичность изоморфизма $\Lambda : \ell_2^1 \rightarrow \ell_2^{-1}$, который, впрочем, легко получить из (1.5.2), (1.5.3). Обратный к Λ оператор (квазиоператор Грина Λ^{-1}) задается формулой

$$\Lambda^{-1} v = \{\lambda_k^{-1} v_k\}. \quad (1.5.5)$$

Данная часть посвящена перенесению описанной выше идеологии на квазибанаховы пространства ℓ_q , $q \in (0, 1)$. Построим квазисоболевы пространства:

$$\ell_q^1 = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{q/2} |u_k|^q < +\infty \right\},$$

$$\ell_q^{-1} = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-q/2} |u_k|^q < +\infty \right\},$$

где $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ — монотонно возрастающая последовательность такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$, а $q \in (0, 1)$.

По аналогии с пространствами Соболева $W_q^m(\Omega)$ введем в рассмотрение квазисоболевы пространства

$$\ell_q^m = \left\{ u = \{u_k\} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^q < +\infty \right\},$$

где $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$. Пространства ℓ_q^m квазибанаховы при всех $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$ с квазинормой

$${}^m_q \|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^q \right)^{1/q},$$

причем они тоже банаховы только если $q \in [1, +\infty)$. Если $q \in (0, 1)$, то константа $C = 2^{(1-q)/q}$. Заметим еще, что если $m = 0$, то $\ell_q^0 = \ell_q$.

Теорема 1.5.1. [22] *При всех $q \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}$, $l \leq m$, имеют место плотные и непрерывные вложения $\ell_q^m \hookrightarrow \ell_q^l$.*

Теорема 1.5.2. [22] *При всех $q \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}$ квазиоператор Лапласа $\Lambda : \ell_q^{m+2} \rightarrow \ell_q^m$ — топологический изоморфизм.*

Построим обратный оператор $\Lambda^{-1}u = \lambda_k^{-1}u_k$ (квазиоператор Грина). Очевидно, $\Lambda\Lambda^{-1}u = u$ при всех $u \in \ell_q^{-1}$, и $\Lambda^{-1}\Lambda u = u$ при всех $u \in \ell_q^m$. Далее,

$${}^{m+2}_q \|\Lambda^{-1}u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(m/2)+1} |u_k|^q \right)^{1/q} = {}^m_q \|u\|.$$

Пример 1.5.1. Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$; $Q_n(\lambda)$ — многочлен степени n . Рассмотрим оператор $Q_n(\Lambda)u = \{Q_n(\lambda_k)u_k\}$, $n \in \mathbb{N}$, где $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$, а монотонная последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$. Как нетрудно видеть, оператор $Q_n(\Lambda) \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $\text{dom} Q_n(\Lambda) = \ell_q^{m+2n}$.

Редукция математических моделей

Все модели математической физики, рассмотренные в пп. 1.1 – 1.3, могут быть представлены в виде

$$Q_n(\Delta)u_t = R_s(\Delta)u + f, \quad (1.5.6)$$

где $Q_n(\Delta)$, $R_s(\Delta)$ многочлены степени $n, s \in \mathbb{N}$ от оператора Лапласа $\Delta : W_q^{m+2}(\Omega) \rightarrow W_q^m(\Omega)$, $W_q^m(\Omega)$ – пространства Соболева, $q \geq 1$, $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Здесь Ω ограниченная область в \mathbb{R}^d с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$. Отметим, что во всех приведенных моделях $n < s$. В качестве краевых условий для уравнения (1.5.6) можно рассматривать, например, условия

$$u = \Delta u = \dots = \Delta^{s-1}u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad (1.5.7)$$

или условия

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = \dots = \frac{\partial \Delta^{s-1}u}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \quad (1.5.8)$$

Как известно, спектр оператора Лапласа с краевыми условиями (1.5.7) или (1.5.8) является действительным, неположительным, дискретным, конечнократным и сгущается только к точке $-\infty$. Обозначим спектр оператора $-\Delta$ через $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$, а соответствующие собственные функции обозначим через $\{\varphi_k\} \subset W_q^m(\Omega)$. Здесь точки спектра занумерованы по неубыванию с учетом их кратности. В силу того, что собственные функции оператора Лапласа образуют базис, то любая функция $W_q^m(\Omega)$ может быть представлена в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varphi_k$$

и в силу этого функция $u \in W_q^m(\Omega)$ однозначно задается элементом $u = (u_1, u_2, \dots) \in \ell_q^m$. И действие оператора $-\Delta$ задается

$$-\Delta u = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k \varphi_k,$$

а, следовательно, в пространствах ℓ_q^m может быть описано с помощью квазиоператора Лапласа $\Lambda : \ell_q^{m+2} \rightarrow \ell_q^m$, действующего по правилу

$$\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}_{k=1}^\infty.$$

Таким образом, исследование задачи (1.5.6), (1.5.7) или (1.5.6), (1.5.8) можно проводить в пространствах последовательностей коэффициентов ряда Фурье. Более того, в таких пространствах возможно расширить множества значений параметров, характеризующие выбранные пространства, например, для пространств последовательностей возможно рассмотреть случай $0 < q < 1$, который в пространствах функций рассматривать невозможно [96]. А преимущества такого подхода актуально в силу подходов решения некоторых технических задач (см. по этому поводу [8]).

Пусть теперь $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ монотонная последовательность такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$. Рассмотрим в квазисоболевых пространствах

$$\ell_q^m = \left\{ u = \{u_k\} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=1}^\infty (\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|)^q < +\infty \right\}$$

уравнение вида

$$Q_n(\Lambda)u_t = R_s(\Lambda)u, \quad (1.5.9)$$

где $Q_n(\Lambda)$, $R_s(\Lambda)$ многочлены степени n , $s \in \mathbb{N}$ ($n < s$) от квазиоператора Лапласа $\Lambda : \ell_p^{m+2} \rightarrow \ell_p^m$.

Пример 1.5.2. Пусть здесь и далее $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $Q_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^s d_j \lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих корней, степеней n и s , соответственно, причем $n < s$ и $d_s c_n < 0$. Построим операторы $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$, как в примере 1.5.1.

Перейдем к описанию редукции моделей, описанных в параграфах 1.1 – 1.3, к линейным уравнениям вида (1.5.9) в квазисоболевых пространствах.

Уравнение Дзекцера. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . Рассмотрим граничную задачу

$$u(t, x) = \Delta u(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \in [0, T]$$

для уравнения Дзекцера вида (1.1.1)

$$(\lambda - \Delta) \frac{\partial u}{\partial t} = (-\alpha \Delta^2 + \beta \Delta) u.$$

Данная задача редуцируется к уравнению в квазисоболевых пространствах вида (1.5.9) при $Q_1(\Lambda) = \lambda + \Lambda$ и $R_2(\Lambda) = -\alpha \Lambda^2 + \beta \Lambda$.

Обобщенное линеаризованная модель Фишера – Колмогорова.

Пусть Ω ограниченная область в \mathbb{R}^d , $d \leq 2$ с границей $\partial\Omega$. Линеаризованная математическая модель, основанная на уравнении (1.2.1) (т.е. при $f(u) \equiv u$), имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\gamma \Delta^2 u + \Delta u + u$$

с условием

$$u(t, x) = \Delta u(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \in [0, T].$$

Данное уравнение сводится к уравнению вида (1.5.9) в квазисоболевых пространствах при $Q_0(\Lambda) = \mathbb{I}$ и $R_2(\Lambda) = -\gamma \Lambda^2 - \Lambda + I$.

Модель диффузии четвертого порядка. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ограниченная область с границей $\partial\Omega$. Уравнение диффузии четвертого порядка вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta^2 u$$

с условием

$$u(t, x) = \Delta u(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \in [0, T]$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0 \quad x \in \partial\Omega, t \in [0, T]$$

редуцируется к уравнению вида (1.5.9) в квазисоболевых пространствах при $Q_0(\Lambda) = \mathbb{I}$ и $R_2(\Lambda) = -\Lambda^2$.

Уравнение Кана – Хилларда. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса \mathcal{C}^1 . При условии, что на границе $\partial\Omega$ выполнено

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0$$

рассмотрим линейризацию уравнения Кана – Хилларда (1.3.14) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta[\nu u - \varepsilon^2 \Delta u].$$

Это уравнение сводится к уравнению вида (1.5.9) в квазисоболевых пространствах при $Q_0(\Lambda) = \mathbb{I}$ и $R_2(\Lambda) = -\varepsilon^2 \Lambda^2 + \nu \Lambda$.

2. Аналитические методы исследования класса эволюционных моделей в квазисоболевых пространствах

Методы исследования, использованные в данной главе, базируются на подходе, примененном в [16, 31, 43],[46]–[54], [101] в случае банаховых пространств.

2.1. Относительно секториальные операторы

Рассмотрим в квазисоболевых пространствах \mathfrak{U} и \mathfrak{F} операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Определим L -резольвентное множество оператора M как $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$ и L -спектр оператора M как $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$.

Определение 2.1.1. Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$. Оператор-функции вида $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ называются, соответственно, L -резольвентой, правой и левой L -резольвентами оператора M .

Лемма 2.1.1. [22] Пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, тогда L -резольвента, правая и левая L -резольвенты оператора M непрерывны в $\rho^L(M)$.

Теорема 2.1.1. [22] Пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, тогда L -резольвента, правая и левая L -резольвенты оператора M голоморфны в $\rho^L(M)$.

Лемма 2.1.2. Пусть $\lambda, \mu \in \rho^L(M)$, тогда

- (i) $\ker R_\lambda^L(M) = \ker L$, $\operatorname{im} R_\lambda^L(M) = \operatorname{im} R_\mu^L(M)$;
- (ii) $\ker L_\lambda^L(M) = \{M\varphi : \varphi \in \ker L \cap \operatorname{dom} M\}$, $\operatorname{im} L_\lambda^L(M) = \operatorname{im} L_\mu^L(M)$.

Доказательство. (i) Так как оператор $(\lambda L - M)^{-1}$ линейен, то получим, что $\ker L \subset \ker R_\lambda^L(M)$. Для того, чтобы показать обратное включение, возьмем $u : R_\lambda^L(M)u = 0$. Тогда получим $Lu = (\lambda L - M)0 = 0$.

Докажем теперь, что $\text{im}R_\lambda^L(M) \subset \text{im}R_\mu^L(M)$. Возьмем $u \in \text{im}R_\lambda^L(M)$, тогда $\exists f_1 : R_\lambda^L(M)f_1 = u$. Откуда получим, что

$$u - R_\mu^L(M)f_1 = (\mu - \lambda)R_\mu^L(M)u.$$

Отсюда $R_\mu^L(M)(f_1 + (\mu - \lambda)u) = u$ и, таким образом, существует элемент $f_2 = f_1 + (\mu - \lambda)u$ такой, что $R_\mu^L(M)f_2 = u \Rightarrow u \in \text{im}R_\mu^L(M)$. Для того, чтобы получить обратное включение поменяем местами λ и μ .

(ii) Предположим, что $L_\mu^L(M)f = 0$, тогда $Lv = 0$, где $v = (\mu L - M)^{-1}f$. Выразим $f = (\mu L - M)v = Mu$, где $u = -v \in \ker L$. Обратное включение получим в силу того, что $f = Mu = M(-v) = (\mu L - M)v$ и тогда $L_\mu^L(M)f = L(-u) = 0$, где $u \in \ker L$. •

Определение 2.1.2. Назовем оператор M *секториальным относительно* оператора L (или коротко, *L -секториальным*), если существуют константы $K > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$ такие, что сектор

$$S_{a,\theta}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \quad \mu \neq a\} \subset \rho^L(M), \quad (2.1.1)$$

$$\text{и } \max\{\mathcal{L}(\mathfrak{U}) \|R_\mu^L(M)\|, \mathcal{L}(\mathfrak{F}) \|L_\mu^L(M)\|\} \leq \frac{K}{|\mu - a|} \quad \forall \mu \in S_{a,\theta}^L(M). \quad (2.1.2)$$

Замечание 2.1.1. Если использовать терминологию из [101], то определение L -секториального оператора совпадает с определением $(L, 0)$ -секториального оператора.

Замечание 2.1.2. В определении 2.1.2 можно взять константу $a = 0$. Так как в противном случае, если $a = b \neq 0$ для $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, то константа $\tilde{a} = 0$ для оператора $\tilde{M} = M - bL \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Используя обозначение $\tilde{M} = M$, $S_{0,\theta}^L(\tilde{M}) = S_\theta^L(M)$ получим исходное определение.

Замечание 2.1.3. При условии существования $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$ секториальность оператора $L^{-1}M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U})$ (или, что тоже самое, секториальность $ML^{-1} \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{F})$) необходима и достаточна для L -секториальности оператора M , в силу того, что $R_\mu(L^{-1}M) = L^{-1}R_\mu(ML^{-1})L$.

Напомним построения из параграфа 1.5. Возьмем монотонную последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такую, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$. Пусть $Q_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^s d_j \lambda^j$ – действительные полиномы, которые не имеют общих корней, причем $d_s c_n < 0$. Степени полиномов $Q_n(\lambda)$ и $R_s(\lambda)$, соответственно, равны n и s , причем $n < s$. Рассмотрим в квазисоболевых пространствах $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$ операторы $L = Q_n(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (по построению) и $M = R_s(\Lambda) \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $\text{dom} R_s(\Lambda) = \ell_q^{m+2s}$ (в силу примера 1.5.1).

Лемма 2.1.3. Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$ квазисоболевы пространства и операторы $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$. Тогда оператор M является L -секториальным.

Доказательство. По построению множество $\sigma^L(M)$ содержит точки вида $\mu_k = R_s(\lambda_k)(Q_n(\lambda_k))^{-1}$ с учетом их кратности, где $k \in \mathbb{N}$ таковы, что $Q_n(\lambda_k) \neq 0$. Числа $\mu_k \in \sigma^L(M)$ являются действительными, сгущающимися только к $-\infty$, иными словами при $a = \max_k \mu_k$, $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ для фиксированного $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, будет выполняться условие (2.1.1) из определения 2.1.2.

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} & \frac{m+2n}{q} \|R_\mu^L(M)u\|^q \leq C^q \sum' \frac{|\langle u, e_k \rangle|^q \cdot \frac{m+2n}{q} \|e_k\|^q}{|\mu - \mu_k|^q} = \\ & = C^q \sum' \frac{|\langle u, e_k \rangle|^q \cdot (\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2}q}}{|\mu - \mu_k|^q} = C^q \sum' \frac{1}{|\mu - \mu_k|^q} (|u_k|(\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2}})^q \leq \\ & \leq C^q \frac{1}{(\sin \theta)^q |\mu - a|^q} \sum' (|u_k|(\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2}})^q \leq C^q \frac{1}{(\sin \theta)^q |\mu - a|^q} \cdot \frac{m+2n}{q} \|u\|^q. \end{aligned}$$

В этом неравенстве и далее в тексте знаком суммы со штрихом обозначена сумма, у которой отсутствуют слагаемые с номерами $k \in \mathbb{N}$ такими, что выполнено $Q_n(\lambda_k) = 0$. Константа C взята из определения квазинормы и $a = \max\{\mu_k\}$. Таким образом, выполняется условие (2.1.2) определения 2.1.2. •

2.2. Вырожденные голоморфные разрешающие полугруппы

В квазисоболевых пространствах \mathfrak{U} и \mathfrak{F} рассмотрим уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu, \quad (2.2.1)$$

с операторами $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и эквивалентные ему при $\alpha \in \rho^L(M)$ уравнения

$$R_\alpha^L(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \quad (2.2.2)$$

$$L_\alpha^L(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f. \quad (2.2.3)$$

Все эти уравнения будем рассматривать как формы абстрактного уравнения

$$A\dot{v} = Bv \quad (2.2.4)$$

в квазисоболевом пространстве \mathfrak{V} , где операторы $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$, $B \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{V})$.

Определение 2.2.1. Вектор-функцию $v \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathfrak{V})$ назовем *решением* уравнения (2.2.4), если она удовлетворяет этому уравнению.

Определение 2.2.2. Назовем отображение $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathfrak{V}))$ *полугруппой разрешающих операторов* (или просто *разрешающей полугруппой*) для уравнения (2.2.4), если выполнены условия

- (i) $V^s V^t = V^{s+t} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+$;
- (ii) вектор-функция $v(t) = V^t v_0$ – решение (2.2.4) для любого $v_0 \in \mathfrak{V}$.

Замечание 2.2.1. Единица полугруппы из определения 2.2.2 может не существовать.

Назовем полугруппу $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ *равномерно ограниченной*, при условии $\exists M > 0 \quad \forall t > 0 \quad \mathcal{L}(\mathfrak{U})\|V^t\| \leq M$; *аналитической*, при условии, что она может быть аналитически продолжена в некоторый сектор $\Sigma \subset \mathbb{C}$ такой, что луч $\mathbb{R}_+ \subset \Sigma$.

Теорема 2.2.1. Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$ квазисоболевы пространства и операторы $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$, причем $\operatorname{Re} \mu_k \leq 0$. Тогда существует разрешающая полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ ($\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$) для уравнения (2.2.2) ((2.2.3)), причем эта полугруппа аналитична в секторе $\{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta - \pi/2, \tau \neq 0\}$, равномерно ограничена и задается интегралами типа Данфорда-Тейлора

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu \quad (2.2.5)$$

$$(F^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu), \quad (2.2.6)$$

где контур Γ таков, что

$$\Gamma \subset S_{\theta}^L(M), \quad \arg \mu \rightarrow \pm\theta \quad \text{при} \quad |\mu| \rightarrow \infty. \quad (2.2.7)$$

Доказательство. По определению несобственного интеграла из главы 1 существует интеграл (2.2.5). Покажем его сходимост. Для этого выберем область D , ограниченную кривой Γ . Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим круг $\|z\| > \frac{1}{\varepsilon}$, который обозначим K_{ε} . Обозначим D_{ε} часть области D , лежащую вне K_{ε} , а через Γ_{ε} – часть Γ , лежащую вне K_{ε} , через γ_{ε} – часть границы K_{ε} , лежащую в Γ . В силу того, что

$$\begin{aligned} \frac{m+2n}{q} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon}} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} u d\mu \right\| &\leq C \left(\sum_{|\mu_k| > \frac{1}{\varepsilon}} e^{\operatorname{Re} \mu_k q t} |\langle u, e_k \rangle|^q \cdot \frac{m+2n}{q} \|e_k\|^q \right)^{1/q} \leq \\ &\leq C e^{-\frac{1}{\varepsilon} t} \left(\sum |\langle u, e_k \rangle|^q \cdot (\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2} q} \right)^{1/q} = C e^{-\frac{1}{\varepsilon} t \cdot \frac{m+2n}{q}} \|u\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+, \end{aligned}$$

$$\text{и} \quad \frac{m+2n}{q} \|U^t u\| = \left(\frac{m+2n}{q} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} u d\mu \right\| \right)^{1/q} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq C \left(\sum' e^{\operatorname{Re} \mu_k q t} |\langle u, e_k \rangle|^q \cdot \frac{m+2n}{q} \|e_k\|^q \right)^{1/q} = \\ &= C \left(\sum' e^{\operatorname{Re} \mu_k q t} |\langle u, e_k \rangle|^q \cdot (\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2} q} \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

а последний ряд сходится, так как $\operatorname{Re}\mu_k qt < 0$ для достаточно больших $|\mu_k|$, $t > 0$, поэтому интеграл (2.2.5) существует. Аналитическое продолжение этого интеграла в сектор $\{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta - \frac{\pi}{2}, \tau \neq 0\}$ возможно в силу неравенства $\cos(\arg \mu + \arg \tau) < 0$.

Рассмотрим условие (i) из определения 2.2.2.

$$\begin{aligned} U^{s+t}u &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu(s+t)} d\mu = \sum' e^{\mu_k(s+t)} \langle u, e_k \rangle e_k = \\ &= \sum' e^{\mu_k s} e^{\mu_k t} \langle u, e_k \rangle e_k. \end{aligned}$$

С другой стороны, $U^s U^t u = \sum' e^{\mu_k s} \langle \sum_j e^{\mu_j t} \langle u, e_j \rangle e_j, e_k \rangle e_k =$

$$= \sum' e^{\mu_k s} e^{\mu_k t} \langle u, e_k \rangle e_k.$$

Теперь проверим условие (ii) из определения 2.2.2. Рассмотрим произвольный элемент $u \in \mathfrak{U}$ и докажем, что $U^t u$ будет решением (2.2.2).

$$\begin{aligned} R_{\alpha}^L(M) \dot{U}^t u &= \sum' \frac{\langle \sum_j e^{\mu_j t} \mu_j \langle u, e_j \rangle e_j, e_k \rangle}{\alpha - \mu_k} e_k = \\ &= \sum' \frac{e^{\mu_k t} \mu_k \langle u, e_k \rangle}{\alpha - \mu_k} e_k = \sum' \frac{e^{\mu_k t} \frac{R(\lambda_k)}{Q(\lambda_k)} \langle u, e_k \rangle}{\alpha - \frac{R(\lambda_k)}{Q(\lambda_k)}} e_k = \\ &= \sum' \frac{e^{\mu_k t} R(\lambda_k) \langle u, e_k \rangle}{\alpha Q(\lambda_k) - R(\lambda_k)} e_k = (\alpha L - M)^{-1} M u. \end{aligned}$$

Наконец, покажем равномерную ограниченность:

$$\begin{aligned} \frac{m+2n}{q} \|U^t u\| &\leq C \left(\sum' e^{\operatorname{Re}\mu_k qt} |\langle u, e_k \rangle|^q \cdot (\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2}q} \right)^{1/q}, \\ &\leq C \left(\sum' e^{\operatorname{Re}\mu_k qt} |\langle u, e_k \rangle|^q \cdot \frac{m+2n}{q} \|e_k\|^q \right)^{1/q} \leq \\ &\leq C e^{\max\{\operatorname{Re}\mu_k\}qt} \left(\sum' |\langle u, e_k \rangle|^q \cdot \frac{m+2n}{q} \|e_k\|^q \right)^{1/q} \leq C_q^{m+2n} \|u\|. \end{aligned}$$

Откуда, $\mathcal{L}(\mathfrak{U}) \|U^t\| \leq C$. •

Замечание 2.2.2. Если условие $\operatorname{Re} \mu_k \leq 0$ не выполнено (т.е. константа $a \neq 0$ из определения 2.1.2), то разрешающей полугруппой уравнения $L\dot{u} = Mu$ будет $\{W^t = e^{at}U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M)e^{(\mu+a)t}d\mu : t \in \mathbb{R}_+\}$, причем эта полугруппа будет экспоненциально ограничена, т.е.

$$\mathcal{L}(\mathfrak{U})\|W^t\| \leq Me^{bt} \quad \forall t > 0.$$

Покажем это. Действительно, рассмотрим

$$\begin{aligned} \frac{m+2n}{q}\|W^t u\| &= e^{at} \left(\frac{m+2n}{q} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M)e^{\mu t} d\mu \right\| \right)^{1/q} \leq \\ &\leq Ce^{at} \left(\sum' e^{\operatorname{Re} \mu_k q t} |\langle u, e_k \rangle|^q \cdot \frac{m+2n}{q} \|e_k\|^q \right)^{1/q} = \\ &= Ce^{(a+\max \operatorname{Re} \mu_k q)t} \left(\sum' |\langle u, e_k \rangle|^q \cdot (\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2}q} \right)^{1/q} \leq Ce^{(a+\max \operatorname{Re} \mu_k q)t} \cdot \frac{m+2n}{q} \|u\|. \end{aligned}$$

Откуда, $\forall t > 0 \quad \mathcal{L}(\mathfrak{U})\|W^t\| \leq Ce^{bt}$.

Замечание 2.2.3. Пусть степени полиномов $n = s$, тогда оператор M будет спектрально ограниченным относительно оператора L , причем ∞ является устранимой особой точкой $(\mu L - M)^{-1}$, и полугруппы (2.2.5), (2.2.6) могут быть продолжены до аналитических групп [22].

Замечание 2.2.4. В условиях теоремы 2.2.1 выполнены соотношения:

$$LU^t u = F^t Lu \quad \forall u \in \mathfrak{U},$$

$$MU^t u = F^t Mu \quad \forall u \in \operatorname{dom} M \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

В силу того, что разрешающие полугруппы уравнений (2.2.2), (2.2.3) имеют вид (2.2.5), (2.2.6), то ясно, что операторы могут быть вырождены, т.е. у них существуют нетривиальные ядра $\ker U^t \supset \ker R_{\mu}^L(M)$, $\ker F^t \supset \ker L_{\mu}^L(M) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Определение 2.2.3. Множество $\ker V^{\bullet} = \{\varphi \in \mathfrak{V} : \exists t \in \mathbb{R}_+ \quad V^t \varphi = 0\}$ назовем *ядром* аналитической полугруппы $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, а множество $\operatorname{im} V^{\bullet} = \{v \in \mathfrak{V} : \lim_{t \rightarrow 0+} V^t v = v\}$ назовем *образом* этой полугруппы.

Замечание 2.2.5. Ядро $\ker V^\bullet = \ker V^t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$ в силу аналитичности полугруппы $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$.

Покажем это. Множество $\ker V^\bullet = \bigcup_{t>0} \ker V^t$ по определению. Это ясно из $\ker V^{t_1} = \ker V^{t_2} \quad \forall t_2 > t_1 > 0$, в силу $V^{t_2} = V^{t_2-t_1}V^{t_1}$, то $\ker V^{t_1} \subset \ker V^{t_2}$. Возьмем $u \in \ker V^{t_2}$ и рассмотрим $v(t) = V^t u$. Эта функция аналитична в секторе $\Sigma \supset \mathbb{R}_+$ и зануляется при $t \geq t_2$. Откуда в силу того, что аналитическая функция единственна, то $v(t) \equiv 0$ в секторе Σ .

Таким образом, множество $\ker V^\bullet$ есть подпространство, что следует из замечания 2.2.5.

Лемма 2.2.1. Пусть $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ аналитическая полугруппа, тогда $\ker V^\bullet \cap \text{im} V^\bullet = \{0\}$.

Доказательство. Возьмем $v \in \ker V^\bullet \cap \text{im} V^\bullet$. В силу замечания 2.2.5 получим $\forall t > 0 \quad V^t v = 0$. Откуда $v = \lim_{t \rightarrow 0+} V^t v = 0$. •

Множество $\ker U^\bullet$ ($\ker F^\bullet$) будем обозначать через \mathfrak{U}^0 (\mathfrak{F}^0), а через L_0 (M_0) будем обозначать сужение L (M) на \mathfrak{U}^0 ($\mathfrak{U}^0 \cap \text{dom} M$).

Лемма 2.2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1, тогда операторы $L_0 \in \mathcal{L}(\ker U^\bullet; \ker F^\bullet)$, $M_0 : \ker U^\bullet \cap \text{dom} M \rightarrow \ker F^\bullet$.

Доказательство. В силу замечания 2.2.4 из $U^t u = 0$ следует, что $0 = LU^t u = F^t Lu$ ($0 = MU^t u = F^t Mu$) $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall u \in \mathfrak{U}^0$ ($\forall u \in \text{dom} M$). •

Обозначим $\sigma_0^L(M) = \sigma^{L_0}(M_0)$.

Лемма 2.2.3. При выполнении условий теоремы 2.2.1 $\sigma_0^L(M) = \{\infty\}$.

Доказательство. Для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ рассмотрим

$$(\lambda L_0 - M_0)^{-1} = \sum' \frac{\langle \cdot, e_k \rangle}{\lambda Q(\lambda_k) - R(\lambda_k)} e_k. \quad (2.2.8)$$

Пусть $f \in \mathfrak{F}^0$, тогда $\|(\lambda L_0 - M_0)^{-1} f\| = \left\| \sum' \frac{\langle f, e_k \rangle}{\lambda Q(\lambda_k) - R(\lambda_k)} e_k \right\| \leq$

$$\leq C \left(\sum' \frac{|\langle f, e_k \rangle|^q}{|\lambda Q(\lambda_k) - R(\lambda_k)|^q} \frac{m}{q} \|e_k\|^q \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq C \max_{\lambda_k \in \ker Q} \frac{1}{|\lambda Q(\lambda_k) - R(\lambda_k)|} \left(\sum' |f_k|^q (\lambda_k)^{\frac{m}{2}q} \right)^{1/q} \leq \text{const} \frac{m}{q} \|f\|.$$

Откуда ясно, что оператор (2.2.8) ограничен. Теперь возьмем $\varphi \in \mathfrak{U}^0$.

Тогда получим $(\lambda L_0 - M_0)^{-1} (\lambda L_0 - M_0) \varphi = \sum' \frac{\langle (\lambda L_0 - M_0) \varphi, e_k \rangle}{\lambda Q(\lambda_k) - R(\lambda_k)} e_k =$

$$= \sum' \frac{\langle \sum_{\lambda_j \in \ker Q} (\lambda Q(\lambda_j) - R(\lambda_j)) \langle \varphi, e_j \rangle e_j, e_k \rangle}{\lambda Q(\lambda_k) - R(\lambda_k)} e_k =$$

$$= \sum' \frac{(\lambda Q(\lambda_k) - R(\lambda_k)) \langle \varphi, e_k \rangle}{\lambda Q(\lambda_k) - R(\lambda_k)} e_k = \sum' \langle \varphi, e_k \rangle e_k = \varphi.$$

Для $f \in \mathfrak{F}^0$ по аналогии справедливо, что

$$(\lambda L_0 - M_0)(\lambda L_0 - M_0)^{-1} f = (\lambda L_0 - M_0) \sum' \frac{\langle f, e_k \rangle}{\lambda Q(\lambda_k) - R(\lambda_k)} e_k = f.$$

Следовательно, оператор (2.2.8) является обратным к $\lambda L_0 - M_0$. Контур Γ из условия (2.2.7) можно взять лежащим "правее" точки λ , в силу аналитичности используемых подынтегральных функций. Тогда при любых $\varphi \in \ker U^\bullet \cap \text{dom} M$, $f \in \ker F^\bullet$, $t \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(\mu L - M)^{-1} e^{(\mu-\lambda)t}}{\mu - \lambda} (\lambda L - M) \varphi d\mu =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{(\mu-\lambda)t} \varphi}{\mu - \lambda} d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\mu L - M)^{-1} L e^{(\mu-\lambda)t} \varphi d\mu = \varphi - e^{-\lambda t} U^t \varphi = \varphi,$$

$$(\lambda L - M) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(\mu L - M)^{-1} e^{(\mu-\lambda)t}}{\mu - \lambda} f d\mu =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{(\mu-\lambda)t}}{\mu - \lambda} f d\mu - \frac{e^{-\lambda t}}{2\pi i} \int_{\Gamma} L (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} f d\mu = f - e^{-\lambda t} F^t f = f$$

в силу теоремы Коши.

Откуда ясно, что $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ существует оператор

$$(\lambda L_0 - M_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0). \quad \bullet$$

Следствие 2.2.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1, тогда существует $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Доказательство. В лемме 2.2.3 положим $\lambda = 0$, тогда

$$(M_0)^{-1} = \sum' \frac{\langle \cdot, e_k \rangle}{R(\lambda_k)} e_k. \quad \bullet \quad (2.2.9)$$

Лемма 2.2.4. Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1, тогда

$$\forall u \in \text{im} R_\mu^L(M) \quad (\forall f \in \text{im} L_\mu^L(M)) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} U^t u = u \quad \left(\lim_{t \rightarrow 0+} F^t f = f \right).$$

Доказательство. Пусть вектор $u = R_\mu^L(M)v$ произволен, а $\mu \in S_\theta^L$. Тогда, используя L -резольвентное тождество, получим

$$\begin{aligned} U^t u &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\lambda^L(M) e^{\lambda t} R_\mu^L(M) v d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R_\lambda^L(M) v}{\mu - \lambda} e^{\lambda t} d\lambda + R_\mu^L(M) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t} v}{\lambda - \mu} d\lambda, \end{aligned}$$

где второй интеграл равен нулю по теореме Коши. Устремим $t \rightarrow 0+$ и получим, что $\lim_{t \rightarrow 0+} U^t u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R_\lambda^L(M) v}{\mu - \lambda} d\lambda = R_\mu^L(M) v = u$, так как последний интеграл равен вычету функции $R_\lambda^L(M) v$ (контур обходим в отрицательном направлении).

(Утверждение о полугруппе $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ доказывается аналогично.) \bullet

Теорема 2.2.2. В условиях теоремы 2.2.1 множества

$$\ker R_\mu^L(M) = \mathfrak{U}^0, \quad \ker L_\mu^L(M) = \mathfrak{F}^0.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \ker R_\mu^L(M) \setminus \{0\}$ или φ – собственный вектор оператора L . Ясно, что он принадлежит $\ker U^\bullet$ в силу (2.2.5).

Таким образом, $\ker R_\mu^L(M) \subset \ker U^\bullet$. Покажем, что есть обратное вложение. Возьмем вектор $\psi = R_\mu^L(M)\varphi$ с $\varphi \in \ker U^\bullet$. Тогда $\psi = R_\mu^{L_0}(M_0)\varphi \in \ker U^\bullet$ по леммам 2.2.2, 2.2.3. Откуда в лемме 2.2.4

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} U^t \psi = \psi = R_\mu^L(M)\varphi.$$

Следовательно, вектор $\varphi \in \mathfrak{U}^0$ и $\ker R_\mu^L(M) = \mathfrak{U}^0$.

Пусть теперь $f \in \ker L_\mu^L(M)$, тогда получим $f = M\varphi$, где вектор $\varphi \in \ker L_\mu^L(M) \cap \text{dom}M$. Из замечания 2.2.4 получим $\forall t \in \mathbb{R}_+$

$$F^t f = F^t M\varphi = MU^t \varphi = M0 = 0.$$

Откуда, $f \in \ker F^\bullet$, $\mathfrak{F}^0 \subset \ker F^\bullet$.

Возьмем $f \in \ker F^\bullet$, тогда $M_0^{-1}f = \varphi \in \ker U^\bullet = \ker L_\mu^L(M)$. Откуда

$$L_\mu^L(M)f = L_\mu^L(M)M_0\varphi = MR_\mu^L(M)\varphi = 0. \bullet$$

Замечание 2.2.6. Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1, тогда операторы $H = M_0^{-1}L_0$ и $J = L_0M_0^{-1}$ являются тождественно нулевыми.

Замыкание образа $\text{im}R_\mu^L(M)$ ($\text{im}L_\mu^L(M)$) правой (левой) L -резольвенты в норме пространства \mathfrak{U} (\mathfrak{F}) обозначим через \mathfrak{U}^1 (\mathfrak{F}^1).

Теорема 2.2.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1, тогда $\text{im}U^\bullet = \mathfrak{U}^1$, $\text{im}F^\bullet = \mathfrak{F}^1$.

Доказательство. В силу леммы 2.2.4 получим $\text{im}R_\mu^L(M) \subset \text{im}U^\bullet$ и так как $\lim_{t \rightarrow 0^+} U^t u = u$ определен на линеале $\text{im}R_\mu^L(M)$, который плотен в \mathfrak{U}^1 , то так как полугруппа равномерно ограничена, то из теоремы Банаха – Штейнгауза следует существование этого предела на всем пространстве \mathfrak{U}^1 , то есть $\mathfrak{U}^1 \subset \text{im}U^\bullet$.

В силу теоремы Коши и L -резольвентного тождества получим

$$U^t u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\lambda^L(M) e^{\lambda t} u d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\lambda^L(M) e^{\lambda t} u d\lambda -$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu_0}^L(M) e^{\lambda t} u d\lambda = \frac{1}{2\pi i} R_{\mu_0}^L(M) \int_{\Gamma} (\mu_0 - \lambda) R_{\lambda}^L(M) e^{\lambda t} u d\lambda$$

$\forall \mu_0 \in \rho^L(M)$. Откуда $\forall t > 0$ $\text{im} U^t \subset \text{im} R_{\mu}^L(M)$ и $\text{im} U^{\bullet} \subset \mathfrak{U}^1$.

Утверждение об образе полугруппы $\text{im} F^{\bullet}$ доказывается аналогично. •

Определим сужение операторов $L_1 = L \Big|_{\mathfrak{U}^1}$, $M_1 = M \Big|_{\mathfrak{U}^1 \cap \text{dom} M}$ на образы полугрупп, которые являются подпространствами.

Лемма 2.2.5. Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1, тогда $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$.

Доказательство. Возьмем $u = \lim_{t \rightarrow 0+} U^t u$, тогда из непрерывности L и замечания 2.2.4 получим

$$Lu = L \lim_{t \rightarrow 0+} U^t u = \lim_{t \rightarrow 0+} LU^t u = \lim_{t \rightarrow 0+} F^t Lu,$$

что и требовалось. •

Замечание 2.2.7. В силу леммы 2.2.1 и теорем 2.2.2, 2.2.3

$$\mathfrak{U}^0 \cap \mathfrak{U}^1 = \{0\}, \quad \mathfrak{F}^0 \cap \mathfrak{F}^1 = \{0\}.$$

Введем обозначения: $\tilde{\mathfrak{U}} = \overline{\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1}$, $\tilde{\mathfrak{F}} = \overline{\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1}$ и

$$\forall t > 0 \quad \tilde{U}^t = U^t \Big|_{\tilde{\mathfrak{U}}}, \quad \tilde{F}^t = F^t \Big|_{\tilde{\mathfrak{F}}}.$$

Лемма 2.2.6. Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1, тогда $\tilde{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$.

Доказательство. Докажем, что оператор $\tilde{P} = s - \lim_{t \rightarrow 0+} \tilde{U}^t$ задает проектор. По теореме Банаха–Штейнгауза этот оператор непрерывен в силу равномерной ограниченности полугруппы и того, что множество $\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, на котором определен \tilde{P} , в силу теорем 2.2.2, 2.2.3, плотно в пространстве $\tilde{\mathfrak{U}}$. Так как оператор \tilde{P} непрерывен, то справедливо

$$\forall u \in \tilde{\mathfrak{U}} \quad \tilde{P}^2 u = \tilde{P} \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{P}(u_k^0 + u_k^1) = \tilde{P} \lim_{k \rightarrow \infty} u_k^1 =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{P}u_k^1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{P}u_k^0 = \tilde{P}u, \quad \text{где } u_k^l \in \mathfrak{U}^l, \quad l = 0, 1.$$

Для $u \in \mathfrak{U}^0$ $\tilde{P}u = 0$. Пусть $u \in \ker \tilde{P}$, т.е.

$$0 = \tilde{P}u = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{P}(u_k^0 + u_k^1) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k^1.$$

Поэтому $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k^0 \in \mathfrak{U}^0$, так как \mathfrak{U}^0 замкнуто.

Получим $\mathfrak{U}^1 \subset \text{im} \tilde{P}$ по теореме 2.2.3. Если вектор $u \in \text{im} \tilde{P}$, то для некоторого $v \in \tilde{\mathfrak{U}}$ $u = \tilde{P}v$. Принимая во внимание идемпотентность оператора \tilde{P} , получим $\tilde{P}u = \tilde{P}^2v = \tilde{P}v = u$. Следовательно, $\text{im} P \subset \mathfrak{U}^1$.

Для пространства $\tilde{\mathfrak{F}}$ лемма доказывается аналогично с использованием проектора $\tilde{Q} = s - \lim_{t \rightarrow 0+} \tilde{F}^t$. •

Замечание 2.2.8. Для полугруппы $\{\tilde{U}^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ ($\{\tilde{F}^t : t \in \mathbb{R}_+\}$) единицу можно задать в виде

$$\tilde{U}^0 = \tilde{P} = s - \lim_{t \rightarrow 0+} U^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{U}}) \quad (\tilde{F}^0 = \tilde{Q} = s - \lim_{t \rightarrow 0+} F^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{F}}))$$

в силу теорем 2.2.2, 2.2.3, замечания 2.2.5 и леммы 2.2.6. Эта единица будет проектором на $\tilde{\mathfrak{U}}^1$ ($\tilde{\mathfrak{F}}^1$) вдоль $\tilde{\mathfrak{U}}^0$ ($\tilde{\mathfrak{F}}^0$).

2.3. Обобщенная задача Шоуолтера – Сидорова и фазовое пространство эволюционной модели соболевского типа

Пусть, как и выше, $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $Q_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^s d_j \lambda^j$ – действительные полиномы, не имеющие общих корней. Степени полиномов $Q_n(\lambda)$ и $R_s(\lambda)$, соответственно, равны n и s , причем $n < s$ и $d_s c_n < 0$. Операторы $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$ полиномы от квазиоператора Лапласа $\Lambda : \ell_q^{r+2} \rightarrow \ell_q^r$. Для уравнений (2.2.2) и (2.2.3) поставим, соответственно, обобщенные задачи Шоуолтера – Сидорова

$$\lim_{t \rightarrow 0+} R_\alpha^L(M)(u(t) - u_0) = 0, \quad (2.3.1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} L_\alpha^L(M)(f(t) - f_0) = 0. \quad (2.3.2)$$

Замечание 2.3.1. Условие (2.3.1) является эквивалентом условия

$$\lim_{t \rightarrow 0+} L(u(t) - u_0) = 0, \quad (2.3.3)$$

Теорема 2.3.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1, тогда для произвольного $u_0 \in \mathfrak{U}$ ($f_0 \in \mathfrak{F}$) существует единственное решение задачи (2.2.2), (2.3.1) ((2.2.3), (2.3.2)).

Доказательство. Возьмем $u_0 \in \mathfrak{U}$. Вектор-функция $u(t) = U^t u_0$ – решение (2.2.2) в силу теоремы 2.2.1. Рассмотрим условия (2.3.1):

$$\begin{aligned} & \frac{m+2n}{q} \|L(u(t) - u_0)\| = \\ &= \frac{m+2n}{q} \left\| \sum' Q(\lambda_k) e^{\mu_k t} \langle u_0, e_k \rangle e_k - \sum Q(\lambda_k) \langle u_0, e_k \rangle e_k \right\| = \\ &= \frac{m+2n}{q} \left\| \sum' Q(\lambda_k) (e^{\mu_k t} - \mathbb{I}) \langle u_0, e_k \rangle e_k \right\| \leq \\ &\leq C \left(\sum' |Q(\lambda_k)|^q |e^{\mu_k t} - \mathbb{I}|^q |u_{0k}|^q \frac{m+2n}{q} \|e_k\|^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

В силу того, что $e^{\mu_k t} - \mathbb{I} \sim \mu_k t$ при $t \rightarrow 0+$, получим что сходимость последнего ряда эквивалентна сходимости

$$\begin{aligned} & C \left(\sum' |Q(\lambda_k)|^q |\mu_k t|^q |u_{0k}|^q \frac{m+2n}{q} \|e_k\|^q \right)^{1/q} = \\ &= Ct \left(\sum' |R(\lambda_k) u_{0k}|^q \lambda_k^{\frac{m+2}{2}q} \right)^{1/q} \leq Ct_q^{m+2n} \|Mu_0\|. \end{aligned}$$

Откуда при $t \rightarrow 0+$ имеем $\lim_{t \rightarrow 0+} L(u(t) - u_0) = 0$.

Покажем, что это решение единственно. Предположим, что существует другое решение $v = v(t)$ этой задачи. При фиксированном $t \in \mathbb{R}_+$ рассмотрим на $[0, t]$ вектор-функцию, зависящую от s , в виде $w(s) = R_\alpha^L(M) U^{t-s} v(s)$. Вектор-функция $w \in C[0, t] \cap C^1(0, t)$ по построению и

$$\lim_{s \rightarrow 0+} w(s) = \lim_{s \rightarrow 0+} R_\alpha^L(M) U^{t-s} v(s) = R_\alpha^L(M) U^t u_0,$$

а также $\dot{w}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\alpha^L(M) (\mu L - M)^{-1} (L\dot{v}(s) - Mv(s)) e^{\mu(t-s)} d\mu = 0$.

Откуда $w(s) = \text{const}$ и получим, что $R_\alpha^L(M)(U^t u_0 - v(t)) = 0$. Следовательно, $U^t u_0 - v(t) \in \ker R_\alpha^L(M) \forall t \in \mathbb{R}_+$. В силу того, что

$$0 = R_\alpha^L(M) \frac{d}{dt}(U^t u_0 - v(t)) = (\alpha L - M)^{-1} M (U^t u_0 - v(t)),$$

получим $U^t u_0 = v(t) \forall t \in \mathbb{R}_+$. •

Для линейного уравнения (2.2.4) рассмотрим *задачу Коши*

$$v(0) = v_0. \quad (2.3.4)$$

Вектор-функцию $v \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathfrak{Y}) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathfrak{Y})$ назовем *решением* задачи (2.2.4), (2.3.4), если она удовлетворяет (2.2.4) и условию (2.3.4).

Определение 2.3.1. *Фазовым пространством* (2.2.4) назовем множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Y}$ такое, что

(i) \mathfrak{P} содержит поточечно любое решение $v(t)$ уравнения (2.2.4), т.е. $\forall t \geq 0 v(t) \in \mathfrak{P}$;

(ii) при любом $v_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (2.2.4), (2.3.4).

Теорема 2.3.2. *Фазовое пространство уравнения (2.2.2) ((2.2.3)) совпадает с $\mathfrak{U}^1 = \overline{\text{im} R_\mu^L(M)} = \text{im} U^\bullet$ ($\mathfrak{F}^1 = \overline{\text{im} L_\mu^L(M)} = \text{im} F^\bullet$).*

Доказательство. Докажем для решения $u(t)$ уравнения (2.2.2), что $u(t) \in \mathfrak{U}^1 \forall t \geq 0$. В силу относительно резольвентного тождества для решения $u(t)$, получим $R_\alpha^L(M) \dot{u} = (\alpha L - M)^{-1} M u = \alpha R_\alpha^L(M) u - u$. Откуда $u = R_\alpha^L(M)(\alpha u - \dot{u})$ и $u(t) \in \text{im} R_\alpha^L(M)$. А значит $u(t) \in \mathfrak{U}^1 \forall t \geq 0$.

Теперь возьмем $u_0 \in \mathfrak{U}^1$. По теоремам 2.2.3, 2.3.1 функция $u(t) = U^t u_0$ – это единственное решение задачи $u(0) = u_0$ для уравнения (2.2.2).

(Утверждение теоремы относительно уравнения (2.2.3) доказывается аналогично.) •

Замечание 2.3.2. Множество \mathfrak{U}^1 является фазовым пространством как для уравнения (2.2.2), так и для уравнения (2.2.1).

Определение 2.3.2. *Единицами полугруппы* $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ назовем, соответственно, операторы

$$P = s - \lim_{t \rightarrow 0+} U^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad Q = s - \lim_{t \rightarrow 0+} F^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}).$$

Замечание 2.3.3. Единица полугруппы является проектором.

Действительно, для любого $u \in \mathfrak{U}$

$$\begin{aligned} P^2 u &= \lim_{\tau \rightarrow 0+} U^\tau \lim_{t \rightarrow 0+} U^t u = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \lim_{t \rightarrow 0+} U^\tau U^t u = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0+} \lim_{t \rightarrow 0+} U^{\tau+t} u = \lim_{\tau \rightarrow 0+} U^\tau u = Pu. \end{aligned}$$

Здесь использовано полугрупповое свойство и непрерывность операторов полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$.

Определение 2.3.3. Назовем оператор M *сильно L -секториальным справа (слева)*, при условии, что он L -секториален и для $\lambda, \mu \in S_\theta^L(M)$

$$\mathfrak{U} \|R_\mu^L(M)(\lambda L - M)^{-1} M u\| \leq \frac{\text{const}(u)}{|\lambda| |\mu|} \quad \forall u \in \text{dom} M$$

(существует линейал $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ плотный в \mathfrak{F} такой, что

$$\mathfrak{F} \|M(\lambda L - M)^{-1} L_\mu^L(M) f\| \leq \frac{\text{const}(f)}{|\lambda| |\mu|} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}.$$

Теорема 2.3.3. *Возьмем операторы M и L как выше, тогда существует единица полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ ($\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$).*

Доказательство. Сначала покажем сильную L -секториальность справа (слева) оператора M . Возьмем $u \in \text{dom} M$, $\lambda, \mu \in S_\theta^L(M)$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} \|R_\mu^L(M)(\lambda L - M)^{-1} M u\| &= \frac{m+2n}{q} \left\| \sum' \frac{R(\lambda_k) \langle u, e_k \rangle}{(\mu - \mu_k)(\lambda - \mu_k) Q(\lambda_k)} e_k \right\| \leq \\ &\leq C \left(\sum' \frac{|\mu_k|^q |u_k|^q}{|\mu - \mu_k|^q |\lambda - \mu_k|^q} \frac{m+2n}{q} \|e_k\| \right)^{1/q} \leq \frac{\text{const}(u)}{|\mu| |\lambda|}, \end{aligned}$$

где $\text{const}(u) = \frac{C}{\sin^2 \theta} \left(\sum' |\mu_k|^q |u_k|^q (\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2}q} \right)^{1/q} \sim \frac{C}{\sin^2 \theta} \frac{|d_s|}{|c_n|} \frac{m+2s}{q} \|u\| <$

∞ , так как $|\mu_k| \sim \frac{|d_s|}{|c_n|} |\lambda|^{s-n}$ при $k \rightarrow \infty$.

Возьмем $u \in \text{dom}M$, $s > t > 0$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} U^s u - U^t u &= U^t \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(R_{\lambda}^L(M) - \frac{I}{\lambda} \right) u e^{\lambda(s-t)} d\lambda = \\ &= U^t \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda L - M)^{-1} e^{\lambda(s-t)} M u \frac{d\lambda}{\lambda} = \\ &= (2\pi i)^{-2} \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) (\lambda L - M)^{-1} M u e^{\mu t + \lambda(s-t)} \frac{d\lambda}{\lambda} d\mu, \end{aligned}$$

где Γ_0 из условия (2.2.7); лежит "правее" Γ . Заменяем $\mu t = \nu$, $\lambda(s-t) = \nu_1$. Ясно, что новые контуры интегрирования можно выбрать независимыми от s и t . Обозначим эти контуры так же Γ_0, Γ . Из сильной L -секториальности оператора M следует

$$\mathfrak{U} \left\| (\nu_1 L - tM)^{-1} L (\nu L - (s-t)M)^{-1} M u \right\| \leq \frac{\text{const}(u)}{|\nu| |\nu_1|}.$$

Откуда $\mathfrak{U} \|(U^s - U^t)u\| \leq (s-t)\text{const}(u)$ при любом $u \in \text{dom}M$. В силу того, что пространство \mathfrak{U} квазибанахово, множество $\text{dom}M$ плотно в \mathfrak{U} , а полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ равномерно ограничена, получаем

$$P = s - \lim_{t \rightarrow 0+} U^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}).$$

(Существование предела $Q = s - \lim_{t \rightarrow 0+} F^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ доказывается аналогично.) •

Следствие 2.3.1. При выполнении условий теоремы 2.3.3 справедливо $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$).

Доказательство. Покажем, что $\ker P = \ker U^\bullet$, $\text{im}P = \text{im}U^\bullet$. Возьмем $u \in \ker U^\bullet$ и в силу замечания 2.2.5 получим $U^t u = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$. Откуда $Pu = \lim_{t \rightarrow 0+} U^t u = 0$, т.е. $\ker U^\bullet \subset \ker P$. При $Pu = 0$ получим

$U^t u = \lim_{s \rightarrow 0+} U^{t+s} u = U^t P u = 0$ из-за непрерывности полугруппы и того, что $U^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$. Следовательно, $\ker P = \ker U^\bullet$.

Образ полугруппы $\text{im} U^\bullet \subset \text{im} P$ по определению 2.2.3. Возьмем $u = P v$, тогда $P u = P^2 v = P v = u$ в силу замечания 2.3.3, т.е. $\text{im} P \subset \text{im} U^\bullet$ согласно определению образа полугруппы.

(Равенство $\ker Q = \ker F^\bullet$, $\text{im} Q = \text{im} F^\bullet$ доказывается аналогично.) •

В силу замечания 2.3.3 оператор P (Q) является проектором, т.е. $\mathcal{U} = \ker P \oplus \text{im} P = \ker U^\bullet \oplus \text{im} U^\bullet = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ($\mathfrak{F} = \ker Q \oplus \text{im} Q = \ker F^\bullet \oplus \text{im} F^\bullet = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$) в силу теорем 2.2.2, 2.2.3.

Замечание 2.3.4. В силу леммы 2.2.6

$$\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}, \quad \tilde{P} = P \quad (\tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}, \quad \tilde{Q} = Q).$$

Замечание 2.3.5. Пусть существует $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathcal{U})$, тогда фазовым пространством уравнений (2.2.2), (2.2.1) (уравнения (2.2.3)) является \mathcal{U} (\mathfrak{F}), так как тогда $\mathcal{U}^0 = \{0\}$ ($\mathfrak{F}^0 = \{0\}$).

Следствие 2.3.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.3.3, тогда

- (i) $\forall u \in \mathcal{U} \quad L P u = Q L u$;
- (ii) $\forall u \in \text{dom} M \quad P u \in \text{dom} M, \quad M P u = Q M u.$

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $u \in \text{dom} M$. Так как оператор M замкнут, с учетом замечания 2.2.4 и того, что существуют пределы $\lim_{t \rightarrow 0+} U^t u = P u$ и $\lim_{t \rightarrow 0+} M U^t u = \lim_{t \rightarrow 0+} F^t M u = Q M u$, то справедливо второе утверждение леммы.

Утверждение (i) доказывается аналогично, но более просто в силу непрерывности оператора L . •

Напомним, что $L_k = L \Big|_{\mathcal{U}^k}$, $M_k = M \Big|_{\text{dom} M_k}$, $\text{dom} M_k = \text{dom} M \cap \mathcal{U}^k$, $k = 0, 1$.

Следствие 2.3.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.3.3, тогда оператор $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$ биективен, а оператор $M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^1; \mathcal{F}^1)$.

Доказательство. В силу леммы 2.2.2 справедливо $\text{im}M_0 \subset \mathfrak{F}^0$. Оператор $M_0 : \text{dom}M_0 \rightarrow \mathfrak{F}^0$ инъективен и сюръективен, принимая во внимание следствия 2.2.1.

Для элемента $u \in \text{dom}M_1$ получим $M_1u = M_1Pu = QM_1u$ согласно следствию 2.3.2. Поэтому $M_1u \in \mathfrak{F}^1$.

Для доказательства плотной определенности оператора M_k в пространстве \mathfrak{U}^k , $k = 0, 1$, достаточно сильной L -секториальности справа оператора M . Действительно, так как линейал $\text{dom}M$ плотен в \mathfrak{U}

$$\forall u \in \mathfrak{U}^1 \quad \exists \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \text{dom}M : \quad u_k \rightarrow u \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Откуда следует существование последовательности

$$\{v_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Pu_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \text{dom}M_1 : \quad v_k \rightarrow Pu = u$$

в силу следствия 2.3.2 (ii) и того, что P – проектор на \mathfrak{U}^1 .

То, что линейал $\text{dom}M_0$ плотен в пространстве \mathfrak{U}^0 доказывается аналогично с использованием проектора $I - P$. •

Замечание 2.3.6. При выполнении условий теоремы 2.3.3 обобщенная задача Шоултера – Сидорова (2.3.1) эквивалентна задаче

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} P(u(t) - u_0) = 0.$$

2.4. Задача Коши для неоднородного уравнения

Пусть, как и прежде, $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $Q_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^s d_j \lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих корней, степеней n и s , соответственно, причем $n < s$ и $d_s c_n < 0$, операторы $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$. Тогда оператор M сильно L -секториален. Тогда, в силу леммы 2.2.5, оператор $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$. В этом параграфе мы докажем существование решения неоднородного уравнения. Начнем с того, что покажем существование оператора $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

Интегралом типа Данфорда – Тейлора с контуром Γ из условия (2.2.7) определим семейство операторов $\{R^t : t \in \mathbb{R}_+\}$

$$R^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu. \quad (2.4.1)$$

Лемма 2.4.1. Семейство $\{R^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, из (2.4.1), аналитично в секторе $\{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta - \pi/2\}$.

Доказательство. В силу (2.2.7)

$$\begin{aligned} & \exists N > 0 \quad \forall \mu \in \Gamma : |\mu| > N \quad \forall \tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta - \frac{\pi}{2} \\ & \left(|\arg \mu + \arg \tau| \geq \left| |\arg \mu| - |\arg \tau| \right| > \theta - \theta + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \right) \wedge \\ & \wedge \left(|\arg \mu + \arg \tau| \leq |\arg \mu| + |\arg \tau| < \theta + \theta - \frac{\pi}{2} = 2\theta - \frac{\pi}{2} < 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Поэтому $\operatorname{Re}(\mu\tau) = |\mu\tau| \cos(\arg \mu + \arg \tau) < 0$.

Интеграл (2.4.1) можно дифференцировать по параметру τ . Лемма доказана. •

Лемма 2.4.2. Пусть выполнены условия леммы 2.4.1, тогда

- (i) $\forall t > 0 \quad R^t L = U^t, \quad L R^t = F^t;$
- (ii) $\forall s, t > 0 \quad R^{s+t} = U^s R^t = R^t F^s.$

Доказательство. Утверждение (i) очевидно, (ii) доказывается с помощью аналога тождества Гильберта. •

Лемма 2.4.3. Пусть выполнены условия леммы 2.4.1, тогда

$$\forall t > 0 \quad R^t = P R^t \quad (R^t = R^t Q).$$

Доказательство. Для доказательства устремим в утверждении леммы 2.4.2 (ii) s к нулю (непрерывность семейства (2.4.1) следует из леммы 2.4.1 и сильной L -секториальности оператора M справа (слева)) •

Определение 2.4.1. Назовем оператор M *сильно L -секториальным* при условии, что он сильно L -секториален слева и

$$\forall \lambda, \mu \in S_\theta^L(M) \quad \mathcal{L}_{(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})} \|R_\mu^L(M)(\lambda L - M)^{-1}\| \leq \frac{\text{const}}{|\lambda||\mu|}.$$

Замечание 2.4.1. Если оператор M сильно L -секториален, то он сильно L -секториален справа. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} \|R_\mu^L(M)(\lambda L - M)^{-1}Mu\| &\leq \mathcal{L}_{(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})} \|R_\mu^L(M)(\lambda L - M)^{-1}\| \times \mathfrak{U} \|Mu\| \\ &\leq \frac{\text{const} \mathfrak{U} \|Mu\|}{|\lambda||\mu|} = \frac{\text{const}(u)}{|\lambda||\mu|}. \end{aligned}$$

Замечание 2.4.2. Если существует $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$ и оператор $T = ML^{-1}$ (или $S = L^{-1}M$) секториален, то оператор M сильно L -секториален.

Действительно, если в качестве линеала $\mathring{\mathfrak{F}}$ плотного в \mathfrak{F} возьмем $L[\text{dom}M]$ (плотность этого множества есть, так как $\overline{\text{dom}M} = \mathfrak{U}$ и L – гомеоморфизм), то для λ, μ из сектора $S_\theta(T)$, $f \in \mathring{\mathfrak{F}}$ получим

$$\begin{aligned} \mathring{\mathfrak{F}} \|M(\lambda L - M)^{-1}L_\mu^L(M)f\| &= \mathring{\mathfrak{F}} \|L(\lambda L - M)^{-1}L_\mu^L(M)ML^{-1}f\| \leq \\ &\leq \mathcal{L}_{(\mathring{\mathfrak{F}})} \|R_\lambda(T)\| \mathcal{L}_{(\mathring{\mathfrak{F}})} \|R_\mu(T)\| \times \mathring{\mathfrak{F}} \|ML^{-1}f\| \leq \frac{\text{const}(f)}{|\lambda||\mu|}, \end{aligned}$$

принимая во внимание относительно резольвентное тождество и секториальность оператора T . Далее,

$$\mathcal{L}_{(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})} \|R_\mu^L(M)(\lambda L - M)^{-1}\| = \mathcal{L}_{(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})} \|L^{-1}R_\mu(T) \times R_\lambda(T)\| \leq \frac{\text{const}}{|\lambda||\mu|}. \bullet$$

Лемма 2.4.4. Пусть выполнены условия леммы 2.4.1, тогда M сильно L -секториален.

Доказательство. Проведем рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 2.3.3, получим

$$\mathfrak{U} \|R_\mu^L(M)(\lambda L - M)^{-1}f\| = \frac{m+2n}{q} \left\| \sum' \frac{\langle f, e_k \rangle}{(\mu - \mu_k)(\lambda - \mu_k)Q(\lambda_k)} e_k \right\| \leq$$

$$\leq C \left(\sum' \frac{|f_k|^q}{|\mu - \mu_k|^q |\lambda - \mu_k|^q |Q(\lambda_k)|^q} \right)^{1/q} \|e_k\|^q)^{1/q} \leq \frac{\text{const}}{|\mu||\lambda|} \|f\|,$$

где $\text{const} = \frac{C}{\sin^2 \theta} \frac{1}{|c_n|}$, так как $|Q(\lambda_k)|^{-1} \sim \frac{1}{|c_n|} |\lambda_k|^{-n}$ при $k \rightarrow \infty$. То есть

$$\mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U}) \|R_\mu^L(M)(\lambda L - M)^{-1}\| \leq \frac{\text{const}}{|\lambda||\mu|}. \quad \bullet$$

Лемма 2.4.5. Пусть выполнены условия леммы 2.4.1, тогда семейство $\{R^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, определяемое формулой (2.4.1), является равномерно ограниченным.

Доказательство. В силу леммы 2.4.2 аналогично доказательству теоремы 2.3.3, получим $\mathfrak{U} \|R^t f\| =$

$$\begin{aligned} &= \frac{m+2n}{q} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} f d\mu \right\| = \frac{m+2n}{q} \left\| \sum' \frac{\langle f, e_k \rangle e^{\mu_k t}}{Q(\lambda_k)} e_k \right\| \leq \\ &\leq C \left(\sum' \frac{|f_k|^q e^{\text{Re} \mu_k t q}}{|Q(\lambda_k)|^q} \right)^{1/q} \|e_k\|^q)^{1/q} \leq \text{const} \frac{m}{q} \|f\|, \end{aligned}$$

где $\text{const} = C \frac{1}{|c_n|}$, в силу $|Q(\lambda_k)|^{-1} \sim \frac{1}{|c_n|} |\lambda_k|^{-n}$ при $k \rightarrow \infty$ и $\text{Re} \mu_k t q < 0$, получаем

$$\mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U}) \|R^t\| \leq \text{const}. \quad \bullet$$

Теорема 2.4.1. Пусть выполнены условия леммы 2.4.1, тогда существует $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

Доказательство. Возьмем $f \in \mathfrak{F}$, $s > t > 0$ и рассмотрим

$$\mathfrak{F} \|R^s f - R^t f\| = \mathfrak{F} \|R^t (F^{s-t} - Q) f\| \leq C \mathfrak{F} \|(F^{s-t} - Q) f\|$$

в силу лемм 2.4.2, 2.4.3 и 2.4.5. Откуда получим существование $\hat{R} = s - \lim_{t \rightarrow 0+} R^t \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$. По лемме 2.4.2 с учетом непрерывности L получим $\hat{R}L = P$ и $L\hat{R} = Q$. Проведем сужение этих тождеств на \mathfrak{U}^1 и \mathfrak{F}^1 соответственно и получим $\hat{R}_1 L_1 = I$, $L_1 \hat{R}_1 = I$, где $\hat{R}_1 = \hat{R} \Big|_{\mathfrak{U}^1}$. Откуда

$\hat{R}_1 = L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$. Кроме того, оператор

$$L_1^{-1} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, e_k \rangle e_k}{Q_n(\lambda_k)}, & \text{если } \lambda_k \text{ не корень } Q_n(\lambda) \ \forall k \in \mathbb{N}; \\ \sum_{k \in \mathbb{N}: k \neq \ell} \frac{\langle \cdot, e_k \rangle e_k}{Q_n(\lambda_k)}, & \text{если } \exists \ell \in \mathbb{N} : \lambda_\ell \text{ — корень } Q_n(\lambda). \end{cases} \bullet$$

Замечание 2.4.3. Множество $L_1[\text{dom}M_1]$ плотно в \mathfrak{F}^1 .

В силу того, что $\overline{\text{dom}M_1} = \mathfrak{U}^1$, получим $\forall u \in \mathfrak{U}^1 \ \exists \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \text{dom}M_1 : u_k \rightarrow u$ при $k \rightarrow \infty$. По теореме 2.4.1 оператор L_1 является сюръективным, т.е. $\forall f \in \mathfrak{F}^1 \ \exists u \in \mathfrak{U}^1 \ f = L_1u$. Так как последовательность $\{L_1u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_1[\text{dom}M_1]$, то в силу непрерывности оператора L_1 получим

$$\forall f = L_1u \in \mathfrak{F}^1 \ \exists \{f_k = L_1u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_1[\text{dom}M_1] : \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f.$$

Что и требовалось.

Полугруппа $\{V^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ называется *невырожденной*, если ее единицей является тождественный оператор.

Сужение $\{U_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ ($\{F_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$) полугруппы $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ ($\{F^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$) на подпространство \mathfrak{U}^1 (\mathfrak{F}^1) является невырожденной аналитической полугруппой.

Оператор G , заданный формулой $Gv = \lim_{t \rightarrow 0+} t^{-1}(V^tv - v)$ на области определения $\text{dom}G = \{v \in \mathfrak{V} : \exists \lim_{t \rightarrow 0+} t^{-1}(V^tv - v)\}$, называется *инфинитезимальным генератором* невырожденной полугруппы $\{V^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$.

Следствие 2.4.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.4.1, тогда инфинитезимальным генератором полугруппы $\{U_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ ($\{F_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$) является оператор $L_1^{-1}M_1 = S_1 \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}^1)$ ($M_1L_1^{-1} = T_1 \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{F}^1)$).

Доказательство. Доказательство этого факта аналогично доказательству существования инфинитезимального генератора для аналитических групп. А именно, используя интегральное представление полугрупп (2.2.5), (2.2.6), теорему 2.4.1 и тождества

$$R_\mu^{L_1}(M_1) = R_\mu(S_1), \quad L_\mu^{L_1}(M_1) = R_\mu(T_1),$$

получим утверждение следствия. Оператора T_1 (S_1) определен на линейном пространстве $L_1[\text{dom}M_1]$ ($\text{dom}M_1$), который плотен в пространстве \mathfrak{F}^1 в силу замечания 2.4.3. •

По теореме Хилле–Иосиды–Феллера–Филлипса–Миядэры получим

Следствие 2.4.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.4.1, тогда оператор S_1 (T_1) секториален.

Перейдем к рассмотрению неоднородного уравнения соболевского типа. Пусть $[0, T] \subset \mathbb{R}_+$ – некоторый интервал. Возьмем вектор-функцию $f : [0, T] \rightarrow \mathfrak{F}$ и рассмотрим уравнение

$$L\dot{u} = Mu + f. \quad (2.4.2)$$

Определение 2.4.2. Вектор-функция $u \in C^1([0, T]; \text{dom}M) \cap C((0, T]; \mathfrak{U})$ называется *решением* уравнения (2.4.2), если она удовлетворяет ему. Решение $u = u(t)$ уравнения (2.4.2) называется *решением задачи Коши*

$$u(0) = u_0 \quad (2.4.3)$$

для уравнения (2.4.2) (коротко, решением задачи (2.4.2), (2.4.3)), если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (2.4.3) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Теорема 2.4.2. Пусть операторы L, M определены выше и вектор-функция $f : [0, T] \rightarrow \mathfrak{F}$ аналитична. Тогда для любого начального значения $u_0 \in \mathcal{P}_f = \{u \in \text{dom}M : (I - P)u = -M_0^{-1}(I - P)f(0)\}$ существует единственное решение $u \in C^1((0, T], \mathfrak{U}) \cap C([0, T], \text{dom}M)$ задачи (2.4.2), (2.4.3) вида
$$u(t) = U^t u_0 + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} Q f(s) ds - M_0^{-1}(I - Q)f(t).$$

Доказательство. Применим к уравнению (2.4.2) проектор Q из теоремы 2.3.3 и получим $QL\dot{u} = QMu + Qf$, т.е. $LP\dot{u} = MPu + Qf$ с учетом следствия 2.3.2. Подействуем на это уравнение оператором $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{U}^1)$ и получим

$$\dot{u}^1 = S_1 u^1 + L_1^{-1} Q f \quad (2.4.4)$$

на пространстве \mathfrak{U}^1 . Оператор $S_1 = L_1^{-1}M_1$ из уравнения (2.4.4) секториален в силу следствия 2.4.2, $\text{dom}S_1 = \text{dom}M_1$ по определению S_1 . Откуда по теореме 5.8 [37, гл.5,§3], при любом $u_0^1 \in \text{dom}M_1$ существует единственное решение вида

$$u^1(t) = U_1^t u_0^1 + \int_0^t U_1^{t-s} L_1^{-1} Q f(s) ds = U^t u_0^1 + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} Q f(s) ds$$

для задачи (2.4.3), (2.4.4), где $\{U^t : t \geq 0\}$ – полугруппа из теоремы 2.2.1, а нижний индекс "1" обозначает ее сужение на подпространство \mathfrak{U}^1 .

Применим к уравнению (2.4.2) проектор $I - Q$, а потом оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$. В результате уравнение на пространстве \mathfrak{U}^0 примет вид

$$H\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}(I - Q)f. \quad (2.4.5)$$

В силу замечания 2.2.6 это уравнение эквивалентно

$$u^0(t) = -M_0^{-1}(I - Q)f(t),$$

которое является решением (2.4.5). Чтобы для этого решения выполнялось условие $u^0(0) = u_0^0$, необходимо, чтобы $u_0^0 \in \mathfrak{U}^0 \cap \mathcal{P}_f$.

Решением задачи (2.4.2), (2.4.3) будет сумма полученных решений, при условии $u_0 = u_0^0 + u_0^1$. Из $U^t u_0^1 = U^t u_0$ получаем требуемое.

Используя обозначение $T_1 = M_1 L_1^{-1}$, получим

$$Mu(t) = F^t M u_0 + \int_0^t F^{t-s} T_1 Q f(s) ds + f^0(t),$$

откуда следует непрерывность $Mu(t)$. •

2.5. Аналитическое исследование аналога математической модели Дзекцера

Рассмотрим уравнение Дзекцера

$$(\lambda + \Lambda)u_t = (-\alpha\Lambda^2 + \beta\Lambda)u + f, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad (2.5.1)$$

в квазисоболевых пространствах $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2}$ и $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$. Здесь $\Lambda : \ell_q^{m+2} \rightarrow \ell_q^m$ – квазиоператор Лапласа, действующий по правилу $\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}$, где $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ – монотонно возрастающая последовательность такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$. Прообразом уравнения (2.5.1) послужила краевая задача для уравнения Дзекцера в банаховых пространствах

$$(\lambda - \Delta)v_t = \beta \Delta v - \alpha \Delta^2 v, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \quad (2.5.2)$$

моделирующая эволюцию свободной поверхности фильтрующей жидкости [13].

Зададим область определения $\text{dom}(-\alpha \Lambda^2 + \beta \Lambda) = \ell_q^{m+4}$. Тогда операторы $L = (\lambda + \Lambda) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $M = (-\alpha \Lambda^2 + \beta \Lambda) \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Относительный спектр для уравнения (2.5.1) имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu_k : \mu_k = \frac{\beta \lambda_k - \alpha \lambda_k^2}{\lambda + \lambda_k} \text{ при } k \in \mathbb{N} : \lambda_k \neq -\lambda \right\}.$$

Ясно, что $\mu_k \rightarrow -\infty$ при $\lambda_k \rightarrow +\infty$. Отсюда в силу теоремы 2.2.1 существует разрешающая полугруппа для уравнения (2.5.1) и она имеет вид

$$U^t = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \sum_{k \in \mathbb{N} : k \neq \ell} e^{\mu_k t} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если существуют } \ell \in \mathbb{N} : \lambda_\ell = -\lambda. \end{cases}$$

В силу теоремы 2.3.2 справедливо

Следствие 2.5.1. *При любых $t, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$, $q, \alpha \in \mathbb{R}_+$ фазовым пространством уравнения (2.5.1) является*

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} \mathfrak{U}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \{u \in \mathfrak{U} : u_k = 0 \text{ при } k \in \mathbb{N} : \lambda_k = -\lambda\}. \end{cases}$$

В силу теоремы 2.4.2 имеет место

Следствие 2.5.2. *При любых $t, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$, $\tau, q, \alpha \in \mathbb{R}_+$, функции $f : (0, \tau) \rightarrow \mathfrak{F}$ такой, что $f^0 \in C^1((0, \tau); \mathfrak{F}^0)$, $f^1 \in C((0, \tau); \mathfrak{F}^1)$, и любого $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение $u \in C([0, \tau]; \text{dom} M) \cap$*

$C^1((0, \tau]; \mathfrak{U})$ обобщенной задачи Шоултера – Сидорова

$$\lim_{t \rightarrow 0+} P(u(t) - u_0) = 0 \quad (2.5.3)$$

для уравнения (2.5.1), которое к тому же имеет вид

$$u(t) = -M_0^{-1} f^0(t) + U^t u_0 + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} f^1(s) ds. \quad (2.5.4)$$

Если в добавок начальное значение $u_0 \in \mathfrak{U}$ удовлетворяет условию

$$u_0 \in \mathcal{P}_f = \left\{ u : \langle u_0, e_\ell \rangle = -\frac{\langle f(0), e_\ell \rangle}{-\alpha \lambda_\ell^2 + \beta \lambda_\ell}, \ell \in \mathbb{N} : \lambda_\ell = -\lambda \right\},$$

то решение (2.5.4) является единственным решением задачи Коши

$$u(0) = u_0 \quad (2.5.5)$$

для уравнения (2.5.1).

Здесь

$$\mathfrak{F}^0 = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \{f \in \mathfrak{F} : f_k = 0, k \in \mathbb{N} \setminus \{\ell : \lambda_\ell = -\lambda\}\}, & \end{cases}$$

$$\mathfrak{F}^1 = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \{f \in \mathfrak{F} : f_k = 0, \text{ при } k : \lambda_k = -\lambda\}, & \end{cases}$$

$$P = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \sum_{k \in \mathbb{N} : k \neq \ell} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если существуют } \ell \in \mathbb{N} : \lambda_\ell = -\lambda; \end{cases}$$

$$M_0^{-1} = \begin{cases} \mathbb{O}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \sum_{k \in \mathbb{N} : \lambda_k = -\lambda} \frac{\langle \cdot, e_k \rangle e_k}{(-\alpha \lambda_k^2 + \beta \lambda_k)}, & \text{если существуют } \ell \in \mathbb{N} : \lambda_\ell = -\lambda; \end{cases}$$

$$L_1^{-1} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, e_k \rangle e_k}{(\lambda + \lambda_k)}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \sum_{k \in \mathbb{N} : k \neq \ell} \frac{\langle \cdot, e_k \rangle e_k}{(\lambda + \lambda_k)}, & \text{если существуют } \ell \in \mathbb{N} : \lambda_\ell = -\lambda. \end{cases}$$

2.6. Аналитическое исследование аналогов математических моделей Фишера – Колмогорова, Кана – Хилларда и диффузии четвертого порядка

Теперь рассмотрим модели Фишера – Колмогорова, Кана – Хилларда и диффузии четвертого порядка

$$u_t = (-\alpha\Lambda^2 + \beta\Lambda + \gamma)u + f, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad (2.6.1)$$

в квазисоболевых пространствах $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2}$ и $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$. Здесь, как и выше, $\Lambda : \ell_q^{m+2} \rightarrow \ell_q^m$ – квазиоператор Лапласа, действующий по правилу $\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}$, где $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ – монотонно возрастающая последовательность такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$.

Прообразом модели (2.6.1) послужила краевая задача для линеаризованного уравнения Кана – Хилларда в банаховых пространствах

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\varepsilon^2 \Delta^2 u + \beta \Delta u,$$

как математическая модель реакции-диффузии; краевая задача для линеаризованного расширенного уравнения Фишера – Колмогорова:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\gamma \Delta^2 u + \Delta u + \lambda u, \quad (2.6.2)$$

возникающего в различных областях, в частности, в мезоскопической теории как модель фазового перехода в бинарной системе вблизи точки Липшица при этом, учитываются градиентные слагаемые высшего порядка функционала свободной энергии. Отметим, что частным случаем (2.6.2) является уравнение диффузии четвертого порядка с постоянным коэффициентом диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta^2 u,$$

которое также порождается функционалом энергии.

Зададим область определения $\text{dom}(-\alpha\Lambda^2 + \beta\Lambda + \gamma) = \ell_q^{m+4}$. Тогда операторы $L = I \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $M = (-\alpha\Lambda^2 + \beta\Lambda + \gamma) \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

В силу теоремы 2.3.2 справедливо

Следствие 2.6.1. *При любых $t, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $q, \alpha \in \mathbb{R}_+$ фазовым пространством уравнения (2.6.1) является все пространство \mathfrak{U} .*

В силу теоремы 2.4.2 имеет место

Следствие 2.6.2. *При любых $t, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\tau, q, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $u_0 \in \mathfrak{U}$, $f \in C((0, \tau); \mathfrak{F})$ существует единственное решение $u \in C([0, \tau]; \text{dom}M) \cap C^1((0, \tau]; \mathfrak{U})$ задачи Коши*

$$u(0) = u_0$$

для уравнения (2.6.1), которое к тому же имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} \langle u_0, e_k \rangle e_k + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k(t-s)} \langle f(s), e_k \rangle e_k ds,$$

где $\mu_k = -\alpha\lambda_k^2 + \beta\lambda_k + \gamma$.

3. Численное исследование класса эволюционных моделей в квазисоболевых пространствах

3.1. Качественное исследование математических моделей: инвариантные пространства и экспоненциальные дихотомии

Пусть, как и прежде, $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $Q_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^s d_j \lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих корней, степеней n и s , соответственно, причем $n < s$ и $d_s c_n < 0$, операторы $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$. Ранее в лемме 2.4.4 мы доказали, что оператор M сильно L -секториален.

Введем в рассмотрение следующее условие:

$$\left. \begin{aligned} \sigma^L(M) = \sigma_1^L(M) \cup \sigma_2^L(M) \text{ и } \sigma_1^L(M) \text{ не пусто,} \\ \text{существует ограниченная область } \Omega_1 \subset \mathbb{C} \\ \text{с границей класса } C^1 \text{ такая, что} \\ \Omega_1 \supset \sigma_1^L(M) \text{ и } \overline{\Omega}_1 \cap \sigma_2^L(M) \text{ пусто.} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

При выполнении этого условия будут существовать [22] операторы, заданные формулой

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} R_\mu^L(M) d\mu \text{ и } Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} L_\mu^L(M) d\mu,$$

где $\gamma_1 = \partial\Omega_1$ и интегралы существуют так как подынтегральное выражение аналитично. Операторы $P_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ по построению.

Лемма 3.1.1. *При операторах M и L , как выше, и выполнении условия (3.1.1) операторы $P_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ являются проекторами.*

Доказательство. Так как подынтегральная оператор-функции аналитична, то

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{\gamma}_1} R_\lambda^L(M) d\lambda, \quad Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{\gamma}_1} L_\lambda^L(M) d\lambda,$$

где контур $\dot{\gamma}_1$ ограничивает область, содержащую контур γ_1 и не содержащую точки $\sigma_2^L(M)$. То есть он немного "шире" контура γ_1 . Тогда

$$\begin{aligned} P_1^2 &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\dot{\gamma}_1} \int_{\gamma_1} R_\lambda^L(M) R_\mu^L(M) d\mu d\lambda = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int_{\dot{\gamma}_1} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \int_{\gamma_1} R_\mu^L(M) d\mu + \int_{\dot{\gamma}_1} R_\lambda^L(M) d\lambda \int_{\gamma_1} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} R_\mu^L(M) d\mu = P_1, \end{aligned}$$

в силу теоремы Фубини, теоремы о вычетах и относительно резольвентного тождества. Утверждение относительно оператора Q доказывается аналогично с заменой правого L -резольвентного тождества на левое. •

Обозначим $\mathfrak{U}^{11} = \text{im } P_1$, $\mathfrak{F}^{11} = \text{im } Q_1$, $\mathfrak{U}^{10} = \text{ker } P_1$, $\mathfrak{F}^{10} = \text{ker } Q_1$; а с помощью L_{11} (M_{11}) обозначим сужение оператора L (M) на \mathfrak{U}^{11} .

Теорема 3.1.1. Пусть выполнены условия леммы 3.1.1, тогда

- (i) операторы $L_{11}, M_{11} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{11}; \mathfrak{F}^{11})$;
- (ii) существует оператор $L_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{11}; \mathfrak{U}^{11})$.

Доказательство. (i) $L_{11}, M_{11} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{11}; \mathfrak{F}^{11})$ по построению операторов $P_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, в силу $LP_1 = Q_1L = L_{11}$ и $MP_1 = Q_1M = M_{11}$.

(ii) Существование оператора L_{11}^{-1} является следствием теоремы 2.4.1 в силу того, что оператор L_{11}^{-1} – сужение оператора

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\mu L - M)^{-1} d\mu \quad \text{на подпространство } \mathfrak{F}^{11}. \bullet$$

Следствие 3.1.1. Пусть выполнены условия леммы 3.1.1, тогда $P_1 = PP_1 = P_1P$ и $Q_1 = QQ_1 = Q_1Q$.

Доказательство. Возьмем Γ из (2.2.7), тогда из аналитичности используемых подынтегральных функций, Γ можно выбрать лежащим "пра-

вектор контура γ_1 .

$$\begin{aligned}
P_1 P &= P P_1 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\gamma_1} R_{\mu}^L(M) R_{\lambda}^L(M) d\mu d\lambda = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int_{\Gamma} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \int_{\gamma_1} R_{\mu}^L(M) d\mu + \int_{\Gamma} R_{\lambda}^L(M) d\lambda \int_{\gamma_1} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} R_{\mu}^L(M) d\mu = P_1,
\end{aligned}$$

в силу теоремы Фубини, относительно резольвентного тождества и теоремы Коши. •

Определим операторы $P_2 = P - P_1$ и $Q_2 = Q - Q_1$. Эти операторы являются проекторами по следствию 3.1.1. В самом деле,

$$(P_2)^2 = (P - P_1)^2 = P^2 - P_1 P - P P_1 + P_1^2 = P - 2P_1 + P_1 = P - P_1 = P_2$$

и тогда $P_2 = P - P_1 = P(I - P_1) = (I - P_1)P = P_2 P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ – проектор на некоторое подпространство. Пусть $\mathfrak{U}^{12} = \text{im } P_2$, $\mathfrak{F}^{12} = \text{im } Q_2$, а через L_{12} (M_{12}) обозначим сужение L (M) на \mathfrak{U}^{12} .

Следствие 3.1.2. Пусть выполнены условия леммы 3.1.1, тогда

- (i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$, $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}^{11} \oplus \mathfrak{U}^{12}$, $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}^{11} \oplus \mathfrak{F}^{12}$;
- (ii) операторы $L_{12}, M_{12} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{12}; \mathfrak{F}^{12})$;
- (iii) существует оператор $L_{12}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{12}; \mathfrak{U}^{12})$.

Рассмотрим при $\alpha \in \rho^L(M)$ пару эквивалентных уравнений соболевского типа

$$L u = M u, \tag{3.1.2}$$

$$L(\alpha L - M)^{-1} f = M(\alpha L - M)^{-1} f \tag{3.1.3}$$

Определение 3.1.1. Пусть \mathfrak{P} – фазовое пространство уравнения (3.1.2). Инвариантным пространством уравнения (3.1.2) назовем множество

$\mathfrak{J} \subset \mathfrak{P}$, при условии, что для любого $u_0 \in \mathfrak{J}$ решение $u = u(t)$ (3.1.2) с условием

$$u(0) = u_0, \quad (3.1.4)$$

лежит поточечно в \mathfrak{J} (т.е. $u(t) \in \mathfrak{J}$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$).

Теорема 3.1.2. *Операторы M и L определены выше и выполнено условие (3.1.1), тогда образ группы*

$$V^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.1.5)$$

является инвариантным пространством (3.1.2).

Доказательство. Утверждение следует из равенства $\text{im } V^\bullet = \text{im } P_1 = \mathfrak{U}^{11}$, которое следует из теоремы 2.3.2, следствий 3.1.1 и 3.1.2. •

Следствие 3.1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1.2, тогда существует как минимум два инвариантных подпространства для (3.1.2) ((3.1.3)).*

Доказательство. Следующие равенства очевидно имеют место $U^t = U^t P = U^t P_1 + U^t P_2$. Операторы P_1 и U^t коммутируют, в силу относительно резольвентного тождества, вида полугруппы (2.2.5) и непрерывности оператора P_1 . Откуда для $u_0 \in \mathfrak{U}^{11}$ получим $U^t u_0 = U^t P_1 u_0 = P_1 U^t u_0 \in \mathfrak{U}^{11}$. По теореме 2.3.2 и следствия 3.1.2 получим, что \mathfrak{U}^{11} – инвариантное подпространство (3.1.2).

Аналогично с заменой проектора P_1 на P_2 показывается инвариантность подпространства \mathfrak{U}^{12} .

Таким же образом доказывается утверждение теоремы об уравнении (3.1.3), инвариантными подпространствами которого являются $\mathfrak{F}^{11} = \text{im } Q_1$, $\mathfrak{F}^{12} = \text{im } Q_2$. •

Определение 3.1.2. Решения уравнения (3.1.2) обладают *экспоненциальной дихотомией* при выполнении условий

(i) фазовое пространство (3.1.2) имеет вид $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^1 \oplus \mathfrak{F}^2$, где $\mathfrak{F}^{1(2)}$ – инвариантные пространства уравнения (3.1.2);

(ii) при любых $u_0 \in \mathfrak{F}^1$ ($u_0 \in \mathfrak{F}^2$) решение $u = u(t)$ задачи (3.1.2), (3.1.4) таково, что $\|u(t)\| \leq C_1 e^{-a_1 t} \|u_0\|$ ($\|u(t)\| \geq C_2 e^{a_2 t} \|u_0\|$) при некоторых $a_1, a_2 > 0$ и всех $t \in R_+$.

Замечание 3.1.1. Другими словами, экспоненциальные дихотомии решений означают, что решения, начинающиеся в одном подпространстве, экспоненциально возрастают, а в другом – экспоненциально убывают.

Теорема 3.1.3. Для операторов M, L определенных выше, $\omega > 0$ такой, что $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : -\omega \leq \operatorname{Re} \mu \leq \omega\} = \emptyset$ и множества $\sigma_+ = \sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu > 0\} \neq \emptyset$ уравнение (3.1.2) (уравнение (3.1.3)) будет обладать экспоненциальной дихотомией.

Доказательство. В условиях теоремы выполняются условия (3.1.1). Переобозначим $\mathfrak{U}^{11} = \mathfrak{U}^+$, $\mathfrak{U}^{12} = \mathfrak{U}^-$. Возьмем $L_{\pm} = L \Big|_{\mathfrak{U}^{\pm}}$, $M_{\pm} = M \Big|_{\operatorname{dom} M_{\pm}}$, $\operatorname{dom} M_{\pm} = \operatorname{dom} M \cap \mathfrak{U}^{\pm}$. Тогда по теореме 3.1.1 и следствию 3.1.2 получим, что $L_{\pm} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{\pm}; \mathfrak{F}^{\pm})$, $M_{\pm} \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}^{\pm}; \mathfrak{F}^{\pm})$, $\sigma^{L_{\pm}}(M_{\pm}) = \sigma_{\pm}$, где $\sigma_- = \sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu < 0\}$. Откуда получим (L_+, σ) -ограниченность оператора M_+ [46] и L -секториальность оператора M_- с константой $a \leq -\omega$.

Обозначим $U_{\pm}^t = U^t \Big|_{\mathfrak{U}^{\pm}}$ и в силу рассуждений доказательства теоремы 3.1.3 получим, что $U_{\pm}^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{\pm})$. Возьмем $t > 0$ и $u^-(t) = U_-(t)u^-$, тогда получим

$$\|u^-(t)\| \leq C_2 e^{-a_1 t} \|u^-\|.$$

По теореме 2.2.1 можно взять $a_1 = \omega$, $C_2 = C$.

Теперь из (L_+, σ) -ограниченности оператора M_+ и результатов [46] следует, что полугруппа $\{U_+^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ аналитически продолжима до

группы во всю плоскость, а ее операторы представимы в виде

$$U_+^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} R_{\mu}^{L_+}(M_+) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R},$$

где замкнутый контур $\tilde{\gamma}$ ограничивает σ_+ , как в условии (3.1.1).

Для $u \in \mathfrak{U}^1$ имеем $u = u^+ + u^-$, $u^{\pm} \in \mathfrak{U}^{\pm}$. Отсюда если $t > 0$, $u^+ \in \mathfrak{U}^+$ то

$$u^+(t) = U_+^t u^+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} R_{\mu}^{L_+}(M_+) e^{\mu t} u^+ d\mu = \sum_{k: \mu_k \in \sigma_+} e^{\mu_k t} \langle u, e_k \rangle e_k.$$

Тогда $\frac{m+2n}{q} \|u^+(t)\| = \frac{m+2n}{q} \|U_+^t u^+\| =$

$$= \left(\sum_{k: \mu_k \in \sigma_+} e^{\operatorname{Re} \mu_k q t} |\langle u^+, e_k \rangle|^q \cdot (\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2} q} \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{k: \mu_k \in \sigma_+} e^{\operatorname{Re} \mu_k q t} |\langle u^+, e_k \rangle|^q \cdot \frac{m+2n}{q} \|e_k\|^q \right)^{1/q} \geq$$

$$\geq e^{a_2 t} \left(\sum_{k: \mu_k \in \sigma_+} |u_k^+|^q (\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2} q} \right)^{1/q} = e^{a_2 t} \frac{m+2n}{q} \|u^+\|,$$

где $a_2 = \omega < \min\{\operatorname{Re} \mu_k : \mu_k \in \sigma_+\}$ и $a_2 > 0$. Отсюда вытекает вторая из оценок определения 3.1.2. •

3.2. Свойства решений моделей Дзекцера, Фишера – Колмогорова, Кана – Хилларда и диффузии четвертого порядка в квазисоболевых пространствах

Исследуем свойства решений однородных уравнений Дзекцера

$$(\lambda + \Lambda) u_t = (-\alpha \Lambda^2 + \beta \Lambda) u + f, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad (3.2.1)$$

и уравнений Фишера – Колмогорова, Кана – Хилларда и диффузии четвертого порядка

$$u_t = (-\alpha \Lambda^2 + \beta \Lambda + \gamma) u + f, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad (3.2.2)$$

в квазисоболевых пространствах $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2}$ и $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$.

В соответствии с параграфами 1.5, 2.5 и 2.6 точки относительного спектра $\mu_k \in \sigma^L(M)$:

- для уравнения (3.2.1) имеют вид $\mu_k = \frac{\beta\lambda_k - \alpha\lambda_k^2}{\lambda + \lambda_k}$ при $k : \lambda_k \neq -\lambda$;
- для уравнения (3.2.2) имеют вид $\mu_k = -\alpha\lambda_k^2 + \beta\lambda_k + \gamma$.

Введем в рассмотрение условие

$$\left. \begin{array}{l} \text{пусть } \sigma^L(M) = \sigma_1^L(M) \cup \sigma_2^L(M); \sigma_1^L(M) \text{ состоит из} \\ \text{конечного числа точек } \{\mu_k\} \subset \sigma^L(M) \text{ и } \Omega_1 \subset \mathbb{C} - \text{круг,} \\ \text{содержащий точки } \sigma_1^L(M) \text{ и } \bar{\Omega}_1 \cap \sigma_2^L(M) = \emptyset. \end{array} \right\} \quad (3.2.3)$$

Очевидно, в силу (3.2.3), условие (3.1.1) выполняется. Тогда, в силу леммы 3.1.1, существуют проекторы

$$P_1 = \sum_{\mu_k \in \sigma_1^L(M)} \langle \cdot, e_k \rangle e_k \text{ и } Q_1 = \sum_{\mu_k \in \sigma_1^L(M)} \langle \cdot, e_k \rangle e_k.$$

Построим пространства

$$\mathfrak{U}^{11} = \text{im } P_1 = \{u \in \mathfrak{U} : u_k = 0 \text{ если } \mu_k \notin \sigma_1^L(M)\},$$

$$\mathfrak{F}^{11} = \text{im } Q_1 = \{f \in \mathfrak{F} : f_k = 0 \text{ если } \mu_k \notin \sigma_1^L(M)\},$$

$$\mathfrak{U}^{10} = \text{ker } P_1 = \{u \in \mathfrak{U} : u_k = 0 \text{ если } \mu_k \in \sigma_1^L(M)\},$$

$$\mathfrak{F}^{10} = \text{ker } Q_1 = \{f \in \mathfrak{F} : f_k = 0 \text{ если } \mu_k \in \sigma_1^L(M)\},$$

и обозначим сужение оператора $L(M)$ на \mathfrak{U}^{11}

– для уравнения (3.2.1) через

$$L_{11} = \sum_{\mu_k \in \sigma_1^L(M)} (\lambda + \lambda_k) \langle \cdot, e_k \rangle e_k$$

$$\left(M_{11} = \sum_{\mu_k \in \sigma_1^L(M)} (-\alpha\lambda_k^2 + \beta\lambda_k) \langle \cdot, e_k \rangle e_k \right);$$

– для уравнения (3.2.2) через

$$L_{11} = \sum_{\mu_k \in \sigma_1^L(M)} \langle \cdot, e_k \rangle e_k$$

$$\left(M_{11} = \sum_{\mu_k \in \sigma_1^L(M)} (-\alpha \lambda_k^2 + \beta \lambda_k + \gamma) \langle \cdot, e_k \rangle e_k \right).$$

Построим операторы

$$P_2 = P - P_1 = \sum_{\mu_k \in \sigma^L(M) \setminus \sigma_1^L(M)} \langle \cdot, e_k \rangle e_k \text{ и}$$

$$Q_2 = Q - Q_1 = \sum_{\mu_k \in \sigma^L(M) \setminus \sigma_1^L(M)} \langle \cdot, e_k \rangle e_k.$$

В силу следствия 3.1.1, эти операторы – проекторы. Положим

$$\mathfrak{U}^{12} = \text{im } P_2 = \{u \in \mathfrak{U}^1 : u_k = 0 \text{ если } \mu_k \in \sigma_1^L(M)\},$$

$$\mathfrak{F}^{12} = \text{im } Q_2 = \{f \in \mathfrak{F}^1 : f_k = 0 \text{ если } \mu_k \in \sigma_1^L(M)\}$$

и обозначим сужение оператора $L(M)$ на \mathfrak{U}^{12}

– для уравнения (3.2.1) через

$$L_{12} = \sum_{\mu_k \in \sigma^L(M) \setminus \sigma_1^L(M)} (\lambda + \lambda_k) \langle \cdot, e_k \rangle e_k$$

$$\left(M_{12} = \sum_{\mu_k \in \sigma^L(M) \setminus \sigma_1^L(M)} (-\alpha \lambda_k^2 + \beta \lambda_k) \langle \cdot, e_k \rangle e_k \right);$$

– для уравнения (3.2.2) через

$$L_{12} = \sum_{\mu_k \in \sigma^L(M) \setminus \sigma_1^L(M)} \langle \cdot, e_k \rangle e_k$$

$$\left(M_{12} = \sum_{\mu_k \in \sigma^L(M) \setminus \sigma_1^L(M)} (-\alpha \lambda_k^2 + \beta \lambda_k + \gamma) \langle \cdot, e_k \rangle e_k \right).$$

Следствие 3.2.1.

- (i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$, $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}^{11} \oplus \mathfrak{U}^{12}$, $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}^{11} \oplus \mathfrak{F}^{12}$;
- (ii) операторы $L_{12}, M_{12} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{12}; \mathfrak{F}^{12})$;
- (iii) существует оператор $L_{12}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{12}; \mathfrak{U}^{12})$.

Доказательство. Утверждения следствия (i) и (ii) очевидны. Для уравнения (3.2.2) существование оператора L_{12}^{-1} также очевидно, а для уравнения (3.2.1) оператор

$$L_{12}^{-1} = \sum_{\mu_k \in \sigma^L(M) \setminus \sigma_1^L(M)} (\lambda + \lambda_k)^{-1} \langle \cdot, e_k \rangle e_k. \quad \bullet$$

Следствие 3.2.2. Пространство \mathfrak{U}^{11} , являющееся образом группы

$$V^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.2.4)$$

и пространство \mathfrak{U}^{12} являются инвариантными пространствами уравнений (3.2.1) и (3.2.2).

Следствие 3.2.3. Если $\operatorname{Re} \mu_k \neq 0$ для всех $\mu_k \in \sigma^L(M)$, и существует $\mu_s > 0$ при некоторых s , то решения уравнений (3.2.1) и (3.2.2) обладают экспоненциальной дихотомией.

Доказательство. Очевидно, что выполняются все условия теоремы 3.1.3. \bullet

Замечание 3.2.1. Для уравнения (3.2.1) условия следствия 3.2.3 выполнены, если $\lambda_k \neq \beta/\alpha$ и при достаточно большом $\beta > 0$, либо

- 1) $\lambda \geq 0$ и для некоторых $s \in \mathbb{N}$ выполнено $\lambda_s < \beta/\alpha$, либо
- 2) $\lambda < 0$ и для некоторых $s \in \mathbb{N}$ выполнено $-\lambda < \lambda_s < \beta/\alpha$ или $\beta/\alpha < \lambda_s < -\lambda$.

Для уравнения (3.2.2) условия следствия 3.2.3 выполнены, если для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено $-\alpha\lambda_k^2 + \beta\lambda_k + \gamma \neq 0$ и при $\gamma > -\frac{\beta^2}{4\alpha}$ для некоторых $s \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\sqrt{\alpha}} < \lambda_s < \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\sqrt{\alpha}}.$$

3.3. Алгоритм численного метода

Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $Q_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^s d_j \lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих корней, степеней n и s , соответственно, причем $n < s$ и $d_s c_n < 0$, операторы $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$. Пусть некоторый интервал $[0, T] \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим эволюционную математическую модель

$$L\dot{u} = Mu, \quad (3.3.1)$$

$$u(0) = u^0. \quad (3.3.2)$$

Приближенное решение будем искать с помощью проекционного метода. Нам придется его модифицировать, в силу того, что математическая модель (3.3.1) – (3.3.2) может оказаться вырожденной.

Опишем суть численного метода. Для нахождения приближенного решения $\tilde{v}(t)$ будем использовать представление

$$\tilde{u}(t) = u^N(t) = \sum_{k=1}^N u_k(t) e_k \quad (3.3.3)$$

где $N \in \mathbb{N}$, необходимо, брать таким, чтобы, во-первых, учесть эффекты вырожденности уравнения и, во-вторых, достичь требуемой точности ε .

Опишем подробнее, как подбирается N . Прежде всего, при заданном ε требуется выполнение оценки:

$$\int_0^T \lambda_k^{\frac{m}{q}} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| dt < \varepsilon.$$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k - \tilde{u}_k|)^q \right)^{1/q} dt &= \int_0^T \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|)^q \right)^{1/q} dt = \\ &= \int_0^T \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{qm}{2}} e^{q\mu_k t} |u_k^0|^q \right)^{1/q} dt \leq \int_0^T e^{\mu_N t} \lambda_{N+1}^{\frac{m}{q}} \|u^0\| dt. \end{aligned}$$

таким образом, из неравенства

$$\frac{m \|u^0\|}{\mu_N} (e^{\mu_N T} - 1) < \varepsilon$$

получим условие

$$\mu_N - \frac{\ln(\varepsilon \mu_N + \frac{m}{q} \|u^0\|) - \ln(\frac{m}{q} \|u^0\|)}{T} < 0,$$

из которого находится N для приближенного решения.

Кроме того, чтобы учесть вырожденность уравнения (если имеется), необходимо номер N взять достаточно большим так, что λ_N лежит правее всех корней многочлена $Q_n(\lambda)$.

Итак, представление (3.3.3) для $u^N(x, t)$ подставим в (3.3.1). Получим:

$$\sum_{k=1}^N Q_n(\lambda_k) u'_k(t) e_k = \sum_{k=1}^N R_s(\lambda_k) u_k(t) e_k, \quad (3.3.4)$$

представляющее собой конечную систему уравнений. В зависимости от параметров, уравнения в системе (3.3.4) могут получиться дифференциальными или алгебраическими. Рассмотрим эти случаи подробнее.

(i) $Q_n(\lambda_k), k = 1, \dots, N \neq 0$. В этом случае все уравнения системы будут обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) первого порядка. Решая эту систему, находятся неизвестные функциональные коэффициенты $u_k(t), k = 1, \dots, N$ в приближенном решении $\tilde{u}(t) = u^N(x, t)$.

(ii) $Q_n(\lambda_{k_j}) = 0$ при некоторых k_j . Тогда уравнения системы с номерами k_j будут алгебраическими, а остальные дифференциальными. Решение исходной задачи будет существовать, согласно теореме 2.3.2, лишь при начальной последовательности u_0 из фазового пространства, то есть при

$$\sum_{k_j: Q_n(\lambda_{k_j})=0} \langle u_0, e_{k_j} \rangle e_{k_j} = 0. \quad (3.3.5)$$

Если соотношение (3.3.5) выполнено, то можно найти коэффициенты в представлении (3.3.3) приближенного решения следующим образом. Система ОДУ решается, как в случае (i). Система алгебраических уравнений решается относительно u_{k_j} без начальных условий.

Алгоритм нахождения приближенного решения задачи (3.3.1) – (3.3.2) сводится к трем этапам.

Этап 1. Нахождение числа N , начиная с которого можно вычислять приближенное решение.

Этап 2. Проверка по заданным параметрам, к какому из двух случаев относится математическая модель.

Этап 3. По заданной начальной последовательности, в зависимости от случаев (i) – (ii) вычисление приближенного решения с помощью модифицированного проекционного метода.

Отметим, что разработанный численный метод позволяет находить приближенное решение в квазисоболевых пространствах по заданной начальной последовательности с заданной точностью. Кроме того, если параметр квазинормы $q \geq 2$, его можно применять для нахождения приближенного решения различных эволюционных математических моделей в пространствах Соболева. Опишем суть этого метода.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей ∂D класса C^∞ . В цилиндре $D \times \mathbb{R}$ рассмотрим начально-краевую задачу, для определенности задачу Коши – Дирихле

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in D, \quad (3.3.6)$$

$$w(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial D \times \mathbb{R} \quad (3.3.7)$$

для уравнения

$$Q_n(\Delta)w_t = R_s(\Delta)w. \quad (3.3.8)$$

Обозначим через $\sigma(\Delta)$ спектр однородной задачи Дирихле в области D для оператора $-\Delta$. Напомним, что спектр $\sigma(-\Delta)$ неотрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ множество собственных значений, занумерованное по неубыванию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k\}$ – семейство соответствующих собственных функций, ортонормированных относительно скалярного произведе-

ния $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L^2(D)$. Так как семейство $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве $L^2(D)$, то начальную функцию можно разложить в ряд Фурье

$$w_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle w_0, \varphi_k \rangle \varphi_k(x), \quad x \in D. \quad (3.3.9)$$

Для нахождения приближенного решения $\tilde{w}(x, t)$ будем использовать представление

$$\tilde{w}(x, t) = w^N(x, t) = \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k(t) \varphi_k(x), \quad (3.3.10)$$

где номер $N \in \mathbb{N}$ и приближенное решение в квазисоболевых пространствах $\tilde{u}(t) = \{\tilde{u}_k(t)\}$ находятся с помощью ранее описанного численного метода по заданной точности.

3.4. Описание программ

Разработанные в п. 3.3 алгоритмы численных методов исследования одного класса эволюционных математических моделей в комплексе программ в системе компьютерной математики Maple 15.0.

Функциональное назначение программы, область её применения.

Комплекс состоит из двух модулей и предназначен для получения численного решения задачи Коши для класса уравнений в квазисоболевых пространствах, а также решения задачи Коши для моделей Дзекцера и Фишера Колмогорова на отрезке или в прямоугольнике, в зависимости от заданных параметров и начальных данных при параметре квазинормы $q \geq 2$. В программном комплексе реализован метод фазового пространства и модифицированный проекционный метод. Программа позволяет строить графики компонент численного решения в квазисоболевых пространствах и графики решений указанных моделей в зависимости от времени и пространственных переменных. Программа будет полезна для специалистов в области математической физики и математического мо-

делирования. Кроме того, программа может быть использована студентами ВУЗов при изучении специальных курсов и дисциплин, связанных с исследованием уравнений соболевского типа.

Описание логической структуры.

В начале программы пользователю в диалоговом окне предлагается выбор типа задачи в зависимости от параметра квазинормы. По выбору пользователя запускается один из двух модулей программного комплекса.

На рис. 1 представлена схема алгоритма работы первого модуля программного комплекса.

Разработанная программы позволяет:

1. Ввести многочлены от квазиоператора Лапласа и рассмотреть эволюционные математические модели в квазисоболевых пространствах.
2. Учесть вырожденность математической модели и применить метод фазового пространства.
3. Найти необходимое для достижения заданной точности ε количество ненулевых членов приближенного решения.
4. Найти и вывести приближенное решение задачи.
5. Получить графическое изображение компонент полученного решения в зависимости от времени.

Подробное описание алгоритма (каждый блок диаграммы соответствует одному шагу):

Шаг 1. После старта программы пользователь вводит степени многочленов s, n , промежуток времени $T : t \in [0, T]$ и точность приближенного решения ε .

Шаг 2. В цикле вводятся коэффициенты и строится многочлен $R_s(x) = \sum_{k=1}^s d_k x^k$.

Шаг 3. В цикле вводятся коэффициенты и строится многочлен $Q_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^k$.

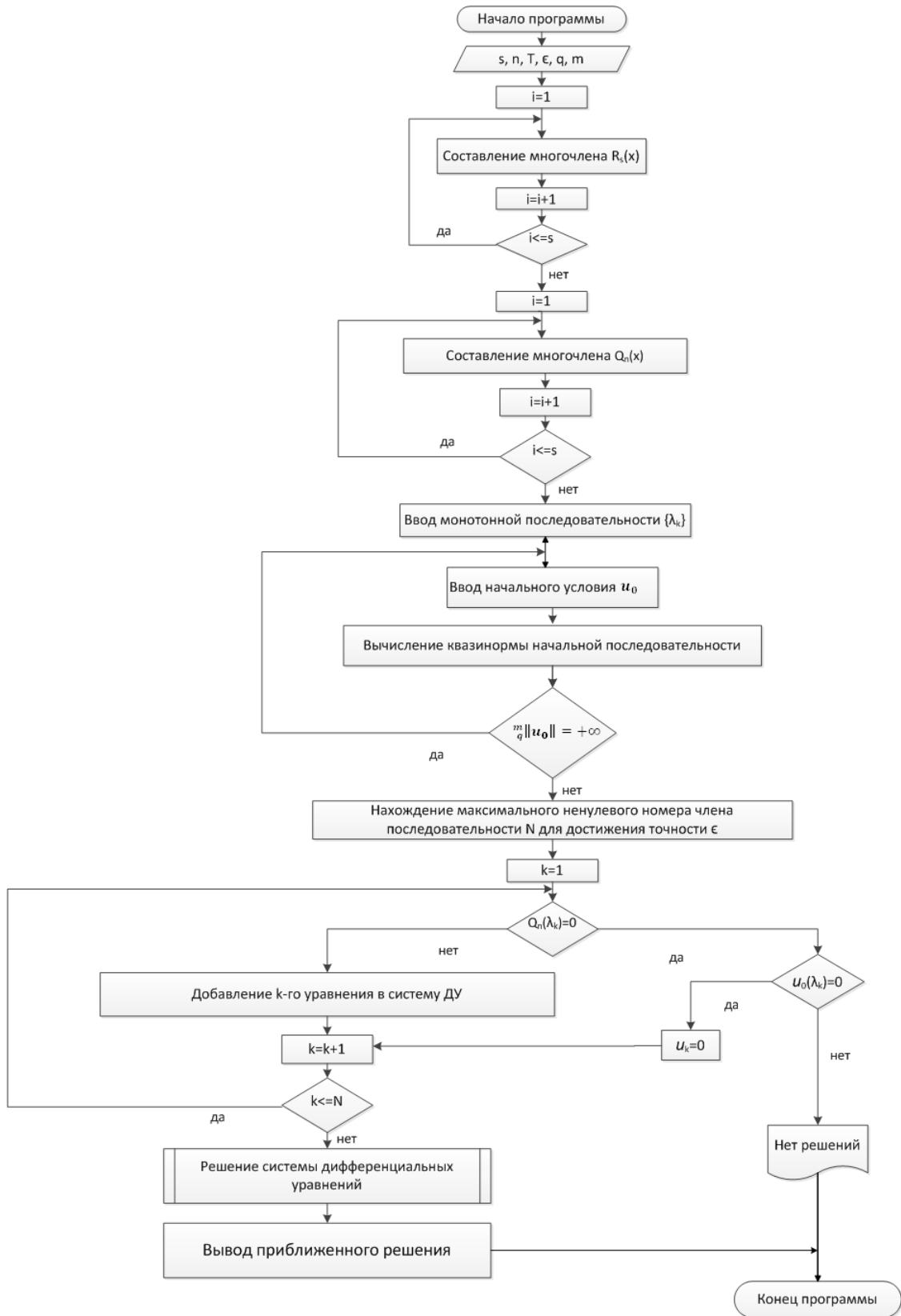


Рис. 1: Блок-схема алгоритма

Шаг 4. Пользователь вводит монотонно возрастающую последовательность $\{\lambda_k\}$.

Шаг 5. Задается начальная последовательность u_0 .

Шаг 6. Ввод параметров квазинормы квази-Соболева пространства.

Шаг 7. Вычисление квазинормы начальной последовательности.

Шаг 8. Проверка равенства бесконечности квазинормы начальной последовательности.

Если на восьмом шаге истина, Шаг 5.

Если на восьмом шаге ложь:

Шаг 9. Нахождение числа N ненулевых компонент приближенного решения, необходимых для достижения точности ε такого, что $\int_0^T \int_q^m \|u(t) - \tilde{u}_N(t)\| dt < \varepsilon$.

Шаг 10. В цикле проверяется, является ли уравнение вырожденным, т.е. $Q_n(\lambda_k) = 0$.

Если на десятом шаге истина:

Шаг 11. Проверка принадлежности начальных данных u_0 фазовому пространству уравнения.

Если на одиннадцатом шаге истина:

Шаг 12. Конец цикла по k .

Если на одиннадцатом шаге ложь:

Шаг 13. Вывод сообщения: "Нет решений".

Если на десятом шаге ложь:

Шаг 14. Уравнение с номером k является дифференциальным. Добавление его к системе дифференциальных уравнений.

Шаг 15. Конец цикла по k .

Шаг 16. Решение системы дифференциальных уравнений для нахождения нетривиальных компонент приближенного решения.

Шаг 17. Вывод полученного приближенного решения на экран и построение графиков компонент приближенного решения в зависимости от

времени.

Шаг 18. Конец программы.

На рис. 2 представлена схема алгоритма работы второго модуля программного комплекса.

Разработанная программы позволяет:

1. Ввести параметры уравнения, начальную функцию.
2. Учесть вырожденность математической модели и применить метод фазового пространства.
3. Найти и вывести приближенное решение задачи.
4. Получить графическое изображение решения в зависимости от времени и пространственных переменных.

Подробное описание алгоритма (каждый блок диаграммы соответствует одному шагу):

Шаг 1. После старта программы пользователь вводит параметры уравнения Дзекцера или Фишера-Колмогорова, начальную функцию $w_0(x)$, промежуток времени $T : t \in [0, T]$ и точность приближенного решения ε .

Шаг 2. По параметрам уравнения строятся многочлены $Q_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^k$,
 $R_s(x) = \sum_{k=1}^s d_k x^k$.

Шаг 3. Решается задача Штурма – Лиувилля: находятся собственные функции и собственные значения оператора $-\Delta$ в соответствующей области. То есть получается монотонно возрастающая последовательность $\{\lambda_k\}$ и последовательность собственных функций $\{\varphi_k\}$.

Шаг 4. Начальная функция раскладывается в ряд Фурье по собственным функциям. Получается начальная последовательность u_0 из ее коэффициентов.

Шаг 5. Запускается первый модуль, по полученным на предыдущих шагах данным находится приближенное решение в квазисоболевых пространствах.

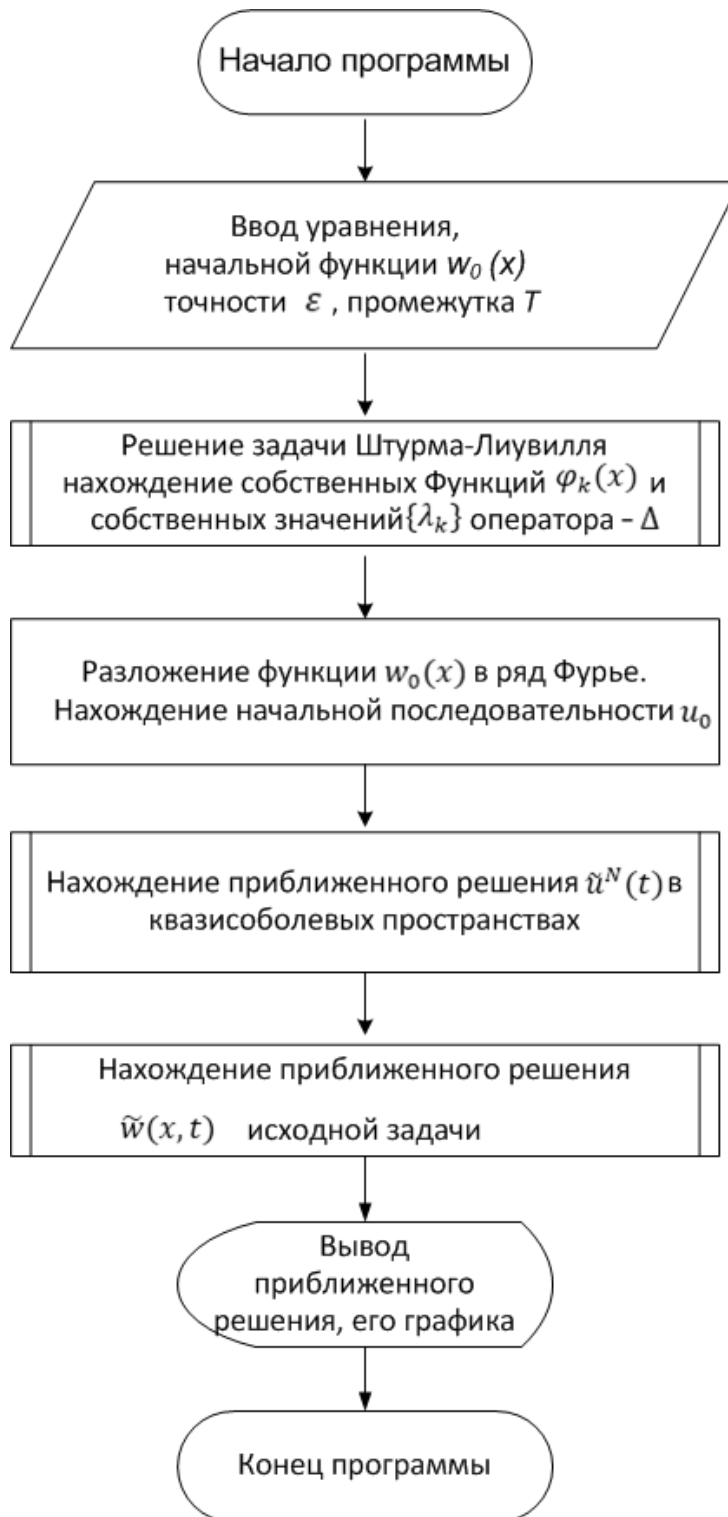


Рис. 2: Блок-схема алгоритма

Шаг 6. Получение приближенного решения исходной модели в виде

$$\sum_{k=1}^N \tilde{u}_k(t) \varphi_k(x).$$

Шаг 7. Полученное решение выводится на экран в виде функции и в виде графика .

Используемые технические средства

Для реализации вычислительных алгоритмов использовались встроенные функции и стандартные операторы программного пакета Maple 15.0. Для создания диалоговых окон подключен пакет Maplets[Elements]. Для получения графического изображения подключен пакет plots. Автором программы создан М-файл для исследования (нахождения решения) одного класса эволюционных моделей в квазисоболевых пространствах, а также математических моделей Дзекцера и Фишера – Колмогорова на отрезке и в прямоугольнике. Программа эксплуатируется на персональном компьютере платформы Intel (80 × 86), работает под управлением Microsoft Windows.

Выходные данные

Выходными данными являются вывод на экран собственных значений и собственных функций, компонент решения $u_k(t)$, график решения $u(x, t)$ в определенные промежутки времени, а также анимацию распространения волны Буссинеска – Лява с течением времени.

Программа зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ [111].

3.5. Вычислительные эксперименты для аналогов моделей в квазисоболевых пространствах

Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$. Рассмотрим математическую модель

$$u(0) = u_0, t \in [0, T], u_0 \in \mathfrak{U} \quad (3.5.1)$$

$$Q_n(\Lambda)\dot{u} = R_s(\Lambda)u \quad (3.5.2)$$

Пример 3.5.1. Требуется найти численное решение математической модели (3.5.1) – (3.5.2), где $Q_1(x) = 2 - x$, $R_2(x) = x^2$, $\lambda_k = k^2$, $u_{0k} = \frac{1}{k}$, $q = 0.5$, $m = 1$, $T = 0.5$, $\varepsilon = 0.01$.

Программа проверяет условие $\frac{m}{q}\|u_0\| = +\infty$. Так как оно выполнено, то задача не имеет решение. Программа выводит сообщение: "Нет решения".

Пример 3.5.2. Требуется найти численное решение математической модели (3.5.1) – (3.5.2), где $Q_1(x) = 2 - x$, $R_2(x) = x^2$, $\lambda_k = k^2$, $u_{0k} = \frac{1}{k^2}$, $q = 0.5$, $m = 1$, $T = 0.5$.

В зависимости от точности ε получены следующие результаты:

Для $\varepsilon_1 = 0.1$,

$$\tilde{u}_1(t) = (e^t, 0.25 e^{-8t}, 0.11 e^{-11.57t}, 0.06 e^{-18.29t}, 0.04 e^{-27.17t}, 0, 0, \dots, 0, \dots).$$

При $\varepsilon_2 = 0.01$,

$$\tilde{u}_2(t) = (e^t, 0.25 e^{-8t}, 0.11 e^{-11.57t}, 0.06 e^{-18.29t}, 0.04 e^{-27.17t}, 0.03 e^{-38.12t}, 0.02 e^{-51t}, 0.02 e^{-66t}, 0.01 e^{-83t}, 0.01 e^{-102t}, 0.008 e^{-123t}, 0.007 e^{-146t}, 0.006 e^{-171t}, 0.005 e^{-198t}, 0.004 e^{-227t}, 0, 0, \dots, 0, \dots).$$

График решения представлен на рисунке 3. Так как множество $\sigma_+ = \sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu > 0\} \neq \emptyset$ ($\mu_1 = 1 > 0$), то, в силу теоремы 3.1.3, уравнение (3.5.2) обладает экспоненциальной дихотомией. Из рисунка 3 видно, что первая компонента решения растет, остальные – убывают.

Пример 3.5.3. Требуется найти численное решение математической модели (3.5.1) – (3.5.2), где $Q_1(x) = 4 - x$, $R_2(x) = x^2$, $\lambda_k = k^2$, $u_{0k} = \frac{1}{k^4}$,

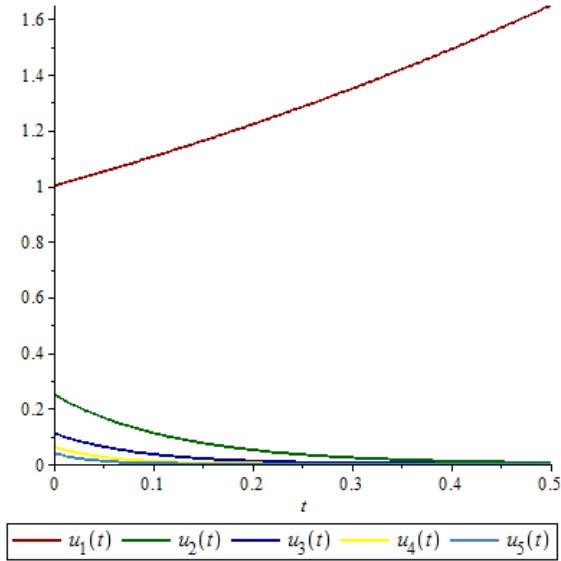


Рис. 3: Компоненты решения из примера 3.5.2

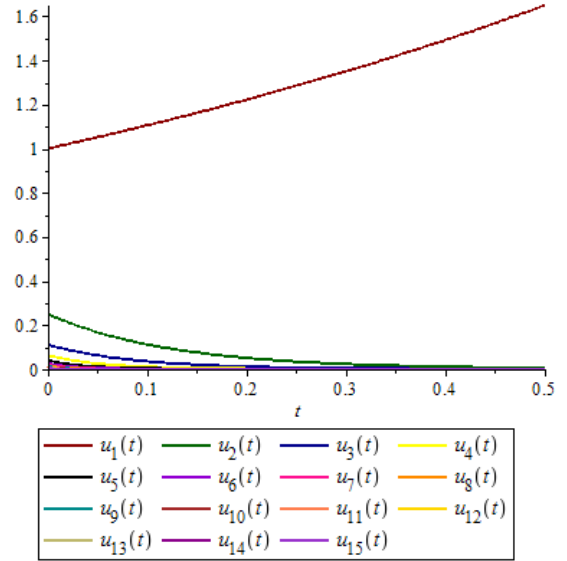


Рис. 4: Компоненты решения из примера 3.5.4

$q = 0.5$, $m = 1$, $T = 0.5$, $\varepsilon_1 = 0.1$. Уравнение (3.5.2) в этом случае вырожденное. Так как начальные данные не принадлежат фазовому пространству, выдается сообщение: "Нет решений".

Пример 3.5.4. Требуется найти численное решение математической модели (3.5.1) – (3.5.2), где $Q_1(x) = 4 - x$, $R_2(x) = x^2$, $\lambda_k = k^2$,

$$u_{0k} = \begin{cases} \frac{1}{k^2}, & \text{если } k \neq 2; \\ 0 & \text{если } k = 2. \end{cases}$$

Уравнение (3.5.2) в этом случае вырожденное ($Q_1(\lambda_2) = 0$) и начальные данные принадлежат фазовому пространству уравнения.

Для $\varepsilon = 0.01$ имеем

$$\tilde{u}(t) = (e^t, 0, 0.1 e^{-11.57t}, 0.06 e^{-18.29t}, 0.04 e^{-27.17t}, 0.03 e^{-38.12t}, 0.02 e^{-51t}, 0.02 e^{-66t}, 0.01 e^{-83}, 0.01 e^{-102t}, 0.008 e^{-123t}, 0.007 e^{-146t}, 0.006 e^{-171t}, 0.005 e^{-198t}, 0.004 e^{-227t}, 0.004 e^{-258t}, 0.003 e^{-291t}, 0.003 e^{-326t}, 0.003 e^{-363t}, 0.003 e^{-402t}, 0.002 e^{-443t}, 0.002 e^{-486t}, 0, 0, \dots, 0, \dots).$$

График решения представлен на рисунке 4. Так как множество $\sigma_+ = \sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \text{Re} \mu > 0\} \neq \emptyset$ ($\mu_1 = 1 > 0$), то, в силу теоремы 3.1.3,

уравнение (3.5.2) обладает экспоненциальной дихотомией. Из рисунка 4 видно, что первая компонента решения растет, остальные – убывают.

Пример 3.5.5. Требуется найти численное решение математической модели (3.5.1) – (3.5.2), где $Q_2(x) = 7+x^2$, $R_3(x) = -5+x-5x^2-x^3$, $\lambda_k = k^4$, $u_{0k} = \frac{1}{k^3}$, $q = 0.5$, $m = 1$, $T = 0.5$.

Для $\varepsilon_1 = 0.1$, $\tilde{u}_1(t) = (e^{-1.25t}, 0.13 e^{-20.39t}, 0.04 e^{-85.9t}, 0, 0, \dots, 0, \dots)$.

For $\varepsilon_2 = 0.01$, $\tilde{u}_2(t) = (e^{-1.25t}, 0.13 e^{-20.39t}, 0.04 e^{-85.9t}, 0.02 e^{-260t}, 0, 0, \dots, 0, \dots)$. График решения представлен на рисунке 5. Так как множество $\sigma_+ = \sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu > 0\} = \emptyset$, то, в силу теоремы 3.1.3, уравнение (3.5.2) не обладает экспоненциальной дихотомией. Из рисунка 5 видно, что все компоненты решения убывают.

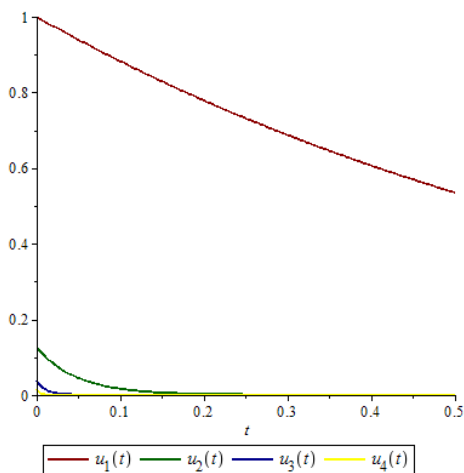


Рис. 5: Компоненты решения из примера 3.5.5

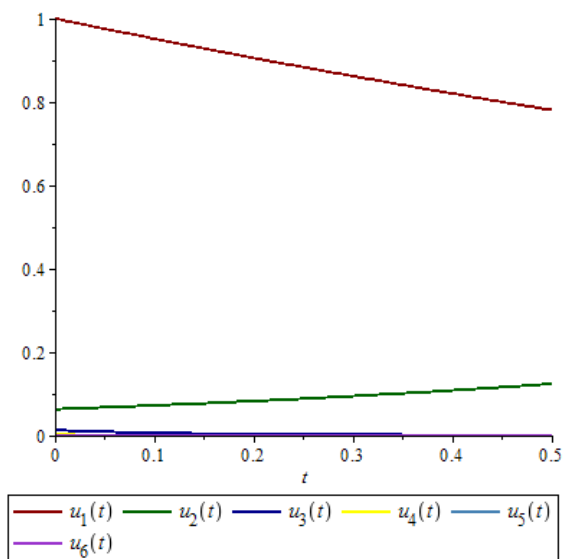


Рис. 6: Компоненты решения из примера 3.5.6

Пример 3.5.6. Требуется найти численное решение математической модели (3.5.1) – (3.5.2), где $Q_3(x) = 2 - 100x - 20x^2 - x^3$, $R_5(x) = -7 + 100x - 3x^2 - 30x^3 - 2x^4 + x^5$, $\lambda(k) = k^2$, $u_{0k} = \frac{1}{k^4}$, $q=0.5$, $m=1$, $T=0.5$.

Уравнение (3.5.2) в этом случае невырожденное.

Для $\varepsilon = 0.01$ имеем

$$\tilde{u}(t) = (e^{-0.49t}, 0.06e^{1.36t}, 0.01e^{-7.61t}, 0.004e^{-73t}, 0.002e^{-278t}, 0.0008e^{-731t}, 0, 0, \dots, 0, \dots).$$

График решения представлен на рисунке 6. Так как множество $\sigma_+ = \sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu > 0\} \neq \emptyset$ ($\mu_2 = 1.36 > 0$), то, в силу теоремы 3.1.3, уравнение (3.5.2) обладает экспоненциальной дихотомией. Из рисунка 6 видно, что первая компонента решения убывает, вторая – растет, остальные компоненты решения убывают.

3.6. Вычислительные эксперименты для математических моделей Дзекцера и Фишера – Колмогорова

Приведем вычислительные эксперименты для математической модели Дзекцера

$$(\lambda - \Delta)w_t = (\beta\Delta - \alpha\Delta^2)w, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad (3.6.1)$$

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in [0, l] \quad (3.6.2)$$

$$w(0, t) = w(l, t) = w_{xx}(0, t) = w_{xx}(l, t) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (3.6.3)$$

в банаховых пространствах $\mathfrak{U} = W_2^{m+2}(0, l)$ и $\mathfrak{F} = W_2^m(0, l)$, $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Пример 3.6.1. Требуется найти численное решение математической модели (3.6.1) – (3.6.3), где $\lambda = -4$, $\beta = 0$, $\alpha = 1$, $m = 1$, $l = \pi$, $T = 0.4$. Очевидно, что $\lambda_k = k^2$ и $\varphi_k = \sin kx$ являются собственными значениями и собственными функциями оператора $-\Delta$ с однородным граничным условием Дирихле. Пусть

$$w_0(x) = \sum_{k \neq 2} \frac{1}{k^2} \sin kx.$$

Математическая модель (3.6.1) – (3.6.3) вырождена, однако начальная функция принадлежит фазовому пространству уравнения (3.6.1). Тогда при заданной точности $\varepsilon = 0.1$ в результате работы программы получаем

$\tilde{u}(t) = (e^{0.33t}, 0, 0.11e^{-16.2t}, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ – коэффициенты приближенного решения. На рисунке 7 представлены их графики. Так как $\mu_1 = 0.33 > 0$, то, в силу следствия 3.2.3, уравнение (3.6.1) обладает экспоненциальной дихотомией. Из рисунка 7 видно, что первая компонента решения растет, остальные – убывают.

Само приближенное решение имеет вид

$$\tilde{w}(x, t) = e^{0.33t} \sin x + 0.11e^{-16.2t} \sin 3x.$$

График приближенного решения изображен на рисунке 8.

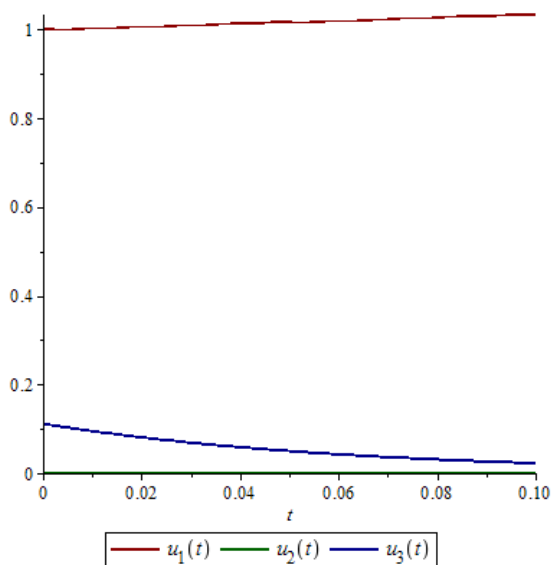


Рис. 7: Компоненты решения из примера 3.6.1

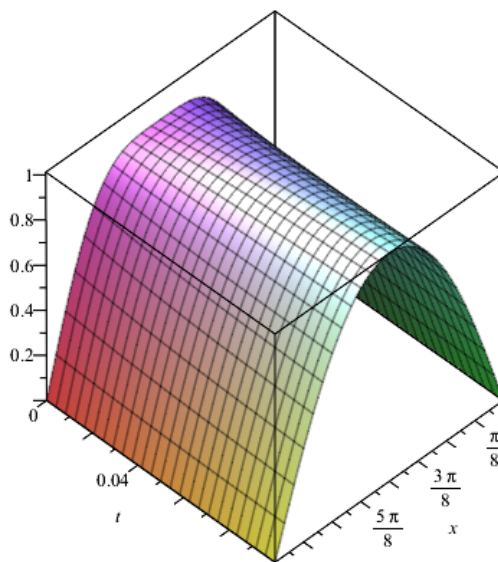


Рис. 8: График решения из примера 3.6.1

Пример 3.6.2. Требуется найти численное решение математической модели (3.6.1) – (3.6.3), где $\lambda = -4$, $\beta = 0$, $\alpha = 1$, $m = 1$, $l = \pi$, $T = 0.4$. Очевидно, что $\lambda_k = k^2$ и $\varphi_k = \sin kx$ являются, соответственно, собственными значениями и собственными функциями оператора $-\Delta$ с однородным граничным условием Дирихле. Пусть

$$w_0(x) = \sin x + 3 \sin 3x.$$

Математическая модель (3.6.1) – (3.6.3) вырождена. В этом случае начальная функция не принадлежит фазовому пространству уравнения

(3.6.1), программа выдает сообщение: "Нет решений".

Пример 3.6.3. Требуется найти численное решение математической модели (3.6.1) – (3.6.3), где $\lambda = -4$, $\beta = 0$, $\alpha = 1$, $m = 1$, $l = \pi$, $T = 0.4$. Пусть $w_0(x) = \sin x + 3 \sin 3x$. Математическая модель (3.6.1) – (3.6.3) вырождена, однако начальная функция принадлежит фазовому пространству уравнения (3.6.1). Тогда при заданной точности $\varepsilon = 0.1$ в результате работы программы получаем

$\tilde{u}(t) = (e^{0.33t}, 0, 3e^{-16.2t}, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ – коэффициенты приближенного решения. На рисунке 9 представлены их графики. Так как $\mu_1 = 0.33 > 0$, то, в силу следствия 3.2.3, уравнение (3.6.1) обладает экспоненциальной дихотомией. Из рисунка 9 видно, что первая компонента решения растет, остальные – убывают.

Само приближенное решение имеет вид

$$\tilde{w}(x, t) = e^{0.33t} \sin x + 3e^{-16.2t} \sin 3x.$$

График приближенного решения изображен на рисунке 10.

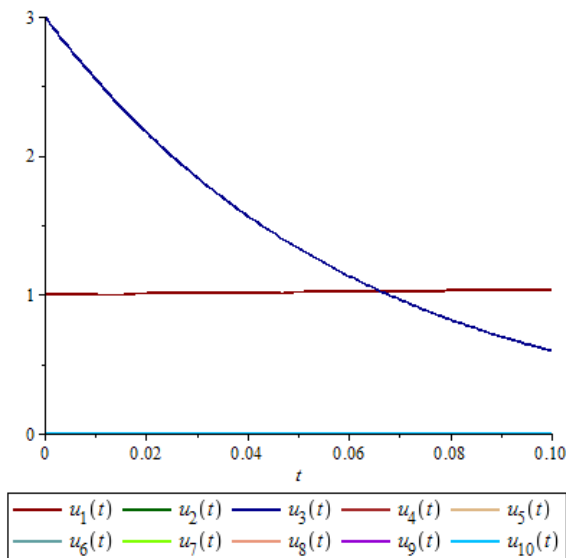


Рис. 9: Компоненты решения из примера 3.6.3

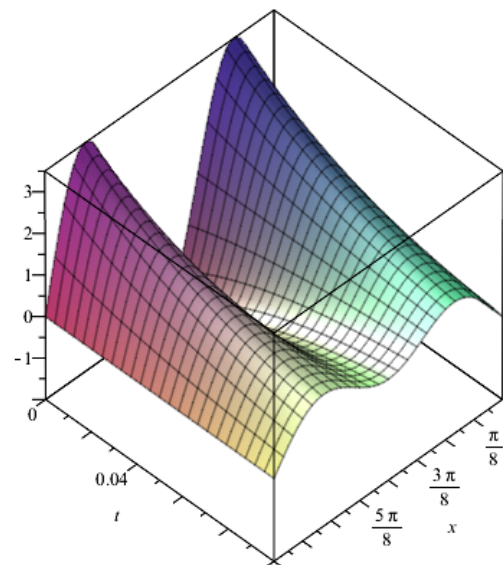


Рис. 10: График решения из примера 3.6.3

Приведем вычислительные эксперименты для математической модели Канна – Хилларда и диффузии четвертого порядка

$$w_t = (-\alpha\Delta^2 - \beta\Delta + \gamma)w, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad (3.6.4)$$

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in [0, l] \quad (3.6.5)$$

$$w_x(0, t) = w_x(l, t) = w_{xxx}(0, t) = w_{xxx}(l, t) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (3.6.6)$$

в банаховых пространствах $\mathfrak{U} = W_2^{m+2}(0, l)$ и $\mathfrak{F} = W_2^m(0, l)$, $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Пример 3.6.4. Требуется найти численное решение математической модели (3.6.4) – (3.6.6), где $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -15$, $m = 0$, $l = \pi$, $T = 0.4$. Очевидно, что $\lambda_k = k^2$ и $\varphi_k = \cos kx$ являются, соответственно, собственными значениями и собственными функциями оператора $-\Delta$ с однородным граничным условием Дирихле. Пусть

$$w_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos kx.$$

Тогда при заданной точности $\varepsilon = 0.001$, в результате работы программы получаем

$\tilde{u}(t) = (e^{15t}, 0.25e^{3t}, 0.11e^{-57t}, 0.06e^{-225t}, 0.04e^{-585t}, 0.03e^{-1245t}, 0.02e^{-2337t}, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ – коэффициенты приближенного решения. На рисунке 11 представлены их графики. Так как $\mu_1 = 15 > 0$ и $\mu_2 = 3 > 0$, то, в силу следствия 3.2.3, уравнение (3.6.4) обладает экспоненциальной дихотомией. Из рисунка 11 видно, что первая и вторая компоненты решения растут, а остальные – убывают.

Само приближенное решение имеет вид

$$\tilde{w}(x, t) = e^{15t} \cos x + 0.25e^{3t} \cos 2x + 0.11e^{-57t} \cos 3x + 0.06e^{-225t} \cos 4x + 0.04e^{-585t} \cos 5x + 0.03e^{-1245t} \cos 6x + 0.02e^{-2337t} \cos 7x.$$

График приближенного решения изображен на рисунке 12. В силу наличия экспоненциальных дихотомий, решение неустойчиво.

Пример 3.6.5. Требуется найти численное решение математической модели (3.6.4) – (3.6.6), где $\alpha = 1$, $\beta = 12$, $\gamma = -12$, $m = 0$, $l = \pi$, $T =$

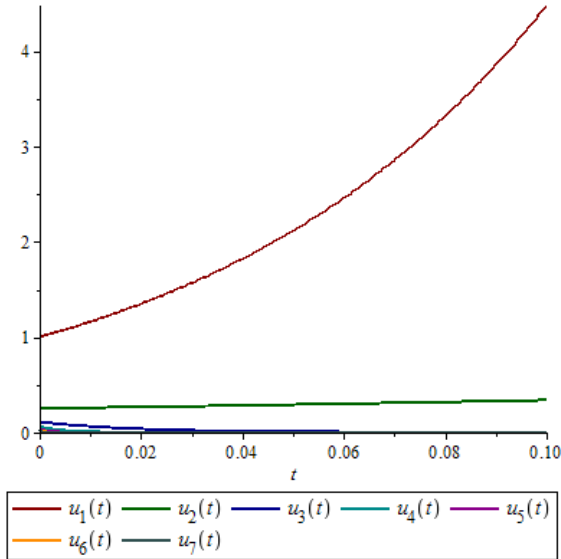


Рис. 11: Компоненты решения из примера 3.6.4

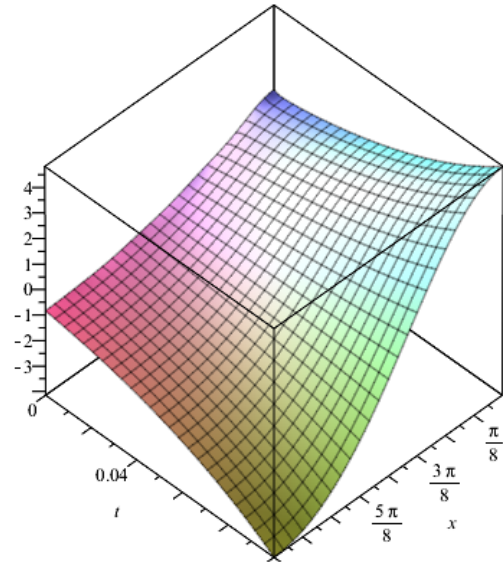


Рис. 12: График решения из примера 3.6.4

0.4, с начальной функцией

$$w_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos kx.$$

Тогда при заданной точности $\varepsilon = 0.001$, в результате работы программы получаем

$\tilde{u}(t) = (e^{-t}, 0.25e^{20t}, 0.11e^{15t}, 0.06e^{-76t}, 0.04e^{-337t}, 0.03e^{-876t}, 0.02e^{-1825t}, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ – коэффициенты приближенного решения. На рисунке 13 представлены их графики. Так как существует $\mu_2 = 20 > 0$ и $\mu_3 = 15 > 0$, то, в силу следствия 3.2.3, уравнение (3.6.4) обладает экспоненциальной дихотомией. Из рисунка 13 видно, что вторая и третья компоненты решения растут, остальные – убывают.

Само приближенное решение имеет вид

$$\tilde{w}(x, t) = e^{-t} \cos x + 0.25e^{20t} \cos 2x + 0.11e^{15t} \cos 3x + 0.06e^{-76t} \cos 4x + 0.04e^{-337t} \cos 5x + 0.03e^{-876t} \cos 6x + 0.02e^{-1825t} \cos 7x.$$

График приближенного решения изображен на рисунке 14. В силу наличия экспоненциальных дихотомий, решение неустойчиво.

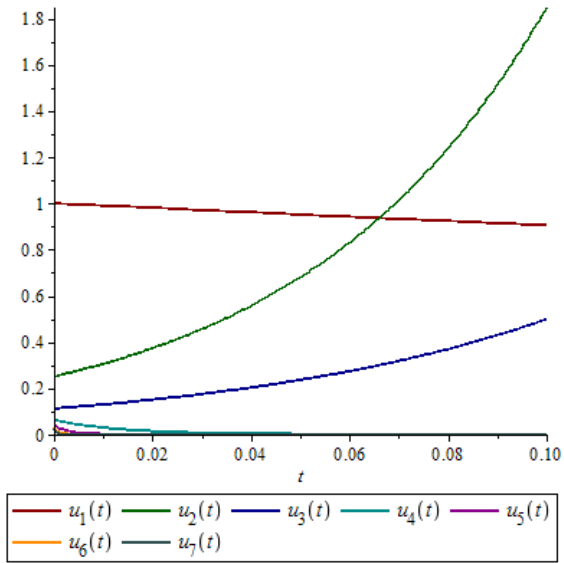


Рис. 13: Компоненты решения из примера 3.6.5

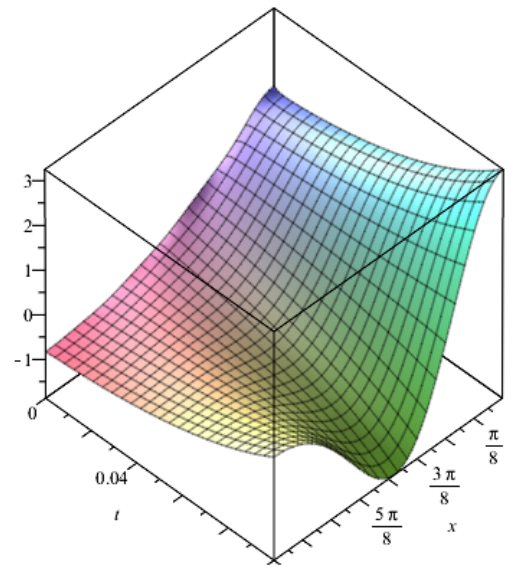


Рис. 14: График решения из примера 3.6.5

Заключение

В результате диссертационного исследования получены:

1. Достаточные условия существования решений аналогов моделей Дзекцера, Фишера – Колмогорова, диффузии 4-го порядка и Кана – Хилларда в квазисоболевых пространствах с различными начальными условиями.

2. Достаточные условия существования решений класса эволюционных математических моделей с начальным условием Шоуолтера – Сидорова или Коши в квазисоболевых пространствах.

3. Достаточные условия существования инвариантных пространств решений и их дихотомий для аналогов моделей Дзекцера, Фишера – Колмогорова, диффузии 4-го порядка и Кана – Хилларда в квазисоболевых пространствах.

4. Достаточные условия существования инвариантных пространств решений и их дихотомий для класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах.

5. Сходимость численного метода приближенного решения математических моделей в рамках задачи Коши для класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах.

6. Алгоритм численного метода исследования класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах.

7. Программа, реализующая алгоритм численного метода исследования класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах. Получена регистрация программы.

Таким образом, получены оригинальные результаты как в области математического моделирования, так и в области численных методов

и комплексов программ. Исследованы математические модели процессов различных предметных областей, а сами результаты соответствует следующим пунктам паспорта специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы:

п. 2) развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей;

п. 3) разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий;

п. 4) реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов.

Направления дальнейшего развития проведенного исследования состоят в следующем:

1. Моделирование и экспериментальное исследование изученных эволюционных процессов термо- и гидродинамики.

2. Исследование математических моделей на основе уравнений высокого порядка в квазисоболевых пространствах.

3. Разработка и реализация алгоритма численного решения математических моделей на основе уравнений высокого порядка в квазисоболевых пространствах на основе предложенных в данной работе идей.

4. Изучение неклассических линейных математических моделей в стохастических квазисоболевых пространствах.

5. Моделирование и экспериментальное исследование стохастических линейных математических моделей в квазисоболевых пространствах.

6. Исследование математических моделей на основе нелинейных операторно-дифференциальных уравнений в квазисоболевых пространствах.

Кроме того, построение теоретической базы открывает перспективы не только начать исследования неклассических уравнений в квазибана-

ховых пространствах последовательностей и различных задач такого рода, но и рассматривать возможность более эффективного решения ряда технических задач. Именно приложение теоретических результатов в различных областях позволяет говорить о дальнейшей практической применимости исследования.

Список литературы

- [1] Абрамов, С.К. Влияние водохранилищ на гидрогеологические условия прилегающих территорий / С.К. Абрамов, Н.Н. Биндеман и др. – М: Госстройиздат, 1960. – 319 с.
- [2] Александров, А.Б. Квазиномированные пространства в комплексном анализе: дис. ... док. физ-мат. наук / А.Б. Александров. – Ленинград, 1983.
- [3] Аль-Делфи, Дж.К. Квазисоболевы пространства ℓ_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.
- [4] Аль-Делфи, Дж.К. Исследование вырожденных голоморфных групп в квазибанаховых пространствах: дис. ... канд. физ-мат. наук / Дж.К. Аль-Делфи. – Воронеж, 2015.
- [5] Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 852–864.
- [6] Берг, Й. Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лефстрем. – М.: Мир, 1980. – 264 с.
- [7] Богатырева, Е.А. О единственности нелокального решения модели Баренблатта – Гильмана / Е.А. Богатырева, И.Н. Семенова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 4. – С. 113–119.
- [8] Вовк, С.М. Постановка задач определения линейных параметров сигналов в квазиномированных пространствах / С.М. Вовк, В.Ф. Борулько // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 2010. – Т. 53, № 7. – С. 31–42.

- [9] Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
- [10] Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
- [11] Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Изд-во Научная книга, 1998. – 438 с.
- [12] Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967.– 472 с.
- [13] Дзекцер, Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью / Е.С. Дзекцер // ДАН СССР. – 1972. – Т. 202, № 5. – С. 1031–1033.
- [14] Егоров, И.Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов. – Новосибирск: Наука, 2000. – 336 с.
- [15] Загребина, С.А. Устойчивость в моделях Хоффа / С.А. Загребина, П.О. Москвичева. – Saarbrucken: LAMBERT Academic Publishing, 2012.
- [16] Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.
- [17] Замышляева, А.А. Вычислительный эксперимент для одной математической модели ионно-звуковых волн / А.А. Замышляева, А.С. Муравьев // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 127–132.

- [18] Кадченко, С.И. Новый метод вычисления собственных чисел возмущенных самосопряженных операторов: дис. ... докт. физ-мат. наук / С.И. Кадченко. – Челябинск, 2003.
- [19] Кадченко, С.И. Метод регуляризованных следов / С.И. Кадченко // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2009. – № 37 (170). – С. 4–23.
- [20] Какушкин, С.Н. Математическое моделирование спектральной задачи об электрических колебаниях в протяженной линии методом регуляризованных следов / С.Н. Какушкин // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 125–129.
- [21] Келлер, А.В. Относительно спектральная теорема / А.В. Келлер // Вестник Челябинского государственного университета. Серия: Математика. Механика. – 1996. – № 1 (3). – С. 62–66.
- [22] Келлер, А.В. Голоморфные вырожденные группы операторов в квазибанаховых пространствах / А.В. Келлер, Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 20–27.
- [23] Коддингтон, Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М.: ИЛ, 1958. – 474 с.
- [24] Кондюков, А.О. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова ненулевого порядка / А.О. Кондюков, Т.Г. Сукачева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 5. – С. 823–828.
- [25] Кондюков, А.О. Вычислительный эксперимент для одного класса математических моделей магнитогидродинамики / А.О. Кондюков, Т.Г. Сукачева, С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова // Вестник ЮУр-

- ГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2017. – Т. 10, № 1. – С. 149–155.
- [26] Крейн, М.Г. О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости / М.Г. Крейн // Успехи математических наук. – 1948. – Т. 3, № 3. – С. 166–169.
- [27] Крейн, М.Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / М.Г. Крейн. – Киев: Изд-во ИМ АН УССР, 1964. – 186 с.
- [28] Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 578 с.
- [29] Ляпунов, А.М. Собрание сочинений. Т.2 / А.М. Ляпунов. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 473 с.
- [30] Майзель, А.Д. Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений / А.Д. Майзель // Труды Уральского политехнического ин-та. Серия математика. – 1954. – № 51. – С. 20–50.
- [31] Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.
- [32] Манакова, Н.А. Математические модели и оптимальное управление процессами фильтрации и деформации / Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 3. – С. 5–24.
- [33] Манакова, Н.А. Оптимальное управление для одной математической модели распространения нервного импульса / Н.А. Манакова, О.В. Гаврилова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 120–126.

- [34] Массера, Х.Л. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Х.Л. Массера, Х.Х. Шеффер. – М.: Мир, 1970. – 456 с.
- [35] Матвеева, О.П. Однородная модель несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка / О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2016. – Т. 8, № 3. – С. 22–30.
- [36] Мельникова, И.В. Задача Коши для включения в банаховых пространствах и пространствах распределений / И.В. Мельникова // Сибирский математический журнал. – 2001. – Т. 42, № 4. – С. 892–910.
- [37] Мизохата, С. Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977. – 504 с.
- [38] Новиков, С.Я. Об особенностях оператора вложения симметричных функциональных пространств на $[0, 1]$ / С.Я. Новиков // Математические заметки. – 1997. – Т. 62, вып. 4. – С. 549–563.
- [39] Обухов, А.В. Численное моделирование спиноподобного распада на основе вариационного подхода / А.В. Обухов, А.А. Обухов, В.Г. Лебедев, Т.А. Новикова // Вестник Удмуртского университета. Серия: Физика. Химия. – 2011. – № 4-1. – С. 31–40.
- [40] Полубаринова-Кочина, П.Я. О неустановившихся движениях грунтовых вод при фильтрации из водохранилищ / П.Я. Полубаринова-Кочина // Прикладная математика и механика. – 1949. – Т. 13, вып. 2. – С. 187–206.
- [41] Полубаринова-Кочина, П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.

- [42] Руткас, А.Г. О классификации и свойствах решений уравнений $Ax'+Bx=f(t)$ / А.Г. Руткас // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, № 7. — С. 1150–1155.
- [43] Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. — Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. — 104 с.
- [44] Сагадеева, М.А. Ограниченные решения модели Баренблатта–Желтова–Кочиной в квазисоболевых пространствах / М.А. Сагадеева, Ф.Л. Хасан // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2015. — Т. 8, № 4. — С. 132–139.
- [45] Свешников, А.Г. Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. — М.: Физматлит, 2007. — 736 с.
- [46] Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 4. — С. 47–74.
- [47] Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. — 1994. — Т. 6, № 5. — С. 252–272.
- [48] Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывные полугруппы разрешающих операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк // Доклады Академии наук. — 1994. — Т. 337, № 5. — С. 581–584.
- [49] Свиридюк, Г.А. Задача Шоултера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2010. — Т. 3, № 1. — С. 104–125.

- [50] Свиридюк, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Известия вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 60–68.
- [51] Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 40 (299). – С. 7–18.
- [52] Сукачева, Т.Г. Обобщенная линеаризованная модель термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 5 (264). – С. 75–87.
- [53] Сукачева, Т.Г. Задача Тейлора для модели несжимаемой вязкоупругой жидкости нулевого порядка / Т.Г. Сукачева, О.П. Матвеева // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 771–779.
- [54] Федоров, В.Е. Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений соболевского типа в банаховых и локально выпуклых пространствах: дис. ... докт. физ.-мат. наук / В.Е. Федоров. – Челябинск, 2005.
- [55] Хасан, Ф.Л. Ограниченные решения одного класса линейных динамических уравнений в квазисоболевых пространствах: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Ф.Л. Хасан. – Воронеж, 2016.
- [56] Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
- [57] Хилле, Е. Функциональный анализ и полугруппы / Е. Хилле, Р. Филлипс. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. – 830 с.

- [58] Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.
- [59] Шестаков, А.Л. Математическое моделирование состава строительных смесей с заданными свойствами / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, М.Д. Бутакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 1. – С. 100–110.
- [60] Allen, S.M. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening / S.M. Allen, J.W. Cahn // Acta Metall. – 1979. – № 27. – P. 1085–1095.
- [61] Al'shin, A.B. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Berlin: de Gruyter, 2011. – 648 p.
- [62] Amick, C.J. Homoclinic orbits in the dynamic phase space analogy of an elastic strutt / C.J. Amick, J.F. Toland // European Journal of Applied Mathematics. – 1992. – № 3. – P. 97–114.
- [63] Anders, D. Numerical simulation of diffusion induced phase separation and coarsening in binary alloys / D. Anders, K. Weinberg // Computational Materials Science. – 2011. – V. 50, № 4. – P. 1359–1364.
- [64] Anders, D. Computational modeling of phase separation and coarsening in solder alloys / D. Anders, C. Hesch, K. Weinberg // International Journal of Solids and Structures. – 2012. – V. 49. – P. 1557–1572.
- [65] Bastero, J. An extention of Milmans Reverse Burn – Minkowski inequality / J. Bastero, J. Bernuès, A. Péna // Geometric and Functional Analysis. – 1995. – V. 5, № 1. – P. 572–581.
- [66] Bohl, P. Über Differentialgleichungen / P. Bohl // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1913. – V. 144. – P. 284–318.

- [67] Boyer, F. A theoretical and numerical model for the study of incompressible mixture flows / F. Boyer // *Computers & Fluids*. – 2002. – V. 31, № 1. – P. 41–68.
- [68] Cahn, J.W. Free energy of a nonuniform system / J.W. Cahn, J.E. Hilliard // *Journal of Chemical Physics*. – 1958. – V. 28, № 2. – P. 258–267.
- [69] Chen, L.Q. Phase-Field models for microstructure evolution / L.Q. Chen // *Annual Review of Materials Research*. – 2002. – V. 32. – P. 113–140.
- [70] Coleman, B.D. On the thermodynamics of periodic phases / B.D. Coleman, M. Marcus, V.J. Mizel // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1992. – № 117. – P. 321–347.
- [71] Collet, P. *Instabilities and Fronts in Extended Systems* / P. Collet, J.P. Eckmann. – Princeton; N.-Y: Princeton University Press, 1980.
- [72] Collet, P. Nature of spatial chaos / P. Collet, C. Elphick, D. Repaux // *Physical Review Letters*. – 1987. – № 58. – P. 431–434.
- [73] Cross, M.C. Pattern formation outside of equilibrium / M.C. Cross, P.C. Hohenberg // *Reviews of Modern Physics*. – 1993. – V. 65. – P. 851–1112.
- [74] Dee, G.T. Bistable systems with propagating fronts leading to pattern formation / G.T. Dee, W. van Saarloos // *Physical Review Letters*. – 1988. – № 60. – P. 2641–2644.
- [75] Demidenko, G.V. Partial differential equation and systems not solvable with respect to the highest-order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N.-Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.
- [76] Favini, A. Laplace transform method for a class of degenerate evolution problems / A. Favini // *Rend. Mat.* – 1979. – V. 12, № 3-4. – P. 511–536.

- [77] Favini, A. An operational method for abstract degenerate evolution equations of hiperbolic type / A. Favini // Journal of Functional Analysis. – 1988. – V. 76. – P. 432–456.
- [78] Favini, A. Degenerate differential equation in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – N.-Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 1999. – 312 p.
- [79] Ganapathy, H. Phase field modeling of Taylor flow in mini/microchannels / H. Ganapathy, E. Al-Hajri, M.M. Ohadi // Chemical Engineering Science. – 2013. – V. 94. – P. 156–165.
- [80] Hadamard, J. Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles / J. Hadamard // Bulletin de la Société Mathématique de France. – 1901. – V. 29. – P. 224–228.
- [81] Halpern, D. A theoretical study of surfactant and liquid delivery into the lung / D. Halpern, O.E. Jensen, J.B. Grotberg // Journal of Applied Physiology. – 1998. – V. 85, № 1. – P. 333–352.
- [82] Hardtke, J.D. A Remark on Condensation of Singularities / J.D. Hardtke // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2013. – V. 9, № 4. – P. 448–454.
- [83] Hofer, M. Energy-minimizing splines in manifolds / M. Hofer, H. Pottmann // ACM Transactions on Graphics. – 2004. – V. 23, № 3. – P. 284–293.
- [84] Kakushkin, S.N. The Calculation of Values of Eigenfunctions of the Perturbed Self-Adjoint Operators by Regularized Traces Method / S.N. Kakushkin, S.I. Kadchenko // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – V. 2, № 4. – P. 48–60.
- [85] Kalton, N. Quasi-Banach spaces / N. Kalton // Handbook of the Geometry of Banach Spaces. – North-Holland: Elsevier, 2003. – V. 2. – P. 1099–1130.

- [86] Kim, J.S. A continuous surface tension force formulation for diffuse-interface models / J.S. Kim // Journal of Computational Physics. – 2005. – V. 204, № 2. – P. 784–804.
- [87] Laubenfelds de, R. Integrated semigroups, C -semigroups and the abstract Cauchy problem / R. de Laubenfelds // Semigroup Forum. – 1990. – V. 41. – P. 83–95.
- [88] Molin, D. Spinodal decomposition of binary mixtures with composition-dependent heat conductivities / D. Molin, R. Mauri // Chemical Engineering Science. – 2008. – V. 63. – P. 2402–2407.
- [89] Mullins, W. Theory of thermal grooving / W. Mullins // Journal of Applied Physics. – 1957. – V. 28, № 3. – P. 333–339.
- [90] Pazy, A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations / A. Pazy. – N.-Y.: Springer, 1983. – 279 p.
- [91] Peletier, L.A. A topological shooting method and the existence of kinks of the extended Fisher-Kolmogorov equation / L.A. Peletier, W.C. Troy // Topological Methods in Nonlinear Analysis. – 1996. – V. 10, № 6. – P. 331–355.
- [92] Perron, O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen / O. Perron // Mathematische Zeitschrift. – 1930. – V. 32, № 1. – P. 703–728.
- [93] Powell, J.A. Competition between generic and nongeneric fronts in envelope equations / J.A. Powell, A.C. Newell, C.K. Jones / Physical Review A. – 1991. – V. 44, № 6. – P. 3636–3652.
- [94] Pyatkov, S.G. Existence of maximal semidefinite invariant subspaces and semigroup properties of some classes of ordinary differential operators / S.G. Pyatkov // Operators and Matrices.– 2014. – T. 8, № 1. – P. 237–254.

- [95] Pyatkov, S.G. On some mathematical models of filtration theory / S.G. Pyatkov, S.N. Shergin // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 105–116.
- [96] Rolewicz, S. Metric Linear Spaces / S. Rolewicz. – Springer, 1985.
- [97] Saarloos van, W. Front propagation into unstable states. II. Linear versus nonlinear marginal stability and rate of convergence / W. van Saarloos // Physical Review A. – 1989. – V. 39, № 12. – P. 6367–6390.
- [98] Schwartz, L.W. Theoretical and numerical results for spin coating of viscous liquids / L.W. Schwartz, R.V. Roy // Physics of Fluids. – 2004. – V. 16, № 3. – P. 569–584.
- [99] Showalter, R.E. The Sobolev type equation I / R.E. Showalter // Appl. Anal. – 1975. – V. 5, № 1. – P. 15–22.
- [100] Sidorov, N. Lyapunov – Shmidt method in nonlinear analysis and applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [101] Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston, Köln: VSP, 2003. – 216 p.
- [102] Tran, T.L. Morphology control in symmetric polymer blends using spinodal decomposition / T.L. Tran, P.K. Chan, D. Rousseau // Chemical Engineering Science. – 2005. – V. 60. – P. 7153–7159.
- [103] Zimmerman van, W. Propagating fronts near a Lifshitz point / W. van Zimmerman // Physical Review Letters. – 1991. – V. 66. – P. 1546.
- [104] Zhou, C. Two-dimensional two-layer channel flow near a step / C. Zhou, S. Kumar // Chemical Engineering Science. – 2012. – V. 81. – P. 38–45.

Публикации автора по теме диссертации

- [105] Замышляева, А.А. Голоморфные вырожденные полугруппы операторов и эволюционные уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах последовательностей / А.А. Замышляева, Дж.К. Аль Исави // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 31–40.
- [106] Zamyshlyeva, A.A. On some properties of solutions to one class of evolution Sobolev type mathematical models in quasi-Sobolev spaces / A.A. Zamyshlyeva, J.K.T. Al-Isawi // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 113–119.
- [107] Al-Isawi, Ja.K.T. On some properties of solutions to Dzektsler mathematical model in quasi-Sobolev spaces / Ja.K.T. Al-Isawi // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – V. 2, № 4. – P. 27–36.
- [108] Al-Isawi, Ja.K.T. On kernels and images of resolving analytic degenerate semigroups in quasi-sobolev spaces / Ja.K.T. Al-Isawi // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. – V. 3, № 1. – P. 10–19.
- [109] Al-Isawi, J.K.T. Computational experiment for one class of evolution mathematical models in quasi-Sobolev spaces / J.K.T. Al-Isawi, A.A. Zamyshlyeva // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 141–147.
- [110] Al-Isawi, J.K.T. Computational Experiments for One Class of Mathematical Models in Thermodynamics and Hydrodynamics / J.K.T. Al-Isawi // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2017. – V. 4, № 1. – P. 16–26.

Свидетельство о государственной регистрации программы

- [111] Аль Исави, Дж.К. Численное исследование одного класса эволюционных уравнений в квазисоболевых пространствах / Дж.К. Аль Исави. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2017610833, заявл. 24.11.2016; зарегистр. 18.01.2017, реестр программ для ЭВМ.

Тезисы и материалы конференций

- [112] Аль Исави, Дж.К. Линейные замкнутые операторы в квазибанаховых пространствах / Дж.К. Аль Исави // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2014". – Воронеж, 2014. – С. 18–21.
- [113] Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения соболевского типа с относительно p -секториальными операторами в квазибанаховых пространствах / Г.А. Свиридюк, Дж.К. Аль Исави // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. – М: МИАН, 2014. – С. 25.
- [114] Аль Исави, Дж.К. Об одном классе эволюционных уравнений соболевского типа в квазисоболевых пространствах последовательностей / Дж.К. Аль Исави // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2016". – Воронеж, 2016. – С. 47–50.
- [115] Аль Исави, Дж.К. Об инвариантных пространствах и экспоненциальных дихотомиях решений уравнения Дзекцера в квазисоболевых пространствах / Дж.К. Аль Исави // Сборник статей Международной научно-практической конференции "Приоритетные научные исследования и разработки (г. Саратов)". – Уфа: МЦИИ ОМЕГА САЙНС, 2016. – Ч. 2 – С. 3–4.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017610833

«Численное решение одного класса эволюционных уравнений в квазисобольевых пространствах»

Правообладатель: **Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» (ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)») (RU)**

Автор: **Аль Исави Джавад Кадим Тахир (IQ)**


Заявка № **2016662896**

Дата поступления **24 ноября 2016 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **18 января 2017 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

 **Г.П. Ивлиев**



г. 2016 - 83