

ФГБОУ ВПО «ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НИУ)

На правах рукописи

Боков Александр Викторович

Численные методы исследования математических
моделей геофизики и тепловой диагностики на основе
теории обратных задач

05.13.18 — Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор В.П. Танана

ЧЕЛЯБИНСК — 2014

Содержание

Введение	4
1 Математическое моделирование процессов, описываемых обратными задачами	30
1.1 Математическое моделирование гидродинамического исследования нефтяных пластов	30
1.1.1 Гидродинамическое исследование скважин как обратная коэффициентная задача	30
1.1.2 Единственность решения обратной задачи гидродинамики	36
1.2 Математическое моделирование тепловой диагностики технических объектов	53
1.2.1 Задача диагностики технических объектов, подверженных тепловым нагрузкам	53
1.2.2 Оценка точности приближённого решения обратной граничной задачи тепловой диагностики	55
1.3 Математическое моделирование процесса регистрации аномалии гравитационного поля	63
2 Численные методы решения нелинейных обратных задач	68
2.1 Методы регуляризации нелинейных обратных задач .	68

2.1.1	Общая постановка нелинейных обратных задач и метод регуляризации их решения	68
2.1.2	Обобщённый метод L-регуляризации в обратной задаче гидродинамики	77
2.1.3	Применение обобщённого метода L-регуляризации в обратной задаче потенциала	78
2.2	Аппроксимация регуляризованных решений	85
2.2.1	Аппроксимация регуляризованного решения операторного уравнения	85
2.2.2	Конечномерные аппроксимации при численном решении обратной задачи потенциала	89
2.2.3	Конечномерные аппроксимации при решении обратной задачи гидродинамики	90
3	Программный комплекс решения обратных задач геофизики и тепловой диагностики	103
3.1	Дискретные аналоги дифференциальных уравнений и алгоритмические конструкции	104
3.2	Программа численного исследования фильтрационной модели нефтяного пласта	117
3.3	Программа математического моделирования процесса регистрации аномалии гравитационного поля	119
3.4	Программа математического моделирования процесса тепловой диагностики технических объектов	129
	Заключение	132
	Список литературы	134
	ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Численные эксперименты	154

Введение

Актуальность темы. В научных исследованиях и инженерной практике достаточно часто приходится решать задачи, которые могут быть классифицированы как обратные для уравнений математической физики. Так, например, распределение температуры в некоторой области описывается уравнением теплопроводности. Если известны начальные и граничные условия, а также коэффициент теплопроводности, то значения температурного поля могут быть получены либо аналитически, либо приближённо в ходе численного эксперимента. Такая задача называется прямой для уравнения теплопроводности. Если же необходимо по некоторой информации о распределении температуры в области получить данные о коэффициенте теплопроводности или об отсутствующем граничном условии, то возникающая задача будет существенно отличаться от прямой. Такие задачи называются обратными (например, обратными коэффициентными или обратными граничными).

Принципиальным является то, что большинство обратных задач относится к классу некорректно поставленных, то есть таких, для которых не выполнено хотя бы одно из условий: решение существует в заданном классе функций, оно единственно и непрерывно зависит от исходных данных. Условия корректности были сформулированы Ж. Адамаром в начале XX века [125,126]. Для некорректно поставленных задач, возникающих в приложениях, как правило не

выполняется требование непрерывной зависимости решения от исходных данных. В результате малые изменения в исходных данных могут привести к значительным отклонениям найденного приближённого решения от точного.

Некоторые задачи математической физики, такие, например, как ретроспективные задачи теплопроводности и диффузии, задачи томографии, изначально формулируются как обратные. Тогда использование прямых методов недопустимо, поскольку приводит к большим ошибкам в решении, причём оценка уровня ошибки бывает несостоятельной. Кроме того методы теории некорректно поставленных задач имеют преимущества перед другими в том случае, когда исходные данные заданы с погрешностью, как это бывает при проведении физического эксперимента.

Основы теории обратных и некорректных задач были заложены в СССР, начиная с середины XX века. Всемирно признанными основоположниками теории некорректных задач являются академики А. Н. Тихонов [112, 113] и М. М. Лаврентьев [52, 54], а также член-корр. РАН В. К. Иванов [40–43].

Развитие вычислительной техники стимулировало интерес к данной проблематике. В настоящее время практически во всех разделах математики (включая алгебру, математический анализ, дифференциальные уравнения, математическую физику, функциональный анализ, вычислительную математику и т. д.), в физике, геофизике, медицине, астрономии и других областях знаний, в которых применимы математические методы исследований, изучаются такие задачи.

В современной математической литературе приводятся многочисленные примеры некорректных задач. К ним относятся интегральные уравнения первого рода, задача Коши для уравнения Ла-

пласа, и многие другие. Примерами некорректно поставленных задач являются и обратные задачи математической физики. В их числе можно указать обратную задачу Коши для уравнения теплопроводности, обратные граничные задачи тепло- и массообмена, обратные коэффициентные задачи, обратные задачи физики твёрдого тела, обратную задачу гравиметрии. Построение и обоснование методов решения таких обратных задач весьма актуально как с точки зрения теоретических исследований, так и с точки зрения многочисленных приложений.

Своё развитие теория некорректных задач получила в трудах А.Н. Тихонова [114], М.М. Лаврентьева [51], В.К. Иванова [44], в многочисленных работах других математиков: А.Л. Агеева [1–4], В.В. Арестова, В.Я. Арсенина [114], А.Б. Бакушинского [10–14], А.Л. Бухгейма, Г.М. Вайникко [16], В.В. Васина [18–29], Ф.П. Васильева [17], В.А. Винокурова [30–32], В.Б. Гласко [34, 116], А.В. Гончарского [35, 36], А.Р. Данилина [37, 38], А.М. Денисова [39], С.И. Кабанихина [45], А.С. Леонова [59–61], Ж.Л. Лионса и Р. Латтеса [56], О.А. Лисковца [63], Л.Д. Менихеса [66–69], В.А. Морозова [70–75], В.Г. Романова [78–80], В.Н. Страхова [84–86], В.П. Тананы [91–102], А.М. Федотова [117], Г.В. Хромовой, С.П. Шишатского [55], А.Г. Яголы [115], J.N. Franklin [123], J. Gullum [124], A. Melkman, C. Micchelli [128], K. Miller [129], D.L. Phillips, C. Vogel [130] и многих других.

В настоящее время, теория некорректных задач является источником общих методов решения многих научных и практических проблем естествознания и проектирования технических устройств, представляет собой одно из важнейших направлений современной прикладной математики, имеет строго обоснованный математический аппарат, позволяющий применять его к анализу моделей и

решению различных частных вопросов.

Изучением вопросов единственности решений обратных задач тепломассообмена, сравнением методов по точности, исследованием методов решения на оптимальность, построением численных методов решения с учётом погрешностей в исходных данных и оценкой погрешностей приближённых решений занимаются представители школы В.П. Тананы: Е.В. Табаринцева, Е.В. Дутикова, Н.М. Япарова, А.И. Сидикова, А.С. Кутузов, А.Б. Бредихина, и др.

Работы А.И. Сидиковой посвящены обоснованию и разработке метода проекционной регуляризации применительно к решению обратных граничных задач для уравнения теплопроводности (с граничными условиями первого и третьего рода) [82, 83], получению точных по порядку оценок погрешности для соответствующих приближённых решений [104], а также доказательству оптимальности по порядку этого метода [105].

Е.В. Табаринцева занимается разработкой алгоритмов приближённого решения линейных и полулинейных некорректно поставленных задач при условии разрывности их решений [90], изучением методов регуляризации некорректных задач, связанных дифференциально-операторными уравнениями в гильбертовом пространстве [87]. Также большое внимание уделяется построению устойчивых решений в обратной граничной задаче для параболического уравнения, получению точных по порядку оценок погрешности используемых методов [88, 89]. Для получения приближённых решений используются методы проекционной регуляризации и квазиобращения.

Е.В. Дутикова (Худышкина) в своих работах большое внимание уделяет решению обратных ретроспективных и граничных задач теплообмена [106, 107]. В частности, Е.В. Дутиковой была решена

обратная задача непрерывной разливки стали методом установления и получены оценки погрешности приближённого решения.

Н.М. Япарова занимается построением приближённых решений задач математической физики на основе методов регуляризации, например, на основе метода проекционной регуляризации с выбором параметра регуляризации по принципу невязки [108, 109]. Разработанные методы были применены Н.М. Япаровой для решения обратных задач физики твёрдого тела, тепломассопереноса (с граничными условиями первого рода) [120, 121], задачи оценки собственного состояния преобразователя температуры [122].

В работах А.С. Кутузова [49, 50] рассматривается обратная граничная задача для параболического уравнения (с неизвестным граничным условием первого рода) для случаев неподвижной и подвижной границы. Приближённое решение находится методами квазиобращения и проекционной регуляризации. В работах получены оценки погрешности приближённых решений.

В данной диссертационной работе для решения обратных задач применяются методы, основанные на методе регуляризации А.Н. Тихонова. Задача тепловой диагностики технических объектов рассматривается в постановке, которая ранее не рассматривалась в работах А.И. Сидиковой, А.С. Кутузова и др. Неизвестным является поток на нагруженной границе расчётной области, что приводит к обратной задаче теплопроводности с подвижной границей и граничным условием второго рода, подлежащим определению. Метод регуляризации для этой задачи существенно отличается от методов решения задач тепловой диагностики других представителей школы В.П. Тананы. В обратной задаче гравиметрии применён новый подход, заключающийся в использовании обобщённого метода L -регуляризации при более общих условиях на ре-

шение, чем это было ранее у других авторов (например, в работах В. Б. Гласко [34, 116], А. В. Цирульского [118, 119], П. С. Мартышко [65]). Для функции, описывающей границу области залегания пород, в случае двумерной задачи требование $z(\xi) \in W_2^1[-l, l]$ заменено более слабым: $z(\xi) \in L_2[-l, l]$, что позволило искать решения в широком классе функций. В книге В. В. Васина и А. Л. Агеева [22] отмечалось, что численные эксперименты подтверждают гипотезу о монотонности «оператора гравиметрии» на множестве $D_L = \{z(\xi) \in L_2[-l, l], z(\xi) \leq H - \varepsilon, \varepsilon > 0\}$, но теоретически этот факт не доказан. Для оценки параметров нефтяного пласта по данным гидродинамических исследований использован новый численный метод применительно к задаче в осесимметричной постановке, что позволило разработать эффективный численный алгоритм регуляризации.

Цель и задачи исследования. Целью данной работы является исследование математических моделей тепловой диагностики технических объектов, процесса регистрации аномалий гравитационного поля, гидродинамического исследования нефтяных пластов с последующей разработкой и обоснованием эффективных численных методов решения соответствующих обратных задач математической физики. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**.

1. В рамках рассматриваемых математических моделей осуществить переход от прямых задач к обратным, состоящим в определении либо неизвестного коэффициента гидропроводности (обратная задача фильтрации), либо неизвестной функции теплового потока (обратная граничная задача теплопроводности), либо формы границы раздела сред (обратная задача гравиметрии).

2. Разработать новые математические методы моделирования в задачах геофизики и тепловой диагностики. Исследовать адекватность математических моделей характеру изучаемых физических процессов.
3. Разработать эффективные численные методы и алгоритмы поиска приближённых решений с помощью методов теории некорректно поставленных задач, получить соответствующие оценки погрешности решений, которые позволили бы судить о степени надёжности полученных результатов.
4. Реализовать в виде комплекса программ для решения задач на компьютере разработанные численные методы и алгоритмы, провести вычислительные эксперименты на модельных примерах и проанализировать полученные результаты.

Методы исследования. В работе использовались методы вычислительной математики, математического моделирования, математической физики, функционального анализа, дифференциальных уравнений, теории обратных и некорректно поставленных задач, вариационного исчисления, теории оптимизации.

Научная новизна работы состоит в новом подходе к разработке качественных методов исследования математических моделей и вычислительных методов для решения ряда обратных задач математической физики.

1. Исследованы математические модели тепловой диагностики технических объектов, процесса регистрации аномалий гравитационного поля, гидродинамического исследования нефтяных пластов. Получены условия выполнения теоремы единственности решения соответствующей обратной коэффициентной задачи фильтрации и оценки точности приближённого ре-

шения обратной задачи тепловой диагностики восстановления потока на границе.

2. Приведено теоретическое обоснование применимости метода обобщённой L -регуляризации для нахождения приближённого решения в обратной задаче гравиметрии и в обратных коэффициентных задачах теплопроводности и фильтрации в пространстве L_2 . Доказана применимость метода конечномерной аппроксимации для нахождения регуляризованных решений применительно к решению обратных задач для уравнений фильтрации и теплопроводности.
3. На основе численных методов разработан и реализован на ЭВМ комплекс программ для проведения вычислительных экспериментов.

Теоретическая значимость. Предложен обобщённый метод L -регуляризации и конечномерной аппроксимации для решения нелинейных операторных уравнений. Получены оценки точности приближённого решения в обратной задаче тепловой диагностики. Исследован вопрос единственности решения обратной задачи нестационарной фильтрации. Разработаны и обоснованы новые численные методы решения обратной задачи гравиметрии.

Практическая значимость. Практическая значимость работы состоит в возможности применения разработанных математических моделей и созданного комплекса программ для решения задач исследования нефтяных пластов, тепловой диагностики технических объектов и изучения аномалий гравитационного поля. Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант р_урал_а № 10-01-96000).

Положения, выносимые на защиту.

1. Математическая модель определения коэффициента гидропроводности в задаче исследования нефтяных пластов. Теорема единственности решения обратной коэффициентной задачи фильтрации.
2. Оценка точности приближённого решения обратной граничной задачи тепловой диагностики. Аналитическое представление приближённых решений и оценка их погрешности.
3. Математическая модель определения запасов полезных ископаемых в геологоразведке по регистрируемой аномалии гравитационного поля, вызванной неоднородностью горных пород. Описание строения оператора, порождённого соответствующей обратной задачей гравиметрии.
4. Численные методы и алгоритмы решения указанных задач, в основе которых лежат методы L -регуляризации приближённых решений и конечномерной аппроксимации регуляризованных решений.
5. Комплекс программ, реализующих предложенные алгоритмы решения нелинейных обратных задач для проведения вычислительных экспериментов.

Полученные результаты соответствуют следующим областям исследования специальности:

1. разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (п. 1);
2. развитие качественных и приближённых аналитических методов исследования математических моделей (п. 2);

3. реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента (п. 4).

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично. Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждается согласием между теоретическими положениями и результатами вычислительных экспериментов, проведённых в данной работе и исследованиях других авторов.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на Международной Школе-конференции «Обратные задачи: теория и приложения» (г. Ханты-Мансийск, 11–19 августа 2002 года), на Международной конференции «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» (ААНЗ-2011), посвящённой памяти В.К. Иванова (г. Екатеринбург, 31 октября – 5 ноября 2011 года), на Международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвящённой 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева (г. Новосибирск, 5–12 августа 2012 года), а также на научных семинарах ЮУрГУ и ЧелГУ.

Публикации по теме диссертации. По теме диссертации опубликовано 13 работ, из них 2 свидетельства Роспатента о государственной регистрации программ для ЭВМ. 3 работы опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК, из которых одна в издании, удовлетворяющем достаточному условию включения в Перечень ВАК (входящем в систему цитирования “Scopus”).

Структура и объём работы Диссертация состоит из введе-

ния, трёх глав, списка литературы и приложения, изложена на 161 странице. Библиографический список содержит 120 наименований.

Краткое содержание диссертации

Первая глава посвящена исследованию некоторых математических моделей технологических процессов и физических явлений, рассматриваемых в рамках практических проблем, сводящихся к нелинейным обратным задачам. Исследуются свойства этих моделей, решаются вопросы единственности решения и обоснования методов регуляризации нелинейных операторных уравнений.

В параграфе 1.1 рассматривается задача математического моделирования процесса гидродинамического исследования нефтяных пластов.

Ряд условий позволяет сформулировать задачу определения коэффициента гидропроводности как обратную нелинейную задачу гидродинамики. Процесс нестационарной фильтрации жидкости к одиночной скважине в осесимметричном случае описывается уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma(\rho) \frac{\partial p}{\partial \rho} \right], \quad (0.1)$$

где $p = p(\rho, t)$ — давление в пласте, $\sigma = \sigma(\rho)$ — коэффициент гидропроводности, t — время, ρ — полярный радиус, $t \geq 0$, $0 < r_0 \leq \rho \leq \bar{r}$. Сделаем следующие предположения:

а) известно начальное давление в пласте

$$p(\rho, 0) = p_0; \quad (0.2)$$

б) на границе пласта выполняется условие «непротекания»

$$\frac{\partial p(\bar{r}, t)}{\partial \rho} = 0, \quad t \geq 0; \quad (0.3)$$

в) известно забойное давление

$$p(r_0, t) = f_1(t), \quad t \geq 0. \quad (0.4)$$

г) коэффициент гидропроводности $\sigma(\rho)$ удовлетворяет условию

$$\sigma(\rho) \geq d > 0 \quad \text{при} \quad \rho \in [r_0, \bar{r}]. \quad (0.5)$$

Задачу (0.1) – (0.4) называют прямой задачей фильтрации. При известной функции $\sigma(\rho)$, удовлетворяющей условию (0.5), и при дополнительных предположениях о гладкости функций $\sigma(\rho)$, $f_1(t)$ и $p(\rho, t)$ эта задача имеет единственное решение.

В данном диссертационном исследовании рассматривается задача определения неизвестного коэффициента $\sigma(\rho)$ в уравнении (0.1) по дополнительной информации о решении задачи (0.1) – (0.4). Это существенно отличает её от аналогичных задач, рассмотренных в работах А. М. Денисова и С. И. Кабанихина [39, 45].

Предположим, что задан дебит скважины

$$\frac{\partial p(r_0, t)}{\partial \rho} = g(t), \quad (0.6)$$

где $g(t)$ — ограниченная и непрерывная функция, $t \geq 0$.

Так как при неизвестной функции $\sigma(\rho)$ решение $p(\rho, t)$ задачи (0.1) – (0.4) также неизвестно, то обратную задачу сформулируем как задачу определения двух функций $\sigma(\rho)$ и $p(\rho, t)$, удовлетворяющих условиям (0.1) – (0.6).

Сделав в уравнениях (0.1) – (0.6) замену переменной $u(\rho, t) = p(\rho, t) - p_0$, перейдем к новой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma(\rho) \frac{\partial u}{\partial \rho} \right], \quad (0.7)$$

$$u(\rho, 0) = 0, \quad (0.8)$$

$$\frac{\partial u(\bar{r}, t)}{\partial \rho} = 0, \quad (0.9)$$

$$u(r_0, t) = f(t), \quad (0.10)$$

$$\frac{\partial u(r_0, t)}{\partial \rho} = g(t), \quad (0.11)$$

где $0 < r_0 \leq \rho \leq \bar{r}$, $t \geq 0$, $f(t) = f_1(t) - p_0$. Будем предполагать, что функция $f(t) \in C^2[0, \infty)$ удовлетворяет условиям

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f(t) = 0 \text{ при } t \geq t_0, \quad f(t) \neq 0 \text{ при } t \geq 0, \quad (0.12)$$

а функция $\sigma(\rho)$ удовлетворяет условию (0.5) и

$$\sigma(\rho) \in C^2[r_0, \bar{r}]. \quad (0.13)$$

Определение 0.0.1. Будем говорить, что пара функций $\{\sigma(\rho), u(\rho, t)\}$ принадлежит классу K_1 , если выполнены следующие условия:

1. $\sigma(\rho) \in C^2[r_0, \bar{r}]$, $\sigma(\rho) \geq d > 0$ при $\rho \in [r_0, \bar{r}]$;
2. $u(\rho, t), u'_\rho(\rho, t) \in C([r_0, \bar{r}] \times [0, \infty))$, $u''_{\rho\rho}(\rho, t), u'_t(\rho, t) \in C((r_0, \bar{r}) \times (0, \infty))$;
3. $u(\rho, 0) = 0$, $u_\rho(\bar{r}, t) = 0$, $u(r_0, t) = f(t)$, $u_\rho(r_0, t) = g(t)$.

Определение 0.0.2. Решением обратной задачи (0.7)–(0.11) назовём пару функций $\sigma(\rho)$ и $u(\rho, t)$, удовлетворяющих уравнению (0.7) в классе K_1 .

Следующая теорема определяет достаточные условия единственности решения обратной задачи (0.7)–(0.11).

Теорема 0.0.1. *Предположим, что функция $f(t)$ удовлетворяет условиям (0.12). Тогда, если $\sigma_i(\rho)$ и $u_i(\rho, t)$, $i = 1, 2$ – решения обратной задачи (0.7)–(0.11) такие, что*

$$\sigma'_1(\bar{r}) = \sigma'_2(\bar{r}) = \sigma'_1(r_0) = \sigma'_2(r_0) = 0,$$

$$\sigma_1(r_0) = \sigma_2(r_0) = \sigma_1(\bar{r}) = \sigma_2(\bar{r}),$$

а также

$$\int_{r_0}^{\bar{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma_1(\xi)}} = \int_{r_0}^{\bar{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma_2(\xi)}},$$

то $\sigma_1(\rho) = \sigma_2(\rho)$ и $u_1(\rho, t) = u_2(\rho, t)$ для всех $\rho \in [r_0, \bar{r}]$ и $t \geq 0$.

В параграфе 1.2 рассматривается задача математического моделирования процесса тепловой диагностики технического объекта.

Информация о температуре и тепловом потоке в камере сгорания двигателя играет важную роль и позволяет эффективно управлять его работой. Ввиду очень высокой температуры внутри камеры её непосредственное измерение невозможно. Поэтому температурное поле измеряют внутри стенки камеры, а затем, решая обратную задачу теплопроводности, численно определяют температурные параметры внутри камеры.

Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее процесс теплопроводности в стенке камеры,

$$\frac{\partial T(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(y, t)}{\partial y^2}, \quad (0.14)$$

где $t \geq 0$, $y \in [0, h(t)]$, $h(0) = y_0$, $h(t) = y_1$ при $t \geq t_0 > 0$, $y_1 \leq y_0$, и функция $h(t)$ непрерывная и строго убывающая на отрезке $[0, t_0]$. Пусть начальные и граничные условия имеют вид:

$$T(y, 0) = 0, \quad y \in [0, y_0], \quad (0.15)$$

$$T(0, t) + k_0 T'_y(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (0.16)$$

где k_0 — заданное отрицательное число,

$$T(y_2, t) = g(t), \quad y_2 \in (0, y_1), \quad t \geq 0, \quad (0.17)$$

$$\frac{\partial T(h(t), t)}{\partial y} = z(t), \quad t \geq 0, \quad (0.18)$$

где $z(t) \in C^2[0, \infty)$ и

$$z(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \geq t_0. \quad (0.19)$$

В данном диссертационном исследовании функция $g(t)$ считается известной, а функцию $z(t)$ требуется определить. Обратная задача (0.14)–(0.18) является некорректно поставленной задачей определения теплового потока на подвижной границе.

Замечание 0.0.1. В работах [49, 50] решалась обратная задача нахождения температуры на границе области. При этом в указанных работах рассматривалась область с неподвижной границей, а задача заключалась в нахождении температуры, а не теплового потока. Указанные различия обусловили достаточно существенные различия в методах решения задач, в частности в выборе классов корректности.

Считаем, что при точном значении $g_0(t) \in L_2[0, \infty)$ существует решение $T_0(y, t)$ задачи (0.14)–(0.16), (0.18) такое, что $T_0(h(t), t) = g_0(t)$, $t \geq 0$, а функция $z_0(t) = \frac{\partial T_0(h(t), t)}{\partial y}$ принадлежит классу корректности M_r , где

$$M_r = \left\{ z_0 : z_0 \in C^1[0, \infty), \|z_0\|_{L_2}^2 + \|z_0'\|_{L_2}^2 \leq r^2, \right. \\ \left. \|T_0(h(t), t)\|_{L_2}^2 + \left\| \frac{\partial T_0(h(t), t)}{\partial t} \right\|_{L_2}^2 \leq r^2 \right\}. \quad (0.20)$$

Далее в работе будем полагать, что функция $g_0(t)$ нам не известна, а вместо неё даны некоторое приближение $g_\delta(t)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\|g_0 - g_\delta\|_{L_2} \leq \delta. \quad (0.21)$$

Полученная в работе оценка точности по порядку приближённого решения $z_\delta(t)$ имеет вид:

$$\|z_\delta(t) - z_0(t)\|_{L_2} \leq C_7 \ln^{-2} \delta,$$

где $\delta \in (0, \delta_0]$, а $C_7 > 0$ — некоторое число, не зависящее от δ .

В параграфе 1.3 рассматривается задача математического моделирования процесса регистрации аномалии гравитационного поля, вызванной неоднородностью горных пород.

Пусть на поверхности Земли $z = 0$ измеряется изменение потенциала гравитационного поля, вызванное наличием в однородной среде плотности ρ_0 области T с плотностью $\rho_1 \neq \rho_0$. Из-за погрешности измерений получение точных данных о возмущениях гравитационного поля невозможно, вместо них известны приближённые значения и погрешность приближения. Обратная задача состоит в получении наиболее точного представления о форме области T по полученным возмущениям гравитационного поля Земли.

В двумерном случае обратная задача гравиметрии сводится к решению нелинейного интегрального уравнения

$$K(z(x)) \equiv \frac{\Delta\rho}{4\pi} \int_{-l}^l \ln \frac{(x - \xi)^2 + H^2}{(x - \xi)^2 + (H - z(\xi))^2} d\xi = \Delta g(x), \quad (0.22)$$

где $T = \{-l \leq \xi \leq l, -H \leq z \leq -H + z(\xi)\}$ — область распределения источников гравитационного поля, вызывающих изменение соответствующего потенциала, $z(\xi) \in L_2[-l, l]$ — верхняя граница области T , $\Delta g(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ — измеряемая аномалия силы тяжести на поверхности $z = 0$.

Преобразуем уравнение (0.22) к виду

$$Az = f(x), \quad (0.23)$$

где

$$\begin{aligned} Az &= \int_{-l}^l \ln \left((x - \xi)^2 + (H - z(\xi))^2 \right) d\xi, \\ f(x) &= -\frac{4\pi}{\Delta\rho} \Delta g(x) + \int_{-l}^l \ln (H^2 + (x - \xi)^2) d\xi. \end{aligned} \quad (0.24)$$

Оператор A действует из пространства $L_2[-l, l]$ в $L_2(-\infty, +\infty)$. При этом считаем, что функция $f(x)$ нам известна, а $z(\xi)$ требуется найти.

Предположим, что при $f(x) = f_0(x)$ уравнение (0.23) разрешимо, но точное значение $f_0(x)$ нам неизвестно. Вместо него даны δ -приближение $f_\delta(x)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \leq \delta$. Требуется по исходной информации (f_δ, δ) определить множество приближённых решений M_δ такое, что

$$M_\delta \xrightarrow{\beta} M_0 \text{ при } \delta \rightarrow 0,$$

где M_0 — множество точных решений z_0 уравнения (0.23) при правой части $f(x) = f_0(x)$ (определение β -сходимости будет дано ниже). Используя подход, предложенный в работе [98] представим оператор A в виде суперпозиции двух операторов

$$A = B \circ L, \quad (0.25)$$

где B действует из $L_2([-l, l] \times (-\infty, +\infty))$ в $L_2(-\infty, +\infty)$ и определяется формулой

$$Bv = \int_{-l}^l v(\xi, x) d\xi, \quad (0.26)$$

а оператор L действует из $L_2[-l, l]$ в $L_2([-l, l] \times (-\infty, +\infty))$, имеет область определения

$$D(L) = \{z \mid z \in L_2[-l, l], 0 \leq z(\xi) < H\}$$

и определяется формулой

$$Lz = v(\xi, x) = \ln \left((x - \xi)^2 + (H - z(\xi))^2 \right). \quad (0.27)$$

Таким образом, оператор A в уравнении (0.23) может быть представлен суперпозицией двух операторов, один из которых, B , определяемый формулой (0.26), линеен и ограничен, а второй, L , определяемый формулой (0.27), слабо-сильно замкнут (определение будет дано ниже) и имеет непрерывный обратный.

Во **второй главе** обосновываются численные методы решения обратных задач, рассмотренных в первой главе. Для каждой задачи разрабатывается алгоритм решения на основе конечномерных аппроксимаций регуляризованных решений.

В параграфе 2.1 для нелинейной обратной задачи даётся общая постановка метода регуляризации её решения. Рассматривается обобщённый метод L -регуляризации применительно к обратной задаче гидродинамики.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — оператор с областью определения $D(A) \subset H$ и множеством значений $R(A) \subset H$.

Определение 0.0.3. ([97]) Оператор A будем называть слабо полузамкнутым, если из того, что $u_n \xrightarrow{\text{сл}} \hat{u}$, а $Au_n \xrightarrow{\text{сл}} \bar{f}$ следует, что существует элемент $\bar{u} \in D(A)$ такой, что $A\bar{u} = \bar{f}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \geq \|\bar{u}\|$.

Определение 0.0.4. ([92]) Оператор A будем называть слабо-сильно замкнутым, если из того, что $u_n \xrightarrow{\text{сл}} \hat{u}$, а $Au_n \rightarrow \bar{f}$ следует, что $\hat{u} \in D(A)$ и $A\hat{u} = \bar{f}$.

Определение 0.0.5. ([41]) Будем говорить, что последовательность множеств $\{M_n\}$ из метрического пространства X β -сходится к множеству $M_0 \subset X$, если $\beta(M_n, M_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где $\beta(M_n, M_0) = \sup \left\{ \rho(x, M_0) : x \in M_n \right\}$.

Введём обозначение для β -сходимости множеств $\{M_n\}$ к множеству M_0 :

$$M_n \xrightarrow{\beta} M_0.$$

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \tag{0.28}$$

где $u \in D(A)$, $f \in H$. Предположим, что при $f = f_0$ оно разрешимо, но точное значение правой части f_0 уравнения (2.1.1) нам не известно. Будем считать, что вместо f_0 даны приближённое значение f_δ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \leq \delta$.

Требуется по исходным данным $\{f_\delta, \delta\}$ построить приближённое решение u_δ , близкое к точному решению $M_0 = \{\bar{u}_0 : A\bar{u}_0 = f_0\}$ уравнения (2.1.1) при $f = f_0$. Метод регуляризации заключается в сведении поставленной задачи к вариационной:

$$\inf \left\{ \|Au - f_\delta\|^2 + \alpha \|u\|^2 : u \in D(A) \right\}, \tag{0.29}$$

где $\alpha > 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 0.0.2. *Если оператор A слабо полузамкнут, то вариационная задача (0.29) разрешима.*

В случае произвольного оператора A вариационная задача (0.29) может не иметь решений. Тогда метод регуляризации к решению операторного уравнения (0.28) неприменим.

Обобщение метода регуляризации заключается в том, что вместо элементов, минимизирующих функционал

$$\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|u\|^2, \quad (0.30)$$

в качестве приближённых решений уравнения (0.28) берутся элементы, на которых значение функционала (0.30) сколь угодно близко к нижней границе.

В дальнейшем приближённым решением уравнения (0.28), полученным методом обобщённой регуляризации, будем называть следующее множество $M_{\delta,\varepsilon}^\alpha$:

$$M_{\delta,\varepsilon}^\alpha = \{\bar{u} \mid \bar{u} \in D(A), \|A\bar{u} - f_\delta\|^2 + \alpha\|\bar{u}\|^2 \leq r_\delta^\alpha + \varepsilon\}, \quad (0.31)$$

где $r_\delta^\alpha = \inf \{\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in D(A)\}$, а $\varepsilon > 0$.

Пусть U , F и G — сепарабельные гильбертовы пространства, а A и L — слабо замкнутые операторы с областями определения $D(A), D(L) \subset U$ и множествами значений $R(A) \subset F$, $R(L) \subset G$. При этом предположим, что $D(A) \cap D(L) \neq \emptyset$.

Метод L -регуляризации заключается в сведении задачи (0.28) к вариационной:

$$\inf \left\{ \|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|Lu\|^2 : u \in D(A) \cap D(L), \alpha > 0 \right\}, \quad (0.32)$$

Множество решений вариационной задачи (0.32) обозначим через $M_L^\alpha(\delta)$ и будем называть приближённым решением уравнения (0.28), полученным методом L -регуляризации. Так как вариационная задача (0.32) при общих предположениях об операторах A и L может не иметь решения, множество приближённых решений $M_{\delta}^{\alpha,\varepsilon}$ уравнения (0.28) определим формулой

$$\begin{aligned} M_{\delta}^{\alpha,\varepsilon} &= \{\bar{u} \mid \bar{u} \in D, \|A\bar{u} - f_\delta\|^2 + \alpha\|L\bar{u}\|^2 \leq \\ &\leq \inf[\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|Lu\|^2 : u \in D] + \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (0.33)$$

В работе обобщённый метод L -регуляризации был применён к решению обратной задачи гравиметрии и к решению обратной задачи (0.7)–(0.11). В частности, была доказана сходимость метода регуляризации в задаче определения коэффициента гидропроводности пласта при условии $\sigma(\rho) \in L_2[r_0, \bar{r}]$.

В параграфе 2.2 изучаются вопросы конечномерной аппроксимации регуляризованных решений при численной реализации обратных задач.

Определение 0.0.6. Последовательность операторов $\{A_n\}$ будем называть A -полной, если для любого элемента $u \in D(A)$ найдётся последовательность $\{u_n\}$ такая, что при всяком значении n $u_n \in D(A)$, $u_n \rightarrow u$, а $A_n u_n \rightarrow Au$ при $n \rightarrow \infty$.

Определение 0.0.7. Пару $A, \{A_n\}$ будем называть слабо полужамкнутой, если из того, что последовательность $\{u_n\}$ ограничена, а $A_n u_n \xrightarrow{\text{сл}} \bar{f}$ следует, что существует элемент $\bar{u} \in D(A)$ такой, что $A\bar{u} = \bar{f}$ и $\|\bar{u}\| \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|$.

Определение 0.0.8. Пару $A, \{A_n\}$ будем называть слабо-сильно замкнутой, если из того, что $u_n \xrightarrow{\text{сл}} \hat{u}$, а $A_n u_n \rightarrow \bar{f}$, следует, что $\hat{u} \in D(A)$ и $A\hat{u} = \bar{f}$.

Наряду с вариационной задачей для операторного уравнения (0.28) рассмотрим также вариационную задачу

$$\inf \left\{ \left\| A_n u - f_\delta^{(n)} \right\|^2 + \alpha \|u\|^2 : u \in D(A_n) \right\}, \quad (0.34)$$

где $\alpha > 0$. Если предположить слабую полужамкнутость операторов A и A_n , то вариационные задачи (0.29) и (0.34) будут разрешимы. Обозначим решение задачи (0.34) через $M_\delta^{\alpha, n}$.

Теорема 0.0.3. Пусть $f_\delta^{(n)} \rightarrow f_\delta$, последовательность операторов $\{A_n\}$ является A -полной, а для любой подпоследовательности $\{A_{n_k}\}$ пара $A, \{A_{n_k}\}$ слабо полужамкнута и слабо-сильно замкнута. Тогда имеет место β -сходимость аппроксимаций $M_\delta^{\alpha, n}$ к регуляризованному решению M_δ^α .

В случае применения обобщённого метода L -регуляризации при определённых условиях также имеет место сходимость аппроксимированных решений к регуляризованному. Согласно утверждению из работы [95], если $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ выбрать такими, что

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \varepsilon(\delta) \rightarrow 0, \quad \frac{\delta^2 + \varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$$

при $\delta \rightarrow 0$, то будет иметь место β -сходимость приближённых решений $M_\delta^{\alpha(\delta), \varepsilon(\delta)}$ к множеству точных решений M_0 уравнения (0.28), отвечающих значению правой части $f(t) = f_0(t)$:

$$M_\delta^{\alpha(\delta), \varepsilon(\delta)} \xrightarrow{\beta} M_0.$$

Воспользуемся конечномерными аппроксимациями регуляризованных решений в задачах регистрации аномалии гравитационного поля и гидродинамического исследования пластов. Так, для решения задачи (0.23)–(0.24) сначала разобьём отрезок $[-l, l]$ на n равных частей $-l = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = l$, с шагом $\Delta\xi = \frac{2l}{n}$. Обозначим отрезок разбиения $\Delta_i = [\xi_i, \xi_{i+1}]$. В качестве конечномерного подпространства U_n рассмотрим пространство кусочно-постоянных на $[-l, l]$ функций $z \in U_n \Leftrightarrow z(\xi) = \{z_i \text{ при } \xi \in \Delta_i, i = 0, 1, \dots, n-1\}$. При этом, используя такую последовательность конечномерных подпространств U_n пространства $L_2[-l, l]$, получаем выполнение следующего условия: $D(L) \cap U_n \neq \emptyset$ для

любого n и

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D(L) \cap U_n} = D(L).$$

Бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$ заменим конечным отрезком $[-s, s]$ и разобьем его на m равных частей ($m \geq n$) с шагом $\Delta x = \frac{2s}{m}$, подобрав число s так, чтобы $\Delta x = \Delta \xi$, и чтобы точки разбиения отрезка $[-s, s]$ совпадали с точками разбиения отрезка $[-l, l]$:

$$\begin{aligned} -s = x_0 < x_1 < \dots < x_j = \xi_0 = -l < x_{j+1} = \xi_1 < \\ < \dots < x_{j+n} = \xi_n = l < x_{j+n+1} < \dots < x_m = s. \end{aligned}$$

Таким образом вариационная задача (0.32) сводится к конечно-мерной:

$$\begin{aligned} \inf \left\{ \int_{-s}^s \left[\frac{2l}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left((x - \xi_i)^2 + (H - z_i)^2 \right) - f_{\delta}^n(x) \right]^2 dx + \right. \\ \left. + \alpha \int_{-s}^s \frac{2l}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln^2 \left((x - \xi_i)^2 + (H - z_i)^2 \right) dx \right\}, \quad (0.35) \end{aligned}$$

где $f_{\delta}^n(x) \rightarrow f_{\delta}(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим множество решений задачи (0.35) через $M_{\delta,n}^{\alpha}$. Тогда, как следует из теоремы 0.0.3, для любого $\varepsilon > 0$ имеет место β -сходимость аппроксимаций $M_{\delta,n}^{\alpha}$ к регуляризованному решению $M_{\delta}^{\alpha,\varepsilon}$: $M_{\delta,n}^{\alpha} \rightarrow M_{\delta}^{\alpha,\varepsilon}$ при $n \rightarrow \infty$.

Для реализации алгоритма решения интегралы в (0.35) аппроксимировались посредством квадратурных формул прямоугольников. При этом вариационная задача (0.35) заменялась задачей

$$\inf \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} F_j(z) \Delta x \right\}, \quad (0.36)$$

где

$$F_j(z) = \left(\Delta\xi \sum_{i=0}^{n-1} \ln((x_j - \xi_i)^2 + (H - z_i)^2) - f_\delta(x_j) \right)^2 + \\ + \alpha \Delta\xi \sum_{i=0}^{n-1} \ln^2((x_j - \xi_i)^2 + (H - z_i)^2).$$

Третья глава посвящена разработке комплекса программ численного решения описанного класса обратных задач математической физики. Обсуждаются вопросы построения разностных аналогов дифференциальных уравнений и вычисления специфических конструкций, необходимых для реализации алгоритмов решения обратных задач. Приводится структура программного комплекса и результаты проведённых численных экспериментов. Производится их сравнение с результатами других авторов.

В параграфе 3.1 даётся описание реализуемых алгоритмов и итерационных методов. Для численного решения задачи поиска минимума функционала применялись и сравнивались между собой с точки зрения эффективности и скорости сходимости градиентные, квазиньютоновские методы и методы сопряжённых градиентов.

В качестве основного метода для нахождения минимума функционала $F(z) = \|Az - f_\delta\|^2 + \alpha\|Lz\|^2$ в обратной задаче потенциала был применён градиентный метод, подобный описанному в [24]. Использовалась итерационная схема:

$$z^{k+1} = z^k - \beta_k \cdot S(z^k),$$

где

$$S(z^k) = \frac{1}{2}F'(z^k) = (A'(z^k))^*(A(z^k) - f_\delta) + \alpha(L'(z^k))^*L(z^k).$$

Условием останова итераций являлось выполнение для заданного

уровня погрешности ε неравенства

$$\Delta^k = \frac{\|A(z^k) - f_\delta\|_{L_2[-l,l]}^2}{\|f_\delta\|_{L_2[-l,l]}^2} < \varepsilon. \quad (0.37)$$

Выбор параметра β_k осуществлялся в соответствии с методом наискорейшего спуска

$$\beta_k = \frac{\|S(z^k)\|_{L_2[-l,l]}^2}{\|A'(z^k)S(z^k)\|_{L_2[-l,l]}^2},$$

Величина относительной невязки Δ^k служила также показателем качества решения задачи восстановления искомой границы.

Результаты, полученные методом наискорейшего спуска сравнивались с приближёнными решениями, полученными другими методами. В работах [6, 7, 23] для решения задачи применялся итеративно регуляризованный метод Ньютона. После аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам уравнение (0.23) заменялось системой нелинейных уравнений

$$A_j z = f_j(x), \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Вместо задачи (0.36) решается система

$$\inf \{F_j(z)\}, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

К каждому уравнению системы применяется итерационный метод Ньютона.

Кроме того, при численном решении обратной задачи потенциала применялся метод [5], который является комбинацией метода сопряжённых градиентов и итеративно регуляризованного метода Ньютона.

Следующая часть главы посвящена разработке программ математического моделирования исследования нефтяных пластов, регистрации аномалий гравитационного поля, тепловой диагностики

технических объектов, а также обсуждению численных экспериментов.

В **заключении** приводятся основные выводы по теме диссертации, обсуждаются перспективы применения полученных результатов в практических исследованиях и перспективы дальнейшей работы в выбранном направлении.

Глава 1

Математическое моделирование процессов, описываемых обратными задачами

1.1 Математическое моделирование гидродинамического исследования нефтяных пластов

1.1.1 Гидродинамическое исследование скважин как обратная коэффициентная задача

Оценка запасов нефти нового месторождения проводится специалистами геологических служб и нефтеразведочных экспедиций на основании геофизических, гидродинамических, дебитометрических и термодинамических исследований пластов.

При вводе в разработку нефтяного месторождения одна за другой выходят из консервации разведочные скважины, вступают в эксплуатацию вновь пробуренные. Многие скважины часто останавливаются для исследования или других целей. Производимые многочисленными пусками, остановками, сменами режима мощные

возмущения пласта осложняют получение качественных результатов при обычных методах исследования. Возникает необходимость в таких методах исследования, применение которых не мешает работе других скважин, и которые, напротив, используют производимые ими возмущения.

Наиболее эффективными методами исследования нефтяных пластов, получившими широкое распространение на промыслах, являются методы гидродинамического исследования скважин, которые позволяют оценивать продуктивные и фильтрационные параметры пласта (пластовое давление, гидропроводность, проницаемость и т. д.) вблизи исследуемой скважины, а также в удалённой от неё зоне. Исследования проводят как на установившихся режимах (метод снятия индикаторных диаграмм), так и на неуставившихся режимах (метод кривой восстановления давления в эксплуатационных и нагнетательных скважинах, метод кривой восстановления уровней, гидропрослушивание, импульсные методы и др.). Применяемые методы в комплексе позволяют определить качественно и количественно гидродинамическую связь между скважинами и пластами и оценить неоднородность пласта.

Существующие методики зачастую направлены на определение гидропроводности нефтеносного пласта и продуктивности скважин по данным их кратковременной эксплуатации.

Исследование методом кривой восстановления давления заключается в регистрации изменения давления в одиночной скважине, которая была закрыта после кратковременной работы с известным дебитом (дебит — объём нефти, добываемой из скважины за единицу времени) или после установившегося отбора нефти из скважины.

Другим методом исследования скважин при неуставившемся режиме фильтрации, получившим широкое распространение на

промыслах, является метод гидропрослушивания, который позволяет более правильно определить фильтрационные параметры пласта на значительном расстоянии от исследуемой скважины.

Метод гидропрослушивания заключается в наблюдении за изменением пластового давления или статического уровня в простаивающих (реагирующих) скважинах, происходящим при смене режима работы окружающих эксплуатационных (возмущающих или нагнетательных) скважин, пробуренных на один и тот же пласт. Скорость реагирования скважины в процессе прослушивания пласта зависит от литолого-физических свойств пласта и физико-химических характеристик жидкости. При пуске, например, нагнетательной скважины давление вокруг неё начинает увеличиваться. Процесс перераспределения давления распространяется от данной скважины во все стороны в виде импульса давления. Дойдя до простаивавшей (или действующей на установившемся режиме) скважины, эта волна повышает давление в районе, окружающем реагирующую скважину, что фиксируется регистрирующей аппаратурой. Возмущения в пласте возникают при изменении отбора жидкости (нефти) из скважины, то есть при изменении дебита скважины.

Существуют различные варианты проведения испытаний в рамках данного метода: однократное изменение дебита скважины на постоянную величину, однократное изменение дебита произвольным образом, многократное (гармоническое) изменение дебита.

По данным испытаний строятся кривые реагирования, которые затем обрабатываются графоаналитически или другими способами.

Для обработки результатов измерений используют различные методы, в частности те, которые основаны на численном решении прямых и обратных задач фильтрации. При решении задачи нахождения коэффициента гидропроводности численными методами

необходимо учитывать особенности задач подземной гидромеханики. Эти особенности нужно учитывать при составлении математической модели рассматриваемого процесса и при разработке алгоритмов её численного решения.

Исходными для обработки данными, полученными в результате применения методов гидродинамического исследования, являются:

- графики работы скважин (дебит, продолжительность работы на режимах, продолжительность остановок);
- первоначальные и текущие пластовые давления, приведённые к единой отметке (начальному положению поверхности водонефтяного контакта, ВНК);
- продолжительность остановки скважины для замера текущего пластового давления.

Ряд условий позволяет сформулировать задачу определения коэффициента гидропроводности как обратную нелинейную задачу гидродинамики.

Процесс нестационарной фильтрации жидкости к одиночной скважине в осесимметричном случае описывается уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma(\rho) \frac{\partial p}{\partial \rho} \right], \quad (1.1.1)$$

где $p = p(\rho, t)$ — давление в пласте, $\sigma = \sigma(\rho)$ — коэффициент гидропроводности, t — время, ρ — полярный радиус.

Решение уравнения (1.1.1), функцию $p(\rho, t)$, ищем в области изменения переменных $(\rho, t) : t \geq 0, 0 < r_0 \leq \rho \leq \bar{r}$.

Сделаем следующие предположения:

- а) известно начальное давление в пласте

$$p(\rho, 0) = p_0; \quad (1.1.2)$$

б) на границе пласта выполняется условие «непротекания»

$$\frac{\partial p(\bar{r}, t)}{\partial \rho} = 0, \quad t \geq 0; \quad (1.1.3)$$

в) известно забойное давление

$$p(r_0, t) = f_1(t), \quad t \geq 0. \quad (1.1.4)$$

Предположим, что коэффициент гидропроводности $\sigma(\rho)$ удовлетворяет условию

$$\sigma(\rho) \geq d > 0 \quad \text{при} \quad \rho \in [r_0, \bar{r}]. \quad (1.1.5)$$

Задачу (1.1.1)–(1.1.4) называют прямой задачей фильтрации. При известной функции $\sigma(\rho)$, удовлетворяющей условию (1.1.5), и при дополнительных предположениях о гладкости функций $\sigma(\rho)$, $f_1(t)$ и $p(\rho, t)$ эта задача имеет единственное решение.

В данной работе обратная задача заключается в определении неизвестного коэффициента $\sigma(\rho)$ в уравнении (1.1.1) по дополнительной информации о решении задачи (1.1.1)–(1.1.4).

Предположим, что нам известен дебит скважины

$$\frac{\partial p(r_0, t)}{\partial \rho} = g(t), \quad (1.1.6)$$

где $g(t)$ — ограниченная и непрерывная функция, $t \geq 0$.

Так как при неизвестной функции $\sigma(\rho)$ решение $p(\rho, t)$ задачи (1.1.1)–(1.1.4) также неизвестно, то обратную задачу сформулируем как задачу определения двух функций $\sigma(\rho)$ и $p(\rho, t)$, удовлетворяющих условиям (1.1.1)–(1.1.6).

Замечание 1.1.1. Исследованию обратных коэффициентных задач посвящено большое количество работ. Особое внимание при

этом уделяется доказательству сходимости метода решения и формулировке условий, обеспечивающих существование и единственность решения. Аналогичные задачи изучались, например, в работах А. М. Денисова [39], а также С. И. Кабанихина [45]). В [45] рассматривалось уравнение несколько более общего вида

$$u_t - (k(x)u_x)_x + q(x)u = 0,$$

с коэффициентами $k(x)$ и $q(x)$, один из которых, $q(x)$, требовалось определить при условии, что другой известен. В данном диссертационном исследовании неизвестна функция $\sigma(\rho)$, аналог $k(x)$, что существенно отличает задачу (1.1.1) – (1.1.6) от указанных.

Сделав в уравнениях (1.1.1) – (1.1.6) замену переменной $u(\rho, t) = p(\rho, t) - p_0$, перейдем к новой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma(\rho) \frac{\partial u}{\partial \rho} \right], \quad (1.1.7)$$

$$u(\rho, 0) = 0, \quad (1.1.8)$$

$$\frac{\partial u(\bar{r}, t)}{\partial \rho} = 0, \quad (1.1.9)$$

$$u(r_0, t) = f(t), \quad (1.1.10)$$

$$\frac{\partial u(r_0, t)}{\partial \rho} = g(t), \quad (1.1.11)$$

где $0 < r_0 \leq \rho \leq \bar{r}$, $t \geq 0$, $f(t) = f_1(t) - p_0$.

Будем предполагать, что функция $f(t) \in C^2[0, \infty)$ удовлетворяет условиям

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f(t) = 0 \text{ при } t \geq t_0, \quad f(t) \not\equiv 0 \text{ при } t \geq 0, \quad (1.1.12)$$

а функция $\sigma(\rho)$ удовлетворяет условию (1.1.5) и

$$\sigma(\rho) \in C^2[r_0, \bar{r}]. \quad (1.1.13)$$

Определение 1.1.1. Решением обратной задачи (1.1.7) – (1.1.11) назовем пару функций $\sigma(\rho)$ и $u(\rho, t)$ таких, что $u(\rho, t)$ имеет непрерывные частные производные

$$u(\rho, t), u'_\rho(\rho, t), u''_{\rho\rho}(\rho, t), u'_t(\rho, t) \in C[(r_0, \bar{r}) \times (0, \infty)]$$

и удовлетворяет условиям (1.1.8) – (1.1.11), $\sigma(\rho)$ удовлетворяет условиям (1.1.5) и (1.1.13), функции $\sigma(\rho)$ и $u(\rho, t)$ удовлетворяют уравнению (1.1.7).

1.1.2 Единственность решения обратной задачи гидродинамики

Поскольку в уравнении (1.1.7) не известны ни функция $u(\rho, t)$, ни коэффициент $\sigma(\rho)$, характеризующий гидропроводность пласта, задача становится «недоопределённой». Для получения замкнутой системы мы будем использовать дополнительное граничное условие (1.1.11). Это в реальных условиях исследования одиночной скважины соответствует регистрации дебита на доступной для измерений границе. Одна из границ оказывается «перегруженной» в плане информации.

Всё это усложняет исследование и затрудняет поиск решения. Существенно важным здесь является доказательство единственности решения [132, 134, 138]. Оказывается, для того, чтобы решение задачи (1.1.7) – (1.1.11) было единственным, достаточно выполнения (1.1.12) для функции $f(t) \in C^2[0, \infty)$ и некоторых дополнительных ограничений на само решение, впрочем, совершенно естественных в данной постановке. Приведем необходимые доказательства этого утверждения.

1. Вспомогательные леммы.

Пусть $\sigma(\rho)$ и $u(\rho, t)$ — решение обратной задачи (1.1.7) – (1.1.11), а функция $f(t) \in C^2[0, \infty)$ удовлетворяет требованиям (1.1.12).

Лемма 1.1.1. *Если выполнены условия (1.1.7) – (1.1.12), и $g(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, тогда при $t \rightarrow \infty$*

$$u(\rho, t) \rightarrow 0, \quad u'_\rho(\rho, t) \rightarrow 0, \quad u'_t(\rho, t) \rightarrow 0$$

и

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma(\rho) \frac{\partial u(\rho, t)}{\partial \rho} \right] \rightarrow 0$$

равномерно на отрезке $[r_0, \bar{r}]$.

Доказательство. Ввиду того, что $f(t) = 0$ при $t \geq t_0$, функция $u(\rho, t)$ для $t \geq t_0$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma(\rho) \frac{\partial u}{\partial \rho} \right], \quad 0 < r_0 \leq \rho \leq \bar{r}, \quad t \geq t_0,$$

$$u(r_0, t) = u'_\rho(\bar{r}, t) = 0, \quad t \geq t_0,$$

$$u(\rho, t_0) = \psi(\rho), \quad r_0 \leq \rho \leq \bar{r},$$

где $\psi(\rho) \in C^1[r_0, \bar{r}]$, $\psi(r_0) = \psi'(\bar{r}) = 0$.

Используя для решения этой задачи разложение в ряд Фурье получим, что

$$u(\rho, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{r_0}^{\bar{r}} \psi(\xi) y_n(\xi) \xi d\xi \right) e^{-\lambda_n(t-t_0)} y_n(\rho), \quad (1.1.14)$$

где λ_n — собственные значения, и $y_n(\rho)$ — нормированные собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} [\rho \sigma(\rho) y'(\rho)]' + \lambda \rho y(\rho) &= 0, \\ y(r_0) &= y'(\bar{r}) = 0. \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

Уравнение из (1.1.15) может быть приведено к виду

$$Lu(z) \equiv -\frac{d^2 u(z)}{dz^2} + q(z) u(z) = \mu u(z), \quad (1.1.16)$$

подстановкой (см. [57, с.12])

$$z = \frac{1}{c} \int_a^\rho \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma(\xi)}}, \quad u(z) = [\rho^2 \sigma(\rho)]^{1/4} y(\rho), \quad (1.1.17)$$

$$\mu = c\lambda, \quad c = \frac{1}{\pi} \int_a^\rho \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma(\xi)}}, \quad (1.1.18)$$

причём

$$q(z) = \frac{\theta''(z)}{\theta(z)}, \quad \theta(z) = [\rho^2 \sigma(\rho)]^{1/4}.$$

Краевые условия из (1.1.15) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} z(0) \cos \alpha_1 + z'(0) \sin \alpha_1 &= 0 \quad (\alpha_1 = 0), \\ z(\pi) \cos \beta_1 + z'(\pi) \sin \beta_1 &= 0 \quad (\beta_1 = \pi/2). \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Укажем важные для доказательства леммы утверждения спектральной теории оператора Штурма-Лиувилля (см. [58]).

1. Собственные значения краевой задачи действительны.
2. Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. В случае (1.1.15) собственные функции удовлетворяют соотношению ортогональности с весом ρ (см. [47, с.263]):

$$\int_{r_0}^{\bar{r}} \rho y_m(\rho) y_n(\rho) d\rho, \quad m \neq n.$$

3. Для рассматриваемых краевых задач имеет место теорема осцилляции Штурма, т.е. существует бесконечное множество собственных значений, которые могут быть расположены в виде неограниченно возрастающей монотонной последовательности.

4. Для рассматриваемых краевых задач все собственные значения неотрицательны. Для задачи (1.1.16), (1.1.19) это утверждение является прямым следствием теоремы осцилляции (см. [58, с.24]). Кроме того для этой задачи можно доказать справедливость оценки: если $q(z) \geq m \geq 0$, то и все собственные значения $\mu \geq m$. Для собственной функции $u(z)$, соответствующей произвольному собственному значению μ , $Lu = \mu u$. Тогда

$$\begin{aligned} (Lu, u) &= \int_0^\pi (-u'' + qu)u \, dz = - \int_0^\pi u''u \, dz + \int_0^\pi qu^2 \, dz = \\ &= -u'u \Big|_0^\pi + \int_0^\pi u'^2 \, dz + \int_0^\pi (q - m)u^2 \, dz + \int_0^\pi mu^2 \, dz \geq \\ &\geq -u'u \Big|_0^\pi + m \int_0^\pi u^2 \, dz \geq m\|u\|. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$(Lu, u) = (\mu u, u) = \mu(u, u) = \mu\|u\|,$$

поэтому $\mu\|u\| \geq m\|u\|$ или $\mu \geq m$. Для задачи (1.1.15) получается аналогичная оценка.

5. Собственные функции образуют на отрезке $[a, b]$ (или на отрезке $[0, \pi]$) полную ортогональную и нормированную систему.
6. Для любой функции ψ , интегрируемой с квадратом на отрезке $[a, b]$ (или на отрезке $[0, \pi]$) выполнено равенство Парсеваля

$$\|\psi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2, \quad a_n = (\psi, v_n),$$

где $\{v_n\}_0^n$ – ортонормированная система собственных функций.

7. Для рассматриваемых краевых задач имеет место теорема Стеклова, т.е. всякая функция ψ , удовлетворяющая краевым условиям (1.1.15) (или (1.1.19)) и имеющая непрерывную первую и кусочно непрерывную вторую производную, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям y_n (или u_n):

$$\psi(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(\rho), \quad c_n = \int_{r_0}^{\bar{r}} \psi(\xi) y_n(\xi) \xi d\xi,$$

для задачи (1.1.15). Для задачи (1.1.16), (1.1.19) разложение аналогично.

8. Имеют место асимптотические формулы для собственных функций u_n и нормированных собственных функций v_n задачи (1.1.16), (1.1.19):

$$u_n(z) = \frac{1}{n + 1/2} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) z + O \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

$$v_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) z + O \left(\frac{1}{n} \right).$$

Вернёмся к исходной краевой задаче (1.1.15).

Согласно п.4, верна оценка: $\lambda_n \geq 0$. Покажем, что все собственные значения $\lambda_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), $\lambda_0 = 0$ собственным значением не является.

Предположим противное, $\lambda_0 = 0$ есть собственное значение задачи (1.1.15). Тогда

$$(\rho \sigma(\rho) y_0'(\rho))' = 0, \tag{1.1.20}$$

$$y_0(r_0) = 0, \quad y_0'(\bar{r}) = 0. \tag{1.1.21}$$

Из (1.1.20) следует, что

$$\rho \sigma(\rho) y_0'(\rho) = C_1,$$

и второе из условий (1.1.21) влечёт $C_1 = 0$. Поэтому

$$y'_0(\rho) = 0, \quad (1.1.22)$$

и значит,

$$y_0(\rho) = C_2.$$

Используя первое из условий (1.1.21), получим, что $C_2 = 0$, а $y_0(\rho) \equiv 0$, что противоречит условию нормировки собственных функций $y_n(\rho)$. Таким образом, $\lambda_0 = 0$ в число собственных значений не входит, и $\lambda_n > 0$ для $n = 1, 2, \dots$

Заметим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(\rho), \quad c_n = \int_{r_0}^{\bar{r}} \psi(\xi) y_n(\xi) \xi d\xi,$$

представляет собой разложение функции $\psi(\rho) \in C^1[r_0, \bar{r}]$, удовлетворяющей краевым условиям задачи (1.1.15) по ортонормированной системе собственных функций. Поскольку $\psi(\rho) = u(\rho, t_0)$, можно считать, что $\psi(\rho)$ имеет кусочно-непрерывную вторую производную. Следовательно, согласно теореме Стеклова, этот ряд сходится абсолютно и равномерно по ρ на $[r_0, \bar{r}]$.

Тогда ряд (1.1.14) сходится абсолютно и равномерно на $[r_0, \bar{r}]$ для любого $t \geq t_0$.

Ряд (1.1.14) можно почленно дифференцировать по t , так как составленный из производных ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(\rho) (-\lambda_n) e^{-\lambda_n(t-t_0)}, \quad c_n = \int_{r_0}^{\bar{r}} \psi(\xi) y_n(\xi) \xi d\xi \quad (1.1.23)$$

сходится равномерно на $[r_0, \bar{r}]$ для любого $t > t_0$ на основании признака Абеля (ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(\rho)$ сходится равномерно, а последовательность $\{(-\lambda_n) e^{-\lambda_n(t-t_0)}\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена).

Из положительности собственных значений λ_n и равномерной сходимости рядов (1.1.14) и (1.1.23) следует равномерная сходимость

$$u(\rho, t) \rightarrow 0, \quad u_t(\rho, t) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

С помощью подстановки (1.1.17)–(1.1.18) перейдём к задаче (1.1.16), (1.1.19). Представим ψ разложением в ряд по ортонормированной системе собственных функций $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ краевой задачи (1.1.16), (1.1.19):

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(z), \quad a_n = \int_0^{\pi} \psi(\xi) v_n(\xi) d\xi.$$

Ряд сходится абсолютно и равномерно, имеет место равенство Парсеваля

$$\|\psi(z)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2,$$

следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty. \quad (1.1.24)$$

Воспользуемся асимптотическим представлением для функций v_n . Тогда

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) z + O \left(\frac{1}{n} \right) \right], \\ u(z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) z + O \left(\frac{1}{n} \right) \right] e^{-\mu_n(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

Последний ряд сходится абсолютно и равномерно. Формально продифференцируем (1.1.25) по z :

$$\begin{aligned} u'_z(z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) z \right] e^{-\mu_n(t-t_0)} + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[O \left(\frac{1}{n} \right) \right] e^{-\mu_n(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

Из (1.1.24) следует, что $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а значит, последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченная: $|a_n| \leq M$, $M > 0$.

Для любого $t > t_0$ первый ряд в (1.1.26) сходится равномерно относительно z по признаку Вейерштрасса (мажорируется сходящимся числовым рядом). Второй ряд, числовой, сходится при том же условии. Следовательно, операция дифференцирования законна.

Тем самым доказана возможность представления производной от функции u по пространственной координате равномерно сходящимся рядом. В силу эквивалентности задач (1.1.15) и (1.1.16), (1.1.19), почленное дифференцирование ряда (1.1.14) по ρ допустимо, получающийся ряд сходится абсолютно и равномерно по ρ на $[r_0, \bar{r}]$ для любого $t > t_0$. При этом

$$u'_\rho(\rho, t) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

равномерно на $[r_0, \bar{r}]$.

Умножение $u'_\rho(\rho, t)$ на функцию $\rho\sigma(\rho)$ не влияет на равномерную сходимость. С учётом асимптотики собственных функций можно заключить, что повторным дифференцированием вновь получим равномерно сходящийся ряд. При этом

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho\sigma(\rho) \frac{\partial u(\rho, t)}{\partial \rho} \right] \rightarrow 0$$

равномерно на отрезке $[r_0, \bar{r}]$.

□

Введём функцию $V(\rho, s)$, являющуюся преобразованием Лапласа от $u(\rho, t)$ по переменной t

$$V(\rho, s) = \int_0^\infty e^{-st} u(\rho, t) dt.$$

На основании леммы 1.1.1 из (1.1.7) – (1.1.10) следует, что для значений комплексного параметра s таких, что $\operatorname{Re} s \geq s_0 > 0$, функция $V(\rho, s)$ является решением краевой задачи

$$\frac{1}{\rho} [\rho \sigma(\rho) V'_\rho]' - sV = 0, \quad (1.1.27)$$

$$V'_\rho(\bar{r}, s) = 0, \quad (1.1.28)$$

$$V(r_0, s) = \varphi(s), \quad (1.1.29)$$

где $\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$. Кроме того функция $V(\rho, s)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$V'_\rho(r_0, s) = \mu(s), \quad (1.1.30)$$

где $\mu(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt$.

Рассмотрим функцию $W(\rho, s)$, являющуюся решением задачи Коши для уравнения (1.1.27) с краевыми условиями

$$\begin{aligned} W(\bar{r}, s) &= 1, \\ W'_\rho(\bar{r}, s) &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

Так как функции $V(\rho, s)$ и $W(\rho, s)$ являются решениями дифференциального уравнения (1.1.27) и $V'_\rho(\bar{r}, s) = W'_\rho(\bar{r}, s)$, то они линейно зависимые, то есть

$$V(\rho, s) = C(s) W(\rho, s). \quad (1.1.32)$$

Тогда из (1.1.29) и (1.1.32) следует, что

$$\varphi(s) = C(s) W(r_0, s), \quad (1.1.33)$$

а из (1.1.30) и (1.1.32) следует, что

$$\mu(s) = C(s) W'_\rho(r_0, s). \quad (1.1.34)$$

Из последнего равенства можно выразить $C(s)$:

$$C(s) = \frac{\mu(s)}{W'_\rho(r_0, s)}. \quad (1.1.35)$$

Лемма 1.1.2. При сформулированных выше условиях (1.1.7) – (1.1.12), множество нулей функции $W(r_0, s)$ не пересекается с множеством нулей функции $W'_\rho(r_0, s)$.

Доказательство. Предположим противное, то есть найдется s_0 такое, что

$$W(r_0, s_0) = W'_\rho(r_0, s_0) = 0. \quad (1.1.36)$$

Тогда $W(\rho, s_0)$ является решением задачи Коши для уравнения (1.1.27) с начальными условиями (1.1.36). Следовательно, для любого $\rho \in [r_0, \bar{r}]$ получим $W(\rho, s_0) = 0$, что противоречит условию $W(\bar{r}, s_0) = 1$. $\square$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{\rho} [\rho \sigma(\rho) y'(\rho)]' = \lambda y(\rho). \quad (1.1.37)$$

с краевыми условиями

$$y(r_0) = 0, \quad y'(\bar{r}) = 0 \quad (1.1.38)$$

или

$$y'(r_0) = 0, \quad y'(\bar{r}) = 0. \quad (1.1.39)$$

Лемма 1.1.3. При сформулированных выше условиях (1.1.7) – (1.1.12), значения $s = s_0$ и $s = \bar{s}_0$ являются, соответственно, нулями функций $W(r_0, s)$ и $W'_\rho(r_0, s)$ тогда и только тогда, когда числа $\lambda_0 = -s_0$ и $\bar{\lambda}_0 = -\bar{s}_0$ являются собственными значениями задач Штурма-Лиувилля (1.1.37), (1.1.38) и (1.1.37), (1.1.39).

Доказательство. Так как функция $W(\rho, s_0)$ является решением уравнения (1.1.27) с $s = s_0$, то функция $y_0(\rho) = W(\rho, s_0)$ является решением уравнения (1.1.37) с $\lambda_0 = -s_0$. Второе краевое условие

в (1.1.38) для $y_0(\rho)$ следует из (1.1.31), а первое из того, что s_0 является нулём функции $W(r_0, s)$. Таким образом, $y_0(\rho)$ является решением задачи (1.1.37), (1.1.38). Это решение нетривиальное, так как в силу (1.1.31)

$$y_0(\bar{r}) = W(\bar{r}, s_0) = 1.$$

Следовательно, λ_0 является собственным значением задачи (1.1.37), (1.1.38).

Очевидно, что справедливо и обратное утверждение. Действительно, если λ_0 является собственным значением, а $y_0(\rho)$ — собственной функцией задачи (1.1.37), (1.1.38), то на основании первого из условий (1.1.38) значение $s_0 = -\lambda_0$ является нулём функции $W(r_0, s)$.

Теперь предположим, что $s = \bar{s}_0$ является нулём функции $W'_\rho(r_0, s)$. Тогда из того, что функция $W(\rho, \bar{s}_0)$ является решением уравнения (1.1.27) с $s = \bar{s}_0$, следует, что функция $\bar{y}_0(\rho) = W(\rho, \bar{s}_0)$ является решением уравнения (1.1.37) с $\bar{\lambda}_0 = -\bar{s}_0$. Второе краевое условие в (1.1.39) следует из (1.1.31), а первое — из того, что $\bar{s}_0$ является нулём функции $W'_\rho(r_0, s)$.

Таким образом, $\bar{y}_0(\rho)$ является решением задачи (1.1.37), (1.1.39). Это решение нетривиальное, так как в силу (1.1.31)

$$\bar{y}_0(\bar{r}) = W(\bar{r}, \bar{s}_0) = 1.$$

Следовательно, $\bar{\lambda}_0$ является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля (1.1.37), (1.1.39).

Обратно, если $\bar{\lambda}_0$ является собственным значением, а $\bar{y}_0(\rho)$ — собственной функцией задачи (1.1.37), (1.1.39), то $\bar{s}_0 = -\bar{\lambda}_0$ на основании первого из условий (1.1.39) есть ноль функции $W'_\rho(r_0, s)$. □

Дальнейшие рассуждения проводятся в предположении, что функ-

ция $\sigma(\rho) \in C^2[r_0, \bar{r}]$, что оправдано с точки зрения практических приложений. Пусть дополнительно $\sigma(\rho)$ удовлетворяет условию (1.1.5), и $\sigma'(\bar{r}) = 0$. Вернёмся к решению $W(\rho, s)$ задачи Коши для уравнения (1.1.27) с начальными условиями (1.1.31).

Лемма 1.1.4. *При сформулированных выше ограничениях на $\sigma(\rho)$ функции $W(\rho, s)$ и $W'_\rho(\rho, s)$ для каждого фиксированного $\rho \in [r_0, \bar{r}]$ являются целыми функциями комплексного параметра s .*

Доказательство. Применяя преобразование Лиувилля [64, с.35] к уравнению (1.1.27), заменим функцию $W(\rho, s)$ на функцию $z(x, s)$, определяемую параметрически следующим образом:

$$x = \frac{1}{c} \int_{r_0}^{\rho} \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma(\xi)}}, \quad (1.1.40)$$

где

$$c = \frac{1}{\pi} \int_{r_0}^{\bar{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma(\xi)}}, \quad (1.1.41)$$

а x — новая независимая переменная, и

$$z(\rho, s) = \sqrt{\rho} \sigma^{\frac{1}{4}}(\rho) W(\rho, s). \quad (1.1.42)$$

Подставляя выражения (1.1.40)–(1.1.42) в уравнение (1.1.27), приведём его к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a(x) z - c^2 s z = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (1.1.43)$$

где c задаётся формулой (1.1.41), а

$$a(x) = -\frac{1}{\theta(x)} \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2}, \quad (1.1.44)$$

где $\theta = \theta(x)$ определена параметрически формулой (1.1.40) и равенством

$$\theta(\rho) = \sqrt{\rho} \sigma^{\frac{1}{4}}(\rho). \quad (1.1.45)$$

Теперь сделаем замену в краевых условиях (1.1.31):

$$z(\pi, s) = \sqrt{\bar{r}} \sigma^{\frac{1}{4}}(\bar{r}), \quad (1.1.46)$$

$$z'_x(\pi, s) = \frac{c}{2\sqrt{\bar{r}}} \sigma^{\frac{3}{4}}(\bar{r}). \quad (1.1.47)$$

Далее введём новую переменную $\tau = \pi - x$ и перейдём от функции $z(x, s)$ к функции $w(\tau, s)$, которую определим формулой

$$w(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{\bar{r}} \sqrt{\sigma(\bar{r})} + \frac{c^2 \sigma^{\frac{3}{2}}(\bar{r})}{4\bar{r}}} z(\pi - \tau, s). \quad (1.1.48)$$

Используя (1.1.48), легко проверить, что функция $w(\tau, s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + a(\pi - \tau) w - c^2 s w = 0, \quad 0 \leq \tau \leq \pi. \quad (1.1.49)$$

При этом условия (1.1.46) и (1.1.47) для функции $w(\tau, s)$ будут выглядеть следующим образом:

$$w(0, s) = \sin \alpha, \quad (1.1.50)$$

$$w'_\tau(0, s) = -\cos \alpha, \quad (1.1.51)$$

где

$$\alpha = \arcsin \left[\frac{\sqrt{\bar{r}} \sigma^{\frac{1}{4}}(\bar{r})}{\sqrt{\bar{r}} \sqrt{\sigma(\bar{r})} + \frac{c^2 \sigma^{\frac{3}{2}}(\bar{r})}{4\bar{r}}} \right]. \quad (1.1.52)$$

Из теоремы [57, с. 14-15] следует, что для каждого фиксированного $\tau \in [0, \pi]$ функции $w(\tau, s)$ и $w'_\tau(\tau, s)$ являются целыми функциями s , а из формул (1.1.42) и (1.1.48) будет следовать утверждение леммы. $\square$

Так как функция $W(\rho, s)$ представляет собой решение уравнения (1.1.27) с условиями (1.1.31), то из леммы 1.1.4 следует, что

$W(\rho, s)$ и $W'_\rho(\rho, s)$ при фиксированном ρ являются аналитическими функциями комплексного переменного s во всей комплексной плоскости.

2. Основная теорема.

Учитывая сделанное выше замечание, будем предполагать, что $\sigma(\rho) \in C^2[r_0, \bar{r}]$, $\sigma'(\bar{r}) = 0$ и выполняется условие (1.1.5).

Пусть $\sigma_i(\rho)$ и $u_i(\rho, t)$ ($i = 1, 2$) — решения обратной задачи (1.1.7)–(1.1.11). Обозначим через $V_i(\rho, s)$ преобразование Лапласа от $u_i(\rho, t)$, а через $W_i(\rho, s)$ — решения задачи Коши для уравнения (1.1.27) с $\sigma(\rho) = \sigma_i(\rho)$ и начальными условиями (1.1.31). Для краткости $(W_i(\rho, s))'_\rho|_{\rho=r_0}$ будем обозначать $W'_i(r_0, s)$.

Из (1.1.10) следует, что $V_1(r_0, s) = V_2(r_0, s)$. Тогда, используя формулы (1.1.32) и (1.1.35), получим, что при $\operatorname{Re} s \geq s_0 > 0$

$$\frac{W_1(r_0, s)}{W'_1(r_0, s)} = \frac{W_2(r_0, s)}{W'_2(r_0, s)}. \quad (1.1.53)$$

Из леммы 1.1.4 следует, что функции $W_i(r_0, s)/W'_i(r_0, s)$ при $i = 1, 2$ являются аналитическими функциями комплексного переменного s во всей комплексной плоскости за исключением нулей $W'_i(r_0, s)$, являющихся особыми точками.

Из равенства (1.1.53) следует, что нули и особые точки функций $W_1(r_0, s)/W'_1(r_0, s)$ и $W_2(r_0, s)/W'_2(r_0, s)$ совпадают.

Используя лемму 1.1.2, окончательно получим, что все нули функций $W_1(r_0, s)$ и $W_2(r_0, s)$ совпадают, и все нули функций $W'_1(r_0, s)$ и $W'_2(r_0, s)$ также совпадают.

Таким образом, на основании леммы 1.1.3 для любого n выполняются соотношения

$$\lambda_n^1 = \lambda_n^2, \quad (1.1.54)$$

$$\bar{\lambda}_n^1 = \bar{\lambda}_n^2, \quad (1.1.55)$$

где $\{\lambda_n^i\}$ при $i = 1, 2$ — все собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (1.1.37)–(1.1.38) с $\sigma(\rho) = \sigma_i(\rho)$, упорядоченные по возрастанию, а $\{\bar{\lambda}_n^i\}$ — все собственные значения задачи (1.1.37), (1.1.39) с $\sigma(\rho) = \sigma_i(\rho)$, также упорядоченные по возрастанию.

Теорема 1.1.1. *Предположим, что функция $f(t)$ удовлетворяет условиям (1.1.12). Тогда, если $\sigma_i(\rho)$ и $u_i(\rho, t)$, $i = 1, 2$ — решения обратной задачи (1.1.7)–(1.1.11) такие, что*

$$\sigma_1'(\bar{r}) = \sigma_2'(\bar{r}) = \sigma_1'(r_0) = \sigma_2'(r_0) = 0,$$

$$\int_{r_0}^{\bar{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma_1(\xi)}} = \int_{r_0}^{\bar{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma_2(\xi)}},$$

а также

$$\sigma_1(r_0) = \sigma_2(r_0) = \sigma_1(\bar{r}) = \sigma_2(\bar{r}),$$

то $\sigma_1(\rho) = \sigma_2(\rho)$ и $u_1(\rho, t) = u_2(\rho, t)$ для всех $\rho \in [r_0, \bar{r}]$ и $t \geq 0$.

Доказательство. Применяя к уравнению (1.1.37) преобразование Лиувилля (1.1.40), (1.1.41) и

$$z(\rho) = \sqrt{\rho} \sigma^{\frac{1}{4}}(\rho) y(\rho), \quad (1.1.56)$$

перейдём от функции $y_i(\rho, \lambda)$ к функции $z_i(x, \lambda)$, удовлетворяющей уравнению

$$-\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2} + q_i(x) z_i = c^2 \lambda z_i, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad i = 1, 2, \quad (1.1.57)$$

где функции $q_i(x) = -a_i(x)$ определяются формулами (1.1.40), (1.1.41), (1.1.44), (1.1.45) и являются непрерывными на отрезке $[0, \pi]$. Сделав ещё одну замену

$$w_i(\tau, \lambda) = z_i(\pi - \tau, \lambda), \quad \tau = \pi - x, \quad 0 \leq \tau \leq \pi, \quad i = 1, 2,$$

получим уравнение для функции $w_i(\tau, \lambda)$

$$-\frac{\partial^2 w_i}{\partial \tau^2} + q_i(\pi - \tau) w_i = c^2 \lambda w_i, \quad 0 \leq \tau \leq \pi, \quad i = 1, 2. \quad (1.1.58)$$

Теперь преобразуем граничные условия (1.1.38) и (1.1.39). Получим, что условиям (1.1.38) соответствует пара граничных условий

$$w_i(\pi, \lambda) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.1.59)$$

$$w_i(0, \lambda) \cos(\beta) - w'_i(0, \lambda) \sin \beta = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.1.60)$$

где $\beta = \arcsin \left(1 / \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2\bar{r}} \right)^2 \sigma(\bar{r})} \right)$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Условиям (1.1.39) соответствуют граничные условия (1.1.60) и

$$w_i(\pi, \lambda) \cos(\gamma) - w'_i(\pi, \lambda) \sin \gamma = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.1.61)$$

где $\gamma = \arcsin \left(1 / \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2r_0} \right)^2 \sigma(r_0)} \right)$ и $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, задача Штурма-Лиувилля (1.1.58) – (1.1.60) порождает возрастающую последовательность собственных значений $\{\mu_n^i\}$. При этом из формулы (1.1.54) и условий теоремы следует, что для любого n

$$\mu_n^1 = \mu_n^2. \quad (1.1.62)$$

Аналогично, задача Штурма-Лиувилля (1.1.58), (1.1.60) и (1.1.61) порождает возрастающую последовательность собственных значений $\{\bar{\mu}_n^i\}$ такую, что на основании (1.1.55) и условий теоремы следует, что для любого n

$$\bar{\mu}_n^1 = \bar{\mu}_n^2. \quad (1.1.63)$$

Из теоремы, приведённой в [127], и равенств (1.1.62) и (1.1.63) следует, что для любого $x \in [0, \pi]$

$$a_1(x) = a_2(x). \quad (1.1.64)$$

Таким образом, обозначив $a_i(x)$ через $a(x)$ и воспользовавшись формулами (1.1.44) и (1.1.45), получим, что

$$\frac{d^2\theta_i(x)}{dx^2} + a(x)\theta_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.1.65)$$

где

$$\theta_i(0) = \sqrt{r_0} \sigma_i^{\frac{1}{4}}(r_0) \quad (1.1.66)$$

и

$$\theta'_i(0) = \frac{c}{2\sqrt{r_0}} \sigma_i^{\frac{3}{4}}(r_0). \quad (1.1.67)$$

Задача Коши (1.1.65)–(1.1.67) для линейного дифференциального уравнения второго порядка имеет единственное решение, и, следовательно,

$$\theta_1(x) = \theta_2(x).$$

Используя формулу (1.1.45), получаем, что

$$\sigma_1(\rho) = \sigma_2(\rho) \quad \text{при} \quad \rho \in [r_0, \bar{r}].$$

Но тогда и решения прямой задачи (1.1.7)–(1.1.10) при соответствующих ограничениях на функции $u_i(\rho, t)$ и $f(t)$ будут при любых значениях $\rho \in [r_0, \bar{r}]$ и $t \geq 0$ удовлетворять условиям

$$u_1(\rho, t) = u_2(\rho, t),$$

что и доказывает теорему. □

1.2 Математическое моделирование тепловой диагностики технических объектов

1.2.1 Задача диагностики технических объектов, подверженных тепловым нагрузкам

При проектировании технических объектов, подверженных значительным тепловым нагрузкам, очень важна оценка степени его теплового нагружения. При проведении стендовых испытаний энергетических установок, двигателей внутреннего сгорания, авиационных и ракетных двигателей, внутренние стенки подвергаются воздействию интенсивных тепловых потоков. Иногда работа таких объектов сопровождается плавлением или выгоранием стенок.

Для представления полной картины происходящих процессов необходимо максимально точное решение обратных граничных задач тепловой диагностики, а для контроля точности необходимо получение точных оценок погрешности решения этих задач.

Информация о температуре и тепловом потоке в камере сгорания двигателя играет важную роль и позволяет эффективно управлять его работой.

Ввиду очень высокой температуры внутри камеры её непосредственное измерение невозможно. Поэтому температурное поле измеряют внутри стенки камеры, а затем, решая обратную задачу теплопроводности, численно определяют температурные параметры внутри камеры.

Одной из важных проблем в этом направлении является оценка надёжности численных результатов. Одним из вариантов решения данной проблемы являются оценки точности получаемых прибли-

жённых решений обратной задачи.

В работе [100] был предложен метод проекционной регуляризации простейшей обратной задачи тепловой диагностики и получены точные по порядку оценки. В статье [131] дано обобщение обратной задачи, исследованной в [100]. Рассмотренная в [131] математическая модель более адекватно описывала процесс тепловой диагностики технических объектов. Для приближённого решения задачи получены точные по порядку оценки погрешности.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial T(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(y, t)}{\partial y^2}, \quad (1.2.1)$$

в котором $t \geq 0$, $y \in [0, y_0]$. Последнее условие может выполняться только в момент времени $t = 0$. В дальнейшем положение правой границы меняется и описывается уравнением $h = h(t)$. При этом $h(0) = y_0$, $h(t) = y_1$ при $t \geq t_0 > 0$, $y_1 \leq y_0$, и функция $h(t)$ непрерывная и строго убывающая на отрезке $[0, t_0]$. Так что фактически при $t > 0$ расчётная область по координате определена условием $y \in [0, h(t)]$. Кроме того заданы условия

$$T(y, 0) = 0, y \in [0, y_0], \quad (1.2.2)$$

$$T(0, t) + k_0 T'_y(0, t) = 0, t \geq 0, \quad (1.2.3)$$

где k_0 — заданное отрицательное число,

$$T(y_2, t) = g(t), y_2 \in (0, y_1), t \geq 0 \quad (1.2.4)$$

и

$$\frac{\partial T(h(t), t)}{\partial y} = z(t), t \geq 0, \quad (1.2.5)$$

где $z(t) \in C^2[0, \infty)$ и

$$z(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \geq t_0. \quad (1.2.6)$$

Будем полагать, что функция $g(t)$ нам дана, а функцию $z(t)$ требуется определить.

Обратная задача (1.2.1)–(1.2.5) является некорректно поставленной. Поэтому предположим, что при точном значении $g_0(t) \in L_2[0, \infty)$ существует решение $T_0(y, t)$ задачи (1.2.1)–(1.2.3), (1.2.5) такое, что

$$T_0(h(t), t) = z_0(t), \quad t \geq 0,$$

а функция $z_0(t) = \frac{\partial T_0(h(t), t)}{\partial y}$ принадлежит классу корректности M_r ,

$$M_r = \left\{ z_0 : z_0 \in C^1[0, \infty), \|z_0\|_{L_2}^2 + \|z_0'\|_{L_2}^2 \leq r^2, \right. \\ \left. \|T_0(h(t), t)\|_{L_2}^2 + \left\| \frac{\partial T_0(h(t), t)}{\partial t} \right\|_{L_2}^2 \leq r^2 \right\}. \quad (1.2.7)$$

Проблема состоит в том, что функция $g_0(t)$ нам не известна, а вместо неё даны некоторое приближение $g_\delta(t)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\|g_0 - g_\delta\| \leq \delta. \quad (1.2.8)$$

1.2.2 Оценка точности приближённого решения обратной граничной задачи тепловой диагностики

1. Исследование скорости убывания при $t \rightarrow \infty$ решения $T(y, t)$ прямой задачи (1.2.1)–(1.2.3), (1.2.5)

Из (1.2.1)–(1.2.3), (1.2.5) и (1.2.6) следует, что функция $T(y, t)$ удовлетворяет при $t \geq t_0$ следующим начальному и граничным условиям

$$T(y, t_0) = \varphi(y), \quad y \in [0, y_1], \quad (1.2.9)$$

$$T(0, t) + k_0 T_y'(0, t) = 0, \quad t \geq t_0, \quad (1.2.10)$$

и

$$T'_y(y_1, t) = 0, t \geq t_0. \quad (1.2.11)$$

Используя то, что $\varphi(y) \in C[0, y_1]$, запишем решение задачи (1.2.1), (1.2.9) – (1.2.11) в виде ряда

$$T(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n(t-t_0)} \psi_n(y), \quad (1.2.12)$$

где

$$b_n = \int_0^{y_1} \varphi(y) \psi_n(y) dy,$$

$\{\psi_n\}$ — полная ортонормированная система собственных функций соответствующей задачи Штурма-Лиувилля, а $\{\lambda_n\}$ — последовательность собственных значений этой задачи.

Из теоремы, сформулированной в [64, с. 37], следует существование чисел $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ таких, что для любого n

$$-C_1 n^2 \leq \lambda_n \leq -C_2 n^2, \quad (1.2.13)$$

а из (1.2.12) следует, что

$$|T'_t(y, t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| |b_n| e^{\lambda_n(t-t_0)} |\psi_n(y)|, \quad (1.2.14)$$

$$|T''_{yy}(y, t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| |b_n| e^{\lambda_n(t-t_0)} |\psi_n(y)|, \quad (1.2.15)$$

и

$$|T'_y(y, t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|\lambda_n|} |b_n| e^{\lambda_n(t-t_0)} |\psi_n(y)|, \quad (1.2.16)$$

Исследуем поведение функций, определяемых формулами (1.2.12), (1.2.14) – (1.2.16) при $t \rightarrow \infty$. Для этого оценим общий член в сумме (1.2.14).

Так как

$$\sup_{u \geq 0} \frac{u^p}{e^u} \leq \left(\frac{p}{e}\right)^p, p > 0,$$

то из (1.2.13) и (1.2.14) следует существование числа $C_3 > 0$ такого, что

$$|\lambda_n| |b_n| e^{\lambda_n(t-t_0)} \leq C_3 n^{-2} |b_n| (t - t_0 - 1)^{-1}. \quad (1.2.17)$$

Учитывая (1.2.14), (1.2.17) и то, что

$$|b_n| n^{-2} \leq b_n^2 + n^{-4},$$

а соответствующие ряды $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, получаем существование числа $C_4 > 0$ такого, что для любого $t \geq t_0 + 2$ справедлива оценка

$$\sup_{y \in [0, y_1]} \left\{ T^2(y, t), [T''_{yy}(y, t)]^2, [T'_t(y, t)]^2, [T'_y(y, t)]^2 \right\} \leq C_4 (t - t_0 - 1)^{-2}. \quad (1.2.18)$$

Из соотношения (1.2.18) и сходимости интеграла от мажорантной функции в пределах от $t_0 + 2$ до ∞ следует выполнение всех условий, позволяющих применить к задаче (1.2.1)–(1.2.4) преобразования Фурье по t , в предположении, что

$$T(y, t) = 0, \quad \text{при } t < 0. \quad (1.2.19)$$

2. Преобразование задачи (1.2.1)–(1.2.4)

Учитывая (1.2.19), в качестве рабочего пространства $\bar{H}$ возьмём комплексный вариант $L_2[0, \infty)$ над полем действительных чисел. Тогда пространство $\bar{H}$ будет гильбертовым, а преобразование F на нём определим формулой

$$F(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} F_c(u) - \frac{i}{\sqrt{2}} F_s(v), \quad (1.2.20)$$

где i — мнимая единица, а F_c и F_s — соответствующие косинус- и синус-преобразования.

Из теоремы Планшереля [48, с. 412], следует изометричность преобразования F , определяемого формулой (1.2.20).

Применяя к уравнению (1.2.1) преобразование F , получаем

$$\frac{\partial^2 \hat{T}(y, \tau)}{\partial y^2} = i\tau \hat{T}(y, \tau), \quad y \in [0, y_2], \quad \tau \geq 0, \quad (1.2.21)$$

где $\hat{T}(y, \tau) = F[T(y, t), T(y, t)]$.

Для уравнения (1.2.21) поставим задачу, добавив условия

$$\hat{T}(0, \tau) + k_0 \hat{T}'_y(0, \tau) = 0, \quad \tau \geq 0, \quad (1.2.22)$$

и

$$\hat{T}(y_2, \tau) = \hat{g}(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (1.2.23)$$

где $\hat{g}(\tau) = F[g(t), g(t)]$.

Решение уравнения (1.2.21) имеет вид

$$\hat{T}(y, \tau) = A(\tau) e^{\mu_0 \sqrt{\tau} y} + B(\tau) e^{-\mu_0 \sqrt{\tau} y}, \quad (1.2.24)$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, а $A(\tau)$ и $B(\tau)$ — произвольные функции.

Из (1.2.22) – (1.2.24) следует, что

$$\hat{T}(0, \tau) = \frac{2\hat{g}(\tau)}{(1 - \frac{1}{k_0 \mu_0 \sqrt{\tau}}) e^{\mu_0 \sqrt{\tau} y_2} + (1 + \frac{1}{k_0 \mu_0 \sqrt{\tau}}) e^{-\mu_0 \sqrt{\tau} y_2}}. \quad (1.2.25)$$

Обозначим функцию, стоящую в правой части формулы (1.2.25), через $\hat{f}(\tau)$, тогда из (1.2.25) следует, что

$$\hat{T}(0, \tau) = \hat{f}(\tau), \quad (1.2.26)$$

а из (1.2.22) и (1.2.26), что

$$\hat{T}'_y(0, \tau) = -\frac{\hat{f}(\tau)}{k_0}. \quad (1.2.27)$$

Применив к функциям $\hat{T}(0, \tau)$ и $\hat{T}'_y(0, \tau)$ преобразование F^{-1} обратное к F , получим на основании (1.2.26), (1.2.27)

$$T(0, t) = F^{-1}[\hat{f}(\tau)], t \geq 0 \quad (1.2.28)$$

и

$$T'_y(0, t) = -\frac{1}{k_0} F^{-1}[\hat{f}(\tau)], t \geq 0. \quad (1.2.29)$$

Таким образом, мы свели задачу (1.2.1) – (1.2.4) к задаче (1.2.1) – (1.2.2), (1.2.28) – (1.2.29).

3. Преобразование уравнения (1.2.1)

Сделаем в уравнении (1.2.1) замену переменной и искомой функции

$$x = \frac{y}{h(t)},$$

$$v(x, t) = T(h(t)x, t).$$

Тогда уравнение (1.2.1) примет вид

$$h^2(t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, x \in [0, 1], t \geq 0. \quad (1.2.30)$$

Сделаем ещё одну замену переменной в уравнении (1.2.30), положив $s = b(t)$, где

$$b(t) = \int_0^t h^{-2}(\tau) d\tau. \quad (1.2.31)$$

Используя (1.2.31), преобразуем функцию $v(x, t)$:

$$u(x, s) = v(x, b^{-1}(s)), x \in [0, 1], s \geq 0. \quad (1.2.32)$$

Подставляя функцию $u(x, s)$, определяемую формулой (1.2.32), в уравнение (1.2.30), получим

$$\frac{\partial u(x, s)}{\partial s} = \frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial x^2}, x \in [0, 1], s \geq 0, \quad (1.2.33)$$

а из (1.2.2), (1.2.28) и (1.2.29), будет следовать, что

$$u(x, 0) = 0, x \in [0, 1], \quad (1.2.34)$$

$$u(0, s) = f_1(s), s \geq 0 \quad (1.2.35)$$

и

$$u'_x(0, s) = f_2(s), s \geq 0, \quad (1.2.36)$$

где функции f_1 и f_2 однозначно определяются из сделанных нами преобразований и соотношений (1.2.28) и (1.2.29).

4. Решение задачи (1.2.33) – (1.2.36)

Из формул (1.2.8), (1.2.25) – (1.2.27) и изометричности преобразования F следует существование числа $C_5 > 0$ такого, что

$$\|f_{1,\delta} - f_{1,0}\|_{L_2} \leq C_5 \delta \quad (1.2.37)$$

и

$$\|f_{2,\delta} - f_{2,0}\|_{L_2} \leq C_5 \delta, \quad (1.2.38)$$

где $f_{1,0}$ и $f_{2,0}$ — соответствующие точные значения, а $f_{1,\delta}$ и $f_{2,\delta}$ — их приближённые значения.

Из формулы (1.2.7) следует, что множество M_r в результате сделанных преобразований преобразуется в $M_{r_1}^1$,

$$M_{r_1}^1 = \left\{ u(1, s) : u(1, s), u'(1, s) \in C^1[0, \infty), \|u(1, s)\|_{W_2'}^2 \leq r_1^2, \right. \\ \left. \|u'_x(1, s)\|_{W_2'}^2 \leq r_1^2 \right\}. \quad (1.2.39)$$

Применив к уравнению (1.2.33) преобразование F по s , получим

$$\frac{d^2 \hat{u}(x, \lambda)}{x^2} = ix \hat{u}(x, \lambda), \quad 0 \leq x \leq 1, \lambda \geq 0, \quad (1.2.40)$$

где $\hat{u}(x, \lambda) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_0^\infty u(x, s) e^{is\lambda} ds$.

К уравнению (1.2.40) добавим условия

$$\hat{u}(0, \lambda) = \hat{f}_1(\lambda), \quad \lambda \geq 0, \quad (1.2.41)$$

$$\hat{u}'_x(0, \lambda) = \hat{f}_2(\lambda), \quad \lambda \geq 0, \quad (1.2.42)$$

где $\hat{f}_1(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_0^\infty f_1(s) e^{-is\lambda} ds$, а $\hat{f}_2(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_0^\infty f_2(s) e^{-is\lambda} ds$.

Решая задачу (1.2.40) – (1.2.42), получим

$$\hat{u}(x, \lambda) = a(\lambda) e^{\mu_0 x \sqrt{\lambda}} + b(\lambda) e^{-\mu_0 x \sqrt{\lambda}}, \quad \lambda \geq 0, \quad (1.2.43)$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$,

$$a(\lambda) + b(\lambda) = \hat{f}_1(\lambda), \quad \lambda \geq 0, \quad (1.2.44)$$

$$a(\lambda) - b(\lambda) = \frac{1}{\mu_0 \sqrt{\lambda}} \hat{f}_2(\lambda), \quad \lambda \geq 0. \quad (1.2.45)$$

Из (1.2.43) – (1.2.45) следует, что задачу (1.2.40) – (1.2.42) можно свести к задаче вычисления значений неограниченного оператора T в пространстве $\bar{H} \times \bar{H}$,

$$T \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} & \frac{1}{\mu_0 \sqrt{\lambda}} \operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\lambda} \\ \mu_0 \sqrt{\lambda} \operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\lambda} & \operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_1(\lambda) \\ \hat{f}_2(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}(1, \lambda) \\ \hat{u}'_x(1, \lambda) \end{pmatrix}. \quad (1.2.46)$$

В дальнейшем $\hat{u}(1, \lambda)$ обозначим через $\hat{u}(\lambda)$, а $\hat{u}'_x(1, \lambda)$ — через $\hat{w}(\lambda)$.

Для решения задачи (1.2.46) в работе [131] был предложен метод проекционной регуляризации (см. [103]). Применим метод для получения оценки приближённого решения. Для этого введём регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha : \alpha > 0\}$,

$$T_\alpha \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} T \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \end{pmatrix}, & \lambda \leq \alpha, \\ 0, & \lambda > \alpha, \end{cases} \quad (1.2.47)$$

а приближённое решение $\begin{pmatrix} \hat{u}_\delta^\alpha(\lambda) \\ \hat{w}_\delta^\alpha(\lambda) \end{pmatrix}$ задачи (1.2.46) определим формулой

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_\delta^\alpha(\lambda) \\ \hat{w}_\delta^\alpha(\lambda) \end{pmatrix} = T_\alpha \begin{pmatrix} \hat{f}_{1\delta} \\ \hat{f}_{2\delta} \end{pmatrix}$$

Из принадлежности функции $u(1, s)$ классу корректности $M_{r_1}^1$, определяемому формулой (1.2.39), следует, что $\hat{u}(\lambda)$ и $\hat{w}(\lambda)$ удовлетворяют условию

$$\int_0^\infty \lambda^2 (\|\hat{u}(\lambda)\|^2 + \|\hat{w}(\lambda)\|^2) d\lambda \leq 2r_1^2. \quad (1.2.48)$$

Из (1.2.46) и (1.2.47) следует, что

$$\|T_\alpha\| = e\sqrt{\frac{\alpha}{2}}. \quad (1.2.49)$$

Для выбора параметра регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ в формуле (1.2.47) используем схему М.М. Лаврентьева, описанную в [51]. Эта схема позволяет, учитывая соотношения (1.2.37), (1.2.38), (1.2.48) и (1.2.49), параметр $\alpha(\delta)$ определять из уравнения

$$\frac{\sqrt{2}r_1}{C_\delta^\alpha} = e\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\delta. \quad (1.2.50)$$

Обозначим через $\alpha(\delta)$ решение уравнения (1.2.50). Тогда из теоремы, сформулированной в [103], следует, что

$$\sqrt{\|\hat{u}_\delta^{\alpha(\delta)} - \hat{u}_0\|_{L_2}^2 + \|\hat{w}_\delta^{\alpha(\delta)} - \hat{w}_0\|_{L_2}^2} \leq \frac{2r_1}{\alpha(\delta)}. \quad (1.2.51)$$

Из теоремы, сформулированной в работе [100], и соотношения (1.2.51) следует

$$\frac{2r_1}{\alpha(\delta)} \sim \ln^{-2} \delta \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (1.2.52)$$

Воспользовавшись преобразованием F^{-1} , обратным к F , и взяв его действительную часть, получаем решение задачи (1.2.33) – (1.2.36)

$$u_\delta(1, s) = \operatorname{Re} \left\{ F^{-1}[\hat{u}_\delta^{\alpha(\delta)}] \right\},$$

$$w_\delta(s) = \operatorname{Re} \left\{ F^{-1}[\hat{w}_\delta^{\alpha(\delta)}] \right\}.$$

Из (1.2.51) и (1.2.52) будет следовать существование числа $C_6 > 0$ такого, что для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ справедлива оценка

$$\left[\|\hat{u}_\delta(1, s) - u_0(1, s)\|_{L_2}^2 + \|\hat{w}_\delta(s) - \frac{\partial u_0(1, s)}{\partial x}\|_{L_2}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C_6 \ln^{-2} \delta. \quad (1.2.53)$$

Сделав с функцией $w_\delta(s)$ все необходимые замены переменной, получим приближённое решение $z_\delta(t)$ задачи (1.2.1) – (1.2.5). Из (1.2.53) будет следовать существование числа $C_7 > 0$ такого, что для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ будет справедлива оценка

$$\|z_\delta(t) - z_0(t)\|_{L_2} \leq C_7 \ln^{-2} \delta.$$

1.3 Математическое моделирование процесса регистрации аномалии гравитационного поля

Задача определения запасов полезных ископаемых в геологоразведке часто формулируется как обратная задача потенциала, то есть задача определения формы области залегания полезного ископаемого по его внешнему потенциалу.

Пусть на поверхности земли $z = 0$ измеряется изменение потенциала гравитационного поля, вызванное наличием в однородной среде плотности ρ_0 области T с плотностью $\rho_1 \neq \rho_0$ [13].

В стандартной постановке предполагается, что на некоторой глубине (не ниже глубины H) есть область с плотностью ρ_1 и неизвестной поверхностью раздела двух сред, которая и вызывает эти изменения. Из-за погрешности измерений получение точных данных о возмущениях гравитационного поля невозможно, вместо них известны приближённые значения и погрешность приближения.

Обратная задача состоит в получении наиболее точного представления о форме области T по полученным возмущениям гравитационного поля Земли.

Измеряемая аномалия силы тяжести на поверхности $z = 0$ определяется уравнением

$$\Delta g(x, y) = - \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} = -\gamma_0 \Delta \rho \int \int \int_T \zeta \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^3} \Big|_{z=0},$$

где $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$.

Это уравнение связывает наблюдаемое изменение $\Delta g(x, y)$ и форму области T .

Обратная задача состоит в определении формы области T по полученным данным об изменении силы тяжести на поверхности Земли $\Delta g(x, y)$. Исходными данными считаются плотность $\rho_0 = \text{const}$ среды, плотность $\rho_1 = \text{const}$ области ($\Delta \rho = \rho_1 - \rho_0$) и глубина, выше которой область располагается. Считается, что искомая поверхность не достигает поверхности Земли.

В двумерном случае обратная задача гравиметрии сводится (см. [22]) к решению нелинейного интегрального уравнения

$$K(z(x)) \equiv \frac{\Delta \rho}{4\pi} \int_{-l}^l \ln \frac{(x - \xi)^2 + H^2}{(x - \xi)^2 + (H - z(\xi))^2} d\xi = \Delta g(x), \quad (1.3.1)$$

где $z(\xi) \in L_2[-l, l]$ — определяемая верхняя граница области T ,

$\Delta g(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ — измеряемая аномалия силы тяжести на поверхности $z = 0$.

Область распределения источников гравитационного поля, вызывающих изменение потенциала гравитационного поля, задаётся условиями

$$T = \{-l \leq \xi \leq l, -H \leq z \leq -H + z(\xi)\}.$$

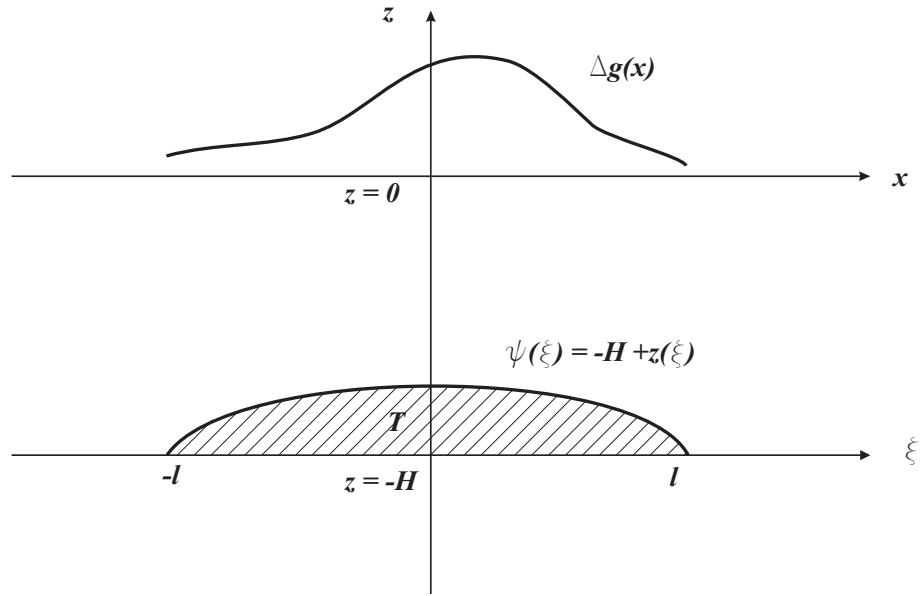


Рис. 1.1: Аномалия силы тяжести на поверхности $z = 0$

Преобразуем уравнение (1.3.1) к виду

$$Az = f(x), \quad (1.3.2)$$

где

$$Az = \int_{-l}^l \ln((x - \xi)^2 + (H - z(\xi))^2) d\xi, \quad (1.3.3)$$

$$f(x) = -\frac{4\pi}{\Delta\rho} \Delta g(x) + \int_{-l}^l \ln(H^2 + (x - \xi)^2) d\xi.$$

Оператор A действует из пространства $L_2[-l, l]$ в $L_2(-\infty, +\infty)$. При этом считаем, что функция $f(x)$ нам известна, а $z(\xi)$ требуется найти.

Предположим, что при $f(x) = f_0(x)$ уравнение (1.3.2) разрешимо, но точное значение $f_0(x)$ нам неизвестно. Вместо него даны δ -приближение $f_\delta(x)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta - f_0\| \leq \delta.$$

Требуется по исходной информации (f_δ, δ) определить множество приближённых решений M_δ такое, что

$$M_\delta \xrightarrow{\beta} M_0 \text{ при } \delta \rightarrow 0,$$

где M_0 — множество точных решений z_0 уравнения (1.3.2) при правой части $f(x) = f_0(x)$ (точное определение β -сходимости будет дано в начале второй главы).

Следующая часть пункта носит исключительно реферативный характер и посвящена описанию одного подхода, предложенного в работах [98] и [110]. В дальнейшем описанные ниже идеи будут использованы при разработке метода регуляризации и при создании алгоритма программы.

Представим оператор A в виде суперпозиции двух операторов

$$A = B \circ L, \tag{1.3.4}$$

где B действует из $L_2([-l, l] \times (-\infty, +\infty))$ в $L_2(-\infty, +\infty)$ и определяется формулой

$$Bv = \int_{-l}^l v(\xi, x) d\xi, \tag{1.3.5}$$

а оператор L действует из $L_2[-l, l]$ в $L_2([-l, l] \times (-\infty, +\infty))$, имеет область определения

$$D(L) = \{z \mid z \in L_2[-l, l], 0 \leq z(\xi) < H\}$$

и определяется формулой

$$Lz = v(\xi, x) = \ln \left((x - \xi)^2 + (H - z(\xi))^2 \right). \quad (1.3.6)$$

Относительно операторов B и L , определяемых формулами (1.3.5) и (1.3.6), справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.3.1. *Оператор B , определяемый формулой (1.3.5), линеен и ограничен [110, с. 73].*

Определение 1.3.1. Оператор A будем называть слабо-сильно замкнутым, если из того, что $u_n \xrightarrow{\text{сл}} \hat{u}$, а $Au_n \rightarrow \bar{f}$ следует, что $\hat{u} \in D(A)$ и $A\hat{u} = \bar{f}$ (см. [92]).

Лемма 1.3.2. *Оператор L , определяемый формулой (1.3.6), слабо-сильно замкнут [110, с. 73].*

Лемма 1.3.3. *Оператор L^{-1} непрерывен на множестве $R(L)$ значений оператора L , определяемого формулой (1.3.6) [110, с. 73].*

Таким образом, оператор A в уравнении (1.3.2) может быть представлен суперпозицией двух операторов, один из которых, B , определяемый формулой (1.3.5), линеен и ограничен, а второй, L , определяемый формулой (1.3.6), слабо-сильно замкнут и имеет непрерывный обратный.

Глава 2

Численные методы решения нелинейных обратных задач

2.1 Методы регуляризации нелинейных обратных задач

2.1.1 Общая постановка нелинейных обратных задач и метод регуляризации их решения

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — оператор с областью определения $D(A) \subset H$ и множеством значений $R(A) \subset H$.

Определение 2.1.1. (см. [70]) Оператор A будем называть слабо замкнутым, если из того, что $u_n \xrightarrow{\text{сл}} \hat{u}$, а $Au_n \xrightarrow{\text{сл}} \bar{f}$ следует, что $\hat{u} \in D(A)$ и $A\hat{u} = \bar{f}$.

Определение 2.1.2. (см. [97]) Оператор A будем называть слабо полужамкнутым, если из того, что $u_n \xrightarrow{\text{сл}} \hat{u}$, а $Au_n \xrightarrow{\text{сл}} \bar{f}$ следует, что существует элемент $\bar{u} \in D(A)$ такой, что $A\bar{u} = \bar{f}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \geq \|\bar{u}\|$.

Определение 2.1.3. (см. [41]) Будем говорить, что последовательность множеств $\{M_n\}$ из метрического пространства X β -сходится к множеству $M_0 \subset X$, если

$$\beta(M_n, M_0) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\beta(M_n, M_0) = \sup\{\rho(x, M_0) : x \in M_n\}$, и обозначать

$$M_n \xrightarrow{\beta} M_0.$$

Из определений 2.1.1, 2.1.2 и 1.3.1 следует, что слабо замкнутый оператор является слабо полузамкнутым и слабо-сильно замкнутым (см. [136]). В той же работе показано, что обратное, вообще говоря, не верно, то есть слабо полузамкнутый и слабо-сильно замкнутый оператор может не быть слабо замкнутым. Кроме того, в [136] приводится пример слабо полузамкнутого оператора, не являющегося слабо-сильно замкнутым.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \tag{2.1.1}$$

где $u \in D(A)$, $f \in H$. Предположим, что при $f = f_0$ оно разрешимо, но точное значение правой части f_0 уравнения (2.1.1) нам не известно. При этом вместо f_0 даны приближённое значение f_δ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \leq \delta$.

Требуется по исходным данным $\{f_\delta, \delta\}$ построить приближённое решение u_δ , близкое к точному решению $M_0 = \{\bar{u}_0 : A\bar{u}_0 = f_0\}$ уравнения (2.1.1) при $f = f_0$.

Метод регуляризации (см. [113]), заключается в сведении поставленной задачи к вариационной:

$$\inf\left\{\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in D(A)\right\}, \tag{2.1.2}$$

где $\alpha > 0$.

Теорема 2.1.1. *Если оператор A слабо полузамкнут, то вариационная задача (2.1.2) разрешима.*

Доказательство. Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{u_n\}$ такую, что $\{u_n\} \subset D(A)$ и

$$\|Au_n - f_\delta\|^2 + \alpha \|u_n\|^2 \rightarrow \inf \left\{ \|Au - f_\delta\|^2 + \alpha \|u\|^2 : u \in D(A) \right\}. \quad (2.1.3)$$

Из соотношения (2.1.3) следует ограниченность последовательностей $\{u_n\}$, $\{Au_n\}$, $\{Au_n - f_\delta\}$. Так как пространство H гильбертово, то соответствующие последовательности слабо компактны. Без ограничения общности можем считать, что

$$u_n \xrightarrow{c.l.} \hat{u}, \quad (2.1.4)$$

$$Au_n \xrightarrow{c.l.} \bar{f}, \quad (2.1.5)$$

$$Au_n - f_\delta \xrightarrow{c.l.} \bar{f} - f_\delta \quad (2.1.6)$$

Из слабой полузамкнутости оператора A и соотношений (2.1.4) и (2.1.5) следует существование элемента $\bar{u} \in D(A)$ такого, что $A\bar{u} = \bar{f}$ и

$$\|\bar{u}\| \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|. \quad (2.1.7)$$

По свойству нормы слабого предела из (2.1.6) следует, что

$$\|A\bar{u} - f_\delta\| \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|Au_n - f_\delta\| \quad (2.1.8)$$

Из (2.1.7) и (2.1.8) следует, что

$$\|A\bar{u} - f_\delta\|^2 + \alpha \|\bar{u}\|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \|Au_n - f_\delta\|^2 + \alpha \|u_n\|^2 \right\},$$

то есть элемент $\bar{u}$ является решением вариационной задачи (2.1.2). Теорема доказана. $\square$

В дальнейшем множество решений задачи (2.1.2) будем обозначать через M_δ^α и называть приближённым решением уравнения (2.1.1), полученным методом регуляризации.

Теорема 2.1.2. *Пусть оператор A слабо полузамкнут и слабо-сильно замкнут. Тогда множество M_δ^α решений вариационной задачи (2.1.2) замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\{u_n\} \subset M_\delta^\alpha$ и $u_n \rightarrow \hat{u}$. Тогда по определению множества M_δ^α для любого n

$$\|Au_n - f_\delta\|^2 + \alpha \|u_n\|^2 = \inf \left\{ \|Au - f_\delta\|^2 + \alpha \|u\|^2 : u \in D(A) \right\}. \quad (2.1.9)$$

Из соотношения (2.1.9) следует ограниченность последовательности $\{Au_n - f_\delta\}$, а поскольку пространство H гильбертово, то и её слабая компактность. Без ограничения общности будем считать, что

$$Au_n \xrightarrow{сл} \bar{f} \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.1.10)$$

Так как оператор A слабо полузамкнут, то из (2.1.10) следует существование элемента $\bar{u}$ такого, что

$$A\bar{u} = \bar{f} \quad (2.1.11)$$

и

$$\|\bar{u}\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|. \quad (2.1.12)$$

Из (2.1.9), (2.1.11) и (2.1.12) следует, что

$$\|\bar{f} - f_\delta\| \geq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \|Au_n - f_\delta\|, \quad (2.1.13)$$

а из (2.1.10) по свойству нормы слабого предела, что

$$\|\bar{f} - f_\delta\| \leq \underline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \|Au_n - f_\delta\|. \quad (2.1.14)$$

Из соотношений (2.1.13) и (2.1.14) следует, что

$$\|\bar{f} - f_\delta\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Au_n - f_\delta\|, \quad (2.1.15)$$

а из (2.1.10) и (2.1.15), что

$$Au_n \rightarrow \bar{f}. \quad (2.1.16)$$

Из соотношения (2.1.16) и слабо-сильной замкнутости оператора A следует, что $\hat{u} \in D(A)$ и

$$A\hat{u} = \bar{f}, \quad (2.1.17)$$

а из (2.1.9), (2.1.16), (2.1.17) и того, что $u_n \rightarrow \hat{u}$, имеем

$$\|A\hat{u} - f_\delta\|^2 + \alpha\|\hat{u}\|^2 = \inf \left\{ \|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in D(A) \right\},$$

что и доказывает замкнутость множества M_δ^α . $\square$

Обозначим через $\bar{P}_\alpha$ многозначное отображение, которое каждому элементу $\bar{f} \in H$ ставит в соответствие множество $\bar{M}^\alpha$ решений вариационной задачи (2.1.2) при $f_\delta = \bar{f}$.

Определение 2.1.4. Многозначное отображение φ , действующее из метрического пространства X в метрическое пространство Y , будем называть H -полунепрерывным сверху, если для любого $x \in X$ множество $\varphi(x)$ не пусто и замкнуто, а условие $x_n \rightarrow x$ влечёт $\varphi(x_n) \xrightarrow{\beta} \varphi(x)$ (см. [33]).

Теорема 2.1.3. Пусть оператор A слабо полузамкнут и слабо-сильно замкнут. Тогда отображение $\bar{P}_\alpha$ является H -полунепрерывным сверху.

Доказательство. Тот факт, что для любого элемента $\bar{f} \in H$ множество $\bar{P}_\alpha(\bar{f})$ не пусто и замкнуто, доказан в теоремах 2.1.1 и 2.1.2.

Проверим β -сходимость, когда из условия $\bar{f}_n \rightarrow \bar{f}$ следует

$$\overline{M}^{\alpha,n} \xrightarrow{\beta} \overline{M}^{\alpha}.$$

Предположим противное, что найдутся число $d > 0$ и последовательность $\{\bar{u}_n\}$, $\bar{u}_n \in \overline{M}^{\alpha,n}$ такие, что для любого n

$$\rho(\bar{u}_n, \overline{M}^{\alpha}) \geq \alpha. \quad (2.1.18)$$

Пусть $\bar{u} \in \overline{M}^{\alpha}$. Тогда для любого n справедливо соотношение

$$\|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\|^2 + \alpha\|\bar{u}_n\|^2 \leq \|A\bar{u} - \bar{f}_n\|^2 + \alpha\|\bar{u}\|^2. \quad (2.1.19)$$

Из того, что $\bar{f}_n \rightarrow \bar{f}$, следует

$$\|A\bar{u} - \bar{f}_n\|^2 + \alpha\|\bar{u}\|^2 \rightarrow \|A\bar{u} - \bar{f}\|^2 + \alpha\|\bar{u}\|^2. \quad (2.1.20)$$

Из соотношений (2.1.13) и (2.1.14) получаем

$$\|A\bar{u} - \bar{f}_n\|^2 + \alpha\|\bar{u}\|^2 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\|^2 + \alpha\|\bar{u}_n\|^2 \right\}. \quad (2.1.21)$$

Из (2.1.21) следует слабая компактность последовательностей $\{\bar{u}_n\}$, $\{A\bar{u}_n\}$, $\{A\bar{u}_n - \bar{f}_n\}$.

Без ограничения общности можем считать, что

$$\bar{u}_n \xrightarrow{c_n} \hat{u}, \quad (2.1.22)$$

$$A\bar{u}_n \xrightarrow{c_n} \tilde{f}, \quad (2.1.23)$$

$$A\bar{u}_n - \bar{f}_n \xrightarrow{c_n} \tilde{f} - \bar{f}. \quad (2.1.24)$$

Так как оператор A слабо полузамкнут, то из соотношений (2.1.22) и (2.1.23) следует существование элемента $\tilde{u}$ такого, что

$$A\tilde{u} = \tilde{f} \quad (2.1.25)$$

и

$$\|\tilde{u}\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{u}_n\|. \quad (2.1.26)$$

Тогда из (2.1.24) и (2.1.25) по свойству нормы слабого предела будет следовать, что

$$\|A\tilde{u} - \bar{f}\| \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\|, \quad (2.1.27)$$

а из (2.1.26) и (2.1.27)

$$\|A\tilde{u} - \bar{f}\|^2 + \alpha\|\tilde{u}\|^2 \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\|^2 + \alpha\|\bar{u}_n\|^2 \right\}. \quad (2.1.28)$$

Так как $\bar{u} \in \overline{M}^\alpha$, то из (2.1.21) и (2.1.28) следует, что

$$\|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\|^2 + \alpha\|\bar{u}_n\|^2 \rightarrow \|A\tilde{u} - \bar{f}\|^2 + \alpha\|\tilde{u}\|^2, \quad (2.1.29)$$

а из (2.1.25) – (2.1.27) и (2.1.29), что

$$\|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\| \rightarrow \|\tilde{f} - \bar{f}\|. \quad (2.1.30)$$

Таким образом, из (2.1.24) и (2.1.30) следует, что

$$A\bar{u}_n \rightarrow \tilde{f}. \quad (2.1.31)$$

Учитывая слабо-сильную замкнутость оператора A и соотношения (2.1.22) и (2.1.31), получим, что $\hat{u} \in D(A)$, а

$$A\hat{u} = \tilde{f}. \quad (2.1.32)$$

Из (2.1.22) по свойству нормы слабого предела

$$\|\hat{u}\| \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|\bar{u}_n\|, \quad (2.1.33)$$

а из (2.1.25), (2.1.27) и (2.1.32)

$$\|A\hat{u} - \bar{f}\| \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\|. \quad (2.1.34)$$

Таким образом, из (2.1.33) и (2.1.34) имеем, что

$$\|A\hat{u} - \bar{f}_n\|^2 + \alpha\|\hat{u}\|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\|^2 + \alpha\|\bar{u}_n\|^2 \right\}, \quad (2.1.35)$$

а из того, что $\bar{u} \in \overline{M}^\alpha$, из (2.1.21) и (2.1.35) получаем

$$\|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\|^2 + \alpha\|\bar{u}_n\|^2 \rightarrow \|A\hat{u} - \bar{f}\|^2 + \alpha\|\hat{u}\|^2. \quad (2.1.36)$$

Из (2.1.33), (2.1.34) и (2.1.36) следует, что

$$\|\bar{u}_n\| \rightarrow \|\hat{u}\|, \quad (2.1.37)$$

а из (2.1.22) и (2.1.37), что

$$\bar{u}_n \rightarrow \hat{u}. \quad (2.1.38)$$

Так как из (2.1.1) и (2.1.16) вытекает

$$\hat{u} \in \overline{M}^\alpha,$$

то соотношение (2.1.38) противоречит (2.1.18), что и доказывает теорему. $\square$

Теорема 2.1.4. Пусть оператор A слабо полужамкнут и слабо-сильно замкнут. Тогда, если параметр регуляризации α связать с уровнем погрешности исходных данных δ таким образом, что $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta^2/\alpha(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, то имеет место β -сходимость приближённых решений $M_\delta^{\alpha(\delta)}$, полученных методом регуляризации, к множеству точных решений M_0 уравнения (2.1.1).

Доказательство. Предположим противное. Пусть числа δ_n образуют бесконечно малую последовательность: $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда найдутся число $d > 0$ и последовательность $\{\bar{u}_n\}$ такие, что для любого n

$$\bar{u}_n \in M_{\delta_n}^{\alpha(\delta_n)},$$

$\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и для любого n

$$\rho(\bar{u}_n, M_0) \geq d. \quad (2.1.39)$$

Пусть $\bar{u}_0 \in M_0$. Тогда для любого n выполняется соотношение

$$\|A\bar{u}_n - f_{\delta_n}\|^2 + \alpha(\delta_n)\|\bar{u}_n\|^2 \leq \|A\bar{u}_0 - f_{\delta_n}\|^2 + \alpha(\delta_n)\|\bar{u}_0\|^2. \quad (2.1.40)$$

Так как $A\bar{u}_0 = f_0$, а $\|f_0 - f_{\delta_n}\| \leq \delta_n$, то из (2.1.40) следует, что для любых n справедливы неравенства

$$\|\bar{u}_n\|^2 \leq \|\bar{u}_0\|^2 + \delta_n^2/\alpha(\delta_n) \quad (2.1.41)$$

и

$$\|A\bar{u}_n - f_{\delta_n}\|^2 \leq \delta_n^2 + \alpha(\delta_n)\|\bar{u}_0\|^2. \quad (2.1.42)$$

На основании (2.1.42) заключаем, что

$$A\bar{u}_n \rightarrow f_0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (2.1.43)$$

а неравенство (2.1.41) влечёт ограниченность последовательности $\{\bar{u}_n\}$. Без ограничения общности можем считать, что

$$\bar{u}_n \xrightarrow{ca} \hat{u}. \quad (2.1.44)$$

Из (2.1.41) получаем

$$\|\bar{u}_0\| \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{u}_n\|. \quad (2.1.45)$$

Тогда (2.1.43), (2.1.44) и (2.1.45) дают

$$\rho(\bar{u}_n, M_0) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

что противоречит соотношению (2.1.39). □

В случае слабо-сильно замкнутого оператора A вариационная задача (2.1.2) может не иметь решений (см. [110, с. 30]). Метод регуляризации к решению операторного уравнения (2.1.1) в таком случае неприменим. Его обобщение, которое решает эту проблему, приводится в следующем параграфе.

2.1.2 Обобщённый метод L-регуляризации в обратной задаче гидродинамики

Пусть U , F и G — сепарабельные гильбертовы пространства, а A и L — слабо замкнутые операторы с областями определения $D(A), D(L) \subset U$ и множествами значений $R(A) \subset F$, $R(L) \subset G$. Далее предполагаем, что $D(A) \cap D(L) \neq \emptyset$.

Определение 2.1.5. Оператор A будем называть L -полузамкнутым снизу, если из того, что $\bar{f} \in R(A)$ и $Au_n \rightarrow \bar{f}$, а

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \|Lu_n\| \leq \inf\{\|Lu\| : u \in D(A) \cap D(L), Au = \bar{f}\},$$

следует, что $\rho(u_n, \bar{M}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где $\bar{M} = \{u : u \in D(A), Au = \bar{f}\}$.

Замечание 2.1.1. Понятие L -полузамкнутого снизу оператора A обобщает понятия слабо замкнутого и слабо-сильно замкнутого операторов.

Рассмотрим операторное уравнение (2.1.1)

$$Au = f,$$

где $u \in D = D(A) \cap D(L)$, $f \in F$. Будем предполагать, что при $f = f_0$ существует точное решение $u_0 \in D$ уравнения (2.1.1), но вместо f_0 нам известно приближённое значение f_δ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \leq \delta$.

Требуется по исходной информации $\{f_\delta, \delta\}$ построить множество приближённых решений M_δ , близкое к множеству точных решений $M_0 \subset D$ уравнения (2.1.1) при $f = f_0$.

Обобщённый метод L -регуляризации заключается в сведении поставленной задачи к вариационной:

$$\inf \{ \|Au - f_\delta\|^2 + \alpha \|Lu\|^2 : u \in D, \alpha > 0 \}, \quad (2.1.46)$$

Так как вариационная задача (2.1.46) при общих предположениях об операторах A и L может не иметь решения, множество приближённых решений $M_{\delta}^{\alpha, \varepsilon}$ уравнения (2.1.1) определим формулой

$$M_{\delta}^{\alpha, \varepsilon} = \{ \bar{u} \mid \bar{u} \in D, \|A\bar{u} - f_{\delta}\|^2 + \alpha \|L\bar{u}\|^2 \leq \\ \leq \inf[\|Au - f_{\delta}\|^2 + \alpha \|Lu\|^2 : u \in D] + \varepsilon \}, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.1.47)$$

Замечание 2.1.2. Очевидно, что множество $M_{\delta, \varepsilon}^{\alpha}$, определяемое таким образом, не пусто. Имеет место утверждение, аналогичное теореме 2.1.4. А именно, в работе [110, с. 84] доказано, что если оператор A слабо-сильно замкнут, а параметр регуляризации α связан с уровнем погрешности исходных данных δ и ε таким образом, что $\alpha(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0$, $(\delta^2 + \varepsilon)/\alpha(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\delta, \varepsilon \rightarrow 0$, то имеет место β -сходимость приближённых решений $M_{\delta, \varepsilon}^{\alpha(\delta, \varepsilon)}$ к множеству точных решений M_0 уравнения (2.1.1).

Замечание 2.1.3. Для того, чтобы для любого $f_0 \in D(A)$ имела место β -сходимость приближённых решений $M_{\delta}^{\alpha(\delta), \varepsilon(\delta)}$, к множеству точных решений M_0 уравнения (2.1.1) при условии, что $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$, $\frac{\delta^2 + \varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был L -полузамкнутым снизу (см. [110, с. 87]).

2.1.3 Применение обобщённого метода L-регуляризации в обратной задаче потенциала

Применим к решению уравнения (1.3.2)

$$Az = f(x)$$

с оператором, представленным в виде (1.3.4)

$$A = B \circ L,$$

обобщённый метод L -регуляризации. Так как для операторов A и L , определяемых формулами (1.3.3) и (1.3.6), выполняется соотношение

$$D(A) = D(L),$$

то для уравнения (1.3.2), описывающего обратную задачу гравиметрии, применима теория регуляризации А. Н. Тихонова, то есть задача (1.3.2) – (1.3.3) может быть сведена к вариационной задаче [110, с. 75]:

$$\inf \{ \|Az - f_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|Lz\|_{L_2}^2 : z \in D(A) \}, \quad (2.1.48)$$

где $\alpha > 0$, а операторы A и L определены формулами (1.3.3) и (1.3.6) соответственно.

Так как оператор A , определяемый формулой (1.3.3), не является L -слабо полузамкнутым (см. [110, с. 77]), то вариационная задача (2.1.48) может не иметь решения. Поэтому в качестве множества $M_\delta^{\alpha, \varepsilon}$ приближённых решений уравнения (1.3.2) возьмём множество, на котором выполняется условие

$$\begin{aligned} M_\delta^{\alpha, \varepsilon} = \{ \bar{z} \mid \bar{z} \in D(L), \|A\bar{z} - f_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|L\bar{z}\|_{L_2}^2 \leq \\ \leq \inf [\|Az - f_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|Lz\|_{L_2}^2 : z \in D(A)] + \varepsilon \}, \end{aligned} \quad (2.1.49)$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Согласно теореме [110, с. 69], если $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ выбрать такими, что $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$, $(\delta^2 + \varepsilon(\delta))/\alpha(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, то будет иметь место β -сходимость приближённых решений $M_\delta^{\alpha(\delta), \varepsilon(\delta)}$ к множеству точных решений M_0 уравнения (1.3.3), отвечающих значению правой части $f(t) = f_0(t)$:

$$M_\delta^{\alpha(\delta), \varepsilon(\delta)} \xrightarrow{\beta} M_0.$$

Следуя [137] и [110], рассмотрим возможность применения обобщённого метода L -регуляризации к решению задачи определения

коэффициента гидропроводности (1.1.7) – (1.1.11):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma(\rho) \frac{\partial u}{\partial \rho} \right],$$

$$u(\rho, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial u(\bar{r}, t)}{\partial \rho} = 0,$$

$$u(r_0, t) = f(t),$$

$$\frac{\partial u(r_0, t)}{\partial \rho} = g(t),$$

где $0 < r_0 \leq \rho \leq \bar{r}$.

Пусть $\sigma(\rho)$ — функция из пространства $L_2[r_0, \bar{r}]$, удовлетворяющая условию

$$d \leq \sigma(\rho) \leq d_1, \quad (2.1.50)$$

где d и d_1 — некоторые положительные числа. Последнее требование аналогично условию (1.1.5).

Определим оператор A , действующий из пространства $L_2[r_0, \bar{r}]$ в $L_2[r_0, \bar{r}]$, формулой

$$A\varphi(\rho) = \sqrt{\rho\sigma(\rho)} \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho}, \quad \varphi, A\varphi \in L_2[r_0, \bar{r}], \quad (2.1.51)$$

с областью определения

$$D(A) = \{\varphi : \varphi, \varphi' \in L_2[r_0, \bar{r}], \varphi(r_0) = 0\}. \quad (2.1.52)$$

Тогда сопряжённый оператор A' будет иметь вид

$$A'\psi(\rho) = -\frac{d}{d\rho} \left[\sqrt{\rho\sigma(\rho)} \psi(\rho) \right], \quad \psi, A'\psi \in L_2[r_0, \bar{r}], \quad (2.1.53)$$

с областью определения

$$D(A') = \{\psi : \psi, \frac{d}{d\rho} \left[\sqrt{\rho\sigma(\rho)} \psi(\rho) \right] \in L_2[r_0, \bar{r}], \psi(\bar{r}) = 0\}. \quad (2.1.54)$$

Таким образом, оператор $A'A$ будет отображать пространство $L_2[r_0, \bar{r}]$ в $L_2[r_0, \bar{r}]$ и иметь область определения $D(A'A)$ и множество значений $R(A'A)$, всюду плотные в пространстве $L_2[r_0, \bar{r}]$.

Пусть $T > 0$, а $H = L_2[r_0, \bar{r}]$. Введем ещё одно гильбертово пространство

$$W(0, T) = \{f : f \in L_2[H; [0, T]], \frac{df}{dt} \in L_2[H; [0, T]]\}. \quad (2.1.55)$$

Это пространство снабжено нормой

$$\|f\|_{W(0, T)} = \left[\int_0^T \|f(t)\|_H^2 dt + \int_0^T \left\| \frac{df(t)}{dt} \right\|_H^2 dt \right]^{1/2}. \quad (2.1.56)$$

Известно (см. [76]), что

$$W(0, T) \subset C^0([0, T]; H), \quad (2.1.57)$$

где $C^0([0, T]; H)$ — пространство непрерывных отображений отрезка $[0, T]$ в пространство H .

Теперь продолжим оператор $A'A$ на пространство $W(0, T)$, положив для функции $u(\rho, t) \in W(0, T)$

$$A'Au(\rho, t) \in L_2[H; [0, T]]. \quad (2.1.58)$$

Из формулы (2.1.58) следует, что оператор $A'A$, продолженный на $W(0, T)$, будет иметь область определения $D(A'A)$, всюду плотную в $W(0, T)$. Кроме того, если рассматривать его действующим из пространства $W(0, T)$ в $L_2[H; [0, T]]$, то он будет замкнут.

Процесс фильтрации, следуя [102], описывается задачей

$$\frac{\partial u(\rho, t)}{\partial t} + A'Au(\rho, t) = f'(t), \quad (2.1.59)$$

$$u(\rho, 0) = 0, \quad (2.1.60)$$

где $u \in W(0, T)$, $f' \in L_2[0, T]$ и является производной заданной функции $f(t)$ такой, что $f(0) = 0$. Условие (1.1.11) удобней переписать в виде

$$r_0 \sigma(r_0) \frac{\partial u(r_0, t)}{\partial \rho} = g_1(t), \quad (2.1.61)$$

что вместе с использованием (2.1.59) и (2.1.60) приводит к уравнению

$$\int_{r_0}^{\bar{r}} u(\rho, t) \rho d\rho = G(t) + \frac{(\bar{r}^2 - r_0^2)}{2} f(t), \quad (2.1.62)$$

где $G(t) = \int_0^t g_1(\tau) d\tau$.

Проинтегрировав равенство (2.1.59) по t и воспользовавшись условием (2.1.60), получим

$$u(\rho, t) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma(\rho) \frac{\partial v(\rho, t)}{\partial \rho} \right] + f(t), \quad (2.1.63)$$

где $v(\rho, t) = \int_0^t u(\rho, \tau) d\tau$.

Теперь проинтегрируем равенство (2.1.63) по ρ и воспользуемся условием (2.1.62):

$$y(\rho, t) - \rho \sigma(\rho) \frac{\partial v(\rho, t)}{\partial \rho} = G(t) + \frac{(\rho^2 - r_0^2)}{2} f(t), \quad (2.1.64)$$

где $y(\rho, t) = \int_{r_0}^{\rho} u(\xi, t) \xi d\xi$.

Из (2.1.64) следует, что функция принадлежит пространству Соболева $H^1([r_0, \bar{r}] \times [0, T])$. Теперь проинтегрируем равенство (2.1.63) по ρ и воспользуемся условием (2.1.62):

$$y(\bar{r}, t) = G(t) + \frac{(\bar{r}^2 - r_0^2)}{2} f(t). \quad (2.1.65)$$

Для приближённого решения уравнения (2.1.64), с которым связана обратная задача фильтрации (2.1.59) – (2.1.62), введем исходные пространства и операторы.

Пусть $\psi_1, \psi_2 \in C[r_0, \bar{r}]$, $\psi_1(r_0) = \psi_2(r_0) = \sigma(r_0) \neq 0$ и $\psi_1(\bar{r}) = \psi_2(\bar{r}) = \sigma(\bar{r}) \neq 0$. Для любого $\rho \in (r_0, \bar{r})$

$$0 < \psi_1(\rho) < \psi_2(\rho).$$

Предположим, что коэффициент $\sigma(\rho)$ уравнения (2.1.64) принадлежит метрическому пространству Z , определяемому следующим образом:

$$Z = \{\sigma : \sigma \in L_2[r_0, \bar{r}], \psi_1(\rho) \leq \sigma(\rho) \leq \psi_2(\rho), \rho \in [r_0, \bar{r}]\}, \quad (2.1.66)$$

в котором метрика d_Z определяется как $d_Z(\sigma_1, \sigma_2) = \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L_2}$.

Пусть оператор L действует из пространства $L_2([r_0, \bar{r}] \times [0, T])$ в пространство $H^1([r_0, \bar{r}] \times [0, T])$ и определён формулой

$$Lv = \int_{r_0}^{\rho} v'_t(\xi, t) \xi d\xi, \quad (2.1.67)$$

а оператор C действует из пространства $Z \times L_2([r_0, \bar{r}] \times [0, T])$ в $L_2([r_0, \bar{r}] \times [0, T])$ по формуле

$$C(\sigma, v) = \rho\sigma(\rho) \frac{\partial v(\rho, t)}{\partial \rho} \quad (2.1.68)$$

и имеет область определения

$$D(C) = \left\{ (\sigma, v) : \sigma \in Z, v \in H^1([r_0, \bar{r}] \times [0, T]), \right. \\ \left. \frac{\partial v(r_0, t)}{\partial \rho} = 0, \rho\sigma(\rho) \frac{\partial v(\rho, t)}{\partial \rho} \in H^1([r_0, \bar{r}] \times [0, T]) \right\}. \quad (2.1.69)$$

Обозначим через B оператор, действующий из пространства $Z \times L_2([r_0, \bar{r}] \times [0, T])$ в пространство $L_2([r_0, \bar{r}] \times [0, T])$ и определяемый формулой

$$B(\sigma, v) = Lv - C(\sigma, v). \quad (2.1.70)$$

Теперь уравнение (2.1.64) может быть переписано в операторном виде:

$$B(\sigma, v) = G(t) + \frac{(\rho^2 - r_0^2)}{2} f(t), \quad (2.1.71)$$

где $f(t)$ и $G(t)$ были определены ранее.

Теперь предположим, что при $f(t) = f_0(t)$ и $G(t) = G_0(t)$ существует точное решение (σ_0, v_0) уравнения (2.1.71), но вместо $f_0(t), G_0(t)$ нам известны лишь их δ -приближения f_δ и $G_\delta \in H^1[r_0, \bar{r}]$ такие, что $\|f_\delta - f_0\|_{L_2} \leq \delta$, $\|G_\delta - G_0\|_{H^1} \leq \delta$, $f_\delta(0) = G_\delta(0) = 0$.

Требуется по исходной информации $\{f_\delta, G_\delta, \delta\}$ построить множество приближённых решений $M_\delta \subset D(B)$ такое, что имеется β -сходимость множества M_δ к множеству точных решений $M_0 \subset D(B)$ уравнения (2.1.71) при $\delta \rightarrow 0$.

Замечание 2.1.4. В [137] и [110] для различных случаев обратной задачи фильтрации доказывается теорема о L -полузамкнутости снизу оператора B . В частности, если операторы B и L определены формулами (2.1.67)–(2.1.70), то оператор B является L -полузамкнутым снизу. Таким образом, учитывая замечание 2.1.3, мы получаем полное обоснование сходимости метода регуляризации в задаче определения коэффициента гидропроводности пласта при условии $\sigma(\rho) \in L_2[r_0, \bar{r}]$.

2.2 Аппроксимация регуляризованных решений

2.2.1 Аппроксимация регуляризованного решения операторного уравнения

Определение 2.2.1. Последовательность операторов $\{A_n\}$ будем называть A -полной, если для любого элемента $u \in D(A)$ найдётся последовательность $\{u_n\}$ такая, что при всяком значении n $u_n \in D(A)$, $u_n \rightarrow u$, а $A_n u_n \rightarrow Au$ при $n \rightarrow \infty$ (см. [26]).

Определение 2.2.2. Пару $A, \{A_n\}$ будем называть слабо полузамкнутой, если из того, что последовательность $\{u_n\}$ ограничена, а $A_n u_n \xrightarrow{\text{сл}} \bar{f}$ следует, что существует элемент $\bar{u} \in D(A)$ такой, что $A\bar{u} = \bar{f}$ и $\|\bar{u}\| \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|$ (см. [97]).

Определение 2.2.3. Пару $A, \{A_n\}$ будем называть слабо-сильно замкнутой, если из того, что $u_n \xrightarrow{\text{сл}} \hat{u}$, а $A_n u_n \rightarrow \bar{f}$ следует, что $\hat{u} \in D(A)$ и $A\hat{u} = \bar{f}$ (см. [97]).

Наряду с вариационной задачей для операторного уравнения (2.1.1) рассмотрим также вариационную задачу

$$\inf \left\{ \left\| A_n u - f_\delta^{(n)} \right\|^2 + \alpha \|u\|^2 : u \in D(A_n) \right\}, \quad (2.2.1)$$

где $\alpha > 0$.

Если предположить слабую полузамкнутость пары $A, \{A_n\}$, то вариационные задачи (2.1.2) и (2.2.1) будут разрешимы. Обозначим решение задачи (2.2.1) через $M_\delta^{\alpha, n}$.

Теорема 2.2.1. Пусть $f_\delta^{(n)} \rightarrow f_\delta$, последовательность операторов $\{A_n\}$ является A -полной, и для любой подпоследова-

тельности $\{A_{n_k}\}$ пара $A, \{A_{n_k}\}$ слабо полузамкнута и слабо-сильно замкнута. Тогда имеет место β -сходимость аппроксимаций $M_\delta^{\alpha, n}$ к регуляризованному решению M_δ^α .

Доказательство. Предположим противное, что найдутся число $\alpha > 0$ и подпоследовательность $\{u_{n_k}\}, u_{n_k} \in M_\delta^{\alpha, n_k}$ такие, что для любого k

$$\rho(u_{n_k}, M_\delta^\alpha) \geq d. \quad (2.2.2)$$

Так как последовательность операторов $\{A_{n_k}\}$ является A -полной, то для всякого элемента $\bar{u} \in M_\delta^\alpha$ найдётся последовательность $\{\bar{u}_k\}, \bar{u}_k \in D(A_{n_k})$ такая, что

$$\bar{u}_k \rightarrow \bar{u}, \quad (2.2.3)$$

а

$$A_{n_k} \bar{u}_k \rightarrow A\bar{u}. \quad (2.2.4)$$

Из (2.2.3) и (2.2.4) следует, что

$$\left\| A_{n_k} \bar{u}_k - f_\delta^{(n_k)} \right\|^2 + \alpha \|\bar{u}_k\|^2 \rightarrow \|A\bar{u} - f_\delta\|^2 + \alpha \|\bar{u}\|^2. \quad (2.2.5)$$

Учитывая, что $u_{n_k} \in M_\delta^{\alpha, n_k}$, получим

$$\left\| A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{(n_k)} \right\|^2 + \alpha \|u_{n_k}\|^2 \leq \left\| A\bar{u}_k - f_\delta^{(n_k)} \right\|^2 + \alpha \|\bar{u}_k\|^2. \quad (2.2.6)$$

Таким образом, из (2.2.5) и (2.2.6) следует, что

$$\overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} \left\{ \left\| A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{(n_k)} \right\|^2 + \alpha \|u_{n_k}\|^2 \right\} \leq \|A\bar{u} - f_\delta\|^2 + \alpha \|\bar{u}\|^2. \quad (2.2.7)$$

Из (2.2.7) следует слабая компактность последовательностей $\{u_{n_k}\}, \{A_{n_k} u_{n_k}\}$, и $\left\{ A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{(n_k)} \right\}$. Без ограничения общности можем считать, что

$$u_{n_k} \xrightarrow{\text{сл}} \hat{u}, \quad (2.2.8)$$

$$A_{n_k} u_{n_k} \xrightarrow{\text{сл}} \tilde{f}, \quad (2.2.9)$$

и

$$A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{(n_k)} \xrightarrow{\text{сл}} \tilde{f} - f_\delta. \quad (2.2.10)$$

Так как пара $A, \{A_{n_k}\}$ слабо полузамкнута, то на основании (2.2.8) и (2.2.9) получим, что $\tilde{f} \in R(A)$ и существует элемент $\tilde{u}$ такой, что

$$A\tilde{u} = \tilde{f}, \quad (2.2.11)$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k}\| \geq \|\tilde{u}\|. \quad (2.2.12)$$

Из (2.2.10) и свойства нормы слабого предела следует, что

$$\|\tilde{f} - f_\delta\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{(n_k)}\|. \quad (2.2.13)$$

Из (2.2.11) – (2.2.13) вытекает

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \|A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{(n_k)}\|^2 + \alpha \|u_{n_k}\|^2 \right\} \geq \|A\tilde{u} - f_\delta\|^2 + \alpha \|\tilde{u}\|^2. \quad (2.2.14)$$

Так как $\bar{u} \in M_\delta^\alpha$, то

$$\|A\tilde{u} - f_\delta\|^2 + \alpha \|\tilde{u}\|^2 \geq \|A\bar{u} - f_\delta\|^2 + \alpha \|\bar{u}\|^2. \quad (2.2.15)$$

Из соотношений (2.2.14) и (2.2.15) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \|A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{(n_k)}\|^2 + \alpha \|u_{n_k}\|^2 \right\} \geq \|A\bar{u} - f_\delta\|^2 + \alpha \|\bar{u}\|^2. \quad (2.2.16)$$

Из (2.2.7) и (2.2.16) следует, что

$$\|A\tilde{u} - f_\delta\|^2 + \alpha \|\tilde{u}\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \|A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{(n_k)}\|^2 + \alpha \|u_{n_k}\|^2 \right\}. \quad (2.2.17)$$

Учитывая соотношения (2.2.11) – (2.2.13) и (2.2.17), получим, что

$$\|A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{(n_k)}\| \rightarrow \|A\tilde{u} - f_\delta\|. \quad (2.2.18)$$

Из (2.2.10), (2.2.11), и (2.2.18) следует, что

$$A_{n_k} u_{n_k} \rightarrow \tilde{f}. \quad (2.2.19)$$

Так как пара $A, \{A_{n_k}\}$ слабо-сильно замкнута, то на основании (2.2.8) и (2.2.19) получим, что

$$\hat{u} \in D(A) \quad (2.2.20)$$

и

$$A\hat{u} = \tilde{f}. \quad (2.2.21)$$

Из (2.2.8)–(2.2.10), (2.2.20) и (2.2.21) по свойству нормы слабого предела имеем, что

$$\|A\hat{u} - f_\delta\|^2 + \alpha\|\hat{u}\|^2 \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \left\{ \|A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{(n_k)}\|^2 + \alpha\|u_{n_k}\|^2 \right\} \quad (2.2.22)$$

и

$$\|\hat{u}\| \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k}\|. \quad (2.2.23)$$

Так как в силу $\bar{u} \in M_\delta^\alpha$, выполняется

$$\|A\hat{u} - f_\delta\|^2 + \alpha\|\hat{u}\|^2 \geq \|A\bar{u} - f_\delta\|^2 + \alpha\|\bar{u}\|^2, \quad (2.2.24)$$

то из (2.2.7), (2.2.22) и (2.2.24) имеем

$$\hat{u} \in M_\delta^\alpha \quad (2.2.25)$$

и

$$\|A\hat{u} - f_\delta\|^2 + \alpha\|\hat{u}\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \|A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{(n_k)}\|^2 + \alpha\|u_{n_k}\|^2 \right\}. \quad (2.2.26)$$

Из (2.2.23) и (2.2.26) следует, что

$$\|u_{n_k}\| \rightarrow \|\hat{u}\|, \quad (2.2.27)$$

а из (2.2.8) и (2.2.27) следует, что

$$u_{n_k} \rightarrow \hat{u}. \quad (2.2.28)$$

Соотношения (2.2.25) и (2.2.28) противоречат (2.2.2), что и доказывает теорему. $\square$

2.2.2 Конечномерные аппроксимации при численном решении обратной задачи потенциала

Для решения задачи (1.3.2)–(1.3.3) воспользуемся конечномерной аппроксимацией регуляризованного решения $M_{\delta}^{\alpha, \varepsilon}$.

Для этого разобьём отрезок $[-l, l]$ на n равных частей

$$-l = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = l,$$

с шагом $\Delta\xi = \frac{2l}{n}$. Обозначим отрезок разбиения $\Delta_i = [\xi_i, \xi_{i+1}]$.

Искомую границу $z(\xi)$ представим в виде вектора

$$z = (z(\xi_0), z(\xi_1), \dots, z(\xi_n))^T = (z_0, z_1, \dots, z_n)^T.$$

В качестве конечномерного подпространства U_n рассмотрим пространство кусочно-постоянных на $[-l, l]$ функций

$$z \in U_n \Leftrightarrow z(\xi) = \{z_i \text{ при } \xi \in \Delta_i, i = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

При этом, используя такую последовательность конечномерных подпространств U_n пространства $L_2[-l, l]$, получаем выполнение следующего условия: для любого n $D(L) \cap U_n \neq \emptyset$ и

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D(L) \cap U_n} = D(L).$$

Бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$ заменим конечным отрезком $[-s, s]$ и разобьём его на m равных частей ($m \geq n$) с шагом $\Delta x = \frac{2s}{m}$, подобрав число s так, чтобы $\Delta x = \Delta\xi$, и чтобы точки разбиения отрезка $[-s, s]$ совпадали с точками разбиения отрезка $[-l, l]$:

$$\begin{aligned} -s = x_0 < x_1 < \dots < x_j = \xi_0 = -l < x_{j+1} = \xi_1 < \\ < \dots < x_{j+n} = \xi_n = l < x_{j+n+1} < \dots < x_m = s. \end{aligned}$$

Таким образом вариационная задача (2.1.48) сводится к конечномерной:

$$\inf \left\{ \int_{-s}^s \left[\frac{2l}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left((x - \xi_i)^2 + (H - z_i)^2 \right) - f_\delta^n(x) \right]^2 dx + \alpha \int_{-s}^s \frac{2l}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln^2 \left((x - \xi_i)^2 + (H - z_i)^2 \right) dx \right\}, \quad (2.2.29)$$

где $f_\delta^n(x) \rightarrow f_\delta(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Задача (2.2.29) разрешима (см. [110, с. 70]). Обозначим множество решений этой задачи через $M_{\delta,n}^\alpha$. Тогда, как следует из теоремы 2.2.1, для любого $\varepsilon > 0$ имеет место β -сходимость аппроксимаций $M_{\delta,n}^\alpha$ к регуляризованному решению $M_\delta^{\alpha,\varepsilon}$:

$$M_{\delta,n}^\alpha \rightarrow M_\delta^{\alpha,\varepsilon} \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

2.2.3 Конечномерные аппроксимации при решении обратной задачи гидродинамики

С помощью замены переменной $\tilde{u}(\rho, t) = u(\rho, t) - f(t)$ сведем задачу (1.1.7)–(1.1.11) к задаче с однородными граничными условиями (для простоты сохраним прежнее обозначение, то есть вместо $\tilde{u}$ будем по-прежнему писать u):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma(\rho) \frac{\partial u}{\partial \rho} \right] + \frac{df}{dt}, \quad (2.2.30)$$

$$u(\rho, 0) = 0, \quad (2.2.31)$$

$$u(r_0, t) = 0, \quad (2.2.32)$$

$$\frac{\partial u(\bar{r}, t)}{\partial \rho} = 0, \quad (2.2.33)$$

где $0 < r_0 \leq \rho \leq \bar{r}$, $t \geq 0$. Условие, определяющее суммарный дебит скважины,

$$\frac{\partial u(r_0, t)}{\partial \rho} = g(t), \quad (2.2.34)$$

может быть заменено равенством, аналогичным (2.1.62):

$$\int_{r_0}^{\bar{r}} u(\rho, t) \rho d\rho = G(t) + \frac{(\bar{r}^2 - r_0^2)}{2} f(t), \quad (2.2.35)$$

где $G(t) = \int_0^t g_1(\tau) d\tau$. Здесь $g_1(t)$ определяется уравнением (2.1.61):

$$g_1(t) = r_0 \sigma(r_0) \frac{\partial u(r_0, t)}{\partial \rho}.$$

Введем некоторые пространства и операторы. Пусть M — множество допустимых коэффициентов $\sigma(\rho)$:

$$M = \{ \sigma(\rho) : \sigma(\rho) \in W'_p[r_0, \bar{r}], \quad \sigma(\rho) \geq d > 0, \quad \rho \in [r_0, \bar{r}] \},$$

а $V = W'_p[r_0, \bar{r}]$. Скалярное произведение в V зададим равенством

$$(v_1, v_2)_V = \int_{r_0}^{\bar{r}} (\rho v_1 v_2 + \rho v'_1 v'_2) d\rho. \quad (2.2.36)$$

Пространство V является гильбертовым.

Введем также гильбертово пространство $H = \{h : h \in L_2[r_0, \bar{r}]\}$ со скалярным произведением

$$(h, g)_H = \int_{r_0}^{\bar{r}} \rho h g d\rho. \quad (2.2.37)$$

Имеет место плотное и непрерывное вложение $V \subset H$. Отождествляя H с его двойственным пространством H' , получим также плотное и непрерывное вложение $H' \subset V'$, где V' — пространство, двойственное к V .

Рассмотрим пространство $U = \{u : u \in L_2(V, [0, T]), u'_t \in L_2(V', [0, T])\}$ с нормой

$$\|u\|_U = \left(\int_0^T \|u\|_V^2 dt + \int_0^T \|u'_t\|_V^2 dt \right)^{1/2}. \quad (2.2.38)$$

Это пространство также является гильбертовым. Кроме того, оно плотно и непрерывно вкладывается в $C^0(H, [0, T])$.

Обозначим $U_0 = \{u : u \in U, u(0) = 0\}$. В пространстве U_0 рассмотрим множество

$$D = \{u \in U : u(r_0, t) = u'(\bar{r}, t) = 0\}.$$

Определим оператор $\Phi : D \times M \rightarrow L_2[V'; 0, T]$, ставящий в соответствие функциям $u \in D$ и $\sigma \in M$ элемент

$$\Phi(u, \sigma) = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma(\rho) \frac{\partial u}{\partial \rho} \right]. \quad (2.2.39)$$

Лемма 2.2.1. *Оператор Φ , определяемый задачей (2.2.30) – (2.2.33), является слабо-замкнутым.*

Доказательство. На множестве $\Omega = \{v : v \in C'[r_0, \bar{r}], v(r_0) = v'(\bar{r}) = 0\}$, всюду плотном в V , определим оператор $\tilde{A} : \Omega \rightarrow V'$:

$$\tilde{A}v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \sigma(\rho) \frac{\partial v}{\partial \rho} \right), \quad v \in \Omega, \quad \sigma(\rho) \in M.$$

Очевидно, что данный оператор является линейным. Покажем, что он ограничен на множестве Ω .

Для любых $u \in V$ и $v \in \Omega$ выполнено:

$$\begin{aligned} |(\tilde{A}v, u)| &= \left| \int_{r_0}^{\bar{r}} \rho \sigma(\rho) v' u' d\rho \right| \leq m \int_{r_0}^{\bar{r}} \rho |v'| |u'| d\rho \leq \\ &m(|v'|, |u'|)_H \leq m \|v'\|_H \|u'\|_H \leq C_1 \|v\|_V \|u\|_{V'}, \end{aligned}$$

где $C_1 = \text{const}$, $m = \sup\{\sigma(\rho) : r_0 \leq \rho \leq \bar{r}\}$.

Продолжим оператор $\tilde{A}$ по непрерывности на все пространство V :

$$A \in L(V, V'), \quad (Au, v) = \int_{r_0}^{\bar{r}} \rho \sigma(\rho) u' v' d\rho \quad \forall u, v \in V. \quad (2.2.40)$$

Согласно [62] задачу (2.2.30) – (2.2.33) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f', \quad (2.2.41)$$

$$u(\rho, 0) = 0, \quad (2.2.42)$$

$$f' \in L_2(V', [0, T]). \quad (2.2.43)$$

Тогда

$$\Phi'_\sigma(u, \sigma) \gamma = A(\gamma) u, \quad (2.2.44)$$

$$\Phi'_u(u, \sigma) v = \frac{\partial v}{\partial t} + A(\sigma) v, \quad v \in U_0, \quad (2.2.45)$$

где $A(\gamma)$, $A(\sigma)$ — оператор A с коэффициентами $\gamma(\rho)$ или $\sigma(\rho)$.

Из непрерывной дифференцируемости оператора Φ следует, в частности, непрерывность Φ на множестве $D \times M$

$$\Phi \in C(D \times M, L_2(V', [0, T])).$$

Для доказательства того, что оператор Φ слабо замкнутый, необходимо проверить выполнение следующих условий: из того, что $\sigma_n \xrightarrow{\text{с.л.}} \sigma_0$ в V , $u_n \xrightarrow{\text{с.л.}} u_0$ в U , $\Phi(\sigma_n, u_n) \xrightarrow{\text{с.л.}} \hat{f}$ в $L_2(V', [0, T])$ следует, что $\hat{f} = \Phi(\sigma_0, u_0)$.

Действительно, по свойству норм слабо сходящейся последовательности следует существование такой константы k_1 , что для любого n

$$\left(\int_0^T \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma_n(\rho) \frac{\partial u_n}{\partial \rho} \right] \right\|_{V'}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq k_1 \quad (2.2.46)$$

или

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma_n(\rho) \frac{\partial u_n}{\partial \rho} \right] \right\|_{L_2(V', [0, T])} \leq k_1. \quad (2.2.47)$$

Учитывая слабую сходимость u_n в U , заключаем, что существует константа k_2 такая, что для любого n

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{L_2(V', [0, T])} \leq k_2. \quad (2.2.48)$$

Из соотношений (2.2.47) – (2.2.48) следует равномерная ограниченность последовательности

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma_n(\rho) \frac{\partial u_n}{\partial \rho} \right]$$

в пространстве $L_2(V', [0, T])$. Из равномерной ограниченности норм в гильбертовом пространстве $L_2(V', [0, T])$ следует слабая компактность последовательности $\{A(\sigma_n) u_n\}$. Без ограничения общности считаем, что сама последовательность $\{A(\sigma_n) u_n\}$ — слабо сходящаяся:

$$A(\sigma_n) u_n \xrightarrow{\text{сл.}} \hat{f} \quad (2.2.49)$$

в $L_2(V', [0, T])$.

Из слабой сходимости в $L_2(V', [0, T])$ последовательностей $\{A(\sigma_n) u_n\}$ и $\{\Phi(\sigma_n, u_n)\}$ следует слабая сходимость $\frac{\partial u_n}{\partial t}$ как разности двух слабо сходящихся последовательностей.

Ввиду полноты пространства U оператор $\frac{\partial u}{\partial t} : U \rightarrow L_2(V', [0, T])$ является линейным замкнутым, а значит, слабо замкнутым. Тогда

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} \xrightarrow{\text{сл.}} \frac{\partial u_0}{\partial t}$$

в $L_2(V', [0, T])$ (в смысле слабой сходимости).

Из (2.2.48) по критерию слабой сходимости в $L_2(V', [0, T])$ следует равномерная ограниченность последовательности $\{A(\sigma_n) u_n\}$ и справедливость соотношения

$$\lim \left\| \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma_n(\rho) \frac{\partial u_n(\rho, t)}{\partial \rho} \right] - \tilde{f}(\rho, t) \right\|_{V'} = 0 \quad (2.2.50)$$

при $n \rightarrow \infty$ почти для всех $t \in [0, T]$.

Далее из слабой сходимости $\sigma_n(\rho)$ к $\sigma_0(\rho)$ следует равномерная сходимость на отрезке $[r_0, \bar{r}]$ последовательности $\sigma_n(\rho)$ к $\sigma_0(\rho)$. Из $u_n \xrightarrow{\text{сл.}} u_0$ с учётом непрерывности вложения пространства U в $C^0(H, [0, T])$ получим, что почти при всех $t \in [0, T]$

$$\rho \sigma_n(\rho) \frac{\partial u_n(\rho, t)}{\partial \rho} \rightarrow \rho \sigma_0(\rho) \frac{\partial u_0(\rho, t)}{\partial \rho} \quad (2.2.51)$$

в H .

Так как последовательность $\rho \sigma_n(\rho) \frac{\partial u_n(\rho, t)}{\partial \rho}$ равномерно ограничена в пространстве H и для неё выполняется соотношение (2.2.50), то по критерию слабой сходимости в пространстве $L_2(H, [0, T])$

$$\rho \sigma_n(\rho) \frac{\partial u_n(\rho, t)}{\partial \rho} \xrightarrow{\text{сл.}} \rho \sigma_0(\rho) \frac{\partial u_0(\rho, t)}{\partial \rho} \quad (2.2.52)$$

в $L_2(H, [0, T])$.

Из линейности и непрерывности оператора $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$, действующего из $L_2(H, [0, T])$ в $L_2(V', [0, T])$, следует его слабая непрерывность, а совместно с соотношением (2.2.52)

$$\tilde{f}(\rho, t) = A(\sigma_0)u_0. \quad (2.2.53)$$

Тем самым слабая замкнутость оператора Φ доказана. $\square$

Формулировка задачи в терминах теории оптимального управления

Пусть состояние системы определяется операторным уравнением

$$\Phi(\sigma, u) = f', \quad (2.2.54)$$

где оператор Φ , определённый соотношением (2.2.39), действует из пространства $M \times U$ в пространство $L_2(V', [0, T])$ и является непрерывно дифференцируемым и слабо замкнутым.

Функция $f'(t)$, являющаяся производной функции $f(t)$, нам известна. Требуется определить $\sigma(\rho)$ и $u(\rho, t)$.

Используем дополнительное условие (2.2.34), соответствующее заданию суммарного дебита скважины. Для этого введем оператор наблюдения

$$C \in L\left(L_2(V, [0, T]), L_2[0, T]\right),$$

значения которого на множестве решений операторного уравнения с заданной функцией $f(t)$ нам известны. Пусть оператор C определяется левой частью равенства (2.2.35)

$$C(\sigma, u) = \int_{r_0}^{\bar{r}} \rho u(\rho, t) d\rho. \quad (2.2.55)$$

Правую часть равенства (2.2.35) обозначим как $z(t)$.

Каждой паре функций $\sigma(\rho) \in M$ и $u(\rho, t) \in D$ сопоставим целевую функцию

$$J(\sigma, u) = \|C(\sigma, u) - z(t)\|_{L_2[0, T]}^2 + \|\Phi(\sigma, u) - f'\|_{L_2(V', [0, T])}^2, \quad (2.2.56)$$

где $z(t) \in L_2[0, T]$, $f' \in L_2[0, T]$. Тогда задачу определения коэффициента $\sigma(\rho)$ можно сформулировать как задачу оптимального управления системой с распределёнными параметрами

$$\inf \left\{ J(\sigma, u) : \sigma \in M, u \in D \right\}. \quad (2.2.57)$$

Поскольку задача нахождения минимума функционала является неустойчивой, то с целью её регуляризации воспользуемся методом А. Н. Тихонова, то есть сведём её к задаче

$$\inf \left\{ J(\sigma, u) + \alpha \|\sigma - \sigma_0\|_{W'_2}^2 + \beta \|u - u_0\|_U^2 : \sigma \in M, u \in D \right\}, \quad (2.2.58)$$

где $\alpha > 0$, $\sigma_0 \in W'_2$, $u_0 \in U$, u_0, σ_0 — некоторые априорно известные приближения.

Теорема 2.2.2. *Задача (2.2.58) разрешима.*

Доказательство. Обозначим минимизируемый функционал (2.2.58) через $J_\alpha(\sigma, u)$. Из (2.2.55), (2.2.58) следует, что этот функционал неотрицателен. Нижнюю грань функционала J_α на области его определения $M \times D$ обозначим $\hat{J}_\alpha$. Из определения нижней грани следует существование последовательности $\{(\sigma_n, u_n)\} \in M \times D$ такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\alpha(\sigma_n, u_n) = \hat{J}_\alpha.$$

Из (2.2.55), (2.2.56), (2.2.58) следует, что последовательности $\{\sigma_n\}$, $\{u_n\}$, $\{C(\sigma_n, u_n)\}$, $\{\Phi(\sigma_n, u_n)\}$ ограничены в соответствующих пространствах.

Поскольку пространства $W'_2(r_0, \bar{r})$, U , $L_2[0, T]$, $L_2(V', [0, T])$ являются гильбертовыми, то указанные последовательности слабо компактны. Будем считать, что эти последовательности слабо сходятся к элементам $\hat{\sigma} \in M$, $\hat{u} \in D$, $\hat{C} \in L_2[0, T]$, $\hat{\Phi} \in L_2(V', [0, T])$.

Используя слабую замкнутость операторов C и Φ , получим $\hat{C} = C(\hat{\sigma}, \hat{u})$, $\hat{\Phi} = \Phi(\hat{\sigma}, \hat{u})$. Тогда по свойству нормы слабого предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \|\sigma_n - \sigma_0\|_{W'_2}^2 \geq \alpha \|\hat{\sigma} - \sigma_0\|_{W'_2}^2, \quad (2.2.59)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \|u_n - u_0\|_U^2 \geq \alpha \|\hat{u} - u_0\|_U^2, \quad (2.2.60)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C(\sigma_n, u_n) - z\|_{L_2[0, T]}^2 \geq \|C(\hat{\sigma}, \hat{u}) - z\|_{L_2[0, T]}^2, \quad (2.2.61)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi(\sigma_n, u_n) - f'\|_{L_2(V', [0, T])}^2 \geq \|\Phi(\hat{\sigma}, \hat{u}) - f'\|_{L_2(V', [0, T])}^2. \quad (2.2.62)$$

Сложив почленно (2.2.59) – (2.2.62) и воспользовавшись (2.2.58), получим

$$J_\alpha(\hat{\sigma}, \hat{u}) \leq \hat{J}_\alpha. \quad (2.2.63)$$

Так как $\hat{\sigma} \in M$, $\hat{u} \in D$, а $\hat{J}_\alpha$ — нижняя грань соответствующего функционала J_α на этих множествах, то условие (2.2.63) выполнено со знаком равенства.

Тем самым разрешимость задачи (2.2.58) доказана. $\square$

Конечно-разностные формулы нахождения целевого функционала

Задача нахождения коэффициента гидропроводности была сформулирована как задача минимизации функционала (2.2.58):

$$\inf \left\{ J(\sigma, u) + \alpha \|\sigma - \sigma_0\|_{W'_2}^2 + \beta \|u - u_0\|_U^2 : \sigma \in M, u \in D \right\},$$

где $\alpha > 0$, $\sigma_0 \in W'_2$, $u_0 \in U$, u_0, σ_0 — некоторые априорно известные приближения. С учётом (2.2.39), (2.2.54)–(2.2.56)

$$\begin{aligned} J(\sigma, u) &= \int_0^T (C(\sigma, u) - z(t))^2 dt + \int_0^T (\Phi(\sigma, u) - f')^2 dt = \\ &= \int_0^T \left(\int_{r_0}^{\bar{r}} \rho u(\rho, t) d\rho - z(t) \right)^2 dt, \end{aligned} \quad (2.2.64)$$

а также

$$\alpha \|\sigma - \sigma_0\|_{W'_2}^2 = \alpha \int_{r_0}^{\bar{r}} ((\sigma - \sigma_0)^2 + [(\sigma - \sigma_0)'_\rho]^2) d\rho, \quad (2.2.65)$$

$$\begin{aligned} \beta \|u - u_0\|_U^2 &= \beta \left[\int_0^T \int_{r_0}^{\bar{r}} ((u - u_0)^2 + [(u - u_0)'_\rho]^2) d\rho dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_{r_0}^{\bar{r}} ([(u - u_0)'_t]^2 + [(u - u_0)''_{\rho t}]^2) d\rho dt \right]. \end{aligned} \quad (2.2.66)$$

Разобьём отрезок $[0, T]$ на m равных частей

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T,$$

с шагом по времени $h_t = \frac{T}{m}$. Обозначим отрезок разбиения по оси времени $\Delta t_i = [t_i, t_{i+1}]$. Разобьём отрезок $[r_0, \bar{r}]$ на n равных частей

$$r_0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = \bar{r},$$

с шагом по координате ρ $h_\rho = \frac{\bar{r} - r_0}{n}$. Обозначим отрезок разбиения по оси ρ $\Delta \rho_j = [\xi_j, \xi_{j+1}]$. Получаем регулярную сетку с шагом h_t по времени и с шагом h_ρ по оси ρ . Искомую функцию $u(\rho, t)$ аппроксимируем сеточной функцией $u_j^i = u(\xi_j, t_i)$. Функцию коэффициента гидропроводности представим в виде вектора

$$\sigma = (\sigma(\xi_0), \sigma(\xi_1), \dots, \sigma(\xi_n))^T = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n)^T.$$

В качестве конечномерного подпространства M_n рассмотрим пространство кусочно-постоянных на $[r_0, \bar{r}]$ функций

$$\sigma \in U_n \Leftrightarrow \sigma(\xi) = \{\sigma_j \text{ при } \xi \in [\xi_j, \xi_{j+1}], j = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

Обозначим минимизируемый функционал в (2.2.58) через E . Запишем его в виде:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4, \quad (2.2.67)$$

$$E_1 = \sum_{i=1}^m (C(\sigma, u^i) - z(t_i))^2 h_t, \quad (2.2.68)$$

$$E_2 = \alpha \sum_{j=1}^{n-1} \left((\sigma_j - \sigma_j^0)^2 + \left(\frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{h_\rho} \right)^2 \right) h_\rho, \quad (2.2.69)$$

$$E_3 = \beta \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{n-1} \left[(u_j^i - u_j^0)^2 + \left(\frac{(u_{j+1}^i - u_{j+1}^0) - (u_j^i - u_j^0)}{h_\rho} \right)^2 \right] h_\rho h_t, \quad (2.2.70)$$

$$E_4 = \beta \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{n-1} \left[\left(\frac{u_j^i - u_j^{i-1}}{h_t} \right)^2 + \left(\frac{(u_{j+1}^i - u_j^i) - (u_{j+1}^{i-1} - u_j^{i-1})}{h_\rho h_t} \right)^2 \right] h_\rho h_t. \quad (2.2.71)$$

Для упрощения записи формул для градиента целевого функционала введём ряд обозначений.

$$T_{jk}^i = \frac{\partial u_j^i}{\partial \sigma_k}, \quad (2.2.72)$$

$$\lambda_j = \frac{h_t}{h_\rho^2} \sigma_j, \quad (2.2.73)$$

$$\theta_j^i = \frac{h_t}{h_\rho^2} u_j^i. \quad (2.2.74)$$

Задача сводится к многомерной задаче минимизации функционала (2.2.67).

С учётом независимости краевых условий от изменения $\sigma(\rho)$ имеем:

$$T_{0k}^i = T_{j0}^i = T_{jk}^0 = 0. \quad (2.2.75)$$

Замечая, что

$$\nabla E = \nabla E_1 + \nabla E_2 + \nabla E_3 + \nabla E_4, \quad (2.2.76)$$

найдем формулы для градиентов, входящих в сумму.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_2}{\partial \sigma_k} &= 2\alpha \sum_{j=1}^{n-1} \left((\sigma_j - \sigma_j^0) \frac{\partial \sigma_j}{\partial \sigma_k} + \frac{1}{h_\rho} \left(\frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{h_\rho} \right) \frac{\partial (\sigma_{j+1} - \sigma_j)}{\partial \sigma_k} \right) h_\rho = \\ &= \alpha \left(\sigma_k - \sigma_k^0 - \frac{\sigma_{j+1} - 2\sigma_j + \sigma_{j-1}}{h_\rho^2} \right) h_\rho, \quad j = 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (2.2.77)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial \sigma_n} = 2\alpha \frac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{h_\rho^2}, \quad (2.2.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_3}{\partial \sigma_k} = 2\beta \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-1} & \left[(h_\rho^2 \theta_j^i - u_j^0 h_t) T_{jk}^i + \right. \\ & \left. + \left(\theta_{j+1}^i - \theta_j^i - \frac{u_{j+1}^0 - u_j^0}{h_\rho^2} \right) (T_{j+1,k}^i - T_{jk}^i) \right] h_\rho, \quad (2.2.79) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_4}{\partial \sigma_k} = 2\beta \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-1} & \left[(\theta_j^i \theta_j^{i-1}) (T_{jk}^i - T_{jk}^{i-1}) + \frac{1}{h_t^2} (\theta_{j+1}^i - \theta_j^i - \right. \\ & \left. - \theta_{j+1}^{i-1} + \theta_j^{i-1}) (T_{j+1,k}^i - T_{jk}^i - T_{j+1,k}^{i-1} + T_{jk}^{i-1}) \right] h_\rho. \quad (2.2.80) \end{aligned}$$

Аппроксимация градиента функционала

Поиск минимума функционала (2.2.58) проводился итерационными методами градиентного типа. Вычисление градиентов ∇E_2 , ∇E_3 , ∇E_4 по формулам (2.2.77)–(2.2.80) особых сложностей не представляет. Аппроксимация градиента функционала, подобного

$$E_1 \equiv E_1(\sigma) = \|C(\sigma, u) - z(t)\|_{L_2[0,T]}^2,$$

приводилась в [46], [111]. Рассмотрим сопряжённую к (2.2.30)–(2.2.33) задачу

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma(\rho) \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right] = 2C'(C(\sigma, u) - z(t)), \quad (2.2.81)$$

$$\psi(\rho, T) = 0, \quad (2.2.82)$$

$$\psi(r_0, t) = 0, \quad (2.2.83)$$

$$\frac{\partial \psi(\bar{r}, t)}{\partial \rho} = 0, \quad (2.2.84)$$

где $0 < r_0 \leq \rho \leq \bar{r}$, $t \in [0, T]$, C' — сопряжённый оператор к оператору наблюдения $C(\sigma, u)$. Так как

$$\begin{aligned} E_1'(\sigma) \delta \sigma &= 2(C(\sigma, u) - z(t), C(\sigma, u'_\sigma) \delta \sigma)_{L_2[0,T]} = \\ &= 2\left(C'(C(\sigma, u) - z(t)), u'_\sigma(\rho, t) \delta \sigma\right)_{L_2(H, [0,T])}, \end{aligned}$$

то согласно [111] градиент функционала преобразуется к виду

$$J'(\sigma)\delta\sigma = \left(\int_0^T \rho \frac{\partial u(\rho, t; \sigma)}{\partial \rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} dt, \delta\sigma \right)_{L_2(r_0, \bar{r})},$$

где ψ – решение сопряжённой задачи. Для определения градиента функционала $J(\sigma)$, необходимо решить прямую задачу (2.2.30) – (2.2.33) и сопряжённую задачу (2.2.81) – (2.2.84).

Глава 3

Программный комплекс решения обратных задач геофизики и тепловой диагностики

Разработанные модели, методы и алгоритмы были реализованы в виде программного комплекса в пакете MATLAB. Использовался пакет Math Works MATLAB версии r2010b. Программный комплекс разработан для решения обратных задач геофизики и тепловой диагностики и включает в себя следующие программы:

- программа численного исследования фильтрационной модели нефтяного пласта для определения коэффициента гидропроводности;
- программа математического моделирования процесса тепловой диагностики технических объектов;
- программа численного решения обратной задачи гравиметрии на основе метода регуляризации А.Н. Тихонова.

3.1 Дискретные аналоги дифференциальных уравнений и алгоритмические конструкции

Дискретные аналоги для уравнения теплопроводности

Процесс нестационарной теплопроводности в декартовых координатах описывается дифференциальным уравнением

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S, \quad (3.1.1)$$

где c — удельная теплоемкость среды, ρ — плотность среды, $T = T(x, t)$ — температура, t — время, x — пространственная координата, λ — коэффициент теплопроводности, S — источниковый член (удельная плотность тепловых источников).

Уравнение (3.1.1) может быть приведено к безразмерному виду, что удобно при проведении численных экспериментов. Выберем масштаб t_0 по времени и l_0 по пространственной координате, характерные значения T_0 и T_1 для температуры. Пусть λ_0 — некоторое известное значение для коэффициента теплопроводности. Введём безразмерные величины

$$\bar{x} = \frac{x}{l_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \bar{T} = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}.$$

Определим критерий подобия (число Фурье):

$$Fo = \frac{\lambda_0 t_0}{c \rho l_0^2}.$$

Тогда получим уравнение

$$\frac{1}{Fo} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \right) + \bar{S}. \quad (3.1.2)$$

При соответствующем выборе масштабов и характерных чисел безразмерные переменные принимают значения в пределах от 0 до 1:

$$\bar{x} \in [0, 1], \quad \tau \in [0, 1], \quad \bar{T} \in [0, 1].$$

Поскольку число Фурье является критерием скорости протекания тепловых процессов, то «масштаб» процесса определяется значением этого безразмерного комплекса.

Для дискретизации дифференциальных уравнений был использован метод контрольного объёма [77]. Основная идея метода контрольного объёма поддаётся прямой физической интерпретации. Расчётную область разбивают на некоторое число непересекающихся контрольных объёмов таким образом, что каждая узловая точка содержится в одном контрольном объёме. Дифференциальное уравнение интегрируют по каждому контрольному объёму. Для вычисления интегралов используют кусочные профили, которые описывают изменение переменной (температуры, давления) между узловыми точками. В результате находят дискретный аналог дифференциального уравнения, в который входят значения переменной в нескольких узловых точках.

Полученный подобным образом дискретный аналог выражает соответствующий закон сохранения (энергии, массы и т.п.) для конечного контрольного объёма точно так же, как дифференциальное уравнение выражает закон сохранения для бесконечно малого контрольного объёма. Одним из важных свойств метода контрольного объёма является то, что в нём заложено интегральное сохранение таких величин, как масса, количество движения и энергия на любой группе контрольных объёмов и, следовательно, на всей расчётной области. Это свойство проявляется при любом числе узловых точек, а не только в предельном случае очень большого их числа.

Таким образом, даже решение на грубой сетке удовлетворяет точным интегральным балансам.

Для получения дискретного аналога дифференциального уравнения (3.1.1) использовано показанное на рис. 3.1 расположение узловых точек. В центре рассматриваемого контрольного объёма

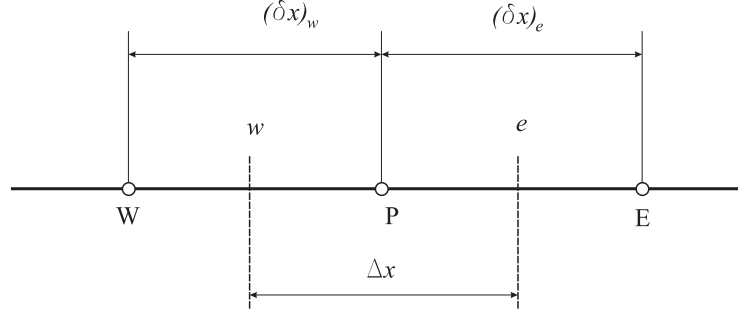


Рис. 3.1: Контрольный объём (одномерная задача)

точка P , окружённая точками E и W (E — «восточная» сторона, т. е. расположенная справа, в положительном направлении оси x , W — «западная» сторона, т. е. расположенная слева, в направлении, противоположном направлению оси x). Границы контрольного объёма обозначены как e и w .

Следуя [77], составим дискретный аналог для уравнения (3.1.1), интегрируя в пределах контрольного объёма по координате x и по промежутку времени Δt .

$$c\rho \int_w^e \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dx dt = \int_w^e \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt + \int_w^e \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} S dx dt,$$

Источниковый член представим в линеаризованном виде с постоянной составляющей S_C и переменной составляющей $S_P T$, зависящей от температуры,

$$S = S_C + S_P T.$$

Первый из интегралов в правой части заменяется разностью потоков на границах:

$$c\rho\Delta x(T_P - T_P^0) = \Delta t \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \Delta t \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w + \Delta t(S_C + S_P T_P).$$

С целью достижения устойчивости схемы использован полностью неявный аналог. Для аппроксимации производных $\frac{\partial T}{\partial x}$ применён кусочно-линейный профиль T .

$$\frac{c\rho\Delta x}{\Delta t}(T_P - T_P^0) = \lambda_e \frac{T_E - T_P}{(\delta x)_e} - \lambda_w \frac{T_P - T_W}{(\delta x)_w} + (S_C + S_P T_P),$$

Обозначение T_P^0 относится к предыдущему временному шагу. T_P , T_E , T_W — значения температуры на новом временном шаге. В результате получим

$$\begin{aligned} a_P T_P &= a_E T_E + a_W T_W + b, \\ a_E &= \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e}, \quad a_W = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w}, \quad a_P^0 = \frac{c\rho\Delta x}{\Delta t}, \\ a_P &= a_E + a_W + a_P^0 - S_P \Delta x, \quad b = S_C \Delta x + a_P^0 T_P^0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

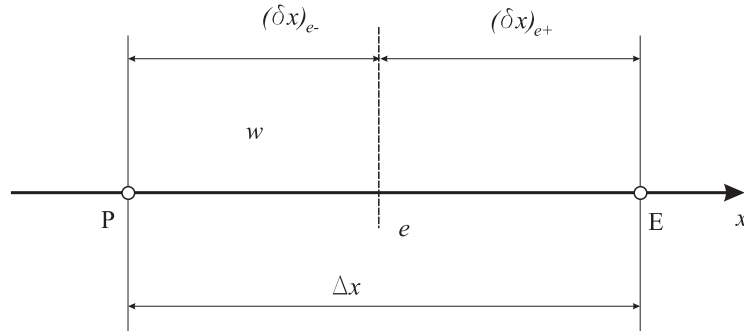


Рис. 3.2: Интервалы, связанные с гранью e контрольного объёма

В [77] рекомендуется в качестве эффективного приближения коэффициента теплопроводности граней брать среднее гармоническое значений в соседних точках.

$$\lambda_e = \frac{(\delta x)_e}{\frac{(\delta x)_{e+}}{\lambda_E} + \frac{(\delta x)_{e-}}{\lambda_P}} = \left(\frac{f_e}{\lambda_E} + \frac{1-f_e}{\lambda_P} \right)^{-1}, \quad f_e = \frac{(\delta x)_{e+}}{(\delta x)_e}.$$

Аналогично

$$\lambda_w = \frac{(\delta x)_w}{\frac{(\delta x)_{w+}}{\lambda_P} + \frac{(\delta x)_{w-}}{\lambda_W}} = \left(\frac{f_w}{\lambda_P} + \frac{1-f_w}{\lambda_W} \right)^{-1}, \quad f_w = \frac{(\delta x)_{w+}}{(\delta x)_w}.$$

Если грани расположены посередине между соседними точками, тогда $f_e = f_w = 0,5$. В этом случае для значений коэффициентов на границах будут верны равенства:

$$\lambda_e = \frac{2\lambda_P\lambda_E}{\lambda_P + \lambda_E}, \quad \lambda_w = \frac{2\lambda_P\lambda_W}{\lambda_P + \lambda_W}.$$

Для безразмерного уравнения (3.1.2) дискретный аналог имеет вид:

$$\begin{aligned} a_P \bar{T}_P &= a_E \bar{T}_E + a_W \bar{T}_W + b, \\ a_E &= \frac{\bar{\lambda}_e}{(\delta \bar{x})_e}, \quad a_W = \frac{\bar{\lambda}_w}{(\delta \bar{x})_w}, \quad a_P^0 = \frac{1}{F_o} \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta \tau}, \\ a_P &= a_E + a_W + a_P^0 - \bar{S}_P \Delta \bar{x}, \quad b = \bar{S}_C \Delta \bar{x} + a_P^0 \bar{T}_P^0. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Пусть теперь исходное уравнение имеет вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + S_C + S_P T, \quad (3.1.5)$$

где r — пространственная координата.

Умножим обе части равенства (3.1.5) на r и проинтегрируем по контрольному объёму и по промежутку времени Δt .

$$\begin{aligned} c\rho \int_w^e \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} r \frac{\partial T}{\partial t} dr dt &= \int_w^e \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr dt + \\ &+ \int_w^e \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (S_C + S_P T) r dr dt. \end{aligned}$$

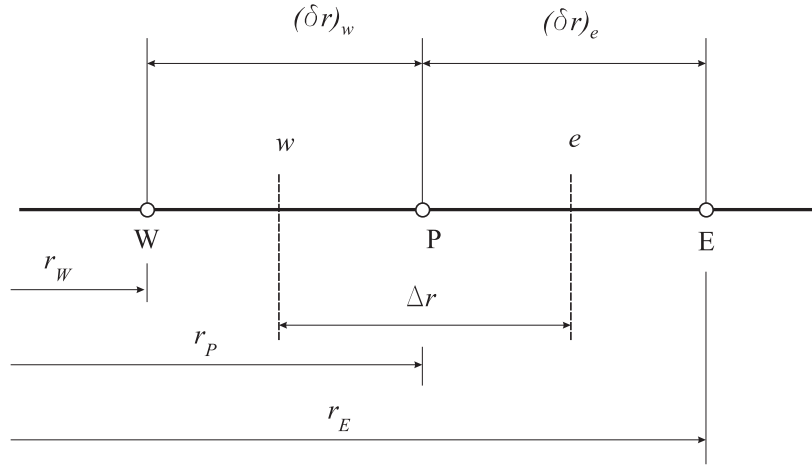


Рис. 3.3: Контрольный объём (осесимметричная задача)

Таким образом получаем

$$c\rho \left(\frac{r^2}{2} \Big|_w^e \right) (T_P - T_P^0) = \Delta t \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_e^w + \Delta t \left(\frac{r^2}{2} \Big|_w^e \right) (S_C + S_P T_P).$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{c\rho}{2\Delta t} (r_e^2 - r_w^2) (T_P - T_P^0) &= \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w + \\ &+ \frac{1}{2} (r_e^2 - r_w^2) (S_C + S_P T_P). \end{aligned}$$

В силу равенства

$$\frac{1}{2} (r_e^2 - r_w^2) = (r_e - r_w) \frac{r_e + r_w}{2} = \Delta r \cdot r_P,$$

последнее уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{c\rho}{\Delta t} \Delta r \cdot r_P (T_P - T_P^0) &= \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w + \\ &+ \Delta r \cdot r_P (S_C + S_P T_P). \end{aligned}$$

Аналитическое решение стационарного уравнения даёт:

$$\lambda r \frac{dT}{dr} = C.$$

Интегрируя получаем

$$\lambda \int_a^b \frac{dT}{dr} = C \int_a^b \frac{dr}{r},$$

или

$$\lambda(T_b - T_a) = C \ln \frac{r_b}{r_a}.$$

Тогда потоки на границах можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e &= \frac{\lambda_e (T_P - T_E)}{\ln \frac{r_E}{r_P}}, \\ \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w &= \frac{\lambda_w (T_W - T_P)}{\ln \frac{r_P}{r_W}}. \end{aligned}$$

Значения коэффициентов теплопроводности на границах контрольного объёма находим по формулам:

$$\begin{aligned} \lambda_e &= \ln \frac{r_E}{r_P} \left(\frac{\ln \frac{r_e}{r_P}}{\lambda_P} + \frac{\ln \frac{r_E}{r_e}}{\lambda_E} \right)^{-1}, \\ \lambda_w &= \ln \frac{r_P}{r_W} \left(\frac{\ln \frac{r_w}{r_W}}{\lambda_W} + \frac{\ln \frac{r_P}{r_w}}{\lambda_P} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_P \left(\frac{c\rho}{\Delta t} \Delta r \cdot r_P + \frac{\lambda_e}{\ln \frac{r_E}{r_P}} + \frac{\lambda_w}{\ln \frac{r_P}{r_W}} - \Delta r \cdot r_P S_P \right) &= \\ &= \frac{c\rho}{\Delta t} \Delta r \cdot r_P T_P^0 + \frac{\lambda_e}{\ln \frac{r_E}{r_P}} T_E + \frac{\lambda_w}{\ln \frac{r_P}{r_W}} T_W + \Delta r \cdot r_P S_C. \end{aligned}$$

Дискретный аналог для осесимметричной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} a_P T_P &= a_E T_E + a_W T_W + b, \\ a_E &= \frac{\lambda_e}{\ln \frac{r_E}{r_P}}, \quad a_W = \frac{\lambda_w}{\ln \frac{r_P}{r_W}}, \quad a_P^0 = \frac{c\rho}{\Delta t} \Delta r \cdot r_P, \\ a_P &= a_E + a_W + a_P^0 - S_P \Delta r \cdot r_P, \quad b = S_C \Delta r \cdot r_P + a_P^0 T_P^0. \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Дискретный аналог для безразмерного уравнения осесимметричной задачи

$$\frac{1}{Fo} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{\lambda} \bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) + \bar{S}_C + \bar{S}_P \bar{T} \quad (3.1.7)$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} a_P \bar{T}_P &= a_E \bar{T}_E + a_W \bar{T}_W + b, \\ a_E &= \frac{\bar{\lambda}_e}{\ln \frac{\bar{r}_E}{\bar{r}_P}}, \quad a_W = \frac{\bar{\lambda}_w}{\ln \frac{\bar{r}_P}{\bar{r}_W}}, \quad a_P^0 = \frac{1}{Fo} \frac{\Delta \bar{r} \cdot \bar{r}_P}{\Delta \tau}, \\ a_P &= a_E + a_W + a_P^0 - \bar{S}_P \Delta \bar{r} \cdot \bar{r}_P, \quad b = \bar{S}_C \Delta \bar{r} \cdot \bar{r}_P + a_P^0 \bar{T}_P^0. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Дискретный аналог для уравнения фильтрации

Рассмотрим дифференциальное уравнение нестационарной фильтрации (1.1.1)

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma(\rho) \frac{\partial p}{\partial \rho} \right].$$

Задаём масштаб t_0 по времени и r_0 по пространственной координате. Выбираем характерные значения p_0 и p_1 для давления, σ_0 — для коэффициента гидропроводности. Приводим уравнение к безразмерному виду

$$\frac{1}{Fo_D} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}} \left[\bar{\rho} \bar{\sigma}(\bar{\rho}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\rho}} \right], \quad (3.1.9)$$

где

$$\bar{p} = \frac{p - p_0}{p_1 - p_0}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{r_0}.$$

Здесь безразмерный комплекс

$$Fo_D = \frac{\sigma_0 t_0}{l_0^2}$$

является аналогом диффузионного числа Фурье.

При этом

$$\bar{p} \in [0, 1], \quad \tau \in [0, 1], \quad \bar{\rho} \in [0, 1].$$

Чтобы не усложнять изложение решения, рассмотрим более простое по форме уравнение (1.1.1). На рисунке 3.3 изменятся только обозначения. Вместо Δr и δr теперь следует читать $\Delta \rho$ и $\delta \rho$. Для получения дискретного аналога дифференциального уравнения фильтрации в осесимметричной задаче умножим обе части этого равенства на ρ и проинтегрируем по ρ и t . В результате получаем

$$\int_w^e \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \rho \frac{\partial p}{\partial t} d\rho dt = \int_w^e \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sigma \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) d\rho dt,$$

или

$$\left(\frac{\rho_e^2}{2} - \frac{\rho_w^2}{2} \right) (p_P - p_P^0) = \Delta t \left(\sigma \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_e - \Delta t \left(\sigma \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_w.$$

Далее решение аналогично решению уравнения (3.1.5). А именно, справедливы следующие равенства

$$\frac{1}{2\Delta t} (\rho_e - \rho_w)(\rho_e + \rho_w)(p_P - p_P^0) = \sigma_e \frac{p_E - p_P}{\ln \frac{\rho_E}{\rho_P}} - \sigma_w \frac{p_P - p_W}{\ln \frac{\rho_P}{\rho_W}},$$

откуда

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} \rho_P (p_P - p_P^0) = \frac{\sigma_e}{\ln \frac{\rho_E}{\rho_P}} (p_E - p_P) - \frac{\sigma_w}{\ln \frac{\rho_P}{\rho_W}} (p_P - p_W),$$

или

$$p_P \left(\frac{\Delta \rho}{\Delta t} \rho_P + \frac{\sigma_e}{\ln \frac{\rho_E}{\rho_P}} + \frac{\sigma_w}{\ln \frac{\rho_P}{\rho_W}} \right) = \frac{\Delta \rho}{\Delta t} \rho_P p_P^0 + \frac{\sigma_e}{\ln \frac{\rho_E}{\rho_P}} p_E + \frac{\sigma_w}{\ln \frac{\rho_P}{\rho_W}} p_W.$$

Таким образом,

$$a_P p_P = a_E p_E + a_W p_W + b,$$

где

$$a_E = \frac{\sigma_e}{\ln \frac{\rho_E}{\rho_P}}, \quad a_W = \frac{\sigma_w}{\ln \frac{\rho_P}{\rho_W}}, \quad a_P^0 = \frac{\Delta \rho}{\Delta t} \rho_P, \quad (3.1.10)$$

$$b = a_P^0 p_P^0, \quad a_P = a_E + a_W + a_P^0.$$

Замечания об упрощении дискретного аналога и вычислении значений коэффициентов на гранях контрольного объёма, сделанные в предыдущем пункте, остаются справедливыми и в данном случае.

Граничные условия

В силу особенностей рассматриваемых задач при численном моделировании использовались граничные условия второго или первого рода. При построении дискретного аналога для граничного контрольного объёма точка P располагалась на границе, а интегрирование велось по половинному контрольному объёму.

Например, для задачи расчёта поля температур (уравнение (3.1.1)) при заданном тепловом потоке q_B на левой границе (условие второго рода) получим:

$$\begin{aligned} a_P T_P &= a_E T_E + b, \\ a_E &= \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e}, \quad a_P^0 = \frac{c\rho\Delta x}{2\Delta t}, \\ a_P &= a_E + a_P^0 - S_P \frac{\Delta x}{2}, \quad b = S_C \frac{\Delta x}{2} + a_P^0 T_P^0 + q_B. \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Решение прямой задачи для уравнений теплопроводности и фильтрации

Применение дискретного аналога (задаваемого одним из равенств (3.1.3), (3.1.4), (3.1.6), (3.1.8), (3.1.10)) на группе N контрольных объёмов приводит к системе линейных уравнений

$$A_i u_i = B_i u_{i+1} + C_i u_{i-1} + D_i, \quad i = 2, \dots, N-1, \tag{3.1.12}$$

$$A_1 u_1 = B_1 u_2 + D_1, \quad A_N u_N = C_N u_{N-1} + D_N,$$

где сеточная функция u_i имеет смысл T_i или p_i .

Решение (3.1.12) можно получить с помощью метода исключения Гаусса, приводящего к формулам прогонки (см. [81]):

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{B_i}{A_i - C_i P_{i-1}}, \quad i = 2, \dots, N, \quad P_1 = \frac{B_1}{A_1}; \\ Q_i &= \frac{D_i + C_i Q_{i-1}}{A_i - C_i P_{i-1}}, \quad i = 2, \dots, N, \quad Q_1 = \frac{D_1}{A_1}; \\ u_N &= Q_N; \\ u_i &= P_i u_{i+1} + Q_i, \quad i = N-1, N-2, \dots, 2, 1. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Для дискретных аналогов, построенных методом контрольного объёма выполнены достаточные условия единственности решения и устойчивости метода (см. [81]):

$$\begin{aligned} |A_i| &\geq |B_i| + |C_i|, \quad i = 2, \dots, N-1, \\ \left| \frac{B_1}{A_1} \right| &\leq 1, \quad \left| \frac{C_N}{A_N} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{B_1}{A_1} \right| + \left| \frac{C_N}{A_N} \right| < 2. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Алгоритмы и итерационные методы решения вариационных задач

В теории методов приближённого решения некорректных задач вопросу выбора параметра регуляризации уделяется значительное внимание. Наибольшее распространение получили: выбор параметра регуляризации по невязке, выбор по обобщённой невязке, квазиоптимальный выбор и т. д. Параметр регуляризации α согласовывается с погрешностью входных данных δ , и чем меньше погрешность, тем меньше берётся параметр регуляризации.

При выборе параметра регуляризации по невязке для некорректной задачи

$$Az = u \quad (3.1.15)$$

в качестве определяющего выступает равенство

$$\|Az_\alpha - u_\delta\| = \delta, \quad (3.1.16)$$

где u_δ — правая часть уравнения (3.1.15), заданная с погрешностью $\delta : \|u_\delta - u\| \leq \delta$, z_α — некоторое приближённое решение соответствующее u_δ , причём $\alpha = \alpha(\delta)$.

Невязка зависит некоторым образом от параметра регуляризации α . Обозначим

$$\varphi(\alpha) = \|Az_\alpha - u_\delta\|.$$

Тогда нахождение параметра регуляризации в соответствии с принципом невязки (3.1.16) состоит в решении уравнения

$$\varphi(\alpha) = \delta. \quad (3.1.17)$$

В достаточно общих условиях функция $\varphi(\alpha)$ является убывающей и уравнение (3.1.17) имеет решение.

Для приближённого решения уравнения (3.1.17) используются различные вычислительные процедуры. Например, задаётся последовательность

$$\alpha_k = \alpha_0 q^k, \quad q > 0, \quad (3.1.18)$$

и вычисления проводятся начиная с $k = 0$ до некоторого $k = K$, при котором равенство (3.1.17) с приемлемой точностью выполняется. При таком определении параметра регуляризации требуется $K + 1$ операция вычисления невязки.

Для приближённого решения уравнения (3.1.17) можно использовать и более быстро сходящиеся итерационные методы. Установлено, что функция $\tilde{\varphi}(\beta) = \varphi(1/\beta)$ является убывающей и выпуклой функцией. Поэтому для решения уравнения

$$\tilde{\varphi}(\beta) = \delta$$

можно использовать итерационный метод Ньютона, когда

$$\beta_{k+1} = \beta_k - \frac{\tilde{\varphi}(\beta_k)}{\tilde{\varphi}'(\beta_k)}.$$

Этот метод будет сходиться при любом начальном приближении $\beta_0 > 0$. Применение подобных итерационных процедур позволяет сократить общие вычислительные затраты на определение параметра регуляризации α .

В силу того, что оценки погрешности задания входных данных часто не известны и плохо контролируемы, использование хорошо апробированного и теоретически отработанного метода невязки затруднительно. Поэтому в вычислительной практике широкое распространение получил второй способ определения параметра регуляризации — квазиоптимальное значение параметра регуляризации. Такой выбор напрямую не связан с уровнем погрешностей δ . Выбирается значение $\alpha > 0$, которое минимизирует

$$\varphi(\alpha) = \left\| \alpha \frac{du_\alpha}{d\alpha} \right\|.$$

Для нахождения квазиоптимального значения чаще всего используется последовательность (3.1.18). Минимизация на таких значениях параметра регуляризации соответствует поиску минимума

$$\tilde{\varphi}(\alpha_{k+1}) = \|u_{\alpha_{k+1}} - u_{\alpha_k}\|.$$

Тем самым, необходимо проводить оценку лишь нормы разности приближённых решений на двух соседних итерациях.

Имеются и другие способы выбора параметра регуляризации. Отметим лишь тот общий момент, что выбор параметра регуляризации приводит к существенному увеличению вычислительной работы и носит в той или иной степени итерационный характер. При каждом значении итерационного параметра решается обратная задача. Естественным, что при промежуточных значениях параметра регуляризации нет большого смысла в очень точном решении таких задач. Поэтому имеет смысл комбинировать нахождение решения обратной задачи с выбором параметра регуляризации. Близкая

идея фактически реализована в итерационных методах решения некорректных задач за счёт объединения функций итерационного параметра и параметра регуляризации.

3.2 Программа численного исследования фильтрационной модели нефтяного пласта

Рассмотрим в области $\Omega_T = [r_0, \bar{r}] \times [0, T]$ краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \sigma(\rho) \frac{\partial u}{\partial \rho} \right], \quad \rho \in [r_0, \bar{r}], \quad t \in [0, T], \quad (3.2.1)$$

$$u(\rho, 0) = 0, \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial u(\bar{r}, t)}{\partial \rho} = 0, \quad (3.2.3)$$

$$u(r_0, t) = f(t), \quad (3.2.4)$$

$$\frac{\partial u(r_0, t)}{\partial \rho} = g(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.2.5)$$

Сформулируем обратную задачу следующим образом: требуется найти коэффициент $\sigma(\rho)$ такой, что $u(\rho, t)$ удовлетворяет системе (3.2.1)–(3.2.5). Функции $f(t)$, $g(t)$, предполагаются известными.

Программа определяет коэффициент $\sigma(\rho)$, имеющий смысл коэффициента гидропроводности нефтяного пласта, из решения обратной задачи (3.2.1)–(3.2.5) для предложенной математической модели.

Задача сводится к задаче минимизации функционала (2.2.58)

$$\inf \left\{ J(\sigma, u) + \alpha \|\sigma - \sigma_0\|_{W'_2}^2 + \beta \|u - u_0\|_U^2 : \sigma \in M, u \in D \right\},$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, пространства W'_2 , U были определены ранее, u_0, σ_0 — некоторые априорно известные приближения.

Программа состоит из отдельных модулей, обеспечивающих последовательное выполнение следующих функций:

1. ввод данных и выбор основных параметров решаемой задачи (выбор параметров расчётной сетки);
2. задание функции $\sigma(\rho)$ (коэффициента гидропроводности) в режиме моделирования процесса фильтрации к одиночной скважине;
3. решение прямой задачи с известным коэффициентом гидропроводности, формирование данных для обратной задачи гидропроводности: граничных условий (функции $f(t)$, $g(t)$), представляющих забойное давление и дебит нефтяной скважины;
4. запись данных в файлы, чтение данных из файлов; данные функция позволяют проводить расчёты на основе экспериментальных данных;
5. расчёт по тестовым или экспериментальным данным задачи приближённых значений коэффициента гидропроводности на основе обобщённого метода L -регуляризации (как результат задачи минимизации целевого функционала).

Для минимизации функционала применён метод градиентного спуска.

Алгоритм метода градиентного спуска

1. Предполагаем, что получено приближение σ^k на k -той итерации (начальное приближение $\sigma^0 = \sigma_0$).
2. Вычисляем значение функционала $J(\sigma^k)$.

3. Если $J(\sigma^k)$ или k не удовлетворяют заданным условиям остановки итераций, то вычисляем градиент функционала (аппроксимацию градиента) $\tilde{J}(\sigma^k)(\rho)$.
4. Выбираем параметр спуска d^k .
5. Вычисляем следующее приближение функционала по формуле $\sigma^{k+1}(\rho) = \sigma^k(\rho) - d^k \tilde{J}(\sigma^k)(\rho)$.
6. Выбираем параметр спуска из нелинейного уравнения относительно d^k :

$$J(\sigma^k) = d^k \int_{\Omega_T} \tilde{J}(\sigma^k)(\rho) u_\rho(\rho, \tau; \sigma^k - d^k \tilde{J}(\sigma^k)(\rho)) \psi_\rho(\rho, \tau; \sigma^k) d\rho d\tau.$$

Хорошей аппроксимацией (см. [46]) является параметр спуска $\tilde{d}^k$, вычисляемый как результат одной итерации метода Ньютона с начальным приближением $d^k = 0$, применённого к уравнению

$$d^k = \frac{J(\sigma^k)}{\int_{\Omega_T} \tilde{J}(\sigma^k)(\rho) u_\rho(\rho, \tau; \sigma^k) \psi_\rho(\rho, \tau; \sigma^k) d\rho d\tau}$$

или

$$d^k = \frac{J(\sigma^k)}{\langle \tilde{J}(\sigma^k)(\rho), \tilde{J}(\sigma^k)(\rho) \rangle}.$$

3.3 Программа математического моделирования процесса регистрации аномалии гравитационного поля

Программа предназначена для определения формы области месторождения по данным регистрируемой гравитационной аномалии на

поверхности земли. Определяется форма раздела двух сред на основе решения двумерной или трёхмерной обратной задачи гравиметрии.

Решение двумерной задачи

Программа в режиме решения двумерной задачи обеспечивает выполнение следующих функций:

1. Ввод данных и задание границы раздела двух сред, области измерения гравитационной аномалии, предельной глубины границы раздела. Функция, определяющая границу раздела выбирается из числа представленных модельных примеров или задаётся пользователем в редактируемом поле в окне ввода данных. Возможно расширение списка модельных примеров, ограничений на их число нет.
2. Решение прямой задачи гравиметрии: вычисление значений гравитационной аномалии на дневной поверхности. Вычисленные значения сохраняются в текстовом файле.
3. Чтение данных о значениях гравитационной аномалии из текстового файла, интерпретация данных. Расчет по данным значениям аномалии и глубины расчетной области приближённой границы раздела сред градиентными методами. В приведённом тексте программы использован метод наискорейшего спуска (МНС). Возможно использование программы для восстановления неизвестной границы раздела по экспериментальным данным (без решения прямой задачи).

Метод решения

Для реализации алгоритма решения интегралы в (2.2.29) аппроксимировались посредством квадратурных формул прямоугольников. При этом вариационная задача (2.1.48)) заменялась задачей

$$\inf \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} F_j(z) \Delta x \right\}, \quad (3.3.1)$$

где

$$F_j(z) = \left(\Delta \xi \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left((x_j - \xi_i)^2 + (H - z_i)^2 \right) - f_\delta(x_j) \right)^2 + \\ + \alpha \Delta \xi \sum_{i=0}^{n-1} \ln^2 \left((x_j - \xi_i)^2 + (H - z_i)^2 \right).$$

Итеративный метод градиентного типа

В качестве основного метода для нахождения минимума функционала $F(z) = \|Az - f_\delta\|^2 + \alpha \|Lz\|^2$ был применён градиентный метод, подобный описанному в [24]. Использовалась итерационная схема с правилом останова по невязке:

$$z^{k+1} = z^k - \beta_k \cdot S(z^k),$$

где

$$S(z^k) = \frac{1}{2} F'(z^k) = (A'(z^k))^* (A(z^k) - f_\delta) + \alpha (L'(z^k))^* L(z^k).$$

Условием останова итераций являлось выполнение для заданного уровня погрешности ε неравенства

$$\Delta^k = \frac{\|A(z^k) - f_\delta\|_{L_2[-l,l]}^2}{\|f_\delta\|_{L_2[-l,l]}^2} < \varepsilon. \quad (3.3.2)$$

Выбор параметра β_k осуществлялся либо в соответствии с методом наискорейшего спуска (МНС)

$$\beta_k = \frac{\|S(z^k)\|_{L_2[-l,l]}^2}{\|A'(z^k)S(z^k)\|_{L_2[-l,l]}^2},$$

либо в соответствии с методом минимальной ошибки (ММО)

$$\beta_k = \frac{\|A(z^k) - f_\delta\|_{L_2[-l,l]}^2}{\|S(z^k)\|_{L_2[-l,l]}^2}.$$

Величина относительной невязки Δ^k служила также показателем качества решения задачи восстановления искомой границы.

Итеративно регуляризованный метод Ньютона

В работах [6, 7, 23] для решения задачи применялся итеративно регуляризованный метод Ньютона. После аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам уравнение (1.3.2) заменялась системой нелинейных уравнений

$$A_j z = f_j(x), \quad j = 0, \dots, m-1.$$

При этом задача (3.3.1) заменяется на систему

$$\inf \{F_j(z)\}, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Для удобства применения данного метода внешний интеграл также брался по отрезку $[-l, l]$, соответственно получалось $m = n$.

Применив необходимое условие экстремума, получим систему уравнений

$$(F_j)'_{z_i} \equiv 2(A_j(z) - f_\delta(x_j)) \frac{2(z_i - H)\Delta\xi}{(x_j - \xi_i)^2 + (H - z_i)^2} + \\ + 2\alpha L_j(z_i) \frac{2(z_i - H)\Delta\xi}{(x_j - \xi_i)^2 + (H - z_i)^2} = 0,$$

$$j = 0, \dots, m-1, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

После сокращения система приводится к виду

$$A_j(z) - f_\delta(x_j) + \alpha L_j(z_i) = 0, \quad j = 0, \dots, m-1, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Суммируем по i для каждого j , разделим на n :

$$\Phi_j \equiv A_j(z) - f_\delta(x_j) + \frac{\alpha}{n} \sum_{i=0}^{n-1} L_j(z_i) = 0, \quad j = 0, \dots, m-1. \quad (3.3.3)$$

К каждому $\Phi_j(z)$ применим итерационный метод Ньютона в виде:

$$z_j^{k+1} = z_j^k - (S_j(z^k))^{-1} (\Phi_j(z^k)), \quad j = 0, \dots, m-1,$$

где

$$S_j(z) = \sum_{i=0}^{n-1} (\Phi_j)'_{z_i}(z) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2(z_i - H)}{(x_j - \xi_i)^2 + (H - z_i)^2} \left(\Delta \xi + \frac{\alpha}{n} \right).$$

Метод сопряжённых градиентов [5]

Перепишем систему (3.3.3) в векторном виде:

$$A_m[z] - f_m + \frac{\alpha}{n} \sum_{i=0}^{n-1} L_m(z_i) = 0. \quad (3.3.4)$$

В случае при $m = n$ для решения системы уравнений (3.3.4) используется итеративно регуляризованный метод Ньютона

$$z^{k+1} = z^k - \left[A'_n(z^k) + \frac{\alpha}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} L_n(z_i^k) \right)' \right]^{-1} \cdot \left(A_n(z^k) - f_n + \frac{\alpha}{n} \sum_{i=0}^{n-1} L_n(z_i^k) \right).$$

Нахождение очередного приближения z^{k+1} сводится к решению системы алгебраических уравнений

$$A_n^k z^{k+1} = f_n^k, \quad (3.3.5)$$

где $A_n^k = A'_n(z^k) + \frac{\alpha}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} L_n(z_i^k) \right)'$ — несимметричная заполненная $n \times n$ матрица, а f_n^k — вектор-столбец размерности n :

$$f_n^k = A_n^k z^k - \left(A_n(z^k) - f_n + \frac{\alpha}{n} \sum_{i=0}^{n-1} L_n(z_i^k) \right).$$

Для решения (3.3.5) применялся итерационный метод сопряжённых градиентов (MSG). Для этого система приводилась к виду с симметричной матрицей

$$Cz^{k+1} \equiv ((A_n^k)^T A_n^k + \alpha' E) z^{k+1} = (A_n^k)^T f_n^k \equiv d. \quad (3.3.6)$$

где $\alpha' > 0$ — параметр регуляризации.

Полученная система (3.3.6) решалась методом сопряжённых градиентов:

$$z^{k+1} = z^k - \gamma_k (Cz^k - d) + \beta_k (z^k - z^{k-1}), \quad (3.3.7)$$

где коэффициенты γ_k и β_k вычислялись по формулам [?]

$$\gamma_k = \frac{\|r_k\|^2 (Cp_k, p_k) - (r_k, p_k)(Cr_k, p_k)}{(Cr_k, r_k)(Cp_k, p_k) - (Cr_k, p_k)^2}, \quad r_k = Cz^k - d,$$

$$\beta_k = \frac{\|r_k\|^2 (Cr_k, p_k) - (r_k, p_k)(Cr_k, r_k)}{(Cr_k, r_k)(Cp_k, p_k) - (Cr_k, p_k)^2}, \quad p_k = z^k - z^{k-1},$$

и первое приближение z^1 находилось методом наискорейшего спуска

$$z^1 = z^0 - \frac{(r_0, r_0)}{(Cr_0, r_0)} r_0.$$

В случае $m > n$ для решения системы уравнений (3.3.4) используется итеративно регуляризованный метод Ньютона в виде

$$z^{k+1} = z^k - [(A_m^k)^T A_m^k]^{-1} \left[(A_m^k)^T \left(A_m(z^k) - f_m + \frac{\alpha}{n+1} \sum_{i=0}^n L_m(z_i^k) \right) \right],$$

где $A_m^k = A'_m(z^k) + \frac{\alpha}{n+1} \left(\sum_{i=0}^n L_m(z_i^k) \right)'$ — матрица размерности $m \times n$.

Нахождение очередного приближения z^{k+1} сводится к решению системы

$$(A_m^k)^T A_m^k z^{k+1} = (A_m^k)^T f_m^k, \quad (3.3.8)$$

где $f_m^k = A_m^k z^k - (A_m(z^k) - f_m + \frac{\alpha}{n+1} \sum_{i=0}^n L_m(z_i^k))$ — вектор-столбец размерности m . Для решения (3.3.8) методом сопряжённых градиентов (3.3.7) система приводится к виду

$$Cz^{k+1} \equiv ((A_m^k)^T A_m^k + \alpha' E) z^{k+1} = (A_m^k)^T f_m^k \equiv d.$$

Во всех методах итерационные процессы продолжались до тех пор, пока не выполнялось условие

$$\|Az^k - f_\delta\|_{L_2}^2 < \left(\frac{4\pi}{\rho}\delta\right)^2,$$

если была задана погрешность, или

$$\frac{\|Az^k - f_\delta\|_{L_2}}{\|g\|_{L_2}} < \varepsilon,$$

если погрешность в g отсутствовала.

Решение трёхмерной задачи гравиметрии

Программа в режиме решения трёхмерной задачи обеспечивает выполнение следующих функций:

1. Ввод данных или задание границы раздела 2 сред в тестовом режиме.
2. Выбор основных параметров решаемой задачи и границ области измерения гравитационной аномалии.
3. Работу в тестовом режиме. В тестовом режиме решается прямая задача, и рассчитываются значения гравитационной аномалии. Вычисленные значения сохраняются в бинарных файлах.

4. Чтение данных о значениях гравитационной аномалии из бинарных файлов, интерпретация данных. Операция чтения данных из файлов выделена для удобства ввода данных, полученных по результатам гравirazведки.
5. Расчет по данным значениям аномалии приближённой границы раздела сред реализован на основе метода регуляризации А.Н. Тихонова. Для минимизации функционала применен метод градиентного спуска.

Постановка задачи

Воспользуемся выражением потенциала силы тяжести

$$U(x, y, z) = \frac{\rho}{4\pi} \iiint_T \frac{1}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{1/2}} d\xi d\eta d\zeta,$$

где область T определена условиями

$$T = \{(\xi, \eta, \zeta) \mid -a \leq \xi \leq a, \quad -b \leq \eta \leq b, \quad -H \leq \zeta \leq -H + z(\xi, \eta)\}.$$

Аномалия силы тяжести на поверхности Земли $z = 0$:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= - \left. \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \\ &= - \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \int_{-H}^{-H+z(\xi, \eta)} \frac{\zeta}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2)^{3/2}} d\zeta d\xi d\eta = \\ &= - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \int_{-H}^{-H+z(\xi, \eta)} \frac{1}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2)^{3/2}} d\zeta^2 d\xi d\eta = \\ &= \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{1}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2)^{1/2}} \Big|_{-H}^{-H+z(\xi, \eta)} d\xi d\eta = \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left(\frac{1}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (H - z(\xi, \eta))^2)^{1/2}} - \frac{1}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + H^2)^{1/2}} \right) d\xi d\eta.$$

Уравнение гравиметрии для трёхмерной задачи:

$$\frac{\rho}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left(\frac{1}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (H - z(\xi, \eta))^2)^{1/2}} - \frac{1}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + H^2)^{1/2}} \right) d\xi d\eta = g(x, y), \quad (3.3.9)$$

где

$$\begin{aligned} -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty, \\ z(\xi, \eta) &\in L_2([-a, a] \times [-b, b]), \\ g(x, y) &\in L_2((-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)). \end{aligned}$$

Уравнение (3.3.9) в операторной форме имеет вид:

$$Az = f, \quad (3.3.10)$$

где

$$\begin{aligned} Az &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{1}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (H - z(\xi, \eta))^2)^{1/2}} d\xi d\eta, \\ f &= f(x, y) = \frac{4\pi}{\rho} g(x, y) + \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{1}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + H^2)^{1/2}} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Оператор A действует из пространства $L_2([-a, a] \times [-b, b])$ в пространство $L_2((-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty))$. Считаем функцию f известной, а $z(\xi, \eta)$ требуется найти.

Предположим, что при $f(x, y) = f_0(x, y)$ уравнение (3.3.10) имеет решение, но точное значение $f_0(x, y)$ нам неизвестно, а вместо него даны δ -приближение $f_\delta(x, y)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta - f_0\| \leq \delta.$$

Операторное уравнение (3.3.10) можно свести к вариационной задаче:

$$\inf \{ \|Az - f_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|Lz\|_{L_2}^2 \mid z \in D(A), \alpha > 0 \}, \quad (3.3.11)$$

где

$$Lz = \frac{1}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (H - z(\xi, \eta))^2)^{1/2}},$$

и оператор L действует из пространства $L_2([-a, a] \times [-b, b])$ в пространство $L_2([-a, a] \times [-b, b] \times (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty))$.

Метод решения

Применим метод конечномерных аппроксимаций к вариационной задаче (3.3.11). Пусть $\xi \in [-a, a]$, $\eta \in [-b, b]$. Разобьём отрезки $[-a, a]$ и $[-b, b]$ соответственно на n и m равных частей:

$$-a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = a,$$

$$-b = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_m = b.$$

Обозначим $\Delta\xi = \frac{2a}{n}$ шаг разбиения отрезка $[-a, a]$, $\Delta\eta = \frac{2b}{m}$ — шаг разбиения отрезка $[-b, b]$.

Бесконечные интервалы заменим конечными отрезками $[-s, s]$ и $[-t, t]$. Отрезок $[-s, s]$ разобьём на n_1 частей с шагом $\Delta x = \Delta\xi$, а отрезок $[-t, t]$ — на m_1 частей с шагом $\Delta y = \Delta\eta$. Разбиение строим таким образом, чтобы точки разбиений совпадали с точками разбиений отрезков $[-a, a]$ и $[-b, b]$ соответственно.

Искомую границу $z(\xi, \eta)$ аппроксимируем кусочно-постоянными функциями

$$z(\xi, \eta) = \{z(\xi_i, \eta_j) = z_{ij}, \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}, \eta_j \leq \eta \leq \eta_{j+1}\}.$$

Таким образом вариационная задача (3.3.11) сводится к конечномерной:

$$\inf \left\{ \sum_{l=0}^{m_1-1} \sum_{k=0}^{n_1-1} F_{kl}(z) \Delta x \Delta y \right\},$$

где

$$\begin{aligned} F_{kl}(z) &= (A_{kl}(z) - f_\delta(x_k, y_l))^2 + \alpha \Delta \eta \Delta \xi \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} L_{kl}^2(z_{ij}) = \\ &= \left(\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{((x_k - \xi_i)^2 + (y_l - \eta_j)^2 + (H - z_{ij})^2)^{1/2}} - f_\delta(x_k, y_l) \right)^2 + \\ &\quad + \alpha \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{(x_r - \xi_i)^2 + (y_s - \eta_j)^2 + (H - z_{ij})^2}. \end{aligned}$$

Методы решения трёхмерной задачи те же, что и для двумерной.

3.4 Программа математического моделирования процесса тепловой диагностики технических объектов

Рассмотрим в области $\Omega = [0, 1] \times [0, S]$ краевую задачу (1.2.33) – (1.2.36)

$$\frac{\partial u(x, s)}{\partial s} = \frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial x^2}, \quad x \in [0, 1], \quad s \in [0, S],$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u(0, s) = f_1(s),$$

$$u'_x(0, s) = f_2(s),$$

к которой заменой переменных сводится задача (1.2.1) – (1.2.3). Условиям (1.2.4) – (1.2.5) соответствует уравнения

$$u(x_2, s) = g(s), \quad s \in [0, S],$$

$$u'_x(1, s) = z_1(s), \quad s \in [0, S].$$

Сформулируем обратную задачу следующим образом: требуется найти функцию $z_1(s)$, определяющую тепловой поток на границе $x = 1$ в задаче тепловой диагностики. Функции $f_1(s)$, $f_2(s)$, $g(s)$, предполагаются известными.

Для решения этой задачи может быть применён обобщённый метод L -регуляризации по аналогии с применением метода в обратной задаче гидродинамики. Задача сводится к задаче минимизации функционала

$$J(z_1, u) = \|Au - f\|_{L_2}^2 + \alpha \|Lu\|_{L_2}^2,$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, $z_1(s)$ принадлежит классу корректности M , соответствующему классу корректности M_r исходной задачи.

Решение обратной граничной задачи теплопроводности методом регуляризации находилось с помощью вспомогательной функции плотности теплового потенциала (см. [8, 15]). Применив в задаче минимизации метод конечномерных аппроксимаций, разобьём отрезок $[0, S]$ на n равных частей, шагов по времени. В результате получим разностный аналог вариационной задачи

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^n (u_i(x_2) - g_i)^2 + \alpha \left(\sum_{i=1}^n q_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (q_{i+1} - q_i)^2 \right) \right\},$$

где $y(s) = u(x_2, s)$ — приближённое решение в точке расположения датчика температуры, q_i — расчётные значения тепловых потоков.

Численная аппроксимация минимизируемого функционала приводит к задаче решения системы n алгебраических уравнений с нижней треугольной матрицей коэффициентов чувствительности (см. [8, 15]). Для решения системы использовались метод регуляризации по всей области и метод последовательной регуляризации, описанные в [15].

Для реализации алгоритма решения обратной граничной задачи была разработана программа в пакете MATLAB. Программа состоит из модулей, обеспечивающих выполнение следующих функций:

1. ввод данных и выбор основных параметров решаемой задачи (выбор параметров расчётной сетки);
2. задание функции $z_1(s)$ теплового потока на границе $x = 1$;
3. решение прямой задачи нестационарной теплопроводности с известным граничным условием, расчёт поля температур в стенке, подверженной тепловой нагрузке;
4. формирование данных для обратной задачи теплопроводности — значений датчика температуры в точке x_1 ;
5. расчёт по тестовым данным значений тепловых потоков в расчётной области $\Omega = [0, 1] \times [0, S]$, получение приближённых значений приближённых значений граничного потока.

Для минимизации функционала применён метод градиентного спуска.

Заключение

Перечислим основные результаты, приведённые в диссертационной работе.

1. Выполнена постановка задачи гидродинамического исследования нефтяных пластов как обратной коэффициентной задачи фильтрации. При математическом моделировании изучаемого процесса учтены особенности задач подземной гидромеханики. Проведено исследование единственности решения соответствующей обратной задачи.
2. Рассмотрена задача тепловой диагностики технических объектов, подверженных тепловым нагрузкам, с подвижной границей. Исследована единственность решения соответствующей обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности. Получено приближённое решение и оценка его погрешности.
3. Изучена задача определения запасов полезных ископаемых в геологоразведке по регистрируемой аномалии гравитационного поля, вызванной неоднородностью горных пород. Смоделирована сопутствующая задача восстановления поверхности раздела двух сред как нелинейная обратная задача гравиметрии. Исследовано строение оператора, порождённого данной обратной задачей.
4. Предложен общий для всех указанных задач численный метод

решения, в основе которого лежат методы L -регуляризации приближённых решений и конечномерной аппроксимации регуляризованных решений.

5. Проведено сравнение с точки зрения эффективности методов решения вариационной задачи. Для нахождения минимума функционала применялись градиентные, квазиньютоновские методы и метод сопряжённых градиентов. На основе этих методов разработаны алгоритмы решения рассмотренных обратных задач.
6. Разработан комплекс программ, реализующих предложенные алгоритмы решения нелинейных обратных задач.
7. С помощью разработанного программного обеспечения исследованы прикладные задачи гидродинамического прослушивания нефтяного пласта, тепловой диагностики технических объектов с подвижной границей и восстановления поверхности залегающих пород по аномалии гравитационного поля.

Список литературы

1. Агеев, А. Л. Алгоритмы конечномерной аппроксимации стабилизирующих добавок / А. Л. Агеев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1991. — Т. 31, № 7. — С. 943–952.
2. Агеев, А. Л. Об одном свойстве оператора, обратного к замкнутому / А. Л. Агеев // Исследования по функциональному анализу. — Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1978. — С. 3–5.
3. Агеев, А. Л. К вопросу о построении оптимального метода решения линейного уравнения 1 рода / А. Л. Агеев // Известия вузов. Математика. — 1983. № 3. — С. 61–68.
4. Агеев, А. Л. Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций / А. Л. Агеев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1980. — Т. 20, № 4. — С. 516–531.
5. Акимова, Е. Н. Параллельные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на МВС-1000 / Е. Н. Акимова // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. — 2009. — № 4. — С. 181–189.
6. Акимова, Е. Н. Решение обратных задач магнитометрии и гравиметрии о восстановлении разделяющей поверхности сред /

- Е. Н. Акимова, В. В. Васин, Г. Г. Скорик // Материалы 35-й сессии Международного семинара им. Д. Г. Успенского — Ухта: УГТУ, 2008. — С. 10–13.
7. Акимова, Е. Н. Регулярные методы решения обратной задачи гравиметрии / Е. Н. Акимова, Г. Г. Скорик // Сибирские электронные математические известия. — 2008. — Т. 5. — С. 509–517.
 8. Алифанов, О. М. Обратные задачи теплообмена / О. М. Алифанов. — М.: Машиностроение, 1988. — 280 с.
 9. Арсенин, В. Я. О разрывных решениях уравнений первого рода / В. Я. Арсенин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1965. — Т. 5, № 5. — С. 922–926.
 10. Бакушинский, А. Б. Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейных некорректных уравнений в гильбертовом пространстве / А. Б. Бакушинский // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1967. — Т. 7, № 3. — С. 672–677.
 11. Бакушинский, А. Б. Оптимальные и квазиоптимальные методы решения линейных задач, порожденные регуляризирующими алгоритмами / А. Б. Бакушинский // Известия Вузов. Математика. — 1978. — № 11. — С. 6–10.
 12. Бакушинский, А. Б. Замечание о выборе параметра регуляризации / А. Б. Бакушинский // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1984. — Т. 24, № 8. — С. 1253–1259.

13. Бакушинский, А. Б. Некорректные задачи. Численные методы и приложения / А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 199 с.
14. Бакушинский, А. Б. Устойчивый градиентно-проекционный метод для обратной задачи гравиметрии / А. Б. Бакушинский, М. Ю. Кокурин, А. И. Козлов // Математическое моделирование. — 2003. — Т. 15, № 7. — С. 37–45.
15. Бек, Дж. Некорректные обратные задачи теплопроводности / Дж. Бек, Д. Блакуэлл, Ч. Сент-Клер, мл. — М.: Мир, 1989. — 312 с.
16. Вайникко, Г. М. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах / Г. М. Вайникко. — Тарту: ТГУ, 1982. — 110 с.
17. Васильев, Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
18. Васин, В. В. Регуляризация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных / В. В. Васин // Дифференциальные уравнения. — 1968. — Т. 4, № 12. — С. 2268–2274.
19. Васин, В. В. О связи некоторых вариационных методов приближенного решения некорректных задач / В. В. Васин // Математические заметки. — 1970. — Т. 7, № 3. — С. 265–372.
20. Васин, В. В. Регуляризация задачи численного дифференцирования / В. В. Васин // Математические записки. — 1969. — Т. 7, № 2. — С. 29–33.

21. Васин, В. В. Общая схема дискретизации регуляризирующих алгоритмов в банаховых пространствах / В. В. Васин // ДАН СССР. — 1981. — Т. 256, № 2. — С. 271–275.
22. Васин, В. В. Некорректные задачи с априорной информацией / В. В. Васин, А. Л. Агеев. — Екатеринбург: Наука, 1993. — 261 с.
23. Васин, В. В. Методы решения обратной задачи магнитометрии / В. В. Васин, Е. Н. Акимова, Г. Я. Пересторонина, П. С. Мартышко, В. А. Пьянков // Сибирские электронные математические известия. — 2008. — Т. 5. — С. 620–631.
24. Васин, В. В. Решение нелинейной задачи гравиметрии методами градиентного типа / В. В. Васин, И. Л. Пруткин, Л. Ю. Тихмерханова // Математическое моделирование. — 1999. — Т. 11, № 10. — С. 86–91.
25. Васин, В. В. Необходимые и достаточные условия сходимости проекционных методов для линейных неустойчивых задач / В. В. Васин, В. П. Танана // ДАН СССР. — 1974. — Т. 215, № 5. — С. 1032–1034.
26. Васин, В. В. Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризирующих алгоритмов / В. В. Васин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1979. — Т. 19, № 1. — С. 11–21.
27. Васин, В. В. Методы итеративной регуляризации для некорректных задач / В. В. Васин // Известия Вузов. Математика. — 1995. — № 11. — С. 402.
28. Васин, В. В. Устойчивая аппроксимация негладких решений некорректно поставленных задач / В. В. Васин // Докл. РАН. — 2005. — Т. 402, № 5. — С. 1–4.

29. Васин, В.В. Приближенное решение операторных уравнений первого рода / В.В. Васин, В.П. Танана // Математические записки. — 1968. — Т. 6, № 4. — С. 27–37.
30. Винокуров, В.А. Об одном необходимом условии регуляризуемости по Тихонову / В.А. Винокуров // ДАН СССР. — 1981. — Т. 256, № 2. — С. 271–275.
31. Винокуров, В.А. Измеримость и регуляризуемость отображений, обратных к непрерывным линейным операторам / В.А. Винокуров, Ю.И. Петунин, А.Н. Пличко // Математические заметки. — 1973. — Т. 26, № 4. — С. 583–593.
32. Винокуров, В.А. Необходимые и достаточные условия линейной регуляризуемости / В.А. Винокуров, Л.Д. Менихес // ДАН СССР. — 1976. — Т. 229, № 6. — С. 1292–1294.
33. Власов, Л.П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах / Л.П. Власов // УМН. — 1973. — Т. 28, вып. 6 (174). — С. 3–66.
34. Гласко, В.Б. О восстановлении глубины и формы контактной поверхности на основе регуляризации / В.Б. Гласко, А.Х. Остромогильский, В.Г. Филатов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1970. — Т. 10, № 5. — С. 1292–1297.
35. Гончарский, А.В. Об одном регуляризующем алгоритме для некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором / А.В. Гончарский, А.С. Леонов, А.Г. Ягола // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1972. — Т. 12, № 6. — С. 1592–1596.

36. Гончарский, А. В. О регуляризуемости некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором / А. В. Гончарский, А. С. Леонов, А. Г. Ягола // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1974. — Т. 14, № 4. — С. 1022–1027.
37. Данилин, А. Р. Об оптимальных по порядку оценках конечномерных аппроксимаций решений некорректных задач / А. Р. Данилин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1985. — Т. 25, № 8. — С. 1123–1130.
38. Данилин, А. Р. Необходимые и достаточные условия сходимости конечномерных аппроксимаций метода невязки / А. Р. Данилин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1982. — Т. 22, № 4. — С. 824–839.
39. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. — М.: Изд-во МГУ, 1994. — 208 с.
40. Иванов В. К. О линейных некорректных задачах / В. К. Иванов // ДАН СССР. — 1962. — Т. 145, № 2. — С. 270–272.
41. Иванов, В. К. О некорректно поставленных задачах / В. К. Иванов // Математический сборник. — 1963. — Т. 61, № 2. — С. 211–213.
42. Иванов, В. К. О равномерной регуляризации неустойчивых задач / В. К. Иванов // Сибирский математический журнал. — 1966. — Т. 7, № 3. — С. 546–558.
43. Иванов, В. К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода / В. К. Иванов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1966. — Т. 6, № 6. — С. 1089–1094.

44. Иванов, В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. — М.: Наука, 1978. — 208 с.
45. Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи / С. И. Кабанихин. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. — 457 с.
46. Кабанихин, С. И. Метод градиентного спуска для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности / С. И. Кабанихин, А. Гасанов, А. В. Пененко // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2008. — Т. 11, № 1. — С. 41–54.
47. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М.: Наука, 1976. — 576 с.
48. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Наука, 1976. — 543 с.
49. Кутузов, А. С. Точная по порядку оценка приближенного решения обратной задачи для уравнения теплопроводности на кольце / А. С. Кутузов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика, физика, химия». — 2007. — № 19 (91). — С. 30–36.
50. Кутузов, А. С. Оценка приближённого решения одной двумерной граничной обратной задачи тепловой диагностики методом квазиобращения / А. С. Кутузов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, физика, химия. — 2009. — № 10 (143). — С. 14–21.

51. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. — Новосибирск: Сибирское отделение АН СССР, 1962. — 92 с.
52. Лаврентьев, М. М. К вопросу об улучшении точности решения системы линейных уравнений / М. М. Лаврентьев // ДАН СССР. — 1953. — Т. ХСII, № 5. — С. 885–886.
53. Лаврентьев, М. М. Об интегральных уравнениях первого рода / М. М. Лаврентьев // ДАН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 31–33.
54. Лаврентьев, М. М. Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений / М. М. Лаврентьев. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1973. — 71 с.
55. Лаврентьев, М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шихатский. — М.: Наука, 1980. — 288 с.
56. Латтес, Р. Метод квазиобращения и его приложения / Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1970. — 224 с.
57. Левитан, Б. М. Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. — М.: Наука, 1970. — 672 с.
58. Левитан, Б. М. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. — М.: Наука, 1988. — 432 с.
59. Леонов, А. С. Кусочно-равномерная регуляризация некорректных задач с разрывными решениями / А. С. Леонов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1982. — Т. 22, № 3. — С. 516–531.

60. Леонов, А. С. Решение некорректно поставленных обратных задач: Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрация в МАТЛАБ / А. С. Леонов. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 336 с.
61. Леонов, А. С. О сходимости по полным вариациям регуляризующих алгоритмов решения некорректно поставленных задач / А. С. Леонов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — № 47 (5). — С. 766–781.
62. Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М.: Мир, 1971. — 372 с.
63. Лисковец, О. А. Вариационные методы решения неустойчивых задач / О. А. Лисковец. — Минск: Наука и техника, 1981. — 343 с.
64. Мартыненко, Н. А. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами / Н. А. Мартыненко, Л. М. Пустыльников. — М.: Наука, 1986. — 304 с.
65. Мартышко, П. С. Технология разделения источников гравитационного поля по глубине. // П. С. Мартышко, И. Л. Пруткин // Геофизический журнал. — 2003. — Т. 25, № 3 — С. 159–168.
66. Менихес, Л. Д. Конечномерная аппроксимация в методе М. М. Лаврентьева / Л. Д. Менихес, В. П. Танана // Сибирский журнал вычислительной математики. — 1998. — Т. 1, № 1. — С. 56–66.
67. Менихес, Л. Д. О регуляризуемости некоторых классов отображений, обратных к интегральным операторам / Л. Д. Ме-

- нихес // Математические заметки. — 1999. — Т. 65, № 2. — С. 222–229.
68. Менихес, Л. Д. Об одном достаточном условии регуляризуемости линейных обратных задач / Л. Д. Менихес // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 2. — С. 242–247.
69. Менихес, Л. Д. К теории регуляризации неустойчивых задач / Л. Д. Менихес // Изв. Челяб. науч. центра УрО РАН. — 2002. — Вып. 3 (16). — С. 1–5.
70. Морозов, В. А. О решении методом регуляризации некорректно поставленных задач с нелинейным неограниченным оператором / В. А. Морозов // Дифференциальные уравнения. — 1970. — Т. 6, № 8. — С. 1453–1458.
71. Морозов, В. А. Линейные и нелинейные некорректные задачи / В. А. Морозов // Математический анализ (Итоги науки и техники). — 1973. — Т. 11. — С. 129–178.
72. Морозов, В. А. Методы регуляризации неустойчивых задач / В. А. Морозов. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 216 с.
73. Морозов, В. А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации / В. А. Морозов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1966. — Т. 6, № 1. — С. 170–175.
74. Морозов, В. А. О регуляризации некоторых классов экстремальных задач / В. А. Морозов // Вычислительные методы и программирование: сб. науч. тр. — М.: Изд-во МГУ, 1969. — Вып. 12. — С. 24–37.

75. Морозов, В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / В. А. Морозов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1966. — Т. 6, № 1. — С. 170–175.
76. Осипов, Ю. С. Основы метода динамической регуляризации / Ю. С. Осипов, Ф. П. Васильев, М. М. Потапов. — М.: МГУ, 1999. — 238 с.
77. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 154 с.
78. Романов, В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений / В. Г. Романов. — Новосибирск: НГУ, 1973. — 252 с.
79. Романов, В. Г. Обратные задачи математической физики / В. Г. Романов. — М.: Наука, 1984. — 251 с.
80. Романов, В. Г. Устойчивость в обратных задачах / В. Г. Романов. — М.: Научный мир, 2005. — 304 с.
81. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М.: Наука, 1989. — 616 с.
82. Сидикова, А. И. Об одной переопределенной задаче тепловой диагностики / А. И. Сидикова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. — 2011. — № 23 (240). — С. 43–48
83. Сидикова, А. И. Об оценке точности приближенного решения обратной граничной задачи для параболического уравнения /

- А. И. Сидикова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2013. — Т. 6, № 2. — С. 74–87.
84. Страхов, В. Н. О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве / В. Н. Страхов // Дифференциальные уравнения. — 1970. — Т. 6, № 8. — С. 1490–1495.
85. Страхов, В. Н. Об алгоритмах приближенного решения линейных условно-корректных задач / В. Н. Страхов // ДАН СССР. — 1972. — Т. 207, № 5. — С. 1057–1059.
86. Страхов, В. Н. О построении оптимальных по порядку приближенных решений линейных условно-корректных задач / В. Н. Страхов // Дифференциальные уравнения. — 1973. — Т. 9, № 10. — С. 1862–1874.
87. Табаринцева, Е. В. Об оценке погрешности метода квазиобращения при решении задачи Коши для полулинейного дифференциального уравнения / Е. В. Табаринцева // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2005. — Т. 8, № 3. — С. 259–271.
88. Табаринцева, Е. В. О решении одной граничной обратной задачи для параболического уравнения / Е. В. Табаринцева // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. — 2010. — № 30 (206). С. 21–28.
89. Табаринцева, Е. В. О решении граничной обратной задачи для параболического уравнения методом квазиобращения / Е. В. Табаринцева, Л. Д. Менихес, А. Д. Дрозин // Вестник

- Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. — 2012. — № 11 (270). — С. 8–13
90. Танана, В.П. Об одном подходе к приближению разрывного решения некорректно поставленной задачи / В.П. Танана, Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2005. — Т. VIII, № 1. — С. 129–142.
91. Танана, В.П. Об одном проекционно-итеративном алгоритме для операторных уравнений первого рода с возмущенным оператором / В.П. Танана // ДАН СССР. — 1975. — Т. 224, № 5. — С. 1028–1029.
92. Танана, В.П. О решении операторных уравнений первого рода с многозначными операторами и их приложения / В.П. Танана // Изв. вузов. Математика. — 1977. — № 7. — С. 87–93.
93. Танана, В.П. О классификации некорректно поставленных задач и оптимальных методах их решения / В.П. Танана // Изв. вузов. Математика. — 1977. — № 11. — С. 106–112.
94. Танана, В.П. Об оптимальных алгоритмах для операторных уравнений первого рода с возмущенным оператором / В.П. Танана // Математический сборник. — 1977. — Т. 146, № 10. — С. 314–333.
95. Танана, В.П. Методы решения операторных уравнений / В.П. Танана. — М.: Наука, 1981. — 156 с.
96. Танана, В.П. Об оптимальности методов регуляризации линейных операторных уравнений с приближенно заданным оператором при условии неединственности решения / В.П. Танана // ДАН СССР. — 1985. — Т. 238, № 5. — С. 1092–1095.

97. Танана, В.П. Об аппроксимации регуляризованного решения нелинейного уравнения / В.П. Танана // Сиб. мат. журн. — 1997. — Т. 38, № 2. — С. 417–423.
98. Танана, В.П. О сходимости регуляризованных решений нелинейных операторных уравнений / В.П. Танана // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2003. — Т. VI, № 3 (15). — С. 119–133.
99. Танана, В.П. О новом подходе к оценке погрешности методов решения некорректно поставленных задач / В.П. Танана // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2002. — Т. 5, № 4. — С. 150–163.
100. Танана, В.П. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач / В.П. Танана // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2004. — Т. 7, № 2. — С. 117–132.
101. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения одной обратной задачи для параболического уравнения / В.П. Танана // Докл. РАН. — 2006. — Т. 407, № 3. — С. 316–318.
102. Танана, В.П. О регуляризации обратной задачи фильтрации в неоднородном пласте / В.П. Танана // ДАН СССР. — 1985. — Т. 281, № 5. — С. 1061–1063.
103. Танана, В.П. Об оптимальности регуляризующих алгоритмов при решении некорректных задач / В.П. Танана, А.Р. Данилин // Дифференциальные уравнения. — 1976. — Т. 12, № 7. — С. 1323–1326.
104. Танана, В.П. О гарантированной оценке точности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагно-

- стики в неоднородной среде / В.П. Танана, А.И. Сидикова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2009. — № 17 (150). — С. 104–113.
105. Сидикова, А. И. Об оптимальности по порядку одного метода вычисления значений неограниченного оператора и его приложения / А. И. Сидикова // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2009. — Т. XII, № 3. — С. 130–140.
106. Танана, В. П. Решение обратной задачи для уравнения теплопроводности методом установления / В.П. Танана, Е. В. Худышкина // Известия Челябинского научного центра УрО РАН. — 2005. — Вып. 2 (28). — С. 1–3.
107. Танана, В.П. об оптимальности метода установления / В. П. Танана, Е. В. Худышкина // Вестник Челябинского государственного университета. — 2003. — Т. 3, № 1. — С. 165–173.
108. Танана, В. П. Об оптимальных по порядку методах решения условно-корректных задач / В.П. Танана, Н.М. Япарова // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2006. — Т. 9, № 4. — С. 353–368.
109. Танана, В. П. Об оптимальности метода невязки / В. П. Танана, Н. М. Япарова // Вестник Челябинского государственного университета. — 2003. — Т. 3, № 1. — С. 174–188.
110. Танана, В. П. Методы решения нелинейных некорректных задач / В.П. Танана, А.В. Танана. — Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2006. — 102 с.

111. Тийман, А. О вычислении градиента функции стоимости для одной обратной задачи / А. Тийман // Учёные записки Тартуского университета. — 1985. — № 715. — С. 30–36.
112. Тихонов, А. Н. Об устойчивости обратных задач / А. Н. Тихонов // ДАН СССР. — 1943. — Т. 39, № 5. — С. 195–198.
113. Тихонов, А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А. Н. Тихонов // ДАН СССР. — 1963. — Т. 151, № 3. — С. 501–504.
114. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректно поставленных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М.: Наука, 1974. — 223 с.
115. Тихонов, А. Н. Численные методы решения некорректно поставленных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. — М.: Наука, 1990. — 232 с.
116. Тихонов, А. Н. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах / А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1965. — Т. 5, № 3. — С. 463–473.
117. Федотов, А. М. Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных / А. М. Федотов. — Новосибирск: Наука, 1982. — 190 с.
118. Цирульский, А. В. О решении обратной задачи гравиметрии для произвольных классов двумерных и трехмерных потенциалов / А. В. Цирульский, И. Л. Пруткин // Известия АН СССР. Серия: Физика Земли. — 1981. — № 11. — С. 45–61.

119. Цирульский, А. В. О разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде / А. В. Цирульский, Ф. И. Никонова // Известия АН СССР. Серия: Физика Земли. — 1975. — № 5. — С. 37–46.
120. Япарова, Н. М. О различных подходах к решению обратных граничных задач тепловой диагностики / Н. М. Япарова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. — 2012. — № 34. — С. 60–67.
121. Япарова, Н. М. Численное моделирование решений обратной граничной задачи теплопроводности / Н. М. Япарова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2013. — Т. 6, № 3. — С. 112–124.
122. Япарова, Н. М. Об оптимальном по порядку методе решения задачи параметрической идентификации при оценке собственного состояния средств измерения / Н. М. Япарова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2013. — Т. 18, № 5-2. — С. 2759–2761.
123. Franklin, J. N. On Tikhonov's method for ill-posed problems / J. N. Franklin // Math. Comput. — 1974. — Vol. 28, № 128. — P. 889–907.
124. Gullum, J. Numerical differentiation and regularization / J. Gullum // SIAM J. Numer. anal. — 1967. — Vol. 8, № 2.
125. Hadamar, J. Le problem de Cauchy et les equations aux derives partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamar. — Paris: Herman, 1932.

126. Hadamar J. Sur les problems aux derivees partielles et leur signification physique // Bull. Univ. Princeton. 1902. 13.
127. Levinson, N. The inverse Sturm-Liouville problem / N. Levinson // Math. Tidsskr. Ser. B. — 1949. — P. 25–30.
128. Melkman, A. Optimal Estimation of Linear Operators in Hilbert Spaces from Inaccurate Data / A. Melkman, C. Miccelli // SIAM J. Num. Anal. 1979. Vol. 16, № 1. — P. 87–105.
129. Miller, K. Three circle therems in parcial differential equations and applications to improperly posed problems / K. Miller // Arch. Ration. Mech. Anal. 1964. Vol. 16, № 2. — P. 126–154.
130. Phillips, D.L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind / D.L. Phillips // J. Assoc. Comput. Mach. — 1962. — Vol. 9, № 1. — P. 84–97.

Список публикаций автора

131. Боков, А. В. Об оценке точности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагностики с подвижной границей / А. В. Боков, В. П. Танана // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2010. — Т. 13, № 1 (41). — С. 133–139.
132. Боков, А. В. Особенности математического моделирования процесса гидродинамического исследования нефтяных пластов / А. В. Боков, В. П. Танана // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». — 2013. — Т. 6, № 3. — С. 95–103.

133. Bokov, A.V. On Estimating the Precision of Approximate Solutions to an Inverse Problem of Thermal Diagnostics with Moving Boundary / A.V. Bokov, V.P. Tanana // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2011. — Vol. 5, № 1. — P. 104–109.
134. Боков, А.В. О единственности решения обратной задачи нестационарной фильтрации / А.В. Боков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Вычислительная математика и информатика». — 2012. — № 47 (306), вып. 2. — С. 12–21.
135. Боков, А.В. Регуляризация нелинейных операторных уравнений / А.В. Боков, В.П. Танана // Известия Челябинского научного центра УрО РАН. — 2003. — Вып. 1 (18). — С. 5–7.
136. Боков, А.В. О регуляризации нелинейных операторных уравнений / А.В. Боков, В.П. Танана // Вестник Челябинского государственного университета. — 2003. — Т. 3, № 1 (7). — С. 5–21.
137. Боков, А.В. О приближенном решении обратной задачи фильтрации / А.В. Боков, В.П. Танана // Известия Челябинского научного центра УрО РАН. — 2007. — Вып. 2 (36). — С. 10–15.
138. Боков, А.В. Об единственности решения обратной задачи нестационарной фильтрации / А.В. Боков, В.П. Танана; Челябинский государственный университет. — Челябинск, 1996. — 6 с. — Библ.: 2 назв. — Деп. в ВИНТИ РАН 19.04.1996, № 1290–В1996.

139. Боков, А.В. Регуляризация нелинейных операторных уравнений / А.В. Боков, В.П. Танана // Обратные задачи: теория и приложения: тез. докл. Международ. школы-конф., Ханты-Мансийск, 2002. — С. 102.
140. Боков, А.В. О единственности решения обратной задачи нестационарной фильтрации / А.В. Боков // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Международ. конф., посвящён. памяти В.К. Иванова, Екатеринбург, 31 октября–5 ноября 2011 года. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. — С. 122.
141. Боков, А.В. Метод конечномерных аппроксимаций в решении обратной задачи потенциала / А.В. Боков // Обратные и некорректные задачи математической физики: тез. докл. Международ. конф., посвящён. 80-летию со дня рождения М.М. Лаврентьева, Новосибирск, 5–12 августа 2012 года. — Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2012. — С. 176.
142. Боков, А.В. Свидетельство Роспатента о государственной регистрации программы для ЭВМ «Численное решение обратной задачи гравиметрии на основе метода регуляризации А.Н. Тихонова» № 2013661344 от 05.12.2013 г.
143. Боков, А.В. Свидетельство Роспатента о государственной регистрации программы для ЭВМ «Численное исследование фильтрационной модели нефтяного пласта для определения коэффициента гидропроводности» № 2014610695 от 16.01.2014 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Численные эксперименты

Численное исследование фильтрационной модели нефтяного пласта для определения коэффициента гидропроводности

При проведении численных экспериментов сначала в прямой задаче задавался коэффициент $\sigma(\rho)$ и по нему и краевым данным вычислялся след решения на границу области $\rho = r_0$. Полученная функция использовалась в алгоритме решения обратной задачи в качестве дополнительной информации. Алгоритм метода градиентного спуска был реализован с помощью метода контрольного объёма при замене всех непрерывных элементов алгоритма, таких, например, как прямая и сопряжённая задачи, на их конечно-разностные аналоги. Работа программы проверялась для различных вариантов задания коэффициента гидропроводности. Рассмотрим работу программы для следующих функций.

1. $\sigma(\rho) = 1 + 0,5 \sin(2\pi\rho)$;
2. $\sigma(\rho) = 1 + 0,15\rho - 0,3e^\rho$.

В качестве модельных здесь приведены функции, встречавшиеся в работах других авторов, с возможностью сравнения результатов работы программы.

При решении обратной задачи известными считались начальные данные, которые выбирались нулевыми во всех экспериментах, и

поток на границе $\rho = r_0$ $g(t)$. Во всех экспериментах на границе $\rho = \bar{r}$ полагалось выполнение условия непротекания. В качестве начального приближения для метода градиентного спуска выбиралась функция $\sigma^0(\rho) = \sigma(r_0)(1 - \rho/\bar{r}) + k(\bar{r})\rho/\bar{r}$.

Пример 3.4.1. Коэффициент гидропроводности задан функцией $\sigma(\rho) = 1 + 0,5 \sin(2\pi\rho)$. Поток на границе $\rho = r_0$ определён функцией $g(t) = 1 - t$. Расчёты проведены на сетке $n_t \times n_\rho = 100 \times 100$ (n_t – число шагов по времени, n_ρ – число шагов по координате ρ).

На рис. 3.4 приведены результаты восстановления $\sigma(\rho)$ по данным примера 3.4.1. Точному решению (заданной функции) соответствует кривая «Facts». Остальные кривые представляют приближённые решения, построенные на основании данных о граничном условии с погрешностями $\delta = 0\%$, $\delta = 2\%$ и $\delta = 5\%$ соответственно. На рис. 3.5 представлены графики значений целевого функционала и относительной ошибки в зависимости от номера итерации. Начиная примерно с 300-ой итерации значение относительной ошибки не уменьшается. Все остальные расчёты проводились с условием ограничения максимального числа итераций $i \leq 400$.

Пример 3.4.2. Коэффициент гидропроводности задан функцией $\sigma(\rho) = 1 + 0,15\rho - 0,3e^\rho$. Поток на границе $\rho = r_0$ определён функцией $g(t) = t$. Расчёты проведены на сетке $n_t \times n_\rho = 100 \times 100$.

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, приведёнными в работе [46] для обратной задачи теплопроводности. Значения параметра регуляризации α во всех примерах выбирались в пределах 10 – 200. Большие значения α ведут к росту числа итераций при несущественном влиянии на точность решения.

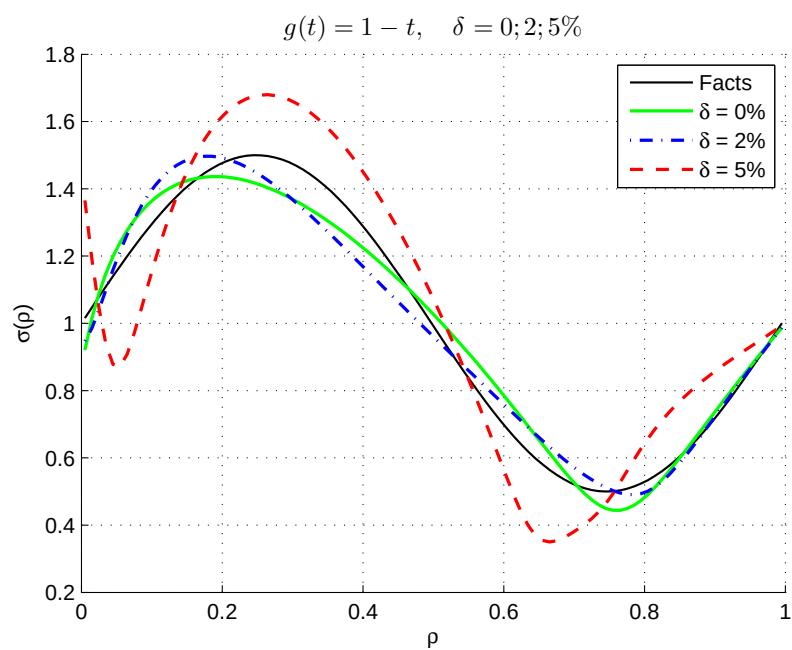


Рис. 3.4: Восстановление функции $\sigma(\rho)$ (пример (3.4.1))

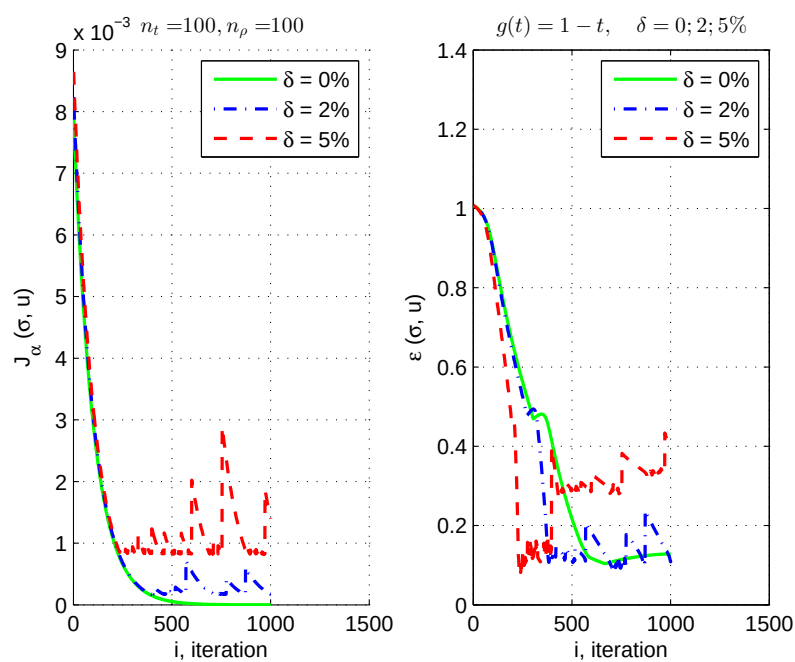


Рис. 3.5: Эволюция функционалов и относительных ошибок (пример 3.4.1)

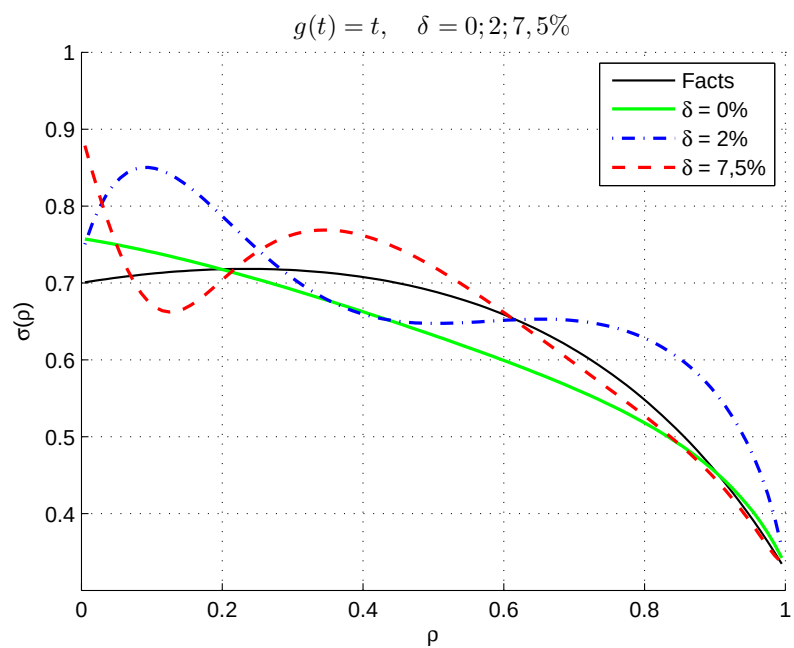


Рис. 3.6: Восстановление функции $\sigma(\rho)$ (пример 3.4.2)

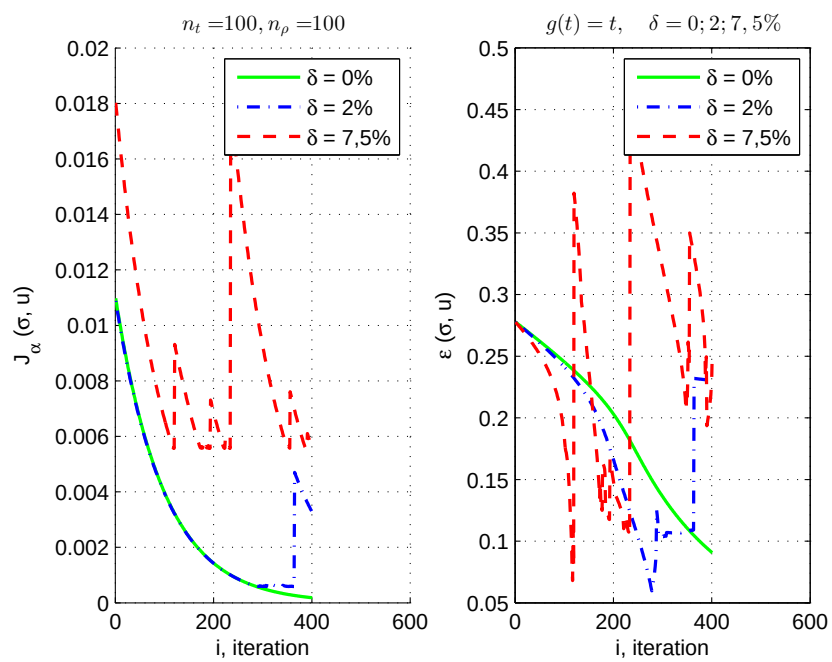


Рис. 3.7: Эволюция функционалов и относительных ошибок (пример 3.4.2)

Во всех расчётах представлены графики эволюции минимизируемых функционалов и относительных ошибок. Расчёты выполнялись с точными данными и с данными, в которые искусственно была внесена погрешность (псевдослучайная, имеющая нормальное распределение) в пределах 5 – 7%. Большие погрешности ведут к быстрому росту ошибки. В случае восстановления коэффициента по точным данным картины эволюции минимизируемых функционалов и относительных ошибок совпадает с приводимыми в работе [46].

Результаты тестирования говорят о вполне приемлемой точности восстановления коэффициента гидропроводности, эффективности алгоритма поиска и работоспособности программы.

Математическое моделирование процесса регистрации аномалии гравитационного поля

Программа тестировалась для различных вариантов функций, задающих границу раздела сред.

Примеры функций, использованных в численных экспериментах для задания границы в двумерной задаче ($-1 \leq \xi \leq 1$):

1. $\hat{z}(\xi) = 0,25 \max(0, \sin 5\xi, \cos 5\xi), \quad H = 0,5;$

2. $\hat{z}(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)^2, \quad H = 1;$

Примеры функций, описывающих границу в случае трёхмерной задачи ($-10 \leq \xi, \eta \leq 10$):

1. $\hat{z}(\xi, \eta) = 2,5 |\sin(0,25\xi) \cos(0,25\eta)|, \quad H = 4;$

2. $\hat{z}(\xi, \eta) = 0,0005 (81 - \xi^2 - \eta^2)^2, \quad H = 5;$

Эти примеры приводились автором на конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики» (г. Новосибирск, 2012 г.).

Для выбранной функции $\hat{z}$, задающей границу раздела, находилось значение гравитационной аномалии Δg из уравнения (1.3.1) для двумерной задачи или из уравнения (3.3.9) для трёхмерной задачи. Для вычисления интегралов использовалась стандартная процедура MATLAB `quad` численного интегрирования адаптивным методом Симпсона. Найденные значения гравитационной аномалии использовались в качестве исходных данных при решении обратной задачи восстановления границы раздела сред. В эти данные искусственно вносились погрешности в пределах 5–10% от максимального значения $|\Delta g|$. Для генерирования значений «ошибки» использовалась функция MATLAB `rand` (функция возвращает матрицу псевдослучайных чисел, имеющих стандартное нормальное распределение).

Далее граница раздела восстанавливалась одним из перечисленных выше итерационных методов. В качестве начального приближения бралась постоянная функция z_0 , которая находилась итерационным методом Ньютона. В двумерной задаче следующее приближение для $z_0(\xi)$ находилось по формулам

$$z_0^{k+1} = z_0^k - \frac{\|Az_0^k - f_\delta\|_{L_2}^2}{\Delta x \sum_{j=0}^{m-1} 2(A'_j z_0^k)(A_j z_0^k - f_\delta)}, \quad z_0^0 = \frac{H}{2}.$$

В трёхмерной задаче для нахождения очередного приближения $z_0(\xi, \eta)$ использовались формулы

$$z_0^{k+1} = z_0^k - \frac{\|Az_0^k - f_\delta\|_{L_2}^2}{\Delta y \Delta x \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{r=0}^{n-1} 2(A'_{rs} z_0^k)(A_{rs} z_0^k - f_\delta)}, \quad z_0^0 = \frac{H}{2}.$$

Условием останова итерационного процесса служило выполнение неравенства

$$\|Az^{k+1} - f_\delta\|_{L_2}^2 \geq \|Az^k - f_\delta\|_{L_2}^2.$$

При восстановлении границы итерационными методами интегралы аппроксимировались посредством составной формулы трапеций – использовалась процедура MATLAB `trapz`.

Точность приближённого решения двумерной задачи оценивалось на основе параметров

$$\Delta_0 = \sum_{i=0}^n |\hat{z}(\xi_i) - z_i|, \quad \Delta = \|\hat{z}(\xi) - z\|_{L_2}^2.$$

В трёхмерной задаче для этой цели использовались аналогичные параметры:

$$\Delta = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n |\hat{z}(\xi_i, \eta_j) - z_{ij}|, \quad \Delta_{L_2} = \|\hat{z}(\xi, \eta) - z\|_{L_2}^2.$$

Другие параметры: N – число итераций, δ – уровень погрешности. Параметр регуляризации α принимался равным $q\|\Delta g - \Delta g_\delta\|_{L_2}^2$, где число q выбиралось из множества $\{10, 5, 1, 0.5, 0.1, 0\}$ при условии получения наилучшего приближённого решения.

Пример 3.4.3. Решалась двумерная задача. Все величины безразмерные. Граница задавалась уравнением

$$z(\xi) = 0,25 \max(0, \sin 5\xi, \cos 5\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

Предельная глубина расположения границы $H = 0,5$.

Расчёты проводились на сетках 50×50 ($n - 1 = 50$, $m - 1 = 50$), 100×100 , 500×500 . Уровень погрешности δ выбирался равным 1%, 5% и 10%.

Граница восстанавливалась тремя методами:

1. методом наискорейшего спуска,
2. итеративно регуляризованным методом Ньютона,
3. методом сопряжённых градиентов.

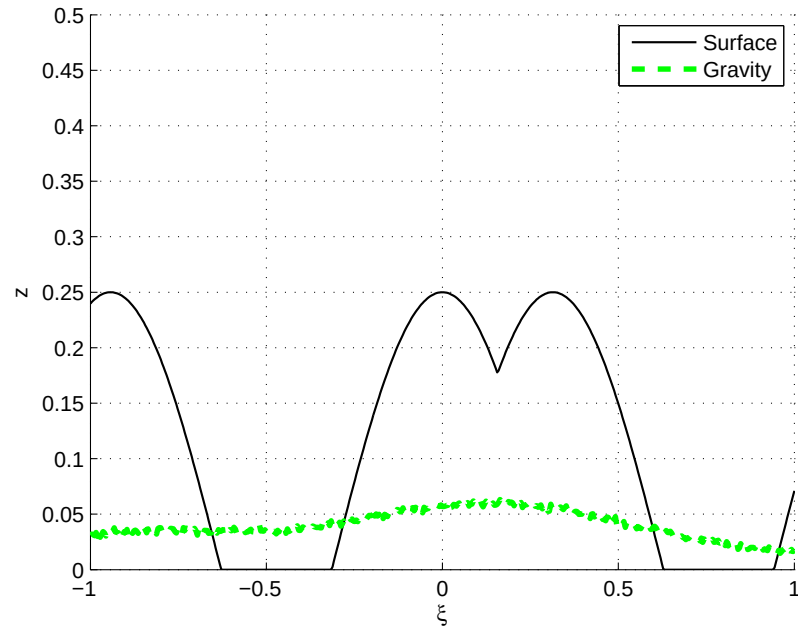


Рис. 3.8: Граница раздела и гравитационная аномалия (пример 3.4.3).

Обозначения на рисунках. «Surface» – точная граница раздела; «Gravity» – гравитационная аномалия; «Approx.1», «Approx.2», «Approx.3» – приближённые решения, построенные методом 1, методом 2 и методом 3; n_x – число узлов расчётной сетки; N_1 , N_2 , N_3 – числа итераций до останова при решении методами 1, 2 и 3 соответственно; Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 – величины невязок решений, полученных методами 1, 2 и 3 соответственно; α – параметр регуляризации; δ – уровень погрешности данных.

Пример 3.4.4. Решалась двумерная задача. Граница задава-

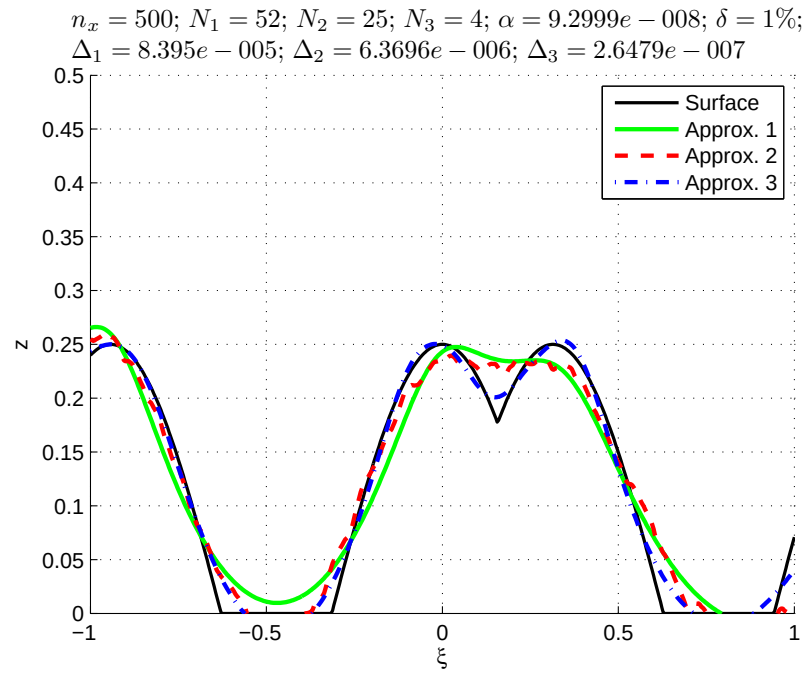


Рис. 3.9: Восстановление границы раздела при $\delta = 1\%$ (пример 3.4.3).

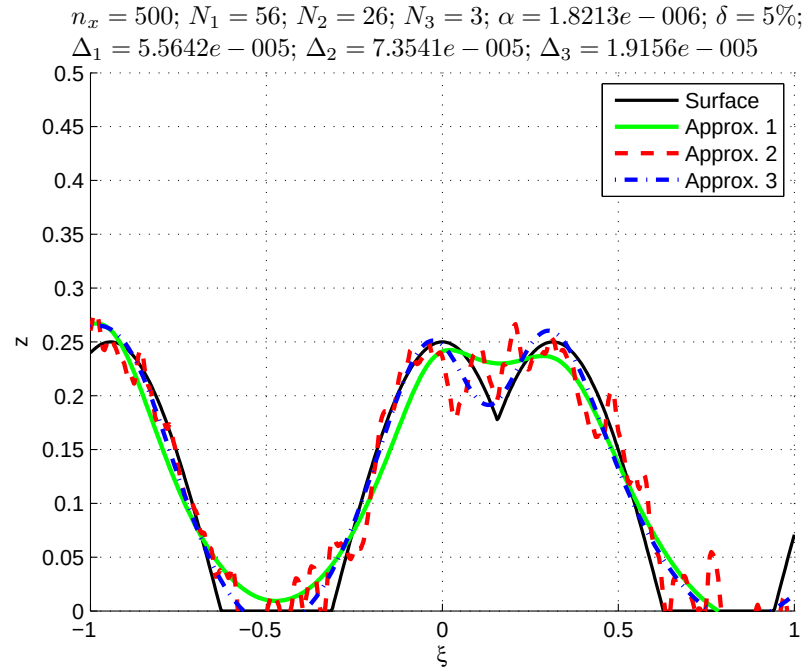


Рис. 3.10: Восстановление границы раздела при $\delta = 5\%$ (пример 3.4.3).

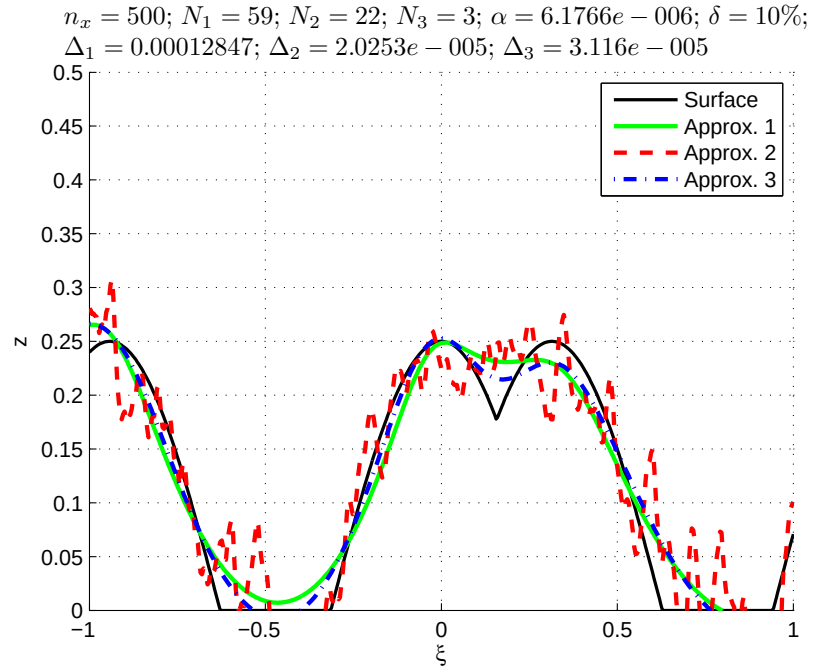


Рис. 3.11: Восстановление границы раздела при $\delta = 10\%$ (пример 3.4.3).

лась функцией

$$\hat{z}(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)^2, \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

Предельная глубина расположения границы $H = 1$. Расчёты проводились на сетке 100×100 . Результаты расчётов приведены на рисунке 3.12. Все графики приведены для уровня погрешности $\delta = 5\%$.

Пример 3.4.5. Решалась трёхмерная задача восстановления границы раздела (геологической границы). Граница задавалась функцией

$$\hat{z}(\xi, \eta) = 5 + \frac{4}{\pi} \arctg(0.4\xi - 10) + \sin \frac{\pi}{30} \eta,$$

$$0 \leq \xi \leq 50 \quad 0 \leq \eta \leq 60.$$

$$\hat{z}(\xi, \eta) = 5 + \frac{4}{\pi} \arctg(0.4\xi - 10) + \sin \frac{\pi}{30} \eta,$$

$$0 \leq \xi \leq 50 \quad 0 \leq \eta \leq 60.$$

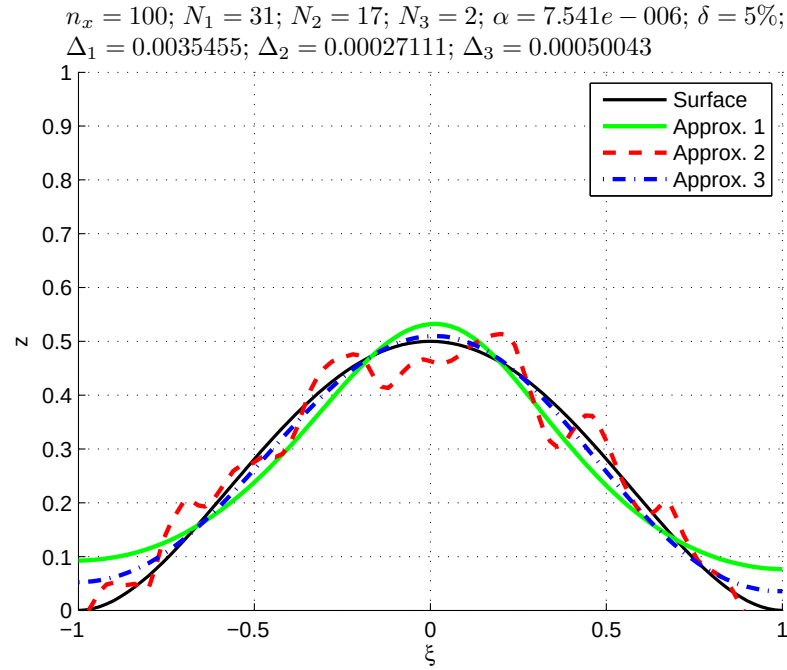


Рис. 3.12: Восстановление границы $z(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)^2$ (пример 3.4.4).

Предельная глубина расположения границы $H = 10$. Расчёты проводились на сетке $\xi \times \eta = 100 \times 30$, $x \times y = 100 \times 30$.

Подобная модельная граница рассматривалась в работе [7], и приводилось решение, полученное методом Флетчера-Ривса для данных с добавлением случайного шума с уровнем погрешности 10%. В диссертации приведены результаты расчётов описанными ранее методами для того же уровня погрешности. Как и в указанной работе, правилом останова итераций было выполнение условия $\|J'_\alpha(z_k)\| < 0,01$. В процессе счёта относительная норма невязки уменьшилась более чем в 10 раз (для всех трёх методов решения). Относительная погрешность приближённого решения составила 5%, что сопоставимо по точности с решением, представленном в [7]. Результаты расчётов приведены на рисунках 3.13–3.16.

Пример 3.4.6. Решалась трёхмерная задача. Для задания гра-

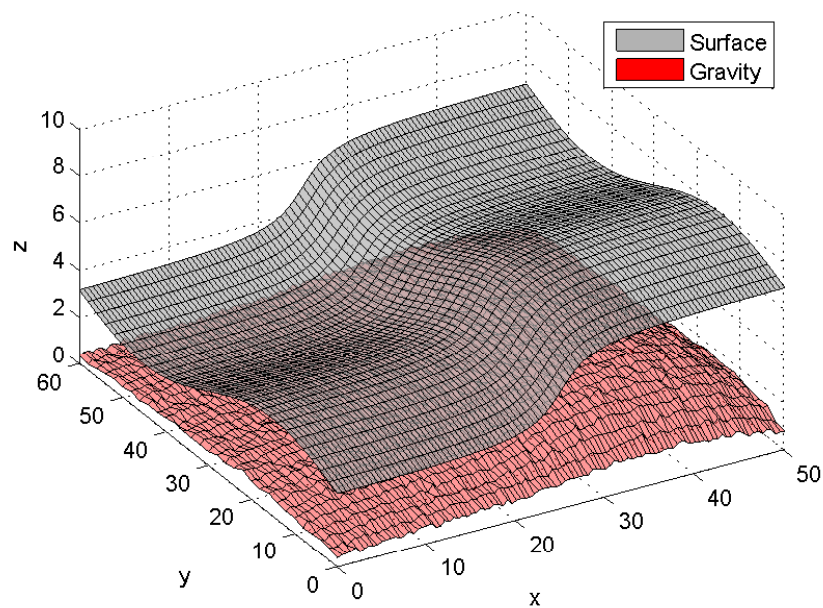


Рис. 3.13: Модельная граница и гравитационная аномалия (пример 3.4.5).

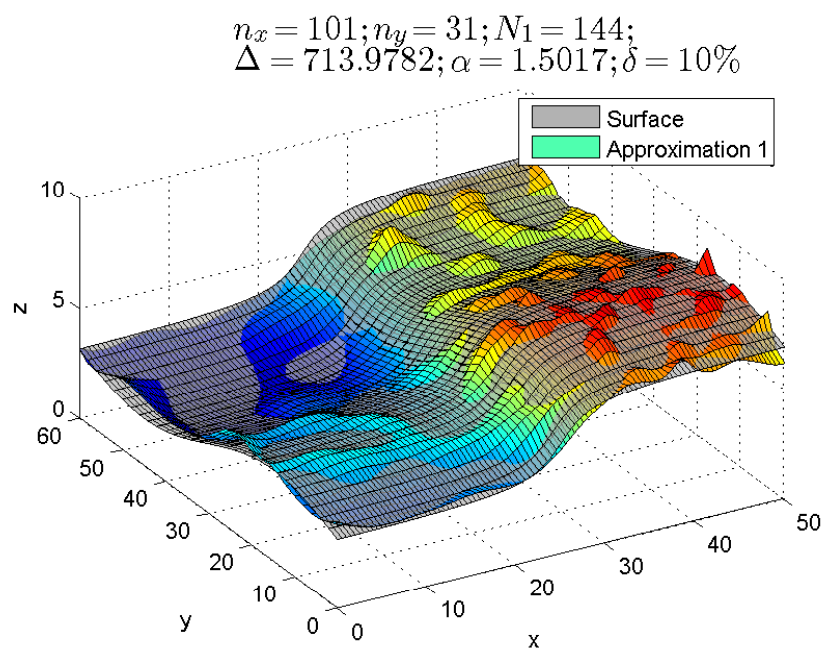


Рис. 3.14: Восстановление границы. Метод 1 (пример 3.4.5).

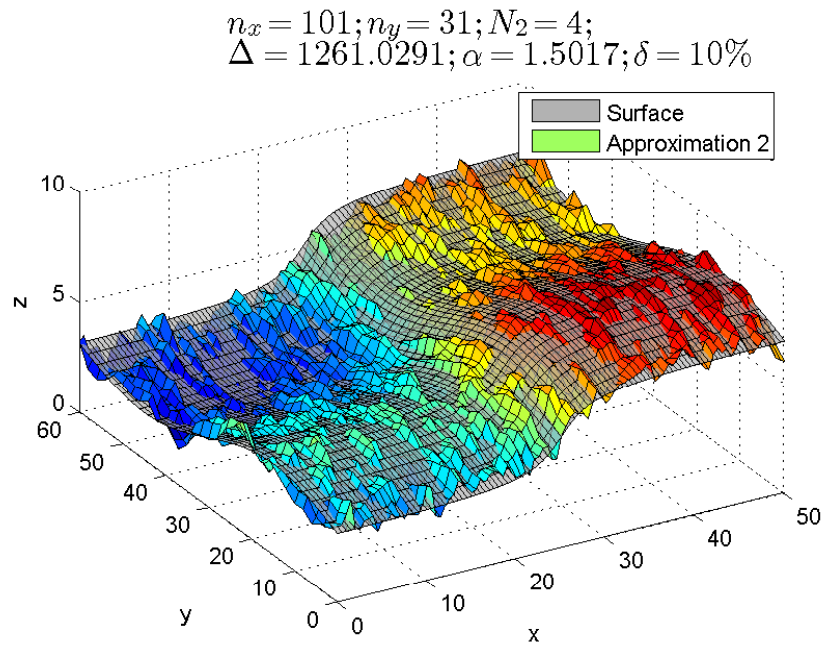


Рис. 3.15: Восстановление границы. Метод 2 (пример 3.4.5).

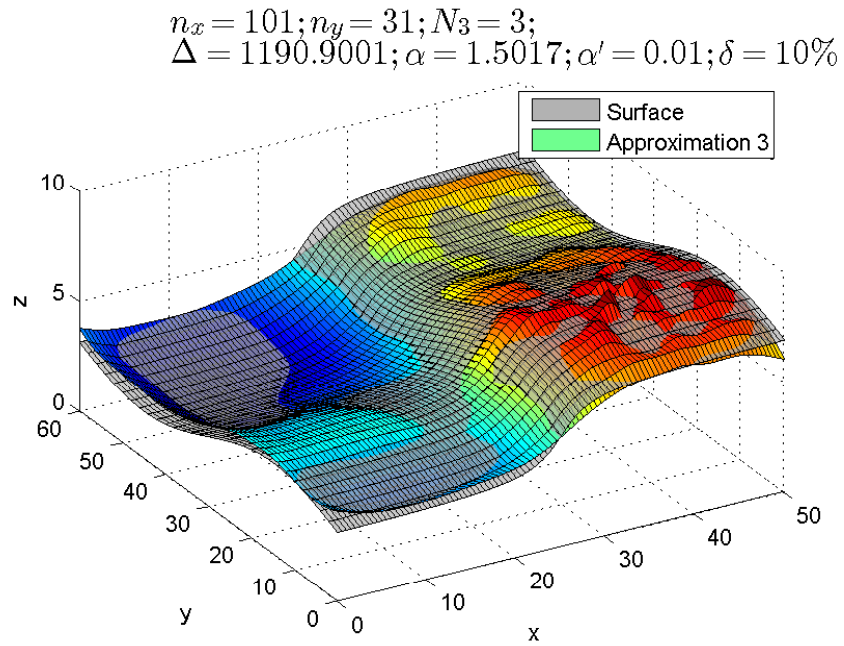


Рис. 3.16: Восстановление границы. Метод 3 (пример 3.4.5).

ницы использовались различные функции (из списка, приведённого ранее). Предельная глубина расположения границы $H = 5$. Расчёты проводились на сетке $\xi \times \eta = 40 \times 40$, $x \times y = 40 \times 40$. Результаты расчётов приведены на рисунках 3.17–3.20. Все графики приведены для уровня погрешности $\delta = 5\%$.

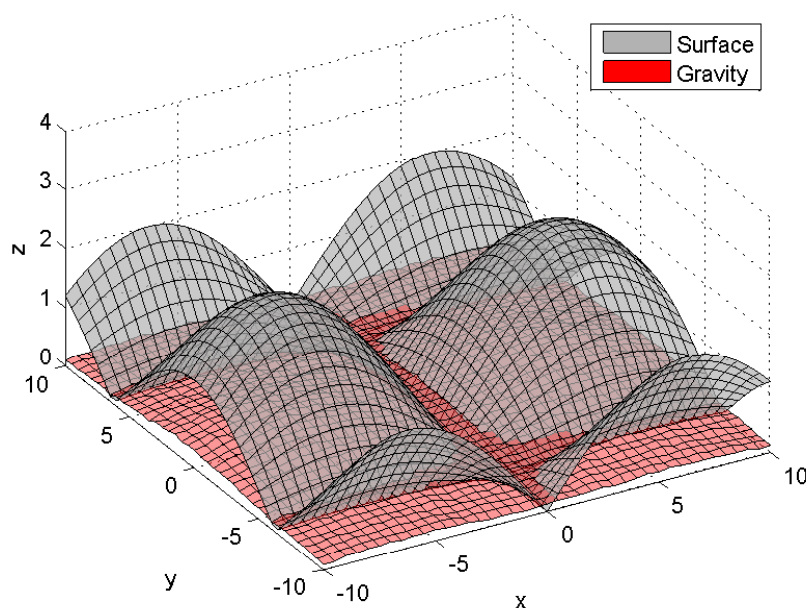


Рис. 3.17: Модельная граница $\hat{z}(\xi, \eta) = 2,5 |\sin(0,25\xi) \cos(0,25\eta)|$ (пример 3.4.6).

Численное исследование процесса тепловой диагностики технических устройств

Для численного исследования применялась программа решения обратной граничной задачи теплопроводности, представляющая модификацию программы решения обратной задачи фильтрации. По данным датчика температуры, расположенного в стенке, подверженной тепловой нагрузке, восстанавливалась картина теплового нагружения внутренней стенки технического объекта.

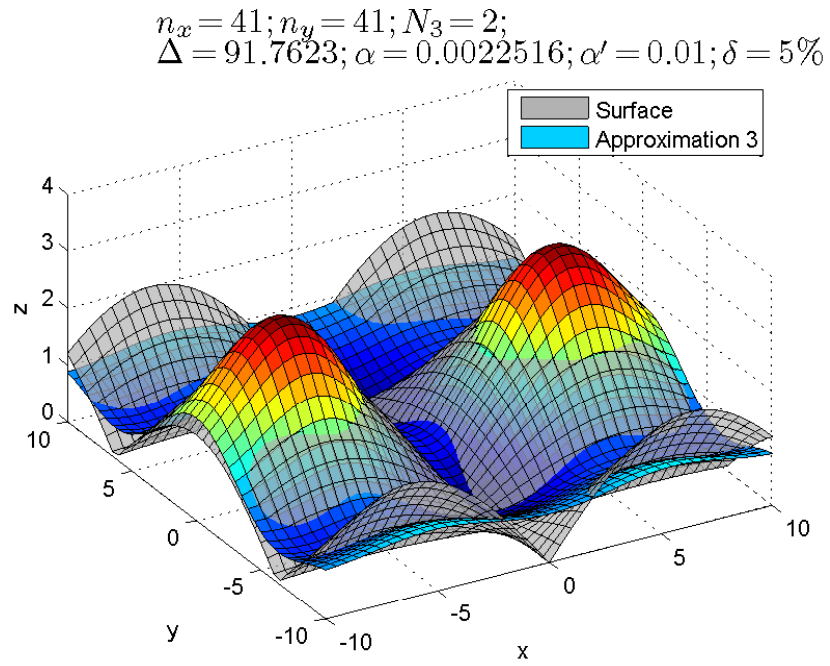


Рис. 3.18: Восстановление границы $\hat{z}(\xi, \eta) = 2,5 |\sin(0,25\xi) \cos(0,25\eta)|$. Метод 3 (пример 3.4.6).

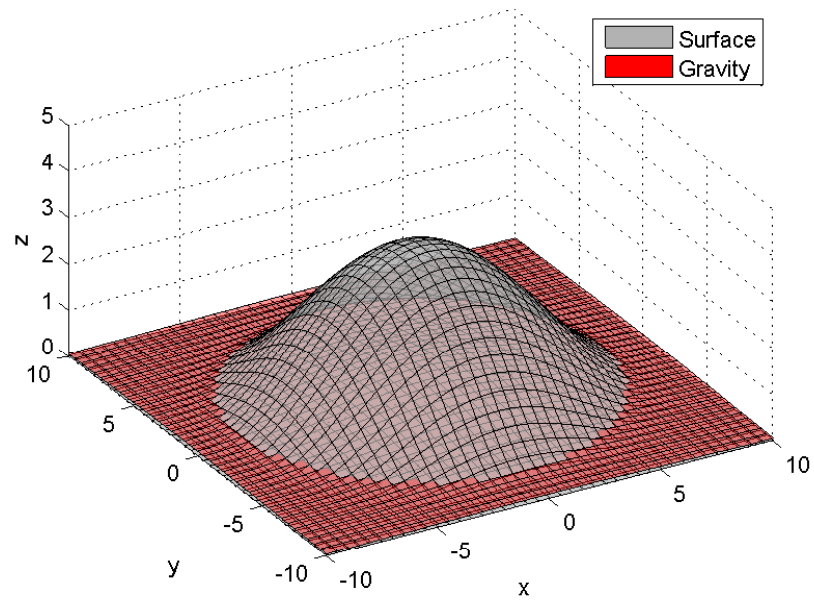


Рис. 3.19: Модельная граница $\hat{z}(\xi, \eta) = 0,0005 (81 - \xi^2 - \eta^2)^2$ (пример 3.4.6).

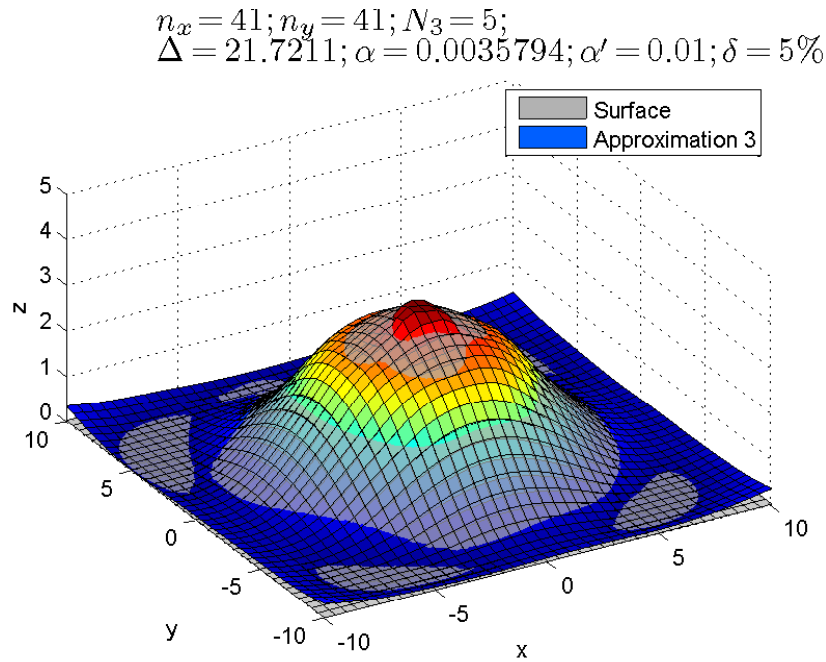


Рис. 3.20: Восстановление границы $\hat{z}(\xi, \eta) = 0,0005 (81 - \xi^2 - \eta^2)^2$. Метод 3 (пример 3.4.6).

Порядок тестирования программы был следующим. На границе расчётной области задавалось граничное условие второго рода. Решалась прямая задача, рассчитывалось поле температур внутри стенки. Эти данные использовались при решении обратной задачи.

Моделировалось присутствие в схеме датчика температур: указывалось расположение датчика в некотором узле расчётной сетки. Найденные при решении прямой задачи данные о температуре в указанном узле рассматривались как показания датчика. По этим данным восстанавливался поток на внутренней стенке. Для этого решалась обратная задача. Поскольку обратная задача является некорректно поставленной, для её решения применяется обобщённый метод L -регуляризации, и задача сводится к вариационной. Для отыскания минимума целевого функционала применялся градиентный метод наискорейшего спуска.

Программа тестировалась для различных вариантов функций, задающих тепловой поток на нагруженной границе.

Примеры функций, использованных в численных экспериментах для задания теплового потока:

1. $q(t) = t - 0,1 \cdot t^3$;
2. $q(t) = 100 - 0,1 \cdot t^2$;

Пример 3.4.7. Решалась задача восстановления функции потока на нагруженной внутренней стенке технического объекта. Для задания потока на границе использовались различные функции (из списка, приведённого выше). Расположение датчика во всех вариантах принималось равным 0,5 толщины стенки. Расчёты проводились на сетке $x \times t = 100 \times 100$. Результаты расчётов представлены на рисунках 3.21–3.24. Расчёты проводились на основе точных данных датчика (рисунки 3.21, 3.23) и на основе данных с погрешностью измерений (рисунки 3.22, 3.24). Уровень погрешности принимался равным $\delta = 1\%$.

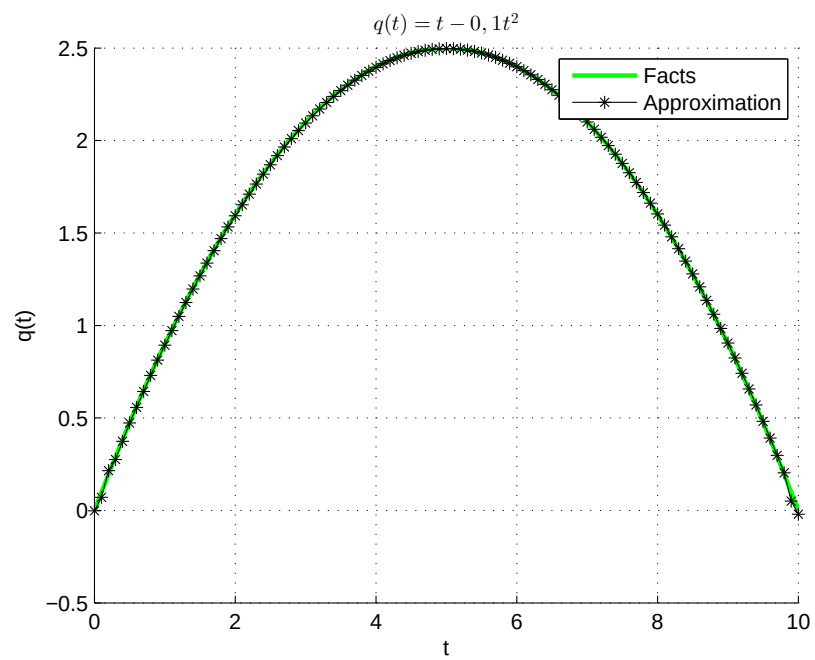


Рис. 3.21: Восстановление потока на границе. Точное решение: $q(t) = t - 0,1 \cdot t^3$. (пример 3.4.7).

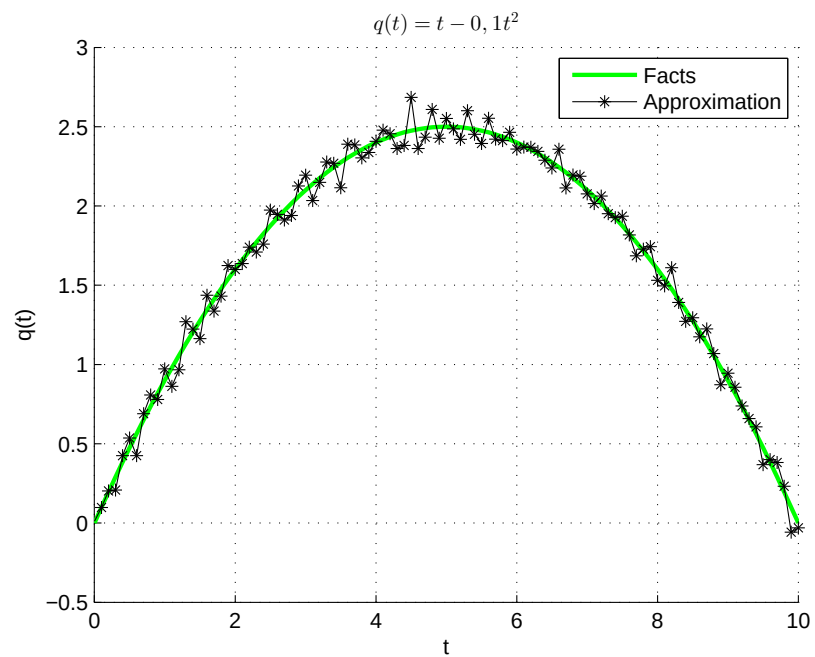


Рис. 3.22: Восстановление потока на границе. Точное решение: $q(t) = t - 0,1 \cdot t^3$. (пример 3.4.7).

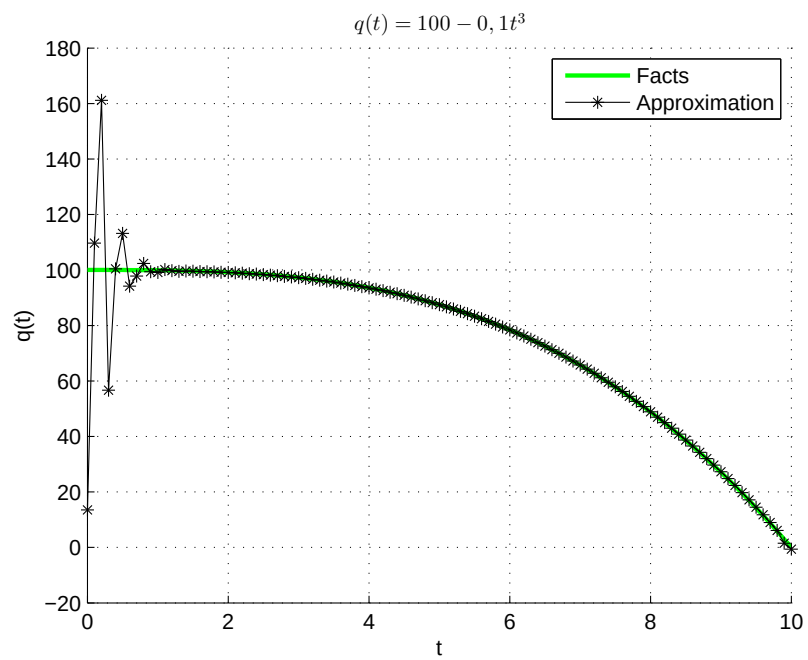


Рис. 3.23: Восстановление потока на границе. Точное решение: $q(t) = 100 - 0,1 \cdot t^3$. (пример 3.4.7).

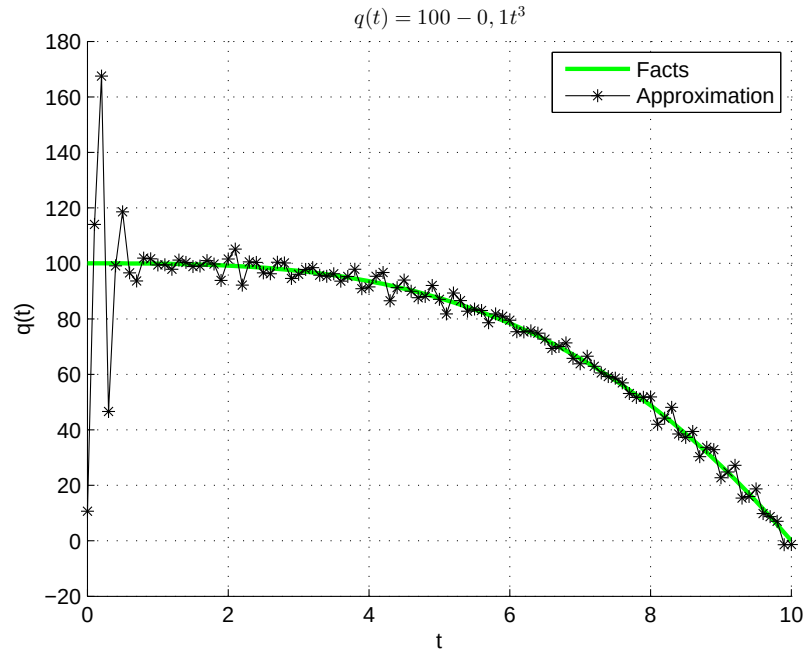


Рис. 3.24: Восстановление потока на границе. Точное решение: $q(t) = 100 - 0,1 \cdot t^3$. Погрешность данных $\delta = 1\%$ (пример 3.4.7).