

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
"Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)"

На правах рукописи



Япарова Наталья Михайловна

Методы и алгоритмы обработки информации в системах контроля и
прогнозирования процессов теплопереноса в условиях неполных и динамически
изменяющихся данных

05.13.01 - Системный анализ, управление и обработка информации
(промышленность)

Диссертация на соискание ученой степени
доктора технических наук

Научный консультант:
доктор технических наук,
профессор А.Л. Шестаков

Содержание

Введение	6
Глава 1. Анализ проблемы обработки информации в системах автоматического контроля и прогнозирования в условиях неполных и динамически изменяющихся исходных данных	18
1.1 Предметная область	18
1.2 Обработка результатов косвенных измерений в системах контроля и прогнозирования теплового состояния объекта в АСУТП	20
1.3 Анализ проблемы обработки результатов первичных измерений	30
1.4 Обратные задачи в исследовании теплофизических процессов	33
1.5 Основные результаты и выводы	44
Глава 2. Методы обработки информации в задачах линейного теплопереноса в объектах с известным начальным тепловым состоянием	46
2.1 Основные предпосылки и обобщенная математическая модель задач измерения, связанных с теплопереносом	46
2.2 Математические модели задач измерения, связанных с линейным теплопереносом в системах с известным начальным тепловым состоянием	49
2.3 Методы определения температуры внутри однородной системы с распределенными параметрами и известным начальным состоянием при линейном теплопереносе	61
2.4 Идентификация функции внутреннего источника тепла при линейном теплопереносе в системах с распределенными параметрами и известным начальным состоянием	82
2.5 Основные результаты и выводы	102

Глава 3. Методы обработки информации в задачах линейного теплопереноса в объектах с неизвестным начальным тепловым состоянием	106
3.1 Основные предпосылки и обобщенная математическая модель задач измерения, связанных с теплопереносом в объектах с неизвестным начальным состоянием	106
3.2 Математические модели задач измерения, связанных с технологическими процессами теплопереноса в объектах с неизвестным начальным тепловым состоянием	115
3.3 Метод дискретной регуляризации для задач измерения, связанных с линейным теплопереносом в объекте с неизвестным начальным тепловым состоянием	124
3.3.1 Метод регуляризации в задачах измерения, связанных с теплопереносом в линейном объекте	124
3.3.2 Метод дискретной регуляризации для задач измерения, связанных с теплопереносом в пространственных объектах	145
3.4 Основные результаты и выводы	163
Глава 4. Методы прогнозирования температуры при нелинейном теплопереносе в объектах с неизвестным начальным тепловым состоянием	166
4.1 Основные предпосылки и обобщенная математическая модель задач измерения, связанных с нелинейным теплопереносом в объектах с неизвестным начальным тепловым состоянием	167
4.2 Математические модели задач измерения, связанных с нелинейным теплопереносом в технологических процессах	170
4.2.1 Математическая модель задачи измерения, связанная с нелинейным теплопереносом при комплексной термической обработке кольцевых цилиндров	170

4.2.2	Математическая модель задачи измерения, связанная с нелинейным теплопереносом при комплексной термической обработке в печах	174
4.2.3	Математическая модель задачи измерения, связанная с прогнозированием температурного состояния внешней оболочки датчика при нелинейном теплопереносе	178
4.3	Метод прогнозирования температур для задач измерения, связанных с нелинейным теплопереносом в кольцевом цилиндре	180
4.4	Метод прогнозирования температуры для задач измерения, связанных с нелинейным теплопереносом в цилиндрическом теле	199
4.5	Результаты экспериментального исследования	219
4.6	Основные результаты и выводы	237

Глава 5. Обработка информации при расчете температур на основе первичной измерительной информации **241**

5.1	Эталонная модель и математическое описание принципа работы термопреобразователя	241
5.1.1	Математическая модель зависимости температуры от сопротивлений	242
5.1.2	Постановка задачи идентификации коэффициентов и вычисления температур на этапе калибровки	244
5.1.3	Специфика расчета температур на этапе эксплуатации	246
5.2	Метод решения задачи параметрической идентификации	247
5.2.1	Теоретические основы и алгоритм метода идентификации коэффициентов	249
5.2.2	Оценка погрешности определения коэффициентов. Оптимальность по порядку метода идентификации коэффициентов.	257
5.3	Метод обработки результатов измерений для определения температур на этапе калибровки	262

5.4	Метод обработки результатов измерений для определения температуры на этапе эксплуатации	267
5.5	Результаты экспериментальных исследований	276
5.6	Основные результаты и выводы	290
	Заключение	293
	Приложения	296
	Список литературы	308

Актуальность темы. В настоящее время перспективным направлением развития различных отраслей промышленности является цифровизация технологических процессов, направленная на повышение эффективности производства. Успешная цифровизация современных быстро протекающих энергоемких процессов служит основой для оптимизации технологического процесса и неразрывно связана с эффективным использованием информации в автоматических системах управления технологическими процессами (АСУТП) для систем с распределенными параметрами, когда необходимо, с помощью специальных методов, оценить точность, достоверность и качество поступающей информации о состоянии системы, и, используя высокоточные методы, предусмотреть характер влияния выбранного технологического режима на текущее состояние объекта, на конечный результат, а также оценить уровень точности сделанного прогноза. Таким образом, в современных системах обработки данных в АСУТП должны быть реализованы не только алгоритмы, предназначенные для управления хранением и доступом к полученной информации, но и алгоритмы качественной обработки данных, служащих основой для создания высокоточной системы контроля и прогнозирования результатов технологического процесса, свойств и характеристик объекта, получаемых в результате применения выбранного управляющего режима.

Важнейшими объектами исследования, имеющими вид систем с распределенными параметрами, являются процессы, связанные с распределением тепла. К распределенным параметрам в этих системах относят плотность, теплоемкость, температуру и другие физические характеристики объекта, непрерывно меняющиеся в каждой точке объекта. В современных технологических процессах, связанных с теплопереносом, особое внимание уделяется повышению точности теплового контроля, выбору режимов внешнего теплового воздействия на объект. Контроль за реализацией выбранного режима и тепловым состоянием объекта осуществляется с помощью средств измерения, которые либо вмонтированы в стенки оборудования, либо находятся за его пределами вблизи поверхности объ-

екта [1],[67],[68],[178] и для определения температуры внутри тела необходимо использовать методы, позволяющие по результатам граничных измерений находить требуемые значения во внутренних точках. Задачи, в которых значения искомым физических величин внутри системы находят из результатов измерений, выполняемых вблизи поверхности объекта или из результатов измерений других физических величин, относят к классу обратных задач. Исследование влияния выбранных режимов на тепловое состояние объекта служит основой для формирования задач измерения, математические модели которых представлены обратными задачами с граничными условиями, сформированными из результатов измерений.

Исходными данными для формирования граничных условий служат результаты обработки информации о первичных измерениях, проводимых с помощью различных средств измерения: термопар, тепловизоров, пирометров, термометров сопротивления. Принцип работы средств измерения основан на зависимости от температуры различных физических величин: ЭДС, электрических сопротивлений, непосредственно измеряемых датчиками, и решение проблемы определения температурных значений из этих измерений также к обратным задачам.

Основы теории обратных задач заложены в трудах А.Н. Тихонова [155]-[158], М.М. Лаврентьева [88]-[90], В.К. Иванова [60]-[63]. Развитие данного направления связано с работами этих выдающихся исследователей, а также с работами В.Я. Арсенина, А.Л. Агеева, О.М. Алифанова, А.С. Апарцина, А.Б. Бакушинского, А.Л. Бухгейма, П.Н. Вабищевича, Г.М. Вайникко, В.И. Васильева, В.В. Васина, В.А. Винокурова, Ю.Л. Гапоненко, А.В. Гончарского, В.Б. Гласко, А.М. Денисова, В.И. Дмитриева, А.С. Ильинского, С.И. Кабанихина, М.Ю. Кокурина, А.И. Короткого, А.С. Леонова, Р.Латтеса, Ж.Л. Лионса, О.А. Лисковца, И.В. Мельниковой, Л.Д. Менихеса, В.А. Морозова, Р. Новикова, А.И. Прилепко, В.Г. Романова, С.Б. Стечкина, В.П. Тананы, А.М. Федотова, Г.В. Хромовой, М.А. Шишленина, А.Г. Яголы, J. Beck, M. Cialkowski, J. Gullum, A. Hasanov, B. Hoffmann, A.P. Calderon, D. Lesnic, M. Klibanov, K. Krysa, A. Neubauer, C. Seby, M. Slodichka, G. Uhlmann, M. Yamamoto и многих других исследователей [3], [4], [6], [13]-[18], [27]-[34], [38]-[40], [44], [50]-[52], [64], [69]-[72], [77], [80]-[82], [92]-[94], [97]-[101],

[117]–[119], [126], [137], [138], [144]–[146], [148]–[151], [155]–[163], [168], [180]–[193], [195]–[196], [198]–[202], [204]–[210], [213]–[219], [222]–[226], [231]–[241], [245].

Разработке вычислительных схем, связанных с решением прикладных обратных задач теплопереноса, а также общих подходов к реализации численных алгоритмов в информационных системах посвящены работы О.М. Алифанова, П.Н. Вабищевича, С.И. Гинкула, А.И. Короткого, С.В. Лукина, Г.И. Марчука, А.В. Ненарокова, А.А. Самарского, В.В. Садовского, В.М. Шайдурова и других исследователей [6]–[10], [28], [29], [37], [42]–[46], [50]–[53], [58], [75]–[77], [81], [82], [104]–[106], [110]–[113], [135]–[140], [168], [170]–[174], [189]–[193], [195], [200]–[202], [209], [210], [215], [220], [223], [234]–[241], [245].

Эффективное использование теории и методов решения обратных задач, связанных с теплопереносом, неотделимо от использования современных подходов к построению методов обработки технической информации и основ теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, учитывающими особенности теплопереноса, связанные с пространственно-временным распределением управляемых величин.

Разработке и исследованию методов управления системами с распределенными параметрами, созданию подходов и методов обработки информации посвящены работы А.Г. Бутковского, Ф.П. Васильева, А.И. Егорова, Ю.В. Егорова, А.Н. Дилигенской, А.Г. Ивахненко, В.А. Коваля, Ж.-Л. Лионса, К.А. Лурье, Ж. Макса, И.М. Першина, Ю.Э. Плешивцевой, В.И. Плотникова, Н.В. Пилипенко, Л.С. Понтрягина, Л.М. Пустыльникова, Э.Я. Рапопорта, Т.К. Сиразетдинова, Г.Н. Солопченко, Р.Е. Тайманова, А.Л. Шестакова, А. Forbes, М. Henry и других исследователей [2], [8], [11], [12], [22]–[26], [36], [41], [43], [46]–[49], [53]–[57], [65]–[68], [76], [78], [84], [85], [95], [96], [103]–[109], [120]–[125], [127]–[131], [133], [141], [142], [147], [152]–[154], [164]–[166], [169], [175]–[179], [194], [197], [203], [205]–[208], [211], [215], [216], [221], [222], [224], [226]–[228], [230], [244].

Выделяют несколько основных направлений в решении проблемы реализации обработки информации в АСУТП. Одно из них заключается в адаптации существующих методов к условиям технологического процесса. Отметим, что разработ-

ка методики адаптации, как правило, требует внесения дополнений и изменений в математическую модель процесса, а, следовательно, приводит к принципиальным изменениям вычислительных схем, что требует высокой квалификации и большого исследовательского опыта пользователя и не всегда является оптимальным решением задачи управления. Другое направление состоит в разработке новых подходов, методов и вычислительных схем, основанных на теории обратных задач, теории оптимального управления, обладающих алгоритмической структурой, устойчивой относительно погрешности исходных данных, допускающей в достаточной степени гибкую адаптацию к изменяющимся условиям технологического процесса и позволяющих осуществлять обработку информации с достаточной точностью, не требующей принципиальной перестройки вычислительной схемы и допускающей достаточно простую реализацию в системах прогнозирования и контроля в АСУТП.

В отдельное направление, требующего особого внимания, выделяют область обработки информации, связанную с технологическими процессами, в которых невозможно измерить начальную температуру внутри всего тела без нарушения целостности объекта, а также с процессами, в которых установить датчики контроля или регулировать интенсивность внешнего теплового воздействия возможно только вдоль некоторой части границы объекта. К таким процессам относятся вторичная термическая обработка при горячей прокатке, технологические этапы комплексной термообработки изделий (отпуск, отжиг, нормализация), тепловой мониторинг работающих систем и механизмов (тепловой мониторинг валков прокатного стана), неразрушающий тепловой контроль изделия. Это приводит к неполноте исходных данных, когда начальные условия отсутствуют, а исходные данные сформированы только на некоторой части границы. В результате математические модели процессов теплопереноса в объектах представлены обратными задачами с неизвестными начальными условиями или обратными задачами с граничными условиями, заданными на части границы.

Отметим, что общей чертой существующих методов решения обратных задач, является то, что на каждом шаге вычислительной процедуры искомое решение

определяется относительно времени, а реализация методов требует известных начальных условий. Такая особенность методов является принципиальным препятствием к использованию существующих алгоритмов в ситуации, когда начальная температура объекта неизвестна и возникает необходимость в разработке принципиально иного единого подхода к построению алгоритмов прогнозирования температуры во внутренних точках объекта по результатам граничных измерений в условиях отсутствия информации о начальном состоянии системы, учитывающих изменения характеристик процесса теплопереноса по пространству и времени, и обладающих устойчивостью к возможным отклонениям в исходных данных.

Учитывая вышесказанное, разработка методов обработки информации, основанных на базовых положениях теории управления системами с распределенными параметрами, теории обратных задач теплопереноса, позволяющих получать значения требуемых распределенных параметров в условиях неполных и динамически изменяющихся исходных данных является актуальной научно-технической проблемой.

Объектом исследования являются процессы теплопереноса, представленные обратными задачами, характеризующими закономерности определения температур или тепловых функций по результатам косвенных измерений.

Предметом исследования являются модели, характеризующие явную зависимость искомых температур, внутренних тепловых источников от внешнего теплового воздействия, методы и алгоритмы, позволяющие по результатам граничных измерений, содержащих отклонения от действительных значений, прогнозировать значения требуемых распределенных параметров в зависимости от выбранного режима внешнего теплового воздействия, в том числе прогнозировать температуру в условиях неполной информации о начальном тепловом состоянии системы, методы и алгоритмы, позволяющие определять температуру из результатов первичных измерений и оценивать точность получаемых температур

Цели и задачи исследования Основная цель диссертационного исследования заключается в разработке и исследовании методов и алгоритмов обработки

информации в системах контроля и прогнозирования процессов теплопереноса в условиях неполных и динамически изменяющихся данных.

Основными задачами диссертационного исследования являются:

1. Разработка и теоретическое обоснование единой процедуры редукции исходных задач определения температуры в контрольной точке и идентификации внутреннего теплового источника в системах с известным начальным тепловым состоянием к моделям, характеризующим явную зависимость искомым тепловых функций от результатов граничных измерений.

2. Разработка и верификация метода определения температуры во внутренней контрольной точке объекта и метода идентификации внутреннего теплового источника, базирующихся на едином подходе, служащих основой для алгоритмов обработки информации о граничных измерениях, и позволяющих достичь требуемого уровня точности при фиксированном временном интервале между измерениями.

3. Разработка и верификация численных методов решения обратных задач линейного теплопереноса с неизвестными начальными условиями, служащих основой для разработки алгоритмов прогнозирования температур во внутренних точках объекта с неизвестным начальным тепловым состоянием, подвергаемого выбранному внешнему тепловому воздействию при линейном теплопереносе, оценка точности результатов прогнозирования.

4. Разработка процедуры редукции задачи нелинейного теплопереноса в объекте с неизвестной начальной температурой к математической модели с уравнениями, характеризующими явную зависимость теплофизических характеристик материала от температуры.

5. Разработка и верификация алгоритмов прогнозирования температурных полей, формируемых под влияния внешнего теплового режима воздействия, в объекте с неизвестным начальным тепловым состоянием при нелинейном теплопереносе, оценка точности результатов прогнозирования температур.

6. Разработка подхода к обработке первичных измерений и построение математической модели зависимости температуры от сопротивления, единой для сен-

соров, изготовленных их различных материалов, и диапазонов измерений, разработка, теоретическое обоснование и оценка точности метода идентификации коэффициентов математической модели.

7. Разработка алгоритмов определения температур по результатам измерений сопротивлений, позволяющих сформировать избыточную информацию, необходимую для оценки точности измерений, а также подходов и алгоритмов оценки точности получаемых температур.

Научная новизна результатов диссертационного исследования заключается в следующем

1. Разработаны модели процессов теплопереноса, методы и алгоритмы обработки результатов граничных измерений в объектах с постоянными теплофизическими характеристиками и известной начальной температурой, позволяющие реализовать явную зависимость искомых распределенных параметров от тепловых функций, известных вблизи поверхности объекта.

2. Предложен единый подход к численному решению обратных задач теплопроводности с неизвестными начальными условиями, связанных с прогнозированием влияния выбранного управляющего режима внешнего теплового воздействия на формирование температурных полей при линейном и нелинейном теплопереносах в объектах с неизвестным начальным тепловым состоянием

3. Разработаны вычислительные алгоритмы решения обратных задач линейного теплопереноса с неизвестными начальными условиями, служащие основой методов обработки информации о результатах граничных температурных измерений, позволяющих прогнозировать температуру во внутренних точках при линейном теплопереносе в объектах с неизвестным начальным тепловым состоянием

4. Разработаны вычислительные алгоритмы решения обратных задач нелинейного теплопереноса с неизвестными начальными условиями, служащие основой для методов обработки результатов граничных температурных измерений, позволяющих прогнозировать температуру во внутренних точках при нелинейном теплопереносе в объектах с неизвестным начальным тепловым состоянием

5. Предложена математическая модель, характеризующая явную зависимость температуры от первичных измерений электрических сопротивлений, единая для сенсоров, изготовленных из различных материалов и температурных диапазонов. Разработан метода идентификации параметров математической модели. Обоснована его оптимальность по порядку.

6. Построен единый метод определения температуры по результатам обработки первичных измерений сопротивлений, позволяющий формировать избыточную информацию, необходимую для оценки точности и качества измерений. Предложены алгоритмы оценки точности и качества измерений, основанных на обработке избыточной информации.

Теоретическая значимость результатов исследования заключается в создании новых моделей, представленных интегральными уравнениями, характеризующим явную зависимость искомых температур или функций внутреннего источника от граничных измерений в объектах с известным начальным тепловым состоянием; в разработке, исследовании методов и алгоритмов решения линейных и нелинейных обратных задач с неизвестными начальными условиями, служащих основой для методов обработки результатов граничных измерений для прогнозирования температурных полей в объектах с неизвестным начальным тепловым состоянием; в разработке новых алгоритмов обработки результатов измерений сопротивлений, используемых для формирования температурных значений в исходных данных обратных задач и позволяющих проводить качественную оценку результатов измерений.

Практическая значимость диссертационного исследования определяется тем, что его основные положения, предложенные модели, методы и алгоритмы создают основу для разработки методов и алгоритмов обработки информации в системах контроля и прогнозирования процессов теплопереноса в условиях неполных и динамически изменяющихся данных. Полученные результаты используются при разработке рекомендаций по выбору и регулированию настраиваемых параметров температурных режимов, реализуемых в системах контроля и управления теп-

ловым состоянием, при формировании и оптимизации технического регламента технологических процессов, связанных с теплопереносом.

Реализация результатов исследования. Полученные в работе результаты использованы при выполнении НИР по проекту "Разработка, исследование и реализация алгоритмов обработки данных динамических измерений пространственно-распределенных объектов" (в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки РФ, техническое задание 8.9692.2017/8.9 от 17.02.2017), при обработке данных, предоставленных SMS GROUP, на ЧЭРЗ АО "ЖЕЛДОРРЕММАШ", в Промышленной Группе "Метран", на Челябинском компрессорном заводе.

Методология и методы диссертационного исследования. Теоретической и методологической основой диссертационного исследования являются теория и методы решения некорректных задач, теплопереноса, операционного исчисления, аппарат конечно-разностных уравнений, конечных интегральных представлений и системного анализа.

Положения, выносимые на защиту

1. Интегральные модели обратных граничных задач теплопереноса и идентификации внутреннего теплового источника в системе с распределенными параметрами и известным начальным тепловым состоянием, алгоритмы определения этих распределенных параметров по информации о граничных тепловых функциях при фиксированном интервале измерений.

2. Методы прогнозирования температуры во внутренних точках объекта при линейном теплопереносе в объектах с неизвестной начальной температурой.

3. Методика аппроксимации коэффициентов в задаче нелинейного теплопереноса в объекте с теплофизическими характеристиками, зависящими от температуры с неизвестным начальным тепловым состоянием

4. Методы прогнозирования температуры во внутренних точках при нелинейном теплопереносе в объекте с неизвестным начальным тепловым состоянием, подвергаемом влиянию внешнего теплового режима воздействия.

5. Модель зависимости температуры от электрических сопротивлений, формирующая единый подход к определению температуры в различных температурных

диапазонах по измерениям, полученных от сенсоров изготовленных из различных металлов, метод идентификации параметров разработанной модели

6. Методы определения температур из результатов первичных измерений сопротивлений, алгоритмы оценки точности измерений.

Положения, выносимые на защиту соответствуют следующим пунктам специальности 05.13.01-"Системный анализ, управление и обработка информации":

П1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

П3. Разработка критериев и моделей описания и оценки эффективности решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

П4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

П5. Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

П6. Методы идентификации систем управления на основе ретроспективной, текущей и экспертной информации.

П11. Методы и алгоритмы прогнозирования и оценки эффективности, качества и надежности сложных систем.

Степень достоверности и апробация результатов Основные результаты диссертационного исследования обсуждались и докладывались на XXI Международном конгрессе по измерениям в исследованиях и промышленности (XXI IMEKO World Congress Measurement in Research and Industry. 2015, Prague. Czech Republic), на XXVII Международном конгрессе математиков 2014 г. (International Congress of Mathematicians, Mathematics in Science and Technology, Seoul, Korea, 2014), на XXVIII Международном конгрессе математиков 2018 г. (International Congress of Mathematicians, Mathematics in Science and Technology, Rio de Janeiro, Brazil, 2018), а также на международных конференциях, в том числе на международных конференциях "Обратные и некорректные задачи математической фи-

зики Тезисы докладов международной конференции"(Новосибирск, НГУ, 2007, 2012), "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики"(Новосибирск, НГУ, 2019), International Conference "Inverse Problems: Modeling and Simulation", (Izmir University, Turkey, 2012, 2014), Applied Inverse Problem Conference, mini-symposium "Theory and Numerical Methods of Recovery of Coefficients of PDEs from Boundary Measurements" (KAIST, Daejeon, South Korea, 2013), 8-th International Conference on Inverse Problems in Engineering (Silesian University of Technology, Krakov, Poland, 2014), на VII международном симпозиуме «Обобщенные постановки и решения задач управления (GSSCP-2014)"(Геленджик,2014), SIAM Conference on Control and its Application(France, 2015), "Современные проблемы электрометаллургии стали (Магнитогорск, 2015, Первоуральск, 2019), 14th IMEKO TC10 Workshop on Technical Diagnostics: New Perspectives in Measurements, Tools and Techniques for Systems Reliability, Maintainability and Safety (Milan, 2016), Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences (2017,2018, 2019, Bulgaria) International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM) (Челябинск, 2016, 2018), 2nd International Conference Ural Conference on Measurements (UralCon) (Челябинск, 2017).

Публикации. Основные научные положения, выводы и результаты диссертации опубликованы в 43 работах, из них 15 в изданиях из перечня ВАК, 10 в изданиях, входящих в международные базы цитирования Scopus или Web of Science, получено 7 свидетельств о регистрации программ для ЭВМ, зарегистрированных в государственном Реестре.

Личный вклад автора. Основные положения и результаты диссертационной работы получены автором лично. Постановка научной проблемы, постановка и решение задач исследования, непосредственное выполнение основной части работы, выполненной в соавторстве, принадлежат автору. В [144], [193], [225] автором разработана интегральная модель теплопереноса, предложен метод решения обратной задач теплопроводности, основанный на преобразовании Фурье и методе проекционной регуляризации, осуществлена численная реализация этого метода и выполнено экспериментальное исследование точности предложенного

метода. В [241] автором разработана математическая модель и метод идентификации функции источника, реализована вычислительная схема и проведен анализ точности метода. В [23], [191], [237] автором предложен подход к построению математической модели, разработан метод идентификации параметров системы, предложены функции для оценки качества измерений. В работе [238] автором предложена математическая модель зависимости теплофизических свойств материала от температуры, разработан метод прогнозирования температуры при неизвестных начальных условиях, реализована вычислительная схема и проведен анализ точности метода. В работах [192], [243] предложены подходы к построению интегральной модели теплопереноса и методу определения температур по результатам измерений, выполненных вблизи поверхности. Работы [181]– [190], [235]–[242] выполнены без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, заключения, списка литературы, содержащего 244 наименований и 10 приложений, содержащих сведения об апробации и реализации результатов исследования. Общий объем работы составляет 334 страницы, в том числе основного текста – 296 страниц.

Глава 1. Анализ проблемы обработки информации в системах контроля и прогнозирования в условиях неполных и динамически изменяющихся исходных данных

В данном разделе проведен анализ проблемы обработки информации в АСУТП в условиях неполных и динамически изменяющихся исходных данных в системах контроля и прогнозирования теплового состояния объекта. Приведено описание предметной области исследования, рассмотрена специфика технологических процессов, специфика АСУТП, в которых реализуются методы обработки информации о тепловом состоянии системы, а также выполнен краткий анализ современных методов решения обратных задач, служащих основой для определения теплового состояния объекта.

1.1 Предметная область

Реализация современных быстро протекающих энергоемких процессов связана с разработкой и исследованием методов обработки информации в автоматических системах управления технологическими процессами для систем с распределенными параметрами. Согласно [24], к распределенным параметрам относят плотность, упругость, теплоемкость, температуру и другие физические характеристики объекта, непрерывно меняющиеся в каждой точке объекта. Важнейшими объектами исследования, имеющими вид систем с распределенными параметрами, являются процессы, связанные с распределением тепла. Такие системы имеют место в металлургической, химической, машиностроительной, нефтеперерабатывающей, газовой отраслях промышленности.

Процессы теплопереноса в системах с распределенными параметрами математически представлены либо интегральными уравнениями, либо уравнениями в частных производных параболического типа с начальными и граничными условиями. Начальные условия формируются на основании априорной информации о температурном поле объекта в некоторый определенный момент времени, принимаемый в дальнейшем за начальный момент. Граничные условия формируются

на основе результатов измерений, проводимых вблизи поверхности объекта и характеристик выбранных режимах внешнего воздействия на объект. Граничные условия в этих задачах являются управляющими воздействиями или управлениями.

Выбор управляющего режима напрямую зависит от доступности различных частей объекта для непосредственной реализации управляющего воздействия и проведения измерений, необходимых для осуществления контроля за результатами воздействия. Ограничения, связанные с недоступностью определенных частей объекта для проведения непосредственных измерений и дальнейшего прямого воздействия приводит к тому, что математические модели процессов теплопереноса содержат граничные условия известные только на некоторой части границы, и не известны на других ее участках. В этих задачах требуется определить влияние задаваемых управляющих воздействий (граничных условий) на температурное поле или внутренний тепловой источник объекта, а также определить температуру на оставшейся части границы. Математически эти задачи представлены обратными задачами теплопроводности.

Особого внимания требуют технологические процессы, в которых невозможно сформировать априорную информацию о начальном тепловом состоянии объекта. Такая ситуация возникает на промежуточных этапах комплексной термообработки, вторичной термообработки, при прогнозировании теплового состояния работающего оборудования. В результате проблема определения температуры во внутренних точках объекта, получаемую под действием выбранного режима внешнего теплового воздействия имеет вид обратной задачи теплопроводности с неизвестными начальными условиями.

К обратным задачам сводится проблема разработки метода обработки первичных измерений, когда температурные значения, служащие основой для формирования граничных условий, находят из результатов измерений сопротивлений проведенных с помощью термометров сопротивлений.

Таким образом, разработка моделей, характеризующих явную зависимость искомым распределенных параметров от измеренных значений и выбранного управ-

ляющего режима, разработка моделей, методов и алгоритмов, позволяющих сформировать граничные условия из результатов первичных измерений и оценить уровень их точности, разработка и исследование методов и алгоритмов обработки информации, позволяющих по результатам граничных измерений определять значения искомых распределенных параметров во внутренних точках объекта, базирующихся на численных методах решения обратных задач составляет предметную область данного исследования.

1.2 Обработка результатов косвенных измерений в системах контроля и прогнозирования теплового состояния объекта в АСУТП

В настоящее время контроль за выбранным режимом управления и прогнозирование результатов реализации управляющего режима является важной составляющей многих технологических процессов, приводящих к формированию желаемых свойств объекта. Возможность осуществления высокоточных измерений и обеспечение точности в определении характеристик процесса и получаемых свойствах объекта воздействия, является особенно важной с точки зрения эффективности технологического процесса, а также надежности и безопасности эксплуатируемых систем.

Основные принципы обработки информации в системах управления технологическими процессами, связанными с теплопереносом

В функции систем управления технологическим процессом (ТП), связанном с теплопереносом, входит обеспечение реализации алгоритма нагрева и охлаждения материала в соответствии с заданным режимом управления, осуществление контроля работы нагревательных элементов, обработка, накопление и хранение информации и предоставление полной информации о работе оборудования. Основными производителями систем управления и оборудования для систем управления являются компании Siemens, Allen Bradley, SMS-Siemag, ГК «Текон», ГК «Росатом» ПГ "Метран". Современная система управления имеет следующую иерархию вычислительных средств:

- Нижний уровень – набор программируемых логических контроллеров (ПЛК)
- Передача данных по сети;
- Верхний уровень – ПЭВМ

Пример схемы управления системой термических печей приведен в [79] и представлен на рис.1.

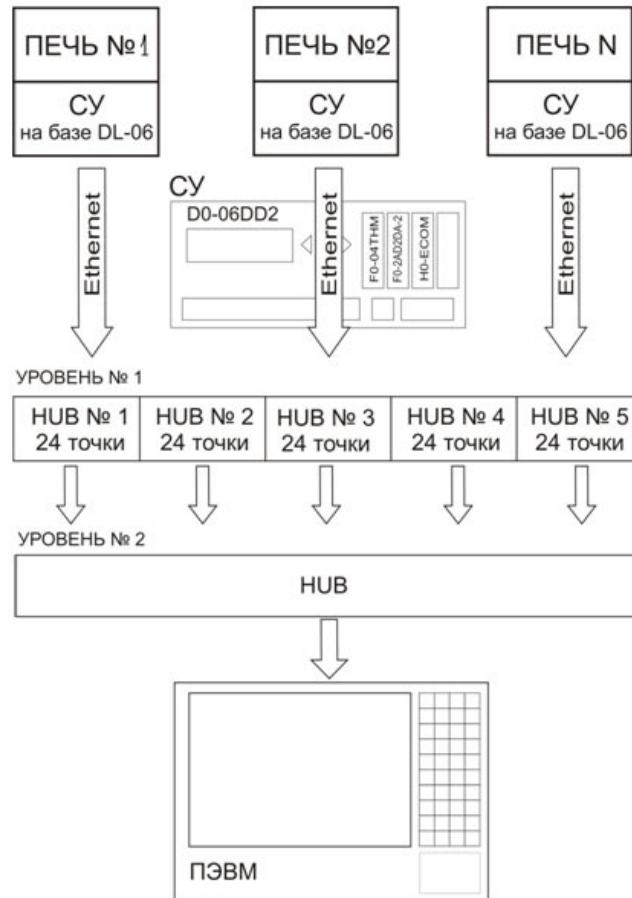


Рис. 1: Структура системы управления системой печей сопротивления

Нижний уровень системы управления строится на базе современных программно-логических контроллеров (ПЛК). Программное обеспечение ПЛК осуществляет многоконтурное регулирование температуры по пропорционально-интегрально-дифференциальному закону регулирования. Согласно теории систем автоматического управления [179], этот закон определяется формулой

$$u(t) = u_0 + u_p(t) + u_i(t) + u_d(t) = u_0 + K \left(e(t) + \frac{1}{K_\ell} \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

где $u(t)$ – выходной сигнал, u_0 – входной сигнал, $e(t)$ – сигнал рассогласования (ошибка регулирования), K – пропорциональный коэффициент регулирования, K_ℓ – постоянная времени интегрирования, K_d – постоянная времени дифференцирования

Кроме того, программное обеспечение ПЛК регулирует параметры изменения скорости внешнего теплового воздействия. Каждый контролируемый параметр на стадии его определения подвергается стандартной математической обработке, включающей масштабирование измеренных сигналов, контроль достоверности с помощью логического анализа значений взаимосвязанных параметров, выявление ложных измерений, контроль нарушения заданного диапазона изменения.

Программное обеспечение верхнего уровня, основанное на численных методах, обеспечивает реализацию следующих функций:

- регистрацию и хранение параметров технологического процесса тепловой обработки изделия относительно реального времени, формирование архивного и аварийного файлов, файла событий;
- обработку результатов измерений, диагностику достоверности текущих значений температуры;
- коррекцию настроек регуляторов температуры;
- сигнализацию при отклонениях технологического процесса: нарушение охлаждения, обрыв термопар;
- контроль и запись на электронный носитель событий, ошибок и аварийных ситуаций (функция "чёрного" ящика);
- многооконный интерфейс "оператор-система реализующий доступ к информации и средствам управления по принципу "нажал и смотри"(Clic Play), советчик оператора;
- формирование отчетов. Регистрируемая информация включает дату и время выполнения рабочего цикла, значения параметров оборудования, которые не рекомендуется превышать, режим регистрации.

Алгоритмы и методы, предлагаемые в данном исследовании предназначены для обработки информации на верхнем уровне, служат основой для разработки методов обработки данных, используемых при оценке точности текущих значений температуры, для прогнозирования температуры, получаемой внутри объекта в результате воздействия выбранного управляющего теплового режима, для раз-

работки критериев оценки точности измеренных значений, для корректировки параметров управляющего режима.

Особенности проведения измерений в технологическом оборудовании в системах управления технологическим процессом

Рассматриваемая проблема обработки информации о тепловом состоянии объекта, успешное решение которой влияет на общую эффективность производства, возникает в технологических процессах термообработки, горячей и хододной прокатки, в процессе теплового мониторинга работающих машин и механизмов. Конструкторские особенности технологического оборудования, используемого для реализации ТП, оказывают непосредственное влияние на формирование исходных данных в задачах теплопереноса. Приведем краткую характеристику особенностей проведения температурных измерений в технологических процессах, связанных с теплопереносом.

Надежность и срок службы оборудования, металлоконструкций и трубопроводов напрямую зависят от качества составных элементов, деталей и узлов. Формировании желаемых свойств конечного продукта, обеспечивающих требуемый уровень качества, начинается с первого этапа производства. Возможность прогнозировать влияние выбранного режима внешнего теплового воздействия на температуру внутри объекта особенно важно при горячей прокатке, связанной с непрерывной разливкой стали. Исследованию в этой области посвящены работы [11], [12], [67], [104], [105], [178], [141] и других исследователей.

Для определения температуры вблизи поверхности при непрерывной разливке стали возможно использование аналога датчика температуры для непрерывного контроля температуры жидкой стали в металлургических агрегатах, рассмотренное в [68]. Устройство содержит многозонную термопару, установленную в огнеупорном блоке В этом устройстве отсутствуют датчики, непосредственно сопрягающиеся или контактирующие с жидким металлом. Температура жидкого металла контролируется за счет решения рассматриваемых задач измерения, связанных с решением обратной задачи теплопроводности.

На рис.2 представлена общая схема формирования проката в технологическом процессе непрерывной разливки стали. Конечными продуктами, получаемым по завершении ТП, являются трубы круглого или прямоугольного сечения, а также листовой прокат. Для получения проката (рис.3) заготовки подвергаются вторичной термообработке, во время которой заготовка выдерживает несколько охладений и нагревов до разных температур.



Рис. 2: Общая схема непрерывной разливки стали и горячей прокатки



а)



б)

Рис. 3: Вторичная обработка при горячей прокатке. (а) Прокатка труб. (б) Листовой прокат

Технологические процессы вторичной термообработки рассматривались в работах [5], [11], [25], [26], [43], [66], [68], [78], [120], [121], [153], [154], [161], [165], [175]. Особенности температурных измерений и математические модели теплопереноса в работающих механизмах рассматривалась в работах [6], [84], [103], [109], [164].

Специфика проведения температурных измерений при разливке стали, вторичной термической обработке заготовки при горячей прокатке, при комплексной термообработке, в работающих двигателях заключается в том, что датчики монтируются в стенках оборудования и внутренние точки объекта недоступны для проведения измерений. В результате, температура во внутренних точках должна быть определена только из температурных измерений, выполненных вблизи поверхности и априорной информации о начальном тепловом состоянии объекта. Кроме того, на промежуточных этапах производственного процесса температура тела, сформированная к моменту начала очередного этапа, не может быть получена из результатов измерений. В результате начальные условия в обратных задачах являются неизвестными и это обстоятельство оказывает принципиальное влияние на формирование подходов к построению алгоритмов прогнозирования температуры во внутренних точках объекта. Влияние специфики измерений при формировании математических моделей, связанных с теплопереносом в объектах с неизвестным начальным состоянием, рассмотрена подробно в разделах 3.2 и 3.2.

Таким образом, разработка методов обработки данных, используемых для прогнозирования теплового состояния объекта неразрывно связана с построением вычислительных схем решения обратных задач, позволяющих по результатам косвенных измерений определять искомые параметры.

Важным технологическим процессом, оказывающим существенное влияние на качество продукта, на его структуру, на свойства металлов и сплавов, из которых изготовлен продукт, является процесс термообработки. Термическая обработка используется для устранения внутренних напряжений в металлах и сплавах, для устранения дефектов литья, для улучшения обрабатываемости и повышения качества готовой продукции, а также для подготовки изделия к окончательной обработке. Ключевыми характеристиками термической обработки являются время и максимальная температура нагрева, скорость нагрева металла до заданной температуры и времени его выдержки при максимальной температуре. Интенсивность нагрева зависит от типа печи, размеров и способа размещения деталей в печи, а время выдержки зависит от скорости теплопереноса внутри тела. Оборуд-

дование для термической обработки включает нагревательные печи, закалочные устройств, установки для очистки изделий, правильные устройства, системы для измерения температуры в печах и ваннах, а также системы контроля качества готовых изделий.

Печь для термообработки представляет собой ударопрочное нагревательное устройство, предназначенное для нагрева различных материалов до нужной температуры. Основным технологическим процессам, происходящим в печах являются термообработка различных металлов (закалка, отжиг, отпуск и нормализация), нагрев металлических заготовок для дальнейшей прокатки иковки, обжиг эмалированных и керамических изделий, термическая обработка стеклянных изделий, плавка металлов, высушивание, купелирование (пробирный анализ), озонение (сжигание) и кремация. Для каждой конкретной технологической задачи требуется выбирать наиболее подходящую печь, обеспечивающую максимальную эффективность выполняемой работы.

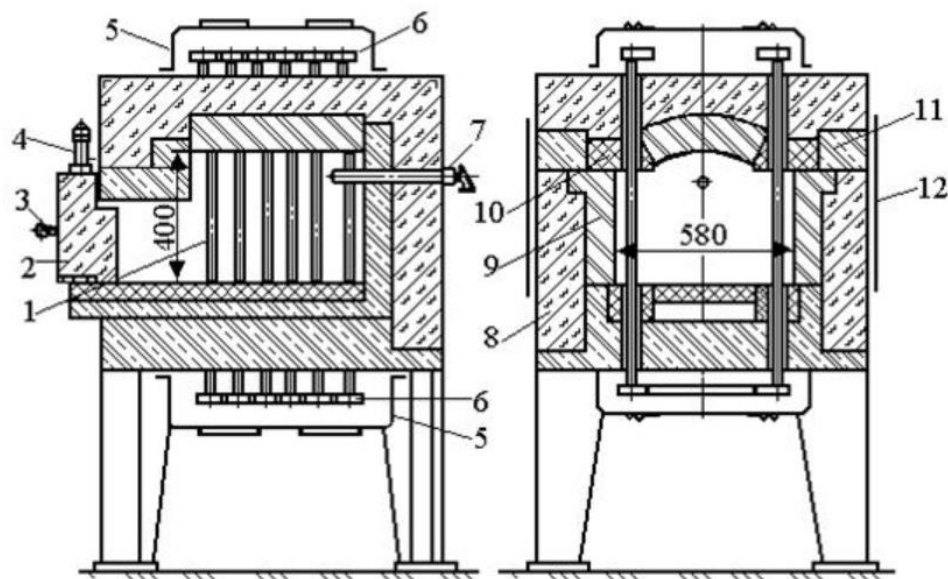


Рис. 4: Схема камерной печи: 1 – нагреватели, 2 – дверца, 3– рукоятка перемещения двери, 4 – ось поворотной опоры двери, 5 – кожух выводов, 6 –зперемычки выводов нагревателей, 7 – термоэлектрический преобразователь, 8– муллитокремнеземестое волокно, 9, 11 – шамот различной плотности, 10–мулли-токорунд, 12– защитная оболочка.

Типовые конструкции электрической камерной печи, представлены на рис. 4, 5. Контроль за тепловым состоянием заготовок осуществляется посредством темпе-

ратурных датчиков, расположенных в стенках печи. В силу того, что во время ТП теплообмен внутренней камеры печи с внешней средой сведен к минимуму, полагают, что поверхность обрабатываемого тела подвергается одинаковому в каждой точке внешнему тепловому воздействию. Общие виды печей приведены на рис.6

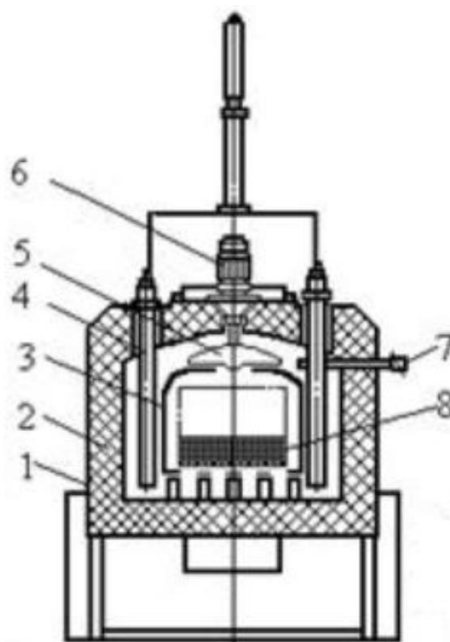


Рис. 5: Схема камерной электропечи-агрегата: 1– камера нагрева, 2– футеровка, 3– муфель, 4– нагреватели, 5– вентилятор, 6– электродвигатель вентилятора, 7– датчик температуры, 8– поддон для загрузки



а)



б)

Рис. 6: Камерные печи. (а) Камерная печь с дверцей. (б) Типовая камерная среднетемпературная печь камерная печь с выдвижным подом (про-во завод ЭТО)

На рис.7 представлена схема кольцевой печи. Печь имеет сводное отопление, оснащена вращающимся подом и рекуператором. Горелки, установленные по наружной окружности обеспечивают до 80% тепловой мощности. Для исключения проникновения холодного воздуха в рабочее пространство между стенами печи и вращающимся подом во время термообработки в печи установлены водяные затворы. В кольцевых печах заготовки закрепляются неподвижно на вращающемся поде. За время полного оборота они проходят методическую, сварочную и томильную зоны. Контроль за тепловым состоянием заготовок осуществляется посредством температурных датчиков, расположенных на стенках печи.

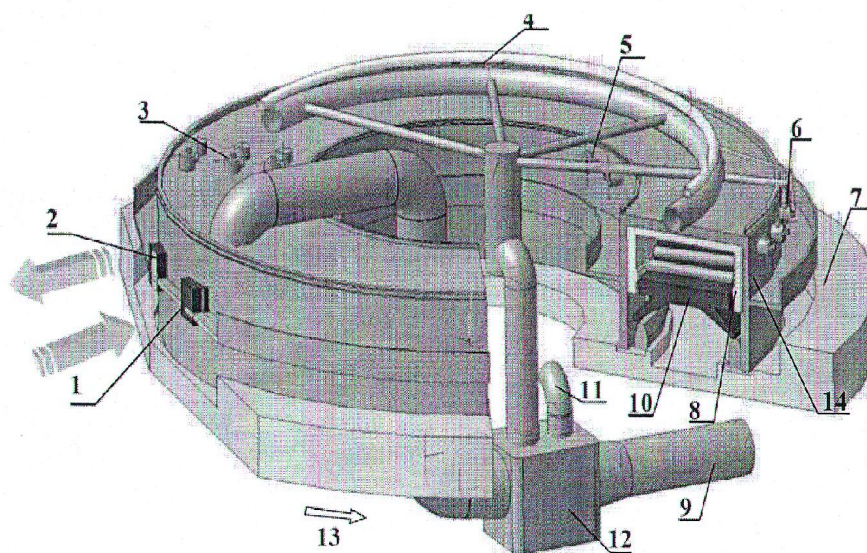


Рис. 7: Общий вид кольцевой печи: 1 – окно загрузки, 2 – окно выгрузки, 3– сводные плоскопламенные горелки, 4 – газо- и воздухопроводы, 5 – боковые горелки внутреннего кольца, 6 – боковые горелки внешнего кольца, 7 – фундамент, 8 – футеровка печи, 9 – дымоотводящий тракт, 10 – подвижный кольцевой под, 11 – вентиляционный воздух к рекуператору, 12 – рекуператор, 13 – направление вращения пода, 14 – датчик измерения температуры.

К термическим печам, используемым при оценки качества технологического продукта, относятся лабораторные электропечи, предназначенные для нагрева и исследования образцов технологического продукта. Схема электрической муфельной лабораторной печи представлена на рис.8

Таким образом, обобщая специфику проведения измерений в системах контроля за состоянием технологического процесса, получаем, что конструктивные особенности оборудования, используемого для прокатки, термообработки объекта

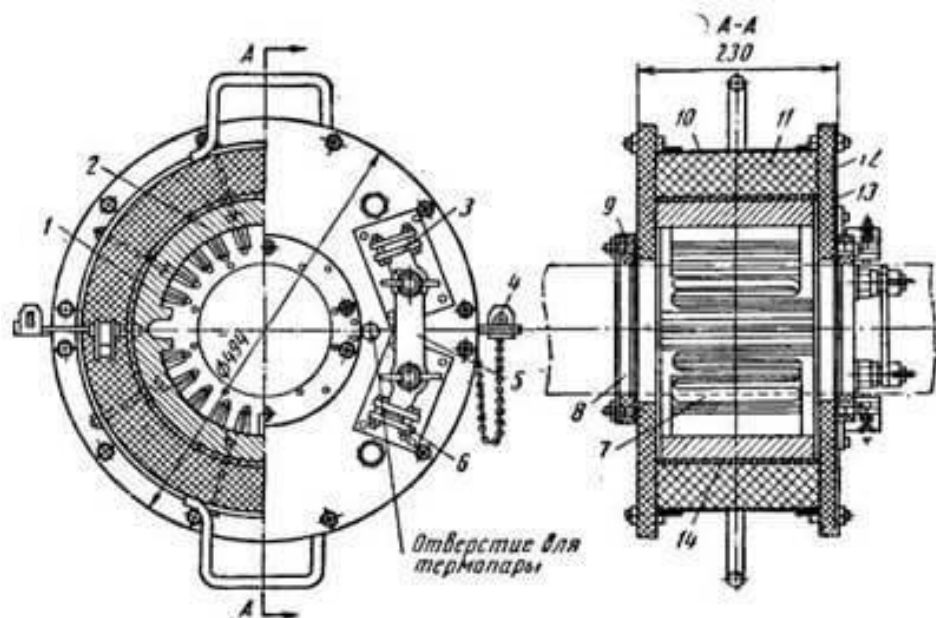


Рис. 8: Электрическая муфельная печь сопротивления. 1 — шпильки, 2 — керамиковые полуцилиндры, 3, 6 — контакты, 4 — замок, 5 — медная перемычка, 7 — нихромовая лента, 8 — установочные полукольца, 9 — шпильки, 10 — корпус, 11, 12 — теплоизоляционный материал, 13 — стальной кожух, 14 — асбестовый лист

и исследования образцов, позволяют установить средства измерения температуры только вблизи поверхности объекта, подвергаемого тепловому воздействию. Следовательно, в процессе эксплуатации областью, доступной для измерений и теплового контроля является только поверхность объекта, что, в свою очередь, приводит к тому, что температура во внутренних точках объекта определяется только из результатов поверхностных температурных измерений. В результате, математически, процесс теплопереноса внутри тела представлен обратными задачами, а результаты измерений являются основой для формирования граничных условий и при разработке методов обработки измерительной информации в системах контроля и прогнозирования в АСУТП необходимо привлекать алгоритмы численного решения обратных задач теплопереноса, позволяющих находить требуемые значения по результатам косвенных измерений, а также разрабатывать новые алгоритмы решения обратных задач с неизвестными начальными условия-

ми, служащими основой для методов обработки граничных температурных измерений.

Еще один важный аспект влияния конструктивных особенностей оборудования на формирование методов обработки данных обусловлен тем, что датчики измерения температуры расположены только в определенной зоне технологического оборудования, контроль за тепловым состоянием оставшихся зон затруднен. С другой стороны, линейные размеры объекта, инертность теплопереноса, приводят к появлению отклонений реальных температур в данной зоне от измеренных значений, которые необходимо учитывать присутствие температурных отклонений в исходных данных. Таким образом, возникает необходимость в разработке методов обработки информации, основанных на вычислительных схемах решения обратных задач и устойчивых относительно погрешности исходных данных.

1.3 Анализ проблемы обработки результатов первичных измерений

Источником информации для диагностики состояния технологического процесса, контроля за соблюдением выбранного внешнего управляющего режима и прогнозирования теплового состояния объекта, подвергаемого тепловому воздействию, служат результаты измерений температуры. Для измерения температуры в АСУТП используют пирометры, тепловизоры, термопары, термометры сопротивления и т.д. Обеспечение точности результатов контроля и прогнозирования, эффективности влияния выбранного теплового воздействия напрямую зависит от уровня точности результатов измерений.

Разработкой новых высокоточных средств измерения температуры занимаются компании Emersson, SMS-Siemag, Raytek, Yokogawa Electric Corporation, Метран, Термекс(Томск), НПК "Эталон"(Ростов), НПП "Элмер"(Зеленоград)

Точность результатов измерения температур зависит от состояния средства измерения и от качества проведенных измерений, а использование математического аппарата при построении методов обработки избыточной информации позволяет решать проблему повышения достоверности измерений на качественно новом уровне.

Разработка методов обработки измеренной информации, служащих для повышения надежности измерений и оптимизации систем управления, посвящены работы Ивахненко Р.Е. Тайманова, Г.Н. Солопченко, А.Л. Шестакова, М. Henry A. Forbes и других исследователей [2], [8], [22]– [26], [36], [41], [46], [49], [54]–[57], [65], [67], [68], [95], [96], [178]–[125], [127]–[131], [133], [142], [147], [152], [164]–[166], [169], [175]–[179], [194], [197], [203], [205]–[208], [211], [215], [216], [221], [222], [224], [226]–[228], [230], [244].

Разработка методов обработки информации, реализуемых в системах контроля и прогнозирования в АСУТП, связанных с теплопереносом и решением обратных задач, предусматривает определение искомой температурной функции из граничных условий, получаемых после обработки результатов измерения температуры на внешней поверхности тела. Точность результатов контроля и прогнозирования определяется уровнем точности построенных приближенных решений, который, в свою очередь, напрямую зависит от δ – уровня возникающих температурных отклонений в исходных данных.

Важной составляющей обеспечения оценки уровня точности контроля и прогнозирования в АСУТП является практическая оценка качества первичных измерений, позволяющая сформировать информацию об уровне погрешности исходных данных в обратных задачах теплопереноса. Таким образом, возникает необходимость в разработке методов обработки измерительной информации, позволяющих проводить оценку качества измерений в процессе эксплуатации.

В настоящее время, в основном, сформулированы общие идеи оценки качества измерений в процессе эксплуатации. В подходе, предложенном М. Henry в работе [211], для оценки результатов измерения введено понятие неопределенности измеренной величины (VMV) и приведены ситуации, в которых результатам измерения присваиваются статусы измерений и статусы состояния средств измерения. В подходе, предложенном Р.Е. Таймановым в работах [147], [230] для оценки результатов измерения выделена критическая составляющая погрешности и приведены общие характеристики ситуаций, в которых возможно классификация оценок результатов измерений.

Общая проблема исследований в этой области заключается в том, что до настоящего времени отсутствуют методы обработки информации, позволяющие провести количественную оценку качества измерения и реализовать идеи оценки состояния средств измерения на практике.

Важным препятствием, возникающим при разработке методов оценки качества температурных измерений является то, что величиной, непосредственно измеряемой прибором, является не температура, а другая физическая характеристика: ЭДС (в термопарах), мощность инфракрасного излучения (в пирометрах), электрическое сопротивление (в термометрах сопротивления) и для получения температурных значений необходимо применять методы, позволяющие по результатам косвенных измерений, находить температурные значения. Таким образом, при разработке методов обработки измеренной информации возникает проблема косвенных измерений, а установление прямой зависимости температуры от измеренной физической величины приводит к необходимости решения обратных задач.

С другой стороны, согласно [152], основой для разработки методов оценки качества измерений служит избыточная информация, полученная при измерениях. Средством измерения, используемым для контроля температуры в АСУТП, в котором может быть реализована функция избыточности информации являются датчики, содержащие несколько термометров сопротивления, изготовленные в том числе, и из различных металлов. В силу того, что электрическое сопротивление различных материалов при одинаковой температуре изменяется по-разному, то использование сенсоров, изготовленных из различных металлов, позволит, с одной стороны повысить уровень точности определения температуры, а с другой стороны, выявить возникающие отклонения от эталонных значений в результатах определения температур.

Методика определения температуры по результатам измерения сопротивлений регламентируется в [47], [212] и рассматривается в [95]. В данных документах представлены расчетные формулы для определения температуры из результатов измерений сопротивлений. Структура формул изменяется в зависимости от материала, из которого изготовлен сенсор и от температурного диапазона, в ко-

тором проводятся измерения. Отсутствие универсальности в методиках расчета температуры не позволяет выделить общую для всех диапазонов и материалов составляющую, которая может послужить основой для получения дополнительной информации из результатов измерений и являться базой для разработки метода оценки качества измерения и оценки состояния средства измерения.

Таким образом, существует необходимость в построении математической модели, характеризующей прямую зависимость температуры от измеренных сопротивлений и метода определения температуры по результатам измерения сопротивлений, единых с точки зрения используемых материалов и температурных диапазонов. Метод должен обладать высоким уровнем точности, быть легко реализуем на практике, а результаты обработки измеренной информации, получаемые с помощью этого метода, должны служить основой для оценки качества измеренной информации. Кроме того, необходимо сформировать подход к построению алгоритма оценки качества измерений, позволяющего организовать контроль за состоянием средства измерения.

1.4 Обратные задачи в исследовании теплофизических процессов

Использование подходов и алгоритмов теории обратных задач при разработке методов обработки данных в системах контроля и прогнозирования теплового состояния объекта приводит к повышению эффективности автоматических систем управления технологическими процессами, связанными с теплопереносом.

Постановка обратной задачи теплопереноса

Математическое представление обратных задач, связанных с теплопереносом базируется на законе Фурье и, следуя [24], [106], [163] сводится к системе, содержащей уравнение в частных производных параболического типа, граничные и начальные условия. Уравнение имеет вид:

$$c(u, t) \rho(u, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(u, t) \nabla u) + F(P, t), \quad P \in \Omega, t \in (0, T).$$

где u – температура объекта, $c(u, t)$ – коэффициент удельной теплоемкости, $\lambda(u, t)$ – коэффициент теплопроводности, $\rho(u, t)$ – плотность материала, $F(P, t)$ – плот-

ность мощности внутреннего теплового источника. Объекту, в которой происходит теплоперенос, соответствует множество Ω , точка P соответствует внутренней точке объекта, границе области соответствует множество $\partial\Omega$, поверхности, вблизи которой проводятся измерения (границная область, в которой расположены датчики) соответствует множество Γ , а вектор n определяет нормаль к поверхности Γ . Отметим, что Γ может либо совпадать с $\partial\Omega$, либо являться ее частью, $\Gamma \subset \partial\Omega$.

Измеренной температуре вблизи поверхности объекта соответствуют граничные условия

$$u|_{\Gamma} = p(\Gamma, t), \quad t \in [0, T].$$

Тепловому режиму, оказывающему внешнее воздействие, соответствуют граничные условия II рода

$$-\lambda(u, t) \frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma} = G(\Gamma, t), \quad t \in [0, T].$$

Функции $p(\Gamma, t)$, $G(\Gamma, t)$ формируются из результатов температурных измерений на поверхности Γ . Функция $G(\Gamma, t)$ характеризует плотность внешних тепловых потоков.

Теплообмен на поверхности тела представлен граничными условиями III рода

$$-\lambda(u, t) \frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma} = \alpha (\Theta - p(\Gamma, t)), \quad t \in [0, T].$$

где Θ – температура окружающей среды, α – коэффициент теплообмена со средой.

Температура объекта в начальный момент времени представлено начальными условиями:

$$u|_{\Omega} = \chi(P, 0), \quad t \in \Omega \cup \partial\Omega.$$

Отметим, что в обратных задачах, связанных, например, с комплексной термообработкой или горячей прокаткой, начальные условия неизвестны.

В обратных задачах требуется найти значения $u(P, t)$, соответствующие температуре во внутренних точках объекта, а также найти граничную функцию

$$u|_{\partial\Omega/\Gamma} = \varphi(x, t) \tag{1.2}$$

в тех граничных точках, где значения $u(P, t)$ неизвестны. Как правило, решение обратных задач с помощью общепринятых методов решения уравнений в частных

производных неустойчиво относительно погрешностей исходных данных, поэтому эти задачи относятся к классу некорректных задач и для получения численного решения используют регуляризующие алгоритмы.

Отметим, что построение решения для нелинейной задачи теплопереноса является сложной вычислительной процедурой. Поэтому для определения температурного поля объекта при определенных условиях допустимо использование следующего подхода. Согласно результатам, представленными в работах [6], [163], [195] в линейном приближении полагают, что теплофизические свойства материала зависят от пространственно-временных характеристик. В этом случае математическая модель теплопереноса принимает линейную форму и имеет вид:

$$c(x, t) \rho(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F_H(x, t), \quad x \in (0, \ell), \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

Управляющему режиму внешнего теплового воздействия соответствуют граничные условия

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad -\lambda(0, t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = G(t), \quad t \geq 0. \quad (1.4)$$

Функция $\varphi(t)$ формируется из результатов температурных измерений на поверхности, а функция $G(t)$ характеризует плотность тепловых потоков и определяется из результатов измерения температуры в области, содержащей внешнюю точку а в дальнейшем, функции $G(t)$ сопоставим функцию $g(t) = -\frac{G(t)}{\lambda(0, t)}$.

Начальная температура представлена следующим начальным условием:

$$u(x, 0) = \chi(x), \quad x \in [0, \ell]. \quad (1.5)$$

В рассматриваемой задаче измерения требуется найти функцию $u(\ell, t) = \psi(t) =$, характеризующую температурным значениям в контрольной точке, а также найти $u(x, t)$, удовлетворяющую (1.3)– (1.5), иными словами, требуется определить температуру в каждой точке прямой OK .

Неустойчивость задачи (1.3)– (1.5), являющейся обратной задачей, относительно погрешностей исходных данных, обоснована в работах [62], [93], [103], [90], [158]. Таким образом, метод решения задачи измерения должен базироваться на использовании специальных регуляризующих алгоритмов.

Актуальной задачей в повышении эффективности теплового контроля и прогнозирования является разработка методов обработки измеренной информации, базирующихся на методах решения обратных задач и позволяющих по результатам поверхностных измерений определять внутреннее тепловое поле объекта, формируемого под действием выбранного режима внешнего теплового воздействия.

Операторное представление задачи теплоперноса

Важным аспектом математической постановки задачи измерения являются существование и единственность решения полученной обобщенной задаче линейного теплоперноса, представленной в виде обратной граничной задачи теплопроводности. Исследование вопросов существования и единственности решения напрямую связано с операторным представлением задачи измерения и выбором соответствующих нормируемых пространств.

Рассматриваемая задача измерения допускает следующее операторное представление. Пусть объекту, в котором требуется определить температуру соответствует выпуклое, замкнутое ограниченное множество Ω нормируемого пространства X с границей $\partial\Omega$, $\Omega \subseteq X$, каждой точке объекта соответствует элемент $x \in \Omega$. Области, доступной для измерения, соответствует множество $\Gamma \subset \partial\Omega$. Текущему моменту времени, в котором проводятся измерения, соответствует элемент $t \in (0, T)$ при всех $T > 0$. Обозначим $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, а замыкание этого множества $\overline{\Omega}_T = \overline{\Omega} \times [0, T]$. Искомой температурной функции $u(x, t)$ соответствует элемент u некоторого нормируемого пространства U . Формирование температурного поля внутри объекта представлено непрерывным отображением A элементов из множества Ω_T в некоторое множество $M \subset U$. Температурному полю $u(x, 0)$ объекта в начальный момент времени соответствует множество U_0 , а температурным значениям, измеренным в начальный момент времени, соответствуют элементы $\chi \in U_0$. Функции $F_H(x, t)$ соответствует элемент f нормируемого пространства F , а исходным данным $\varphi(t), g(t)$ – элементы φ, g соответствующих нормируемых пространств. Оператор A характеризует зависимость u от f или от исходных данных

φ, g, χ . Область определения оператора $D_A \subseteq U$ и $M \subset D_A$, а область значений $F_A \subseteq F$. Тогда задача (1.3)– (1.5) имеет следующее операторное представление

$$\begin{aligned} Au &= f, & u &\in U, f \in F, \\ u|_{\Gamma_T} &= \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_T} = g, & \Gamma_T &= \Gamma \times [0, T] \\ u|_{U_0} &= \chi, & \chi &\in U_0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В этой задаче требуется найти элементы $u \in M \subset D_A$ из операторного уравнения, удовлетворяющего соответствующим начальным и граничным условиям. В линейном приближении, когда теплофизические свойства материала зависят от пространственно-временных характеристик материала, оператор A является линейным оператором.

Задачу (1.4), согласно теории обратных и некорректных задач, называют корректно поставленной по Адамару, если выполняются следующие условия:

1. для любого $f \in F_A$ существует $u \in D_A$ (существует обратный к A оператор A^{-1} и $F_A = F$).
2. $u \in D_A$ единственно в U (оператор A является взаимно однозначным).
3. "малым" изменением правой части соответствуют "малые" изменения решения (существует непрерывный ограниченный оператор A^{-1} обратный к A).

В том случае, когда хотя бы одно условие нарушено, задача относится к классу некорректных задач. Задачи, в которых нарушено только третье условие, называют неустойчивой задачей и для получения приближенных решений таких задач разрабатывают специальные методы, гарантирующие устойчивость решений относительно погрешности правой части. Эти методы называют методами регуляризации или регуляризующими алгоритмами, а приближенные решения, полученные с помощью таких методов называют регуляризованными решениями.

Отметим, что для линейного оператора A в работах [93], [90] доказаны существование и единственность решения задачи (1.3)– (1.5) для функции

$$\begin{aligned} u(x, t) &\in W_2^1\{ [0; \ell] \times [0; \infty)\} \\ u_x(x, t) &\in C\{ [0; \ell] \times [0; \infty)\} \cap L_2\{ [0; \ell] \times [0; \infty)\}, \\ u_{xx}(x, t), u_t(x, t) &\in L_2\{ [0; \ell] \times [0; \infty)\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

для $\varphi \in H^1(0, T)$ при всех $T > 0$, $\chi \in H^1(0, \ell)$, $g \in L_1(0, T)$ при всех $T > 0$.

В работе [93], [90] доказаны существование и единственность решения задачи (1.3), (1.4) в некоторой подобласти Ω_η для функций $u(x, t) \in C^2(\Omega_\eta) \cap C^2(\overline{\Omega_\eta})$ и обоснована неустойчивость задачи (1.3), (1.4), являющейся обратной задачей с неизвестными начальными условиями. Таким образом, методы решения задачи измерения, связанных с обратными задачами теплопереноса должны базироваться на использовании регуляризирующих алгоритмов.

Обзор методов решения обратных задач теплопереноса в объекте с известным начальным состоянием

Основны теории и методов решения обратных задач заложены в трудах А.Н. [155]-[158], М.М. Лаврентьева [88]-[90], В.К. Иванова [60]-[63]. Дальнейшее развитие теория обратных задач получила в исследованиях В.Я. Арсенина, А.Л. Агеева, А.С. Апарцина, А.Б. Бакушинского, А.Л. Бухгейма, Г.М. Вайникко, В.И. Васильева, В.В. Васина, В.А. Винокурова, Ю.Л. Гапоненко, А.В. Гончарского, В.Б. Гласко, А.М. Денисова, В.И. Дмитриева, С.И. Кабанихина, Р. Латтеса, А.С. Леонова, О.А. Лисковца, Ж.-Л. Лионса, Д.Лукьянеко, И.В. Мельниковой, Л.Д. Менихеса, В.А. Морозова, А.И. Прилепко, В.Г. Романова, В.Н. Страхова, С.Б. Стечкина, В.П. Тананы, А.М. Федотова, М.А. Шишленина, А.Г.Яголы и многих других исследователей [3], [4], [6], [13]-[18], [27]-[35], [38]-[40], [44], [50]-[52], [64], [69]-[72], [77], [80]-[82], [92]-[94], [97]-[101], [117]-[119], [126], [137], [138], [144]-[146], [148]-[151], [155]-[163], [168], [180]-[193], [195]-[196], [198]-[202], [204]-[210], [213]-[219], [222]-[226], [231]-[241], [245].

С применением теории некорректных задач в теории управления и в обработке измерительной информации связаны работы А.Г. Бутковского Г.Н. Солопченко, Л.К. Резника, К.К. Семенова, А.Л. Шестакова, А.Forbes [24], [26], [176] [142], [179], [208], [226], [227], [228].

Среди работ, связанных с разработкой, использованием теории и методов некорректных задач в исследовании процессов теплопереноса выделим работы О.М. Алифанова [6], J.Beck[195], А.А.Самарского [136], [138], [140], П.Н.Вабищевича

[9], [28], [137] и других исследователей. Так, в работах [8], [24], [104], [133], [129], [235] рассмотрены задача теплопереноса, связанные с нагревом металла. В работах [66], [106], [163] рассмотрены основы теории теплопереноса, в [85] уделено особое внимание турбулентному переносу тепла в однородных и неоднородных средах, приведены результаты исследований теплопереноса при сложных граничных условиях.

При построении математических моделей теплопереноса в линейном приближении основываются на общепринятом подходе [110], [136], [163], согласно которому, полагают, что искомая температурная функция и коэффициентные функции, характеризующие теплофизические свойства материала, зависят от пространственных координат и времени. В результате в обратных задачах теплопереноса изменение температуры внутри тела представлено линейным уравнением теплопроводности и для определения температуры во внутренних точках объекта по результатам граничных измерений используют численные методы, основанные на различных подходах.

Выделяют несколько основных подходов к разработке вычислительных схем решения обратных задач с известными начальными условиями и граничными условиями, известными на части границы. Одно из них связано с непосредственным решением обратных задач с помощью явных или неявных конечно-разностных методов [29], [30], [81], [82], [137], [163]. Отметим, что неявные вычислительные схемы, обладая свойством безусловной устойчивости, сводятся к решению систем алгебраических уравнений на каждом шаге итерационного процесса, это приводит к значительному росту объемов вычислений и при высокой скорости изменения интенсивности внешнего воздействия или в случае большого объема исходных данных требует привлечения дополнительных ресурсов и может привести к снижению точности.

Реализация явных устойчивых схем приводит к значительному снижению объемов вычислений. Кроме того, требуемые температурные значения на оставшейся части границы в каждый момент времени определяются непосредственно из уравнений. С другой стороны, устойчивость и сходимость явных конечно-разностных

методов зависит от согласованности шагов дискретизации по пространству и времени и основная трудность реализации таких численных алгоритмов в методах обработки информации для систем теплового мониторинга в АСУТП связана с тем, что при возникновении изменений пространственно-временных характеристик (геометрических размеров объекта, продолжительности и характера теплового воздействия, при изменении интервала измерений) необходимо изменять величину шагов дискретизации, что, в свою очередь, требует перестроения вычислительной схемы методов обработки измерений и не всегда может быть непосредственно реализована в АСУТП.

Другой подход связан с использованием прямых и обратных преобразований Фурье и Лапласа при отыскании неизвестной температурной функции из результатов поверхностных измерений. В работах [215], [201] преобразование Лапласа рассматривалось для решения задачи Коши. В работе [219] преобразование Лапласа было использовано для двумерной задачи. Преимущества использования преобразования Лапласа заключается в том, что исходная обратная задача, содержащая уравнения в частных производных сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

В существующих подходах, как правило, после выполнения преобразования Лапласа для решения полученных ОДУ применяются методы регуляризации, а затем для регуляризованного решения выполняется обратное преобразование Лапласа. Основная трудность использования обратного преобразования Лапласа заключается в том, что численная реализация обратного преобразования является сильно неустойчивой вычислительной процедурой и в этой ситуации, приближенное решение, как правило, представлено в виде изображения. Таким образом, возникает необходимость разработке математических моделей, характеризующих явную зависимость искомых параметров от результатов граничных измерений и разработке методов непосредственного вычисления температур из получаемых уравнений, допускающих достаточно простую численную реализацию.

Преобразование Фурье нашло широкое применение в области решения обратных задач теплопроводности. Так, в работе [209] для получения регуляризован-

ных решений используют преобразование Фурье по пространственной переменной и стабилизирующий функционал. В работе [223] с целью регуляризации и оценки сходимости построенных решений были применены преобразование Фурье по пространственной переменной и метод сопряженных градиентов. В работах [202] и [245] также выполняют прямое преобразование Фурье по пространственной переменной. В результате в этой работе получен Фурье-образ решения обратной граничной задачи – искомой граничной функции. Теоретическим исследованиям, связанным с методом проекционной регуляризации и преобразований Фурье по переменной, характеризующей время, посвящена работа [151], в которой обоснована оптимальность по порядку метода проекционной регуляризации и получена оценка погрешности приближенных решений, но алгоритмов, позволяющих численно найти искомую граничную функцию с помощью этого подхода разработано не было. Таким образом, возникла необходимость в разработке метода, позволяющего с гарантированной точностью найти температуру по результатам измерений, проведенных в граничной точке и позволяющего провести сравнительный анализ точности полученных приближенных решений с решениями, найденными из уравнения, характеризующего явную зависимость искомой температуры от граничных измерений.

Большое влияние на формирование температуры внутри тела оказывают внутренние тепловые источники. Возможность выявить присутствие и определить характер влияния источников существенно повышает точность процедуры определения температуры во внутренних точках. Задачи идентификация внутренних тепловых источников также относятся к классу обратных задач (коэффициентные обратные задачи), в которых влияние внутреннего источника представлено ненулевым свободным слагаемым. Исследованию проблемы идентификации внутреннего источника посвящены работы [29], [58], [123], [167], [210]. Как правило, решение этих задач осуществляется путем перехода от исходной обратной задачи к интегральным уравнениям Фредгольма. Разработка и исследование методов решения интегральных уравнений, связанных с обратными задачами и базирующиеся на регуляризирующих подходах, образует отдельное направление.

Отметим, что регуляризирующие алгоритмы решения интегральных уравнений устойчивы относительно погрешности исходных данных, а дискретизация интегрального уравнения проводится по меньшему числу переменных по сравнению с конечно-разностными методами.

Таким образом, для оптимизации вычислительных процедур определения температуры по результатам граничных измерений и идентификации функции внутреннего источника, а также для повышения точности результатов обработки информации, требуется сформировать единый подход к построению математической модели и алгоритмов решения задачи определения температуры во внутренних точках и задачи идентификации внутреннего теплового источника по результатам граничных измерений. Математическая модель должна явно характеризовать прямую зависимость искомых параметров от результатов граничных измерений. Далее, основываясь на предложенном подходе, требуется разработать методы и алгоритмы, сочетающие преимущества интегрального подхода, операционного исчисления и простоту численной реализации в алгоритмах обработки измеренной информации в АСУТП.

Обзор методов решения обратных задач теплопереноса в объекте с неизвестным начальным тепловым состоянием

Существенная особенность многих технологических процессов, связанных с задачами измерения, заключается в том, что, с одной стороны, установить датчики контроля или регулировать интенсивность внешнего теплового воздействия возможно только вдоль некоторой части границы объекта, а, с другой стороны, невозможно измерить начальную температуру внутри всего тела без нарушения целостности объекта. Такая ситуация возникает в системах вторичной термической обработки при горячей прокатке, при комплексной термообработке изделий при реализации промежуточных технологических процессов (отпуск после закалки, нормализация), при тепловом мониторинге работающих систем и механизмов (контроль за температурой валков прокатного стана), для прогнозирования теплового состояния заготовок или изделий после завершения термообработки. Это

приводит к тому, что исходные данные формируются только на некоторой части границы в виде граничных условий, а сформировать начальные условия из результатов измерений не представляется возможным. В результате, математические модели процессов теплопереноса в таких объектах представлены обратными задачами с неизвестными начальными условиями. В настоящее время построены математические модели ТП, связанных с теплопереносом, и хорошо развиты численные алгоритмы, используемые для прогнозирования и контроля теплового поля во внутренних точках объекта с известной начальной температурой.

Общей чертой существующих методов решения обратных задач является то, что все они разрабатываются с учетом известных начальных условий, что является принципиальным препятствием, для использования этих методов в ситуации, когда начальная температура объекта неизвестна. Для процессов теплопереноса, происходящих при неизвестных начальных условиях, когда информация о начальном тепловом поле недоступна, получены численные решения только для отдельных конкретных задач. В основе лежат математические модели для уравнений в частных производных с неизвестными начальными условиями.

Проводимые ранее в этой области исследования как правило, связаны с теоретическим обоснованием существования и единственности в определенной подобласти решений обратных задач с неизвестными начальными условиями для различных уравнений в частных производных [90], [199], [?], [94], [196], [217]–[231]. Разработка численных алгоритмов для отдельных задач осуществлялась, как правило, при фиктивно введенных начальных условиях. Использование такого подхода приводила либо к интегральным уравнениям [137] либо к изменению математической модели, когда уравнения теплопроводности с помощью разложений в ряд Тейлора или преобразования Резницкой заменялись гиперболическими уравнениями [6], [234] либо эллиптическими уравнениями [32]. Это значительно усложняло разработку вычислительных алгоритмов, сужало области устойчивости, требовало проведения дополнительных исследований связанных со сходимостью и обоснованием взаимосвязи получаемых решений с точными решениями исходных задач, а также к разработке дополнительных алгоритмов и методов позволяю-

щих интерпретировать полученные решения с точки зрения исходной задачи, что неизбежно приводило к возникновению существенных дополнительных погрешностей, влияние которых также отражалось на точности решений. Как следствие, на определенном этапе методы оказывались малоэффективными или неработоспособными и не позволяли получать требуемые решения задач с неизвестными начальными условиями. Таким образом, формирование единого подхода к численному решению обратных задач с неизвестными начальными условиями и разработка вычислительных схем решения этих задач представляет перспективную область исследований. Для задач, связанных с линейным теплопереносом, требуется разработать и верифицировать метод определения температурного поля внутри объекта с неизвестным начальным состоянием, подвергаемого внешнему тепловому воздействию и оценить точность полученных результатов. Для нелинейного теплопереноса необходимо сначала разработать процедуру редукции исходной обратной задачи к математической модели с уравнениями, характеризующими явную зависимость теплофизических характеристик материала от температуры, а затем разработать и верифицировать метод прогнозирования изменений температуры во внутренних точках объекта с неизвестным начальным состоянием, подвергаемого внешнему тепловому воздействию, а также оценить погрешность результатов прогнозирования температур.

1.5 Основные результаты и выводы

Выявлены специфические аспекты проблемы обработки информации в условиях неполных и динамически изменяющихся данных в системах контроля АСУТП и прогнозирования теплового состояния объекта, подвергаемого внешнему тепловому воздействию, связанные с особенностями технологического оборудования, когда требуемая информация должна быть получена из результатов косвенных измерений, приводящие к решению обратных задач и требующие разработки новых методов обработки информации.

В данном разделе проведен анализ методов решения обратных задач теплопереноса в системах с распределенными параметрами и известной начальной тем-

пературой, проведен анализ проблемы разработки методов решения задач теплопереноса в системах с неизвестной начальной температурой, проведен анализ методов обработки первичной информации, получаемой от преобразователей температуры и служащих основой для формирования граничных условий в задачах теплопереноса.

Выявлены специфические аспекты проблемы обработки измерительной информации преобразователем температуры, содержащем несколько термометров сопротивления. Обоснована необходимость разработки единого метода обработки первичной информации, получаемой от термометров сопротивления, изготовленных из различных металлов и позволяющего определять температурные значения в различных температурных диапазонах. Результаты применения метода обработки измерений сопротивлений служат основой для формирования граничных данных в обратных задачах теплопереноса.

Проведен анализ проблемы оценки качества измерений и обоснована необходимость построения численных алгоритмов, позволяющих проводить количественную оценку точности измерений и служащей основой для разработки методики оценки качества измерений и состояния средств измерения.

На основе проведенного анализа сформулированы основные цель и задачи исследования.

Глава 2. Методы обработки информации в задачах линейного теплопереноса в объектах с известным начальным тепловым состоянием

В разделе рассмотрена обобщенная задача линейного теплопереноса в системе с распределенными параметрами и известной начальной температурой. Система представлена линейным объектом с постоянными теплофизическими характеристиками. В работе предложен единый подход к построению метода прогнозирования температуры во внутренних точках объекта и метода идентификации внутреннего теплового источника. Подход базируется на переходе к интегральным уравнениям с помощью прямого и обратного преобразований Лапласа и теории регуляризации. Построенные уравнения характеризуют явную зависимость искомых параметров системы: температуры в контрольной точке и функции внутреннего источника от известных граничных функций.

В данном разделе предложены алгоритмы определения температур в контрольной точке или внутреннего теплового источника из полученных интегральных уравнений. Вычислительные схемы включают использование стабилизирующих функционалов, обеспечивающих устойчивость алгоритмов относительно погрешности исходных данных при фиксированном интервала измерений по времени. В разделе также представлены результаты вычислительного эксперимента, выполненного с целью исследования точности и надежности предложенных методов.

2.1 Основные предпосылки и обобщенная математическая модель задач измерения, связанных с теплопереносом

Основные предпосылки математической модели задачи измерения, связанной с процессами теплопереноса в объектах, подвергаемых внешнему тепловому воздействию и рассматриваемых в данном разделе, заключаются в следующем. Начальный момент времени определен началом воздействия на объект выбранного внешнего теплового режима. В начальный момент времени известна температура каждой точки объекта. Передача тепла внутри объекта осуществляется от внешнего

теплового источника в направлении перпендикулярном границе объекта. Процесс теплопереноса происходит без фазовых переходов и при его протекании исключаются резкие изменения температурных градиентов внутри объекта. Управляющее воздействие заключается в регулировании интенсивности нагрева или охлаждения объекта и одинаково в каждой точке границы. Такое управление реализуется при тепловом воздействии на объект в закрытом пространстве, когда теплообмен внутренней камеры печи с внешней средой сведен к минимуму, например, во время термообработки изделий. Тогда полагают, что поверхность обрабатываемого тела подвергается одинаковому в каждой точке внешнему тепловому воздействию.

В задаче измерения, связанной с рассматриваемым процессом теплопереноса, требуется определить температуру в контрольных точках K , расположенных в направлении действия внешнего теплового режима на расстоянии ℓ от внешней границы. Некоторые из возможных схем измерений в объекте при линейном теплопереносе представлены на рис.9.

Рассматривая процессы, связанные с небольшими изменениями температурных градиентов в течение всего контролируемого внешнего воздействия, такие как выдержка изделия при термообработке, работа двигателя в стационарном режиме, проведение неразрушающего теплового контроля, получаем, что изменения теплофизических свойств материала по пространству и времени достаточно малы и допустимо предположение, что соответствующие коэффициенты c, λ, ρ постоянны в каждой точке объекта, влияние внутреннего теплового источника изменяется только по времени. В рассматриваемой задаче управляющее воздействие представлено функциями $\varphi(t)$. Исходя из этих предположений, процесс теплопереноса в объекте с известным начальным тепловым состоянием представим как теплоперенос в однородном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, когда влияние внутреннего источника зависит только от времени.

Введем следующие параметр и функции, используя формулы:

$$a = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad f(t) = \frac{F(t)}{c\rho}, \quad g(t) = -\frac{G(t)}{\lambda}.$$

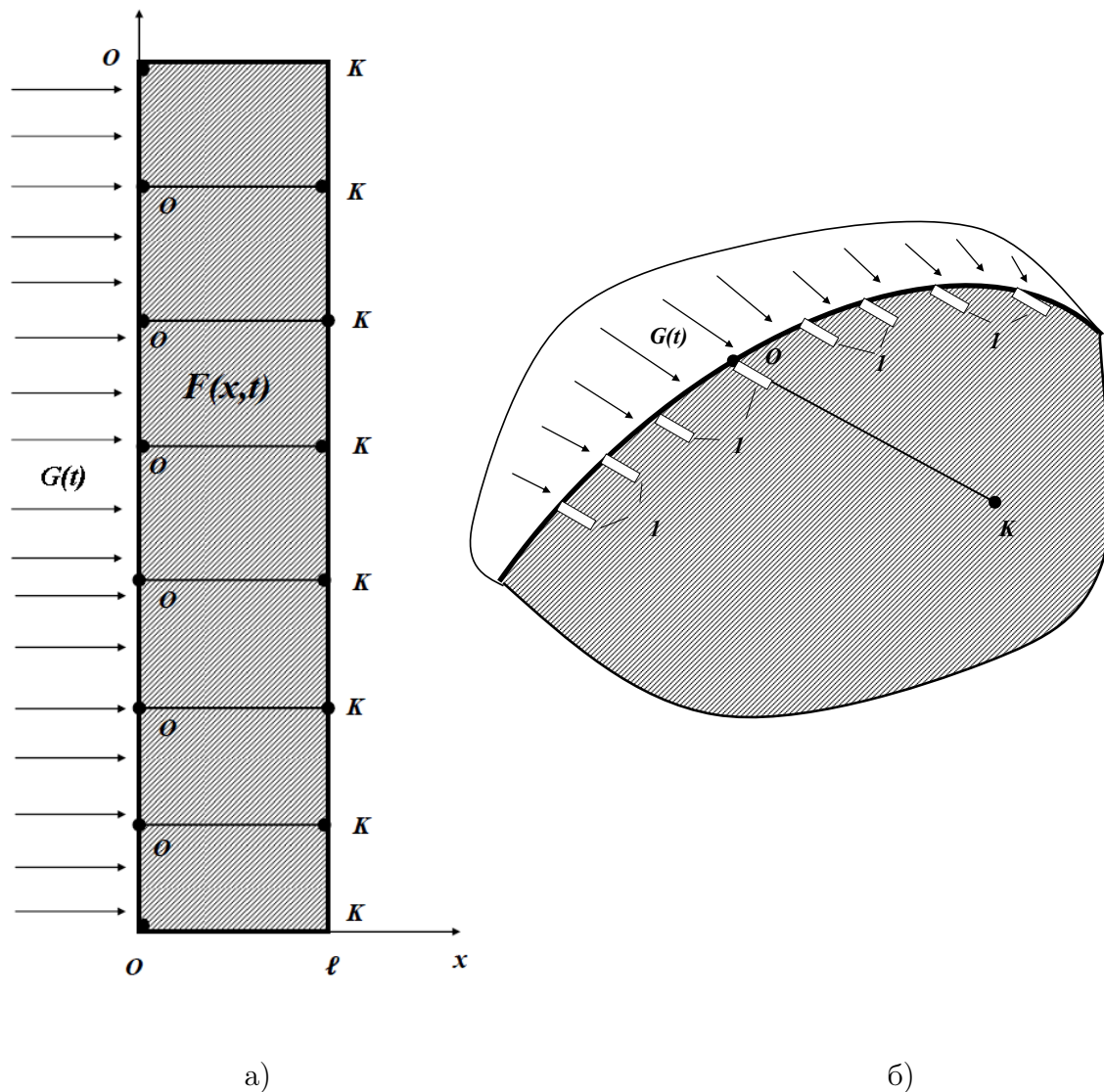


Рис. 9: Схема измерений при линейном теплопереносе. Рис.(а)– теплоперенос в стенках оборудования. Рис.(б)–теплоперенос в среде. O –точки на поверхности, в которых производятся измерения, K – контрольные точки, в которых требуется определить температуру, 1 – датчики.

Тогда математическая модель линейного теплопереноса (1.3)–(1.5) в рассматриваемой системе с распределенными параметрами примет вид

$$u_t = au_{xx} + f(t), \quad x \in (0, \ell), \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u_x(0, t) = g(t), \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = U, \quad x \in (0, \ell). \quad (2.3)$$

В задаче измерения, связанной с линейным теплопереносом, необходимо найти значение температуры в контрольных точках K , удаленной от границы на расстояние ℓ при условии, что тело не содержит внутреннего источника тепла. В

математическом представлении требуется найти граничное значение функции

$$u(\ell, t) = \psi(t) \quad t \geq 0, \quad (2.4)$$

и, основываясь на полученных результатах, определить значения температурной функции $u(x, t)$, удовлетворяющую (2.1)–(2.4) в области $\overline{Q_T} = [0, \ell] \times [0, T)$ при всех $T > 0$.

В задачах измерения, связанных с идентификацией внутреннего источника требуется найти функцию $f(t)$ при известных начальных и граничных значениях, определяемых соотношениями (2.2)–(2.4), и, основываясь на полученных результатах, определить значения температурной функции $u(x, t)$, удовлетворяющую (2.1)–(2.4) в области $\overline{Q_T} = [0, \ell] \times [0, T)$ при всех $T > 0$.

Математическая модель (2.1)–(2.4) задачи измерения, связанная с проблемой определения температуры в линейном объекте с известным начальным состоянием, рассматривается в качестве обобщенной задачи линейного теплопереноса.

2.2 Математические модели задач измерения, связанных с линейным теплопереносом в системах с известным начальным тепловым состоянием

В разделе рассмотрены математические модели задач измерения, связанных с процессами теплопереноса, возникающие в различных областях прикладных исследований при прогнозировании теплового состояния объекта, когда требуется по результатам измерений, полученным от температурных датчиков, определить температуру внутри объекта при выбранном режиме внешнего теплового воздействия. Алгоритмы решения рассматриваемых задач служат основой для разработки методов обработки данных при формировании управляющего теплового режима.

Математическая модель задачи измерения, связанная с тепловой обработкой объекта в термических печах

Эффективность технологического процесса термообработки обеспечивается выбранными условиями и режимами управления. Ключевыми характеристиками

термической обработки являются время и максимальная температура нагрева, скорость нагрева металла до заданной температуры и времени его выдержки при максимальной температуре. Интенсивность нагрева зависит от типа печи, размеров и способа размещения деталей в печи, а время выдержки зависит от скорости теплопереноса внутри тела. Режимы управления формируются на основе данных, полученных от систем контроля. Точность этих данных, а также поддержание оптимального режима управления напрямую зависят от возможности наиболее точно определить температуру в наибольшем количестве внутренних точках объекта, в том числе в значительно удаленных от измерительных приборов. Основная трудность в реализации данной возможности обусловлена тем, что во время выполнения технологического процесса для измерения температуры доступна только внешняя поверхность. Таким образом, требуется разработать метод обработки результатов поверхностных измерений, полученных от температурных датчиков, позволяющий прогнозировать температуру во внутренних точках объекта.

Выделим несколько типов задач измерения, связанных с прогнозированием температурных значений по результатам поверхностных измерений в системах АСУ ТП термических печей.

Первый тип возникает в процессе обработки изделия в термических печах, когда исходными данными для прогнозирования температуры является априорная информация о начальном тепловом состоянии объекта и показания средств измерения, расположенных в стенках печи. В силу того, что во время термообработки теплообмен между внутренней камерой печи и внешней средой сведен к минимуму, полагают, что поверхность обрабатываемого тела подвергается одинаковому в каждой точке внешнему тепловому воздействию. Одна из возможных схем камерной печи с объектом, загруженным в печь, представлена на рис.10.

В данной задаче требуется по результатам измерений, полученным от температурных датчиков в АСУ ТП, определить температуру на поверхности объекта при выбранном управляющем тепловом режиме, полагая, что объект не содержит внутренних источников тепла.

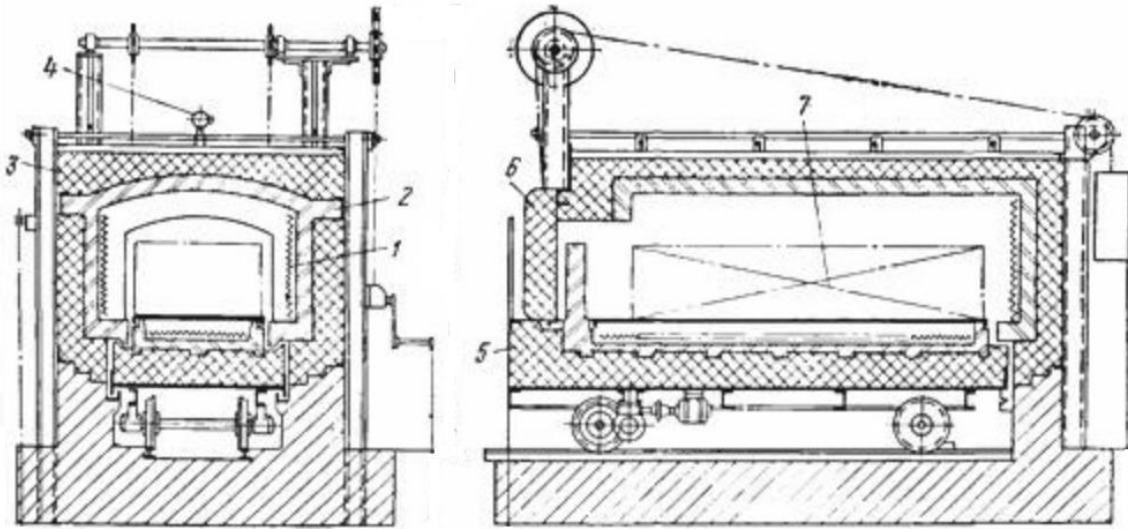


Рис. 10: Камерная печь с выдвижным подом: 1 - нагреватели, 2 - огнеупорная кладка, 3 - теплоизоляция, 4 - термопара, 5 - выдвижной под, 6 - дверца, 7 - объект термообработки

В линейном приближении основные предпосылки рассматриваемой задачи измерения аналогичны представленным в разделе 2.1. Начальные условия в задаче формируются из информации о температуре заготовки в момент начала процесса. Основываясь на этих предположениях и следуя подходу, представленному в [6], [163], [195], согласно которому теплофизические свойства материала претерпевают несущественные изменения, получаем задачу измерения первого типа:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, \ell), \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

$$u(x, 0) = U, \quad x \in [0, \ell] \quad (2.6)$$

Температурный контроль за распространения тепла внутри тела осуществляется на основе измерений температуры вблизи поверхности тела и характеристик выбранного режима теплового воздействия и представлен следующими условиями

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = g(t), \quad t \geq 0, \quad (2.7)$$

Необходимо по этим данным определить время окончания процесса нагрева T_1 , когда под действием выбранного управляющего режима $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ температура объекта $u(x, T_1)$ достигнет требуемого значения.

Предлагаемый метод определения температуры $u(x, T_1)$ включает несколько этапов. На первом этапе определяют значения температуры в контрольной точке,

вычисляя граничную функцию

$$u(\ell, t) = \psi(t), \quad t \geq 0. \quad (2.8)$$

из соотношений (2.5)–(2.7). Далее определяют температурные значения $u(x, t)$ и выбирают момент времени T_1 , при котором температура объекта $u(x, T_1)$ достигнет требуемого значения. Таким образом, задача измерения, связанная с обработкой информации от датчиков температуры в АСУ ТП термообработки имеет вид задачи с финальным временем.

Второй тип задач включает исследование теплопереноса внутри объекта после предварительного нагрева, когда на поверхности поддерживается определенная температура и требуется оценить влияние остаточного нагрева, то есть осуществить прогноз температуры в контрольной точке при выбранном тепловом режиме. Такая задача возникает в процессе термообработки, в системах температурного контроля работающих механизмов.

Третий тип связан с выдержкой изделия при заданной температуре, когда необходимо уменьшить влияние внутреннего источника тепла, присутствующего в объекте и оказывающего существенное влияние на характеристики теплопереноса. Влияние внутреннего источника характеризуется функцией $f(t)$. В данной задаче полагают, что на поверхности и в контрольной точке температура имеет одинаковые значения. В данной задаче необходимо сформировать управление $u_x(0, t)$ так, чтобы температура в каждой точке прямой, соединяющей точку, в которой выполняется измерение, и контрольную точку была одинаковой. Математическое представление этой задачи аналогично (2.1)–(2.3) и имеет вид

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(t), \quad x \in (0, \ell), t \geq 0. \quad (2.9)$$

Начальные условия в задаче формируются из априорной информации о температуре, полученной в момент начала процесса выдержки, и имеют вид

$$u(x, 0) = \hat{U}, \quad y \in [0, \ell] \quad (2.10)$$

Температурный контроль за распространения тепла внутри тела характеризуется условиями

$$u(0, t) = u(\ell, t) = \hat{U}, \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = g(t) \quad t \geq 0, \quad (2.11)$$

Необходимо по этим данным определить время окончания выдержки T_2 и влияние управляющего режима $g(t)$ на функцию влияния внутреннего источника.

В математическом представлении необходимо найти неизвестную функцию внутреннего источника $f(t)$ из соотношений (2.9)–(2.11) при фиксированном T_2 , а затем вычислить температурные значения внутри объекта при найденной $f(t)$.

Известно, что представленные задачи измерения (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) относятся к классу некорректных задач и разработка численных методов ее решения напрямую зависит от точности информации о контролируемых функциях $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(x)$, значения которых определяют интенсивность процесса теплопереноса.

Подход к решению рассмотренных задач измерения, предлагаемый в данной работе, заключается в том, что задача сводится к обобщенной задаче теплопереноса, а затем, для полученной обобщенной задачи теплопереноса, разрабатывают численные методы решения, позволяющие определить требуемые значения.

Преимущества такого подхода заключаются в том, что он позволяет сформировать единый метод обработки данных, и, соответственно, значительно упростить вычислительную процедуру решения задач измерения, что, в свою очередь, позволяет разрабатывать эффективные методы обработки информации, используемых при прогнозировании и формировании управляющего режима воздействия.

Математическая модель задачи измерения, связанная с тепловой обработкой сляба при получения листового проката при холодной контролируемой прокатке

Технологический процесс прокатного производства, связанный с холодной контролируемой прокаткой, содержит такие обязательные операции, как подготовка исходного материала, его нагрев, прокатка и отделка. Сущность контролируемой прокатки состоит в регулировании температуры металла и обжатия металла в процессе прокатки и в управлении температурным режимом на протяжении всего технологического процесса. В процессе холодной прокатки сляб подвергается по-

вторному нагреву. Нагрев металла перед прокаткой повышает его пластичность и улучшает физико-механические свойства. Например, контролируемой прокаткой получают металл с мелкозернистой ферритной структурой. Схема компоновки оборудования для холодной прокатки и рассмотрены, например, в [1] и представлена на рис.11.

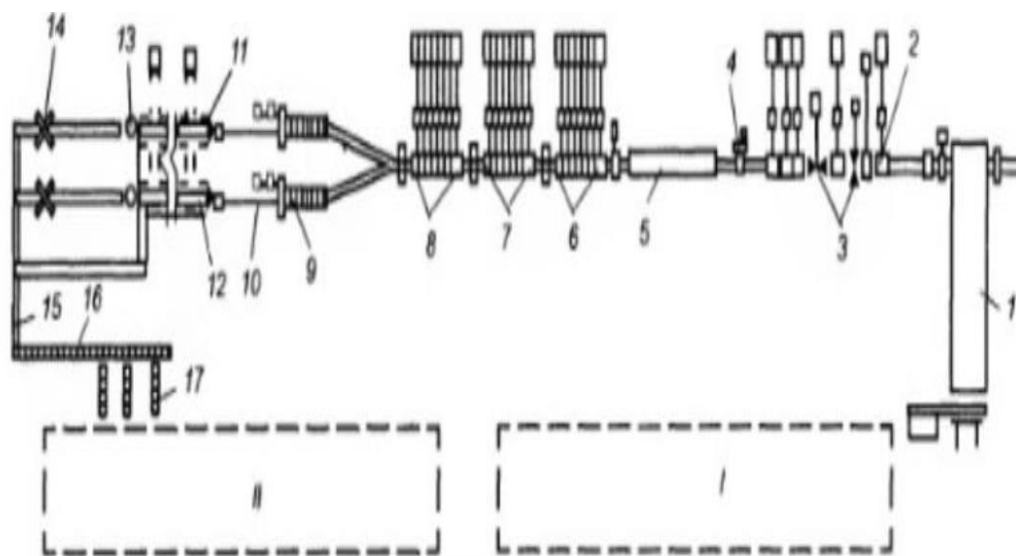


Рис. 11: Схема компоновки оборудования двухниточного проволочного стана 150 Белорезцкого металлургического комбината. I – склад заготовок, II – склад бунтов

В данной схеме используются следующие обозначения: 1 – оборудование для горячего посада заготовок, 2–загрузочная решетка для холодных заготовок, 3–нагревательная печь с шагающим подом, оборудованная АСУ ТП с датчиками температуры , 4–черновая группа горизонтальных клетей диаметром 500 и 400, 5–черновая группа горизонтальных клетей диаметром 360, 6–чистовая группа горизонтальных и вертикальных клетей диаметром 320, 7–кривошипно - эксцентрированные ножницы, 8–установка регулируемого водяного охлаждения арматурной стали, содержащая датчики температуры, 9–речный холодильник, 10–роlikоправильная машина, 11–ножницы холодной резки, 12–уборочные устройства холодной резки, 13–штабелировщики холодных профилей, 14–чистовой проволочный блок, 15–установка регулируемого водяного охлаждения катанисодер-

жащая датчики температуры, 16-виткообразователь, 17-конвейер с регулируемым воздушным охлаждением, оборудованный температурными датчиками.



Рис. 12: Изготовление листового проката из сляба.

Одна из основных проблем технологического процесса холодной прокатки связана с необходимостью снижения энергозатрат, необходимых для достижения требуемых физических свойств проката. Кроме того, в обычных пламенных печах на поверхности многих металлов и сплавов образуется окалина, которая в процессе прокатки вдавливаются в поверхность металла, что существенно ухудшает качественные характеристики проката. Поэтому важно сформировать управляющий режим теплового воздействия на внешнюю поверхность сляба, позволяющий получать листовой прокат с требуемыми физическими и механическими характеристиками, а также уменьшить влияние нежелательных факторов, приводящих к перегреву или переохлаждению заготовки, образованию окалины и т.д. Для оптимизации параметров управляющего режима, необходимо осуществить прогнозирование температурных значений в контрольных точках системы, определить присутствие и оценить влияние внутреннего теплового источника, получаемых в результате выбранного теплового режима воздействия. Иными словами, требуется разработать алгоритм решения обратной задачи теплопереноса, когда по результатам измерений, полученным от температурных датчиков в АСУТП прокатного

стана, требуется определить влияние выбранного теплового режима воздействия на формирование температурного поля объекта.

Таким образом, задача измерения, связанная с холодной прокаткой аналогична задачам измерения, связанными с процессом теплопереноса при обработке объектов в термических печах и, в линейном приближении, следуя общепринятому подходу, представленному в работах [6], [163], [195], сводится к обобщенной задаче теплопереноса и имеет следующий вид

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, \ell), \quad t \geq 0. \quad (2.12)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = g(t), \quad t \geq 0. \quad (2.13)$$

$$u(x, 0) = U, \quad x \in [0, \ell] \quad (2.14)$$

На первом этапе решения задачи измерения (2.12)–(2.14) также определяют значения температуры в контрольной точке, вычисляя граничную функцию

$$u(\ell, t) = \psi(t), \quad t \geq 0. \quad (2.15)$$

полагая, что влияние внутреннего источника неотделимо от общего процесса теплопереноса, то есть полагают $f(t) = 0$. Далее определяют температурные значения $u(x, t)$ и выбирают момент времени T_1 , при котором температура объекта $u(x, T_1)$ достигнет требуемого значения.

На следующем этапе для уменьшения влияние нежелательных факторов, приводящих к перегреву или переохлаждению заготовки, решают третий тип задачи измерения, представленный соотношениями (2.9)–(2.11), где функция нейтрализации влияния негативных факторов представлена в виде функции $f(t)$, которую необходимо найти из соотношений (2.9)–(2.11).

В данной работе для решения вышеизложенных задач измерения также используется единый подход, сформулированный при рассмотрении математических моделей задач измерения, связанных с тепловой обработкой объекта в термических печах, когда исходные задачи сводятся к обобщенной задаче определения температуры в контрольной точке с последующим решением задачи идентификации функции внутреннего источника.

Математическая модель задачи измерения, связанная с обработкой информации о температурном состоянии двигателей

При исследовании нестационарных процессов теплопереноса, протекающих при взаимодействии потоков жидкостей и газов с твердыми телами, возникает необходимость определения температуры в контрольных точках, расположенных на границе соприкосновения твердого тела с жидкостями и газами. Основой для вычисления температуры внутри объекта служат результаты измерения температуры вблизи поверхности тела с помощью датчиков тепловых потоков, выполненных в виде тонкого цилиндра с теплоизолированной боковой поверхностью. На один из торцов датчика действует измеряемый тепловой поток, а другой торец теплоизолирован. Схема размещения датчиков представлена на рис.13, а соответствующая схема измерения представлена на рис.14. Практическая реализация измерительной схемы была рассмотрена в работе [109], а представлена на рис. 15.

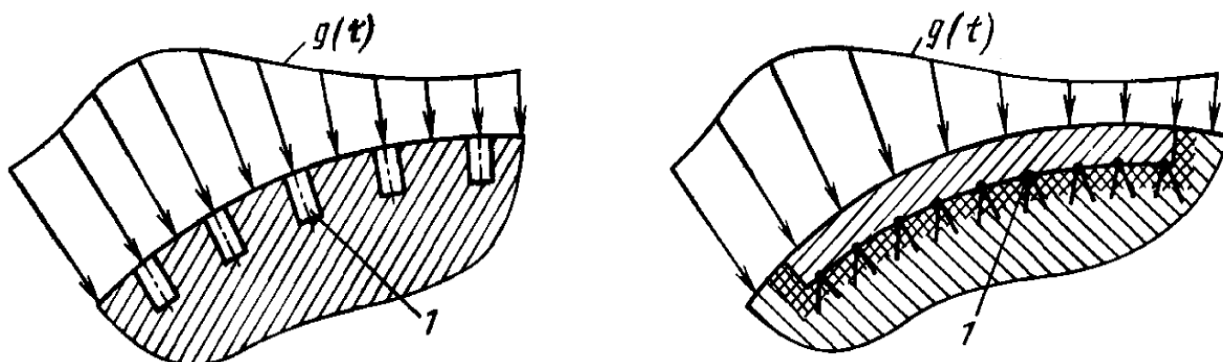


Рис. 13: Измерение тепловых потоков датчиками. 1– датчики, терпары

Теплофизические характеристики материала стенок камеры малоизменчивы в течение периода измерения. Это обстоятельство позволяет полагать, что процесс теплопереноса является линейным, изменения коэффициента температуропроводности $a(x, t)$ по пространству и времени достаточно малы, и, следовательно, имеет постоянное значение. В этой ситуации процесс теплоотдачи от рабочего тела к стенкам деталей камеры, согласно [7] и [131], характеризуется дифференциальным уравнением теплопереноса

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, \ell), t \geq 0. \quad (2.16)$$

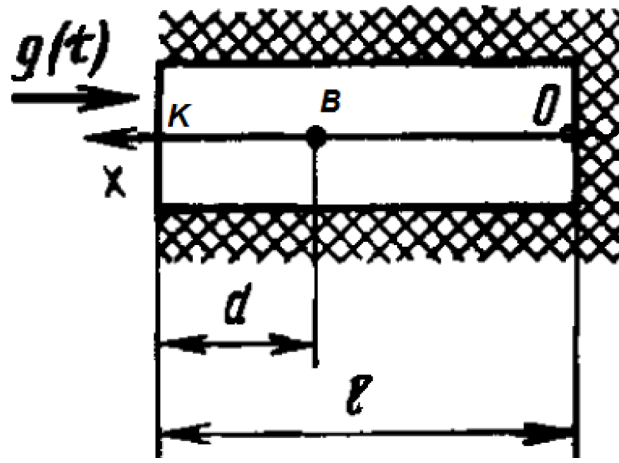


Рис. 14: Схема измерения тепловых потоков датчиками. $g(t)$ – характеристика теплового потока, O – теплоизолированный торец датчика. B – точки измерения температуры, K – контрольная точка

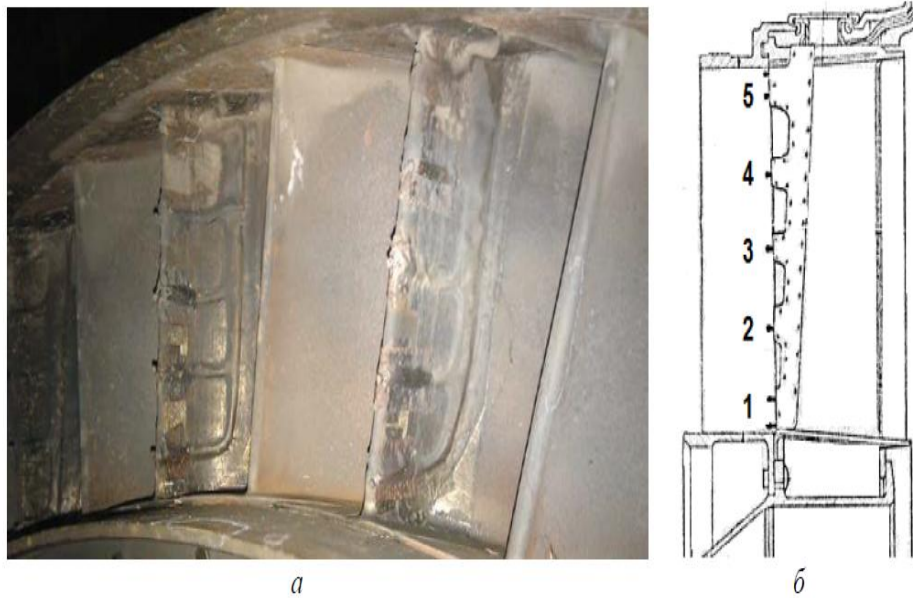


Рис. 15: Стендовая база газотурбинного двигателя НК-16СТ. a – препарированный сопловый аппарат ГТД НК-16СТ, b – схема расположения термопар

Тепловому воздействию в точке O соответствует граничное условие

$$u(0, t) = U, \quad t \geq 0. \quad (2.17)$$

Представленной схеме измерения соответствуют граничные условия

$$u_{in}(t) = \varphi(t) \quad t \geq 0, \quad (2.18)$$

где $u_{in}(t)$ – измеренная температура в точке B , а $u(0, t)$ – измеренная температура в точке O . В начальный момент времени температура вдоль прямой OK

постоянна и представлена следующим условием

$$u(x, 0) = u(0, t) = U. \quad x \in [0, \ell], t \geq 0.$$

Важным обстоятельством, влияющим на точность температурных измерений является то, что в процессе эксплуатации средства измерения подвержены влиянию негативных факторов, являющихся причиной возникновения отклонений измеренных значений от действительных. В математической модели данная ситуация имеет следующее представление. Полагаем, что вместо действительных значений $\varphi_0(t) = u_{in}(0, t)$ известны некоторые приборные значения $\varphi_\delta(t)$ и допустимый уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\int_0^\infty (\varphi_\delta - \varphi_0(t))^2 dt \leq \frac{\delta^2}{8}$.

В задаче (2.16)–(2.18) по приближенным исходным данным (φ_δ, δ) требуется определить температуру в контрольной точке K , удаленной на расстояние ℓ от границы. Математически требуется найти граничную функцию

$$u(\ell, t) = \psi(t), \quad t \geq 0. \quad (2.19)$$

и оценить погрешность найденных приближенных значений $u_\delta(t) = \psi_\delta(t)$.

Сведем задачу (2.16)–(2.18) к обобщенной задаче. Основываясь на предположениях математической модели линейного теплопереноса, полагаем, согласно [143], что $u(x, t) \in W_2^1((0, \ell) \times [0, \infty))$, и для функции $\psi(t)$ выполнено

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0, \quad \psi''(0) \in L_1[0, b], \quad \forall b > 0. \quad (2.20)$$

Заменим условие (2.18) на следующее соотношение

$$\alpha(t) (u_{in}(t) - u(0, t)) = -\lambda \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = g(t) \quad (2.21)$$

где $\alpha(t)$ – коэффициент теплоотдачи от газа к стенкам деталей камеры, $u_{in}(t)$ – измеренная температура в точке B .

Определим величину отклонений значений g_δ от $g(t)$. Используя выкладки, аналогичные приведенным в [180], получаем, что при замене условия (2.18) на (2.21) приближения g_δ функции $g(t)$ удовлетворяют соотношению

$$\|g_0(t) - g_\delta(t)\| \leq \delta. \quad (2.22)$$

Таким образом, задача определения температуры работающего двигателя сводится к обобщенной задаче измерения, связанной с линейным теплопереносом в однородном теле с известной начальной температурой.

Математическая модель определения тепловой нагрузки

При диагностике теплопередачи к тонкостенным конструкциям, возникает необходимость в определении плотности тепловых потоков $F(t)$, гарантирующих постоянную температуру в контрольной точке при выбранном внешнем тепловом воздействии $G(t)$. Получение постоянных температур достигается за счет интенсивного теплосъема, например, с помощью омывания поверхности охлаждающей жидкостью. Контроль за результатами воздействия теплового режима $G(t)$ осуществляется посредством определения температуры в точке B (см. рис. 16(а)). Если трудно обеспечить постоянство температуры в контрольной точке K , то тепловой контроль основан на результатах определения температуры в точках B_1 и B_2 . Соответствующие схемы измерения рассмотрены в работе [6] и представлены на рис.16.

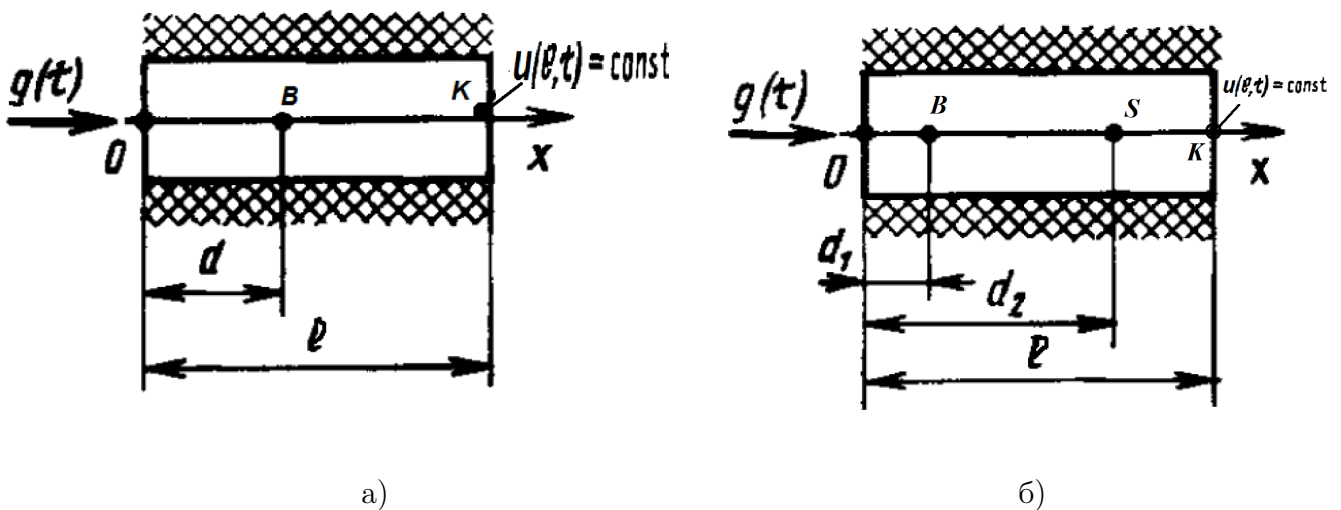


Рис. 16: Схема измерения тепловых потоков датчиками температуры. $g(t)$ – исходное тепловое воздействие, B, S – точки в которых требуется определить температуру

Согласно [6], при линейном теплопереносе тепловая нагрузка $F(t)$ представима как функцию источника в уравнении теплопроводности.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in [0, l], t \geq 0.$$

где $f(x, t) = \frac{F(t)}{c(x, t)\rho(x, t)}$. Учитывая постоянство теплофизических характеристик $c(x, t)$, $\rho(x, t)$, $\lambda(x, t)$ материала, получаем, что уравнение теплоперенса примет вид

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(t), \quad x \in [0, \ell], t \geq 0. \quad (2.23)$$

Используя для определения коэффициента теплоотдачи $\alpha(t)$ методики, предложенные в работах [84], [103], [109], получаем, что управляющий тепловой режим со схемой измерения, представленной на рис. 16(а), определяется соотношением

$$\alpha(t) (u(B, t) - u(0, t)) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = g(t) \quad (2.24)$$

где $u(B, t)$ —температура в точке B , а $g(t) = -\frac{G(t)}{\lambda}$. Соблюдению постоянства температур на обоих концах соответствует граничное условие

$$u(0, t) = u(\ell, t) = U, \quad t \geq 0 \quad (2.25)$$

Начальная температура в объекте известна и характеризуется условием:

$$u(x, 0) = \hat{U}, \quad x \in [0, \ell]. \quad (2.26)$$

При определении температуры необходимо учитывать возможные отклонения измеренных значений от действительных. С этой целью введем следующее условие. Вместо точных действительных значений $g(t)$ известны измеренные значения g_δ и допустимый уровень отклонений δ такие, что

$$\|g_0(t) - g_\delta(t)\| \leq \delta. \quad (2.27)$$

В рассматриваемой задаче измерения, связанной с определением влияния внутреннего теплового источника необходимо найти неизвестную функцию источника $f(t)$ из результатов измерений (g_δ, δ) , основываясь на соотношениях (2.23)-(2.26).

2.3 Методы определения температуры внутри однородной системы с распределенными параметрами и известным начальным состоянием при линейном теплопереносе

В разделе предложен подход, позволяющий редуцировать обобщенную задачу линейного теплопереноса к интегральной модели теплопереноса, характеризую-

щей прямую зависимость искомой температуры в контрольной точке от результатов граничных измерений. Для полученного интегрального уравнения предложен численный метод. Также в разделе представлен метод численного решения обобщенной задачи, основанный на применении преобразований Фурье и проекционной регуляризации и позволяющий находить численные решения обобщенной задачи с гарантированной точностью. В работе приведены результаты сравнительного анализа методов, показано, что при использовании интегральной модели вычислительная погрешность получаемых результатов находится в допустимых пределах.

2.3.1 Постановка задачи

Задача (2.1)–(2.4) определения температуры в контрольных точках в ситуации, когда влияние внутренних источников неотделимо от общего процесса теплопереноса внутри тела, с помощью замены переменных сводится к виду:

$$\begin{aligned} u_t &= au_{xx}, \quad x \in (0, \ell), \quad t \geq 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u_x(0, t) = g(t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad x \in (0, \ell). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Управляющее воздействие представлено функцией $g(t)$, формируемой из результатов измерения температуры в граничной области.

В соответствующей задаче измерения необходимо найти значение температуры в контрольной точке, удаленной от источника тепла на расстояние ℓ , а в математическом представлении требуется найти граничное значение функции

$$u(\ell, t) = \psi(t) \quad t \geq 0. \tag{2.29}$$

Существование, единственность решения задачи (2.28), (2.29) обоснованы в [7], [90]

Известно, что измеренные величины $g_\delta(t)$ содержат отклонения от действительных значений $g(t)$, а допустимый уровень суммарных отклонений не превосходит некоторой величины δ , то есть имеет место условие $\|g - g_\delta\| \leq \delta$. Требуется по исходным данным $(g_\delta(t), \delta)$ найти температуру $\psi(t)_\delta$, являющуюся приближенным решением задачи (2.28), (2.29).

2.3.2 Интегральная модель линейного теплопереноса и метод определения температуры в однородной системы с распределенными параметрами и известным начальным состоянием

В разделе предложена математическая модель процесса теплопереноса, представленная в виде интегрального уравнения Вольтерра, характеризующего явную зависимость значения температуры в контрольной точке от выбранного управляющего воздействия во внешней точке, а также вычислительная схема решения полученного уравнения. Предложенная схема позволяет учитывать существенные отклонения в исходных данных, что повышает точность результатов обработки и прогнозирования температур, и, как следствие, увеличивает эффективность использования информационных ресурсов, используемых для улучшения качества термоконтроля и оптимизации управляющих режимов.

§ 2.3.2.1 Построение интегральной модели линейного теплопереноса в однородных объектах с распределенными параметрами и известным начальным состоянием

Основываясь на предпосылках математической модели, и следуя результатам, представленным в [75], полагаем, что функция, характеризующая распространение тепла внутри объекта, ограничена в среднем $u(x, t) \in L_1([0, \ell] \times [0, \infty))$.

Так как во время технологического процесса недопустимы резкие изменения температурных градиентов внутри тела, полагаем, что существуют $C > 0, \beta_0 \geq 0$ такие, что $|\phi(t)| \leq Ce^{\beta_0 t}$ для всех $t \in [0, T)$ при любых $T \geq 0$ и функция $\phi(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле на каждом интервале $[0, T]$ при всех $T \geq 0$.

Построение интегральной модели осуществляется следующим образом [235]. Сначала найдем решение прямой задачи, предположив, что искомая функция $u(\ell, t) = \psi(t)$ известна.

Прямая задача имеет вид :

$$u_t = au_{xx}, \quad x \in (0, \ell) \quad , \quad t \geq 0, \quad (2.30)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, \ell),$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = \phi(t), \quad t \geq 0.$$

Решив прямую задачу, получим уравнение, связывающее температурную функцию $\phi(t)$ в контрольной точке и измеренную функцию $g(t)$.

Основываясь на свойствах $u(x, t)$ и $\psi(t)$, сформулированных ранее, и следуя результатам, представленным в [53], используем прямое и обратное преобразования Лапласа для решения прямой задачи (2.30). Изображению функции $u(x, t)$ соответствует обозначение $\bar{u}(x, p)$, а изображение функции $\psi(t)$ обозначим $\bar{\psi}(p)$. Операторное изображение прямой задачи (2.30) имеет вид:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{p}{a} \bar{u} = 0,$$

$$\bar{u}(0, p) = 0, \quad \bar{u}(\ell, p) = \bar{\psi}(p).$$

Решение этой задачи определяется формулой:

$$\bar{u}(x, p) = \bar{\psi}(p) \frac{sh\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{sh\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\ell\right)}.$$

В существующих подходах далее находят изображения Лапласа для исходных данных, а затем применяют методы регуляризации, позволяющие найти устойчивое приближенное решение исходной задачи. Основная трудность таких подходов заключается в необходимости численно осуществлять обратное преобразования Лапласа, а соответствующая численная процедура является неустойчивой и для получения удовлетворительных результатов необходимо разрабатывать дополнительные стабилизирующие алгоритмы.

В отличие от существующих подходов, представим операторное изображение решения прямой задачи в виде суммы простейших дробей. Для этого используем математический аппарат теории функции комплексного переменного.

Введем в рассмотрение функцию $\bar{\phi}(x, p) = \frac{sh\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{sh\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\ell\right)}$. Функция $\bar{\phi}(x, p)$ имеет простые полюсы в точках $s_n = \sqrt{\frac{p}{a}} = \pm i \frac{\pi n}{\ell}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ и точка $p = 0$ является правильной точкой в силу того, что $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{sh\left(\frac{p}{a}x\right)}{sh\left(\frac{p}{a}\ell\right)} = \frac{x}{\ell}$. Тогда, согласно определению, функция $\bar{\phi}(x, p)$ является мероморфной. Кроме того, внутри каждого контура $|p| = \frac{\pi}{\ell} \left(n + \frac{1}{2}\right)$ содержится только конечное число полюсов и $\exists K = const$ такое, что на любом контуре справедлива оценка

$$|\bar{\phi}(x, p)| \leq K, \tag{2.31}$$

из которой следует ограниченность $\bar{\phi}(x, p)$. Таким образом, для $\bar{\phi}(x, p)$ применима теорема Миттаг-Леффлера [86] о разложении функции на простые дроби, согласно которой функцию $\bar{\phi}(x, p)$ можно представить в виде:

$$\bar{\phi}(x, p) = h(x, p) + \sum_{n=1}^{\infty} (q_n(x, p) - h_n(x, p)), \quad (2.32)$$

где $q_n(x, p)$ – главная часть разложения функции $\bar{\phi}(x, p)$ в полюсах s_n , а $h(x, p)$ и $h_n(x, p)$ определены соотношениями:

$$h(x, p) = \sum_{k=0}^{m_n} \frac{\bar{\phi}^{(k)}(0)}{k!} p^k, \quad h_n(x, p) = \sum_{k=0}^{m_n} \frac{q^{(k)}(0)}{k!} p^k.$$

Так как оценка (2.31) не зависит от p , то (2.32) примет вид:

$$\bar{\phi}(x, p) = \bar{\phi}(x, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} (q_n(x, p) - q_n(x, 0)) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (q_n(x, p) - q_n(x, 0)), \quad (2.33)$$

Из теоремы Коши [86] следует, что

$$q_n(x, p) = \frac{2 \cdot (-1)^n \cdot sh(\pm i \frac{\pi n}{\ell} x) \cdot (\pm i \frac{\pi n}{\ell})}{p + \frac{\pi^2 n^2 a}{\ell^2}}, \quad q_n(x, 0) = \frac{2 \cdot (-1)^n \cdot sh(\pm i \frac{\pi n}{\ell} x) \cdot (\pm i)}{\pi n},$$

следовательно,

$$q_n(x, p) - q_n(x, 0) = \frac{2 \cdot (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)}{\pi n} \cdot \frac{p}{p + \frac{\pi^2 n^2 a}{\ell^2}}.$$

Подставляя последнее соотношение в (2.33), получим:

$$\bar{\phi}(x, p) = \frac{x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \frac{p}{p + \frac{\pi^2 n^2 a}{\ell^2}}.$$

Применяя к функции $\bar{u}(x, p)$ обратное преобразование Лапласа, получим, что образу $\bar{\phi}(x, p)$ соответствует функция $\phi(x, t)$, имеющая вид:

$$\phi(x, t) = \frac{x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) e^{-\frac{\pi^2 n^2 t a}{\ell^2}}. \quad (2.34)$$

Используя теорему о свертке [53], получаем, что решение прямой задачи $u(x, t)$ определяется формулой:

$$u(x, t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \psi(\tau) \phi(x, t - \tau) d\tau. \quad (2.35)$$

Подставляя (2.34) в (2.35) получим, что решение задачи (2.30) имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{x}{\ell} \psi(t) + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) e^{-\frac{\pi^2 n^2 a t}{\ell^2}} \int_0^t \psi(\tau) e^{\frac{\pi^2 n^2 a \tau}{\ell^2}} d\tau. \quad (2.36)$$

Раскроем оператор дифференцирования в (2.36). Для этого сначала оценим модуль каждого слагаемого в ряде из соотношения (2.36).

Так как функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то, используя свойства функционалов в линейных нормированных пространствах [83] и условие $|\psi(t)| \leq C e^{\beta_0 t}$, получаем

$$\left| \int_0^t \psi(\tau) e^{\frac{\pi^2 n^2 a \tau}{\ell^2}} d\tau \right| \leq C \left| \int_0^t e^{(\frac{\pi^2 n^2 a}{\ell^2} + \beta_0)\tau} d\tau \right| \leq \frac{C \ell^2 e^{(\frac{\pi^2 n^2 a}{\ell^2} + \beta_0)t}}{(\pi^2 n^2 a + \beta_0 \ell^2)}. \quad (2.37)$$

Тогда

$$a_n = \frac{|\sin(\frac{\pi n x}{\ell})|}{n} e^{-\frac{\pi^2 n^2 t a}{\ell^2}} \left| \int_0^t \psi(\tau) e^{\frac{\pi^2 n^2 a \tau}{\ell^2}} d\tau \right| \leq \frac{|\sin(\frac{\pi n x}{\ell})| C \ell^2 e^{\beta_0 t}}{n (\pi^2 n^2 a + \beta_0 \ell^2)} \leq \frac{C \ell^2 e^{\beta_0 t}}{\pi^2 n^3 a}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C \ell^2 e^{\beta_0 t}}{\pi^2 n^3 a} = \frac{C \ell^2 e^{\beta_0 t}}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится. Его сумма $S = \frac{C \ell^2 e^{\beta_0 t}}{\pi^2 a} \zeta(3)$, где $\zeta(q)$ - дзета-функция Римана и, согласно [229], принимает значения $\zeta(3) \approx 1,20206$. Отсюда и теоремы Вейерштрассе следует, что ряд в (2.36) сходится. Сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) e^{-\frac{\pi^2 n^2 t a}{\ell^2}} \int_0^t \psi(\tau) e^{\frac{\pi^2 n^2 a \tau}{\ell^2}} d\tau$$

при каждом t следует из (3.79) и признака Дирихле. Таким образом, используя свойство сходящихся рядов, и учитывая, что при $x \in (-\ell; \ell)$ выполнено $\frac{x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) = 0$, получаем, что после раскрытия оператора $\frac{d}{dt}$ в соотношении (2.36), решение $u(x, t)$ прямой задачи при $|x| \neq \ell$ определяется формулой:

$$u(x, t) = \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) e^{-\frac{\pi^2 n^2 t a}{\ell^2}} \int_0^t \psi(\tau) e^{\frac{\pi^2 n^2 a \tau}{\ell^2}} d\tau.$$

Дифференцирование по переменной x полученного ряда вызывает определенные затруднения, но, в силу того, что измеренная функция $g(t)$ соответствует

значению $u_x(0, t)$ только при $x = 0$, поступим следующим образом. Используя подход, предложенный в работе [90] сопоставим функции $g(t)$ конечный ряд:

$$u_x^N(0, t) = 2 \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{\pi^2 n^2 a}{\ell^2} e^{-\frac{\pi^2 n^2 a t}{\ell^2}} \int_0^t \psi(\tau) e^{\frac{\pi^2 n^2 a \tau}{\ell^2}} d\tau.$$

Принимая во внимание то, что функция $g(t)$ известна, получаем, что задача (2.28), (2.29) сводится к решению следующего уравнения:

$$\frac{2\pi^2 a}{\ell^2} \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} n^2 e^{-\frac{\pi^2 n^2 t a}{\ell^2}} \int_0^t \psi(\tau) e^{\frac{\pi^2 n^2 \tau a}{\ell^2}} d\tau = g_\delta. \quad (2.38)$$

Из (2.38) требуется найти

$$u(\ell, t) = \psi(t), \quad (2.39)$$

при условии, что вместо точных значений функции $g(t)$ нам известны приближения $g_\delta(t)$ и $\delta > 0$ такие, что $\|g(t) - g_0(t)\| \leq \delta$ при любом $t \in [0, T]$ при всех $T \geq 0$. Обозначим

$$K_N(t - \tau) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{\pi^2 n^2 a}{\ell^2} e^{-\frac{\pi^2 n^2 a(t-\tau)}{\ell^2}}, \quad (2.40)$$

$$K_N(0) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{\pi^2 n^2 a}{\ell^2},$$

тогда для любого $T \geq 0$ при $t \in [0, T]$ уравнение (2.38) примет вид:

$$2 \int_0^t \psi(\tau) K_N(t - \tau) d\tau = g_\delta(t). \quad (2.41)$$

Полагаем $A\psi = 2 \int_0^t \psi(\tau) K_N(t - \tau) d\tau$. Тогда уравнение (2.41) имеет эквивалентную форму

$$A\psi = g_\delta. \quad (2.42)$$

Из уравнения (2.42) необходимо найти $\psi(\tau)$ при условии $\|A\psi(\tau) - g_\delta\| \leq \delta$. Таким образом, решение задачи (2.28), (2.29) свелось к решению уравнения Вольтерра первого рода. Для решения полученного уравнения (2.41) в данной работе предлагается численный метод, основанный на регуляризирующем подходе и представленный в работе [235].

§ 2.3.2.2 Метод определения температуры на основе интегральной модели

При построение вычислительной схемы решения уравнения (2.41) учитываем следующие особенности теплопереноса в технологических процессах. Первая связана с ограниченностью по времени технологического процесса, поэтому полагаем $t \in [0, T]$, где T – продолжительность процесса, а величина шага дискретизации по времени определяется интервалом между измерениями и разбиваем отрезок $[0, T]$ на M частей, где $M + 1$ – количество измерений, выполненных за время T . Обозначим $t_j = (j - 1)\frac{T}{M}$, $j = \overline{1, M + 1}$. Вторая особенность связана с ограниченностью в среднем функции, характеризующей распространение тепла внутри объекта. Таким образом, полагаем, что $g_\delta(t) \in L_1([0, \infty))$ и $g(0) = 0$.

Уравнение (2.41) является уравнением Вольтерра I рода и относится к классу неустойчивых задач, поэтому для его решения разрабатывают методы, основанные на использовании регуляризирующих подходов, позволяющих получать приближенные решения устойчивые относительно отклонений в исходных данных.

Принципиальные этапы метода определения граничной функции

$u_\delta(\ell, t) = \psi_\delta(t)$ заключаются в следующем.

Этап 1. Вычисление параметра N , определяющего количество слагаемых в ядре (2.40). Фиксируем значение $N \geq 2$ и пошагово ортогонализуем систему $\left\{ e^{-\frac{k^2\pi^2 a t}{\ell^2}} \right\}_{k=1}^N$. Обозначим полученную систему как $\left\{ c_k e^{-\frac{k^2\pi^2 t a}{\ell^2}} \right\}_{k=1}^L$. Далее находим коэффициенты в разложении функции $g_\delta(t)$ по этой системе:

$$g_{\delta k}(t) = c_k \int_0^t g_\delta(\tau) e^{-\frac{k^2\pi^2 \tau a}{\ell^2}} d\tau. \quad (2.43)$$

Получаем следующее соотношение:

$$g_\delta(t) = \sum_{k=1}^L g_{\delta k}(t) e^{-\frac{k^2\pi^2 a t}{\ell^2}} = \sum_{k=1}^L c_k \left(\int_0^t g_\delta(\tau) e^{-\frac{k^2\pi^2 \tau a}{\ell^2}} d\tau \right) e^{-\frac{k^2\pi^2 a t}{\ell^2}}. \quad (2.44)$$

Найдем параметр L , используя условие:

$$\|A\psi(t) - g_\delta(t)\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^L g_{\delta k} e^{-\frac{k^2\pi^2 a t}{\ell^2}} - g_\delta(t) \right\|^2 \rightarrow 9\delta^2, \quad (2.45)$$

Основываясь на идее, предложенной в работе [90] останавливаем процесс тогда, когда левая часть (2.45) достигает наиболее близкого значения относительно правой части этого соотношения и полагаем, что значение L , при котором был остановлен процесс определяет количество слагаемых N в уравнении (2.38).

Этап 2. Построение приближенного решения интегрального уравнения (2.38). В данной работе для построения приближенного решения предложен алгоритм, согласующий использование регуляризирующих подходов с допустимым уровнем погрешности прогнозируемых температурных значений.

Предлагаемый алгоритм базируется на на идее, предложенной М. М. Лаврентьевым в [88], согласно которой для обеспечения устойчивости решения операторного уравнения в него вводят аддитивный стабилизирующий функционал. Таким образом, приближенное решение уравнения (2.42) находим из следующего уравнения со стабилизирующим функционалом:

$$A\psi + \alpha\psi = 2 \int_0^t \psi(\tau) K_N(t - \tau) d\tau + \alpha\psi(\tau) = g_\delta, \quad (2.46)$$

при условии, что $\|A\psi_\delta^\alpha - g_\delta\| \rightarrow \min$, а α – некоторый параметр регуляризации. Подход, предложенный в [88], с успехом применяют при решении широкого круга прикладных задач. Разработка и реализация различных подходов к выбору α , учитывающих специфику рассматриваемых прикладных проблем, является ключевым аспектом в формировании методов регуляризации и позволяет перейти от общей идеи к разработке конкретных вычислительных схем.

Выбор параметра регуляризации α в предлагаемом методе решения интегрального уравнения (2.42) осуществляется следующим образом. На первом шаге итерационного процесса выбирается некоторое начальное значение α_0 и для него находят приближенное решение $\phi_\delta^{\alpha_0}$ уравнения (2.46) и вычисляют величины P и M по формулам

$$P = \|A\psi_\delta^{\alpha_0}\| \quad M = \frac{P}{\|\psi_\delta^{\alpha_0}\|}$$

Согласуя (2.45) и результаты, полученные в [180], а также идею, предложенную в [99], получаем, что следующее значение α выбирается из уравнения:

$$\left(\frac{\alpha P}{(\alpha + M)^2} - 2\frac{\delta}{\alpha} - 12\frac{P}{\alpha^2} \right)^2 = 9\frac{\alpha P}{(\alpha + M)^2}. \quad (2.47)$$

Вычислительную процедуру повторяют для значения α , найденного из (2.47). Итерационный процесс останавливают тогда, когда величина $\|A\psi_\delta^\alpha - g_\delta\|$ достигает наименьшего значения.

Вычислительный алгоритм определения граничной функции из интегральной модели теплопереноса (2.41) с возмущенной правой частью, разработанный в данном исследовании включает следующие этапы.

Этап 1. Вычисление параметра N – количество слагаемых в ядре (2.40). Для этого вычисляют элементы $g_{\delta k}(t_j)$ с помощью предложенного итерационного процесса. Интегралы, стоящие в (2.43) аппроксимируем суммами, используя квадратуру правых прямоугольников. При этом значения N выбирают так, чтобы гарантировать положительную определенность ядра (2.40).

Этап 2. Проверка условия (2.45). Итерационный процесс повторяем до тех пор, пока невязка не достигнет значения, наиболее близкого к требуемой величине.

Этап 3. Построение численного решения уравнения (2.46). Для этого выберем некоторое начальное значение параметра $\alpha = \alpha_0$ и аппроксимируем интегралы, стоящие в (2.46) суммами, используя квадратуру правых прямоугольников. Из полученной системы алгебраических уравнений находят значения $\psi_\delta^\alpha(t)$.

Этап 4. Проверка минимальности невязки. Итерационный процесс останавливают, если величина $\|A\psi_\delta^\alpha - g_\delta\|$ достигает наименьшего значения. процесс, Иначе решают уравнение (2.47) и выбирают новое значение параметра $\alpha = \alpha_1$, повторяя затем этап 3.

Эффективность использования интегральной модели и точность предлагаемого метода решения уравнения (2.41) была оценена при проведении вычислительного эксперимента на основе имитационного моделирования. В ходе эксперимента выполнен сравнительный анализ приближенных решений интегральной модели,

приближенных решений, полученных с помощью оптимального по порядку метода и тестовых функций.

2.3.3 Оптимальный по порядку метод определения температуры в контрольной точке однородной системы с распределенными параметрами и известным начальным состоянием

В разделе представлен метод решения задачи (2.28), (2.29), основанный на применении преобразований Фурье и проекционной регуляризации, позволяющий находить численные решения с гарантированной точностью, при этом порядок погрешности построенных решений является наименьшим из возможных.

§ 2.3.3.1 Метод проекционной регуляризации

Метод проекционной регуляризации впервые был предложен и обоснован в работах [151] и [180]. Краткое математическое представление метода имеет следующий вид. Пусть H – гильбертово пространство, оператор $A : H \rightarrow H$, характеризующий зависимость искомой функции $u(x, t)$ от исходных данных является линейным, инъективным, ограниченным оператором. Полагаем $A_1 = A^*A$, спектр $Sp(A_1) = [0, \|A\|^2]$. Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = g; \quad u, g \in H. \quad (2.48)$$

Метод проекционной регуляризации состоит из нескольких этапов. На первом этапе осуществляется регуляризация исходных данных. С этой целью, исходные данные g преобразуют с помощью полярного разложения оператора A , определяемого формулой $A = QA_1^{1/2}$, где Q – унитарный оператор. В результате получают $\bar{g}_\delta = Q^*g_\delta$, где Q^* – сопряженный к Q . Существование требуемого оператора Q доказано в работе [117]. Далее, для построения приближенного решения (2.48) на основе преобразованных данных, используют регуляризующее семейство $\{T_\delta^\alpha : \delta \in (0, \delta_0], \alpha \in (0, \|A\|)\}$ определяемое формулой:

$$\bar{T}_\delta^\alpha g_\delta = \int_\alpha^{\|A\|} \frac{1}{\sigma^2} dE_\sigma \bar{g}_\delta. \quad (2.49)$$

где $\{E_\sigma : \sigma \in [0, \|A\|]\}$ - спектральное разложение E , порожденное оператором $A_1^{1/2}$, а параметр регуляризации α выбирается из принципа невязки как одно из решений уравнения

$$\|A\bar{T}_\delta^\alpha g_\delta - g_\delta\|^2 = 9 \|A\|^2 \delta^2. \quad (2.50)$$

Отметим, что уравнение (2.50) может иметь множество решений, но это не оказывает влияния на точность приближенного решения операторного уравнения.

При использовании метода проекционной регуляризации приближенное решение уравнения (2.48) определяется формулой:

$$u_\delta^\alpha = \hat{T}_\delta^\alpha g_\delta = \begin{cases} \bar{T}_\delta^\alpha g_\delta, & \text{при } \|g_\delta\| > 3 \|A\| \delta, \\ 0, & \text{при } \|g_\delta\| \leq 3 \|A\| \delta, \end{cases} \quad (2.51)$$

где оператор $\bar{T}_\delta^\alpha g_\delta$ задан формулой (2.49), а α - одно из решений уравнения (2.50).

В работах [151],[180] доказано, что использование оператора \hat{T}_δ^α с параметром α , выбранным согласно (2.50), позволяет получать приближенные решения, устойчивые относительно погрешностей исходных данных, а отклонения приближенных решений $u_\delta^{\tilde{\alpha}(\delta)}$ от точных значений u_0 имеет тот же порядок, что и решения, получаемые оптимальным методом, то есть являются оптимальными по порядку. В [151],[180] получена следующая оценка погрешности решений:

$$\frac{1}{2} \ln^{-1} \left(\frac{1}{\delta} \right) \leq \|u_\delta^{\tilde{\alpha}(\delta)} - u_0\| \leq 3 \ln^{-1} \left(\frac{1}{\delta} \right),$$

подтверждающая, что при использовании проекционной регуляризации получаемые решения имеют гарантированную точность. В данном исследовании оптимальность по порядку метода проекционной регуляризации служит основой для сравнительного анализа решений, полученных на основе проекционной регуляризации и решений, полученных из интегральных моделей.

§ 2.3.3.2 Метод определения температуры при линейном теплопереносе, основанный на использовании проекционной регуляризации и преобразованиях Фурье

В предлагаемом численном методе решения задачи (2.28), (2.29) проекционную регуляризацию применяют к Фурье-образам функций по времени t . Необходимость использования метода проекционной регуляризации связана с тем, что

интегральное преобразование Фурье выполняется на всей числовой прямой, а переменная по времени t определена только на полупрямой и, следовательно, требуется гарантировать, что при применении преобразования Фурье по t получаемые образы соответствуют приближенному решению исходной задачи и не произойдет искажение результатов.

Отметим, что важным аспектом в совместном применении метода проекционной регуляризации и преобразований Фурье является то, что проекционную регуляризацию осуществляют в гильбертовых пространствах, а интегральное преобразование Фурье определено для функций из пространства $L_1(-\infty, +\infty)$, которое не является гильбертовым. Основой для совместного применения метода проекционной регуляризации и преобразований Фурье служит теоремы Планшереля и результаты, представленные в [107], обосновывающие, что при применении преобразований Фурье сохраняется изометричность отображений и, соответственно, точность результатов. Допустимость такого применения преобразования Фурье приведено в [180].

Алгоритм метода определения температур с помощью преобразований Фурье и проекционной регуляризации заключается в следующем.

На первом этапе метода применяют преобразование Фурье F_t по переменной t для исходных данных g_δ . Полученный образ обозначают как $\tilde{g}_\delta(\lambda)$. Далее применяют проекционную регуляризацию, осуществив проекцию полученных образов $\tilde{g}_\delta(\lambda)$ на область значений $R(F_t)$ прямого преобразования Фурье. Получим:

$$\hat{g}_\delta(\lambda, \bar{\alpha}(\delta)) = \begin{cases} \tilde{g}_\delta(\lambda), & \text{for } |\lambda| \leq \bar{\alpha}(\delta), \\ 0, & \text{for } |\lambda| > \bar{\alpha}(\delta). \end{cases} \quad (2.52)$$

Параметр регуляризации $\bar{\alpha}(\delta)$ выбираем, исходя из (2.50), представив его в виде:

$$\int_{-\bar{T}}^{-\bar{\alpha}(\delta)} |\tilde{g}_\delta(\lambda)|^2 d\lambda + \int_{\bar{\alpha}(\delta)}^{\bar{T}} |\tilde{g}_\delta(\lambda)|^2 d\lambda \rightarrow 9\delta^2. \quad (2.53)$$

где \bar{T} —некоторое финальное значение. Тогда параметр $\bar{\alpha}(\delta)$ выберем из условия

$$\|\tilde{g}_\delta(\lambda)\|_{L_2} - \int_{\bar{\alpha}(\delta)}^{-\bar{\alpha}(\delta)} |\tilde{g}_\delta(\lambda)|^2 d\lambda \rightarrow 9\delta^2. \quad (2.54)$$

Так как операторное изображение задачи (2.28), (2.29) имеет вид:

$$i\lambda \tilde{u}(x, \lambda) = a \frac{d^2}{dx^2} \tilde{u}(x, \lambda), \quad x \in (0, \ell), \quad \lambda \in R, \quad (2.55)$$

$$\tilde{u}(0, \lambda) = 0, \quad \tilde{u}_x(0, \lambda) = \hat{g}_\delta(\lambda),$$

где $\tilde{u}(x, \lambda) = F_t(u(x, t))$. то, учитывая (2.52), (2.54), получим, что Фурье-образ $\tilde{u}(\ell, \lambda)$ искомых граничных значений определяется формулой:

$$\tilde{u}(\ell, \lambda) = \frac{2 \operatorname{sh} \left(\mu_0 \sqrt{\frac{\lambda}{a}} \ell \right)}{\mu_0 \sqrt{\frac{\lambda}{a}} \ell} \bar{g}_\delta(\lambda, \bar{\alpha}(\delta)), \quad (2.56)$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, параметр $\bar{\alpha}(\delta)$ удовлетворяет уравнению (2.53), а функция $\bar{g}_\delta(\lambda, \bar{\alpha}(\delta))$ задана соотношением (2.52).

Далее для функции $\tilde{u}(\ell, \lambda)$ применяют обратное преобразование Фурье F_λ^{-1} . Тогда приближенное решение задачи (2.28), (2.29) определяется формулой:

$$u_\delta(t) = \begin{cases} \operatorname{Re}(\bar{u}_\delta(\ell, t)), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.57)$$

где $\bar{u}_\delta(\ell, t) = F_\lambda^{-1}(\tilde{u}_\delta(\ell, \lambda))$ – результат применения обратного преобразования Фурье.

Из результатов работы [180] следует, что погрешность решений, полученные при таком подходе является неулучшаемой по порядку. Это свойство приближенных решений послужило основой для проведения сравнительного анализа численных решений, полученных с помощью метода проекционной регуляризации и преобразований Фурье и численных решений, найденных с помощью интегральной модели линейного теплопереноса в однородной среде.

2.3.4 Результаты вычислительного эксперимента

Верификация интегральной модели и оценка точность предлагаемого метода решения уравнения (2.41) осуществлялись в вычислительном эксперименте, проводимом на основе имитационного моделирования. В ходе эксперимента выполнен

сравнительный анализ приближенных решений интегральной модели, приближенных решений, полученных с помощью оптимального по порядку метода и тестовых функций.

Имитационное моделирование осуществлялось по следующей методике. Сначала нормировались пространственная переменная x и переменная по времени t согласно формулам: $\xi = \frac{x}{\ell}$ и $\tau = \frac{t}{T}$, тогда $\xi \in [0, 1]$, а $\tau \in [0, 1]$. Основываясь на том, что в рассматриваемой задаче теплофизические характеристики материала не изменяются по пространству и времени, нормирование переменных не влияет на величины коэффициентов в уравнении теплопроводности. Далее формировались тестовые температурные функции $\psi_k(\tau)$. Формирование осуществлялось по формуле:

$$\psi_k(\tau) = \frac{u(\ell, \tau T)}{\max_{t \in [0, T]} |u(\ell, t)|} - U$$

где U – начальная температура тела, а $\max_{t \in [0, T]} |u(\ell, t)|$ соответствует наибольшему требуемому температурному значению в контрольной точке.

В эксперименте были рассмотрены следующие типы тестовых функций:

1. Температурные функции, соответствующие плавному нагреву. Представителем данного типа является функция $\psi_1(\tau) = \tau e^{-\tau}$.
2. Тестовые температурные функции, соответствующие процессу первоначального нагрева и последующего охлаждения. Представителем данного типа является функция $\psi_2(\tau) = \tau (e^{-\tau} - e^{-1})$
3. Температурные функции, соответствующие попеременному нагреву и охлаждению. Представителями данного типа являются $\psi_3(\tau) = \sin(3\pi\tau) e^{-\tau}$ и $\psi_4(\tau) = \sin(10\pi\tau) e^{-\tau}$
4. Тестовые функции, получаемые при смене управляющего режима во время технологического процесса. Представителями данного типа являются

$$\psi_5(\tau) = \begin{cases} -40\tau, & \tau \in [0; 0.025], \\ -1, & \tau \in (0.025; 0.5], \\ 80\tau - 39, & \tau \in (0.5; 0.525], \\ 1, & \tau \in (0.525; 1]. \end{cases} \quad \psi_6(\tau) = \begin{cases} \sin(5\pi\tau) - 2.5\tau^2, & \tau \in [0; \frac{1}{2}), \\ \cos(5\pi\tau), & \tau \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

Для проведения эксперимента вводилась равномерная сетка из $(n+1) \times (m+1)$ узлов, $\ell = h_x n$, $T = h_\tau m$, и $\xi_i = (i-1)h_x$, $\tau_j = (j-1)h_\tau$, $i = \overline{1, (N+1)}$, $j = \overline{1, (M+1)}$. Основные этапы вычислительного эксперимента состоят в следующем:

- **Этап 1.** Построение решения $u_0(\xi_i, \tau_j)$ прямой задачи. В эксперименте сначала находили решение прямой задачи:

$$\begin{aligned} u_\tau &= au_{\xi\xi}, & (\xi, \tau) \in \Omega_T, \\ u(0, \tau) &= 0, \quad u(1, \tau) = \psi(\tau) & \tau \in [0, 1], \\ u(\xi, 0) &= 0, & \xi \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

где $\psi(\tau)$ – тестовые функции. Для решения прямой задачи (2.58), использовали неявную конечно-разностную схему.

- **Этап 2.** Моделирование управляющего режима $g_\delta(\tau)$ в узлах сетки τ_j . Моделирование проводили в два этапа. Сначала определяли функцию $g(\tau)$, используя формулу:

$$g(\tau_j) = \frac{u(2, j) - u(1, j)}{h_x}.$$

Далее моделировали $g_\delta(\tau_j)$, полагая, что $g_\delta(\tau_j)$ является нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $a = g(\tau_i)$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma = \delta$

- **Этап 4.** Построение решения u_δ^F обратной задачи (2.28), (2.29) по исходным данным $g_\delta(t)$ посредством вычислительные схемы, основанные на преобразовании Фурье и проекционной регуляризации.

- **Этап 5.** Построение решения u_δ^L интегрального уравнения (2.41) с помощью вычислительной схемы, предложенной в разделе 2.3.

- **Этап 6.** Вычисляем величины $\|u_\delta^L - u_0\|_{C(0, T)}$ и $\|u_\delta^F - u_0\|_{C(0, T)}$ где u_0 – тестовая функция.

Результаты вычислительного эксперимента для тестовых функций проиллюстрированы на нижеприведенных рисунках. На всех рисунках используются одинаковые обозначения. Величина погрешности, при которой проводились расчеты, обозначена δ . На верхнем графике обозначение "model" соответствует тестовому значению $g(t)$, а обозначение g_δ соответствует функции $g_\delta(t)$.

На нижнем графике обозначение "model" соответствует тестовой функции $u_0(1, t) = \psi_k(t)$. Обозначение u_δ^F соответствует приближенному решению, полученному посредством оптимального по порядку метода, основанного на преобразовании Фурье и проекционной регуляризации. Обозначение $u_{\delta t}$ используется для приближенного решения интегрального уравнения (2.41). Обозначение α соответствует параметру регуляризации, используемому в оптимальном по порядку методе, а α_t – параметру регуляризации интегральной модели.

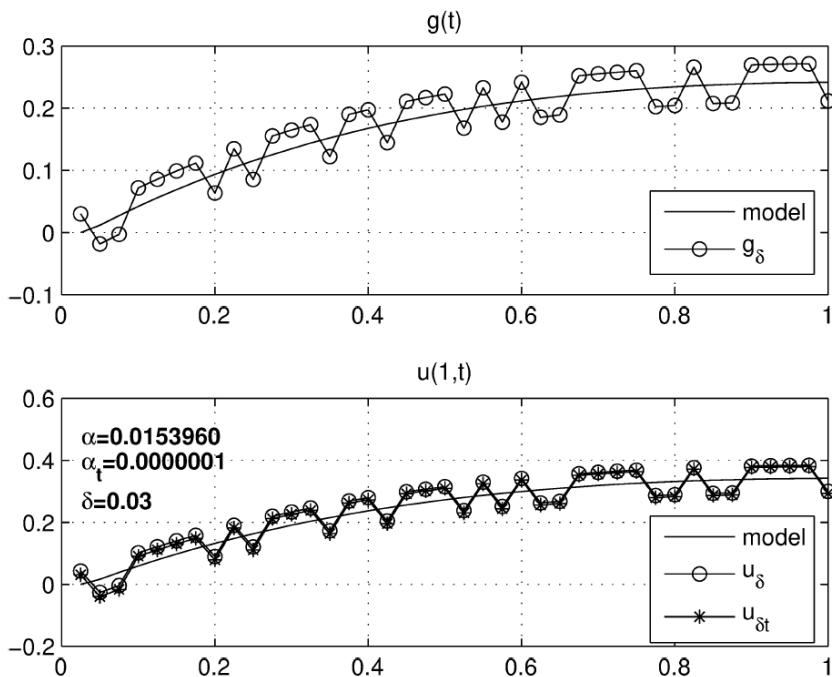


Рис. 17: Результаты численного решения задачи определения температуры $\psi(\tau)$ в контрольной точке при имитационном моделировании для тестовой функции $u(1, \tau) = \psi_1(\tau)$. Уровень погрешности исходных данных $\delta = 0.03$.

Пример 1. В проведенной серии экспериментов рассматривались температурные функции, соответствующие плавному нагреву. Эксперимент проводился при различных уровнях погрешности. На рис.17 изображены результаты численного решения задачи (2.28), (2.29) для тестовой функция $\psi_1(\tau) = \tau e^{-\tau}$ при $\delta = 0.03$.

Пример 2. В этой серии экспериментов рассматривались температурные функции, соответствующие процессу первоначального нагрева и последующего охлаждения. Эксперимент проводился при различных уровнях погрешности. На рис.18 изображены результаты эксперимента для одной из модельных функций $\psi_2(\tau) = t(e^{-\tau} - e^{-1})$ при $\delta = 0.01$.

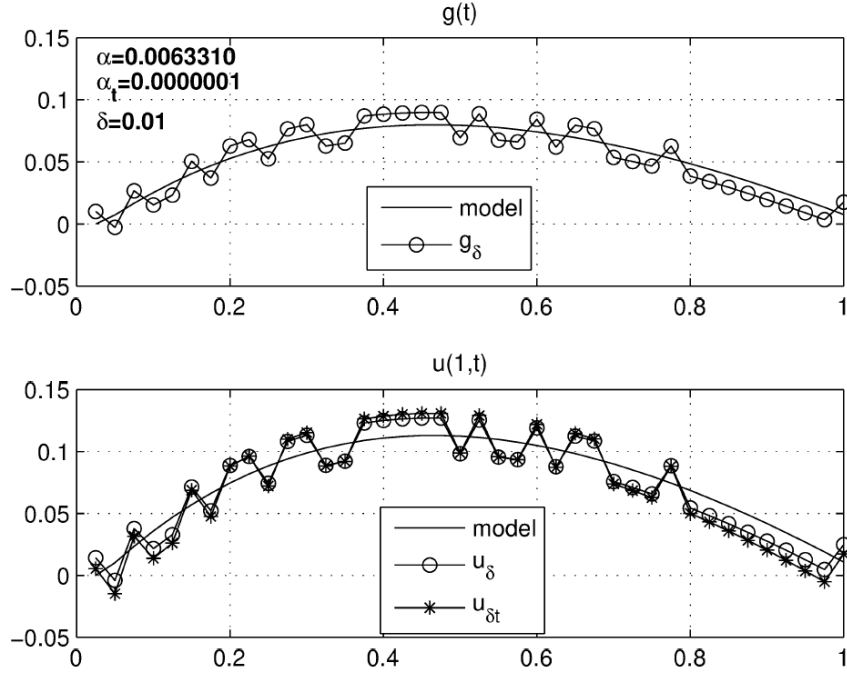


Рис. 18: Результаты численного решения задачи определения температуры $\psi(\tau)$ в контрольной точке при имитационном моделировании для тестовой функции $u(1, \tau) = \psi_2(\tau)$ при уровне погрешности исходных данных $\delta = 0.01$.

Пример 3. В предложенной серии экспериментов рассматривались температурные функции, соответствующие попеременному нагреву и охлаждению. Эксперимент проводился при различных уровнях погрешности. На рис.19 изображены результаты численного решения задачи (2.28), (2.29) для функции $\phi_3(\tau) = \sin(3\pi\tau)e^{-\tau}$ при $\delta = 0.1$, а на рис.20 изображены результаты эксперимента для тестовой функции $\phi_4(\tau) = \sin(10\pi\tau)e^{-\tau}$ при $\delta = 0.1$

Пример 4. В проведенной серии экспериментов рассматривались температурные функции, получаемые при смене управляющего режима во время технологического процесса. На рис.21 изображены результаты численного решения задачи

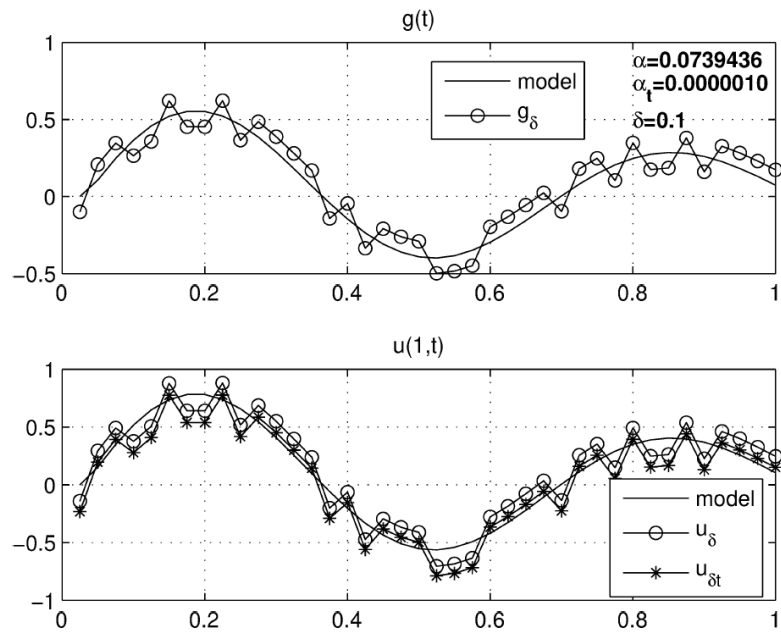


Рис. 19: Результаты численного решения задачи определения температуры $\psi(\tau)$ в контрольной точке при имитационном моделировании для тестовой функции $u(1, \tau) = \phi_3(\tau)$ при уровне погрешности исходных данных $\delta = 0.1$.

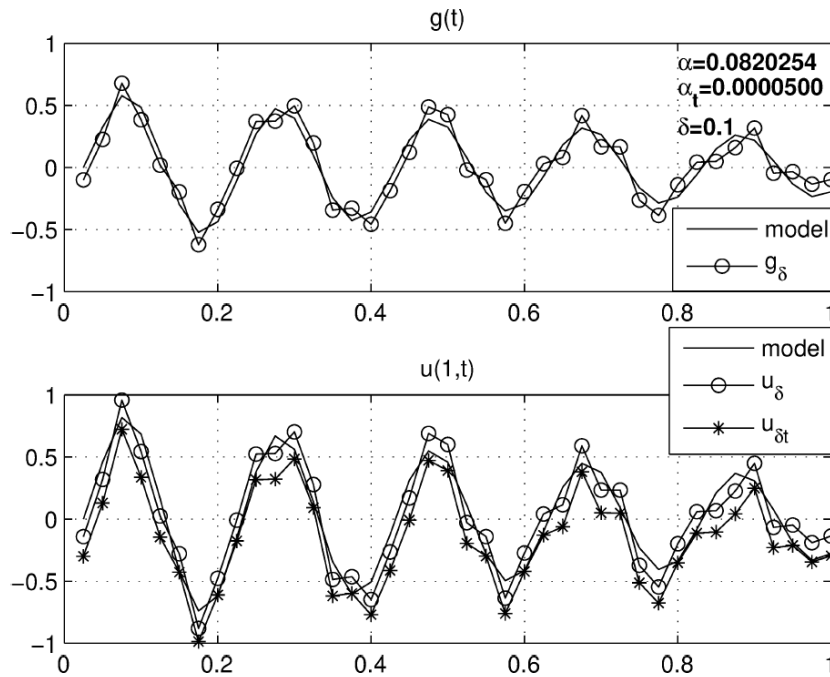


Рис. 20: Результаты численного решения задачи определения температуры $\psi(\tau)$ в контрольной точке при имитационном моделировании для тестовой функции $u(1, \tau) = \psi_4(\tau)$ при уровне погрешности исходных данных $\delta = 0.1$.

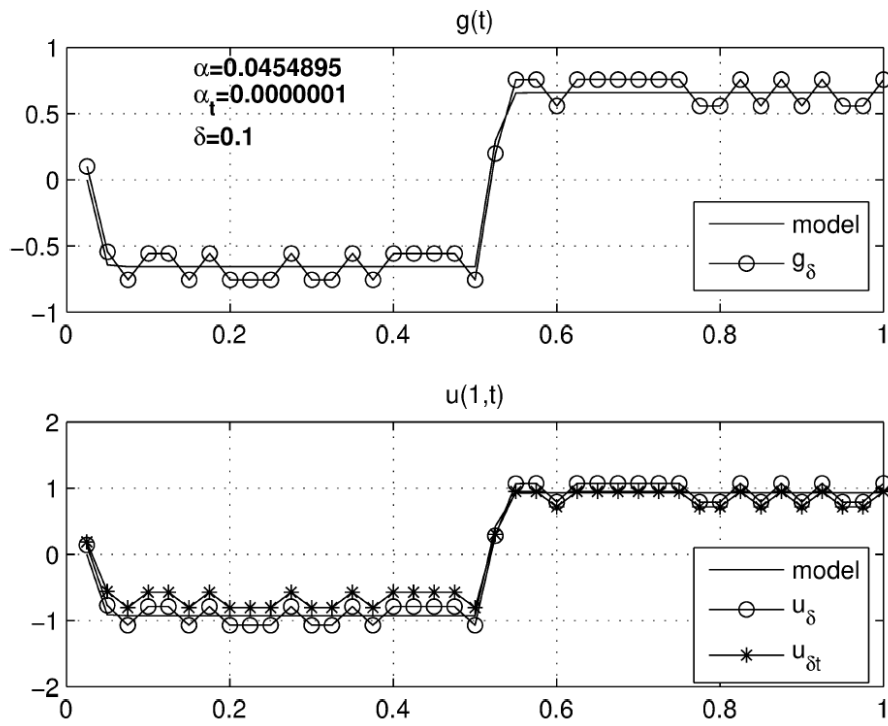


Рис. 21: Результаты численного решения задачи определения температуры $\psi(\tau)$ в контрольной точке при имитационном моделировании для тестовой функции $u(1, \tau) = \psi_5(\tau)$

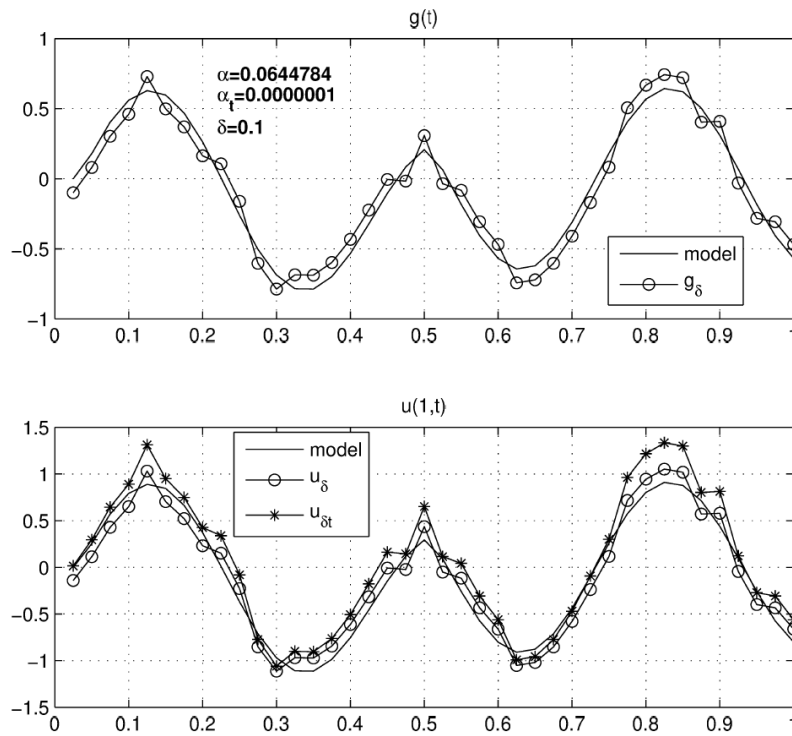


Рис. 22: Результаты численного решения задачи определения температуры $\psi(\tau)$ в контрольной точке при имитационном моделировании для тестовой функции $u(1, \tau) = \psi_6(\tau)$

(2.28), (2.29) при $\delta = 0.01$, а на рис.22 изображены результаты эксперимента при уровне погрешности исходных данных $\delta = 0.1$.

Для оценки отклонений получаемых решений u_δ^F и u_δ^L , характеризующих найденные температуры в контрольной точке, от тестовых значений $\psi(\tau)$ использовали следующие функции:

$$\|u_\delta^F - u_0\|_{C[0,T]} = \max_{\tau \in [0,1]} |u_\delta^F - \psi(\tau)|,$$

$$\|u_\delta^L - u_0\|_{C(0,T)} = \max_{\tau \in [0,1]} |u_\delta^L - \psi(\tau)|,$$

Средние значения этих величин, полученных в каждой серии эксперимента, представлены в таблице 1.

Таблица 1: Экспериментальные оценки погрешности приближенных решений

тестовая функция	δ	$\ u_\delta^L - \psi(\tau)\ $	$\ u_\delta^F - \psi(\tau)\ $
$\psi_1(\tau) = u(1, \tau) = \tau e^{-\tau}$	0.01	0.0167	0.0141
	0.03	0.0175	0.0142
$\psi_2(\tau) = u(1, \tau) = t(e^{-\tau} - e^{-1})$	0.01	0.0169	0.0142
	0.03	0.0409	0.0421
$\psi_3(\tau) = u(1, \tau) = \sin(3\pi\tau)e^{-\tau}$	0.01	0.0983	0.01441
	0.1	0.1233	0.1414
$\psi_4(\tau) = u(1, \tau) = \sin(10\pi\tau)e^{-\tau}$	0.01	0.0965	0.01415
	0.1	0.1001	0.1415
$\psi_5(\tau) = u(1, \tau) = \begin{cases} -40\tau, & \tau \in [0; 0.025], \\ -1, & \tau \in (0.025; 0.5], \\ 80t - 39, & \tau \in (0.5; 0.525], \\ 1, & \tau \in (0.525; 1]. \end{cases}$	0.05	0.1508	0.0425
	0.1	0.1776	0.1457
$\psi_6(\tau) = u(1, \tau) = \begin{cases} \sin(5\pi\tau) - 2.5\tau^2, & \tau \in [0; 0.5), \\ \cos(5\pi\tau), & \tau \in [0.5; 1]. \end{cases}$	0.05	0.1501	0.0615
	0.1	0.1860	0.1424

Результаты эксперимента приводят к следующим выводам:

- Оба метода позволяют находить температурные значения в контрольной точке с достаточной точностью;
- Подход, основанный на преобразовании Фурье и проекционной регуляризации, позволяет получать результаты с гарантированной точностью, что подтверждается теоретическими оценками метода проекционной регуляризации, приведенными в работе [151];

- Порядок погрешностей решений, полученных методом, основанный на преобразовании Фурье и методе проекционной регуляризации, зависит от порядка погрешности исходных данных;
- Построенная интегральная модель позволяет получать приближенные решения с уровнем точности, сопоставимым с оптимальным по порядку;
- В отличие от оптимального по порядку метода, основанного на применении преобразований Фурье и методе проекционной регуляризации, порядок погрешности исходных данных не оказывает существенного влияния на точность полученных решений;
- Изменение характера управляющего режима теплового воздействия, отраженное в свойствах тестовых функций, не оказывают существенного влияния на величину погрешности получаемых приближенных решений;
- Приближенные решения задачи измерения служат основой для прогнозирования температур, получаемых в результате выбранного управляющего режима теплового воздействия, что приводит к повышению точности определения температур и позволяет сформировать управляющий режим воздействия более оптимально уже на этапе имитационного моделирования

2.4 Идентификация функции внутреннего источника тепла при линейном теплопереносе в системах с распределенными параметрами и известным начальным состоянием

В данном разделе предложено обобщение подхода, предусматривающего переход от исходной задачи к интегральному уравнению, характеризующему явную зависимость неизвестной функции внутреннего теплового источника от выбранного режима внешнего теплового воздействия. Интегральная модель получена с помощью прямого и обратного преобразований Лапласа. В работе предложен метод определения влияния внутреннего источника из интегрального уравнения. Устойчивость вычислительной процедуры при фиксированном шаге дискретизации по времени обеспечивается введением стабилизирующего функционала в численную схему метода.

2.4.1 Обобщенная математическая модель задачи измерения, связанная и идентификацией внутреннего источника

Основные предпосылки задачи измерения, рассматриваемого в данном разделе, аналогичны сформулированным в разделе 2.1. Объект подвергается внешнему тепловому воздействию, одинаковому в каждой точке поверхности объекта. Изменение теплофизических характеристик материала не оказывает существенного влияния на изменения температурного поля, поэтому полагаем, что эти характеристики постоянны относительно пространства и времени. Влияние внутреннего источника тепла вдоль линии, соединяющей внешнюю и контрольную точки зависит только от времени. К моменту начала воздействия выбранного внешнего теплового режима температура U внутри объекта постоянна в каждой точке. Измерениям температуры во внешней точке соответствует функция $\varphi(t)$, а в контрольной точке $\psi(t)$. В математическом представлении задача теплопереноса имеет вид

$$v_t = av_{xx} + F(t), \quad x \in (0, \ell), \quad t > 0, \quad (2.59)$$

Проводимые измерения определяют следующие граничные условия

$$v(0, t) = \varphi(t), \quad v(\ell, t) = \psi(t), \quad t \geq 0 \quad (2.60)$$

Начальное состояние объекта характеризуется условием

$$v(x, 0) = U, \quad x \in [0, \ell]. \quad (2.61)$$

Внешнее тепловое воздействие представлено условием

$$v_x(0, t) = G(t), \quad t \geq 0, \quad (2.62)$$

В задаче (2.59)– (2.62) требуется сначала найти функцию $F(t)$, характеризующую влияние источника тепла, а затем, основываясь на полученных результатах, определить температуру $v(x, t)$ в области $Q_T = [0, \ell] \times [0, T]$ при всех $T > 0$.

Предпосылки математической модели позволяют принять следующие допущения. Полагаем, что управляющее воздействие характеризуется функцией $G \in C^{2+\eta}[0, T]$ при всех $T > 0$ а $\eta \in (0, 1)$ и существуют константы M, m такие, что

$|G(t)| \leq Me^{mt}$ для любого $t \in [0, T]$ при всех $T > 0$. Полагаем, что существуют $C, \bar{C} > 0$ и $\beta_0, \beta \geq 0$ такие, что $|u(x, t)| \leq Ce^{\beta_0 t}$ и $|f(t)| \leq \bar{C}e^{\beta t}$ выполнены при $x \in [0, \ell]$ и при всех $t \in [0, T]$ для любого $T > 0$. Дополнительно полагаем, что функция $F(t), \varphi'(t), \psi'(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле для любого $t \in [0, T]$ при всех $T > 0$. Сведем задачу (2.59)–(2.62) к обобщенной задаче с однородными граничными и начальными условиями. Выполним замену переменных

$$u(x, t) = v(x, t) - U - \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) (\varphi(t) - U) - \frac{x}{\ell} (\psi(t) - U)$$

получаем

$$u_t = au_{xx} + F(t) - \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \varphi'(t) - \frac{x}{\ell} \psi'(t), \quad x \in (0, \ell), \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \ell], \quad t \geq 0$$

$$u_x(0, t) = v_x(0, t) + \frac{1}{\ell} (\varphi(t) - U) = G(t) + \frac{1}{\ell} (\varphi(t) - U), \quad t \geq 0,$$

Введем следующие обозначения

$$f(t) = F(t) - \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \varphi'(t) - \frac{x}{\ell} \psi'(t), \quad g(t) = G(t) + \frac{1}{\ell} (\varphi(t) - U),$$

тогда эквивалентное представление исходной задачи (2.59)–(2.62) имеет вид:

$$u_t = au_{xx} + f(t), \quad x \in (0, \ell), \quad t > 0, \quad (2.63)$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \ell], \quad t \geq 0 \quad (2.64)$$

$$u_x(0, t) = g(t), \quad t \geq 0, \quad (2.65)$$

В задаче (2.63)–(2.65) требуется сначала найти функцию $f(t)$, а затем, основываясь на полученных результатах, определить температуру $u(x, t)$ в области $Q_T = [0, \ell] \times [0, T]$ при всех $T > 0$. Единственность решения рассматриваемой задачи (2.63)–(2.65) доказана в работе [198].

Важным обстоятельством, влияющим на точность определения температуры, является наличие в результатах измерений отклонений измеренных значений от действительных. В математической модели данная ситуация имеет следующее представление. Полагаем, что вместо действительных значений $g(t)$ известны некоторые приближения $g_\delta(t)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ т.ч. $\|g_\delta - g\|_{C(0, T)} \leq \delta$.

В этих условиях сначала требуется определить функцию $f_\delta^\alpha(t) \in C^{1+\eta}(0, T)$ при всех $T > 0$, соответствующую плотности внутреннего теплового источника, а затем найти $u_\delta^\alpha(x, t) \in H^{2,1}((0, \ell) \times (0, T))$ при $T > 0$, удовлетворяющую (2.63)–(2.65) и соответствующих температурному полю, формируемому под действием выбранного режима внешнего теплового воздействия и выявленного внутреннего теплового источника.

Решение задачи идентификации источника разделим на два этапа. На первом этапе сведем исходную задачу к интегральной модели, обобщая подход, предложенный в разделе 2.3. В результате получим интегральное уравнение, характеризующее явную зависимость неизвестного теплового источника от исходных данных. Следующий этап связан с разработкой и верификацией численного метода решения полученного интегрального уравнения, устойчивость которого обеспечивается введением стабилизирующего функционала в вычислительную схему.

2.4.2 Интегральная модель задачи идентификации внутреннего источника

С целью получения интегральной модели сначала построим аналитическое решение прямой задачи, следуя подходу, представленному в разделе 2.3 и в работе [189], полагая, что искомая функция источника $f(t)$ известна:

$$u_t = au_{xx} + f(t), \quad x \in (0, \ell), \quad t \geq 0, \quad (2.66)$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \ell], \quad t \geq 0. \quad (2.67)$$

Основываясь на предпосылках математической модели и характеристиках функций $u(x, t)$, $g(t)$, $f(t)$ а также результатах, представленным в работе [53], получаем, что для решения прямой задачи (2.66), (2.67) допустимо использование прямого преобразования Лапласа. Обозначив изображения функций $u(x, t)$ и $\frac{f(t)}{a}$ как $\bar{u}(x, p)$ и $\bar{f}(p)$ соответственно, получаем, что операторное изображение прямой задачи (2.66), (2.67) имеет вид:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{p}{a} \bar{u} = -\bar{f}(p),$$

$$\bar{u}(0, p) = \bar{u}(\ell, p) = 0.$$

Решение операторной задачи определяется формулой:

$$\bar{u}(x, p) = \frac{\bar{f}(p) \operatorname{sh}(\sqrt{\frac{p}{a}}\ell) - \operatorname{sh}(\sqrt{\frac{p}{a}}x) - \operatorname{sh}(\sqrt{\frac{p}{a}}(\ell - x))}{p \operatorname{sh}(\sqrt{\frac{p}{a}}\ell)}. \quad (2.68)$$

Покажем, что решение $u(x, t)$ задачи (2.66), (2.67), имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{\ell}\pi x\right)}{2m+1} e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau. \quad (2.69)$$

Из результатов, представленных в разделе 2.3 и обоснованных в [235], следует, что для функции $\bar{\phi}(x, p) = \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{p}x)}{\operatorname{sh}(\sqrt{p}\ell)}$ имеет место следующее представление:

$$\bar{\phi}(x, p) = x + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin(\pi mx) \frac{p}{p + m^2\pi^2}.$$

Обобщая этот результат, получаем:

$$\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\frac{p}{a}}x)}{\operatorname{sh}(\sqrt{\frac{p}{a}}\ell)} = \frac{x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin\left(\frac{\pi mx}{\ell}\right) \frac{p}{p + \frac{m^2\pi^2 a}{\ell^2}} \quad (2.70)$$

$$\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\frac{p}{a}}(\ell - x))}{\operatorname{sh}(\sqrt{\frac{p}{a}}\ell)} = \frac{\ell - x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin\left(\frac{\pi m(\ell - x)}{\ell}\right) \frac{p}{p + \frac{m^2\pi^2 a}{\ell^2}}.$$

Учитывая сходимость рядов в (2.70) и выполняя соответствующие преобразования в (2.68), получаем:

$$\bar{u}(x, p) = \frac{4}{\pi} \frac{\bar{f}(p)}{p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{\ell}\pi x\right)}{2m+1} \frac{p}{p + \frac{(2m+1)^2\pi^2 a}{\ell^2}}. \quad (2.71)$$

Принимая во внимание свойства функций $u(x, t)$ и $f(t)$, применим обратное преобразование Лапласа к обеим частям (2.71). Далее, используя теорему о свертке [53], получаем:

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2m+1)}{\ell}\pi x\right)}{2m+1} e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau.$$

Сходимость ряда (2.69) для любых $x \in [0, \ell)$ и $t \in [0, T)$ следует из теоремы Вейерштрассе и следующей оценки:

$$\left| \frac{\sin\left(\frac{(2m+1)}{\ell}\pi x\right)}{2m+1} e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2m+1)} e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \frac{\bar{C} \ell^2 e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2} + \beta t}}{(\pi^2(2m+1)^2 a + \ell^2 \beta)} \leq \frac{\bar{C} \ell^2 e^{\beta t}}{\pi^2 a (2m+1)^3}.$$

Покажем, имеет место следующее аналитическое представление функции плотности теплового потока

$$g(t) = u_x(0, t) = \frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau$$

а также обоснуем, что при всех $t \in [0, T]$ для каждого $T > 0$, и для любых $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется N такое, имеет место следующая оценка погрешности:

$$\left\| \frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^N e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau - g(t) \right\|_{C(0, T)} \leq \varepsilon + \delta.$$

Для получения аналитического представления обоснуем сходимость ряда

$$\frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^{\infty} \cos\left(\frac{2m+1}{\ell} \pi x\right) e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau. \quad (2.72)$$

Имеет место следующая оценка:

$$\left| \cos\left(\frac{2m+1}{\ell} \pi x\right) \right| e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \left| \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau \right| \leq \frac{\bar{C} \ell^2 e^{\beta t}}{\pi^2 a (2m+1)^2}.$$

Из сходимости ряда $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$, а также из теоремы Вейерштрасса следует сходимость ряда (2.72) при всех $x \in [0, \ell]$. Используя свойства сходящихся рядов, получаем:

$$u_x(x, t) = \frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^{\infty} \cos\left(\frac{2m+1}{\ell} \pi x\right) e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau.$$

Далее аппроксимируем функцию $u_x(0, t)$ конечным рядом и оценим уклонение полученной аппроксимации от точного значения. Учитывая сходимость ряда (2.72), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что :

$$\left| \frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^N e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau - u_x(0, t) \right| < \varepsilon. \quad (2.73)$$

Принимая во внимание условие (2.65), получаем

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^N e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau - g_\delta \right\|_{C(0,T)} = \\
& = \left\| \frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^N e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau - g(t) + g(t) - g_\delta \right\|_{C(0,T)} < \\
& < \left\| \frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^N e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau - g(t) \right\|_{C(0,T)} + \|g(t) - g_\delta\|_{C(0,T)} \leq \varepsilon + \delta.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что неизвестная функция источника $f(t)$ является приближенным решением следующего интегрального уравнения:

$$\frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^N e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau = g(t). \quad (2.74)$$

при условии, что вместо точно заданной функции $g(t)$ известны $g_\delta(t)$ и $\delta > 0$ такие, что $\|g(t) - g_0(t)\| \leq \delta$ при всех $t \in [0, T]$. Обозначим

$$K_N(t - \tau) = \frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^N e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 a}{\ell^2}(t-\tau)}.$$

Уравнение (2.74) является уравнением Вольтерра первого рода:

$$\int_0^t K_N(t - \tau) f(\tau) d\tau = g(t). \quad (2.75)$$

Единственность решения этого уравнения при всех $t \in [0, T]$ для любых $T > 0$ следует из результатов, представленных в работе [83]. Пологаем

$$Af = \int_0^t K_N(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Тогда операторное представление уравнения (2.75) имеет следующий вид

$$Af = g_\delta. \quad (2.76)$$

Из уравнения (2.76) необходимо найти $f(\tau)$ при условии $\|Af(\tau) - g_\delta\| \leq \delta$. Таким образом, решение задачи (2.63) – (2.65) свелось к решению интегрального уравнения Вольтерра I рода с возмущенной правой частью.

2.4.3 Метод определения внутреннего источника тепла и метод прогнозирования температуры при наличии внутреннего источника

Для идентификации внутреннего теплового источника, базирующейся на решении полученного уравнения (2.76), в данной работе предлагается численный метод, обобщающий подход, предложенный в разделе (2.3).

Построение численного решения задачи (2.59)–(2.65) осуществим в несколько этапов. На первом определяем количество слагаемых N в ядре уравнения (2.75). С этой целью фиксируем некоторое значение $N > 2$ и ортогонализуем систему функций $\left\{ e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 a t}{\ell^2}} \right\}_0^N$ для каждого $t \in [0, T]$. Обозначим $\{\varsigma_m(t)\}_0^N$ полученную ортогонализованную систему функций. Далее находим коэффициенты $\{g_m(t)\}_0^N$ в разложение функции $g_\delta(t)$ по этой системе, используя формулу:

$$g_{\delta m} = \int_0^T g_\delta(\tau) \varsigma_m(\tau) d\tau.$$

Полагаем $g_{N\delta} = \sum_{m=0}^N g_{\delta m} \varsigma_m(t)$. Перегруппировав слагаемые в последнем соотношении, получаем $g_{N\delta} = \sum_{m=0}^N c_m e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 a t}{\ell^2}}$, где $\{c_m(t)\}_0^N$ — коэффициенты, полученные после перегруппировки. Далее при каждом N вычисляем величину h_N

$$h_N = \left\| \frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^N c_m e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 a t}{\ell^2}} - g_\delta \right\|_{C([0, T])}. \quad (2.77)$$

Если найденное значение h_N удовлетворяет условию $\delta \leq h_N \leq \delta + \varepsilon$ то соответствующее значение N определяет количество слагаемых в ядре уравнения (2.75).

На втором этапе находим численные решения уравнения (2.75), используя вычислительную схему, основанную на идее регуляризирующего подхода, предложенном в [88]. Согласно этому подходу, регуляризованное решение поставленной задачи определяется из уравнения:

$$Af + \alpha f = g_\delta, \quad (2.78)$$

Метода определения функции источника включает выбор параметра α , гарантирующего устойчивость вычислительной схемы и выполнение критерия $\|Af - g_\delta\| \leq \delta + \varepsilon$ при соответствующем уровне точности ε .

Выбор параметра α в предлагаемом методе осуществляется следующим образом. Фиксируется начальное значение α_0 , для которого находят приближенное решение $f_\delta^{\alpha_0}$ уравнения (2.78). Далее вычисляют величины $P = \|Af_\delta^\alpha\|$ и $M = \frac{P}{\|f_\delta^\alpha\|}$. Затем, используем идею, представленную в работе [99], согласно которой в практических расчетах используют квазиоптимальный параметр регуляризации, получаемый при минимизации соответствующей функции параметра. Реализуя эту идею для рассматриваемой задачи, получаем, что для выбора параметра регуляризации необходимо минимизировать функцию:

$$\Psi(\alpha) = \|\alpha(A + \alpha E)^{-2}g_\delta\| + \frac{\delta}{\alpha} + \frac{\|g_\delta\|h_N}{\alpha^2},$$

где $0 < \alpha \leq M$. Процесс минимизации осуществим оценивая величину

$$\Delta_\alpha(t) = \inf \left\{ \|f_\delta^\alpha - f\| + \frac{\delta}{\alpha} + \frac{\|g_\delta\|h_N}{\alpha^2} : 0 < \alpha \leq M \right\}.$$

и известного неравенства $\|(\alpha E + A)^{-1}\| \leq \alpha^{-1}$.

В работе доказано [99], что минимизируя по α на каждом шаге функцию параметра, получают единственное обобщенное квазиоптимальное значение α . Такой подход к выбору параметра регуляризации α гарантирует единственность, устойчивость численного решения интегрального уравнения (2.78), а также сходимость приближенного решения.

На основе полученной интегральной модели и предложенного подхода к численному решению уравнения (2.75) разработан следующий **алгоритм идентификации функции источника и вычисления температур**

Разбиваем отрезок $[0, T]$ на M частей, где $M + 1$ —количество измерений, выполненных за время T . Обозначим $t_j = (j - 1)\frac{T}{M}$, $j = \overline{1, M + 1}$.

Этап 1. Определение значения N — количества слагаемых в ядре уравнения (2.75). С этой целью вычисляют $g_{N\delta}(t)$ с помощью итерационного процесса, аппроксимируя соответствующие интегралы суммами, используя квадратуру правых прямоугольников. Значения N выбирают так, чтобы гарантировать положительную определенность ядра $K(t, \tau)$. Затем вычисляют величину h_N и проверяют выполнение условия $\delta \leq h_N \leq \delta + \varepsilon$. Итерационный процесс повторяют до тех пор, пока h_N не достигнет значения, наиболее близкого к $(\delta + \varepsilon)$.

Этап 2. Построение приближенного решения уравнения (2.78). Сначала выбирают некоторое значения параметра $\alpha = \alpha_0$, для которого находят соответствующее приближенное решения $f_\delta^{\alpha_0}$. Интеграл в левой части (2.78) аппроксимируют интегральными суммами. Далее вычисляют значения функции $\Psi(\alpha_0)$ и $\Delta_{\alpha_0}(t)$, полагая, что на начальном этапе $f = 0$.

Затем выбирают новое значение параметра α_s , $s \geq 1$, и повторяют процедуру численного решения уравнения (2.78), пересчитывая значения $\Psi(\alpha_s)$ и $\Delta_{\alpha_s}(t)$, полагая f равным приближенному численному решению, полученному на предыдущем этапе итерационного процесса. Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока $\Psi(\alpha_{s-1}) \geq \Psi(\alpha_s)$ и $\Delta_{\alpha_{s-1}}(t) \geq \Delta_{\alpha_s}(t)$ или пока $\|Af_\delta^{\alpha_s}\| > \varepsilon + \delta$. По завершении процесса переходят от f_δ^α к функции $F(t)$, являющейся решением задачи (2.59)– (2.62) по формуле

$$F(t) = f_\delta^\alpha + \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \varphi'(t) + \frac{x}{\ell} \psi'(t)$$

. Вычисление значений $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ осуществляют, используя конечно-разностный аналог частных производных.

Этап 3. Вычисление температур по найденной функции источника f_δ^α . Для этого используют прямую задачу (2.66), (2.67) и существующие численные методы, основанные на конечно-разностных схемах.

Отметим, что выбор параметров регуляризации N и α осуществляют на этапе компьютерного моделирования а в реальной практике параметры регуляризации N и α остаются неизменными.

Эффективность использования интегральной модели и точность предлагаемого метода решения уравнения (2.41) оценена посредством проведения вычислительный эксперимента на основе имитационного моделирования. В ходе эксперимента выполнен сравнительный анализ приближенных решений и тестовых функций.

2.4.4 Результаты вычислительного эксперимента

Основной целью эксперимента являлось исследование устойчивости предложенного метода относительно погрешности исходных данных, проверка независимости величин параметров регуляризации от характера исходных данных, а также

получение экспериментальных оценок погрешностей численного решения задачи идентификации функции источника по результатам граничных измерений.

Для проведения эксперимента вводилась равномерная сетка из $(n + 1) \times (m + 1)$ узлов. Эксперимент проводился для двух типов тестовых функций. К первому типу относятся нормированные функции $f_k(t)$, $k = \overline{1, 6}$ по нормированным переменным $\xi = \frac{x}{l}$ и $\tau = \frac{t}{T}$. Нормирование функций осуществлялось по правилу:

$$f_k(\tau) = \frac{f(\tau)}{\max_{(x,t) \in Q_T} |f(x,t)|},$$

В эксперименте первого типа были рассмотрены следующие тестовые функции:

1. Функции, соответствующие росту функции источника. Представителем данного типа является функция $f_1(\tau) = \tau e^{-\tau}$.
2. Тестовые температурные функции, соответствующие первоначальному росту и последующему уменьшению влияния функции источника. Представителями данного типа являются функции $f_2(\tau) = (1 - \tau)e^{-2\tau}$ и $f_3(\tau) = \tau(e^{-\tau} - e^{-1})$
3. Тестовые температурные функции, соответствующие попеременному росту и убыванию функции источника. Данный тип представлен $f_4(\tau) = \sin(3\pi\tau)e^{-\tau}$ и $f_5(\tau) = \sin(10\pi\tau)e^{-\tau}$
4. Тестовые температурные функции, получаемые при изменении характера функции источника во время технологического процесса. Представителем данного типа является функция $f_6(\tau) = \begin{cases} \sin(5\pi\tau) - 2.5\tau^2, & \tau \in [0; 0.5), \\ \cos(5\pi\tau), & t \in [0.5; 1]. \end{cases}$

Ко второму типу относятся тестовые функции, не подвергавшиеся нормированию:

$$f_7(t) = 18.333te^{t/60}, \quad f_8 = 0.018te^{t/60}, \quad f_9 = t\sin(0.03\pi t)e^{-t/30},$$

Основные этапы вычислительного эксперимента состояли в следующем.

Этап 1. Моделирование тестовых решений и исходных данных. С этой целью для тестовой функции f_k находим решение u_k прямой задачи (2.66), (2.67),

используя конечно-разностные уравнения. Затем моделируем значения $g(t_j)$:

$$g_\delta(t_j) = \frac{u(x_2, t_j) - u(x_1, t_j)}{h_t} + er_\delta(t_j),$$

где $h_t = T/m$, а каждое $er_\delta(t_j)$ являются значениями случайной величины, равномерно распределенной на $[-\delta; \delta]$.

Этап 2. Находим решение $f_{\delta k}^\alpha$ интегрального уравнения (2.78) с помощью предложенного численного метода. Для аппроксимации интеграла используем квадратуру правых прямоугольников.

Этап 3. Получение экспериментальных оценок уклонения численного решения от тестовых значений. С этой целью вычисляем величину $\Delta_{f_k} = \max |f_{\delta k}^\alpha - f_k|$.

Этап 4. Прогнозирование ожидаемых значений температуры u_δ^α и оценка уклонений результатов прогнозирования от тестовых значений, полученных на первом этапе вычислительного эксперимента. Для этого подставим найденные $f_{\delta k}^\alpha$ в (2.63)–(2.65), получаеме u_δ^α и вычисляем $\Delta_u = \|u_\delta^\alpha(x, t) - u_k(x, t)\|_{L_1(Q_T)}$.

Этап 5. Для исследования влияния параметров N и α на устойчивость метода повторяем этапы 2,3 для различных N и α и вычисляем Δ_f при каждом повторе.

Заметим, что результаты эксперимента показали, что достаточно реализовывать этапы 4,5 только для первого типа тестовых функций f_k , $k = \overline{1, 6}$. В работе представлены результаты вычислительного эксперимента на основе имитационного моделирования для обоих типов темтовых функций

§ 2.4.4.1 Результаты эксперимента на основе имитационного моделирования для тестовых функций первого типа

Результаты эксперимента для тестовых функций первого типа проиллюстрированы на нижеприведенных рисунках и представлены в таблицах 2–9.

На всех рисунках используются одинаковые обозначения. Одномерные рисунки иллюстрируют графики функций источника f . Обозначение "model" соответствует графикам тестовых функций f_k , $k = \overline{1, 9}$ а графики решений $f_{\delta k}^\alpha$ интегрального уравнения (2.76) обозначены как f_δ . Обозначение Δ соответствует графику функции $\Delta_{f_k} = \|f_{\delta k}^\alpha - f_k\|_{C(0, T)}$ Относительная величина погрешности, при которой проводились расчеты составляла $\delta = 0.05$.

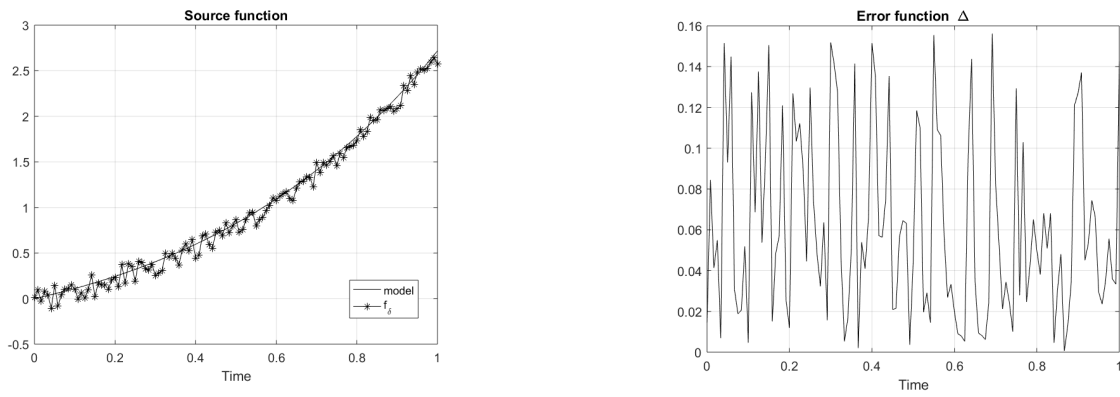


Рис. 23: Результаты идентификации функции источника для тестовых значений $f_1(\tau)$.

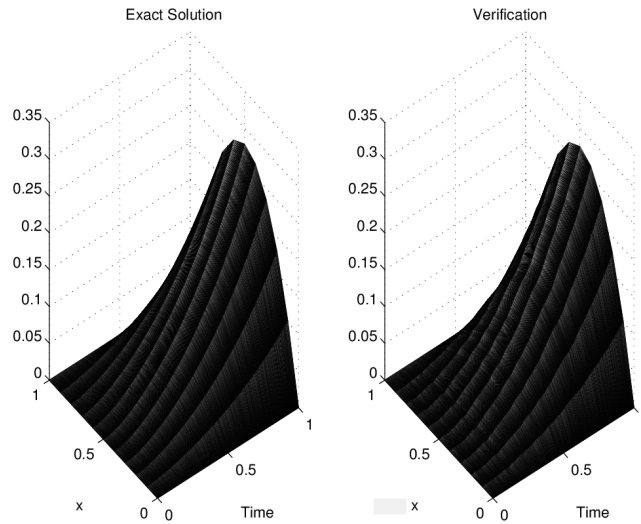


Рис. 24: Результаты моделирования температурного поля объекта по тестовой функции $f_1(t)$ и по полученной функции источника $f_{\delta 1}^{\alpha}$.

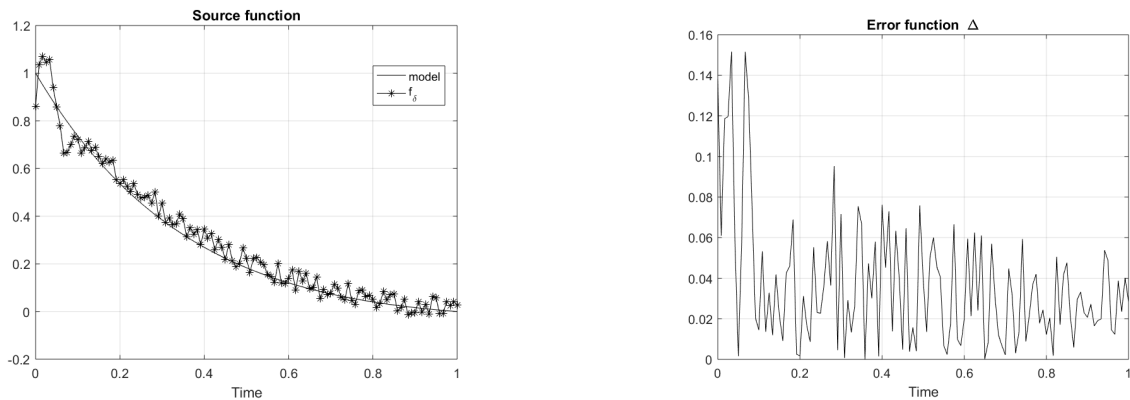


Рис. 25: Результаты идентификации функции источника для тестовых значений $f_2(\tau)$.

Двумерные поверхности, обозначенные "Exact Solution", соответствуют решениям $u_k(x, t)$ прямой задачи (2.66), (2.67), построенным для тестовых функций $f_k(t)$, $k = \overline{1, 6}$. Поверхности, соответствующие прогнозируемым температурным

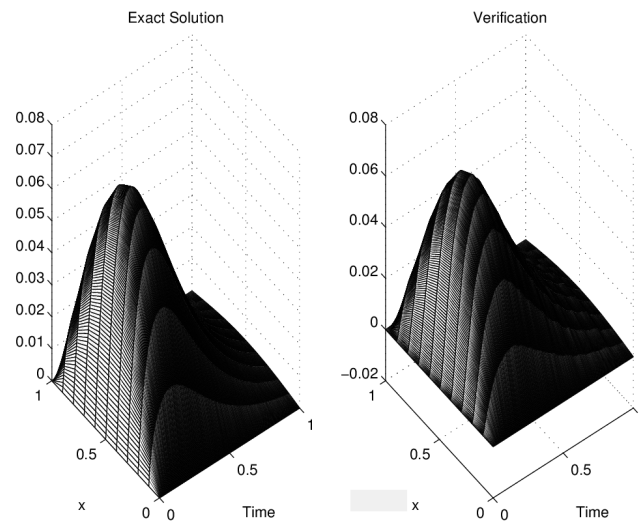


Рис. 26: Результаты моделирования температурного поля объекта по тестовой функции $f_2(t)$ и по полученной функции источника $f_{\delta 2}^{\alpha}$.

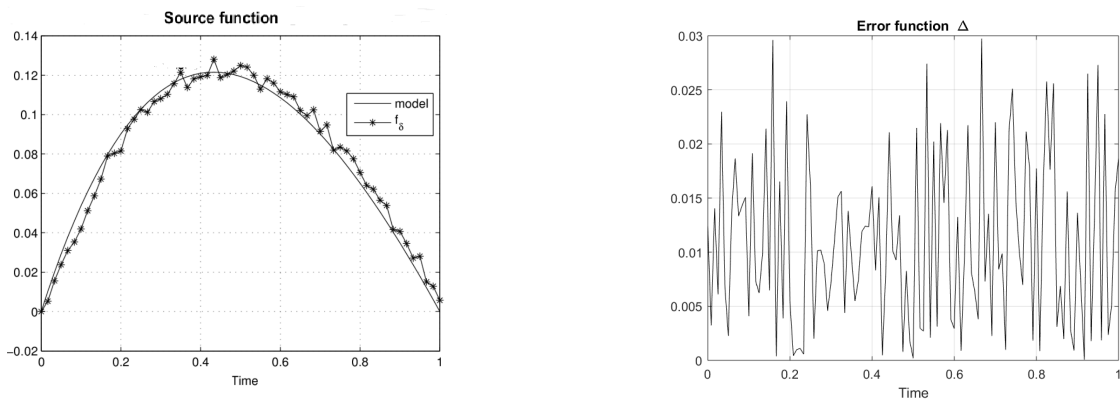


Рис. 27: Результаты идентификации функции источника для тестовых значений $f_3(\tau)$.

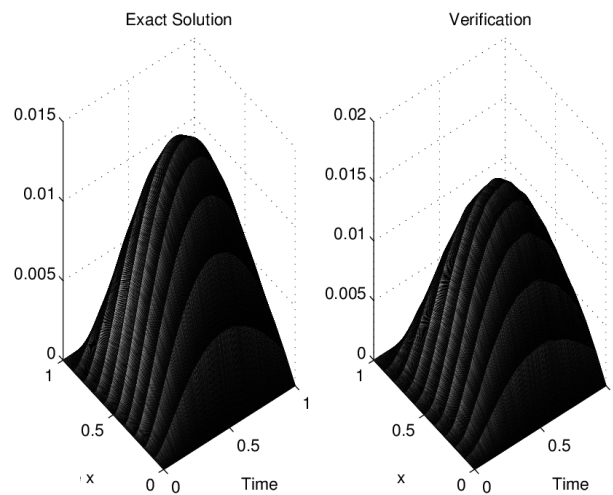


Рис. 28: Результаты моделирования температурного поля объекта по тестовой функции $f_3(t)$ и по полученной функции источника $f_{\delta 3}^{\alpha}$.

значениям, $u_{\delta}^{\alpha}(x, t)$ получаемым в результате подстановки найденных значений функции источника $f_{\delta k}^{\alpha}$ в (2.66), (2.67), обозначены как "Verification".

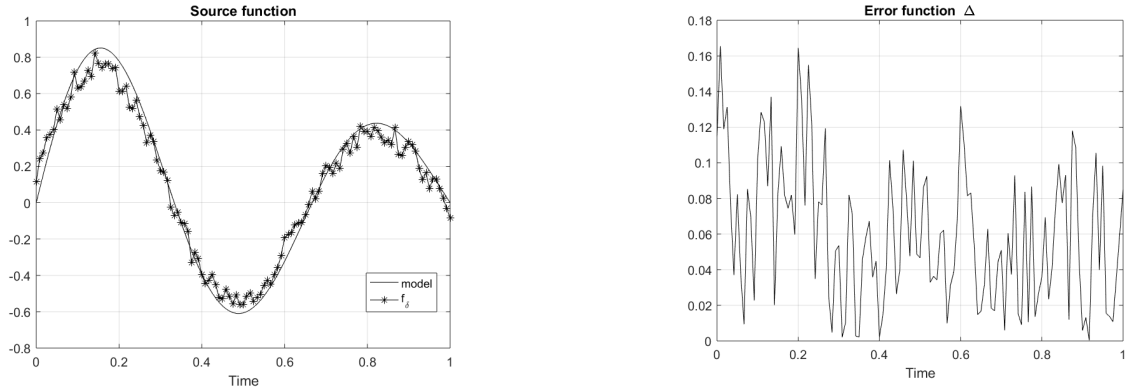


Рис. 29: Результаты идентификации функции источника для тестовых значений $f_4(\tau)$.

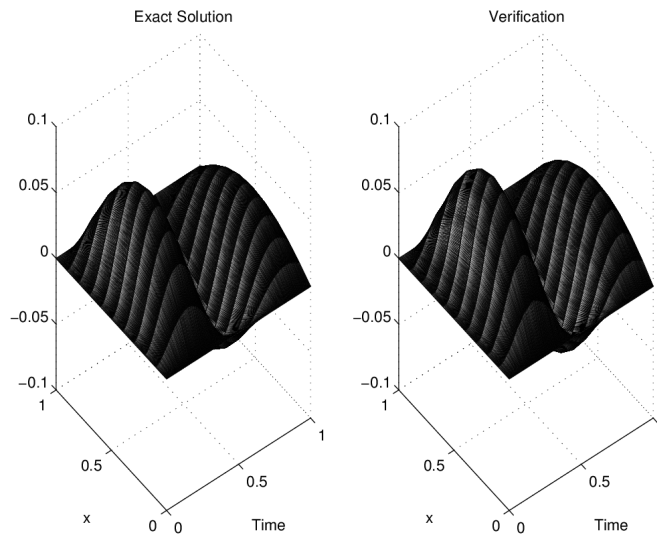


Рис. 30: Результаты моделирования температурного поля объекта по тестовой функции $f_4(t)$ и по полученной функции источника $f_{\delta 4}^{\alpha}$.

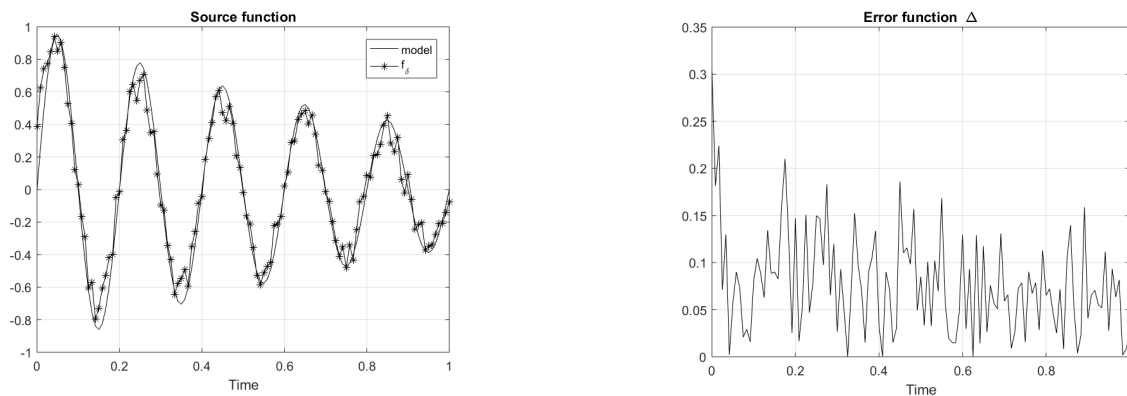


Рис. 31: Результаты идентификации функции источника для тестовых значений $f_5(\tau)$.

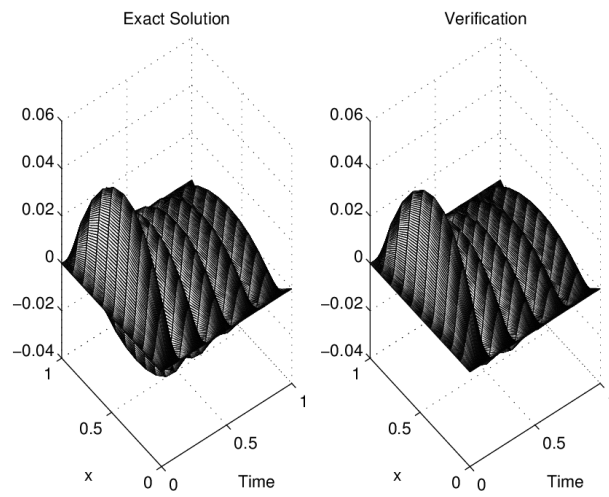


Рис. 32: Результаты моделирования температурного поля объекта по тестовой функции $f_5(t)$ и по полученной функции источника $f_{\delta 5}^\alpha$.

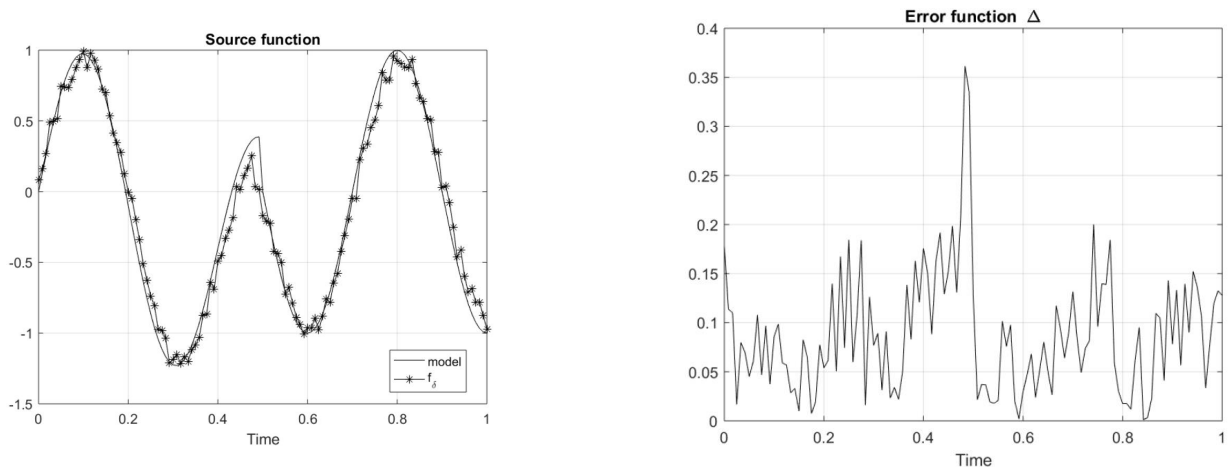


Рис. 33: Результаты идентификации функции источника для тестовых значений $f_6(\tau)$.

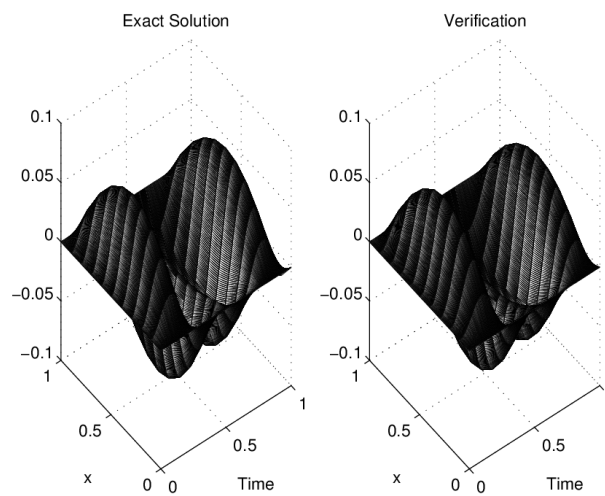


Рис. 34: Результаты моделирования температурного поля объекта по тестовой функции $f_6(t)$ и по полученной функции источника $f_{\delta 6}^\alpha$.

Таблицы 2–7 содержат результаты исследования влияния параметров N и α на погрешность решений при выбранном подходе к построению решения задачи идентификации функции источника. В таблицах представлены результаты, полученные при $\delta = 0.02$.

Таблица 2: Оценка Δ_{f_1} уклонения численного решения $f_{\delta 1}^\alpha$ от тестовой функций f_1

N	$\alpha = 10^{-3}$	$\alpha = 10^{-4}$	$\alpha = 10^{-5}$	$\alpha = 10^{-6}$	$\alpha = 10^{-7}$	$\alpha = 10^{-8}$
3	0.0557	0.0536	0.0510	0.0524	0.0529	0.0538
4	0.0548	0.0512	0.0462	0.0474	0.0480	0.0491
5	0.0425	0.0386	0.0367	0.0381	0.0402	0.0408
6	0.0478	0.0433	0.0424	0.0442	0.0455	0.0461
7	0.0521	0.0508	0.0515	0.0518	0.0522	0.0524

Таблица 3: Оценка Δ_{f_2} уклонения численного решения $f_{\delta 2}^\alpha$ от тестовой функций f_2

N	$\alpha = 10^{-3}$	$\alpha = 10^{-4}$	$\alpha = 10^{-5}$	$\alpha = 10^{-6}$	$\alpha = 10^{-7}$	$\alpha = 10^{-8}$
3	0.8210	0.8115	0.7934	0.8024	0.8212	0.8234
4	0.8181	0.8023	0.7732	0.7874	0.8034	0.8177
5	0.8052	0.7756	0.7471	0.7618	0.7945	0.8067
6	0.8137	0.7893	0.7723	0.7856	0.8076	0.8111
7	0.8164	0.8005	0.7802	0.7912	0.8085	0.8123

Таблица 4: Оценка Δ_{f_3} уклонения численного решения $f_{\delta 3}^\alpha$ от тестовой функций f_3

N	$\alpha = 10^{-3}$	$\alpha = 10^{-4}$	$\alpha = 10^{-5}$	$\alpha = 10^{-6}$	$\alpha = 10^{-7}$	$\alpha = 10^{-8}$
3	0.0290	0.0278	0.0263	0.0268	0.0272	0.0278
4	0.0274	0.0267	0.0237	0.0245	0.0248	0.0251
5	0.0253	0.0238	0.0212	0.0218	0.0421	0.0223
6	0.0264	0.0252	0.0241	0.0245	0.0251	0.0252
7	0.0270	0.0262	0.0250	0.0258	0.0262	0.0265

Целесообразность исследования влияния параметров обусловлена спецификой проведения расчетов, основанных на экспериментальных данных, когда, с одной стороны, необходимо избежать излишнего усложнения вычислительной процедуры, а с другой стороны, получить численное решение, соответствующее допустимому уровню точности, в условиях, когда характеристики шума имеют неопре-

Таблица 5: Оценка Δ_{f_4} уклонения численного решения $f_{\delta_4}^\alpha$ от тестовой функций f_4

N	$\alpha = 10^{-3}$	$\alpha = 10^{-4}$	$\alpha = 10^{-5}$	$\alpha = 10^{-6}$	$\alpha = 10^{-7}$	$\alpha = 10^{-8}$
3	0.0549	0.0543	0.0538	0.0542	0.0544	0.0546
4	0.0545	0.0539	0.0531	0.0535	0.0540	0.0542
5	0.0536	0.0529	0.0522	0.0533	0.0537	0.0539
6	0.0542	0.0536	0.0531	0.0535	0.0539	0.0542
7	0.0547	0.0542	0.0536	0.0540	0.0545	0.0549

Таблица 6: Оценка уклонения Δ_{f_5} численного решения $f_{\delta_5}^\alpha$ от тестовой функций f_5

N	$\alpha = 10^{-3}$	$\alpha = 10^{-4}$	$\alpha = 10^{-5}$	$\alpha = 10^{-6}$	$\alpha = 10^{-7}$	$\alpha = 10^{-8}$
3	0.1157	0.1154	0.1141	0.1143	0.1145	0.1146
4	0.1153	0.1115	0.1132	0.1134	0.1137	0.1141
5	0.1147	0.1143	0.1112	0.1118	0.1122	0.1127
6	0.1149	0.1146	0.1127	0.1129	0.1131	0.1133
7	0.1151	0.1147	0.1135	0.1136	0.1136	0.1137

Таблица 7: Оценка Δ_{f_6} уклонения численного решения $f_{\delta_6}^\alpha$ от тестовой функций f_6

N	$\alpha = 10^{-3}$	$\alpha = 10^{-4}$	$\alpha = 10^{-5}$	$\alpha = 10^{-6}$	$\alpha = 10^{-7}$	$\alpha = 10^{-8}$
3	0.0842	0.0838	0.0836	0.0839	0.0841	0.0840
4	0.0834	0.0832	0.0826	0.0830	0.0837	0.0839
5	0.0828	0.0817	0.0811	0.0819	0.0825	0.0827
6	0.0830	0.0825	0.0819	0.0827	0.0828	0.0829
7	0.0832	0.0831	0.0827	0.0829	0.0830	0.0831

деленную структуру. Другая цель данного исследования заключается в проверке возможности формирования набор параметров (N, α) , не зависящего от характера выбранного управляющего режима воздействия $g(t)$, формируемого на основании температурных измерений $\varphi(t), \psi(t), G(T)$, и позволяющего определять влияние функции источника $f(t)$ с достаточной точностью.

Результаты исследования влияния параметров N и α выявили принципиальную возможность существования параметров регуляризации $(N(\delta), \alpha(\delta))$, позволяющим при заданном δ идентифицировать функцию источника с достаточной точностью и не зависящих от характеристик выбранного управляющего воздействия.

Оценки $\Delta_{f_k}^{opt} = \min_{\alpha, N} \Delta_{f_k}$, характеризующие отклонения найденных функции источника от тестовых значений и и оценки $\Delta_u^{opt} = \max_{\alpha, N} \Delta_u$, характеризующие отклонений прогнозируемых тепловых полей от тестовых величин представлены в Таблицах 8, 9. Оценки получены при различных δ и оптимальных значениях параметров $N(\delta) \simeq 5$ и $\alpha(\delta) \simeq 10^{(-5)}$, .

Таблица 8: Экспериментальные оценки уклонений $\Delta_{f_k}^{opt}$

δ	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
0.02	0.0367	0.7471	0.0212	0.0522	0.1112	0.0811
0.05	0.0549	0.8551	0.0438	0.0732	0.1562	0.1672
0.1	0.0778	0.7878	—	0.1723	0.1885	0.2060

Таблица 9: Экспериментальные оценки уклонений Δ_u^{opt}

δ	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
0.02	0.0076	0.0174	0.0125	0.0169	0.0188	0.0215
0.05	0.0218	0.0230	0.0251	0.0198	0.0202	0.0243
0.1	0.0267	0.0272	—	0.0274	0.0291	0.0304

§ 2.4.4.2 Результаты эксперимента на основе имитационного моделирования для тестовых функций второго типа

В данном разделе приведены результаты вычислительного эксперимента на основе имитационного моделирования для тестовых функций, значения которых приведены в соответствие с температурными значениями, измеренными в $^{\circ}C$, а переменная по времени приведена в соответствие с минутами. Обозначения на рисунках 35–37 идентичны обозначениям, используемых на одномерных графиках, приведенным для тестовых функций f_k , $k = \overline{1, 6}$ первого типа.

Для тестовых функций второго типа также проводились исследования влияния параметров N и α на погрешность решений при выбранном подходе к построению решения задачи идентификации функции источника, подтвердившие независимость величин параметров от характеристик управляющего воздействия $g(t)$ и неизменность порядка параметров при проведении имитационного моделирова-

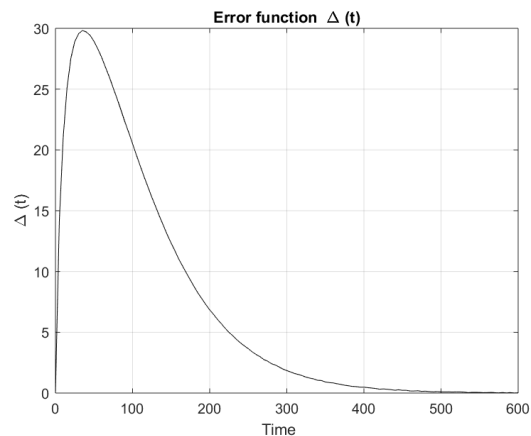
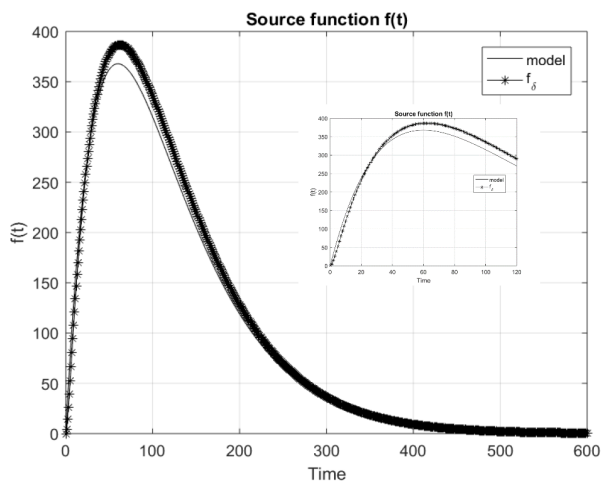


Рис. 35: Результаты идентификации функции источника для тестовых значений $f_7(t)$.

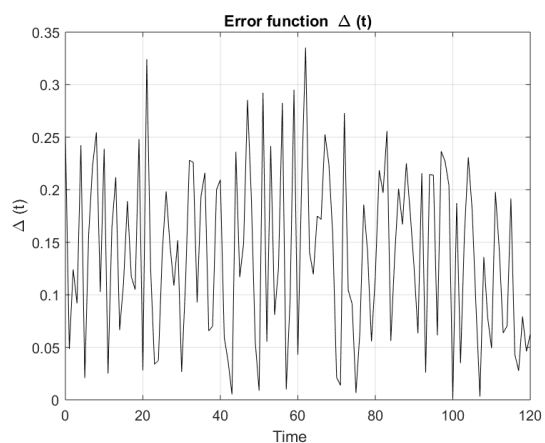
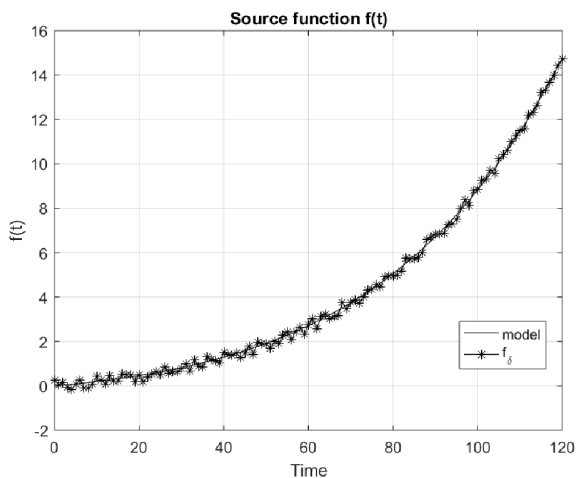


Рис. 36: Результаты идентификации функции источника для тестовых значений $f_8(t)$.

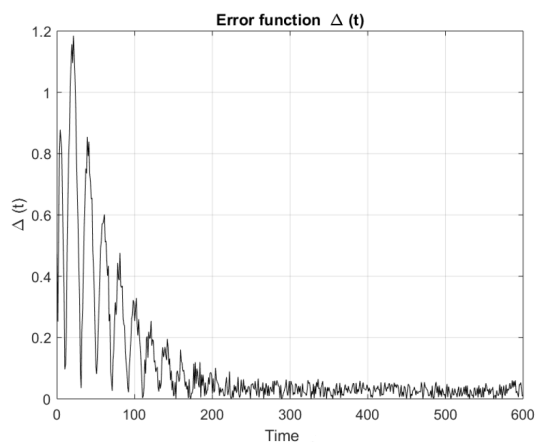
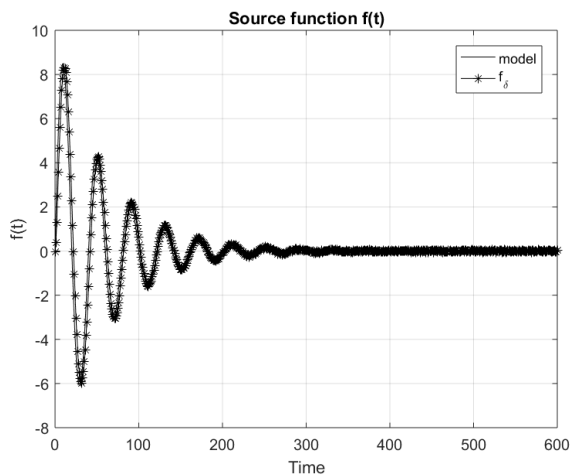


Рис. 37: Результаты идентификации функции источника для тестовых значений $f_9(t)$.

ния для функций второго типа. В таблице 10 приведены значения погрешности $\Delta_{f_k}^{opt}$, полученные для оптимальных значений параметров $N = 5$ и $\alpha(\delta) \asymp 10^{(-5)}$.

Таблица 10: Экспериментальные значения $\Delta_{f_k}^{opt}$

δ	f_7	f_8	f_9
0.02	28.4542	0.3423	1.1771
0.05	32.5912	0.4587	2.0823
0.1	34.5643	0.7675	2.6597

Результаты эксперимента приводят к следующим выводам. Предложенный подход, основанный на использовании интегральной модели, позволяет построить приближенные решения с достаточным уровнем точности. Изменения характеристик управляющего режима теплового воздействия не оказывают существенного влияния на величину погрешности найденных функций источника. Величина параметров регуляризации не зависит от характеристик выбранного управляющего воздействия, представленного функцией $g(x)$, поэтому выбор параметров α и N осуществляется на этапе компьютерного моделирования технологического процесса. Приближенные решения задачи измерения служат основой для прогнозирования ожидаемых температурных значений, получаемых в результате выбранного управляющего режима теплового воздействия, что приводит к повышению точности определения температур и позволяет сформировать управляющий режим воздействия на этапе имитационного моделирования, что, в свою очередь, позволяет снизить объемы ресурсов, необходимых для получения желаемого температурного поля.

2.5 Основные результаты и выводы

В работе рассмотрены задачи измерения, связанные с обработкой информации при линейном теплопереносе в системах с распределенными параметрами при известной начальной температуре, когда требуется по результатам измерения температурных функций на поверхности или определить температуру в контрольной точке или идентифицировать функцию внутреннего теплового источника.

В работе предложен единый подход к построению математической модели определения температуры при линейном теплопереносе и математической модели иден-

тификации влияния функции внутреннего теплового источника, приводящий к интегральным уравнениям Вольтерра, характеризующих явную зависимость температуры в контрольной точке или функции внутреннего источника от выбранного управляющего режима внешнего теплового воздействия, когда требуемые параметры системы непосредственно определяются из результатов поверхностных измерений температуры, содержащих отклонения от действительных значений. Интегральные модели построены посредством применения прямого и обратного преобразований Лапласа.

На основе полученных теоретических результатов в работе сформирован единый подход к построению методов обработки температурных измерений, позволяющий прогнозировать температуру в контрольной точке и метода, позволяющего определять функцию внутреннего источника. Предложенные вычислительные схемы методов включают использование регуляризирующих функционалов, что обеспечивает устойчивость методов относительно погрешности исходных данных при фиксированном интервала измерений по времени. Устойчивость и достаточная точность методов прогнозирования температурных значений и метода идентификации функции источника подтверждается результатами вычислительных экспериментов.

Результаты исследования, связанные с разработкой метода прогнозирования температуры в контрольной точке и идентификации функции внутреннего источника, свидетельствуют об эффективности использования предложенных подходов в ситуации, когда основные характеристики процесса: теплоемкость, теплопроводность, плотность материала претерпевают несущественные изменения, не оказывающие значительного влияния на искомые значения.

Полученные результаты приводят к следующим выводам:

- Для задач определения температуры в контрольной точке и задачи идентификации внутреннего теплового источника выявлена принципиальная возможность разработки единого подхода к построению математических моделей задач измерения, заключающегося в переходе от исходных обратных задач к интегральным уравнениям.

- Существенное преимущество интегрального подхода заключается в том, что получаемые интегральные уравнения характеризуют явную зависимость требуемых температурных значений от исходных данных, а элементы операционного исчисления реализуются на этапе аналитического построения модели и исключаются из вычислительной процедуры.
- Разработанные методы обработки результатов измерений температурных функций вблизи поверхности, являются устойчивыми относительно погрешности исходных данных и позволяют прогнозировать температуру в контрольной точке в текущий момент времени с достаточной точностью.
- Результаты сравнительного анализа методов определения температуры в контрольной точке показали, что метод, основанный на использовании интегральной модели, менее зависим от уровня погрешности исходных данных и не требует существенных перестроений вычислительной схемы, чем оптимальный по порядку метод. Использование интегральной модели для прогнозирования температуры в контрольной точке предпочтительнее в ситуации, когда необходимо сохранить точность определения температуры при изменяющемся уровне погрешности исходных данных.
- При изменении характеристик режима внешнего теплового воздействия, сохраняется порядок величины погрешности температурных значений, получаемых предложенными методами.
- Разработанный метод идентификации внутреннего теплового источника позволяет непосредственно получать функцию источника из результатов граничных измерений в соответствии с единым подходом и служит основой для построения метода контроля внутреннего теплового источника по времени.
- Результаты вычислительного эксперимента свидетельствуют об устойчивости метода идентификации функции источника относительно уровня погрешности исходных данных.
- Оценки уклонений вычисленной функции источника от тестовых значений, полученные при проведении вычислительного эксперимента, согласуются с теоре-

тическими результатами и свидетельствуют о достаточной точности предложенного метода.

Предложенные методы решения задач теплопереноса, связанные с определением температуры в контрольной точке по результатам поверхностных измерений и идентификацией функции внутреннего источника, служат основой для прогнозирования температурных значений, получаемых в результате выбранного управляющего режима теплового воздействия, позволяют повысить точность прогнозирования температур и сформировать управляющий режим воздействия более оптимально на этапе компьютерного моделирования технологического процесса, что, в свою очередь приводит к снижению затрат.

Научная новизна результатов исследования, представленных в данном разделе, заключается в создании единого подхода к решению задач измерения, связанных с прогнозированием температур и идентификацией внутреннего источника в системах с распределенными параметрами, а также в разработке вычислительных алгоритмов, устойчивых относительно погрешности исходных данных и позволяющих определять температуру или функцию внутреннего источника непосредственно из результатов измерений.

Практическая значимость полученных результатов состоит в разработке алгоритмов прогнозирования влияния выбранного внешнего управляющего режима теплового воздействия на значения температур в контрольной точке объекта в условиях неполных и динамически изменяющихся исходных данных, а также в разработке алгоритма идентификации внутреннего источника, позволяющих повысить точность прогнозирования температурных полей. Предложенные алгоритмы могут служить основой для выбора управляющего режима внешнего теплового воздействия, обладающего оптимальными параметрами и формируемого на этапе компьютерного моделирования технологического процесса.

Глава 3. Методы обработки информации в задачах линейного теплопереноса в объектах с неизвестным начальным тепловым состоянием

В данном разделе рассмотрена задача линейного теплопереноса в системах с распределенными параметрами и неизвестной начальной температурой. Системы представлены линейным объектом или объектом, имеющим кусочно-линейную границу.

В работе впервые сформирован подход к построению алгоритмов решения обратных задач с неизвестными начальными условиями, соответствующих задаче прогнозирования температуры во внутренних точках объекта с неизвестным начальным тепловым состоянием, подвергаемого внешнему тепловому воздействию и впервые предложены вычислительные схемы определения температурных полей объекта с неизвестным начальным тепловым состоянием. Найдены условия, гарантирующие устойчивость вычислительных схем. Получены теоретические оценки погрешностей приближенных решений задачи измерения, связанные с оценкой наибольших температурных отклонений.

В работе также представлены результаты вычислительного эксперимента, выполненного на основе имитационного моделирования. В эксперименте проводился сравнительный анализ температур, полученных с помощью разработанных вычислительных схем, с тестовыми функциями, а также найдены оценки отклонений численных решений от тестовых значений.

3.1 Основные предпосылки и обобщенная математическая модель задач измерения, связанных с теплопереносом в объектах с неизвестным начальным состоянием

В данном разделе представлены математические модели задач измерения, связанных с теплопереносом в линейном объекте и объекте с кусочно-линейной границей. Показано, что в ситуации, когда основные теплофизических свойств материала зависят от пространственно-временных характеристик, обе задачи сводятся

к единой форме представления в виде обобщенной обратной граничной задачи для линейного параболического уравнения с неизвестными начальными условиями.

3.1.1 Основные предпосылки задачи измерения, связанной с линейным теплопереносом в неоднородном теле

Основные предпосылки обобщенной математической модели задачи измерения, связанной с процессом теплопереноса в системах с распределенными параметрами и неизвестным начальным состоянием заключаются в следующем.

Объект подвергается внешнему тепловому воздействию продолжительностью T . Начальный момент времени определяется началом воздействия выбранного теплового режима. Управление внешним тепловым режимом реализуется посредством регулирования интенсивности нагрева или охлаждения объекта. С момента начала до момента окончания T внешнего теплового воздействия проводят $M + 1$ измерения температурных функций в граничной области объекта. Согласно требованиям, предъявляемым к технологическому процессу, при его реализации недопустимы резкие изменения интенсивности внешнего нагрева или охлаждения, а также большие перепады температурных градиентов внутри тела.

Граничные условия формируют, основываясь на результатах измерений и характеристиках внешнего теплового воздействия. В ситуации, когда внешнее тепловое воздействие одинаково в каждой точке внешней границы тела и изменяется только по времени, в качестве системы с распределенными параметрами рассматривают линейный объект, а задача определения температуры во внутренних точках сводится к задаче определения температуры в линейном объекте с граничными условиями, известными на одной из границ. Схемы измерений в линейном объекте представлены на рис.38.

В ситуациях, когда специфика оборудования, используемого в технологическом процессе, позволяет располагать датчики, измеряющие температуру, только вдоль некоторой части границы объекта, или внешнему воздействию подвергается только часть граничной области, а также в ситуации, когда внешнее воздействие изменяется не только по времени, но и в зависимости от пространственных

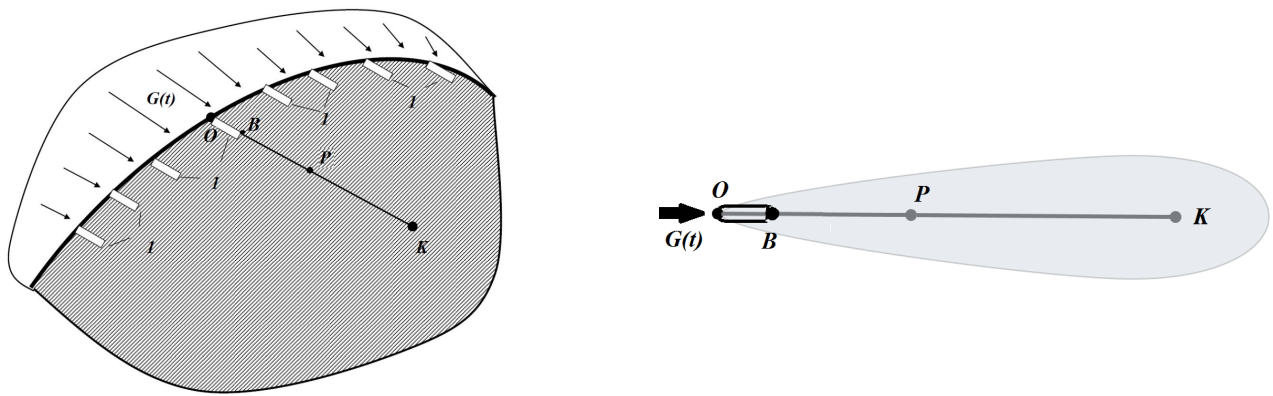


Рис. 38: Схема измерения при теплопереносе в линейном объекте. O , B – точки, в которых проводятся измерения, P – внутренняя точка, а K – контрольная точка, в которой требуется определить температуру, 1 – датчики

характеристик объекта, система с распределенными параметрами представлена объектом с кусочно-линейной границей, а математическая модель задачи теплопереноса включает параболическое уравнение для нескольких пространственных переменных и граничные условия, заданные на части границы. Схема внешнего воздействия в объекте с кусочно-линейной границей представлена на рис.39.

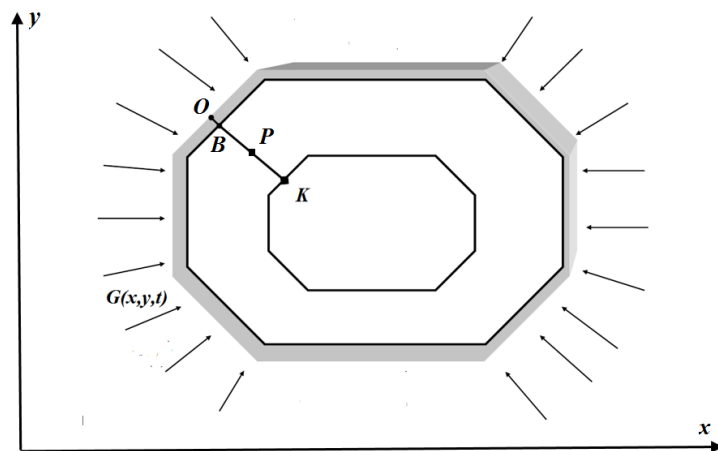


Рис. 39: Теплоперенос в объекте с кусочно-линейной границей. O , B – точки, в которых проводятся измерения, P – текущая точка, а K – контрольная точка.

Существенная особенность технологических процессов, связанных с задачами измерения, рассматриваемых в данном разделе, заключается в том, что, с одной стороны, установить датчики контроля или регулировать интенсивность внешнего теплового воздействия возможно только вдоль некоторой части границы объекта,

а, с другой стороны, невозможно измерить начальную температуру внутри всего тела без нарушения целостности объекта. Такая ситуация возникает в системах вторичной термической обработки при горячей прокатке, при комплексной термообработке изделий, при тепловом мониторинге работающих систем и механизмов (контроль за температурой валков прокатного стана), при проведении неразрушающего теплового контроля заготовок труб. Это приводит к тому, что исходные данные формируются только на некоторой части границы, а математические модели процессов теплопереноса в таких объектах представлен обратными задачами с граничными условиями, заданными на части границы и неизвестными начальными условиями.

В рассматриваемых задачах теплопереноса требуется определить температуру во внутренних точках P вплоть до контрольных точек K , расположенных в направлении действия внешнего теплового потока.

3.1.2 Обобщенная математическая модель задачи измерения, связанной с линейным теплопереносом в неоднородном теле

Обобщенная математическая модель теплопереноса имеет следующий вид. Объекту, в которой происходит теплоперенос, соответствует множество Ω , границе области соответствует множество $\partial\Omega$, а поверхности, вблизи которой проводятся измерения, соответствует множество Γ , вектор n определяет нормаль к поверхности Γ . Отметим, что Γ может совпадать с $\partial\Omega$, либо являться ее частью, $\Gamma \subseteq \partial\Omega$. Температура в текущей точке P характеризуется функцией $u(P, t)$. Воздействие внешнего источника отлично от нуля и в каждой точке $O \in \Gamma$ и характеризуется функцией $G(\Gamma, t)$.

Согласно результатам, представленными в работах [6], [163], [195] общее уравнение теплопереноса в системах с распределенными параметрами, подвергаемых внешнему тепловому воздействию, имеет вид

$$c(u, t) \rho(u, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(u, t) \nabla u) + F_H(P, t), \quad P \in \Omega, t \in (0, T). \quad (3.1)$$

где $c(u, t)$ – коэффициент удельной теплоемкости, $\lambda(u, t)$ – коэффициент теплопроводности, $\rho(u, t)$ – плотность материала, $F_H(P, t) = h(P, t) \theta(P, t) c(P, t) \rho(P, t) +$

$F(P, t)$, в котором $h(P, t)$ – коэффициент теплообмена с окружающей средой, $\theta(P, t)$ – температура окружающей среды и $F(P, t)$ – плотность мощности внутреннего теплового источника. Тепловому режиму, оказывающему внешнее воздействие, соответствуют граничные условия

$$u|_{\Gamma} = p(\Gamma, t), \quad -\lambda(u, t) \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = G(\Gamma, t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.2)$$

Функции $p(\Gamma, t)$, $G(\Gamma, t)$ формируется из результатов температурных измерений на поверхности Γ и характеристик выбранного режима внешнего теплового воздействия. Функция $G(\Gamma, t)$ характеризует плотность внешних тепловых потоков.

Основываясь на специфике технологических процессов, рассматриваемых в данном разделе, получаем, что начальная температура $u(P, 0)$ во внутренних точках объекта не может быть определена из результатов измерений и в обратной задаче теплопереноса (3.1), (3.2) начальные условия $u(P, 0)$ неизвестны.

Исходя из того, что в процессе теплопереноса, недопустимы резкие изменения теплофизических свойств материала, полагаем, что коэффициентные функции $c, \rho, \lambda \in C^2(\overline{\Omega_T})$, а функция $u(P, t) \in H^{3+\zeta, 2}(\Omega_T) \cap H^{2, 1}(\overline{\Omega_T})$, $\zeta \in (0, 1)$ и существуют $\Phi, \beta, C > 0$ такие, что

$$\left\{ \max_{\Omega_T} |\partial^2 u_t|, \max_{\Omega_T} |\partial^2 u_P|, \max_{\Omega_T} |\partial^3 u_P| \right\} \leq C, \quad (3.3)$$

$$\max_{\Omega_T} |u(P, t)| \leq \Phi e^{\beta(\|OP\|+t)}.$$

где $\|OP\|$ – расстояние от граничной точки O до текущей точки P .

При построении численного решения задачи (3.1), (3.2) необходимо учитывать, что результаты граничных измерений неизбежно содержат отклонения от действительных значений, но допустимый уровень этих отклонений не должен превосходить величины δ . Эта ситуация отражена следующим образом. Вместо действительных значений $p(\Gamma, t)$, $G(\Gamma, t)$ известны измеренные значения p_{δ}, G_{δ} и δ , такие, что $\max \{ \|p - p_{\delta}\|, \|G - G_{\delta}\| \} \leq \delta$

В этих условиях необходимо разработать алгоритм решения обратной задачи (3.1), (3.2) с неизвестными начальными условиями, служащий основой для формирования метода прогнозирования температуры $u(P, t)$ во внутренних точках

тела с неизвестным начальным тепловым состоянием, устойчивый относительно погрешности исходных данных, а также оценить погрешность получаемых значений $u(P, t)$ в соответствующей подобласти. Математически, в рассматриваемой задаче теплопереноса требуется найти функцию $u(P, t)$, удовлетворяющую (3.1), (3.2) в области Ω , а также найти граничную функцию

$$u|_{\partial\Omega/\Gamma} = \varphi(x, t) \quad (3.4)$$

в тех граничных точках, где значения $u(P, t)$ неизвестны.

3.1.3 Постановка задачи измерения, связанной с линейным теплопереносом в неоднородном объекте

Следуя [110], [136], [163], в линейном приближении, полагают, что неизвестная температурная функция $u(P, t)$ и теплофизические свойства материала: плотность материала ρ , коэффициент удельной теплоемкости c , коэффициент теплопроводности λ изменяются с течением времени в зависимости от координат (x_1, x_2, x_3, \dots) выбранной текущей точки объекта $P = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. Тогда обобщенная математическая модель линейного теплопереноса имеет следующий вид. Объект представлен ограниченной замкнутой областью $\Omega \subset R^m$ с границей $\partial\Omega$. Каждая точка объекта P характеризуется координатами $P = x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, а множество $\Omega_T = \Omega \times (0; T)$. Поверхности, доступной для измерения, соответствует множество $\Gamma \subset \partial\Omega$. Температуре тела соответствует функция $u(x, t)$, а теплофизические свойства материала характеризуются функциями $\rho = \rho(x, t)$, $c = c(x, t)$ и $\lambda = \lambda(x, t)$. Влияние теплообмена с окружающей средой представлено температурой окружающей среды θ и коэффициентом теплообмена с окружающей средой $h(x, t)$. Введем в рассмотрение безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} a(x, t) &= \frac{\lambda(x, t)}{c(x, t)\rho(x, t)}, & b(x, t) &= \frac{\lambda_x(x, t)}{c(x, t)\rho(x, t)}, \\ \gamma(x, t) &= \frac{-h(x, t)}{c(x, t)\rho(x, t)}, & f(x, t) &= h(x, t)\theta(x, t) + \frac{\lambda_x(x, t)}{c(x, t)\rho(x, t)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\lambda_x(x, t)$ характеризует скорость пространственных изменений теплопроводности. Раскрывая оператор дивергенции в (3.1) и выполняя соответствующие

преобразования, получаем, что математическая модель обобщенной задачи измерения имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{s,k=1}^m a_{sk}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_k} + \sum_{k=1}^m b_k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_k} + \gamma(x,t)u + f(x,t) \quad (3.6)$$

$$u(x,t) |_{\Gamma} = p(x,t), \quad \frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma} = g(x,t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.7)$$

где $a_{sk} = \lambda(x,t)$, $b_k = \frac{\partial \lambda}{\partial x_k}$, функция $g(x,t) = -\frac{G(x,t)}{\lambda(x,t)}$, а вектор n является нормалью к поверхности $\partial\Omega$.

Принимая во внимание, что, согласно требованиям, предъявляемым к технологическому процессу, при его реализации недопустимы резкие изменения интенсивности внешнего теплового режима воздействия, а также большие перепады температурных градиентов внутри тела, то, учитывая соотношение (3.3), полагаем, что существуют $\Phi, \beta, C > 0$ такие, что

$$\left\{ \max_{\Omega_T} |\partial^2 u_t|, \max_{\Omega_T} |\partial u_x|, \max_{\Omega_T} |\partial^2 u_x|, \max_{\Omega_T} |\partial^3 u_x| \right\} \leq C, \quad (3.8)$$

$$\max_{\Omega_T} |u(x,t)| \leq \Phi e^{\beta(x+t)}.$$

а коэффициенты уравнения (3.6) удовлетворяют условиям: $a_{sk}(x,t) \in C^1(\Omega_T)$, $b_k(x,t) \in C(\Omega_T)$, $s, k = 1..m$, $\gamma(x,t), f(x,t) \in C(\Omega_T)$ и

$$\varrho_1 |\xi|^2 \leq a_{sk}(x,t) \xi_i \xi_j \leq \varrho_2 |\xi|^2, \quad (x,t) \in \overline{\Omega_T}$$

где ϱ_1, ϱ_2 – фиксированные числа, а $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ – произвольный вещественный вектор. Так как в начальный момент времени невозможно определить температуру во внутренних точках объекта без нарушения его целостности, получаем, что начальные условия не могут быть сформированы из результатов измерений и являются неизвестными.

В задаче (3.6), (3.7) требуется найти значения $u(x,t)$, соответствующие температуре во внутренних точках объекта, а также найти граничную функцию

$$u(x,t) |_{\partial\Omega/\Gamma} = \varphi(x,t) \quad (3.9)$$

в тех точках, где она неизвестна.

В работе [90] доказано существование решения задачи (3.6), (3.7), а также показана его единственность в нормированной области

$$\Omega_\eta = \left\{ (x, t) : 0 < x_1 < \frac{1}{2} \left(2\eta - \frac{1}{X} \sum_{k=2}^m x_k^2 - \frac{t^2}{\Theta^2} \right) \right\}$$

где величина $0 < \eta < \frac{1}{2}$, нормированная переменная $t \in (0, \Theta)$ и $0 < \Theta < 1$, а x_k характеризует нормированную k -ю пространственную координату внутренней точки объекта и $0 < X < 1$.

Ситуации, когда исходные данные содержат отклонения от действительных значений соответствуют следующие ограничения. Известно, что действительных значениях $p(x, t) = p_0(x, t)$ и $g(x, t) = g_0(x, t)$ существует точная функция $u_0(x, t)$, удовлетворяющая (3.6), (3.7), но вместо $p_0(x, t)$, $g_0(x, t)$ известны измеренные значения $p_\delta(x, t)$, $g_\delta(x, t)$ и допустимый уровень δ такие, что

$$\max \{ \|p_0 - p_\delta\|, \|g_0 - g_\delta\| \} < \delta.$$

Основываясь (3.6), (3.7) и (3.8), требуется разработать метод определения функции $u(x, t)$ по приближенным исходным данным p_δ , g_δ и δ в области Ω_η устойчивый относительно погрешности исходных данных.

Отметим, что в силу того, что в рассматриваемых задачах теплопереносе необходимо определить температуру в техническом объекте с определенными пространственными характеристиками, то нормируемое пространство X представлено m -мерным евклидовым пространством R^m и $\Omega \subset R^m$, где $m = 1, 2, 3$.

3.1.4 Операторное представление

Рассматриваемая задача измерения допускает операторное представление, аналогичное сформулированному в разделе 2.1, основные положения которого заключаются в следующем. Пусть Ω – выпуклое, замкнутое ограниченное множество нормируемого пространства X с границей $\partial\Omega$ соответствует объекту, в котором происходит теплоперенос. Области, доступной для измерения, соответствует множество $\Gamma \subseteq \partial\Omega$. Текущему моменту времени, в котором проводятся измерения, соответствует элемент $t \in (0, T)$ при всех $T > 0$. Обозначим $\Omega_T =$

$\Omega \times (0, T)$, замыканию Ω_T соответствует множество $\overline{\Omega_T} = \overline{\Omega} \times [0, T]$, а множество Γ_T определяется соотношением $\Gamma_T = \Gamma \times [0, T]$. Искомой функции $u(x, t)$ соответствует элемент u некоторого нормируемого пространства U . Функции $F_H(x, t)$ и $F(x, t)$ соответствует элемент f нормируемого пространства H , исходным данным $p(t), G(t)$ – элементы p, g соответствующих нормируемых пространств. Введем в рассмотрение оператор:

$$A = \frac{\partial}{\partial t} - \left(\sum_{m,l=1}^n a_{ml}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_l} + \sum_{l=1}^n b_l(x, t) \frac{\partial}{\partial x_l} + \gamma(x, t) \right)$$

Оператор A характеризует зависимость u от f или от исходных данных p, G . Область определения оператора $D_A \subseteq U$, а область значений $F_A \subseteq F$. Тогда (3.6), (3.7) имеет следующее операторное представление

$$Au = f, \quad u \in U, f \in F, \quad (3.10)$$

$$u|_{\Gamma} = p, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = g, \quad (3.11)$$

где n – вектор нормали к поверхности Γ .

Согласовывая требования технологического процесса об отсутствии резких перепадов градиентов температур внутри тела, принимая во внимание инертность теплопереноса в теле и учитывая (3.8) получаем, что $u \in H^{3+\zeta, 2}(\Omega_T) \cap H^{2, 1}(\overline{\Omega_T})$, $\zeta \in (0, 1)$, и $p \in H^{2+\zeta, 1}(\Gamma_T)$ и $g \in H^{1+\zeta, 1}(\Gamma_T)$, а $f \in C(\overline{\Omega_T})$.

В этой задаче требуется найти элемент u , удовлетворяющую (3.10), (3.11) при соблюдении указанных условий, а также найти граничную функцию

$$u(x, t)|_{\partial\Omega/\Gamma} = \varphi \quad (3.12)$$

такую, что $\varphi \in H^{2, 1+\varsigma}(\partial\Omega \times [0, T])$, где $\varsigma \in (0, 1)$. Из результатов, представленных в работах [92] и [90], следует существование решения задачи (3.10), (3.11), а его единственность в некоторой области Ω_η обоснована в [90].

Ситуации, когда измерения, служащих основой для исходных данных, содержат отклонения от действительных значений соответствуют следующие ограничения. Известно, что при некоторых p_0 и g_0 существует точное решение u_0 , удовлетворяющая (3.10)–(3.12), но вместо p_0, g_0 известны приближения p_δ, g_δ и допустимый уровень погрешности δ такие, что $\max \left\{ \max_{\Omega_T} \|p_0 - p_\delta\|, \max_{\Omega_T} \|g_0 - g_\delta\| \right\} < \delta$.

В этих условиях требуется разработать метод определения u в области Ω_η устойчивый относительно погрешности исходных данных δ .

Неустойчивость задачи (3.10), (3.11) относящейся к классу обратных задач, обоснована в работах [62], [93], [103], [90], [158], таким образом, для построения решения задачи измерения, связанных с рассматриваемыми процессами теплопереноса необходимо разрабатывать методы, основываясь на использовании регуляризирующих подходов.

3.2 Математические модели задач измерения, связанных с технологическими процессами теплопереноса в объектах с неизвестным начальным тепловым состоянием

В данном разделе приведены математические модели процессов теплопереноса, сводящихся к решению обратных задач с неизвестными начальными условиями а также сформулирована обобщенная математическая модель задачи измерения в системах с неизвестным начальным состоянием.

3.2.1 Математические модели задач измерения, связанной с высокотемпературными процессами теплопереноса при горячей прокатке

В данном разделе приведена математическая модель задачи измерения, связанная с теплопереносом в технологическом процессе формирования сляба из жидкого металла на машинах непрерывного литья заготовок. Общая схема машины непрерывного литья заготовок рассмотрена в [1], [105] и представлена на рис. 40, процесс формирования твердой фазы проиллюстрирован на рис.41.

Формирование твердой фазы происходит в результате воздействия выбранного теплового режима, действующего на поверхность сляба. Для получения требуемых теплофизических свойств слитка необходимо разработать метод, позволяющий по результатам измерений, полученным от температурных датчиков, вычислять температуру во внутренних точках сляба. Результаты прогнозирования служат основой для выбора параметров режима теплового воздействия на внешнюю поверхности слитка, формирующего желаемое температурное поле сляба. Экспе-



Рис. 40: Общая схема машины непрерывного литья заготовок.

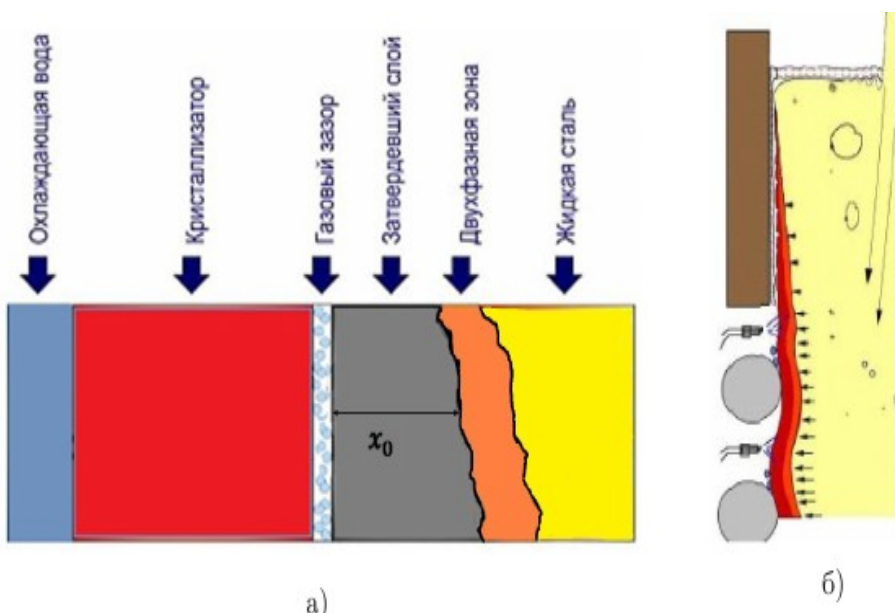


Рис. 41: Формирование твердой фазы в результате внешнего воздействия

риментальному исследованию связи между параметрами режима охлаждения и температурой на поверхности сляба посвящены, например, работы [105], [165].

Контроль за реализацией выбранного внешнего теплового режима осуществляется посредством измерения температуры вблизи поверхности кристаллизатора. Схема одного из возможных измерительных блоков, используемых для определения температуры в стенках кристаллизатора, предложена в [178] и представлен на рис. 42. В схеме используются следующие обозначения. Конструктивный блок (500) встраивается в стенку кристаллизатора с холодной стороны или крепится на холодной стенке кристаллизатора между двумя соседними каналами охлажде-

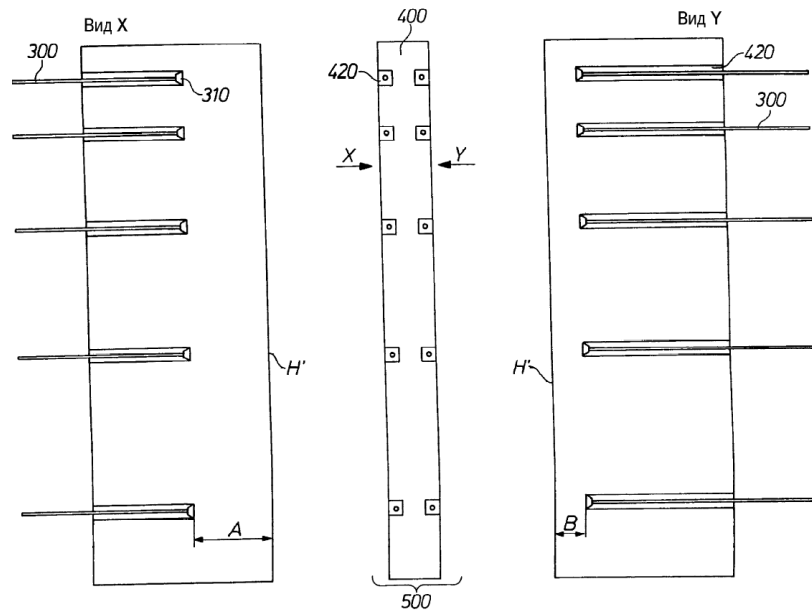


Рис. 42: Измерительный блок SMS ZIMAG AG (DE) в трех проекциях. 300– датчики измерения температуры, 310 –припаянная вершина измерительного устройства, 400 – измерительный модуль, 420–выемка для термоэлемента, 500– конструктивный блок.

ния в направлении от холодной к горячей стороне. Измерительные устройства (300) выполнены в виде волоконно-оптического датчика температуры расположены в модуле (400) попарно на разной глубине (А) и (В). Фиксация датчиков осуществляется путем вклеивания или зажимания устройства в выемках. Вершины предпочтительно спаивают с основанием выемок для обеспечения оптимального контакта и точного позиционирования.

Математическая модель задачи измерения, связанной с процессом теплопереноса внутри сляба, содержащего твердую и жидкую фазу, согласно подходу, представленному в [137], [141] имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, \Pi(t)), t \geq 0, \quad (3.13)$$

где a – коэффициент температуропроводности, а функция $\Pi(t)$ характеризует текущее положение границы раздела твердой и жидкой фаз, является непрерывной, ограниченной, строго возрастающей функцией. На границе раздела фаз требуется поддерживать температуру T_h , обеспечивая необходимый температурный режим $\vartheta(t)$, заданный условиями:

$$\begin{aligned} u(\Pi(t), t) &= T_h, & t \geq 0 \\ \frac{\partial u(\Pi(t), t)}{\partial x} &= \vartheta(t), & t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Соблюдение температурных условий (3.14) внутри объекта достигается за счет регулирования внешнего воздействия на поверхность. Это воздействие одинаково в каждой точке внешней границы и изменяется только относительно времени. Полагаем, что оно характеризуется функцией $u(0, t) = \psi(t)$.

В рассматриваемой задаче необходимо найти эту функцию

$$u(0, t) = \psi(t), \quad t \geq 0, \quad (3.15)$$

соответствующую внешнему тепловому режиму воздействия, влияние которого обеспечивает соблюдение требуемых температурных условий (3.14) на границе раздела фаз.

Отметим, что в реальных условиях, в процессе горячей прокатки, начальная температура $u(x, 0) = \chi(x)$ на участке $x \in [0, x_0]$ напрямую зависят от выбранного режима охлаждения $\psi(t)$ и не является измеряемой величиной, а рассчитываются приближенно по эмпирическим формулам. В этих расчетах влияние $\psi(t)$ учесть невозможно, так как $\psi(t)$ является неизвестной функцией. Таким образом, в задаче измерения (3.13)–(3.14) начальные условия не могут быть сформированы.

Сведем задачу (3.13)–(3.14) к обобщенной задаче измерения с неподвижной границей, используя общепринятый подход [51], [45]. С этой целью сначала начнем выполним замену переменных $x = y \cdot \Pi(t)$, а $\tau = t$. Тогда множество $[0, h(t)]$ преобразуется в $[0, 1]$ и

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(y, \tau)}{\partial y} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cdot \Pi(\tau), \\ \frac{\partial^2 u(y, \tau)}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u(y, \tau)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \cdot \Pi^2(\tau), \\ \frac{\partial u(y, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cdot y \cdot \Pi'(\tau) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \end{aligned}$$

Тогда уравнение (3.13) примет вид

$$\frac{\partial u(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\Pi^2(\tau)} \frac{\partial^2 u(y, \tau)}{\partial y^2} + y \cdot \frac{\Pi'(\tau)}{\Pi(\tau)} \cdot \frac{\partial u(y, \tau)}{\partial y}, \quad y \in (0, 1), \tau \geq 0. \quad (3.16)$$

Условия (3.14) преобразуются в условия

$$u(1, \tau) = 0, \quad \frac{\partial u(1, \tau)}{\partial y} = \Pi(\tau)\vartheta(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (3.17)$$

а функция (3.15), характеризующей искомое управляющее воздействие, соответствует следующая функция

$$u(0, \tau) = \psi(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (3.18)$$

Из результатов, представленных в [166], следует, что $h(t)$ определяется формулой

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = -\kappa\vartheta(t),$$

где $\kappa > 0$ - известная константа. Тогда получаем

$$\Pi(t) = x_0 - \kappa \int_0^t \vartheta(\tau) d\tau. \quad (3.19)$$

а так как функция $\vartheta(t)$ известна, то из (3.19) следует, что и граница $h(t)$ также известна. Получаем, что задача измерения, связанная с высокотемпературным теплопереносом при горячей прокатке, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\Pi^2(\tau)} \frac{\partial^2 u(y, \tau)}{\partial y^2} - y \cdot \frac{k\vartheta(\tau)}{\Pi(\tau)} \cdot \frac{\partial u(y, \tau)}{\partial y}, \quad y \in (0, 1), \tau \geq 0. \quad (3.20)$$

с граничными условиями

$$u(1, \tau) = 0, \quad \frac{\partial u(1, \tau)}{\partial y} = \Pi(\tau)\vartheta(\tau), \quad \tau \geq 0$$

$$\Pi(\tau) = x_0 - \kappa \int_0^{\tau} \vartheta(\tau) d\tau. \quad (3.21)$$

В этой задаче требуется найти

$$u(0, \tau) = \psi(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (3.22)$$

Таким образом, задача измерения с подвижной границей сведена к обобщенной задаче измерения с переменными коэффициентами. Существенная особенность рассмотренной задачи заключается в том, что начальные условия не могут быть сформированы из результатов измерений и требуется разработать вычислительную схему, позволяющую определять температуру $u(y, t)$ внутри объекта по результатам граничных измерений при неизвестных начальных условиях.

3.2.2 Матемтические модели задач измерения, связанных с термообработкой объекта с кусочно-линейной границей и неизвестным начальным тепловым состоянием

Задачи измерения, рассматриваемые в данном разделе, связаны с определением температуры внутри заготовки по результатам поверхностных измерений и возникают при вторичном охлаждении сляба, когда полученную заготовку необходимо подготовить для дальнейшей термической обработке в нагревательных печах или при комплексной или при циклической обработке в термических печах на этапах отжига первого рода, отпуска, нормализации и т.д.

В линейном приближении, согласно [110], [136], [163], полагают, что теплофизические характеристики изменяются с течением времени в зависимости от координат (x, y, z) выбранной текущей точки объекта, тогда, в математической модели плотность ρ , теплоемкость c , теплопроводность λ представляют функциями $\rho = \rho(x, y, z, t)$, $c = c(x, y, z, t)$ и $\lambda = \lambda(x, y, z, t)$, а уравнения теплопереноса являются линейными уравнениями. Дальнейшее формирование математического представления задач измерения, связанных с теплопереносом зависит от специфики технологического процесса.

§ 3.2.2.1 Матемтические модели задач измерения, связанных с теплопереносом при вторичной термообработке заготовок при горячей прокатке

Специфика проведения температурных измерений при вторичной термической обработке заготовки при горячей прокатке заключается в том, что датчики монтируются в стенки оборудования, поперечное сечение которого, как правило, имеет прямоугольную форму.

Следуя идеям, представленным в работах [104], [105], [12], [141], математическая модель процесса теплопереноса, сопровождающего вторичную термообработку объекта с квадратным поперечным сечением при горячей прокатке приводится к следующему виду. Введем декартову систему координат, полагая, что ось аппликата совпадает с технологической осью МНЛЗ, а начало координат относится к центру поперечного сечения. Геометрическая схема заготовки аналогична приведенной в [105] и представлена на рис.43.

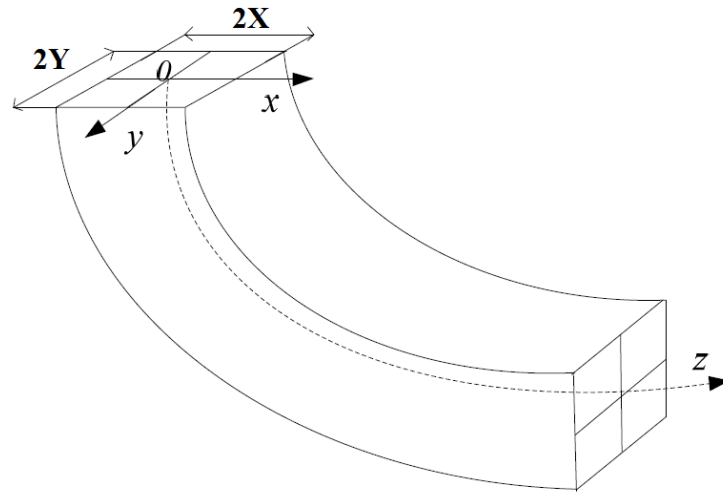


Рис. 43: Геометрическая схема заготовки при горячей прокатке

При постоянной скорости вытягивания координата z линейно зависит от продолжительности t вторичной термической обработки, тогда $z = vt$, где v – скорость вытягивания а задача определения температурного поля сляба сводится к задаче определения температуры в сечении. В силу симметричности охлаждения достаточно рассмотреть процесс теплопереноса в области $[0, X] \times [0, Y]$. Температура в этой области характеризуется функцией $u(x, y, t)$. Уравнение (3.1) имеет вид:

$$vc(x, y, t)\rho(x, y, t)\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda(x, y, t)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \gamma(x, y, t)u \quad (3.23)$$

$\gamma(x, y, t)$ – коэффициент теплоотдачи от жидкого металла к затвердевшей оболочке. В силу того, что датчики измерения температуры расположены на стенках оборудования, областью, доступной для измерения является граница сечения, тогда теплоперенос на поверхности заготовки представим граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(x, Y, t) = p(x, t), \quad -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=Y} = g(x, t), \quad (x, t) \in [0, X] \times [0, T], \\ u(X, y, t) = \hbar(y, t), \quad -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=X} = q(y, t), \quad (y, t) \in [0, Y] \times [0, T]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

$p(x, t)$, $\hbar(y, t)$ – измеренная температура, $g(x, t)$, $q(y, t)$ – плотности тепловых потоков. Специфика технологического процесса не позволяет измерить температуру во внутренних точках сечения, что приводит к неизвестным начальным условиям $u(x, y, 0)$. Кроме того, при измерении неизбежно возникают отклонения измеренных значений $p_\delta(x, t)$, $\hbar_\delta(y, t)$, $g_\delta(x, t)$, $q_\delta(y, t)$ от действительных $p(x, t)$, $\hbar(y, t)$,

$g(x, t)$, $q(y, t)$. Наличие отклонений в измерениях соответствуют следующее ограничение. Известны измеренные значения $p_\delta(x, t)$, $h_\delta(y, t)$, $g_\delta(x, t)$, $q_\delta(y, t)$ и допустимый уровень δ такие, что $\max \{ \|p_0 - p_\delta\|, \|g_0 - g_\delta\|, \|h_0 - h_\delta\|, \|q_0 - q_\delta\| \} < \delta$.

В этих условиях требуется, используя (3.23), (3.24), разработать метод прогнозирования температурного поля $u(x, y, t)$ сечения по результатам граничных измерений, устойчивый относительно погрешности исходных данных δ .

§ 3.2.2.2 Математические модели задач измерения, связанной с линейным теплопереносом при термической обработке изделий в печах

Представленные задачи измерения связаны с проблемой определением температуры внутри заготовки при комплексной, циклической обработке изделия в печах на этапах отжига первого рода, отпуска, нормализации и т.д.

Особенности измерений в системах контроля теплового состояния, учитываемые при построении математической модели задачи теплопереноса, обусловлены тем, что нагревательные элементы из высокотемпературного сплава расположены вдоль боковых стенок и стенки пода. Это обеспечивает быстрое выравнивание температуры в печи, но позволяет контролировать только температурное поле поверхности заготовки. Процесс нагрева заготовок прямоугольного сечения осуществляется в переходном режиме, когда в печи одновременно нагреваются заготовки различного поперечного сечения при непрерывном расположении заготовок внутри печи. Специфика технологического процесса, обуславливающая предпосылки математической модели, исследовалась в работах [78], [154].

Согласно подходам, представленным в этих работах проблему определения температурного поля заготовок при непрерывном расположении сводят к задаче определения температурного поля сечения. Рассмотрим поперечное сечение заготовки, введя декартову систему координат и полагая, что ось абсцисс проходит через под печи. Геометрическая схема сечения приведена на рис.44. В данной геометрической схеме датчики температуры расположены вблизи линий, соответствующих границе сечения.

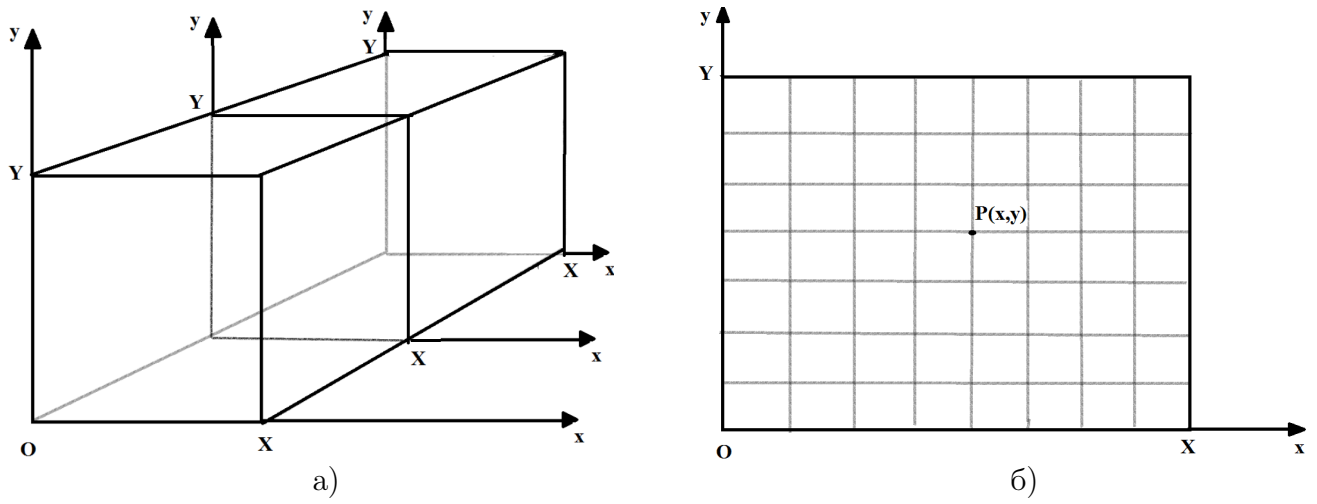


Рис. 44: Геометрическая схема прямоугольного сечения. (а) – схема заготовки при термообработке, (б) – схема сечения с декартовой системой координат

В математической модели температура в сечении характеризуется функцией $u(x, y, t)$. Уравнение (3.1), характеризующее теплоперенос в сечении имеет вид:

$$c(x, y, t)\rho(x, y, t)\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda(x, y, t)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - h(x, y, t)(u - \theta) + F(x, y, t) \quad (3.25)$$

где $h(x, y, t)$ – коэффициент теплообмена, а основные характеристики рассчитываются согласно общепринятых методик, приведенных, например, в работе [153].

Теплоперенос на поверхности заготовки представлен граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(x, 0, t) = p(x, t), \quad -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=Y} = g(x, t), \quad (x, t) \in [0, X] \times [0, T], \\ u(0, y, t) = \hbar(y, t), \quad -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=X} = q(y, t), \quad (y, t) \in [0, Y] \times [0, T]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

$p(x, t)$, $\hbar(y, t)$ – измеренная температура, $g(x, t)$, $q(y, t)$ – плотности тепловых потоков. В рассматриваемой задаче теплопереноса начальные условия не могут быть сформированы и являются неизвестными. Такая специфика задачи обусловлена тем, что при термообработке массивного изделия к моменту начала очередного этапа технологического процесса (отжига, отпуска) возможно контролировать температуру только внешней поверхности, при этом в теле существуют отличия в значениях температуры на поверхности и внутри детали, величина которых не может быть оценена без нарушения целостности обрабатываемого тела. Эти отличия обусловлены присутствием остаточного тепла внутри заготовки, причинами которого являются больших размеров заготовки и инерционности теплопередачи.

Другая специфическая особенность рассматриваемой задачи теплопереноса связана с тем, что при проведении измерений неизбежно возникают отклонения измеренных значений от действительных, но допустимо, чтобы величина отклонений не превосходила уровня δ . В математической модели этой особенности соответствуют условия, аналогичные приведенным предыдущем разделе и имеющие следующий вид. Вместо действительных значений $p(x, t)$, $\hbar(y, t)$, $g(x, t)$, $q(y, t)$ известны измеренные значения $p_\delta(x, t)$, $\hbar_\delta(y, t)$, $g_\delta(x, t)$, $q_\delta(y, t)$ и допустимый уровень отклонений $\delta > 0$ такие, что $\max \{\|p - p_\delta\|, \|g - g_\delta\|, \|\hbar - \hbar_\delta\|, \|q - q_\delta\|\} < \delta$. В этих условиях необходимо разработать метод, основанный на решении задачи (3.25), (3.26) и позволяющий прогнозировать температуру $u(x, y, t)$ во внутренних точках тела с неизвестным начальным тепловым состоянием из результатов измерений на поверхности.

3.3 Метод дискретной регуляризации для задач измерения, связанных с линейным теплопереносом в объекте с неизвестным начальным тепловым состоянием

В этом разделе предложены методы решения задач теплопереноса в объектах с неизвестным начальным тепловым состоянием. Приведены результаты исследования устойчивости методов относительно погрешности исходных данных. Получены оценки погрешностей численных решений задачи измерения, а также представлены результаты вычислительного эксперимента, проводимого с целью проверки принципиальной возможности построения вычислительной схемы определения температуры во внутренних точках из результатов граничных измерений при неизвестных начальных условиях, а также оценки эффективности метода.

3.3.1 Метод регуляризации в задачах измерения, связанных с теплопереносом в линейном объекте

Основываясь на (3.6), (3.7) и (3.8), получаем, что для линейного объекта множество $\Omega = (0, \ell) \subset R$, граница области $\partial\Omega$ состоит из точек $x = 0$ и $x = \ell$,

множество Γ содержит только точку $x = 0$, уравнение (3.6) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma(x, t)u + f(x, t), \quad (3.27)$$

где $x \in (0, \ell), t \in (0, T)$, граничные условия представлены соотношениями:

$$u(0, t) = p(t), u_x(0, t) = g(t), t \in [0, T], \quad (3.28)$$

начальные значения $u(x, 0)$ являются неизвестными и существуют $\Phi, \beta, C > 0$ такие, что

$$\left\{ \max_{\bar{\Omega}_T} |\partial^2 u_t|, \max_{\bar{\Omega}_T} |\partial u_x|, \max_{\bar{\Omega}_T} |\partial^2 u_x|, \max_{\bar{\Omega}_T} |\partial^3 u_x| \right\} \leq C, \quad (3.29)$$

$$\max_{\bar{\Omega}_T} |u(x, t)| \leq \Phi e^{\beta(x+t)}.$$

В задаче измерения (3.27), (3.28) требуется определить значение функции $u(x, t)$ во внутренних точках объекта вплоть до граничных значений $u(\ell, t) = \varphi(t)$.

Из результатов, представленных в [90], следует существование решения $u(x, t)$ задачи (3.27), (3.28), а граница $\partial\Omega_\eta$ нормированной области Ω_ν имеет вид:

$$\partial\Omega_\eta = \varpi_1 \cup \varpi_2,$$

$$\varpi_1 = \left\{ (0, t) : \frac{t^2}{2\Theta^2} \leq \eta \right\} \quad \varpi_2 = \left\{ (x, t) : x = \eta + \frac{t^2}{2\Theta^2} \right\},$$

где $0 < x < 1$, а $t \in (0, \Theta)$ при $0 < \Theta < 1$.

При построении метода необходимо учитывать, что вместо действительных значений p_0, g_0 известны измеренные значения p_δ, g_δ и допустимый уровень погрешности δ такие, что $\max_{(x,t) \in \bar{\Omega}_T} \{|p_0 - p_\delta|, |g_0 - g_\delta|\} < \delta$.

§ 3.3.1.1 Вычислительная схема метода дискретной регуляризации

Для построения вычислительной схемы метода, введем конечно-разностную сетку G в прямоугольнике Ω_T ,

$$G = \left\{ \begin{array}{l} (x_i, t_j) : x = (i-1)h, t = (j-1)\tau, \\ h = \ell/N; \tau = T/M; i = \overline{1, N+1}; j = \overline{1, M+1} \end{array} \right.$$

где h и τ – шаги сетки по переменным x и t соответственно и рассмотрим множество дискретных функций $V_h = \{v(x_i, t_j) = v_{i,j}\}$, заданных на G .

Введем следующие обозначения. Пусть $f_{i,j}$ соответствует значению функции $f \in C(\overline{\Omega}_T)$ в точках $(x_i, t_j) \in G$. Значениям коэффициентных функций $a(x, t)$, $b(x, t)$, $\gamma(x, t)$ в точках $(x_i, t_j) \in G$ соответствуют $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$.

Следуя подходу, предложенному А.А. Самарским в [136], определим в каждой точке $(x_i, t_j) \in G$ конечно-разностный аналог частных производных

$$\begin{aligned} v_x^{i,j} &= \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h}, & i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M+1}; \\ v_t^{i,j} &= \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\tau}, & i = \overline{1, N+1}, j = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$v_{xx}^{i,j} = \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h^2}, \quad i = \overline{2, N}, j = \overline{1, M+1}. \quad (3.31)$$

Конечно-разностные аналоги (3.30), (3.31) аппроксимируют частные производные с точностью $O(h)$ для ∂_x , $O(h^2)$ для ∂_x^2 при $h \rightarrow 0$ и $O(\tau)$ при $\tau \rightarrow 0$ для ∂_t .

Основные аспекты метода дискретной регуляризации, разработанного и представленного в данной работе, заключаются в следующем. Первый ключевой аспект метода состоит в конструировании комбинированной конечно-разностно-схемы, основанной на (3.30), (3.31). Для внутренних точек (x_i, t_j) при $i = \overline{2, N+1}$, $j = \overline{1, M}$ предлагаемый конечно-разностный аналог уравнения (3.27) имеет вид:

$$v_t^{i,j} = a_{i,j} v_{xx}^{i,j} + b_{i,j} v_x^{i,j} + \gamma_{i,j} v_{i,j} + f_{i,j}, \quad i = \overline{2, N+1}, j = \overline{1, M}, \quad (3.32)$$

Основная проблема решения обратной задачи (3.27), (3.28) с неизвестными начальными условиями заключалась в том, что уравнение (3.32) невозможно использовать в узлах (x_i, t_{M+1}) , соответствующих финальному моменту времени T . С этой проблемой сталкивались многие исследователи [97], [6], [195].

В данной работе для решения проблемы крайних точек (x_i, t_{M+1}) предлагается сопоставить (3.28) следующий конечно-разностный аналог:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (v_{i,M+1} - v_{i,N_t}) &= \frac{a_{i,M+1}}{h^2} \sigma (v_{i+1,M+1} - 2v_{i,M+1} + v_{i-1,M+1}) + \\ &+ \frac{b_{i,M+1}}{h} \sigma (v_{i+1,M+1} - v_{i,M+1}) + \sigma \gamma_{i,M+1} v_{i,M+1} + \sigma \widehat{f}_{i,M+1} + \\ &+ \frac{a_{i,M}}{h^2} (1 - \sigma) (v_{i+1,M} - 2v_{i,M} + v_{i-1,M}) + \frac{b_{i,M}}{h} (1 - \sigma) (v_{i+1,M} - v_{i,M}) + \\ &+ (1 - \sigma) \gamma_{i,M} v_{i,M} + (1 - \sigma) \widehat{f}_{i,M}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Граничным условиям (3.28) в предлагаемой схеме соответствуют

$$v_{1,j} = p_j, \quad v_x^{1,j} = g_j, \quad j = \overline{1, M+1} \quad (3.34)$$

В задаче (3.32)–(3.34) требуется найти значения $v(x_{i+1}, t_j)$ в точках (x_{i+1}, t_j) , при $i = \overline{2, N}$, $j = \overline{1, M+1}$ вплоть до $v(x_{N+1}, t_j) = \varphi(t_j)$, соответствующих температурным значениям в точках (ℓ, t_j) , $j = \overline{1, M+1}$.

Вторая идея метода заключается в том, что вычислительная схема метода является явной и на каждом шаге итерационного процесса из уравнений (3.30), (3.31) находят значения $v_{i+1,j}$ относительно пространственной переменной. Это является принципиальным отличием предлагаемого метода от общепринятых подходов к построению явных схем [163], [6], [137], [136], когда значение функции $v_{i,j+1}$ вычислялось относительно переменной по времени. Предлагаемый подход позволяет решать задачу (3.27), (3.28) при неизвестных начальных условиях и уменьшает влияние неизвестных начальных условий на результаты вычислений. Таким образом, при $i = \overline{2, N}$ и $j = \overline{1, M}$ имеем

$$\begin{aligned} v_{i+1,j} = & 2 \frac{a_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} v_{i,j} - \frac{a_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} v_{i-1,j} + \frac{h^2}{(a_{i,j} + b_{i,j}h)\tau} (v_{i,k+1} - v_{i,k}) + \\ & + \frac{hb_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} v_{i,j} - \frac{h^2\gamma_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} v_{i,j} - \frac{h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} f_{i,j} \end{aligned} \quad (3.35)$$

а для $j = M+1$ при $i = \overline{2, N+1}$ из (3.33) получаем:

$$\begin{aligned} v_{i+1,M+1} = & \frac{h^2}{(a_{i,M+1} + hb_{i,M+1})\tau\sigma} (v_{i,M+1} - v_{i,M}) + \\ & + \frac{a_{i,M+1}}{a_{i,M+1} + hb_{i,M+1}} (2v_{i,M+1} - v_{i-1,M+1}) + \frac{hb_{i,M+1}}{a_{i,M+1} + hb_{i,M+1}} v_{i,M+1} - \\ & - \frac{h^2\gamma_{i,M+1}}{a_{i,M+1} + hb_{i,M+1}} v_{i,M+1} - \frac{h^2}{a_{i,M+1} + hb_{i,M+1}} f_{i,M+1} - \\ & - \frac{h^2(1-\sigma)}{(a_{i,M+1} + hb_{i,M+1})\sigma} \left[\frac{a_{i,M}}{h^2} (v_{i+1,M} - 2v_{i,M} + v_{i-1,M}) + \frac{b_{i,M}}{h} (v_{i+1,M} - v_{i,M}) \right] - \\ & - \frac{h^2}{(a_{i,M+1} + hb_{i,M+1})\sigma} (1-\sigma) [\gamma_{i,M}v_{i,M} + f_{i,M}]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Следующий ключевой момент метода состоит в том, что для обеспечения устойчивости схемы в (3.35), (3.36) вводят стабилизирующий функционал с параметром

регуляризации α и согласуют h , α с τ и δ . В результате (3.35) примет вид:

$$v_{i+1,j} = 2 \frac{a_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} v_{i,j} - \frac{a_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} v_{i-1,j} + \frac{h^2}{(a_{i,j} + b_{i,j}h)\tau} (v_{i,j+1} - v_{i,j}) + \\ + \frac{hb_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} v_{i,j} - \frac{h^2\gamma_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} v_{i,j} - \frac{h^2\alpha}{a_{i,j} + b_{i,j}h} v_{i,j} - \frac{h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} \hat{f}_{i,j}.$$

Перегруппировав слагаемые, получаем, что для $i = \overline{2, N+1}$, $j = \overline{1, M}$ последнее уравнение примет вид:

$$v_{i+1,j} = \left[1 + \frac{a_{i,j} - h^2\gamma_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} - \frac{h^2}{(a_{i,j} + b_{i,j}h)\tau} \right] v_{i,j} - \frac{a_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} v_{i-1,j} + \\ + \frac{h^2}{(a_{i,j} + b_{i,j}h)\tau} v_{i,j+1} - \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} v_{i,j} - \frac{h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} \hat{f}_{i,j}. \quad (3.37)$$

Уравнение (3.36) при $i = \overline{2, N+1}$, $j = M+1$ примет вид:

$$v_{i+1,M+1} = \frac{h^2}{(a_{i,M+1} + hb_{i,M+1})\tau\sigma} (v_{i,M+1} - v_{i,M}) + \\ + \frac{a_{i,M+1}}{a_{i,M+1} + hb_{i,M+1}} (2v_{i,M+1} - v_{i-1,M+1}) + \frac{hb_{i,M+1}}{a_{i,M+1} + hb_{i,M+1}} v_{i,M+1} - \\ - \frac{h^2\gamma_{i,M+1}}{a_{i,M+1} + hb_{i,M+1}} v_{i,M+1} - \frac{h^2}{a_{i,M+1} + hb_{i,M+1}} \hat{f}_{i,M+1} - \\ - \frac{h^2}{(a_{i,M+1} + hb_{i,M+1})\sigma} (1 - \sigma) \left[\frac{a_{i,M}}{h^2} (v_{i+1,M} - 2v_{i,M} + v_{i-1,M}) + \frac{b_{i,M}}{h} (v_{i+1,M} - v_{i,M}) \right] - \\ - \frac{h^2}{(a_{i,M+1} + hb_{i,M+1})\sigma} (1 - \sigma) \left[\gamma_{i,M} v_{i,M} + \hat{f}_{i,M} \right] - \frac{\alpha h^2}{(a_{i,M+1} + hb_{i,M+1})\sigma} v_{i,M}. \quad (3.38)$$

Уравнения (3.37), (3.38) эквивалентны добавлению слагаемого $\alpha v(x_i, t_j)$ к конечно-разностному аналогу оператора A из уравнения (3.10).

Вычислительная схема метода дискретной регуляризации состоит из следующих этапов. Сначала согласуют шаг дискретизации h и параметр регуляризации α с величинами τ и δ . Далее используя (3.34), находят $v_{1,j}$, $v_{2,j}$ при $j = \overline{1, M}$:

$$v_{1,j} = p_j; \quad v_{2,j} = p_j + hg_j. \quad (3.39)$$

Затем, используя (3.37) и (3.38), находят $v_{i+1,j}$, соответствующих температурам во внутренних точках, при всех $j = \overline{1, M+1}$ в узлах сетки (x_{i+1}, t_j) , $j = \overline{1, M+1}$ вплоть до точек (x_{N+1}, t_j) , $j = \overline{1, M+1}$, соответствующих приближенным значениям $\phi_\delta^\alpha(t)$ искомой граничной функции $u(\ell, t)$.

§ 3.3.1.2 Исследование устойчивости основной вычислительной схемы метода дискретной регуляризации

С целью исследования устойчивости вычислительной схемы (3.39)–(3.38) относительно погрешности исходных данных, ведем в рассмотрение параметры:

$$\mathfrak{S} = \max_{j=1,1,\overline{N_t+1}} |g_j|, \quad F = \max_{(x_i,t_j) \in G} |f(x_i,t_j)| \quad (3.40)$$

$$a = \min_{(x_i,t_j) \in G} |a(x_i,t_j)|, \quad \Lambda = \max_{(x_i,t_j) \in G} |a(x_i,t_j)| \quad \Upsilon = \max_{(x_i,t_j) \in G} |\gamma(x_i,t_j)|$$

$$\lambda = \min_{(x_i,t_j) \in G} |\lambda(x_i,t_j)|, \quad \mathfrak{C} = \max_{(x_i,t_j) \in G} |c(x_i,t_j)| \quad \mathfrak{R} = \max_{(x_i,t_j) \in G} |\rho(x_i,t_j)| \quad (3.41)$$

Отметим, что $a \geq \frac{\lambda}{\mathfrak{C}\mathfrak{R}}$. Также определим параметр $L = \frac{\lambda}{\mathfrak{C}\mathfrak{R}} \leq a$.

Для оценки вычислительной погрешности, получаемой при нахождении численного решения на $i + 1$ шаге итерационного процесса, используем величины

$$\varpi_{i+1} = \max_{j=1,1,\overline{N_t}} |v_{i+1,j} - v_{i,j}|.$$

Учитывая, что действительным значениям соответствуют величины p_j^0, g_j^0 , а измеренным – величины p_j^δ, g_j^δ , получаем

$$\varpi_2 = \max_{j=1,1,\overline{N_t}} |v_{2,j} - v_{1,j}| \leq \max_{j=1,1,\overline{N_t+1}} |p_j^\delta + g_j^\delta h - p_j^0| \leq \max_{j=1,1,\overline{N_t+1}} |(g_j^\delta - g_j^0)h + g_j^0 h| \leq (\mathfrak{S} + \delta)h.$$

Оценим ϖ_{i+1} при $i = \overline{2, N + 1}$.

$$\begin{aligned} v_{i+1,j} - v_{i,j} &= \frac{a_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} (v_{i,j} - v_{i-1,j}) + \frac{h^2}{(a_{i,j} + b_{i,j}h)\tau} (v_{i,j+1} - v_{i,j}) + \\ &\quad - \frac{(\alpha + \gamma_{i,j})h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} v_{i,j} - \frac{h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} f_{i,j} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Принимая во внимание, что $\gamma_{i,j} < 0$, получаем:

$$\begin{aligned} v_{i+1,j} - v_{i,j} &\leq v_{i+1,j} - v_{i,j} - \frac{\gamma_{i,j}h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} v_{i-1,j} \leq \frac{a_{i,j} - \gamma_{i,j}h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} (v_{i,j} - v_{i-1,j}) + \\ &\quad + \frac{h^2}{(a_{i,j} + b_{i,j}h)\tau} (v_{i,j+1} - v_{i,j}) - \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} v_{i,j} - \frac{h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} f_{i,j} \end{aligned}$$

Оценим вычислительную погрешность:

$$\begin{aligned} \varpi_{i+1} &= \max_{j=1,\overline{M}} |v_{i+1,j} - v_{i,j}| \leq \\ &\leq \max_{j=1,\overline{M}} \left| \frac{a_{i,j} - \gamma_{i,j}h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} \right| \max_{j=1,\overline{M}} |v_{i,j} - v_{i-1,j}| + \max_{j=1,\overline{M}} \left| \frac{h^2}{(a_{i,j} + b_{i,j}h)\tau} \right| \max_{j=1,\overline{M}} |(v_{i,j+1} - v_{i,j})| + \\ &\quad + \max_{j=1,\overline{M}} \left| \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} \right| \max_{j=1,\overline{M}} |v_{i,j}| + \max_{j=1,\overline{M}} \left| \frac{h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} \right| \max_{j=1,\overline{M}} |f_{i,j}| \end{aligned}$$

Учитывая ограничения на $u(x, t)$, имеем $\max_{j=1, M} |v_{i, j+1} - v_{i, j}| \leq 2\Phi e^{\beta(\ell+T)}$, тогда

$$\begin{aligned} \varpi_{i+1} \leq & \max_{j=1, M} \left| \frac{a_{i, j} - \gamma_{i, j} h^2}{a_{i, j} + b_{i, j} h} \right| \varpi_i + \max_{j=1, M} \left| \frac{2h^2}{(a_{i, j} + b_{i, j} h) \tau} \right| \Phi e^{\beta(\ell+T)} + \\ & + \max_{j=1, M} \left| \frac{\alpha h^2}{a_{i, j} + b_{i, j} h} \right| \Phi e^{\beta(\ell+T)} + \max_{j=1, M} \left| \frac{h^2}{a_{i, j} + b_{i, j} h} \right| F \end{aligned}$$

Оценим коэффициенты в (3.42). Используя формулу $b_{i, j} \approx \frac{\lambda_{i+1, j} - \lambda_{i, j}}{h}$, получаем $a_{i, j} + b_{i, j} h = \frac{\lambda_{i+1, j}}{c_{i, j} \rho_{i, j}} > L$, тогда $\frac{1}{a_{i, j} + b_{i, j} h} < \frac{1}{L}$.

Принимая во внимание ограниченность коэффициентных функций, получаем, что существует константа μ такая, что

$$\frac{a_{i, j} - \gamma_{i, j} h^2}{a_{i, j} + b_{i, j} h} < \max_{(i, j)} \left| \frac{a_{i, j} - \gamma_{i, j} h^2}{a_{i, j} + b_{i, j} h} \right| < \frac{\Lambda}{L} < \mu.$$

Основываясь на характеристиках коэффициента температуропроводности [59] и теплопереноса [73], в каждом узле сетки (x_i, t_j) имеем $\frac{\Lambda}{L} \approx \frac{4}{3}$ и $\mu < 1, 5$.

Получаем, что для вычислительной погрешности, накопленной после $i+1$ шага итерационного процесса имеет место оценка

$$\varpi_{i+1} \leq \mu \varpi_i + \frac{2h^2}{L\tau} \Phi e^{\beta(\ell+T)} + \frac{\alpha h^2}{L} \Phi e^{\beta(\ell+T)} + \frac{h^2}{L} F$$

Полагаем $\vartheta = \left(\frac{\alpha h^2}{L} + \frac{2h^2}{L\tau} \right) \Phi e^{\beta(\ell+T)} + \frac{h^2}{L} F$, тогда

$$\varpi_3 \leq \mu \varpi_2 + \vartheta, \quad \varpi_4 \leq \mu \varpi_3 + \vartheta \leq \mu (\mu \varpi_2 + \vartheta) + \vartheta \leq \mu^2 \varpi_2 + \vartheta (1 + \mu),$$

$$\varpi_5 \leq \mu^3 \varpi_2 + \vartheta (1 + \mu + \mu^2),$$

$$\begin{aligned} \varpi_{i+1} & \leq \mu \varpi_i + \vartheta \leq \mu (\mu \varpi_{i-1} + \vartheta) + \vartheta \leq \mu^2 \varpi_{i-1} + \vartheta (1 + \mu) \leq \\ & \leq \mu^3 \varpi_{i-2} + \vartheta (1 + \mu + \mu^2) \leq \dots \leq \mu^{i-1} \varpi_2 + \vartheta (1 + \mu + \dots + \mu^{i-2}) \end{aligned}$$

К завершению вычислительного процесса для накопленной вычислительной погрешности ϖ_{N+1} имеет место оценка

$$\varpi_{N+1} \leq \mu^{N-1} \varpi_2 + \vartheta (1 + \mu + \dots + \mu^{N-2})$$

Используя формулу суммы геометрической прогрессии и учитывая, что $\mu \approx 1, 5$, получим $1 + \mu + \dots + \mu^{N-2} = \frac{\mu^{N-1} - 1}{\mu - 1} \leq 2\mu^{N-1}$, тогда

$$\varpi_{N+1} \leq \mu^{N-1} (\varpi_2 + \vartheta) < \mu^{N-1} ((\mathfrak{S} + \delta) h + \vartheta)$$

Выберем шаги регуляризации так, чтобы накопленная вычислительная погрешность ϖ_{N+1} соответствовала требуемому уровню точности, определяемому неравенством $\varpi_{N+1} < \sqrt{V\delta}$. Имеем

$$N \leq 1 + \frac{5}{2} \log_{\mu} \frac{V\delta}{(\mathfrak{S} + \delta)h + \vartheta} < 1 + \frac{5}{2} \log_{\mu} \frac{V\delta}{(\mathfrak{S} + \delta)h}.$$

$$N - \log_{\mu} N < 1 + \frac{5}{2} \log_{\mu} \frac{V\delta}{(\mathfrak{S} + \delta)\ell}.$$

Таким образом, для обеспечения устойчивости вычислительной схемы необходимо согласовывать величину шага дискретизации h и параметр регуляризации α с величинами τ и δ . Отметим, что из последнего неравенства следует, что N может принимать только небольшие значения.

§ 3.3.1.3 Оценка погрешности прогнозируемых температур

Оценим наибольшее уклонение величин $v_{i,j}$, соответствующих прогнозируемым температурам во внутренних точках объекта и полученных с помощью основной вычислительной схемы, от значений $u_{i,j}$, удовлетворяющих (3.27)–(3.28), соответствующих действительным температурам. Для этого введем величины:

$$s_{i,j} = u_{i,j} - v_{i,j}, \quad w_i = \max_{j=1, \overline{M}} |u_{i,j} - v_{i,j}|.$$

Отметим, что $w_{i+1} \geq w_i$. Учитывая (3.39), (3.29) и принимая во внимание, что исходные данные известны с погрешностью, имеем

$$w_1 \leq \delta, \quad w_2 = \max_{j=1, \overline{N_t+1}} |v_{2,j} - u_{2,j}| \leq \delta(1+h) + O(h) \leq \delta(1+h) + Ch. \quad (3.43)$$

Из (3.27) и (3.37) получаем

$$s_{i+1,j} + \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} u_{i,j} = \left[1 + \frac{a_{i,j} - h^2 \gamma_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} - \frac{h^2}{(a_{i,j} + b_{i,j}h)\tau} \right] s_{i,j} - \frac{a_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} s_{i-1,j} +$$

$$+ \frac{h^2}{(a_{i,j} + b_{i,j}h)\tau} s_{i,j+1} + \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} s_{i,j} + \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} u_{i,j} + O(h^2 + \tau).$$

Так как $s_{i,j} \leq w_i$ и $s_{i,j+1} \leq w_i$, то получаем

$$\left| s_{i+1,j} + \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} u_{i,j} \right| \leq \max_{j=1, \overline{N_t}} \left| 1 + \frac{a_{i,j} - h^2 \gamma_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} - \frac{h^2}{(a_{i,j} + b_{i,j}h)\tau} \right| w_i +$$

$$\begin{aligned}
& + \max_{j=1, N_t} \left| \frac{a_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} \right| w_{i-1} + \max_{j=1, N_t} \left| \frac{h^2}{(a_{i,j} + b_{i,j}h)\tau} \right| w_i + \\
& + \max_{j=1, N_t} \left| \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} \right| w_i + \max_{j=1, N_t} \left| \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} \right| \max_{j=1, N_t} |u_{i,j}| + C(h^2 + \tau)
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\max_{j=1, N_t} |u_{i,j}| \leq \Phi e^{\beta(\ell+T)}$ и $w_{i-1} \leq w_i$, получаем

$$\begin{aligned}
\left| s_{i+1,j} + \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} u_{i,j} \right| & \leq w_i + \max_{j=1, N_t} \left| \frac{a_{i,j} - h^2 \gamma_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} \right| w_i + 2 \max_{j=1, N_t} \left| \frac{h^2}{(a_{i,j} + b_{i,j}h)\tau} \right| w_i + \\
& + \max_{j=1, N_t} \left| \frac{a_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} \right| w_i + \max_{j=1, N_t} \left| \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} \right| \Phi e^{\beta(\ell+T)} + \max_{j=1, N_t} \left| \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} \right| w_i + C(h^2 + \tau).
\end{aligned}$$

Рассмотрим ситуацию, когда внешнее воздействие направлено на нагрев, когда температура ближайшего к поверхности слоя выше, чем более удаленного. Исходя из характеристик материалов, представленных в [73], [59], получаем

$$a_{i,j} + hb_{i,j} \geq \frac{\lambda_{i+1,j}}{c_{i,j}\rho_{i,j}} \geq \frac{\lambda_{i,j}}{c_{i,j}\rho_{i,j}} \geq a_{i,j} \geq L \quad \frac{a_{i,j}}{a_{i,j} + hb_{i,j}} \leq 1.$$

Таким образом, задач теплопереноса, связанных с нагревом объекта, имеем

$$\begin{aligned}
\left| s_{i+1,j} + \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} u_{i,j} \right| & \leq w_i + \max_{j=1, N_t} \left| \frac{a_{i,j} - h^2 \gamma_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} \right| w_i + \\
& + \frac{2h^2}{L\tau} w_i + w_i + \frac{\alpha h^2}{L} \Phi e^{\beta(\ell+T)} + \frac{\alpha h^2}{L} w_i + C(h^2 + \tau).
\end{aligned}$$

Согласно теории подобия и результатам, представленным в [49], [66], во внутренних точках при $i = \overline{3, N+1}$ имеет место оценка $\max_{j=1, N_t} \left| \frac{a_{i,j} - h^2 \gamma_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} \right| \leq 1$, тогда

$$\left| s_{i+1,j} + \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j}h} u_{i,j} \right| \leq \left(3 + \frac{2h^2}{L\tau} + \frac{\alpha h^2}{L} \right) w_i + \frac{\alpha h^2}{L} \Phi e^{\beta(\ell+T)} + C(h^2 + \tau). \quad (3.44)$$

Рассмотрим ситуацию, когда внешнее воздействие направлено на охлаждение. Исходя из характеристик материалов, представленных в [73], [59],[105]

$$a_{i,j} + hb_{i,j} \approx \frac{\lambda_{i+1,j}}{c_{i,j}\rho_{i,j}} \geq \frac{\lambda_{i+1,j}}{c_{i+1,j}\rho_{i,j}} > L$$

Используя свойство коэффициента теплопроводности для основных марок стали и сплавов [73], [59] и учитывая, что внутри тела недопустимы резкие перепады температурных градиентов, получаем, что $\frac{a_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j}h} \approx \frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_{i+1,j}} < 1, 1$. Так как при

охлаждении $\gamma_{i,j} > 0$, то $\max_{j=1,M} \left[\frac{a_{i,j} - h^2 \gamma_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j} h} \right] < \max_{j=1,M} \left[\frac{a_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j} h} \right] < 1, 1$. Тогда, учитывая, что $w_{i-1} < w_i$, получаем

$$\begin{aligned} \left| s_{i+1,j} + \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j} h} u_{i,j} \right| &\leq w_i + \max_{j=1,M} \left[\frac{a_{i,j} - h^2 \gamma_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j} h} \right] w_i + \frac{\alpha h^2}{L} w_i + \frac{2h^2}{L\tau} w_i + \\ &\quad + \frac{\alpha h^2}{L} \Phi e^{\beta(\ell+T)} + \max_{j=1,N_t} \frac{a_{i,j}}{a_{i,j} + b_{i,j} h} w_i + C(h^2 + \tau) \\ &\leq \left(3, 2 + \frac{\alpha h^2}{L} + \frac{2h^2}{L\tau} \right) w_i + \frac{\alpha h^2}{L} \Phi e^{\beta(\ell+T)} + C(h^2 + \tau). \end{aligned}$$

Таким образом, в задачах теплопереноса как в ситуации нагрева, так и в ситуации охлаждения имеет место следующая оценка

$$\left| s_{i+1,j} + \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j} h} u_{i,j} \right| \leq \left(3, 2 + \frac{\alpha h^2}{L} + \frac{2h^2}{L\tau} \right) w_i + \frac{\alpha h^2}{L} \Phi e^{\beta(\ell+T)} + C(h^2 + \tau). \quad (3.45)$$

С другой стороны, справедливо:

$$\left| s_{i+1,j} + \frac{\alpha h^2}{a_{i,j} + b_{i,j} h} u_{i,j} \right| \geq \max_{j=1,M} |s_{i+1,j}| - \frac{\alpha h^2}{L} \max_{i,j} |u_{i,j}| \geq w_{i+1} - \frac{\alpha h^2}{L} \Phi e^{\beta(\ell+T)}$$

Отсюда и из (3.45) следует, что при $i = \overline{2, N}$ выполнено

$$w_{i+1} \leq \left(3, 2 + \frac{2h^2}{L\tau} + \frac{\alpha h^2}{L} \right) w_i + \frac{2\alpha h^2}{L} \Phi e^{\beta(\ell+T)} + C(h^2 + \tau)$$

Обозначим $K = 3, 2 + \frac{2h^2}{L\tau} + \frac{\alpha h^2}{L}$, тогда

$$w_{i+1} \leq K w_i + \frac{2\alpha h^2}{L} \Phi e^{\beta(\ell+T)} + C(h^2 + \tau), \quad i = \overline{2, N}$$

Оценим наибольшую температурную погрешность, соответствующую значению (w_{N+1}) . Подставив (3.43) в последнее неравенство, получаем

$$\begin{aligned} w_{N+1} &\leq K^{N-1} (\delta(1+h) + Ch) + \left(\frac{2\alpha h^2}{L} \Phi e^{\beta(\ell+T)} + C(h^2 + \tau) \right) \sum_{m=0}^{N-2} K^m \leq \\ &\leq K^{N-1} \left(\delta(1+h) + \frac{2\alpha h^2}{L} \Phi e^{\beta(\ell+T)} + C(h^2 + h + \tau) \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Основываясь на требованиях к точности решения задачи измерения, необходимо обеспечить гарантированный уровень температурной погрешности в контрольной точке. Полагаем, что погрешность находится в допустимых пределах, если выполняется условие $w_{N+1} \leq V\delta$ для некоторого $V > 0$.

Выберем шаги дискретизации h , τ и параметр регуляризации α так, чтобы $w_{N+1} \leq V\delta$ и найдем значение V .

Полагаем, что $L\tau < 1$, и $\frac{2h^2}{L\tau} < 1$, а параметр регуляризации выбирается из условия $\frac{2\alpha h^2}{L}\Phi e^{\beta(\ell+T)} \leq \delta$, тогда $K < 5$ и оценка (3.46) определяется неравенством:

$$w_{N+1} \leq 5^{N-1} \left(2\delta + 2C \left(L\tau + \sqrt{L\tau} \right) \right) \leq 2 \cdot 5^{N-1} \left(\delta + 2C\sqrt{L\tau} \right) \quad (3.47)$$

Для $V > 4\delta 5^{2H}$ при $H > 3$ имеет место соотношение

$$N \geq 1 + \log_5 \frac{\sqrt{V\delta}}{2 \left(\delta + 2C\sqrt{L\tau} \right)}$$

Отсюда следует, что условие $w_{N+1} \leq \sqrt{V\delta}$ выполняется, если шаги дискретизации и параметр регуляризации выбирают в соответствии со следующими критериями:

$$\tau < \frac{\delta}{4LC^2} \left(\frac{\sqrt{V}}{2 \cdot 5^H} \right)^2, \quad h^2 < \frac{L\tau}{2}, \quad \alpha \leq \frac{L\delta}{2h^2\Phi e^{\beta(\ell+T)}} \quad (3.48)$$

Таким образом, при выполнении (3.48) гарантированно достигается требуемый уровень точности определения температуры во внутренних точках объекта.

Условия (3.48) свидетельствуют о локальной устойчивости метода дискретной регуляризации, когда устойчивость и сходимость метода зависят от величины шагов дискретизации и для обеспечения требуемой точности вычислительной схемы необходимо согласовывать величину шага дискретизации h и параметра регуляризации α с величинами τ и δ . Отметим, что из последнего неравенства следует, что N может принимать только небольшие значения, а величина V принимает достаточно большие значения.

§ 3.3.1.4 Сравнительный анализ точности решения задач линейного теплопереноса с различной информацией о начальных условиях

С целью проверки принципиальной возможности построения численного решения задачи (3.27), (3.28) с неизвестными начальными условиями, служащими основой для прогнозирования температур во внутренних точках объекта и для получения оценки точности предложенной вычислительной схемы проводился срав-

нительный анализ численных решений двух типов теплопереноса в линейном объекте с тестовыми функциями. Математическая модель задач первого типа включала линейное уравнение теплопроводности с граничными условиями, заданными на одной из границ объекта, а также известные начальные условия. Ко второму типу относились обратные граничные задачи с неизвестными начальными условиями. Для численного решения задач первого типа использовался оптимальный по порядку метод, рассмотренный в разделе 2.3, а для решения задач второго типа использовалась предлагаемая вычислительная схема (3.35), (3.36). В силу ограничений, связанных с использованием оптимального по порядку метода, основанного на проекционной регуляризации, математические модели обоих типов задач включали уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами.

Методика сравнительного анализа заключалась в следующем. На начальном этапе формировали тестовые температурные функции. С этой целью находили численное решение прямой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad \xi \in (0, 1), t \in (0, T). \quad (3.49)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \varphi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.50)$$

$$u(\xi, 0) = 0, \quad \xi \in (0, 1). \quad (3.51)$$

Численные решения $u(x, t)$ задачи (3.49)–(3.51) и значения граничных функций $\varphi(t)$ в дальнейшем использовались в качестве тестовых значений.

Тестовые функции $\psi(t)$ выбирались в соответствии со спецификой имитируемого температурного поля в контрольной точке при $\xi = 1$. В эксперименте были рассмотрены следующие типы полей:

1. Тестовые температурные функции, соответствующие плавному нагреву в контрольной точке. Представителем этого типа является функция $\varphi_1(\tau) = 5\tau e^{-\tau}$.
2. Тестовые функции, соответствующие первоначальному нагреву и последующему охлаждению. Представителем данного типа является $\varphi_2(\tau) = \tau (e^{-\tau} - e^{-1})$
3. Тестовые температурные функции, соответствующие попеременному нагреву и охлаждению. Представителями данного типа являются $\varphi_3(\tau) = \sin(3\pi\tau) e^{-\tau}$

4. Тестовые функции, получаемые при резком перепаде температур во время технологического процесса. Представителями данного типа являются

$$\varphi_4(\tau) = \begin{cases} -40\tau, & \tau \in [0; 0.025], \\ -1, & \tau \in (0.025; 0.5], \\ 80\tau - 39, & \tau \in (0.5; 0.525], \\ 1, & \tau \in (0.525; 1]. \end{cases}$$

На втором этапе осуществляли моделирование функции $u_\xi(0, t) = g_0(t)$, характеризующей внешнее тепловое воздействие. Ситуацию возникновения погрешностей в результатах измерения представляли следующим образом. В каждой точке (x_i, t_j) формировали приближенные значения $g_\delta(t_j) = g_0(t_j) + err_j$, где величины err_j равномерно распределены на $[-\delta, \delta]$. Предлагаемый подход к моделированию g_δ эквивалентен появлению аддитивных случайных погрешностей в результатах измерений вблизи поверхности тела, уровень которых не превосходит δ . Значения g_δ определяли исходные данные в обоих типах задач.

На следующем этапе находили приближенное решение обратной граничной задачи первого типа с известными начальными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad \xi \in (0, 1), t \in (0, T). \quad (3.52)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_\xi(0, t) = g_\delta(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.53)$$

$$u(\xi, 0) = 0, \quad \xi \in (0, 1). \quad (3.54)$$

Для построения решения задачи (3.52)–(3.54) использовалась вычислительная схема оптимального по порядку метода, подробно рассмотренная в разделе 2.3. В результате получали функцию $u(1, t) = u_\delta^F(t)$.

На этом же этапе находили численное решение задачи теплопереноса с неизвестными начальными условиями:

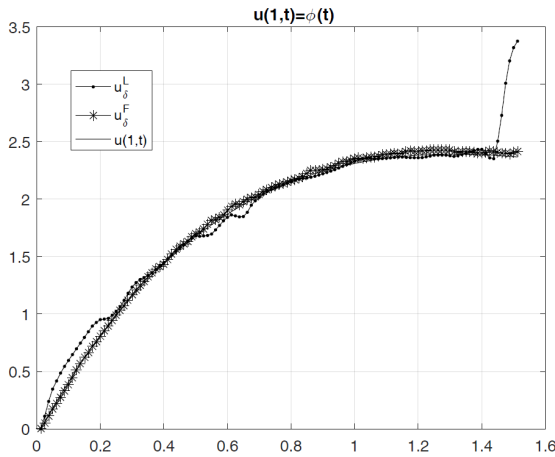
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad \xi \in (0, 1), t \in (0, T). \quad (3.55)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_\xi(0, t) = g_\delta(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.56)$$

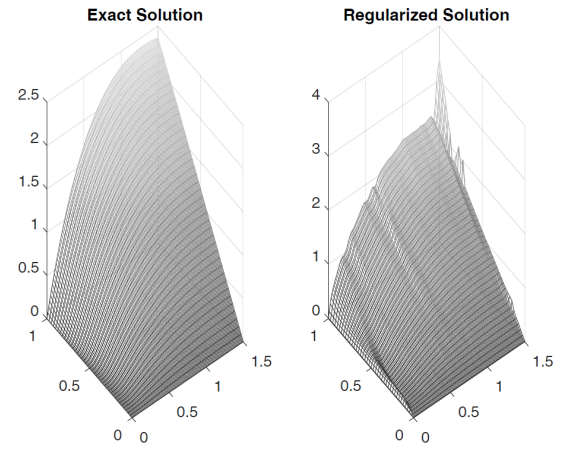
с помощью предложенной вычислительной схемы (3.35), (3.36). В результате получали функцию $u_\delta^\alpha(\xi, t)$ во всей области $[0, 1] \times [0, T]$ вплоть до $u(1, t) = u_\delta^F(t)$.

В завершении проводили сравнительный анализ полученных численных решений u_δ^F и u_δ^L с тестовыми функциями $\varphi_k(t)$.

При проведении эксперимента полагали $\ell = 1$, а $T = 1.5$. Графики функций $u(1, t) = u_\delta^F$, полученные оптимальным по порядку методом, и функций $u(1, t) = u_\delta^L$ $t \in [0, T]$, найденные с помощью предложенного метода дискретной регуляризации, а также графики тестовых значений $u(1, t) = \varphi(t)$ проиллюстрированы на рис. 45(а), 46(а), 47(а), 48(а).

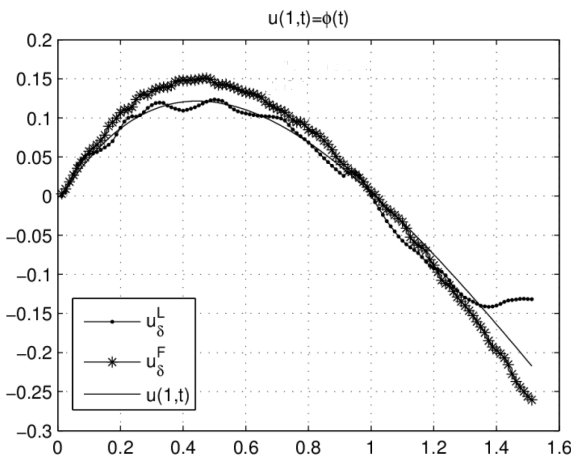


а)

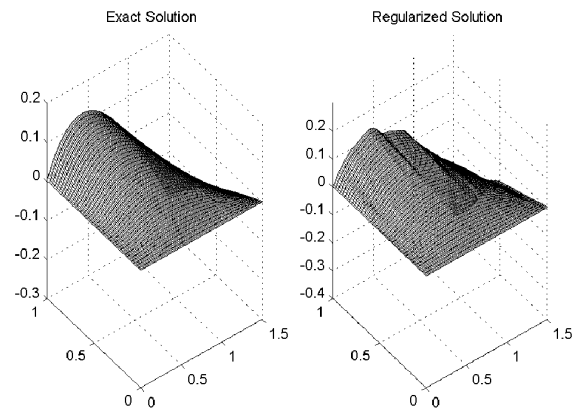


б)

Рис. 45: Результаты прогнозирования температуры для тестовой функции $\varphi_1(t) = 5\tau e^{-t}$. Рис. а) – температурные значения в контрольной точке. Рис. б)– температурное поле во внутренних точках объекта.



а)

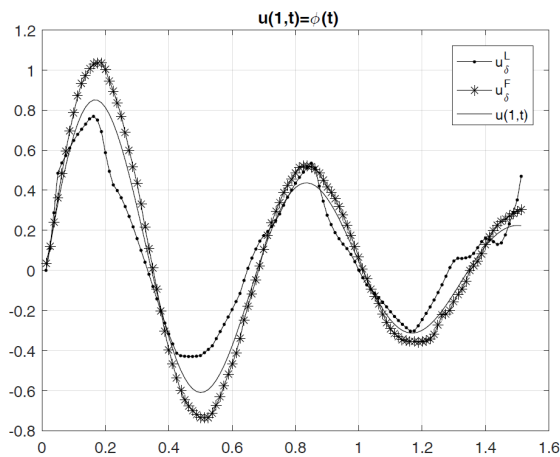


б)

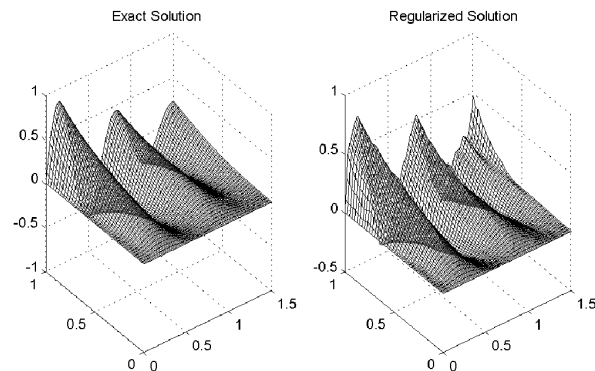
Рис. 46: Результаты прогнозирования температуры для тестовых функций $\varphi_2(\tau) = \tau(e^{-\tau} - e^{-1})$. Рис. а) – температурные значения в контрольной точке. Рис. б)– температурное поле во внутренних точках объекта.

Для тестовых функций $\varphi_k(t)$ использовали обозначение $u(1, t)$, для графика численного решения u_δ^F обратной задачи (3.52)–(3.54) с известными начальными условиями – обозначение u_δ^F . Обозначение u_δ^L соответствует решению зада-

чи (3.55), (3.56) с неизвестными начальными условиями, полученным в точках (ξ_{N+1}, t_j) , $j = \overline{1, M+1}$ с помощью предложенной схемы (3.35), (3.36).

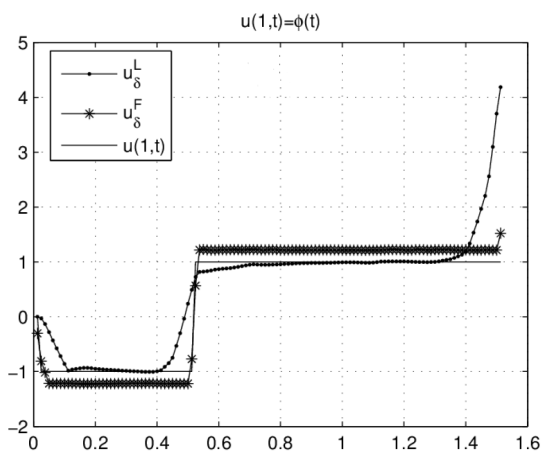


а)

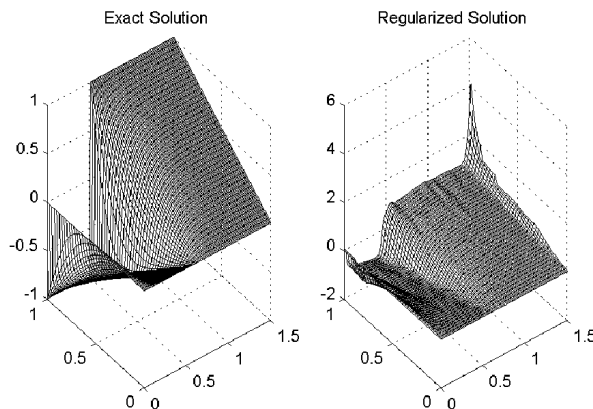


б)

Рис. 47: Результаты прогнозирования температуры для тестовой функции $\varphi_3(\tau) = \sin(3\pi\tau)e^{-\tau}$. Рис. а) – температурные значения в контрольной точке. Рис. б)– температурное поле во внутренних точках объекта.



а)



б)

Рис. 48: Результаты прогнозирования температуры для тестовой функции $\varphi_4(\tau)$. Рис. а) – температурные значения в контрольной точке. Рис. б)– температурное поле во внутренних точках объекта.

Результаты вычисления температурного поля линейного объекта в области $[0, \ell] \times [0, T]$, полученные с помощью предлагаемой схемы дискретной регуляризации, а также тестовые температурные поля представлены двумерными поверхностями на рисунках 45(б), 46(б), 47(б), 48(б). Поверхность ”*Exact solution*” иллюстрирует график решения $u(\xi, t)$ прямой задачи (3.49)–(3.51), а поверхность ”*Regularized solution*” – график приближенного решения $u_\delta^\alpha(\xi, t)$ обратной задачи с неизвестными начальными условиями. Ось абсцисс соответствует значениям

переменной $x \in [0, 1]$, ось ординат - переменной $t \in [0, 1.5]$, а ось аппликат связана со значениями функций $u(\xi, t)$ и $u_\delta^\alpha(\xi, t)$ при $(\xi, t) \in [0, \ell] \times [0, T]$.

Для проведения сравнительного анализа использовали величины Δ_F , Δ_L и Θ , определяемые формулами:

$$\Delta_F = \max_{t \in (\eta, T-\eta)} |u_\delta^F - \varphi|, \quad \Delta_L = \max_{t \in (\eta, T-\eta)} |u_\delta^L - \varphi|$$

$$\Theta = \max_{(\xi, t) \in \Omega_\eta} \left| \frac{u_\delta^\alpha(\xi, t) - u(\xi, t)}{u(\xi, t)} \right|$$

Величины Δ_F и Δ_L характеризуют наибольшее возможное отклонение прогнозируемых температур u_δ^F и u_δ^L в контрольной точке $\xi = \ell$ от действительных значений $\varphi(t)$. Величина Θ соответствует относительной погрешности метода прогнозирования температур во внутренних точках объекта. Результаты сравнительного анализа точности решений обратных задач, представлены в таблице 11. Отметим, что величины Δ_F , Δ_L и Θ вычислялись только в области устойчивости Ω_η , величина $\eta = 0.15T$

Таблица 11: Экспериментальные оценки температурных отклонений

тестовая функция	δ	Δ_F	Δ_L	Θ
$\psi_1(\tau) = u(1, \tau) = 5\tau e^{-\tau}$	0.01	0.0167	0.0241	0.0352
	0.03	0.0375	0.0566	0.0513
	0.05	0.0485	0.0642	0.0727
$\psi_2(\tau) = u(1, \tau) = t(e^{-\tau} - e^{-1})$	0.01	0.0155	0.0204	0.0318
	0.03	0.0385	0.0442	0.0512
	0.05	0.0641	0.0708	0.0821
$\psi_3(\tau) = u(1, \tau) = \sin(3\pi\tau)e^{-\tau}$	0.01	0.0183	0.0341	0.0398
	0.03	0.0354	0.0471	0.0587
	0.05	0.0562	0.0788	0.0689
	0.1	0.1393	0.2478	0.1478
$\psi_4(\tau) = u(1, \tau) = \begin{cases} -40\tau, & \tau \in [0; 0.025], \\ -1, & \tau \in (0.025; 0.5], \\ 80t - 39, & \tau \in (0.5; 0.525], \\ 1, & \tau \in (0.525; 1]. \end{cases}$	0.01	0.0141	0.0236	0.0319
	0.03	0.0405	0.0598	0.0647
	0.05	0.0676	0.0756	0.0812
	0.1	0.1876	0.2307	0.3103

Результаты эксперимента приводят следующим выводам. Применение этого метода позволило впервые получить решение обратных задач при неизвестных начальных условиях. Оптимальный по порядку метод, основанный на проекционной регуляризации, позволяет получать результаты с гарантированной точностью, но применение этого метода возможно только для теплопереноса с известными начальными условиями, характеризующими температуру во внутренних точках объекта в начальный момент времени. При этом, оптимальный по порядку метод позволяет находить только граничную функцию $u(1, t) = u_{\delta}^F$, а для определения температуры во внутренних точках объекта решают прямую задачу (3.49)–(3.51). Таким образом, использование подхода, основанного на проекционной регуляризации требует привлечение дополнительной вычислительной процедуры, что в свою очередь, приводит к возникновению дополнительных погрешностей.

Существенное преимущество предлагаемого метода дискретной регуляризации заключается в реализации возможности непосредственно прогнозировать температуру во внутренних точках объекте с неизвестным начальным состоянием. Результаты сравнительного анализа свидетельствуют об удовлетворительной точности этого метода в области Ω_{η} при $t \in [\eta, T - \eta]$, получаемых в результате внешнего теплового воздействия $g(t)$. Значительные отклонения найденных функций от тестовых значений согласуются с теоретическими положениями относительно структуры области устойчивости решений задач с неизвестными начальными условиями, представленным в [90]. Согласно этим результатам, отсутствие начальных условий порождает неустойчивость численных решений в начальный и конечный моменты времени, компенсировать которую невозможно из-за отсутствия информации о состоянии объекта в начальный момент времени.

§ 3.3.1.5 Результаты вычислительного эксперимента в условиях изменяющихся теплофизических свойств материала

Основная целью вычислительного эксперимента заключалась в проверке принципиальной возможности построить численное решение обратной задачи с неизвестными начальными условиями, соответствующей проблеме прогнозирования

температуры в объекте с неизвестным начальным тепловым состоянием, теплофизические свойства материала которого изменяются относительно пространства и времени, а исходные данные содержат отклонения от действительных значений, а также в оценке точности построенных решений.

Математическая модель рассматриваемой обратной задачи имеет вид :

$$c(x, t)\rho(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + h(x, t)(\theta - u) + f(x, t), \quad (3.57)$$

$$u(0, t) = p(t), u_x(0, t) = g(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.58)$$

где $(x, t) \in (0, \ell) \times (0, T)$, $h(x, t)$ —коэффициент теплообмена со средой. Ситуация, когда исходные данные содержат отклонения от действительных значений представлена следующим образом. Вместо действительных значений p_0, g_0 известны p_δ, g_δ и δ такие, что $\max_{(x, t) \in \overline{\Omega_T}} \{|p_0 - p_\delta|, |g_0 - g_\delta|\} < \delta$. В этой задаче требовалось найти решение $u(x, t)$ при $(x, t) \in \overline{\Omega_T} = [0, \ell] \times [0, T]$ вплоть до граничных значений $u(\ell, t) = \varphi(t)$ и сравнить его с тестовыми функциями.

Методика эксперимента аналогична приведенной в разделе 3.3.1. На начальном этапе эксперимента находили решение $u_0(x, t)$ прямой задачи:

$$c(x, t)\rho(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + h(x, t)(\theta - u) + f(x, t), \quad (3.59)$$

$$u(0, t) = p(t), u(\ell, t) = \varphi(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.60)$$

$$u(x, 0) = \chi(x), \quad x \in [0, \ell], \quad (3.61)$$

Решение $u_0(x, t)$ прямой задачи и функцию $\varphi(t)$ использовали в дальнейшем в качестве тестовых значений. Функции $\varphi(t)$ отражали ожидаемый характер изменения температур в контрольной точке. В эксперименте были рассмотрены следующие типы изменений температур:

1. Тестовые функции, соответствующие постепенному повышению температуры в контрольной точке. Представителем данного типа является функция

$$\varphi_1(t) = u(\ell, t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} - 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

2. Тестовые функции, соответствующие первоначальному повышению и последующему снижению температур. Данный тип представлен $\varphi_2(t) = t(e^{-t} - e^{-1})$

3. Тестовые функции, соответствующие чередующимся повышением и снижением температур. Этот тип представлен $\varphi_3(t) = t \sin(3\pi t) e^{-t}$ и $\varphi_4(t) = \sin(10\pi t) e^{-t}$

Далее моделировали функцию внешнего теплового воздействия $g(t)$, используя конечно-разностный аналог частной производной первого порядка. Отклонения в результатах измерений моделировали, добавляя аддитивный шум к $p(t), g(t)$ согласно формулам

$$p_\delta(t_j) = p(t_j) + \text{err}_j^p, \quad g_\delta(t_j) = g(t_j) + \text{err}_j^g,$$

где величины $\text{err}_j^p, \text{err}_j^g$ равномерно распределены на $[-\delta, \delta]$. Полученные значения p_δ, g_δ определяли исходные данные в обратной задаче (3.57), (3.58). Далее находили приближенное решение $u_\delta^\alpha(x, t)$ в области $\overline{\Omega}_T = [0, \ell] \times [0, T]$ с помощью предложенной вычислительной схемы дискретной регуляризации.

На следующем этапе эксперимента вычисляли погрешности полученных решений и проводили сравнительный анализ полученных значений $u_\delta^\alpha(x, t)$ с тестовыми значениям $u(x, t)$.

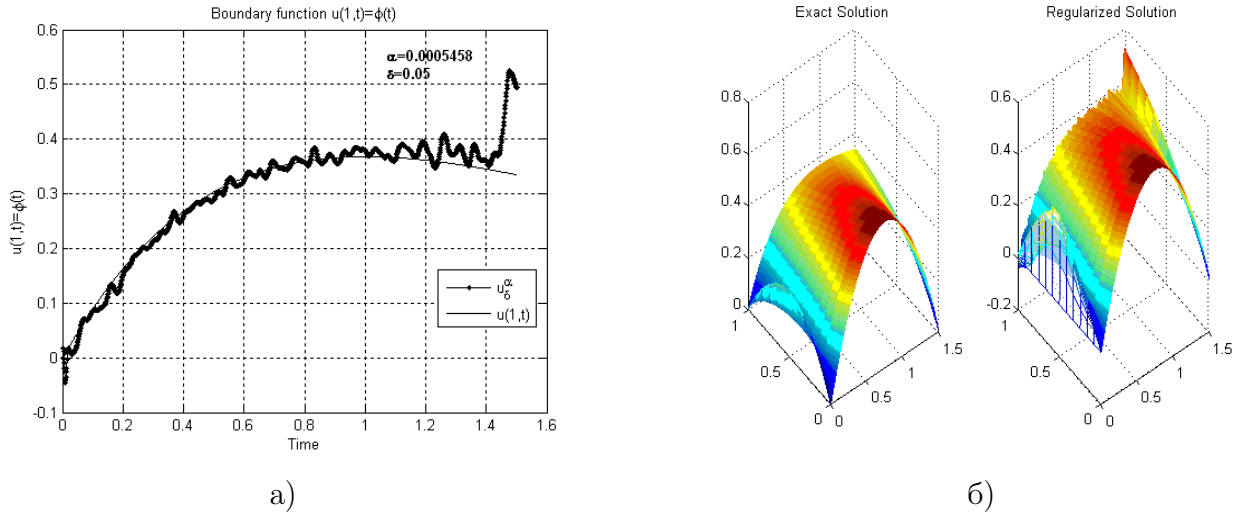
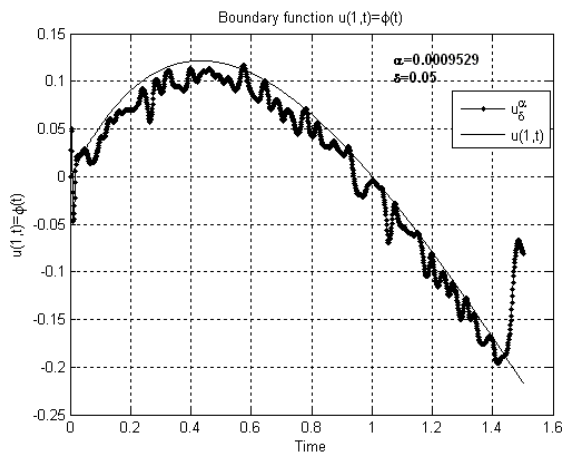


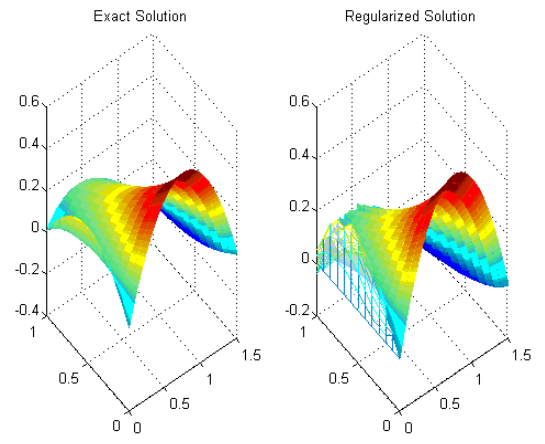
Рис. 49: Результаты прогнозирования температуры для тестовой функции $\varphi_1(\tau)$. Рис. а) – температурные значения в контрольной точке. Рис. б) – температурное поле во внутренних точках объекта.

Результаты вычислительных экспериментов для $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \varphi_4(t)$ при $\ell = 1$ и $T = 1.5$ проиллюстрированы на рисунках 49–52 и представлены в табл.12.

Одномерные графики, обозначенные $u(1, t)$, демонстрируют тестовые значения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \varphi_4(t)$, а графики, обозначенные u_δ^α , соответствуют температурным функциям в контрольной точке, найденным с помощью предложенной вычислительной схемы дискретной регуляризации.

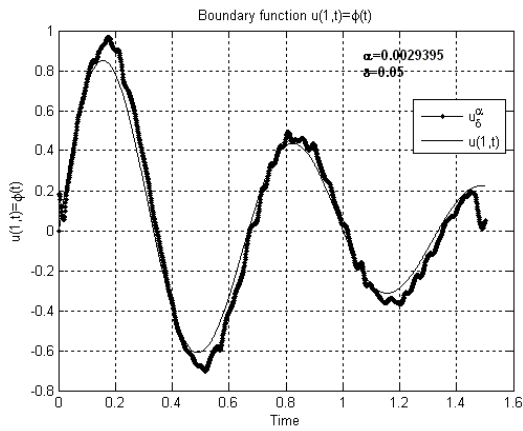


а)

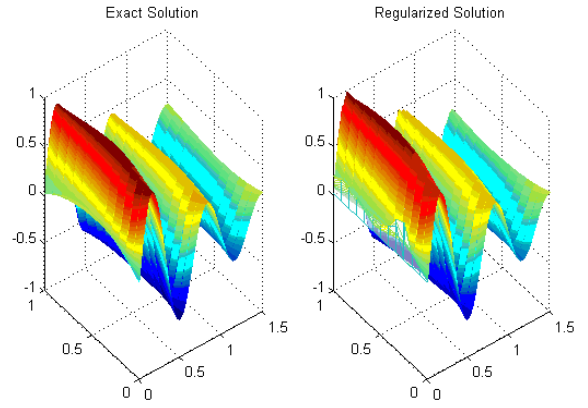


б)

Рис. 50: Результаты прогнозирования температуры для тестовой функции $\psi_3(t) = t(e^{-t} - e^{-1})$. Рис. а) – температурные значения в контрольной точке. Рис. б)– температурное поле во внутренних точках объекта.



а)



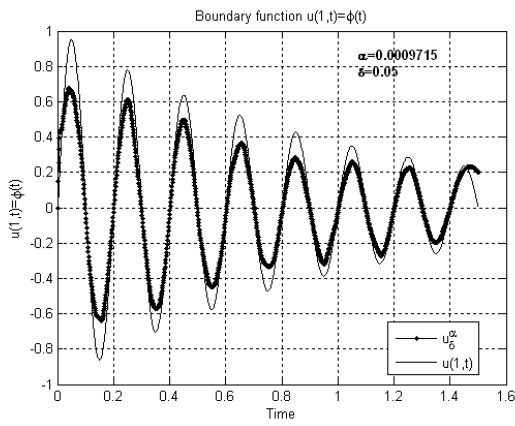
б)

Рис. 51: Результаты прогнозирования температуры для тестовой функции $\psi_3(\tau) = t \sin(3\pi t) e^{-t}$. Рис. а) – температурные значения в контрольной точке. Рис. б)– температурное поле во внутренних точках объекта.

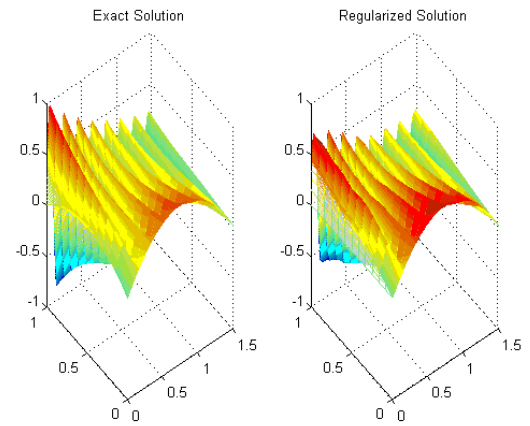
Двумерные поверхности, обозначенные ”*Exact solution*”, соответствуют тестовым значениям $u(x, t)$, полученным при решении прямой задачи (3.59)–(3.61). Поверхности, обозначенные ”*Regularized solution*” соответствуют решению u_δ^α обратной задачи (3.57), (3.58) с неизвестными начальными условиями, полученному во всей области $\overline{\Omega_T}$ с помощью метода дискретной регуляризации. Ось абсцисс соответствует значениям пространственной переменной временной x , ось ординат – переменной t , а ось аппликат связана со значениями функций $u(x, t)$ и $u_\delta^\alpha(x, t)$.

С целью получения оценок точности построенных решений обратной задачи использовали величины Δ и Θ , определяемые формулами:

$$\Delta = \max_{t \in (\eta, T-\eta)} |u_\delta^\alpha(\ell, t) - \phi(t)|, \quad \Theta = \max_{(x,t) \in \Omega_\eta} \left| \frac{u_\delta^\alpha(x, t) - u(\xi, t)}{u(x, t)} \right|$$



а)



б)

Рис. 52: Результаты прогнозирования температуры для тестовой функции $\psi_3(t) = \sin(10\pi t)e^{-t}$. Рис. а) – температурные значения в контрольной точке. Рис. б) – температурное поле во внутренних точках объекта.

Величина Δ характеризуют наибольшее возможное отклонение прогнозируемых в контрольной точке температур $u_\delta^\alpha(\ell, t)$ от действительных значений $\varphi(t)$. Величина Θ соответствует относительной погрешности метода прогнозирования температур во внутренних точках объекта.

Таблица 12: Оценки температурных отклонений

тестовая функция	δ	Δ	Θ
$\psi_1(\tau) = u(1, t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} - 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$	0.01	0.0211	0.0387
	0.03	0.0498	0.0566
	0.05	0.0698	0.0742
$\psi_2(\tau) = u(1, t) = t(e^{-t} - e^{-1})$	0.01	0.0204	0.0318
	0.03	0.0442	0.0512
	0.05	0.0708	0.0621
$\psi_3(\tau) = u(1, t) = t\sin(3\pi t)e^{-t}$	0.01	0.0230	0.0341
	0.03	0.0487	0.0571
	0.05	0.0712	0.0818
	0.1	0.2278	0.2478
$\psi_4(\tau) = u(1, t) = \sin(10\pi t)e^{-t}$	0.01	0.0203	0.0236
	0.03	0.0575	0.0798
	0.05	0.0973	0.1098
	0.1	0.2307	0.2582

Результаты экспериментов свидетельствуют о следующем. Применение предложенного метода позволило впервые получить решение обратных задач с перемен-

ными коэффициентами при неизвестных начальных условиях. Метод дискретной регуляризации, предложенный в работе, позволяет получать требуемые температурные значения при неизвестных начальных данных с удовлетворительной точностью. Экспериментальные оценки погрешности полученных решений согласуются с теоретическими результатами и свидетельствуют о достаточной устойчивости метода относительно погрешности исходных данных.

Полученные результаты служат основой метода прогнозирования температурного поля объекта с неизвестным начальным тепловым состоянием по результатам измерений, содержащим отклонения от действительных значений.

3.3.2 Метод дискретной регуляризации для задач измерения, связанных с теплопереносом в пространственных объектах

В данном разделе предложено обобщение метода дискретной регуляризации для решения задачи теплопереноса в неоднородном пространственном объекте с кусочно-линейной границей и неизвестным начальным тепловым состоянием. В разделе приведены результаты исследования устойчивости метода. Получены теоретические оценки точности численных решений задачи, а также представлены результаты вычислительного эксперимента. Цель эксперимента заключалась в проверке принципиальной возможности построения вычислительной схемы решения обратной задачи теплопереноса с граничными условиями, известными на части границы и неизвестными начальными условиями и оценки точности найденных решений. Разработанный метод дискретной регуляризации служит основой для прогнозирования температуры получаемую во внутренних точках пространственного объекта под действием выбранного внешнего теплового режима.

§ 3.3.2.1 Постановка задачи измерения, связанной с теплопереносом в пространственном объекте

В соответствии с обобщенной математической моделью задачи измерения, приведенной в разделе 3.1.3, получаем следующее представление задачи теплопереноса в пространственном объекте с неизвестным начальным тепловым состоянием.

Объекту, подвергаемому внешнему тепловому воздействию, соответствует замкнутое ограниченное выпуклое множество $\Omega \subset R^m$, $m = 2, 3$ с кусочно-линейной границей $\partial\Omega$. Поверхности, доступной для измерения, соответствует множество $\Gamma \subset \partial\Omega$, являющееся частью $\partial\Omega$. Текущей точке P области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ соответствует $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Во время технологического процесса продолжительностью T в каждой точке $x \in \Gamma$ проведено $N_t + 1$ температурных измерений. Полагаем $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ и $\bar{\Omega}_T = (\Omega \cup \partial\Omega) \times [0, T]$.

Согласно (3.6), уравнение теплопереноса примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{s,k=1}^m a_{sk}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_k} + \sum_{k=1}^m b_k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_k} + \gamma(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T \quad (3.62)$$

где $a_{sk} = \lambda(\dots x_s, \dots x_k \dots, t)$, $b_k = \frac{\partial \lambda(x,t)}{\partial x_k}$, $a_{sk}(x,t) \in C^1(\Omega_T)$, $b_k(x,t) \in C(\Omega_T)$, $s, k = \bar{1, m}$, $\gamma(x,t), f(x,t) \in C(\Omega_T)$, $m = 2, 3$

Условие (3.7), представляющее влияние выбранного режима внешнего теплового воздействия и результаты поверхностных измерений температуры, примет вид

$$u(x,t) |_{\Gamma_T} = p(x,t), \quad \frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma_T} = g(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T \quad (3.63)$$

где n – вектор нормали к поверхности $\partial\Omega$, множество $\Gamma_T = \Gamma \times [0, T]$.

Из (3.8) получаем, что существуют $\Phi, \beta, S > 0$ такие, что

$$\left\{ \max_{\bar{\Omega}_T} |\partial^2 u_t|, \max_{\bar{\Omega}_T} |\partial u_x|, \max_{\bar{\Omega}_T} |\partial^2 u_x|, \max_{\bar{\Omega}_T} |\partial^3 u_x| \right\} \leq S, \quad (3.64)$$

$$\max_{\bar{\Omega}_T} |u(x,t)| \leq \Phi e^{\beta t}.$$

Ситуация, когда исходные данные p_δ, g_δ содержат отклонения от действительных значений p_0, g_0 представлена следующим образом. Вместо точных исходных данных p_0, g_0 известны p_δ, g_δ и допустимый уровень δ такие, что

$$\max \left\{ \max_{(x,t) \in \bar{\Gamma}_T} \|p_0 - p_\delta\|, \max_{(x,t) \in \bar{\Gamma}_T} \|g_0 - g_\delta\| \right\} < \delta.$$

Требуется разработать метод, позволяющий находить функцию $u_\delta^\alpha(x,t)$ из соотношений (3.62), (3.63) по исходным данным p_δ, g_δ вплоть до граничных значений

$$u(x,t) |_{\partial\Omega \setminus \Gamma} = \varphi(x,t)$$

а также оценить уклонение найденных $u_\delta^\alpha(x,t)$ от действительных значений.

Как отмечалось в операторном представлении задачи измерения, приведенном в разделе 3.1.4, задача (3.62), (3.63) относится к классу неустойчивых задач, когда при использовании общепринятых алгоритмов, малые отклонения в исходных данных приводят к возникновению существенных погрешностей в получаемых численных решениях. Таким образом, при построении численного метода следует опираться на использование регуляризирующих подходов, обеспечивающих устойчивость вычислительной схемы относительно погрешности исходных данных.

§ 3.3.2.2 Построение вычислительной схемы для многомерных задач

Основываясь на свойствах температурных функций, (3.64), для решения задачи (3.62)–(3.63) в данном разделе предлагается многомерный аналог метода дискретной регуляризации, обобщающий результаты, полученные для линейного объекта.

Основные идеи метода заключаются в следующем. Вычислительная схема метода включает основную и несколько краевых явных конечно-разностных схем, со стабилизирующим функционалом αu , построенных на различных шаблонах, в которых, в отличие от существующих явных схем, находят значение функции $u(x, t)$ относительно пространственной переменной. Такой подход к решению задачи с неизвестными начальными условиями применяется впервые и позволяет уменьшить влияние неизвестных начальных условий на результаты вычислений. Введение аддитивного функционала αu и согласование шагов дискретизации по пространству с величиной шага дискретизации по времени и с уровнем погрешности исходных данных обеспечивает устойчивость вычислительной схемы.

Основная вычислительная схема метода дискретной регуляризации для многомерных областей, представленная в данной работе, с одной стороны, позволяет раскрыть суть метода, а с другой стороны, минимизирует трудоемкость проверки вычислительной процедуры на достоверность, когда необходимо убедиться, что предложенный метод последовательно приводит к численным решениям с приемлемым уровнем точности. Основываясь на предложенном в данной работе подходе, допустимо обобщение метода дискретной регуляризации для случая $\Omega \subset R^m$ при $m \geq 1$ и задачи теплопроводности с неприведенной формой уравнения (3.62).

Рассматривается процесс теплопереноса в объекте с неизвестной начальной температурой, для каждого сечения которого выбран одинаковый режим внешнего теплового воздействия. Датчики для измерения температуры расположены в плоскостях, перпендикулярных плоскости, на которую оказывается внешнее воздействие. Сечение представлено множеством $\bar{\Omega} = [0, X] \times [0, Y]$, где каждой точке P сечения соответствует точка $x = (x, y) \in \Omega$. Множества $M_x = [0, X] \times [0, T]$ и $M_y = [0, Y] \times [0, T]$. Температура в текущей точке P в текущий момент времени t характеризуется функцией $u(x, y, t)$. Внешнему тепловому воздействию, характеризуемому функцией $g(x, t)$, подвергается только одна граница сечения. Схема теплового воздействия представлена на рис.53

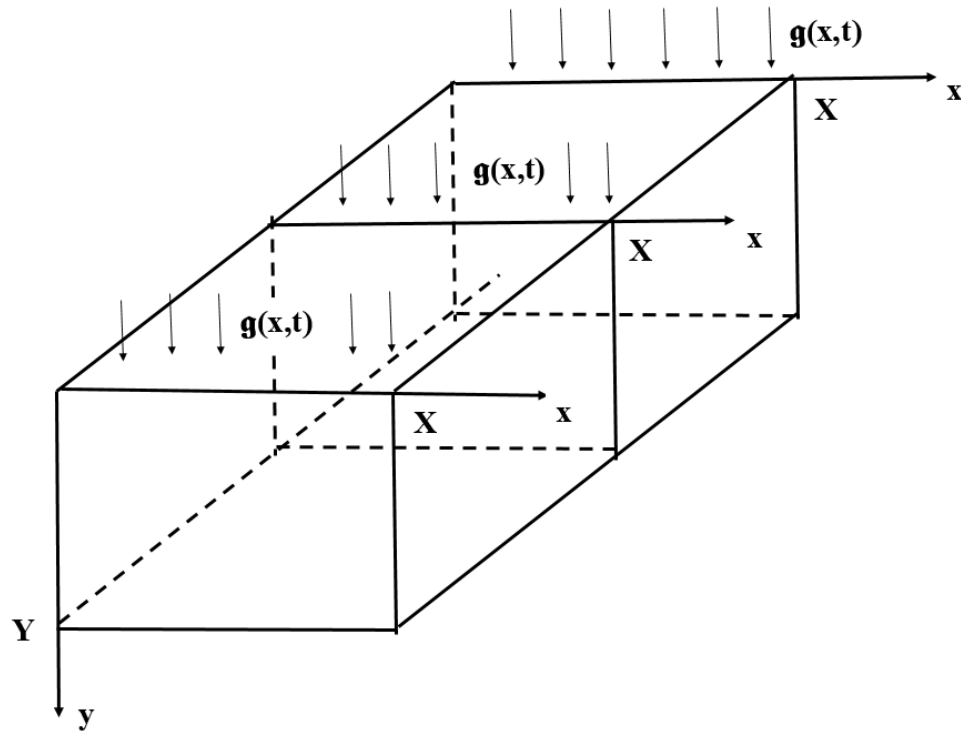


Рис. 53: Схема теплового воздействия.

Математическая модель теплопереноса включает приведенную форму уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, y, t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega_T, \quad (3.65)$$

и граничные условия

$$u(x, 0, t) = p(x, t), \quad u_y(x, 0, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in M_x, \quad (3.66)$$

$$u(0, y, t) = q(y, t), \quad u(X, y, t) = h(y, t) \quad (y, t) \in M_y, \quad (3.67)$$

Информация о начальном тепловом состоянии $u(x, y, 0)$ объекта не может быть получена без нарушения его целостности, поэтому в задаче (3.65)–(3.67) начальные условия $u(x, y, 0)$ неизвестны.

В рассматриваемой задаче теплопереноса (3.65)–(3.67) требуется найти функцию $u_\delta^\alpha(x, t)$ во внутренних точках объекта, соответствующую прогнозируемым температурам и оценить ее величину отклонений от точных значений, ассоциированных с действительными температурами, получаемыми в результате внешнего теплового воздействия. Величина отклонений характеризует наибольшее возможное значение температурных погрешностей результатов прогнозирования.

Существование и единственность решения задачи (3.65)–(3.67) в некоторой области Ω_η обоснована в [90], а область Ω_η имеет следующую структуру

$$\Omega_\eta = \left\{ (x, y, t) : 0 < \frac{x}{\Theta} < \left(1 - \frac{y^2}{2(\zeta\Theta)^2} - \frac{t^2}{2(\xi T)^2} \right) \right\}$$

где $\zeta, \xi \in (0, 1)$ and $\Theta^2 = \frac{x^2}{X^2} + \frac{y^2}{Y^2}$.

При решении задачи (3.65)–(3.67) необходимо учитывать, что вместо действительных значений p_0, q_0, g_0, h_0 известны $p_\delta, q_\delta, g_\delta, h_\delta$ и допустимый уровень δ т.ч.

$$\max \left\{ \max_{(x,t) \in \overline{\Omega}_T} |p_0 - p_\delta|, \max_{(x,t) \in \overline{\Omega}_T} |q_0 - q_\delta|, \max_{(x,t) \in \overline{\Omega}_T} |g_0 - g_\delta|, \max_{(x,t) \in \overline{\Omega}_T} |h_0 - h_\delta| \right\} < \delta. \quad (3.68)$$

Таким образом, необходимо разработать вычислительную схему, устойчивую относительно погрешности исходных данных и позволяющую определять температурные значения во внутренних точках с допустимым уровнем погрешности ε .

Вычислительная схема метода дискретной регуляризации

Введем конечно-разностную сетку G в прямоугольнике $\overline{\Omega}_T$,

$$G = \left\{ \begin{array}{l} (x_i, y_j, t_k) : x = (i-1)h_x, y = (j-1)h_y, t = (k-1)\tau, \\ h_x = X/N_x; h_y = Y/N_y; \tau = T/N_t; \\ i = \overline{1, N_x + 1}; j = \overline{1, N_y + 1}; k = \overline{1, N_t + 1}. \end{array} \right.$$

Рассмотрим множество дискретных функций $V_h = \{v(x_i, t_k) = v_{i,k}\}$, заданных на G , и, следуя подходу, предложенному А.А. Самарским [136], определим конечно-

разностный аналог частных производных в каждой точке G следующим образом

$$\begin{aligned} v_{xx}^{i,j,k} &= \frac{v_{i+1,j,k} - 2v_{i,j,k} + v_{i-1,j,k}}{h^2}, & i = \overline{2, N_x}, j = \overline{2, N_y + 1}, k = \overline{1, N_t + 1}, \\ v_{yy}^{i,j,k} &= \frac{v_{i,j+1,k} - 2v_{i,j,k} + v_{i,j-1,k}}{h^2}, & i = \overline{2, N_x + 1}, j = \overline{2, N_y}, k = \overline{1, N_t + 1} \\ v_t^{i,j,k} &= \frac{v_{i,j,k+1} - v_{i,j,k}}{\tau}, & i = \overline{1, N_x + 1}, k = \overline{1, N_t}. \end{aligned}$$

Обозначим $f_{i,j,k}$ значения функции $f(x, y, t)$ в точках $(x_i, y_j, t_k) \in G$, обозначение $a_{i,j,k}$ соответствует значениям коэффициента $a(x_i, y_j, t_k)$ в этих же точках. Реализация **основных идей многомерного метода дискретной регуляризации** в вычислительной схеме проводится следующим образом.

Первый ключевой момент построения вычислительной схемы состоит в том, что при ее формировании комбинируют конечно-разностные аналоги уравнения (3.65) для внутренних и крайних точек области. Для внутренних точек (x_i, y_j, t_k) при $\overline{i = 2, N_x}, j = \overline{3, N_y}$ и $k = \overline{1, N_t}$ предлагается использовать уравнение

$$v_t^{i,j,k} = a_{i,j,k} (v_{xx}^{i,j,k} + v_{yy}^{i,j,k}) + f_{i,j,k}, \quad k = \overline{1, N_t}, \quad (3.69)$$

В крайних точках (x_i, y_j, t_{N_t+1}) . при $\overline{i = 2, N_x}, j = \overline{3, N_y}$ уравнения (3.65) заменяется следующим конечно-разностным аналогом:

$$\begin{aligned} v_t^{i,j,N_t+1} &= \sigma a_{i,j,N_t+1} [v_{xx}^{i,j,N_t+1} + v_{yy}^{i,j,N_t+1}] + \\ &+ (1 - \sigma) a_{i,j,N_t} [v_{xx}^{i,j,N_t} + v_{yy}^{i,j,N_t}] + f_{i,j,N_t+1} \end{aligned} \quad (3.70)$$

где $\sigma \in (0, 1)$. Граничные условия представлены соотношениями:

$$\begin{aligned} v_{i,1,k} &= p_{i,k}, v_y^{i,1,k} = q_{i,k}, & i = \overline{1, N_x + 1}, k = \overline{1, N_t + 1}, \\ v_{1,j,k} &= g_{j,k}, v_{N_x+1,j,k} = h_{j,k}, & j = \overline{1, N_y + 1}, k = \overline{1, N_t + 1} \end{aligned}$$

Второй ключевой момент построения метода дискретной регуляризации связан с обеспечением устойчивости вычислительной схемы. Известно, [110], [137] что непосредственное использование явной вычислительной схемы, основанной на конечно-разностных аналогах задачи теплопереноса приводит к неустойчивым решениям. С целью обеспечения устойчивости вычислительной схемы, в уравнения (3.69) и (3.70) вводят слагаемое $\alpha v_{i,j,k}$.

Третья идея метода заключается в том, что основываясь на (3.69), (3.70) переходят к явной схеме для вычисления значений функции $v_{i,j+1,k}$ относительно про-

странственной переменной y_{j+1} при $\overline{i = 2, N_x}$ и $k = \overline{1, N_t + 1}$. Такой подход принципиально отличается от общепринятых приемов построения явных схем [163], [6], [137], [136], когда приближенное решение обратной задачи определяется относительно переменной по времени, применяется впервые и позволяет уменьшить влияние неизвестных начальных условий на устойчивость схемы.

Таким образом, для вычисления значений $v_{i,j+1,k}$ во внутренних точках предлагается использовать уравнение

$$v_{i,j+1,k} = 2v_{i,j,k} - v_{i,j-1,k} + \frac{h_y^2}{a_{i,j,k}} \left[v_t^{i,j,k} - a_{i,j,k} v_{xx}^{i,j,k} - f_{i,j,k} - \alpha v_{i,j,k} \right], \quad k = \overline{1, N_t}, \quad (3.71)$$

а при $k = N_t + 1$ значения $v_{i,j+1,N_t+1}$ получают из уравнения:

$$\begin{aligned} v_{i,j+1,N_t+1} &= 2v_{i,j,N_t+1} - v_{i,j-1,N_t+1} + \\ &+ \frac{h_y^2}{a_{i,j,N_t+1}} \left[a_{i,j,N_t+1} v_{xx}^{i,j,N_t+1} - v_t^{i,j,N_t+1} - f_{i,j,N_t+1} - \alpha v_{i,j,N_t+1} \right] - \\ &- \frac{(1 - \sigma) h_y^2}{\sigma a_{i,j,N_t+1}} \left[a_{i,j,N_t} v_{xx}^{i,j,N_t} + a_{i,j,N_t+1} v_{yy}^{i,j,N_t} \right]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Уравнения (3.71), (3.72) эквивалентны добавлению слагаемого αv в уравнение (3.10). В результате, получаем итерационный процесс, позволяющий вычислять неизвестные значения $v_{i,j+1,k}$ последовательно при всех $j = \overline{2, N_y}$, $k = \overline{1, N_t + 1}$.

Таким образом, **основне этапы реализации вычислительной схемы** метода дискретной регуляризации заключаются в следующем. Сначала согласуют шаг дискретизации h_x , h_y и параметр регуляризации α с величиной τ . Далее используя (3.66), определяют $v_{1,j}$, $v_{2,j}$ при $j = \overline{1, N_t}$ следующим образом:

$$v_{1,j} = p_j; \quad v_{2,j} = p_j + hg_j. \quad (3.73)$$

Затем, используя уравнений (3.71) и (3.72), реализуют итерационный процесс. На каждом шаге итерационного процесса находят $v_{i,j+1,k}$, в узлах сетки (x_i, y_{j+1}, t_k) при $j = \overline{2, N_x}$, $j = \overline{3, N_y}$ и $k = \overline{1, N_t + 1}$. Получаемые приближенные решения $v_{i,j+1,k}$ соответствуют прогнозируемым температурам $u_\delta^\alpha(x_i, y_{j+1}, t_k)$ в точке (x_i, y_{j+1}) в момент времени t_k .

В результате вычисляем температурные значения во внутренних точках объекта, соответствующих приближенным значениям $u_\delta^\alpha(x, y, t)$ искомой функции $u(x, y, t)$.

§ 3.3.2.3 Исследование устойчивости метода дискретной регуляризации для многомерных задач с неизвестными начальными условиями

Исследование устойчивости предложенной вычислительной схемы проведем согласно подходу, представленному в [159]. С этой целью определим параметры \mathfrak{S} , L , F и величины ϖ_{j+1} следующим образом:

$$\mathfrak{S} = \max_{i,k} |g_{i,k}|, \quad L = \min_{i,j,k} |a_{i,j,k}|, \quad F = \max_{i,j,k} |f_{i,j,k}|,$$

$$\varpi_{j+1} = \max_{i,k} |v_{i,j+1,k} - v_{i,j,k}|,$$

Учитывая, что действительным исходным данным соответствуют значения $p_{i,k}^0$, $g_{i,k}^0$, а измеренным значениям соответствуют величины $p_{i,k}^\delta$, $g_{i,k}^\delta$, получаем

$$\begin{aligned} \varpi_2 &= \max_{i,k} |v_{i,2,k} - v_{i,1,k}| \leq \max_{i,k} |p_{i,k}^\delta + g_{i,k}^\delta h_y - p_{i,k}^0| \leq \\ &\leq \max_{i,k} |(g_{i,k}^0 + g_{i,k}^\delta) h_y - g_{i,k}^0| \leq \max_{i,k} |(g_{i,k}^\delta - g_{i,k}^0) h_y| + \max_{i,k} |g_{i,k}^0 h_y| \leq (\mathfrak{S} + \delta) h_y. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} v_{i,j+1,k} - v_{i,j,k} &= (v_{i,j,k} - v_{i,j-1,k}) + \frac{h_y^2}{a_{i,j,k}} \left(v_t^{i,j,k} - a_{i,j,k} v_{xx}^{i,j,k} - \alpha v_{i,j,k} - f_{i,j,k} \right) = \\ &= (v_{i,j,k} - v_{i,j-1,k}) + \left(2 \frac{h_y^2}{h_x^2} - \frac{h_y^2}{a_{i,j,k} h_t} \right) v_{i,j,k} + \frac{h_y^2}{a_{i,j,k} h_t} v_{i,j,k+1} - \\ &\quad - \frac{h_y^2}{a_{i,j,k}} \left[\frac{a_{i,j,k}}{h_x^2} (v_{i+1,j,k} + v_{i-1,j,k}) + \alpha v_{i,j,k} + f_{i,j,k} \right]. \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \varpi_{j+1} &\leq \max_{i,k} |v_{i,j+1,k} - v_{i,j,k}| \leq \max_{i,k} |v_{i,j,k} - v_{i,j-1,k}| + 2 \frac{h_y^2}{h_x^2} \max_{i,k} |v_{i,j,k}| + \\ &+ \max_{i,k} \frac{h_y^2}{a_{i,j,k} h_t} \max_{i,k} |v_{i,j,k}| + \max_{i,k} \frac{h_y^2}{a_{i,j,k} h_t} \max_{i,k} |v_{i,j,k+1}| + \frac{h_y^2}{h_x^2} \max_{i,k} |v_{i+1,j,k}| + \\ &+ \frac{h_y^2}{h_x^2} \max_{i,k} |v_{i-1,j,k}| + \max_{i,k} \frac{\alpha h_y^2}{a_{i,j,k} h_x^2} \max_{i,k} |v_{i,j,k}| + \max_{i,k} \frac{h_y^2}{a_{i,j,k}} \max_{i,k} |f_{i,j,k}|. \end{aligned}$$

Принимая во внимание условие (3.64), и учитывая, $\max_{i,k} \frac{1}{a_{i,j,k}} < \frac{1}{L}$, получаем

$$\varpi_{j+1} \leq \varpi_j + \left[4 \frac{h_y^2}{h_x^2} + 2 \frac{h_y^2}{L\tau} + \frac{\alpha h_y^2}{L} \right] \Phi e^{\beta T} + \frac{h_y^2}{L} F \quad (3.74)$$

Определим величину ϑ следующим образом $\vartheta = 4\frac{h_y^2}{h_x^2} + 2\frac{h_y^2}{L\tau} + \frac{\alpha h_y^2}{L}$. Получаем

$$\begin{aligned}\varpi_3 &\leq (\mathfrak{S} + \delta) h_y + \vartheta \Phi e^{\beta t} + \frac{h_y^2}{L} F, \\ \varpi_4 &\leq \varpi_3 + \vartheta \Phi e^{\beta t} + \frac{h_x^2}{L} F \leq (\mathfrak{S} + \delta) h_y + 2 \left[\vartheta \Phi e^{\beta T} + \frac{h_y^2}{L} F \right], \\ \varpi_{j+1} &\leq \varpi_4 + \vartheta \Phi e^{\beta t} + \frac{h_x^2}{L} F \leq (\mathfrak{S} + \delta) h_y + (j - 1) \left[\vartheta \Phi e^{\beta T} + \frac{h_y^2}{L} F \right], \\ \varpi_{N_t+1} &\leq (\mathfrak{S} + \delta) h_y + (N_y - 1) \left(\vartheta \Phi e^{\beta T} + \frac{h_y^2}{L} F \right).\end{aligned}$$

Отсюда и того, что $N_y = Y h_y$ следует, что для вычислительной погрешности ϖ_{N_t+1} , накопленной на последнем шаге итерационного процесса, справедлива следующая оценка

$$\varpi_{N_t+1} \leq (\mathfrak{S} + \delta) h_y + (Y h_y - 1) \left(\vartheta \Phi e^{\beta T} + \frac{h_y^2}{L} F \right).$$

Согласуем параметр регуляризации α , шагов дискретизации h_y и h_x с величиной выбранного шага τ следующим образом. Полагаем, что

$$\frac{1}{h_x^2} \leq \frac{1}{4L\tau}, \quad \frac{4h_y^2}{L\tau} \leq 1, \quad h_y^2 \leq \frac{L}{4Y}, \quad \alpha\tau \leq \frac{1}{2} \quad (3.75)$$

Получаем, $\vartheta \leq \frac{4h_y^2}{L\tau} \leq 1$. Учитывая (3.75), получаем, что $\vartheta \leq \frac{1}{Y\tau}$, тогда

$$\varpi_{N_t+1} \leq h_y \left(\mathfrak{S} + \delta + Y \vartheta \Phi e^{\beta T} + \frac{h_y^2}{L} Y F \right) \leq h_y \left(\mathfrak{S} + \delta + \frac{F}{4} \right) + \frac{h_y}{\tau} \Phi e^{\beta T}. \quad (3.76)$$

Далее, согласуем h_y и τ с уровнем погрешности исходных данных δ так, чтобы имело место неравенство $h_y < K\delta\tau$ при некотором $K > 0$. Используя оценку (3.76) и принимая во внимание соотношение между шагами дискретизации (3.75), получаем следующую оценку вычислительной погрешности, накопленной на последнем этапе вычислительной процедуры.

$$\varpi_{N_y+1} \leq \left(\mathfrak{S} + \delta + \frac{F}{4} \right) K\tau\delta + K\delta\Phi e^{\beta T} \leq K\delta \left(\left(\mathfrak{S} + \delta + \frac{F}{4} \right) \tau + \Phi e^{\beta T} \right). \quad (3.77)$$

Отсюда и (3.75) следует зависимость устойчивости от соотношения шагов дискретизации, что, согласно [139], свидетельствует об условной устойчивости вычислительной схемы

Окончательно получаем, что при $\tau \leq 1$ и выполнении условий (3.75) имеет место следующая оценка накопленной вычислительной погрешности

$$\varpi_{N_y+1} \leq \frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{Y}} \left(\delta^2 + \left(\mathfrak{S} + \frac{F}{4} + \Phi e^{\beta T} \right) \delta \right).$$

§ 3.3.2.4 Оценка температурной погрешности в задаче теплопереноса в пространственном объекте

Оценим наибольшее уклонение приближенных решений $v_{i,j,k}$, соответствующих прогнозируемым температурам, полученных во внутренних точках объекта с помощью основной вычислительной схемы, от действительных значений $u_{i,j,k}$. С этой целью введем в рассмотрение следующие величины:

$$s_{i,j,k} = u_{i,j,k} - v_{i,j,k}, \quad w_j = \max_{i=1,1,N_x+1,k=1,1,N_t+1} |u_{i,j,k} - v_{i,j,k}|.$$

Так как конечно-разностные аналоги аппроксимируют производные с точностью до величины шага дискретизации, то $w_{j+1} \geq w_j$.

Учитывая (3.73), (3.68) и принимая во внимание, что уровень погрешности исходных данных не превосходит δ , получаем $w_1 \leq \delta$ и

$$w_2 = \max_{i=1,1,N_x+1,k=1,1,N_t+1} |v_{i,2,k} - u_{i,2,j}| \leq \delta(1 + h_y) + O(h_y) \leq \delta(1 + h_y) + Sh_y. \quad (3.78)$$

Из (3.65) следует

$$\begin{aligned} s_{i,j+1,k} + \frac{\alpha h_y^2}{a_{i,j,k}} u_{i,j,k} &= 2(v_{i,j,k} - u_{i,j,k}) - (v_{i,j-1,k} - u_{i,j-1,k}) + O(h_y^2) + \\ &+ \frac{h_y^2}{a_{i,j,k}} \left[\left(v_t^{i,j,k} - u_t^{i,j,k} \right) + O(\tau) - a_{i,j,k} \left(v_{xx}^{i,j,k} - u_{xx}^{i,j,k} \right) + a_{i,j,k} O(h_x^2) - \alpha (v_{i,j,k} - u_{i,j,k}) \right] \end{aligned}$$

Учитывая конечно-разностное представление частных производных, получаем

$$\begin{aligned} s_{i,j+1,k} + \frac{\alpha h_y^2}{a_{i,j,k}} u_{i,j,k} &= 2(v_{i,j,k} - u_{i,j,k}) - (v_{i,j-1,k} - u_{i,j-1,k}) + O(h_y^2) + \\ &+ \frac{h_y^2}{a_{i,j,k}} \left(\frac{v_{i,j,k+1} - u_{i,j,k+1}}{\tau} - \frac{v_{i,j,k} - u_{i,j,k}}{\tau} + O(\tau) \right) - \\ &- h_y^2 \left(\frac{v_{i+1,j,k} - u_{i+1,j,k}}{h_x^2} - 2 \frac{v_{i,j,k} - u_{i,j,k}}{h_x^2} + \frac{v_{i-1,j,k} - u_{i-1,j,k}}{h_x^2} + O(h_x^2) \right) - \\ &- \frac{\alpha h_y^2}{a_{i,j,k}} (v_{i,j,k} - u_{i,j,k}). \end{aligned}$$

Из (3.71) получаем

$$s_{i,j+1,k} + \frac{\alpha h_y^2}{a_{i,j,k}} u_{i,j,k} \leq 2s_{i,j,k} - s_{i,j-1,k} + \frac{h_y^2}{a_{i,j,k}} \left(\frac{s_{i,j,k+1}}{\tau} - \frac{s_{i+1,j,k} - 2s_{i,j,k} + s_{i-1,j,k}}{h_x^2} \right) - \frac{\alpha h_y^2}{a_{i,j,k}} s_{i,j,k} + Sh_y^2 \left(1 + h_x^2 + \frac{\tau}{a_{i,j,k}} \right)$$

Так как $\max_{i,k} |s_{i,j-i,k}| \leq w_{j-1} \leq w_j$, $\max_{i,k} |s_{i,j,k+1}| \leq w_j$, и $\max_{i,k} |s_{i-1,j,k}| \leq w_j$ при $i = \overline{2, N_x + 1}$, $k = \overline{1, N_t + 1}$, то, оценивая погрешности w_{j+1} , характеризующие уклонение прогнозируемых температур от действительных значений на $j+1$ шаге вычислительной процедуры, при всех $i = \overline{2, N_x + 1}$, $k = \overline{1, N_t + 1}$ имеем

$$w_{j+1} \leq \max_{i,k} \left| s_{i,j+1,k} + \frac{\alpha h_y^2}{a_{i,j,k}} u_{i,j,k} \right| \leq \leq 3w_j + \max_{(i,j,k)} \left| \frac{h_y^2}{a_{i,j,k}} \right| \left(\frac{w_j}{\tau} + \frac{4w_j}{h_x^2} + \max_{(i,j,k)} \left| \frac{\alpha h_y^2}{a_{i,j,k}} \right| w_j \right) + Sh_y^2 \left(1 + h_x^2 + \max_{(i,j,k)} \left| \frac{\tau}{a_{i,j,k}} \right| \right)$$

Учитывая, что $L = \min_{(i,j,k)} |a_{i,j,k}|$ при всех $i = \overline{1, N_x + 1}$, $j = \overline{1, N_y + 1}$, $k = \overline{1, N_t + 1}$, получаем

$$w_{j+1} \leq 3w_j + \left(\frac{h_y^2}{L\tau} + \frac{4h_y^2}{h_x^2} + \frac{\alpha h_y^2}{L} \right) w_j + Sh_y^2 \left(1 + h_x^2 + \frac{\tau}{L} \right)$$

Принимая во внимание, что для величины $\vartheta = 4\frac{h_y^2}{h_x^2} + 2\frac{h_y^2}{L\tau} + \frac{\alpha h_y^2}{L}$ имеет место оценка $\vartheta \leq 1$, получаем

$$w_{j+1} \leq 4w_j + Sh_y^2 \left(1 + h_x^2 + \frac{\tau}{L} \right)$$

тогда

$$w_3 \leq 4w_2 + Sh_y^2 \left(1 + h_x^2 + \frac{\tau}{L} \right) \leq 4\delta(1 + h_y) + 4Sh_y + Sh_y^2 \left(1 + h_x^2 + \frac{\tau}{L} \right),$$

$$w_4 \leq 4^2\delta(1 + h_y) + 4^2Sh_y + 4Sh_y^2 \left(1 + h_x^2 + \frac{\tau}{L} \right) + Sh_y^2 \left(1 + h_x^2 + \frac{\tau}{L} \right),$$

$$w_5 \leq 4^3\delta(1 + h_y) + 4^3Sh_y + (4^2 + 4^1 + 1) Sh_y^2 \left(1 + h_x^2 + \frac{\tau}{L} \right),$$

:

$$w_{N_y+1} \leq 4^{N_y-1} (\delta(1 + h_y) + Sh_y) + (4^{N_y-2} + \dots + 4^1 + 1) Sh_y^2 \left(1 + h_x^2 + \frac{\tau}{L} \right),$$

Так как $1 + 4 + \dots + 4^{N_y-2} = \frac{4^{N_y-1} - 1}{3} \leq 4^{N_y-1}$, то

$$w_{N_y+1} \leq 4^{N_y-1} \left(\delta(1 + h_y) + Sh_y + Sh_y^2 \left(1 + h_x^2 + \frac{\tau}{L} \right) \right),$$

Учитывая (3.75), получаем, что при $h_x^2 = 4L\tau$ и $h_y < K\tau\delta$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} w_{N_y+1} &\leq 4^{N_y-1} \left(\delta(1 + h_y) + Sh_y + Sh_y^2 \left(1 + 4L\tau + \frac{\tau}{L} \right) \right) \leq \\ &\leq 4^{N_y-1} \left(\delta(1 + K\tau\delta) + SK\tau\delta + S(K\tau\delta)^2 \left(1 + 4L\tau + \frac{\tau}{L} \right) \right) \leq \\ &\leq 4^{N_y-1} \left(\delta \left(1 + \frac{K}{Y}\delta \right) + \frac{SK}{Y}\delta + \frac{SK^2}{Y^2}\delta^2 \left(1 + \frac{4L}{Y} + \frac{1}{YL} \right) \right) \leq \\ &\leq 4^{N_y-1} \left(\delta \left(1 + \frac{SK}{Y} \right) + \frac{SK^2}{Y^2}\delta^2 \left(1 + \frac{Y}{K} + \frac{4L}{Y} + \frac{1}{YL} \right) \right) \end{aligned}$$

Основываясь на требованиях к точности решения задачи измерения, необходимо обеспечить гарантированный уровень определяемый условием $w_{N+1} \leq \sqrt{V}\delta$ с некоторым $V > 0$. Требуемая оценка имеет место, если выполнены условия

$$\frac{Y}{KT\delta} \leq N_y \leq 1 + \ln \frac{V^2\delta}{1 + \frac{SK}{Y} + \delta \frac{SK^2}{Y^2} \left(1 + \frac{Y}{K} + \frac{4L}{Y} + \frac{1}{YL} \right)} \quad (3.79)$$

Из (3.79) и (3.77) получаем, что при соблюдении соотношений (3.75) и (3.68) уровень отклонений получаемых приближенных решений, соответствующих прогнозируемым температурам, от действительных значений остается в контролируемых пределах, а предложенный метод служит основой для разработки алгоритма обработки поверхностных измерений, позволяющего прогнозировать температуру во внутренних точках объекта с неизвестным начальным тепловым состоянием.

§ 3.3.2.5 Результаты экспериментального исследования на основе имитационного моделирования

Основной целью вычислительного эксперимента являлась проверка принципиальной возможности построения метода прогнозирования температуры в условиях, когда информация о начальной температуре во внутренних точках тела неизвестна. Объектом вычислительного эксперимента являлись построение во всей области численного решения задачи теплопереноса при неизвестных начальных условиях. Вычислительный эксперимент проводился для нормированных переменных x , y и t , и соответственно, нормированных тестовых функций, имитирующих характер изменения температурного поля. В вычислительном эксперименте полагали, что $\frac{Y}{T} = 0.75$, $\frac{X}{T} = 0.5$. Тестовые граничные функции $u(x, Y, t) =$

$\varphi(x, t)$ выбирались в соответствии со спецификой имитируемого температурного поля точек (x, Y) , наиболее удаленных от границы, на которую оказывалось внешнее тепловое воздействие. В эксперименте были рассмотрены следующие типы тестовых функций:

1. Тестовые функции, соответствующие постепенному росту температур в точках (x, Y) . Изменение температурного поля представлено $\varphi_1 = 5e^t \cos(x - \pi/12)$. Формирование температурного поля $\varphi_1(x, t)$ обеспечивается тепловым режимом

$$p_1 = 8.66e^t \cos(x - \pi/12), \quad q_1 = e^t \cos(y - \pi/6), \quad h_1 = 0.33e^t \cos(y - \pi/6)$$

2. Тестовые функции, соответствующие постепенному снижению температур в точках (x, Y) . Изменение температурного поля представлено $\varphi_2 = 5e^{-t} \cos(x - \pi/12)$. Формирование температурного поля $\varphi_2(x, t)$ обеспечивается тепловым режимом

$$p_2 = 8.66e^{-t} \cos(x - \pi/12), \quad q_2 = e^{-t} \cos(y - \pi/6), \quad h_2 = 0.33e^{-t} \cos(y - \pi/6).$$

3. Тестовые функции, соответствующие линейному росту температур в точках (x, Y) . Изменение температурного поля представлено функцией $\varphi_3 = 2t \cos(x - \pi/12)$. Формирование температурного поля $\varphi_3(x, t)$ обеспечивается тепловым режимом

$$p_3 = 0.75t \cos(x - \pi/12), \quad q_3 = t \cos(y - \pi/6), \quad h = 0.2t \cos(y - \pi/6)$$

4. Тестовые функции, соответствующие попеременному росту и снижению температур в точках (x, Y) . Изменение температурного поля представлено функцией $\varphi_4 = e^{-x} (\sin(3\pi t) + t/2)$. Формирование температурного поля $\varphi_4(x, t)$ обеспечивается тепловым режимом

$$p_4 = e^{-x} (\sin(3\pi t) + t/2), \quad q_4 = e^y (\sin(3\pi t) + t/2), \\ h_4 = 1/3e^{y-1.5} (\sin(3\pi t) + t/2)$$

5. Тестовые температурные функции, соответствующие первоначальному росту и последующему снижению температур в точках (x, Y) . Изменение температурного поля представлено функцией $\varphi_5 = 0.5 (\cos(x + t + 5\pi/12) - \cos(x - t - 5\pi/12))$. Формирование температурного поля $\varphi_5(x, t)$ обеспечивается тепловым режимом

$$p_5 = 0.43 (\cos(x - t + \pi/12) - \cos(x + t + 5\pi/12)), \\ q_5 = 0.35 (\sin y + t - \sin y - t), \quad h_5 = 0.9 (\sin y + t - \sin y - t)$$

Методика эксперимента аналогична приведенной в разделе 3.3.1. На начальном этапе эксперимента находили решение прямой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, y, t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega_T, \quad (3.80)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(x, 0, t) = p(x, t), \quad u(x, Y, t) = \varphi(x, t), \quad (x, t) \in M_x, \\ u(0, y, t) = q(y, t), \quad u(X, y, t) = h(y, t) \quad (y, t) \in M_y, \end{aligned} \quad (3.81)$$

и начальными условиями

$$u(x, y, 0) = \chi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (3.82)$$

Решение прямой задачи $u_0(x, y, t)$ и функцию $\varphi(x, t)$ использовали в дальнейшем в качестве тестовых функций при проведении сравнительного анализа.

Далее осуществляли численное моделирование внешнего теплового воздействия $g(x, t)$, используя конечно-разностный аналог частной производной первого порядка по пространственной переменной:

$$g(x_i, t_j) = \frac{u_0(x_i, y_2, t_k) - u_0(x_i, y_1, t_k)}{h_y}.$$

Затем к исходным данным $p(x, t)$, $g(x, t)$, $q(y, t)$, $h(y, t)$ добавляли аддитивный шум, моделируя значения p_δ , g_δ , q_δ , h_δ согласно формулам

$$p_\delta = u_0(x_i, y_1, t_k) + \text{erp}^{i,k}, \quad g_\delta = \frac{u_0(x_i, y_2, t_k) - u_0(x_i, y_1, t_k)}{h_y} + \text{erg}^{i,k},$$

$$q_\delta = u_0(x_1, y_j, t_k) + \text{erq}^{j,k}, \quad h_\delta = u_0(x_{N_x+1}, y_j, t_k) + \text{erh}^{j,k}.$$

Величины $\text{erp}^{i,k}$, $\text{erg}^{i,k}$, $\text{erq}^{j,k}$, $\text{erh}^{j,k}$ являются значениями случайных величин, равномерно распределенных на $[-\delta, \delta]$. Предлагаемый подход к моделированию p_δ , g_δ , q_δ , h_δ эквивалентен появлению аддитивных случайных отклонений в измерениях вблизи поверхности тела. Значения p_δ , g_δ , q_δ , h_δ определяли исходные данные в обратной задаче (3.65)–(3.67).

Далее, с помощью предложенной вычислительной схемы дискретной регуляризации находили приближенное решение $u_\delta^\alpha(x, y, t)$ обратной задачи (3.65)–(3.67) в области $\bar{\Omega}_T = [0, X] \times [0, Y] \times [0, T]$.

На следующем этапе эксперимента оценивали погрешность полученных решений и проводили сравнительный анализ полученных значений $u_\delta^\alpha(x, Y, t) = \varphi_\delta(x, t)$ с тестовыми значениям $u_0(x, Y, t) = \varphi(x, t)$.

Сравнение осуществлялось по двум направлениям. Первое направление включало сравнение температурных значений $u_\delta^\alpha(X/2, T, t) = \varphi_\delta(X/2, t)$, найденных с помощью предложенного метода дискретной регуляризации, с тестовыми значениями $u_0(X/2, T, t) = \varphi_0(X/2, t)$. Выбор этих значений для сравнения обусловлен тем, что соответствующие внутренние точки объекта с координатами $(X/2, T, t)$ наиболее удалены от границ, вдоль которых известны измеренные температурные значения. Второе направление включало сравнение температурных полей, получаемых в области $\overline{M}_x = [0, X] \times [0, T]$ с тестовыми значениями.

Результаты вычислительных экспериментов для тестовых функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, $\varphi_4(t)$, $\varphi_5(t)$ проиллюстрированы на рис. 54–58 и представлены в табл.13,14.

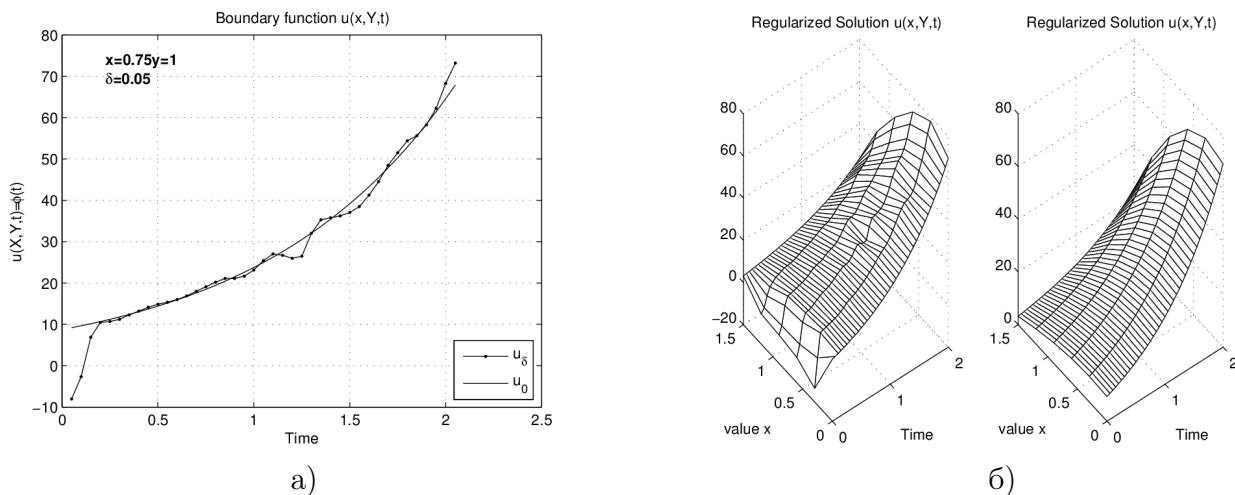


Рис. 54: Результаты прогнозирования температуры для тестовых функций $p_1 = 8.66e^t \cos(x - \pi/12)$, $\varphi_1 = 5e^t \cos(x - \pi/12)$, $q_1 = e^t \cos(y - \pi/6)$, $h_1 = 0.33e^t \cos(y - \pi/6)$. Рис. а) – температурное поле точки $(0.75, Y)$. Рис. б)– температурное поле внутренних точек объекта с координатами (x, Y) .

Одномерные рисунки иллюстрируют графики функций температурного поля точки $(0.75, 1, .)$. Обозначенные u_0 соответствует тестовым функциям $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, $\varphi_4(t)$, $\varphi_5(t)$, а обозначения u_δ , используются для графиков результатов прогнозирования в контрольной точке $(0.75, 1)$, полученным с помощью предложенной вычислительной схемы дискретной регуляризации.

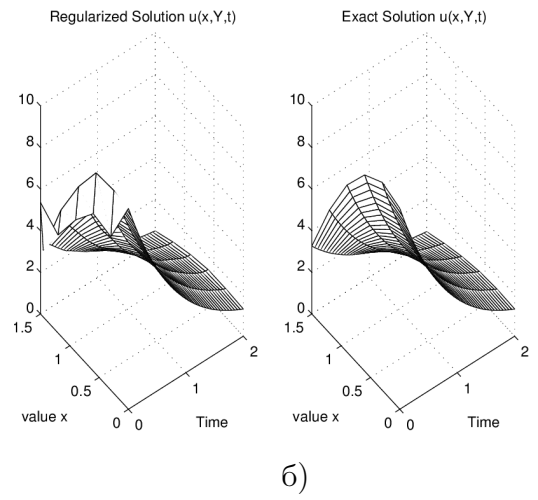
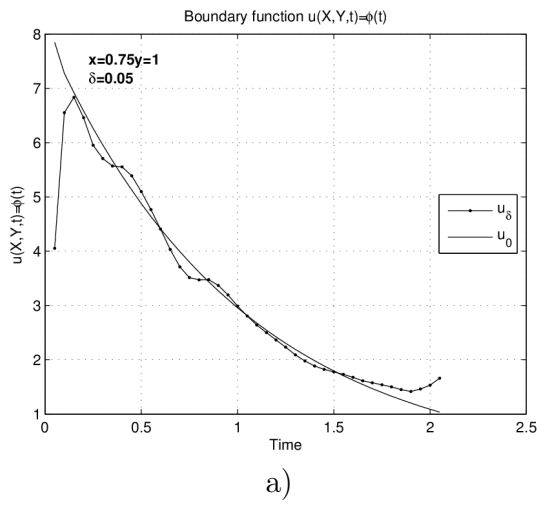


Рис. 55: Результаты прогнозирования температуры для тестовых функций $p_2 = 8.66e^{-t} \cos(x - \pi/12)$, $\varphi_2 = 5e^{-t} \cos(x - \pi/12)$, $q_2 = e^{-t} \cos(y - \pi/6)$ и $h_2 = 0.33e^{-t} \cos(y - \pi/6)$. Рис. а) – температурное поле точки $(0.75, Y)$. Рис. б)– температурное поле внутренних точек объекта с координатами (x, Y) .

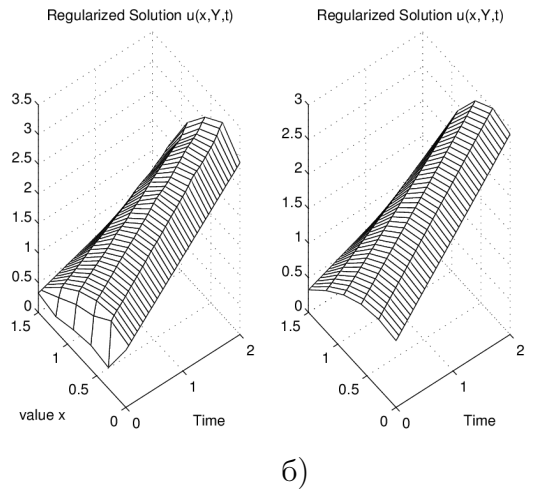
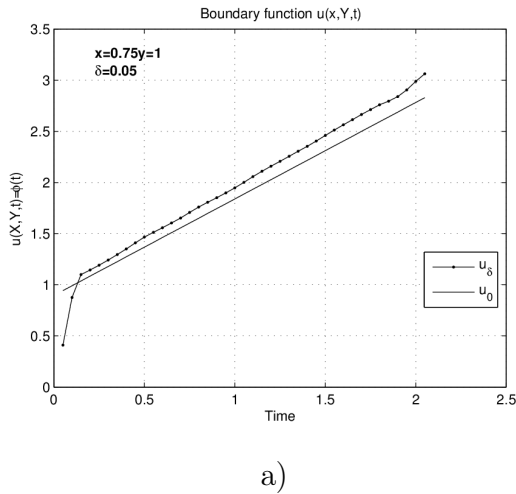
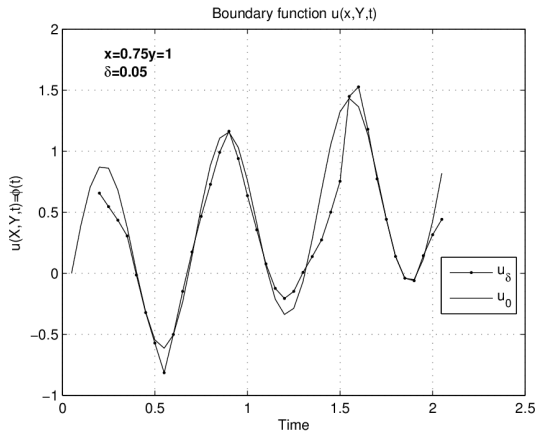
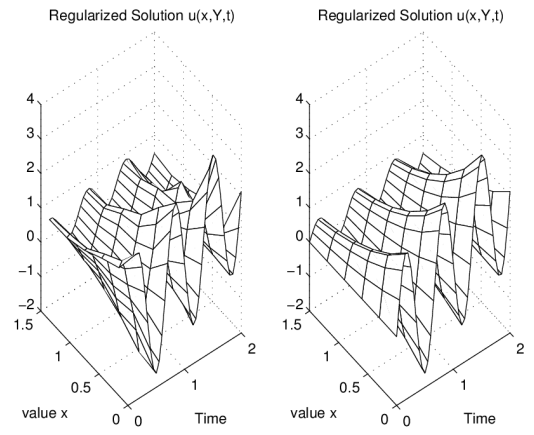


Рис. 56: Результаты прогнозирования температуры для тестовой функции $p_3 = 0.75t \cos x - \pi/12$, $\varphi_3 = 2t \cos x - \pi/12$, $q_3 = t \cos y - \pi/6$ и $h_3 = 0.2t \cos y - \pi/6$. Рис. а) – температурное поле точки $(0.75, Y)$. Рис. б)– температурное поле внутренних точек объекта с координатами (x, Y)

Двумерные поверхности, обозначенные ”*Exact solution*” соответствуют тестовым значениям $u_0(x, Y, t)$, в точках $(\frac{X}{2}, Y)$, а поверхности ”*Regularized solution*” соответствуют решению u_δ^α обратной задачи (3.65)– (3.67) с неизвестными начальными условиями, полученному во всей области $\overline{M}_x = [0, X] \times [0, T]$ с помощью методом дискретной регуляризации. Ось абсцисс соответствует значениям пространственной переменной временной x , ось ординат - переменной t , а ось ашпикат связана со значениями функций $u(x, Y, t)$ и $u_\delta^\alpha(x, Y, t)$.

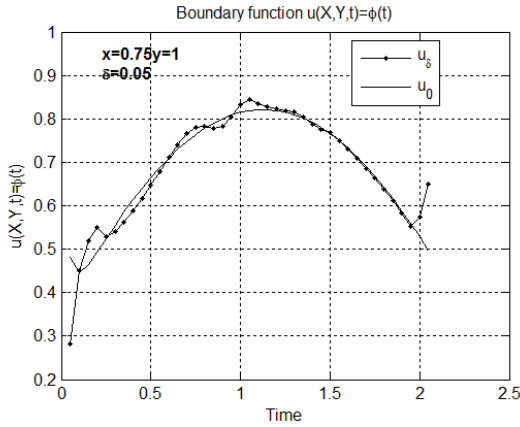


а)

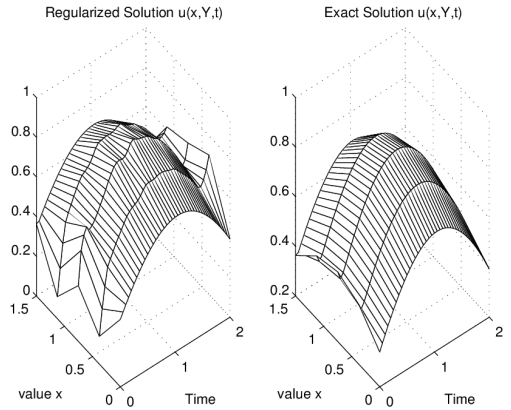


б)

Рис. 57: Результаты прогнозирования температуры для тестовых функций $p_4 = e^{-x} (\sin(3\pi t) + t/2)$, $\varphi_4 = e^{-x} (\sin(3\pi t) + t/2)$, $q_4 = e^y (\sin(3\pi t) + t/2)$ и $h_4 = 1/3e^{y-1.5} (\sin(3\pi t) + t/2)$. Рис. а) – температурное поле точки $(0.75, Y)$. Рис. б) – температурное поле точек с координатами (x, Y) .



а)



б)

Рис. 58: Результаты прогнозирования для тестовых функций $p_5 = 0.43 (\cos(x - t + \pi/12) - \cos(x + t + 5\pi/12))$, $\varphi_5 = 0.5 (\cos(x + t + 5\pi/12) - \cos(x - t - 5\pi/12))$, $q_5 = 0.35 (\sin y + t - \sin y - t)$, $h_5 = 0.9 (\sin y + t - \sin y - t)$. Рис. а) – температурное поле точки $(0.75, Y)$. Рис. б) – температурное поле точек с координатами (x, Y)

Отметим, что согласно результатам, представленными в [90], невозможно получить единственное решение во всей области $\overline{\Omega_T}$. Поэтому численный сравнительный анализ выполнялся в области $M_\eta = (\epsilon, X - \epsilon) \times (\eta_1, T - \eta_2)$.

Для оценки отклонений приближенных решений, найденных во внутренних точках с помощью предложенного метода дискретной регуляризации, от тестовых значений использовали величины Δ и Θ , определяемые формулами:

$$\Delta = \max_{t \in (\eta, T - \eta)} \left| u_\delta^\alpha \left(\frac{X}{2}, Y, t \right) - u_0 \left(\frac{X}{2}, Y, t \right) \right| = \max_{t \in (\eta, T - \eta)} \left| \varphi_\delta \left(\frac{X}{2}, t \right) - \varphi_0 \left(\frac{X}{2}, t \right) \right|,$$

$$\Delta_\varphi = \max_{(x,t) \in M_\eta} \left| \frac{u_\delta^\alpha(x, Y, t) - u_0(x, Y, t)}{u_0(x, Y, t)} \right| = \max_{(x,t) \in M_\eta} \left| \frac{\varphi_\delta(x, t) - \varphi_0(x, t)}{u_0(x, t)} \right|$$

Величина Δ характеризуют наибольшее возможное отклонение прогнозируемых температур $u_\delta^\alpha \left(\frac{X}{2}, Y, t \right)$ в контрольной точке $\left(\frac{X}{2}, Y, t \right)$ от действительных значений $u_0 \left(\frac{X}{2}, Y, t \right)$. Величина Δ_φ соответствует относительной погрешности метода прогнозирования температур во внутренних точках объекта из области $M_\eta = (\epsilon, X - \epsilon) \times (\eta, T - \eta)$. В табл. 13 приведены средние значения полученных температурных отклонений при $\epsilon = 0.05X$ и $\eta_1 = \eta_2 = 0.05T$, а в табл. 14 – при $\epsilon = 0.05X$, $\eta_1 = 0.15T$ и $\eta_2 = 0.05T$.

Таблица 13: Оценки температурных отклонений

δ	$\varphi_1(x, t)$		$\varphi_2(x, t)$		$\varphi_3(x, t)$		$\varphi_4(x, t)$		$\varphi_5(x, t)$	
	Δ	Δ_φ	Δ	Δ_φ	Δ	Δ_φ	Δ	Δ_φ	Δ	Δ_φ
0.01	0.191	0.341	0.187	0.293	0.195	0.497	0.181	0.343	0.189	0.265
0.03	0.358	0.603	0.342	0.649	0.354	0.661	0.315	0.597	0.347	0.598
0.05	0.470	0.793	0.482	0.782	0.476	0.803	0.403	0.743	0.567	0.789

Таблица 14: Оценки температурных отклонений

δ	$\varphi_1(x, t)$		$\varphi_2(x, t)$		$\varphi_3(x, t)$		$\varphi_4(x, t)$		$\varphi_5(x, t)$	
	Δ	Δ_φ	Δ	Δ_φ	Δ	Δ_φ	Δ	Δ_φ	Δ	Δ_φ
0.01	0.0315	0.0245	0.0681	0.0233	0.0389	0.0274	0.0334	0.0243	0.0373	0.265
0.03	0.0541	0.0403	0.0712	0.0411	0.0623	0.0421	0.0414	0.0409	0.0353	0.0419
0.05	0.097	0.0831	0.082	0.0825	0.0804	0.0827	0.0637	0.0797	0.0745	0.0789

Результаты эксперимента приводят к следующим выводам. С помощью предложенной вычислительной схемы впервые получено численное решение задач теплопереноса при неизвестных начальных условиях. Оценки погрешности полученных решений согласуются с теоретическими результатами и свидетельствуют об устойчивости метода относительно погрешности исходных данных и удовлетворительной точности в определенной подобласти.

Существенное преимущество предложенного метода заключается в том, что с помощью разработанной вычислительной схемы впервые стало возможным не только найти граничную функцию, но и построить приближенное решение обрат-

ной граничной задачи во всей области устойчивости при неизвестных начальных данных, что, в свою очередь позволяет прогнозировать температурное состояние объекта, формируемого под действием выбранного режима внешнего теплового воздействия при комплексной термообработке, при осуществлении температурного контроля работающих систем и механизмов.

3.4 Основные результаты и выводы

В разделе рассмотрены задачи линейного переноса, связанные с прогнозированием температур во внутренних точках объекта, подвергаемом внешнему тепловому воздействию. Прогнозирование осуществляется по результатам поверхностных температурных измерений, содержащих отклонения от действительных значений, в условиях отсутствия информации о начальном тепловом состоянии объекта.

В работе предложен подход к численному решению обратных задач с неизвестными начальными условиями, связанных с прогнозированием температуры во внутренних точках по результатам граничных измерений. Основная идея заключается в том, что в предлагаемых методах искомую функцию определяют относительно пространственной переменной. В соответствии с представленным подходом, построены комбинированные явные вычислительные схемы со стабилизирующим функционалом, включающие основную и краевые численные схемы. Основные схемы предназначены для определения искомым функций во внутренних точках объекта в текущий момент времени за исключением финального значения T . Комбинирование в одном алгоритме основной и краевых схем позволило найти решение проблемы неизвестных начальных условий.

В работе исследована устойчивость основных вычислительных схем методов. Доказана локальная устойчивость, найдены соотношения шагов дискретизации по пространству, параметра регуляризации с шагом дискретизации по времени и уровнем погрешности исходных данных, обеспечивающие устойчивость вычислительных схем, а также получены оценки погрешности приближенных решений.

С целью проверки принципиальной возможности построения численного метода решения задач теплопереноса с неизвестными начальными условиями, исследо-

дования точности и получения численных оценок погрешностей прогнозируемых значений проведены вычислительные эксперименты на основе имитационного моделирования. В экспериментах получаемые приближенные решения сравнивались с тестовыми значениями, а для задач теплопереноса в линейном объекте проводилось дополнительное сравнение найденных решений с численными решениями задачи с известными начальными условиями, для построения которых использовали оптимальный по порядку метод. Результаты экспериментов представлены в работе и свидетельствуют о достаточной точности предложенных вычислительных схем в соответствующих областях.

Полученные результаты приводят к следующим выводам:

1. Выявлена принципиальная возможность построения вычислительной схемы решения обратных задач линейного теплопереноса при неизвестных начальных условиях. Получаемые результаты служат основой для разработки методов обработки результатов температурных измерений вблизи границы объекта, предназначенных для прогнозирования температур во внутренних точках объекта с неизвестным начальным тепловым состоянием.

2. Впервые сформированы алгоритмы построения приближенных решений, соответствующих прогнозируемым температурным полям внутренних точек объекта, а принцип построения комбинированной вычислительной схемы относительно пространственной переменной позволяет преодолеть прогнозирование температур в начальный и финальный моменты времени краевых узлах сетки и уменьшить влияние неизвестных начальных условий на устойчивость схемы.

3. Введение стабилизирующего функционала в вычислительные схемы, а также согласование величин шагов дискретизации по пространству, параметра регуляризации с уровнем погрешности исходных данных и шагом дискретизации по времени обеспечивает устойчивость вычислительной схемы относительно погрешности исходных данных.

4. Оценки отклонений результатов прогнозирования от действительных значений, полученные в вычислительном эксперименте, согласуются с теоретическими

результатами и свидетельствуют о достаточной эффективности и точности предложенных методов.

5. Предлагаемые вычислительные схемы служат основой для разработки методов обработки информации о результатах поверхностных температурных измерений, предназначенных для прогнозирования температуры во внутренних точках объекта в условиях неполных и динамически изменяющихся исходных данных.

Основные положения предлагаемых методов дискретной регуляризации, предложенные для определения температуры в линейном объекте в двумерном объекте, допускают обобщения для решения задач в пространственных телах и многомерных областях.

Научная новизна результатов исследования, представленных в данном разделе, заключается в создании единого подхода и разработке методов решения задач измерения, связанных с теплопереносом в объекте с неизвестным начальным тепловым состоянием, служащих основой для обработкой информации, предназначенных для прогнозирования результатов теплового воздействия на температурное поле объекта, а также в разработке вычислительных алгоритмов, устойчивых относительно погрешности исходных данных, позволяющих определять искомую функцию во внутренних точках объекта в соответствующей подобласти при неизвестных начальных условиях с удовлетворительной точностью.

Практическая значимость результатов исследования состоит в разработке алгоритмов прогнозирования влияния выбранного управляющего режима теплового воздействия на формирование температурных полей внутренних точек объекта в условиях отсутствия информации о его начальном тепловом состоянии в ситуации, когда исходные данные, сформированные из результатов температурных измерений вблизи поверхности, содержат отклонения от действительных значений. Полученные результаты служат основой для разработки методов обработки информации о результатах поверхностных тепловых измерений и выбора параметров внешнего управляющего режима теплового воздействия, позволяющего формировать желаемое температурное поле внутри объекта.

Глава 4. Методы прогнозирования температуры при нелинейном теплопереносе в объектах с неизвестным начальным тепловым состоянием

В предыдущих разделах рассмотрены задачи измерения, связанные с обработкой данных о линейных процессах теплопереноса. В этих задачах коэффициентные функции, характеризующие теплофизические свойства материала: плотность, теплоемкость, теплопроводность, зависели от пространственно-временных характеристик. На практике, значения этих функций определяют в зависимости от температуры. Это приводит к нелинейности уравнения в задачах теплопереноса в объекте с неизвестным начальным тепловым состоянием и возникает необходимость в разработке методов решения нелинейных задач теплопереноса, позволяющим прогнозировать влияние внешнего теплового воздействия на изменения температуры при неизвестных начальных условиях.

В данном разделе рассмотрена обобщенная задачи нелинейного теплопереноса в системах с распределенными параметрами и неизвестным начальным тепловым состоянием. В задачах теплопереноса система представлена цилиндрическим телом, а изменения значений основных характеристик свойств материала: плотности, коэффициентов теплоемкости и теплопроводности определяются в зависимости от температуры.

Предложен подход к построению методов решения нелинейных обратных задач с неизвестными начальными условиями и разработаны вычислительные схемы определения температур во внутренних точках объекта с неизвестной начальной температурой. Найдены условия, гарантирующие устойчивость вычислительных схем, получены теоретические и экспериментальные оценки уклонов приближенных решений задачи измерения, характеризующие наибольшее возможное отклонение прогнозируемых температур от действительных значений. Результаты экспериментального исследования представлены в работе и свидетельствуют об устойчивости и достаточной точности приближенных решений в определенной подобласти.

4.1 Основные предпосылки и обобщенная математическая модель задач измерения, связанных с нелинейным теплопереносом в объектах с неизвестным начальным тепловым состоянием

В рассматриваемых задачах теплопереноса объекты представлены цилиндрическими телами, у которых значения основных теплофизических свойств материала: плотности, коэффициентов теплоемкости и теплопроводности определяются в зависимости от температуры. Во время технологического процесса тело подвергается внешнему тепловому воздействию продолжительностью T . В период его реализации проводят $M + 1$ измерения температуры в граничной области. Начальный момент времени определяется началом воздействия выбранного теплового режима на объект. Согласно требованиям, предъявляемым к технологическому процессу, во время его реализации недопустимы резкие изменения интенсивности теплового воздействия, а также резкие перепады температурных градиентов внутри тела и распространение тепла в сечении осуществляется одинаково по всем направлениям относительно оси цилиндра.

Режим внешнего теплового воздействия одинаков в каждой граничной точке, изменяется только относительно времени и заключается в регулировании интенсивности нагрева или охлаждения границ объекта. Таким образом температура примет одинаковые значения вдоль любой прямой, параллельной оси цилиндра, что позволяет свести задачу определения температуры во внутренних точках цилиндра к задаче теплопереноса в сечении, перпендикулярном оси.

Отметим, что при вторичной и комплексной термообработках, при проведении неразрушающего теплового контроля установить датчики контроля возможно только вдоль поверхности цилиндра и невозможно измерить начальную температуру внутри всего тела без нарушения его целостности. Это приводит к неопределенности теплового состояния тела в начальный момент времени. В этих условиях требуется определить температуру во внутренних точках P в каждый момент времени $t_j \in [0, T]$, $j = \overline{1, M + 1}$.

В разделе рассмотрены два типа задач нелинейного теплопереноса. К первому типу относятся задачи теплопереноса в кольцевом цилиндре, в которых внеш-

нему тепловому воздействию подвергается внутренняя поверхность. Во втором управляющее воздействие осуществляется от внешнего источника в направлении, перпендикулярном границе объекта. Схемы тепловых воздействий на тело представлены на рис. 59. Измерения температуры в задачах первого типа проводятся вблизи точек O , а в задачах второго типа – вблизи точек A .

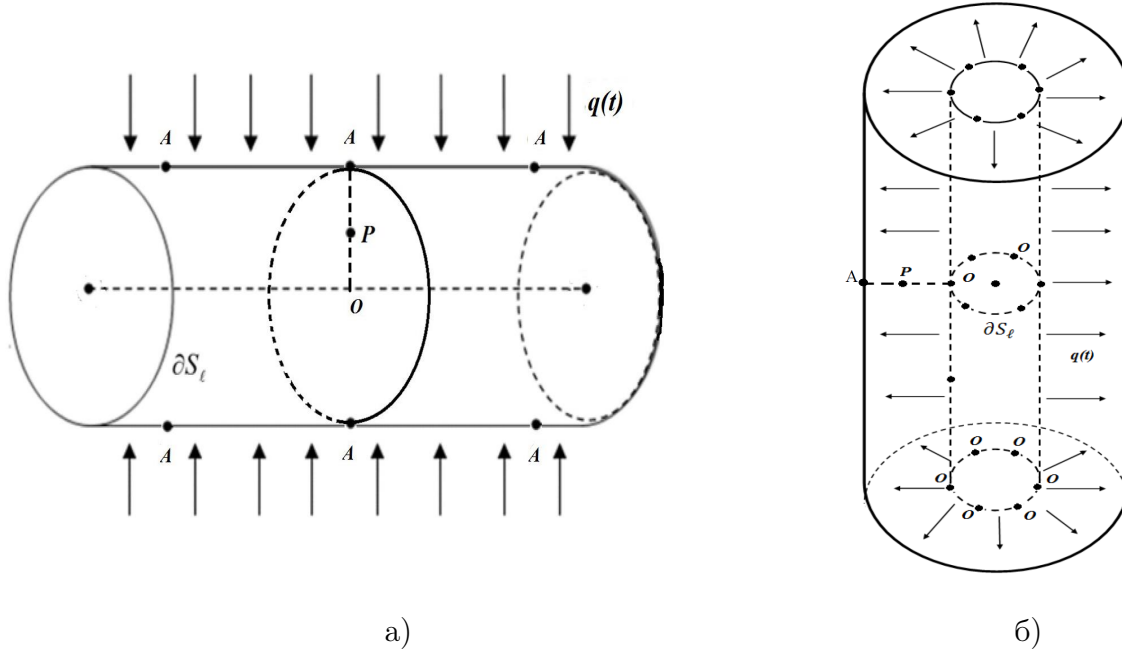


Рис. 59: Схема тепловых воздействий. P – текущая точка, в которой определяют температуру, $q(t)$ – плотность теплового потока, воздействующего на тело. Рис.(а)–схема теплового воздействия на боковую поверхность. A –точки, вблизи которых проводятся измерения. Рис.(б)–схема воздействия теплового источника, расположенного вдоль оси цилиндра. O –точки, вблизи которых проводятся измерения.

В рассматриваемых задачах сечению цилиндрической области, в которой происходит процесс теплоперноса соответствует множество Ω . В задачах первого типа Ω ограничено внешней границей $\partial\Omega_1$ и внутренней границей $\partial\Omega_2$, а в задачах второго типа Ω ограничено внешней границей $\partial\Omega$. Поверхности, подвергаемой внешнему воздействию, вблизи которой проводятся измерения, соответствует множество ∂S_ℓ . В задачах первого типа $\partial S_\ell = \partial\Omega_2$, а второго типа $\partial S_\ell = \partial\Omega$. Пусть A –точки на внешней боковой поверхности, P – текущая внутренняя точка сечения. Температуре в текущей точке соответствует функция $u(P, t)$. В задачах первого типа O – точки внутренней боковой поверхности цилиндра, а в задачах второго типа O –точки оси цилиндра. Величина ℓ характеризует расстояние от O до A .

Математические модели процессов теплопереноса в обоих типах задач измерения сводятся к обобщенной задаче, включающей уравнение теплопереноса, которое, согласно результатам, представленными в [6], [163], [195], имеет вид

$$c(u, t) \rho(u, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(u, t) \nabla u) + F(P, t), \quad P \in \Omega, t \in (0, T). \quad (4.1)$$

а также граничные условия, соответствующие внешнему тепловому воздействию

$$u|_{\partial S_\ell} = p(t), \quad -\lambda(u, t) \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial S_\ell} = q(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.2)$$

где $c(u, t)$ – коэффициент удельной теплоемкости, $\lambda(u, t)$ – коэффициент теплопроводности, $\rho(u, t)$ – плотность материала, $F(P, t)$ – плотность мощности внутреннего теплового источника, n – нормаль к ∂S_ℓ . Функции $p(t)$, $q(t)$ характеризует температуру поверхности и плотность тепловых потоков и формируются из результатов измерений вблизи ∂S_ℓ . Основываясь на специфике технологического процесса, когда начальная температура $u(P, 0)$ неизвестна, получаем, что начальные условия в рассматриваемой задаче теплопереноса не определены.

Принимая во внимание, что во время технологического процесса недопустимы резкие изменения теплофизических свойств материала и резкие перепады температурных градиентов, получаем, что $c, \rho, \lambda \in C^2(\overline{\Omega_T})$, а функция $u(P, t) \in H^{4+\zeta, 2}(\Omega_T) \cap H^{2, 1}(\overline{\Omega_T})$, $\zeta \in (0, 1)$ и существуют Φ, β, S такие, что

$$\max_{(r, t) \in \overline{Q_T}} |u(r, t)| \leq \Phi e^{(\|OP\| + t)} \quad (4.3)$$

$$\max \left\{ \max_{(P, t) \in \overline{Q_T}} |\partial_t^2 u(P, t)|, \max_{(P, t) \in \overline{Q_T}} |\partial_P^2 u(P, t)|, \max_{(P, t) \in \overline{Q_T}} |\partial_P^4 u(P, t)| \right\} \leq S,$$

Преобразуем математическую модель рассматриваемой задачи теплопереноса. Так как функция $u(P, t)$ осесимметрична, введем в сечении полярные координаты, выполняя для задач второго типа сдвиг по радиусу. Тогда переменная r характеризует расстояние от O до текущей точки P , и $r \in [0, \ell]$, множество Ω_T примет вид $\Omega_T = (0, \ell) \times (0, T)$, а задача (4.1), (4.2) преобразуется к виду:

$$c(u) \rho(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(u) r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (r, t) \in \Omega_T.$$

$$u|_{\partial S_\ell} = p(t), \quad u_r|_{\partial S_\ell} = q(t), \quad t \in [0, T].$$

Раскрывая оператор $\frac{\partial}{\partial r}$, получаем следующее эквивалентное представление:

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r}\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda(u)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (r, t) \in \Omega_T. \quad (4.4)$$

$$u|_{\partial S_\ell} = p(t), \quad u_r|_{\partial S_\ell} = q(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.5)$$

Отметим, что при переходе к полярной системе координат (4.3) примет вид:

$$\max_{\Omega_T} |u(r, t)| \leq \Phi e^{\beta(r+t)}, \quad \max \left\{ \max_{\Omega_T} |\partial_t^2 u|, \max_{\Omega_T} |\partial_r^2 u|, \max_{\Omega_T} |\partial_r^4 u| \right\} \leq S. \quad (4.6)$$

Важный аспект задачи теплопереноса необходимо учитывать, что при формировании исходных данных p_δ, q_δ из результатов измерений возникают отклонения в p_δ, q_δ от действительных значений p_0, q_0 и вместо p_0, q_0 известны p_δ, q_δ и допустимый уровень δ т.ч. $\max \{ \|p_\delta - p_0\|, \|q_\delta - q_0\| \} \leq \delta$. Таким образом, требуется, основываясь на (4.4), (4.5), разработать метод, позволяющий по результатам обработки граничных измерений p_δ, q_δ найти температурную функцию $u(P, t)$ при всех $P \in [0, \ell]$ в условиях погрешности и неполных исходных данных.

4.2 Математические модели задач измерения, связанных с нелинейным теплопереносом в технологических процессах

В разделе представлены математические модели задач нелинейного теплопереноса, возникающие в технологических процессах и сводящиеся к обобщенной задаче.

4.2.1 Математическая модель задачи измерения, связанная с нелинейным теплопереносом при комплексной термической обработке кольцевых цилиндров

В разделе приведена математическая модель задачи теплопереноса в кольцевом цилиндре, подвергаемом тепловому воздействию со стороны внутреннего отверстия. Эта задача возникает при обработке информации, используемой для формирования параметров режима теплового воздействия при термообработке в установке ТВЧ. Суть проблемы обработки информации заключается в необходимости осуществить прогнозирование влияния выбранного режима нагрева внутреннего отверстия на температуру внутренних точек кольца. Технологический процесс термообработки проиллюстрирован на рис.60.



Рис. 60: Термообработка внутреннего отверстия цилиндрических шестеренок индукционным способом нагрева токами промышленной частоты.

Основные предпосылки математической модели заключаются в следующем. При термической обработке цилиндрическое кольцо подвергается внешнему тепловому воздействию со стороны внутреннего отверстия, одинаковому в каждой точке внутренней поверхности и изменяющемуся только по времени. Продолжительность воздействия ограничено величиной T . Расстояние от внутреннего отверстия до внешней границы кольца составляет величину ℓ . Изменение основных теплофизических свойств материала в текущий момент времени t в каждой внутренней точке P связаны с изменениями температуры $u(P, t)$ и представлены функциями $c(u)$, $\rho(u)$, $\lambda(u)$ соответственно.

В силу того, что термообработки кольца в установке ТВЧ является одним из этапов комплексной термообработки, к его началу во внутренних точках сохраняется влияния остаточных тепловых процессов. С другой стороны, принимая во внимание специфику оборудования и результаты, представленные в [21], [74], [98], [134], определить возможно температуру только из характеристик выбранного теплового режима и только вблизи поверхности, подвергаемой внешнему воздействию. Таким образом, тепловое состояние кольца в начальный момент времени неизвестно.

Схема теплового воздействия представлена на рис.61, внутренняя граница сечения обозначена ∂S_ℓ , а внешняя граница ∂S_1 .

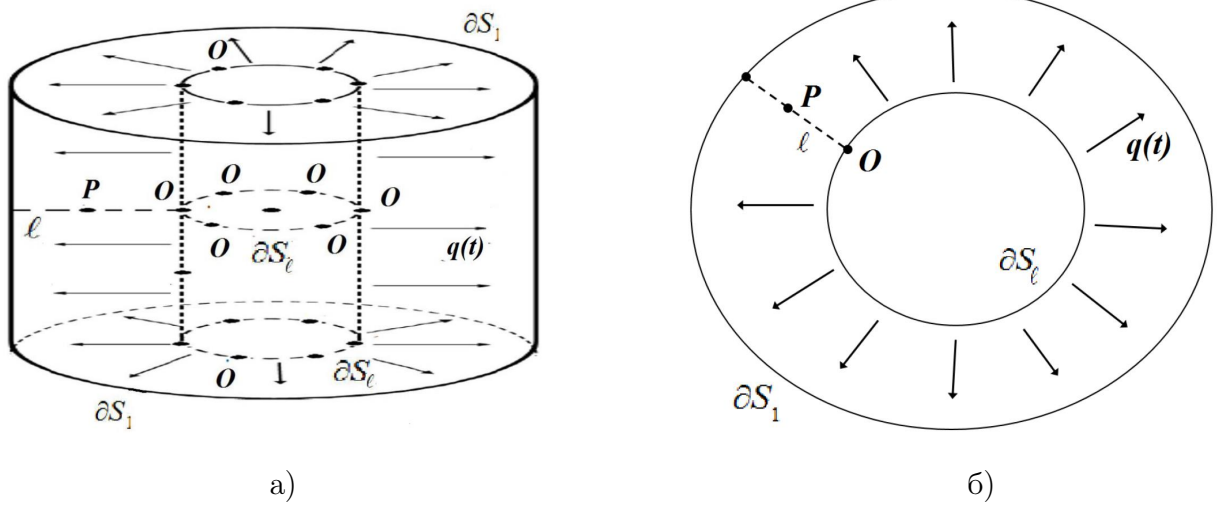


Рис. 61: Схема теплового воздействия. O –точки, подверженные выбранному режиму воздействия, P – точки, в которых требуется определить температуру, $q(t)$ – плотность теплового потока, воздействующего на тело. Рис.(а)–схема теплового воздействия на цилиндрическое кольцо. Рис.(б)–схема теплового воздействия в сечении.

Принимая во внимания требования о равномерном распространение тепла в сечении [74], [98], получаем, что температурная функция $u(P, t)$ осесимметрична и исходную задачу определения температуры внутри тела сводят к задаче распространения тепла в сечении цилиндра плоскостью, перпендикулярной его оси. Сечение представлено $\Omega = \{P : P \in R^2, \ell_0 < \|P\| < \ell_1\}$, где ℓ_0 – радиус внутреннего отверстия, ℓ_1 – внешний радиус цилиндра. Внешней границе сечения соответствует множество ∂S_1 , а внутренней – множество ∂S_ℓ , множество $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$. Уравнение теплопереноса имеет вид

$$c(u)\rho(u)u_t = \operatorname{div}(\lambda(u)\nabla u), \quad (P, t) \in \Omega_T, \quad (4.7)$$

Выбранному тепловому воздействию, осуществляемому через внутреннее отверстие, соответствуют граничные условия

$$u(O, t) = p(t), \quad \frac{\partial u(O, t)}{\partial n} = q(t), \quad (O, t) \in \partial S_1 \times [0, T], \quad (4.8)$$

где вектор n – внешняя нормаль к ∂S_ℓ . Функция $q(t)$, согласно методике расчета теплообмена на поверхности, представленной в [154], [73] определяется соотношением $q(t) = a(\Theta - u(O, t))$, где a – коэффициент теплоотдачи, Θ – температура окружающей среды.

Учитывая требования, предъявляемые к условиям технологического процесса, обеспечивающим формирование желаемых свойств металла, когда в процессе термообработки недопустимы резкие изменения теплофизических свойств материала и резкие перепады температурных градиентов внутри заготовки и опираясь на результаты, представленные в [102], [59], имеем, что коэффициентные функции $c, \rho, \lambda \in C^2(\overline{\Omega_T})$, а функция $u(P, t) \in H^{3+\zeta, 2}(\Omega_T) \cap H^{2, 1}(\overline{\Omega_T})$, $\zeta \in (0, 1)$ и существуют константы Φ, β, S такие, что

$$\max_{\overline{\Omega_T}} |u(\|P\|, t)| \leq \Phi e^{\beta(r+t)}, \quad \max \left\{ \max_{\overline{Q_\ell}} |\partial_t^2 u|, \max_{\overline{Q_\ell}} |\partial_P^2 u|, \max_{\overline{Q_\ell}} |\partial_P^4 u| \right\} \leq S. \quad (4.9)$$

В задаче (4.7), (4.8) необходимо найти температурную функцию $u(P, t)$ вплоть до внешней границы кольцевого цилиндра, где неизвестные температурные значения представлены граничной функцией

$$u(A, t) = \varphi(t), \quad (A, t) \in \partial S_\ell \times (0, T). \quad (4.10)$$

Так как функция $u(P, t)$ осесимметрична, то введем в сечении полярные координаты, выполняя сдвиг по радиусу. Тогда переменная r соответствует расстоянию от внутренней границы сечения до текущей точки, $r \in [0, \ell]$, а множество $\Omega_T = (0, \ell) \times (0, T)$. Раскрывая оператор дивергенции, получаем следующее эквивалентное представление рассматриваемой задачи теплопереноса:

$$c(u)\rho(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda(u) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (r, t) \in Q_\ell. \quad (4.11)$$

$$u(0, t) = p(t), \quad u_r(0, t) = q(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.12)$$

Условия (4.9) при переходе к полярной системе координат примут вид:

$$\max_{\overline{\Omega_T}} |u(r, t)| \leq \Phi e^{\beta(r+t)} \quad \max \left\{ \max_{\overline{Q_\ell}} |\partial_t^2 u|, \max_{\overline{Q_\ell}} |\partial_r^2 u|, \max_{\overline{Q_\ell}} |\partial_r^4 u| \right\} \leq S. \quad (4.13)$$

В задаче (4.11)–(4.13) требуется найти температурную функцию $u_\delta(r, t)$, удовлетворяющую (4.11), (4.12) и определить функцию $\varphi(t)$, характеризующую температуру на внешней поверхности цилиндра

$$u(\ell, t) = \varphi(t), \quad t \in (0, T).$$

При построении вычислительной схемы метода определения температур во внутренних точках объекта необходимо учитывать, что при формировании исходных данных неизбежно возникают отклонения измеренных величин p_δ, q_δ от действительных значений p_0, q_0 , когда вместо $p_0(t), q_0(t)$ известны p_δ, q_δ и δ т.ч.

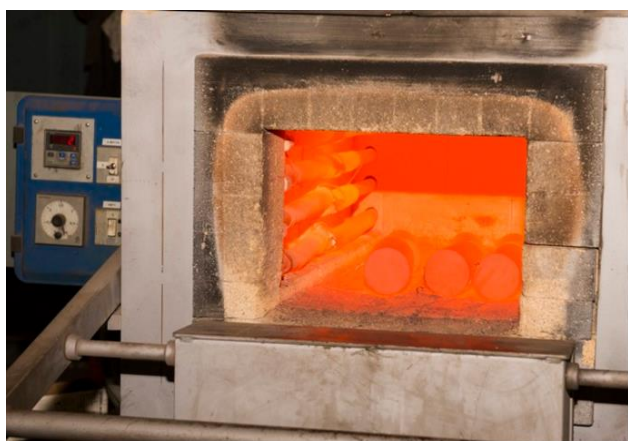
$$\max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|p_0 - p_\delta\|, \max_{t \in [0, T]} \|q_0 - q_\delta\| \right\} \leq \delta.$$

Требуется построить метод, позволяющий по приближенным данным p_δ, q_δ и δ найти температурную функцию $u_\delta(, t)$, удовлетворяющую (4.7), (4.8) и определить функцию ϕ_δ , характеризующую температуру на внешней поверхности цилиндра.

Таким образом, задача определения температурного поля кольцевого цилиндра сводится к обобщенной задаче нелинейного теплопереноса

4.2.2 Математическая модель задачи измерения, связанная с нелинейным теплопереносом при комплексной термической обработке в печах

В данном разделе рассмотрена математическая модель задач второго типа, связанная с теплопереносом в цилиндрическом теле, подвергнутому внешнему тепловому воздействию в процессе отжига и нормализации заготовок в камерных печах, в процессе вторичной обработки слябов, с обработкой стыков труб. Рис.62 иллюстрирует термообработку в камерных печах и вторичную термообработку, на рис.63 представлены установки для термообработки токами высокой частоты.

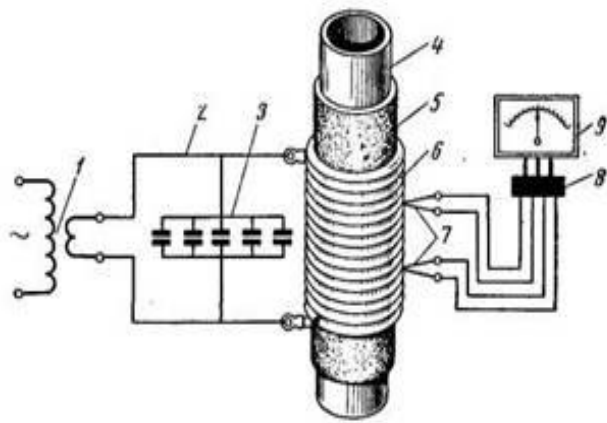


а)



б)

Рис. 62: Комплексная термообработка цилиндрического тела. Рис.(а) термообработка в камерной печи. Рис.(б) вторичная термообработка



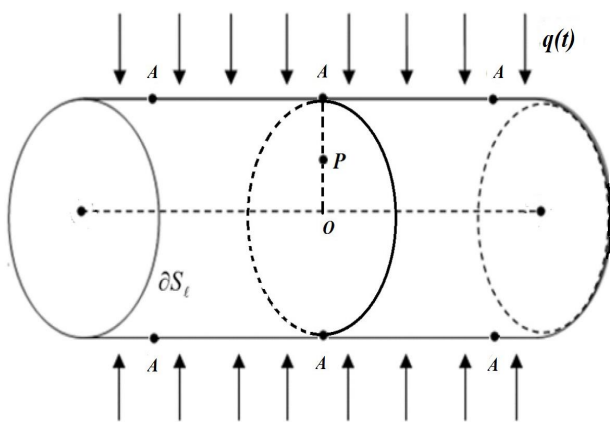
а)



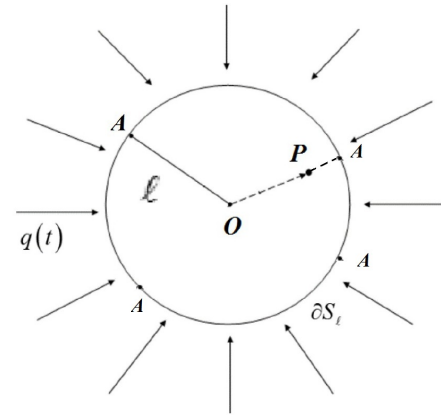
б)

Рис. 63: Термообработка индукционным способом токами промышленной частоты. (а) Схема термообработки. 1 — сварочный трансформатор, 2 — гибкий провод, 3 — конденсаторная батарея, 4 — нагреваемый объект, 5 — слой асбеста, 6 — нагревающие витки провода, 7 — термопары, 8 — переключатель, 9 — гальванометр. (б) обработка изделия в индукционной печи ТВЧ.

При термической обработке цилиндр радиуса ℓ подвергается внешнему тепловому воздействию продолжительностью T . Режим воздействия одинаков в каждой точке боковой поверхности. В процессе термообработки происходит регулирование интенсивности теплового воздействия относительно времени. Схема нагрева приведена на рис.64. Датчики измерения температуры находятся вблизи точек A .



а)



б)

Рис. 64: Схема нагрева цилиндра. O — точка на оси цилиндра, A — точка, вблизи которой проводятся измерения, P — контрольные точки, в которой требуется определить температуру

Изменение основных теплофизических свойств материала: теплоемкости, плотности и коэффициента теплопроводности в каждой внутренней точке определяются в зависимости от изменений температуры в этой точке в текущий момент

времени t . Теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности представлены функциями $c(u)$, $\rho(u)$, $\lambda(u)$ соответственно.

Существенная особенность технологического процесса термообработки в печи заключается в том, что она является промежуточным этапом комплексной термообработки и к началу этого этапа сохраняется влияния остаточных тепловых процессов во внутренних точках и температура во внутренних точках к началу термообработки в печах времени является неизвестной.

Согласно требованиям к условиям термообработки, во время технологического процесса недопустимы резкие перепады температурных градиентов на поверхности и во внутренних точках цилиндра. Распространение тепла в сечении цилиндра должно осуществляться одинаково по всем направлениям относительно оси цилиндра и температура должна принимать постоянные значения вдоль каждой прямой, параллельной его оси.

Основываясь на представленных предпосылках, получаем, что задача теплопереноса в цилиндре сводится к задаче нелинейного теплопереноса в сечении цилиндра плоскостью, перпендикулярной его оси. Сечение представлено множеством $\Omega = \{P : \|P\| < \ell\}$, а его граница – множеством ∂S_ℓ . Математическая модель теплопереноса в сечении имеет вид:

$$\begin{aligned} c(u)\rho(u)u_t &= \operatorname{div}(\lambda(u)\nabla u), \quad (P, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(A, t) &= p(t), \quad -\lambda(u)\frac{\partial u(A, t)}{\partial n} = q(t), \quad (A, t) \in \partial S_\ell \times [0, T], \end{aligned}$$

где граничные условия формируются из измерений вблизи поверхности тела ∂S_ℓ . Отсутствию резких изменений теплофизических характеристик и резких перепадов температурных градиентов соответствуют ограничения на коэффициентные функции $c, \rho, \lambda \in C^2(\overline{\Omega_T})$, и функцию $u(P, t) \in H^{3+\zeta, 2}(\Omega_T) \cap H^{2, 1}(\overline{\Omega_T})$, $\zeta \in (0, 1)$, для которой существуют $\Phi, \beta, S > 0$ такие, что

$$\max_{\overline{\Omega_T}} |u(P, t)| \leq \Phi e^{\beta(\|P\|+t)}, \quad \max \left\{ \max_{\overline{\Omega_T}} |\partial_t^2 u|, \max_{\overline{\Omega_T}} |\partial_P^2 u|, \max_{\overline{\Omega_T}} |\partial_P^4 u| \right\} \leq S. \quad (4.14)$$

В этой задаче необходимо найти температуру $u(P, t)$ во внутренних точках P вплоть до точек O на оси цилиндра. Искомой температуре на оси соответствует функция $u(0, t) = \varphi(t)$.

Переходя к полярным координатам и раскрывая оператор дивергенции, получаем эквивалентное представление задачи теплопереноса:

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r}\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda(u)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (r, t) \in \Omega_T. \quad (4.15)$$

$$u(\ell, t) = p(t), \quad u_r(\ell, t) = -\frac{q(t)}{\lambda(u(\ell, t))}, \quad t \in [0, T], \quad (4.16)$$

где r – радиус текущей точки P , а $\Omega_T = (0, \ell) \times (0, T)$. Условия (4.14) примут вид:

$$\max_{(r,t) \in \Omega_T} |u(r, t)| \leq \Phi e^{(r+t)} \quad (4.17)$$

$$\max \left\{ \max_{(r,t) \in \Omega_T} |\partial_t^2 u(r, t)|, \max_{(r,t) \in \Omega_T} |\partial_r^2 u(r, t)|, \max_{(r,t) \in \Omega_T} |\partial_r^4 u(r, t)| \right\} \leq S,$$

Основываясь на (4.15)– (4.17), необходимо разработать метод, позволяющий находить температуру $u(r, t)$ во внутренних точках сечения P вплоть до температурных значений $\varphi(t)$ на оси цилиндра:

$$u(0, t) = \varphi(t). \quad (4.18)$$

по результатам измерений, выполненных у поверхности тела при неизвестной начальной температуре тела.

При вычислении температуры во внутренних точках необходимо учитывать, что при проведении измерений вблизи поверхности тела неизбежно возникают отклонения измеренных величин p_δ, q_δ от действительных значений p_0 и q_0 и вместо p_0, q_0 известны p_δ, q_δ и допустимый уровень δ такие, что

$$\max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|p_0 - p_\delta\|, \max_{t \in [0, T]} \|q_0 - q_\delta\| \right\} \leq \delta.$$

Таким образом, необходимо построить численный метод, позволяющий по приближенным данным p_δ, q_δ и δ при неизвестных начальных условиях найти температурную функцию $u(r, t)$ во внутренних точках, удовлетворяющую (??), (??), а также температуру $u(0, t) = \phi_\delta(t)$ на оси цилиндра.

Основываясь на представленных результатах, получаем, что математической модель процесса теплопереноса в цилиндре, подвергаемом термической обработке в печах, согласуется с обобщенной математической моделью, а рассматриваемая задача теплопереноса относится к задачам теплопереноса второго типа.

4.2.3 Математическая модель задачи измерения, связанная с прогнозированием температурного состояния внешней оболочки датчика при нелинейном теплосенсе

Температура нагрева изделий при термической обработке металлов имеет исключительно важное значение. Качество изделий после термической обработки напрямую зависит от точного соблюдения температурного режима термообработки. Для контроля за температурным режимом используют, в том числе, датчики температуры, помещенные в цилиндрическую оболочку. Общий вид некоторых температурных датчиков, выпускаемой ПГ "Emerson", представлен на рис.65



Рис. 65: Термопреобразователь сопротивления Rosemount 214, производимый ПГ "Emerson"

При помещении датчика в среду, температуру которой необходимо измерить, происходит нагрев или охлаждение защитной оболочки, что неизбежно отражается на ее структурном состоянии. Избыточный перегрев или переохлаждение являются одной из причин, приводящих к изменению характеристик оболочки: истончению или разрушению защитного слоя, к изменению теплофизических свойств материала и т.д. Такая ситуация возникает при контактном определении температуры расплава при непрерывной разливке стали, при диагностики теплового состояния оборудования и т.д.

Изменение характеристик оболочки неизбежно отразится на достоверности и точности результатов измерений температур, являясь причиной возникновения

отклонений измеренных величин от действительных значений. Поэтому крайне важно выяснить как внешнее температурное поле влияет на тепловое состояние оболочки и в соответствии с полученными результатами сформировать рекомендации по проведению измерений, позволяющие обеспечить требуемый уровень точности измерений.

Рассматриваемая задача определения температурного состояния внешней оболочки датчика относится к задачам нелинейного теплопереноса второго типа, математическая модель которого рассмотрена в разделе 4.1, представлена соотношениями (4.4), (4.5), имеющими вид:

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r}\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda(u)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (r, t) \in \Omega_T.$$

где тепловое влияние среды на оболочку представлено граничными условиями:

$$u(\ell, t) = p(t), \quad u_r(\ell, t) = -\frac{q(t)}{\lambda(u(\ell, t))}, \quad t \in [0, T],$$

С дополнительными условиями (4.6), имеющими вид:

$$\max_{(r,t) \in \overline{\Omega_T}} |u(r, t)| \leq \Phi e^{(r+t)}$$

$$\max \left\{ \max_{(r,t) \in \overline{\Omega_T}} |\partial_t^2 u(r, t)|, \max_{(r,t) \in \overline{\Omega_T}} |\partial_r^2 u(r, t)|, \max_{(r,t) \in \overline{\Omega_T}} |\partial_r^4 u(r, t)| \right\} \leq S,$$

При прогнозировании температурного состояния оболочки необходимо учитывать, что тепловое влияние среды на оболочку определяется на основании измеренных величин p_δ , q_δ , когда вместо действительных значений p_0 и q_0 известны p_δ , q_δ и допустимый уровень точности измерений δ такие, что

$$\max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|p_0 - p_\delta\|, \max_{t \in [0, T]} \|q_0 - q_\delta\| \right\} \leq \delta.$$

Таким образом, необходимо построить численный метод, позволяющий по приближенным данным p_δ , q_δ и δ найти функцию $u(r, t)$, удовлетворяющую (4.4), (4.5) и характеризующую температуру во внутренних точках оболочки, вплоть до значений $u(0, t) = \varphi_\delta(t)$.

4.3 Метод прогнозирования температур для задач измерения, связанных с нелинейным теплопереносом в кольцевом цилиндре

В данном разделе предложен метод решения обобщенной задачи нелинейного теплопереноса в неоднородном кольцевом цилиндре, подвергнутому внешнему тепловому воздействию со стороны внутреннего отверстия при неизвестном начальном состоянии системы. Приведены результаты исследования устойчивости метода относительно погрешности исходных данных. Получены оценки температурных погрешностей, характеризующие наибольшее возможное отклонение найденных температур от действительных значений, а также представлены результаты вычислительного эксперимента, проводимого с целью проверки принципиальной возможности построения вычислительной схемы определения температуры во внутренних точках цилиндра и получения численных оценок температурных погрешностей. Предложенный метод дискретной регуляризации служит основой для прогнозирования температуры во внутренних точках объекта.

4.3.1 Вычислительная схема метода дискретной регуляризации

Математическая модель рассматриваемой задачи теплопереноса представлена в разделе 4.2.1 и в области $\Omega_T = (0, \ell) \times (0, T)$ имеет вид :

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda(u) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (r, t) \in \Omega_T. \quad (4.19)$$

с граничными условиями:

$$u(0, t) = p(t), \quad u_r(0, t) = q(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.20)$$

Согласно требованиям, предъявляемым к технологическому процессу, при его реализации недопустимы дополнительными условиями

$$\max_{\Omega_T} |u(r, t)| \leq \Phi e^{\beta(r+t)}, \quad \max \left\{ \max_{\Omega_T} |\partial_t^2 u|, \max_{\Omega_T} |\partial_r^2 u|, \max_{\Omega_T} |\partial_r^4 u| \right\} \leq S. \quad (4.21)$$

В этой задаче требуется найти функцию $u_\delta(r, t)$ вплоть до $u_\delta(\ell, t) = \varphi_\delta^\alpha(t)$ при условии, что вместо действительных значений $p_0(t)$ и $q_0(t)$ известны измеренные значения p_δ , q_δ и допустимый уровень δ такие, что

$$\max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|p_0 - p_\delta\|, \max_{t \in [0, T]} \|q_0 - q_\delta\| \right\} \leq \delta.$$

Основные идеи метода дискретной регуляризации для нелинейных задач заключается в следующем. Сначала, моделируются соотношения, характеризующие явную зависимость коэффициентных функций $c(u)$, $\rho(u)$, $\lambda(u)$ от температуры. Далее исходная задача (4.19), (4.20) сводится к системе конечно-разностных уравнений со стабилизирующим функционалом, из которых определяют значение функции $u(r, t)$ по пространственной координате. Такой подход применяется впервые и позволяет впервые численно прогнозировать температуру во внутренних точках объекта при неизвестном начальном тепловом состоянии тела. Устойчивость вычислительной схемы достигается введением стабилизирующего функционала и согласованием параметра регуляризации, шага дискретизации по пространству с шагом дискретизации по времени и уровнем δ .

Для получения соотношений, характеризующих зависимость коэффициентов от температуры, используем характеристики технологического процесса и результаты, представленные в [102], [59], полагая, что коэффициентные функции $c(u)$, $\rho(u)$, $\lambda(u)$ определяются формулами:

$$c(u) = c(u_0) + k_c (u(r, t) - u_0), \quad \rho(u) = \rho(u_0) + k_\rho (u(r, t) - u_0),$$

$$\lambda(u) = \lambda(u_0) + k_\lambda (u(r, t) - u_0).$$

и имеют место соотношения:

$$k_c = c(u^*) - c(u_0), \quad k_\rho = \rho(u^*) - \rho(u_0), \quad k_\lambda = \lambda(u^*) - \lambda(u_0).$$

где u_0 – температурные значения, приведенные в [73], [59] для определения значений теплофизических характеристик $c(u)$, $\rho(u)$, $\lambda(u)$, u^* – текущая температура. Обозначим $c_0 = c(u_0) - k_c u_0$, $\rho_0 = \rho(u_0) - k_\rho u_0$ и $\lambda_0 = \lambda(u_0) - k_\lambda u_0$, тогда

$$c(u) = c_0 + k_c \cdot u, \quad \rho(u) = \rho_0 + k_\rho \cdot u, \quad \lambda(u) = \lambda_0 + k_\lambda \cdot u. \quad (4.22)$$

Отметим, что величины k_c , k_ρ , k_λ согласованы с соответствующими характеристиками, представленными, например, в [59]. Соотношения (4.22) согласуются с разложением коэффициентных функций $c(u)$, $\rho(u)$, $\lambda(u)$ по формуле Тейлора в окрестности точки u_0

Перейдем к построению вычислительной схемы метода. Введем конечно-разностную сетку G в области Ω_T

$$G = \begin{cases} (r_i, t_j) : r_i = (i-1)h, t_j = (j-1)\tau, \\ h = (\ell)/N; \tau = T/M; i = \overline{1, N+1}; j = \overline{1, M+1} \end{cases}$$

и множество дискретных функций $V_h = \{v(r_i, t_j) = v_{i,j}\}$, заданных на G . Обозначим $u_{i,j} = u(r_i, t_j)$. Составим конечно-разностный аналог задачи (4.19), (4.20). С этой целью используем конечно-разностный аналог частных производных по r и по t в каждой точке G , предложенные А.А.Самарским в [136]

$$\begin{aligned} v_r^{i,j} &= \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h}, & i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M+1}; \\ v_t^{i,j} &= \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\tau}, & i = \overline{1, N+1}, j = \overline{1, M}. \\ v_{rr}^{i,j} &= \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h^2}, & i = \overline{2, N}, j = \overline{1, M+1}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Эти конечно-разностные аналоги аппроксимируют частные производные с точностью $O(h)$ для ∂_r , $O(h^2)$ для ∂_r^2 при $h \rightarrow 0$ и $O(\tau)$ при $\tau \rightarrow 0$ для ∂_t .

Подход к построению вычислительной схемы метода дискретной регуляризации для нелинейных задач, разработанным в данном исследовании, заключается в следующем. Первый ключевой момент состоит в том, что для решения конечно-разностного аналога обратной задачи (4.19), (4.20) предлагается явная комбинированная схема. Вторая идея заключается в выборе направления вычислений, когда на каждом шаге вычислительной процедуры находят значения $v_{i+1,j}$ относительно пространственной переменной.

Реализация первых идей происходит следующим образом. Для внутренних точек (r_i, t_j) при $i = \overline{2, N}, j = \overline{1, M}$ предлагаемый конечно-разностный аналог уравнения (4.19) имеет вид:

$$\begin{aligned} c_{i,j}\rho_{i,j} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\tau} &= \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{v_{i+1,j} - v_{i,j}} \frac{(v_{i+1,j} - v_{i,j})^2}{h^2} + \\ &+ \frac{\lambda_{i,j}}{(i-1)h} \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h} + \lambda_{i,j} \frac{(v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j})}{h^2} \end{aligned}$$

Отсюда выразим $v_{i+1,j}$, тогда при $i = \overline{2, N}$ и $j = \overline{1, M}$ получаем:

$$v_{i+1,j} = v_{i,j} + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j} (i-1) h^2}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\tau} + \frac{\lambda_{i,j} (i-1)}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} (v_{i,j} - v_{i-1,j}) \quad (4.24)$$

Для вычисления значений $v_{i,M+1}$ предлагается схема с более высокой точностью при $j = M + 1$ и $i = \overline{2, N}$. Получаем:

$$v_{i+1,M+1} = v_{i,M+1} + \frac{1}{\lambda_{i+1,M+1}(i-1) + \lambda_{i,M+1}} \left(\frac{c_{i,M+1}\rho_{i,M+1}(i-1)h^2}{\tau(1-\sigma)}(v_{i,M+1} - v_{i,M}) + \lambda_{i,M+1}(i-1)(v_{i,M+1} - v_{i-1,M+1}) \right) + \frac{\sigma}{(1-\sigma)} \frac{1}{\lambda_{i+1,M+1}(i-1) + \lambda_{i,M+1}(i-1)h^2} \frac{1}{\left((\lambda_{i+1,M}(i-1) + \lambda_{i,M})(v_{i+1,M} - v_{i,M}) - \lambda_{i,M}(i-1)(v_{i,M} - v_{i-1,M}) \right)} \quad (4.25)$$

Необходимость в построение комбинированной схемы связана с тем, что, основываясь на уравнении (4.24), невозможно получить значения $v(r_i, t_{M+1})$.

Граничные условия представлены следующим образом:

$$v_{1,j} = p_j, \quad v_{2,j} = p_j + hq_j \quad (4.26)$$

Таким образом, в отличие от общепринятых подходов к построению явных схем [6], [137], [136], [163], когда значение функции $v_{i,j+1}$ вычислялось относительно переменной по времени, в предлагаемом подходе на каждом шаге итерационного процесса находят значение функции $v(r, t)$ относительно пространственной переменной r . Такой подход позволяет решить проблему неизвестных начальных условий при разработке вычислительной процедуры.

Следующий ключевой момент построения метода связан с обеспечением устойчивости вычислительной схемы. Известно [6], [75], [137], что непосредственное использование уравнений (4.24), (4.25) не позволяет получать решения, устойчивые относительно погрешности исходных данных, поэтому в вычислительную схему предлагается ввести дополнительный стабилизирующий функционал с параметром регуляризации, а шаги дискретизации согласовать с уровнем погрешности исходных данных. Реализуя эту идею, получаем, что коэффициенты в уравнениях (4.24), (4.25) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= c_0 + k_c v_{i,j}, & \rho_{i,j} &= \rho_0 + k_\rho v_{i,j} \\ \lambda_{i,j} &= \lambda_0 + k_\lambda v_{i,j}, & \lambda_{i+1,j} &= \lambda_0 + (k_\lambda - \alpha) v_{i,j} = \lambda_{i,j} - \alpha v_{i,j}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где α —некоторый параметр регуляризации.

На основе предложенного подхода в данном исследовании разработана **вычислительная схема метода дискретной регуляризации**. Основные ее этапы состоят в следующем. Сначала согласуют шаг дискретизации h и параметр регуляризации α с величиной τ и δ . Далее, используя (4.26), определяют $v_{1,j}$, $v_{2,j}$ при $j = \overline{1, M}$. Затем, используя уравнения (4.24), (4.25) и (4.27), реализуют итерационный процесс. На каждом этапе итерационного процесса находят $v_{i+1,j}$, при $j = \overline{1, M+1}$ в узлах сетки (r_{i+1}, t_j) , $j = \overline{1, M+1}$. В результате вычисляем температурные значения во внутренних точках объекта вплоть до точек (r_{N+1}, t_j) , $j = \overline{1, M+1}$, соответствующих приближенным значениям $\varphi_\delta^\alpha(t)$ искомой граничной функции $u(\ell, t)$.

4.3.2 Исследование устойчивости основной вычислительной схемы метода дискретной регуляризации для нелинейных задач

С целью исследования устойчивости вычислительной схемы, основанной на (4.24), (4.26), (4.27), используем подход, принятый в теории регуляризации [159]. Введем в рассмотрение следующие параметры:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \max_{j=\overline{1,1,M+1}} |q_j|, \quad \lambda = \min_{(r_i, t_j) \in G} |\lambda(u(r_i, t_j))|, \\ \mathfrak{C} &= \max_{(r_i, t_j) \in G} |c(u(r_i, t_j))| \quad \mathfrak{R} = \max_{(r_i, t_j) \in G} |\rho(u(r_i, t_j))| \end{aligned} \quad (4.28)$$

а также величины ϖ_i , характеризующие накапливаемую вычислительную погрешность и определяемые формулой:

$$\varpi_{i+1} = \max_j |v_{i+1,j} - v_{i,j}|, \quad i = \overline{1, N},$$

где $v_{i,j}$ удовлетворяет (4.24) и (4.26). С технической точки зрения, вычислительная схема устойчива, если накапливаемая вычислительная погрешность ϖ_{i+1} является контролируемой величиной, пропорциональной погрешности измерений δ , когда имеет место оценка $\varpi_{N+1} < V\delta$, где V —некоторая константа.

Оценим вычислительную погрешность. Учитывая, что вместо действительных значений p_j^0 , g_j^0 известны измеренные значения p_j^δ , g_j^δ , получаем

$$\varpi_2 = \max_{j=\overline{1,1,M}} |v_{2,j} - v_{1,j}| \leq \max_{j=\overline{1,1,M+1}} |p_j^\delta + g_j^\delta h - p_j^0| \leq \max_{j=\overline{1,1,M+1}} |(g_j^\delta - g_j^0)h + g_j^0 h| \leq (\mathfrak{S} + \delta)h.$$

Оценим вычислительную погрешность ϖ_{i+1} , накапливаемую за один шаг итерационного процесса. Имеем

$$\begin{aligned}
|v_{i+1,j} - v_{i,j}| &\leq |v_{i,j} + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\tau} + \\
&\quad + \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} (v_{i,j} - v_{i-1,j}) - v_{i,j}| \leq \\
&\leq \max_j \left| \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})\tau} \right| \max_j |v_{i,j+1} - v_{i,j}| + \\
&\quad + \max_j \left| \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \right| \max_j |v_{i,j} - v_{i-1,j}| \leq \\
&\leq \max_j \left| \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})\tau} \right| \max_j |v_{i,j+1} - v_{i,j}| + \max_j \left| \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \right| \varpi_i
\end{aligned}$$

Оценим величину $\max_j |v_{i,j+1} - v_{i,j}|$. Так как начальные условия в задаче (4.19), (4.20) неизвестны, то, учитывая ограниченность функции $u(r, t)$ и соотношения (4.21), получаем

$$\max_j |v_{i,j+1} - v_{i,j}| \leq 2\Phi e^{\beta(\ell+T)} \quad i = \overline{3, N}.$$

Тогда имеет место оценка

$$|v_{i+1,j} - v_{i,j}| \leq \left| \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})\tau} \right| 2\Phi e^{\beta(\ell+T)} + \left| \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \right| \varpi_i$$

Оценим $\frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}}$. В ситуации нагрева имеем $\lambda_{i+1,j} > \lambda_{i,j}$, тогда

$$\frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \frac{i-1}{i} < 1$$

. В ситуации охлаждения выберем α так, чтобы было выполнено условие

$$\frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} = \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i,j}i - \alpha(i-1)v_{i,j}} < 1,$$

Для выполнения этого условия полагаем, что при $i = \overline{1, N+1}$ и $j = \overline{1, M+1}$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
-\alpha(i-1)v_{i,j} &> -\alpha(i-1)|v_{i,j}| > -\lambda_{i,j} \\
\lambda_{i,j}i - \alpha(i-1)v_{i,j} &> \lambda_{i,j}(i-1) \Rightarrow \alpha < \frac{\lambda_{i,j}}{(i-1)|v_{i,j}|},
\end{aligned}$$

Таким образом, выбирая α таким, что $\alpha < \min_{i,j} \frac{\lambda_{i,j}}{(i-1)|v_{i,j}|}$, получаем, что условие

$$\frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} = \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i,j}i - \alpha(i-1)v_{i,j}} < 1, \quad (4.29)$$

соблюдается как при нагреве, так и при охлаждении при всех $i = \overline{1, N+1}$ и $j = \overline{1, M+1}$. В данном исследовании $\alpha = \frac{\lambda}{N\Phi e^{\beta(\ell+T)}}$

Обозначим $\mu_i = \max_j \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i,j}i - \alpha(i-1)|v_{i,j}|}$ и $\eta_i = \max_j \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})\tau}$.

Получаем следующую оценку накопленной вычислительной погрешности

$$\varpi_{i+1} \leq \eta_i 2\Phi e^{\beta(\ell+T)} + \mu_i w_i$$

Отметим, что из (4.29) следует, что $\mu_i < 1$. Получаем следующие оценки:

$$\varpi_3 \leq \eta_2 2\Phi e^{\beta(\ell+T)} + \mu_2 \varpi_2 \leq \eta_2 2\Phi e^{\beta(\ell+T)} + \mu_2 (\mathfrak{S} + \delta)h,$$

$$\varpi_4 \leq \eta_3 2\Phi e^{\beta(\ell+T)} + \mu_3 \varpi_3 \leq \eta_3 2\Phi e^{\beta(\ell+T)} + \mu_3 (\eta_2 2\Phi e^{\beta(\ell+T)} + \mu_2 (\mathfrak{S} + \delta)h)$$

Для вычислительной погрешности ϖ_{i+1} , накопленной на $i+1$ шаге итерационного процесса имеет место оценка

$$\varpi_{i+1} \leq 2\Phi e^{\beta(\ell+T)} \left(\eta_i + \mu_i \eta_{i-1} + \mu_i \mu_{i-1} \eta_{i-2} + \dots + \eta_2 \prod_{n=3}^i \mu_n \right) + (\mathfrak{S} + \delta)h \prod_{n=2}^i \mu_n$$

Для вычислительной погрешности ϖ_{N+1} , накопленной на последнем шаге итерационного процесса имеет место оценка

$$\varpi_{N+1} \leq 2\Phi e^{\beta(\ell+T)} \left(\eta_N + \mu_N \eta_{N-1} + \mu_N \mu_{N-1} \eta_{N-2} + \dots + \eta_2 \prod_{n=3}^N \mu_n \right) + (\mathfrak{S} + \delta)h \prod_{n=2}^N \mu_n$$

Полагаем $\mu = \max_{i=1, N+1} \mu_i$ и $\eta = \max_{i=1, N+1} \eta_i$. Основываясь на (4.29), получаем $\mu < 1$.

Отметим, что накопленная вычислительная погрешность достигает наибольшего значения на последнем шаге итерационного процесса, ей соответствует величина ϖ_{N+1} . Имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} \varpi_{N+1} &\leq 2\Phi e^{\beta(\ell+T)} \eta (1 + \mu + \mu^2 + \dots + \mu^{N-3}) + (\mathfrak{S} + 2\delta)h \mu^{N-2} \leq \\ &\leq \eta 2\Phi e^{\beta(\ell+T)} \frac{1}{1 - \mu} + (\mathfrak{S} + \delta)h \mu^{N-2}. \end{aligned}$$

Как отмечалось ранее, схема устойчива, если для накопленной вычислительной погрешности ϖ_{N+1} соблюдено условие устойчивости $\varpi_{N+1} < V\delta$.

Согласуем шаги дискретизации и параметр регуляризации так, чтобы условие устойчивости соблюдалось. Для этого достаточно, чтобы $\eta < \frac{\delta}{2\Phi} e^{-\beta(\ell+T)}$. Найдем

условия, обеспечивающие выполнение последнего неравенства. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_{i+1j}(i-1) + \lambda_{ij}} &= \frac{1}{\lambda_{ij}i - \alpha(i-1)v_{ij}} < \frac{1}{\alpha(i-1)v_{ij}i - \alpha(i-1)v_{ij}} < \\ &< \frac{1}{\alpha(i-1)v_{ij}(i-1)} \leq \frac{1}{\alpha(i-1)^2|v_{ij}|}, \end{aligned}$$

тогда при $i = \overline{1, N}$ и $j = \overline{1, M}$ справедлива оценка

$$\frac{c_{ij}\rho_{ij}(i-1)h^2}{(\lambda_{i+1j}(i-1) + \lambda_{ij})\tau} \leq \frac{h^2 c_{ij}\rho_{ij}(i-1)}{\tau \alpha|v_{ij}|(i-1)^2} \leq \frac{h^2 c_{ij}\rho_{ij}}{\tau \alpha|v_{ij}|(i-1)}.$$

Выберем шаги дискретизации так, чтобы при $i = \overline{1, N+1}$ и $j = \overline{1, M}$ выполнялось

$$\frac{h^2 c_{ij}\rho_{ij}}{\tau \alpha|v_{ij}|(i-1)} \leq \frac{\delta}{2\Phi} e^{-\beta(\ell+T)}. \quad (4.30)$$

Учитывая, что $\lambda_{i,j} > 0$ и $\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j} = \lambda_{i,j} - \alpha(i-1)v_{i,j}$, получаем, что $\alpha(i-1)v_{i,j} < \lambda_{i,j}$. Отсюда и (4.30) следует

$$\frac{h^2}{\tau} \leq \frac{\delta}{2\Phi} e^{-\beta(\ell+T)} \frac{\alpha|v_{ij}|(i-1)}{c_{ij}\rho_{ij}} \leq \frac{\lambda_{ij}}{c_{ij}\rho_{ij}} \frac{\delta}{2\Phi} e^{-\beta(\ell+T)}. \quad (4.31)$$

Полагаем

$$\frac{h^2}{\tau} \leq \min_{i=\overline{1, N+1}} \min_{j=\overline{1, M+1}} \frac{\lambda_{ij}}{c_{ij}\rho_{ij}} \leq \frac{\lambda}{\mathfrak{C}\mathfrak{R}} \frac{\delta}{2\Phi} e^{-\beta(\ell+T)}.$$

тогда, принимая во внимание (4.30), получаем

$$\eta = \max_{i=\overline{1, N}} \max_{j=\overline{1, M+1}} \frac{c_{ij}\rho_{ij}(i-1)h^2}{(\lambda_{i+1j}(i-1) + \lambda_{ij})\tau} \leq \max_{i=\overline{1, N}} \max_{j=\overline{1, M+1}} \frac{h^2 c_{ij}\rho_{ij}}{\tau \alpha|v_{ij}|(i-1)} \leq \frac{\delta}{2\Phi} e^{-\beta(\ell+T)}.$$

Таким образом, условие $\eta \leq \frac{\delta}{2\Phi} e^{-\beta(\ell+T)}$ выполняется, и в этом случае для накопленной вычислительной погрешности ϖ_{N+1} имеет место оценка

$$\varpi_{N+1} \leq \frac{\delta}{1-\mu} + (\mathfrak{S} + \delta)h\mu^{N-2}. \quad (4.32)$$

Согласуем оценку (4.32) и условия устойчивости, потребовав выполнения условия

$$\varpi_{N+1} \leq \frac{\delta}{1-\mu} + (\mathfrak{S} + \delta)\mu^{N-2} \leq V\delta.$$

Полагаем $N > \ell$, тогда шаг дискретизации $h < 1$ и

$$\mu^{N-2} \leq \left(V - \frac{1}{1-\mu} \right) \frac{\delta}{\mathfrak{S} + \delta}.$$

Учитывая, что $\mu < 1$, получаем

$$N > 2 + \log_{\mu} \left(\left(V - \frac{1}{1-\mu} \right) \frac{\delta}{\mathfrak{F} + \delta} \right).$$

при $V = 1 + \frac{1}{1-\mu}$. Таким образом, при выполнении условия

$$N > \max \left\{ 2 + \log_{\mu} \left(\left(V - \frac{1}{1-\mu} \right) \frac{\delta}{\mathfrak{F} + \delta} \right), \ell + 1 \right\}, \quad (4.33)$$

и при следующем согласовании шагов дискретизации и параметра регуляризации

$$\frac{h^2}{\tau} < \frac{\lambda}{\mathfrak{C}\mathfrak{R}2\Phi} \frac{\delta}{e^{-\beta(\ell+T)}}, \quad \alpha < \frac{\lambda}{N\Phi e^{\beta(\ell+T)}} \quad i = \overline{1, N+1}. \quad (4.34)$$

имеет место устойчивость вычислительной схемы, а для накопленной вычислительной погрешности достигается требуемый уровень $\varpi_{N+1} \leq V\delta$ при $V = 1 + \frac{1}{1-\mu}$.

4.3.3 Оценка погрешности прогнозируемых температур

Оценим наибольшее уклонение прогнозируемых температур $v_{i,j}$, полученных с помощью основной вычислительной схемы, от действительных значений $u_{i,j}$. Основываясь на результатах [73], [59], отметим, что дополнительные погрешности, возникающие при использовании (4.22) для представления $c(u)$, $\rho(u)$, $\lambda(u)$, не оказывают существенного влияния на суммарную величину температурной погрешности. Учитывая (4.23), получаем:

$$\begin{aligned} c_{i,j}\rho_{i,j} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + \underline{Q}(\tau) \right) &= \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + \underline{Q}(h) \right)^2 + \\ &+ \frac{\lambda_{i,j}}{(i-1)h} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + \underline{Q}(h) \right) + \lambda_{i,j} \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \underline{Q}(h^2) \right) \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} c_{i,j}\rho_{i,j} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + \underline{Q}(\tau) \right) &= \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \right)^2 + \\ &+ 2 \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \underline{Q}(h) + \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} (\underline{Q}(h))^2 + \frac{\lambda_{i,j}}{(i-1)h} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + \\ &+ \frac{\lambda_{i,j}}{(i-1)h} \underline{Q}(h) + \lambda_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \lambda_{i,j} \underline{Q}(h^2) \end{aligned}$$

Выразим из этого уравнения $u_{i+1,j}$. При $i = \overline{2, N+1}$ и $j = \overline{1, M}$ имеем

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j} (i-1) h^2}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + \frac{\lambda_{i,j} (i-1)}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(\tau) + 2 \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{h} \frac{(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \\
& \quad + \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} \frac{(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} (\underline{Q}(h))^2 + \\
& \quad + \frac{\lambda_{i,j}}{(i-1)h} \frac{(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \lambda_{i,j} \frac{(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h^2)
\end{aligned}$$

После выполнения преобразований имеем

$$\begin{aligned}
u_{i+1,j} &= u_{i,j} + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) + \\
& \quad + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(\tau) + 2 \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1)h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \\
& \quad + \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1)h^2}{(u_{i+1,j} - u_{i,j})(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})} (\underline{Q}(h))^2 + \\
& \quad + \frac{\lambda_{i,j}h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \frac{\lambda_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h^2) \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Оценим температурную погрешность, получаемую на каждом пространственном слое, используя величины

$$s_i = \max_j |v_{i,j} - u_{i,j}|, \quad i = \overline{1, N+1},$$

где $v_{i,j}$ удовлетворяет (4.25), (4.26), а $u_{i,j}$ удовлетворяет (4.19), (4.20). Имеем

$$\begin{aligned}
|v_{i+1,j} - u_{i+1,j}| &\leq |v_{i,j} - u_{i,j}| + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})} \left| \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\tau} - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} \right| + \\
& \quad + \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} |(v_{i,j} - v_{i-1,j}) - (u_{i,j} - u_{i-1,j})| + \\
& \quad + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(\tau) + 2 \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1)h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \\
& \quad + \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1)h^2}{(u_{i+1,j} - u_{i,j})(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})} (\underline{Q}(h))^2 + \\
& \quad + \frac{\lambda_{i,j}h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \frac{\lambda_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h^2)
\end{aligned}$$

Учитывая (4.21), получаем:

$$\begin{aligned}
\max_j |v_{i+1,j} - u_{i+1,j}| &\leq \max_j |v_{i,j} - u_{i,j}| + 2 \max_j \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})\tau} 2\Phi e^{\beta(\ell+T)} + \\
& \quad + \max_j \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \left(\max_j |v_{i,j} - u_{i,j}| + \max_j |v_{i-1,j} - u_{i-1,j}| \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \max_j \frac{c_{i,j} \rho_{i,j} (i-1) h^2}{(\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j})} S\tau + 2 \max_j \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}) (i-1) h}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} Sh + \\
& + \max_j \left| \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} \right| \frac{(i-1) h^2}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} S^2 h^2 + \\
& + \max_j \frac{\lambda_{i,j} h}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} Sh + \max_j \frac{\lambda_{i,j} (i-1) h^2}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} Sh^2
\end{aligned}$$

Основываясь на определении η , μ и s_i и, учитывая, что $s_i > s_{i-1}$, получаем

$$\begin{aligned}
s_{i+1} & \leq s_i + 4\eta\Phi e^{\beta(\ell+T)} + 2\mu s_i + \eta\tau S\tau + \\
& + 2 \max_j \frac{|\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}| (i-1) h}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} Sh + \max_j \left| \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} \right| \frac{(i-1) h^2}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} S^2 h^2 + \\
& + \max_j \frac{\lambda_{i,j} h}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} Sh + \max_j \frac{\lambda_{i,j} (i-1) h^2}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} Sh^2
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Оценим коэффициенты в (4.36). Так как $\alpha|v_{i,j}| (i-1) < \lambda_{i,j}$, и, согласно условиям устойчивости метода $h < 1$, то, принимая во внимание (4.29), получаем

$$\frac{|\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}| (i-1) h}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \frac{\alpha|v_{i,j}| (i-1) h}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} < \frac{\lambda_{i,j} h}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} < \mu h < 1 \tag{4.37}$$

Оценим следующий коэффициент. Принимая во внимание (4.22), получаем

$$\lambda_{i+1,j} = \lambda_{i,j} + k_\lambda(u_{i+1,j} - u_{i,j}), \quad \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} = k_\lambda.$$

С другой стороны, из (4.27) следует $\lambda_{i+1,j} = \lambda_0 + k_\lambda v_{i,j} - \alpha v_{i,j} = \lambda_{i,j} - \alpha v_{i,j}$. Тогда, аппроксимируя $k_\lambda v_{i+1,j}$ соотношением $k_\lambda v_{i,j} - \alpha v_{i,j}$, получаем

$$\frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{v_{i+1,j} - v_{i,j}} = \frac{\lambda_{i,j} - \alpha v_{i,j} - \lambda_{i,j}}{v_{i,j} - \frac{\alpha}{k_\lambda} v_{i,j} - v_{i,j}} = \frac{-\alpha v_{i,j}}{-\frac{\alpha}{k_\lambda} v_{i,j}} = k_\lambda$$

тогда

$$\left| \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} \right| \frac{(i-1) h^2}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \leq k_\lambda \frac{h^2 \mu}{\lambda_{i,j}} \leq \frac{k_\lambda h^2}{\lambda} \tag{4.38}$$

Оценим оставшиеся коэффициенты. Из (4.29) следует, что

$$\frac{\lambda_{i,j} (i-1)}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \mu \leq 1 \quad \frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \frac{\mu}{i-1} \leq \mu \leq 1$$

Учитывая условие устойчивости $\eta \leq \frac{\delta}{2\Phi} e^{-\beta(\ell+T)}$, получаем, что (4.36) примет вид

$$\begin{aligned}
s_{i+1} & \leq (1 + 2\mu) s_i + 2\delta + \eta\tau S\tau + 2\mu h Sh + \frac{k_\lambda h^2}{\lambda} Sh^2 + \mu h Sh + \mu h^2 Sh^2 \leq \\
& \leq (1 + 2\mu) s_i + 2\delta + \eta S\tau^2 + 3\mu Sh^2 + \left(\frac{k_\lambda}{\lambda} S^2 + \mu S \right) h^4
\end{aligned} \tag{4.39}$$

С технической точки зрения, соотношение (4.39) характеризует отклонение прогнозируемых температур $v_{i+1,j}$, полученных к моменту завершения внешнего теплового воздействия в каждой точке цилиндра с радиусом $r_{i+1,j}$, от действительных значений $u_{i+1,j}$.

Обозначим $\Psi = \eta S \tau^2 + 3\mu S h^2 + \left(\frac{k_\lambda}{\lambda} S^2 + \mu S\right) h^4$. Учитывая, что вблизи внутренней поверхности кольцевого цилиндра, подвергаемой внешнему тепловому воздействию, имеет место оценка

$$s_2 = \max_j |v_{2j} - u_{2j}| \leq \max_j |u_{1,j} + hq_j - (u_{1,j}^0 + hq_j^0) + \underline{O}(h)| \leq \delta + h\delta + Sh.$$

а также (4.39), получаем

$$\begin{aligned} s_3 &\leq (1 + 2\mu) s_2 + 2\delta + \Psi \leq (1 + 2\mu) (\delta + h\delta + Sh) + 2\delta + \Psi \\ s_4 &\leq (1 + 2\mu) s_3 + 2\delta + \Psi \leq (1 + 2\mu)^2 (\delta + h\delta + Sh) + (2\delta + \Psi) (1 + (1 + 2\mu)) \\ s_5 &\leq (1 + 2\mu) s_4 + 2\delta + \Psi \leq \\ &\leq (1 + 2\mu)^3 (\delta + h\delta + Sh) + (2\delta + \Psi) \left(1 + (1 + 2\mu) + (1 + 2\mu)^2\right) \dots \\ s_{i+1} &\leq (1 + 2\mu) s_i + 2\delta + \Psi \leq (1 + 2\mu)^{i-1} (\delta + h\delta + Sh) + (2\delta + \Psi) \sum_{k=0}^{i-2} (1 + 2\mu)^k \end{aligned}$$

Найдем оценку s_{N+1} наибольших температурных отклонений, полученных к моменту завершения внешнего теплового воздействия. Применяя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем

$$\begin{aligned} s_{N+1} &\leq (1 + 2\mu) s_N + 2\delta + \Psi \leq \\ &\leq (1 + 2\mu)^{N-1} (\delta + h\delta + Sh) + (2\delta + \Psi) \sum_{k=0}^{N-2} (1 + 2\mu)^k \leq \\ &\leq (1 + 2\mu)^{N-1} (\delta + h\delta + Sh) + \frac{1}{2\mu} (1 + 2\mu)^{N-1} (2\delta + \Psi) \leq \\ &\leq (1 + 2\mu)^{N-1} \left(\delta + h\delta + Sh + \frac{1}{2\mu} (2\delta + \Psi) \right) \end{aligned}$$

Используя соотношение $\mu = \max_{i,j} \frac{\lambda_{i,j} (i-1)}{\lambda_{i,j} i - \alpha (i-1) |v_{i,j}|} > \max_{i,j} \frac{\lambda_{i,j} (i-1)}{\lambda_{i,j} i} > \frac{1}{2}$ и учитывая, что $h < 1$, получаем

$$s_{N+1} \leq 3^{N-1} (4\delta + Sh + \Psi)$$

Принимая во внимание (4.33), (4.34), имеем

$$\begin{aligned}
s_{N+1} &\leq 4^{1+\frac{\delta}{\mathfrak{S}+\delta}} \frac{\delta}{\mathfrak{S}+\delta} \left(4\delta + S \sqrt{\frac{\lambda}{\mathfrak{C}\mathfrak{R}} \frac{\delta}{2\Phi}} e^{-\beta(\ell+T)/2} + \Psi \right) \leq \\
&\leq \frac{16\delta}{\mathfrak{S}+\delta} \left(4\delta + S \sqrt{\frac{\lambda\delta}{2\Phi\mathfrak{C}\mathfrak{R}}} e^{-\beta(\ell+T)/2} \right) + \\
&+ \frac{16S\delta^2}{2\Phi(\mathfrak{S}+\delta)e^{\beta(\ell+T)}} \left(\tau^2 + \frac{3\lambda}{\mathfrak{C}\mathfrak{R}}\tau + \left(\frac{k_\lambda}{\lambda}S + 1 \right) \frac{\delta\lambda^2}{2\Phi\mathfrak{C}^2\mathfrak{R}^2} e^{-\beta(\ell+T)}\tau^2 \right)
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что при соблюдении соотношений (4.33), (4.34), возможно осуществить прогнозирование температурных значений во внутренних точках цилиндра при неизвестной начальной температуре объекта.

Оценки температурных отклонений, полученные во всей области Ω_T являются завышенными. Тем не менее, возможно обеспечить приемлемый уровень точности прогнозирования температур в подобласти $\Omega_\varepsilon = [0, \ell] \times [\varepsilon, T - \varepsilon]$, исключив из рассмотрения начальный и конечный моменты времени. Это объясняется неединственностью во всей области Ω_T решения обратной задачи и согласуется с результатам, представленными в [90], [93].

4.3.4 Результаты экспериментального исследования на основе имитационного моделирования

Основная цель вычислительного эксперимента заключалась в проверке принципиальной возможности прогнозирования температур в кольцевом цилиндре с неизвестным начальным тепловым состоянием с учетом при нелинейном теплопереносе, а также в получении численных оценок температурных погрешностей. Объектом эксперимента являлось построение во всей области численного решения задачи теплопереноса (4.19), (4.20) при неизвестных начальных условиях.

Вычислительный эксперимент проводился для нормированных переменных $r^* = \frac{r}{\ell} \leq 1$ и $t^* = \frac{2t}{T}$, и нормированных тестовых температурных функций, имитирующих характер изменения температурного поля. Нормирование осуществлялось согласно формулам:

$$p(t) = \frac{p(t) - p(0)}{\max_{t \in [0, T]} |p(t)|} \quad \varphi(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{\max_{t \in [0, T]} |\varphi(t)|}$$

В эксперименте были рассмотрены следующие типы теплопереноса:

• **Тип 1.** Тестовые функции, соответствующие первоначальному равномерному нагреву, а затем равномерному охлаждению тонкого кольцевого цилиндра. Необходимо, чтобы на внешней поверхности цилиндра, в узлах сетки (r_{N+1}^*, t_j^*) , изменение температуры соответствовало функции $u(1, t^*) = \varphi_1 = t^* e^{-t^*}$. Температуре на внутренней поверхности цилиндра при данном типе теплопереноса соответствует функция $p_1 = t^* e^{-t^*}$.

• **Тип 2.** Тестовые функции, соответствующие первоначальному нагреву, а затем медленному охлаждению кольцевого цилиндра. Численное моделирование данной ситуации проводилось по следующей методике. Необходимо, чтобы на внешней поверхности цилиндра, в узлах сетки (r_{N+1}^*, t_j^*) , изменение температуры соответствовало функции $u(1, t^*) = \varphi_2 = t^* (e^{-t^*} - e^{-1})$. Температуре внутренней поверхности цилиндра при данном типе теплопереноса соответствует $p_2 = t^* e^{-t^*}$.

• **Тип 3.** Тестовые функции, соответствующие попеременному нагреву и охлаждению одинаковой длительности, когда сначала необходимо разогреть тело до определенной температуры, а затем охладить его до первоначального состояния. Численное моделирование данной ситуации проводилось по следующей методике. Необходимо, чтобы на внешней поверхности цилиндра, в узлах сетки (r_{N+1}^*, t_j^*) , изменение температуры соответствовало функции $u(1, t^*) = \varphi_3 = 1 - (1 - t^*)^2$. Измеренной температуре на внутренней поверхности цилиндра при данном типе теплопереноса соответствует функция $p_3 = t^* e^{-t^*}$.

• **Тип 4.** Тестовые функции, соответствующие быстрому нагреву и последующему значительному охлаждению. Численное моделирование данной ситуации проводилось по следующей методике. Необходимо, чтобы на внешней поверхности цилиндра, в узлах сетки (r_{N+1}^*, t_j^*) , изменение температуры соответствовало функции $u(1, t^*) = \varphi_4 = t^* e^{-t^*}$. Измеренной температуре на внутренней поверхности цилиндра при данном типе теплопереноса соответствует функция $p_4 = \frac{1 - e^{-t^*/s}}{1 - e^{-1/s}}$.

• **Тип 5.** Тестовые функции, соответствующие резкому первоначальному нагреву и последующему продолжительному охлаждению. Численное моделирование данной ситуации проводилось по следующей методике. Необходимо, чтобы на

внешней поверхности цилиндра, в узлах сетки (r_{N+1}^*, t_j^*) , изменение температуры соответствовало функции $u(1, t^*) = \varphi_5 = \frac{1 - e^{-t^*/s}}{1 - e^{1/s}}$. Измеренной температуре на внутренней поверхности цилиндра при данном типе теплопереноса соответствует функция $p_5 = t^* e^{-t^*}$.

Формирование различных температурных полей на внешней поверхности при одинаковой температуре поверхности объясняется наличием внутреннего теплового источника, влияние которых отражается на результатах воздействия внешних тепловых потоков. Возникновение отличий температур на внешней поверхности и на оси цилиндра объясняется инертностью теплопереноса.

Методика эксперимента заключалась в следующем. На начальном этапе по тестовым значениям $u(0, t) = p(t)$, $u(\ell, t) = \varphi(t)$ находили решение прямой задачи:

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r}\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda(u)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (r, t) \in \Omega_T. \quad (4.40)$$

с известными начальными и граничными условиями

$$u(0, t) = p(t), u(\ell, t) = \varphi(t), t \in [0, T], \quad (4.41)$$

$$u(r, 0) = f(r), r \in [0, \ell]$$

где коэффициенты $c(u)$ $\rho(u)$ $\lambda(u)$ определены формулами:

$$c(u) = c_0 + k_c \cdot u, \quad \rho(u) = \rho_0 + k_\rho \cdot u, \quad \lambda(u) = \lambda_0 + k_\lambda \cdot u. \quad (4.42)$$

Решение прямой задачи $u_0(r, t)$ и функцию $\varphi(t)$ использовали в дальнейшем в качестве тестовых значений при проведении сравнительного анализа.

Далее моделировали исходные данные p_δ, q_δ обратной задачи нелинейного теплопереноса (4.19)–(4.21) согласно формулам

$$p_\delta = p(t_j) + erp_j, \quad q_\delta = \frac{u_0(r_2, t_j) - p(t_j)}{h} + erq_j.$$

где каждое из значений erp_j, erq_j равномерно распределено на $[-\delta, \delta]$. Предлагаемый подход к моделированию p_δ, q_δ эквивалентен появлению аддитивных случайных отклонений в результатах измерений вблизи внутренней поверхности тела, уровень которых не превосходит величины δ .

Затем, с помощью предложенной вычислительной схемы, находили приближенное решение $u_\delta^\alpha(r, t)$ задачи нелинейного теплопереноса (4.19)–(4.21) в области $\overline{\Omega_T} = [0, 1] \times [0, 2]$. На следующем этапе эксперимента оценивали погрешность результатов прогнозирования температур на внешней поверхности цилиндра, сравнивая полученные $u_\delta^\alpha(t) = \varphi_\delta(t)$ с тестовыми значениям $u_0(1, t) = \varphi(t)$.

Результаты вычислительных экспериментов для тестовых функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, $\varphi_4(t)$, $\varphi_5(t)$ проиллюстрированы на рис. 66–70 и представлены в табл.15, 16.

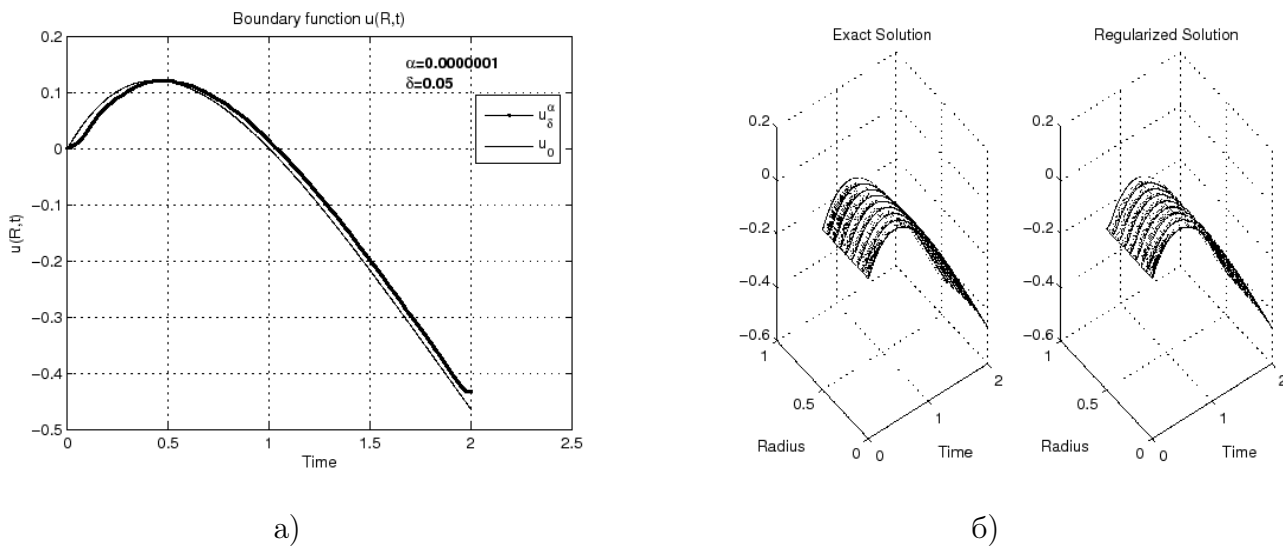


Рис. 66: Результаты сравнительного анализа численного решения задачи нелинейного теплопереноса при тестовых значениях p_1, φ_1 .

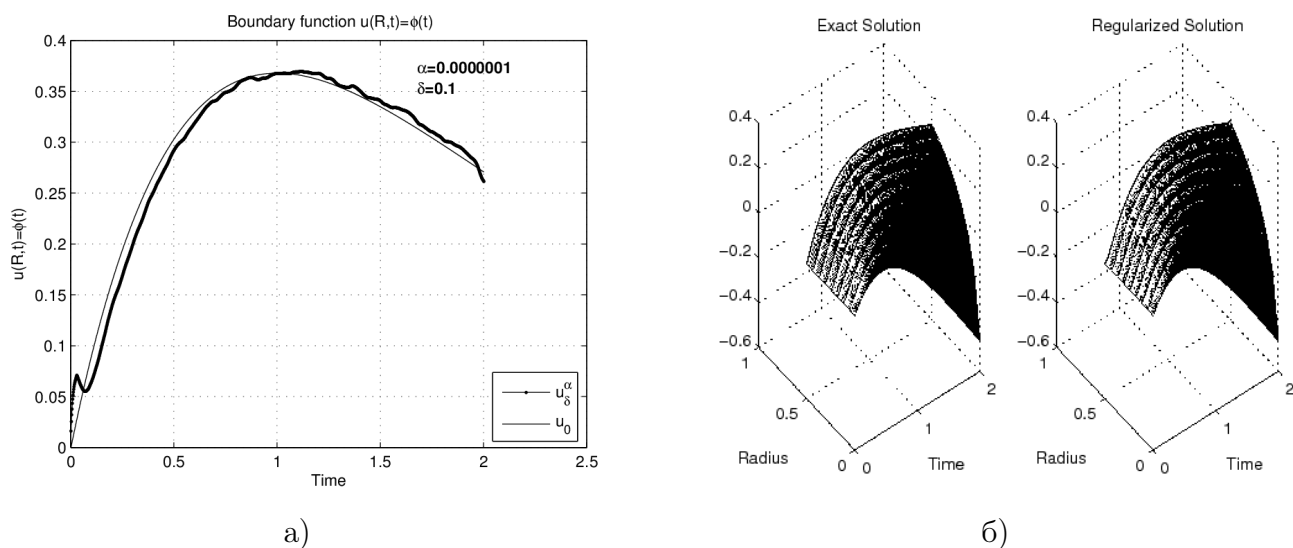


Рис. 67: Результаты сравнительного анализа численного решения задачи нелинейного теплопереноса при тестовых значениях p_2, φ_2 .

На всех рисунках используются одинаковые обозначения. Уровень погрешности исходных данных обозначен δ , а α соответствует параметру регуляризации.

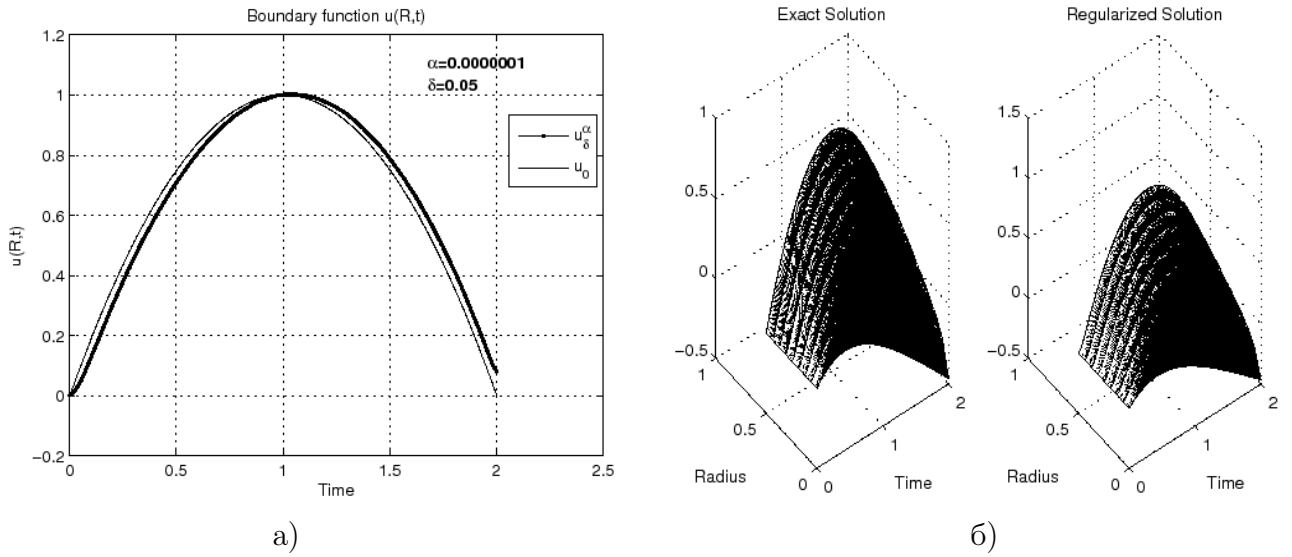


Рис. 68: Результаты сравнительного анализа численного решения задачи нелинейного теплоперевода при тестовых значениях p_3, φ_3 .

Одномерные графики, обозначенные u_0 , соответствуют тестовым значениям $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \varphi_4(t), \varphi_5(t)$, а графики, обозначенные u_δ , соответствуют температурным функциям на внешней поверхности цилиндра, найденным с помощью предложенной вычислительной схемы.

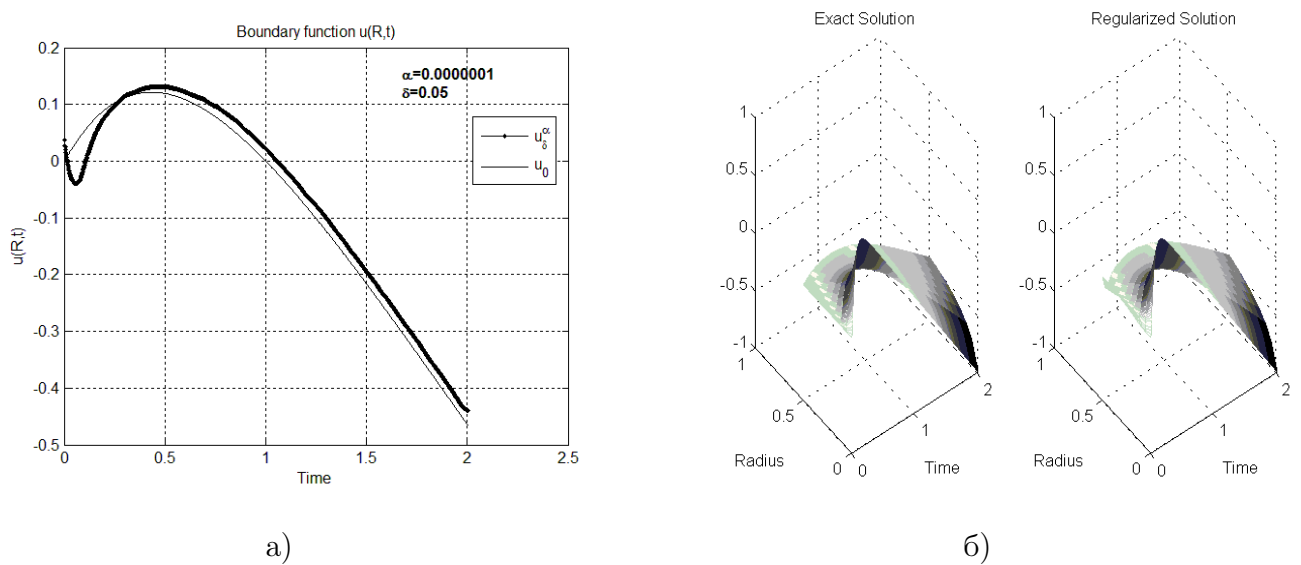


Рис. 69: Результаты сравнительного анализа численного решения задачи нелинейного теплоперевода при тестовых значениях p_4, φ_4 .

Поверхности, представленные на рис. 66(a)–70(b) и озаглавленные ”*Exact solution*”, иллюстрируют решения прямой задачи (4.40)– (4.42), а поверхности, озаглавлен-

ные ”*Regularized solution*”, соответствуют численному решению задачи нелинейного теплопереноса (4.19), (4.20), полученные во всей области Ω_T .

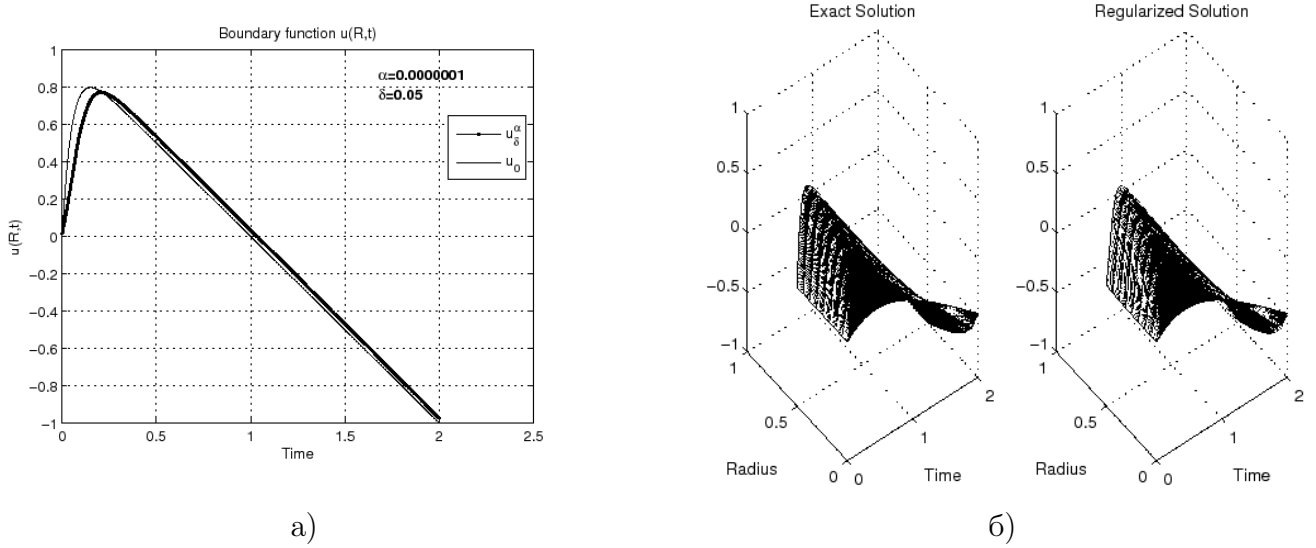


Рис. 70: Результаты сравнительного анализа численного решения задачи нелинейного теплопереноса при тестовых значениях p_5, φ_5 .

Как отмечалось ранее, невозможно получить единственное решение во всей области $\overline{\Omega_T}$, поэтому сравнительный анализ полученных температур с тестовых значения φ_k выполнялся в области Ω_ε . Для оценки температурных отклонений использовали величины Δ и Θ , определяемые формулами:

$$\Delta = \max_{t \in (\varepsilon, T-\varepsilon)} |u_\delta^\alpha(1, t) - u_0(1, t)| = \max_{t \in (\varepsilon, T-\varepsilon)} |\phi_\delta(t) - \phi_0(t)|,$$

$$\Delta_\varphi = \max_{(r,t) \in \Omega_\varepsilon} \left| \frac{u_\delta^\alpha(1, t) - u_0(1, t)}{u_0(l, t)} \right| = \max_{(r,t) \in \Omega_\varepsilon} \left| \frac{\varphi_\delta(t) - \varphi_0(t)}{\varphi_0(t)} \right|.$$

Величина Δ характеризует наибольшее возможное отклонение прогнозируемых на внешней поверхности температур $u_\delta^\alpha(l, t)$ от действительных значений $u_0(l, t)$. Величина Δ_φ соответствует относительной погрешности прогнозирования температур во внутренних точках области $\Omega_\varepsilon = (0, 1) \times (\varepsilon, T - \varepsilon)$.

В табл. 15 приведены средние значения Δ и Δ_φ при $\varepsilon = 0.05T$ и $\delta = 0.05$. Значения p_k соответствовали температурам, поддерживаемым на внутренней поверхности.

Таблица 15: Оценки Δ температурных отклонений

N	ϕ_1, p_1	ϕ_2, p_2	ϕ_3, p_3	ϕ_4, p_4	ϕ_5, p_5
5	0,0377	0,0469	0,1983	0,1084	0,2795
6	0,0346	0,0429	0,1733	0,1026	0,2688
7	0,0282	0,0379	0,1504	0,080	0,2589
8	0,0252	0,0364	0,1327	0,0765	0,2555
9	$0,5 \cdot 10^{81}$	$0,5 \cdot 10^{86}$	$0,5 \cdot 10^8$	$0,5 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^{56}$
10	$5 \cdot 10^{208}$	$2 \cdot 10^{210}$	$2 \cdot 10^{156}$	$2 \cdot 10^{133}$	$0,5 \cdot 10^{123}$

Таблица 16: Оценки Δ_φ температурных отклонений

N	ϕ_1, p_1	ϕ_2, p_2	ϕ_3, p_3	ϕ_4, p_4	ϕ_5, p_5
5	0,0141	0,0148	0,0144	0,0141	0,0144
6	0,0140	0,0147	0,0143	0,0140	0,0144
7	0,0139	0,0145	0,0143	0,0139	0,0143
8	0,0139	0,0145	0,0142	0,0139	0,0145

Результаты эксперимента приводят к следующим выводам. С помощью предложенной вычислительной схемы впервые получено решение задач нелинейного теплопереноса при неизвестных начальных условиях. Устойчивость вычислительной схемы относительно погрешности исходных данных подтверждается результатами эксперимента. Численные оценки погрешности полученных решений согласуются с теоретическими результатами и свидетельствуют о достаточной точности метода прогнозирования температур во внутренних точках объекта при $t \in [\varepsilon, T - \varepsilon]$.

Основное достоинство предложенного метода заключается в том, что с помощью разработанной вычислительной схемы впервые стало возможным построить приближенное решение обратной задачи теплопереноса при неизвестных начальных данных, что, в свою очередь позволяет прогнозировать температурное состояние объекта с неизвестным начальным тепловым состоянием в технологических процессах, связанных с комплексной термообработке, а также при прогнозировании температурного состояния работающих систем и механизмов.

4.4 Метод прогнозирования температуры для задач измерения, связанных с нелинейным теплопереносом в цилиндрическом теле

В данном разделе предложен метод решения обобщенной задачи нелинейного теплопереноса в неоднородном цилиндре с начальным тепловым состоянием, внешняя боковая поверхность которого подвергается тепловому воздействию. Приведены результаты исследования устойчивости метода относительно погрешности исходных данных. Получены оценки температурных погрешностей, характеризующие наибольшее возможное отклонение найденных температур от действительных значений, а также представлены результаты экспериментального исследования. Вычислительная схема предложенного метода служит основой для прогнозирования температуры во внутренних точках объекта.

4.4.1 Вычислительная схема метода дискретной регуляризации для нелинейных процессов

Математическая модель рассматриваемой задачи теплопереноса представлена в разделах 4.2.2, 4.2.3 и имеет следующий вид. Сечению цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси соответствует область $\Omega = [0, \ell]$, величина T характеризует продолжительность внешнего теплового воздействия и $\Omega_T = (0, \ell) \times (0, T)$. Схема теплового воздействия представлена на рис. 64, и повторно приведена на рис.71

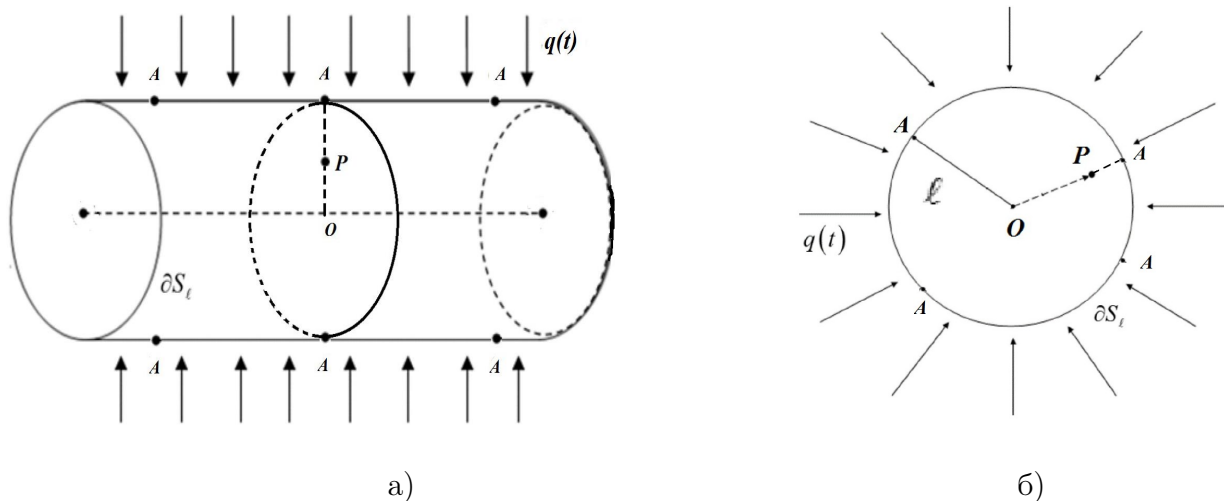


Рис. 71: Схема нагрева цилиндра. O –точка на оси цилиндра, A – точка, вблизи которой проводятся измерения, P – контрольные точки, в которой требуется определить температуру

Теплоперенос во внутренних точках сечения представлен уравнением

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r}\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda(u)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (r, t) \in \Omega_T. \quad (4.43)$$

с граничными условиями:

$$u(\ell, t) = p(t), \quad u_r(\ell, t) = q(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.44)$$

и дополнительными условиями

$$\max_{\Omega_T} |u(r, t)| \leq \Phi e^{\beta(r+t)}, \quad \left\{ \max_{\Omega_T} |\partial_t^2 u|, \max_{\Omega_T} |\partial_r^2 u|, \max_{\Omega_T} |\partial_r^4 u| \right\} \leq S. \quad (4.45)$$

В этой задаче требуется найти функцию $u_\delta(r, t)$ вплоть до $u_\delta(0, t) = \varphi_\delta^\alpha(t)$ при условии, что вместо действительных значений $p_0(t)$ и $q_0(t)$ известны измеренные значения p_δ , q_δ и допустимый уровень точности измерений δ такие, что

$$\max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|p_0 - p_\delta\|, \max_{t \in [0, T]} \|q_0 - q_\delta\| \right\} \leq \delta.$$

Основные идеи метода дискретной регуляризации для рассматриваемых задач аналогичны приведенным в разделе (4.3). Отличие представленной вычислительной схемы заключается в выборе направления по пространственной переменной в конечно-разностной сетке. Таким образом, для прогнозирования температуры во внутренних точках цилиндра по результатам измерений на внешней поверхности, не требуется разработка принципиально новой вычислительной схемы, а достаточно ограничиться модификацией основной схемы, предложенной в (4.3), что позволяет значительно расширить область применения предлагаемого метода дискретной регуляризации для нелинейных задач.

Для получения соотношений, характеризующих зависимость коэффициентов от температуры предлагается подход, основанный на результатах, представленных в [102], [59]. Предлагается ввести параметры

$$k_c = c(u^*) - c(u_0), \quad k_\rho = \rho(u^*) - \rho(u_0), \quad k_\lambda = \lambda(u^*) - \lambda(u_0).$$

где u_0 – температурными значениями, приведенные в [73], [59] для определения значений теплофизических характеристик $c(u)$, $\rho(u)$, $\lambda(u)$, а u^* – текущая температура, а коэффициентные функции $c(u)$, $\rho(u)$, $\lambda(u)$ определять формулами:

$$c(u) = c_0 + k_c \cdot u, \quad \rho(u) = \rho_0 + k_\rho \cdot u, \quad \lambda(u) = \lambda_0 + k_\lambda \cdot u. \quad (4.46)$$

полагая $c_0 = c(u_0) - k_c u_0$, $\rho_0 = c(u_0) - k_\rho u_0$ и $\lambda_0 = c(u_0) - k_\lambda u_0$.

Для построения вычислительной схемы введем конечно-разностную сетку G

$$G = \begin{cases} (r_i, t_j) : r_i = (N + 1 - i)h, t_j = (j - 1)\tau, \\ h = \ell/N; \tau = T/M; i = \overline{1, N + 1}; j = \overline{1, M + 1}. \end{cases}$$

Обозначим $u_{i,j} = u(r_i, t_j)$. Используем множество дискретных функций $V_h = \{v(r_i, t_j) = v_{i,j}\}$, заданных на G для конечно-разностного представления частных производных по r и по t в каждом узле G , предложенного А.А. Самарским в [136].

Комбинированная конечно-разностная схема включает основную и краевую вычислительные схемы. Основная схема используется для определения температуры во внутренних точках объекта (r_i, t_j) при $i = \overline{2, N}, j = \overline{1, M}$. Основой для вычисления нового температурного значения в этой схеме служит уравнение:

$$v_{i+1,j} = v_{i,j} + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\tau} + \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} (v_{i,j} - v_{i-1,j}) \quad (4.47)$$

Краевая схема, предлагаемой для прогнозирования температуры точках (r_i, t_j) при $j = M + 1$ и $i = \overline{2, N}$ базируется на уравнении

$$\begin{aligned} v_{i+1,M+1} = v_{i,M+1} + \frac{1}{\lambda_{i+1,M+1}(i-1) + \lambda_{i,M+1}} & \left(\frac{c_{i,M+1}\rho_{i,M+1}(i-1)h^2}{\tau(1-\sigma)} (v_{i,M+1} - v_{i,M}) + \right. \\ & \left. + \lambda_{i,M+1}(i-1)(v_{i,M+1} - v_{i-1,M+1}) \right) + \\ & + \frac{\sigma}{(1-\sigma)} \frac{1}{\lambda_{i+1,M+1}(i-1) + \lambda_{i,M+1}} \frac{1}{(i-1)h^2} \\ & \left((\lambda_{i+1,M}(i-1) + \lambda_{i,M})(v_{i+1,M} - v_{i,M}) - \lambda_{i,M}(i-1)(v_{i,M} - v_{i-1,M}) \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Для вычислений $v_{1,j}$ и $v_{2,j}$ используем конечно-разностный аналог граничных условий (4.44). Получаем:

$$v_{1,j} = u_{1,j} = p(t_j) \quad v_{2,j} = u_{1,j} + \frac{u(2,j) - u(1,j)}{h} h = p(t_j) + q(t_j)h \quad (4.49)$$

Необходимость в построении комбинированной вычислительной схемы связана с тем, что уравнение (4.47) невозможно использовать для нахождения температурных значений $v_{i+1,M+1}$ на последнем временном слое при $j = M + 1$. Построение комбинированной схемы позволяет решить проблему неизвестных начальных

условий, являющихся принципиальным перпятствием при разработке алгоритмов прогнозирования температуры по результатам обработки граничных измерений.

Устойчивость метода численного решения обратной задачи теплопереноса (4.47), (4.48) с неизвестными начальными условиями достигается введением стабилизирующего функционала в алгоритм идентификации коэффициентов:

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= c_0 + k_c v_{i,j}, & \rho_{i,j} &= \rho_0 + k_\rho v_{i,j} \\ \lambda_{i,j} &= \lambda_0 + k_\lambda v_{i,j}, & \lambda_{i+1,j} &= \lambda_0 + (k_\lambda - \alpha) v_{i,j} = \lambda_{i,j} - \alpha v_{i,j}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

и согласованием значений шага дискретизации по пространству h , параметра регуляризации α с величиной τ и уровнем погрешности исходных данных δ .

Окончательно получаем, что **вычислительная процедура определения температуры во внутренних точках** состоит из следующих этапов. Сначала согласуют шаг дискретизации h и параметр регуляризации α с величиной τ и δ . Далее, используя (4.49), определяют $v_{1,j}, v_{2,j}$ при $j = \overline{1, M}$. Затем, используя уравнения (4.47), (4.48) и представление (4.50), реализуют основную и краевую вычислительные схемы в итерационном процессе. На каждом шаге итерационного процесса находят $v_{i+1,j}$, при $j = \overline{1, M+1}$ относительно пространственной переменной V в результате вычисляют температурные значения во внутренних точках объекта вплоть до точек (r_{N+1}, t_j) , $j = \overline{1, M+1}$, соответствующих приближенным температурным значениям на оси цилиндра $u_\delta(0, t) = \varphi_\delta^\alpha(t)$.

4.4.3 Локальная устойчивость вычислительной схемы

Исследование устойчивости основной вычислительной схемы осуществлялось в соответствии с подходом, принятым в теории регуляризации и представленном в [159]. С этой целью вводят в рассмотрение параметры

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \max_{j=1, \overline{1, M+1}} |q_j|, & \lambda &= \min_{(r_i, t_j) \in G} |\lambda(u(r_i, t_j))|, \\ \mathfrak{C} &= \max_{(r_i, t_j) \in G} |c(u(r_i, t_j))| & \mathfrak{R} &= \max_{(r_i, t_j) \in G} |\rho(u(r_i, t_j))| \\ \mu &= \max_{i,j} \frac{\lambda_{i,j} (i-1)}{\lambda_{i,j} i - \alpha (i-1) |v_{i,j}|} & \eta &= \max_{i,j} \frac{c_{i,j} \rho_{i,j} (i-1) h^2}{(\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}) \tau}. \end{aligned}$$

и величины:

$$\varpi_{i+1} = \max_j |v_{i+1,j} - v_{i,j}|, \quad i = \overline{1, N},$$

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным в 4.3 и, используя (4.45) получаем, что при $i = \overline{2, N}$ имеет место оценка

$$\varpi_{i+1} = \eta \max_j |v_{i,j+1} - v_{i,j}| + \mu \varpi_i \leq 2\Phi \eta e^{\beta(\ell+T)} + \mu \varpi_i.$$

Выбирая параметр регуляризации α из условия $\alpha < \min_{i,j} \frac{\lambda_{ij}}{(i-1)|v_{ij}|}$ получаем

$$\varpi_2 = \max_j |v_{2,j} - v_{1,j}| = \max_j |p_j + q_j h - p_j| \leq \max_j |q_j h - q_j^0 h + q_j^0 h| \leq (\mathfrak{S} + \delta) h,$$

$$\varpi_3 \leq 2\Phi \eta e^{\beta(\ell+T)} + \mu \varpi_2 \leq 2\Phi \eta e^{\beta(\ell+T)} + \mu(\mathfrak{S} + \delta)h$$

:

$$\varpi_{i+1} \leq 2\Phi e^{R+T} (\eta + \mu\eta + \mu^2\eta + \dots + \eta\mu^{i-3}) + (\mathfrak{S} + \delta)h\mu^{i-2}$$

:

$$\varpi_{N+1} \leq 2\Phi e^{R+T} (\eta + \mu\eta + \mu^2\eta + \dots + \eta\mu^{N-3}) + (\mathfrak{S} + \delta)h\mu^{N-2}$$

где величина ϖ_{N+1} характеризует вычислительную погрешность, накопленную на последнем шаге итерационного процесса. По доказанному ранее $\mu < 1$, тогда для накопленной вычислительной погрешности ϖ_{N+1} имеет место оценка

$$\varpi_{N+1} \leq \eta 2\Phi e^{\beta(\ell+T)} \frac{1}{1-\mu} + (\mathfrak{S} + \delta)h\mu^{N-2}.$$

С технической точки зрения, вычислительная схема устойчива, если накапливаемая вычислительная погрешность ϖ_{i+1} является контролируемой величиной, пропорциональной погрешности измерений δ , когда имеет место оценка $\varpi_{N+1} < V\delta$, где V – некоторая константа. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным в 4.3, получаем, что при выполнении условия

$$N > \max \left\{ 2 + \log_{\mu} \left(\left(V - \frac{1}{1-\mu} \right) \frac{\delta}{\mathfrak{S} + \delta} \right), \ell + 1 \right\}, \quad (4.51)$$

и согласовании шагов дискретизации и параметра α ,

$$\frac{h^2}{\tau} < \frac{\lambda}{\mathfrak{C}\mathfrak{R}} \frac{\delta}{2\Phi} e^{-\beta(\ell+T)}, \quad \alpha < \frac{\lambda}{N\Phi e^{\beta(\ell+T)}} \quad i = \overline{1, N+1}. \quad (4.52)$$

для накопленной вычислительной погрешности выполняется условие устойчивости $\varpi_{N+1} \leq V\delta$ при $V = 1 + \frac{1}{1-\mu}$. Таким образом, условия (4.51), (4.52) обеспечивают устойчивость предложенной схемы, служащей основой для алгоритма прогнозирования температур при неизвестных начальных условиях.

4.4.4 Оценка погрешности прогнозируемых температур

Оценим наибольшее уклонение прогнозируемых температур $v_{i,j}$, полученных с помощью основной вычислительной схемы, от действительных значений $u_{i,j}$. Для этого используем методику, аналогичную приведенной в разделе 4.3.

Принимая во внимание погрешность, возникающую при переходе от частных производных к конечно-разностным аналогам, получаем:

$$\begin{aligned}
 u_{i+1,j} = & u_{i,j} + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + \\
 & + \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(\tau) + \\
 & + 2 \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1)h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \\
 & + \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1)h^2}{(u_{i+1,j} - u_{i,j})(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})} (\underline{Q}(h))^2 + \\
 & + \frac{\lambda_{i,j}h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \frac{\lambda_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h^2)
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Оценку температурной погрешности проведем с помощью величин

$$s_i = \max_j |v_{i,j} - u_{i,j}|, i = \overline{1, N+1},$$

где $v_{1,j}, v_{2,j}$ вычисляются по формулам (4.49), значения $v_{i+1,j}$ определяют с помощью основной вычислительной схемы (4.47), (4.50) при $i = \overline{2, N}$, а $u_{i+1,j}$ являются точным решением задачи (4.43)–(4.45). Значения $v_{i+1,j}$ соответствуют прогнозируемым температурам, а величины $u_{i+1,j}$ ассоциированы с действительными температурными значениями. Принимая во внимание (4.46), имеем:

$$\begin{aligned}
 \max_j |v_{i+1,j} - u_{i+1,j}| \leq & \max_j |v_{i,j} - u_{i,j}| + 2 \max_j \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})\tau} 2\Phi e^{\beta(\ell+T)} + \\
 & + \max_j \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \left(\max_j |v_{i,j} - u_{i,j}| + \max_j |v_{i-1,j} - u_{i-1,j}| \right) + \\
 & + \max_j \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})} S\tau + 2 \max_j \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1)h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} Sh + \\
 & + \max_j \left| \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} \right| \frac{(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} S^2 h^2 + \\
 & + \max_j \frac{\lambda_{i,j}h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} Sh + \max_j \frac{\lambda_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} Sh^2
 \end{aligned}$$

Опираясь на определения η , μ и s_i и, учитывая, что $s_i > s_{i-1}$ при всех i , получаем

$$\begin{aligned}
s_{i+1} \leq & s_i + 4\eta\Phi e^{\beta(\ell+T)} + 2\mu s_i + \eta\tau S\tau + 2 \max_j \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1)h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} Sh + \\
& + \max_j \left| \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} \right| \frac{(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} S^2 h^2 + \\
& + \max_j \frac{\lambda_{i,j}h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} Sh + \max_j \frac{\lambda_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} Sh^2
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Оценим коэффициенты в соотношении (4.54).

$$\frac{|\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}|(i-1)h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \frac{\alpha|v_{i,j}|(i-1)h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} < \frac{\lambda_{i,j}h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} < \mu h < 1$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} \right| \frac{(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} & \leq k_\lambda \frac{h^2\mu}{\lambda_{i,j}} \leq \frac{k_\lambda h^2}{\lambda} \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \mu \leq 1, \\
\frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} & \leq \frac{\mu}{i-1} \leq \mu \leq 1
\end{aligned}$$

Таким образом, для величины s_{i+1} , характеризующей отклонение прогнозируемых температур $v_{i+1,j}$, от действительных значений $u_{i+1,j}$, справедлива оценка

$$\begin{aligned}
s_{i+1} \leq & (1 + 2\mu) s_i + 2\delta + \eta\tau S\tau + 2\mu h Sh + \frac{k_\lambda h^2}{\lambda} Sh^2 + \mu h Sh + \mu h^2 Sh^2 \leq \\
& \leq (1 + 2\mu) s_i + 2\delta + \eta S \tau^2 + 3\mu Sh^2 + \left(\frac{k_\lambda}{\lambda} S^2 + \mu S \right) h^4
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Полагаем $\Psi = \eta S \tau^2 + 3\mu Sh^2 + \left(\frac{k_\lambda}{\lambda} S^2 + \mu S \right) h^4$.

Учитывая условия устойчивости (4.51), (4.52) окончательно получаем, что для величины s_{N+1} , характеризующей наибольшее отклонение результатов прогнозирования температур от действительных значений, полученное к моменту завершения внешнего теплового воздействия, имеет место оценка

$$\begin{aligned}
s_{N+1} \leq & (1 + 2\mu)^{N-1} \left(\delta + h(\delta + S) + \frac{1}{2\mu} (2\delta + \Psi) \right) \leq \\
& \leq (1 + 2\mu)^{N-1} \left(\delta + \frac{\delta + S}{2 + \log_\mu \left(\frac{\delta}{\mathfrak{S} + \delta} \right)} + \frac{1}{2\mu} (2\delta + \Psi) \right)
\end{aligned}$$

Полученные оценки температурных отклонений свидетельствуют о высоком уровне погрешности приближенных решений, полученных во всей области Ω_T и о том,

что величина N должна принимать небольшие значения. Это объясняется неединственностью во всей области Ω_T решения обратной задачи и согласуется с результатами, представленными в [90], [93]. Тем не менее, обеспечить приемлемый уровень точности прогнозирования температур в подобласти $\Omega_\varepsilon = [0, \ell] \times [\varepsilon, T - \varepsilon]$, исключив из рассмотрения начальный и конечный моменты времени.

4.4.5 Результаты вычислительного эксперимента на основе имитационного моделирования

Основные цели вычислительного эксперимента состояли в проверке принципиальной возможности численного прогнозирования температуры внутри тела по результатам поверхностных измерений при неизвестном начальном тепловом состоянии объекта, в получении численных оценок погрешности результатов прогнозирования и в исследовании структуры области устойчивости $\Omega_\varepsilon = [0, \ell] \times [\varepsilon, T - \varepsilon]$ посредством сравнительного анализа найденных температур и тестовых значений.

Методика эксперимента заключалась в следующем. На начальном этапе находили решение прямой задачи:

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r}\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda(u)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (r, t) \in \Omega_T. \quad (4.56)$$

с известными начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, t) = p(t), \quad u(\ell, t) = \varphi(t), \quad t \in [0, T], \\ u(r, 0) = f(r), \quad r \in [0, \ell] \end{aligned} \quad (4.57)$$

с коэффициентами, определяемыми формулами:

$$c(u) = c_0 + k_c \cdot u, \quad \rho(u) = \rho_0 + k_\rho \cdot u, \quad \lambda(u) = \lambda_0 + k_\lambda \cdot u. \quad (4.58)$$

Решение прямой задачи $u_0(r, t)$, характеризующее температурное поле внутренних точек цилиндра, и функцию $\varphi(t)$, соответствующую температуре на оси цилиндра, использовали в дальнейшем в качестве тестовых значений.

Следующий этап включал моделирование исходных данных p_δ, q_δ для обратной задачи задачи теплопереноса (4.43)–(4.45). Значения p_δ, q_δ определялись согласно формул

$$p_\delta(t_j) = p(t_j) + erp_j, \quad q_\delta(t_j) = \frac{u_0(t_j) - p(t_j)}{h} + erq_j.$$

где значения erp_j, erq_j равномерно распределены на $[-\delta, \delta]$. Предлагаемый подход к моделированию p_δ, q_δ эквивалентен появлению аддитивных случайных отклонений в результатах граничных измерений.

На третьем этапе находили численное решение $u_\delta(r, t)$ задачи (4.43)– (4.45) с помощью предложенной комбинированной схемы. Функция $u_\delta(r, t)$ отвечает прогнозируемым температурным значениям, получаемым в $\overline{\Omega}_T = [0, \ell] \times [0, T]$, а функция $u_\delta(\ell, t) = \varphi_\delta(t)$ соответствует результатам прогнозирования температур на оси цилиндра.

Следующий этап эксперимента включал проведение сравнительного анализа полученных значений $u_\delta(r, t)$ и $\varphi_\delta(t)$ с тестовыми функциями и исследование структуры области устойчивости Ω_ε . Необходимость такого исследования вызвана тем, что невозможно построить единственное решение при всех $t \in [0, T]$. Это подтверждается результатами эксперимента по вычислению температурного поля $u_\delta(r, t)$, во всей области $\Omega_T = [0, \ell] \times [0, T]$, представленными на рис. 72. Получить удовлетворительные результаты прогнозирования возможно только в некоторой подобласти Ω_ε и для повышения точности результатов прогнозирования требуется определить наименьшее значение величины ε такое, что при $t \in [\varepsilon, T - \varepsilon]$ обеспечивается требуемый уровень температурной погрешности.

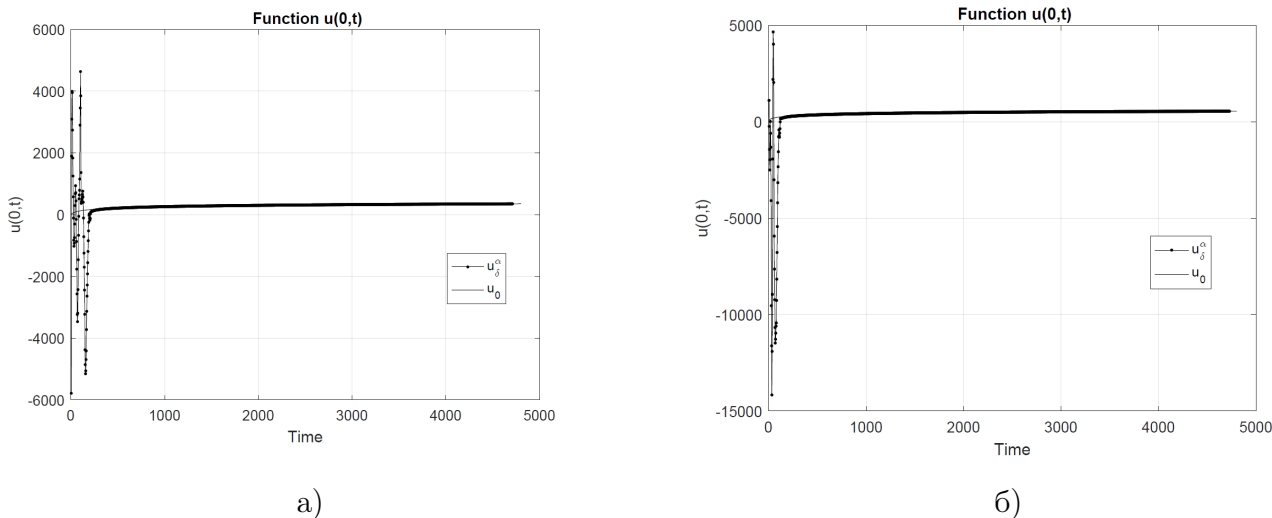


Рис. 72: Прогнозирование температур на оси цилиндра при всех $t \in [0, T]$. (а) Прогнозирование при нагреве поверхности до 450°C . (б) прогнозирование при нагреве поверхности до 550° .

С целью верификации предложенного метода прогнозирования температур при нелинейном теплопереносе и исследования структуры области Ω_ε были проведе-

ны несколько типов вычислительных экспериментов, в ходе которых численные решения сравнивались с тестовыми значениями. В первом типе эксперимента тестовые функции, формируемые на основе имитационного моделирования, отражали общий характер изменения температурных полей. Целью этого эксперимента являлась проверка принципиальной возможности численного прогнозирования температур при неизвестных начальных условиях. Во втором тестовые значения формировались из результатов имитационного моделирования, связанных с влиянием внешнего теплового воздействия на температурное поле цилиндра, изготовленного из конкретной марки стали. Цель этой серии заключалась в верификации метода, исследовании структуры Ω_ε и в получении численных оценок погрешности, в ситуации, когда тестовые значения близки к действительным. Результаты экспериментов представлены в работе.

§ 4.4.5.1 Результаты вычислительного эксперимента, проведенного на основе имитационного моделирования для нормированных функций

Вычислительный эксперимент проводился для тестовых температурных функций, имитирующих характер изменения температурного поля, формируемого в результате выбранного внешнего теплового воздействия. В эксперименте были рассмотрены следующие тестовые функции:

Пример 1. Тестовые функции соответствовали ситуации резкого первоначального нагрева, а затем резкого охлаждения однородного цилиндра, когда, в силу инертности теплопереноса, изменения температуры во внутренних точках происходит с запаздыванием. Изменение температуры на внешней поверхности представлено функцией $p_1(t) = 100 + 150 * \frac{1 - e^{-2t/(Ts)}}{1 - e^{1/s}}$, а температуре на оси цилиндра соответствует функция $u(0, t) = \varphi_1 = 100 + \frac{t}{12} e^{-2t/T}$.

Пример 2. Тестовые функции, имитирующие наискорейший допустимый нагрев однородного тела при малой инертности процесса теплопереноса во внутренних точках. Изменение температуры на внешней поверхности представлено функцией $p_2 = 20 + \frac{t}{30} e^{2t/T}$, а температура на оси цилиндра представлена функцией $u(0, t) = \varphi_2 = 20 + \frac{7t}{300} e^{2t/T}$.

Пример 3. Тестовые функции, соответствующие наибольшему допустимому нагреву внешней поверхности тела в условиях высокой инертности теплопередачи во внутренних точках. Для имитации данной ситуации использовались тестовые функции $p_3 = 100 + \frac{150t}{T}e^{t/T}$ и $u(0, t) = \varphi_3 = 100 + \frac{t}{T}e^{-t/T}$, характеризующие температурные поля на поверхности и на оси цилиндра, соответственно.

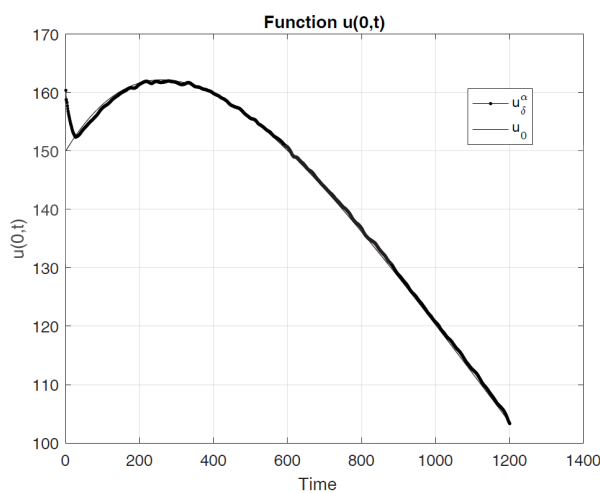
Пример 4. Тестовые функции, соответствующие теплопереносу в присутствии внутренних скрытых источников тепла, когда поверхность тела подвергается нагреву и охлаждению одинаковой продолжительности. Температуре на внешней поверхности соответствовала функция $p_4 = 30 + 600 * \left(1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)\right)^2$, а функция $u(0, t) = \varphi_4 = 30 + \frac{350t}{T} (e^{-2t/T} - e^{-1})$ определяла тестовые значения на оси.

Для оценки отклонений найденных φ_δ от тестовых значений φ_0 использовали функцию $\Delta(t)$ определяемую формулой:

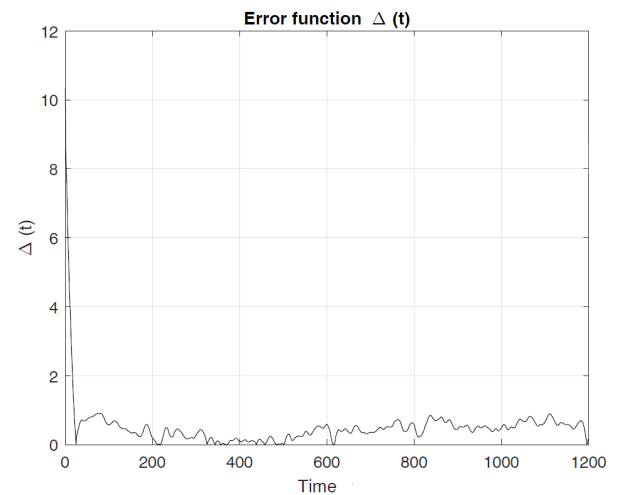
$$\Delta = |u_\delta^\alpha(0, t) - u_0(0, t)| = |\varphi_\delta(t) - \varphi_0(t)|.$$

и характеризующую отклонения результатов прогнозирования температур на оси цилиндра $u_\delta^\alpha(0, t)$ от действительных значений $u_0(0, t)$

Результаты эксперимента представлены на рис.73– 80. На всех рисунках используются одинаковые обозначения.

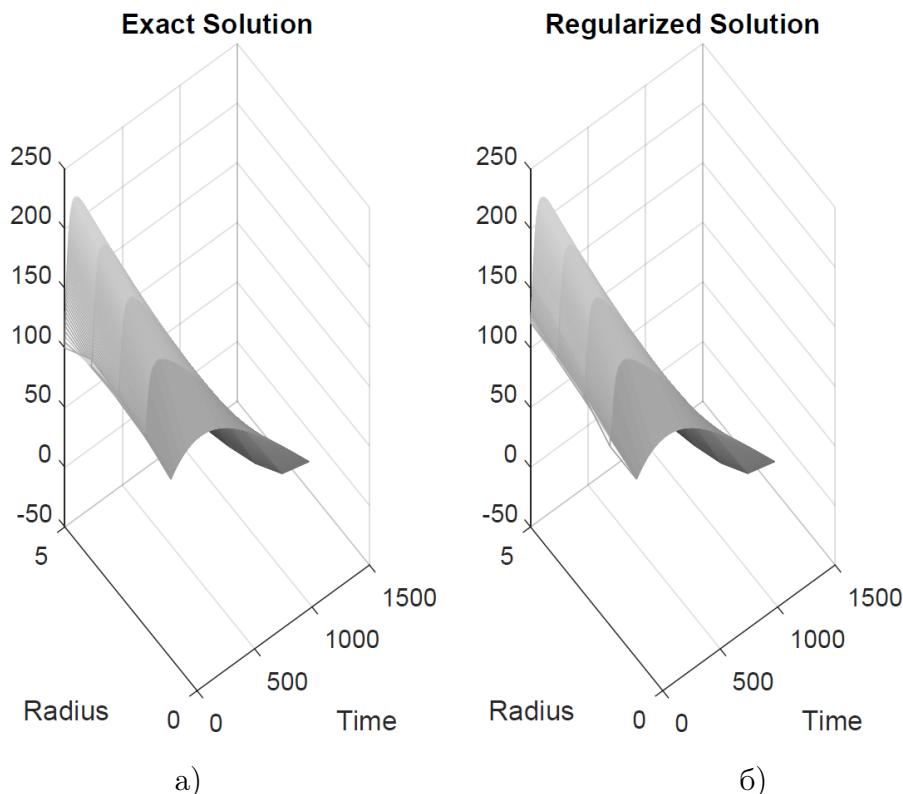


а)



б)

Рис. 73: Результаты численного решения задачи нелинейного теплопереноса для тестовых функций из примера 1. Рис.(а)–графики температур на оси цилиндра. Рис.(б)–график функции $\Delta(t)$.

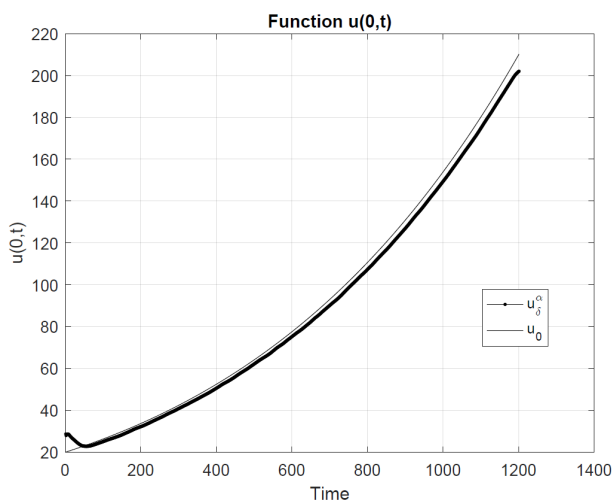


а)

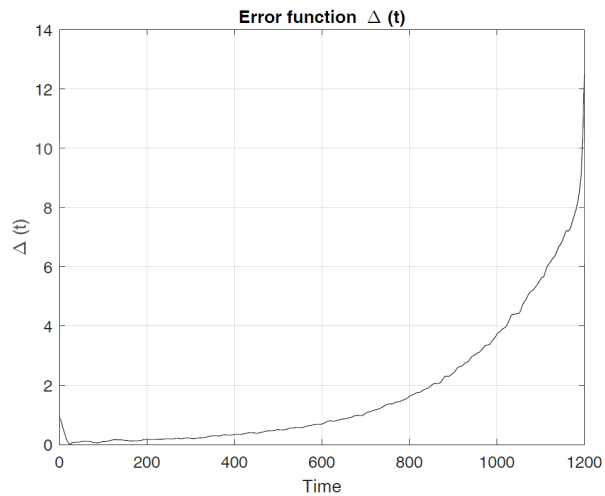
б)

Рис. 74: Температурное поле во внутренних точках цилиндра. Рис.(а) – тестовые значения, сформированные с использованием функций из примера 1. Рис.(б) – результаты прогнозирования температурного поля сечения.

Одномерные рисунки 73(а), 75(а), 77(а), 79(а) иллюстрируют графики температур на оси цилиндра. Обозначение u_δ^α соответствует результатам прогнозирования температур, а u_0 – тестовым значениям. Рисунки 73(б), 75(б), 77(б), 79(б) иллюстрируют графики функции $\Delta(t)$.

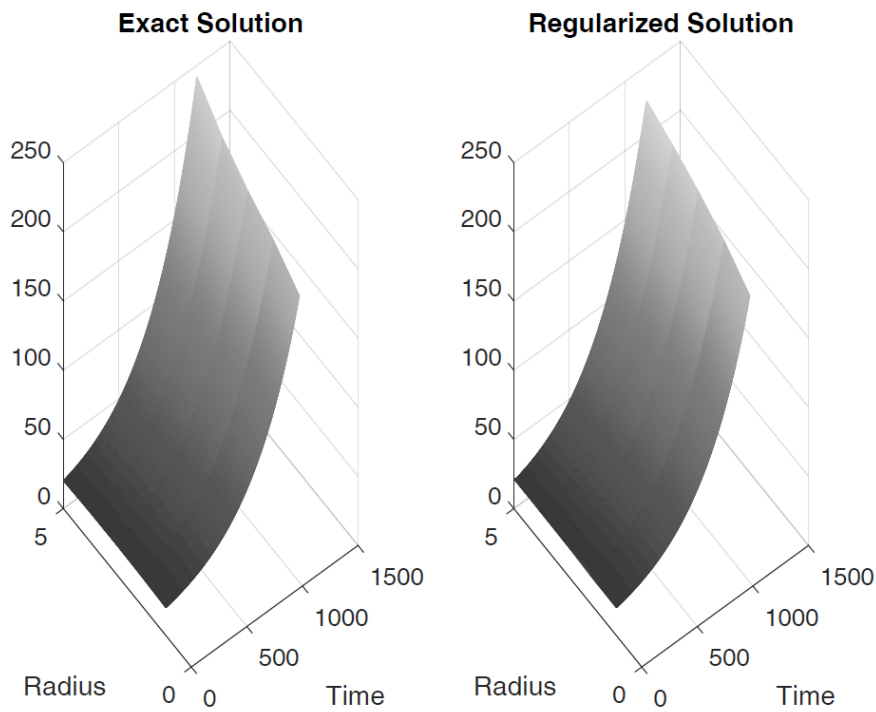


а)



б)

Рис. 75: Результаты численного решения задачи нелинейного теплопереноса для тестовых функций из примера 2. Рис.(а)–графики температурных функций. Рис.(б)–график функции $\Delta(t)$.

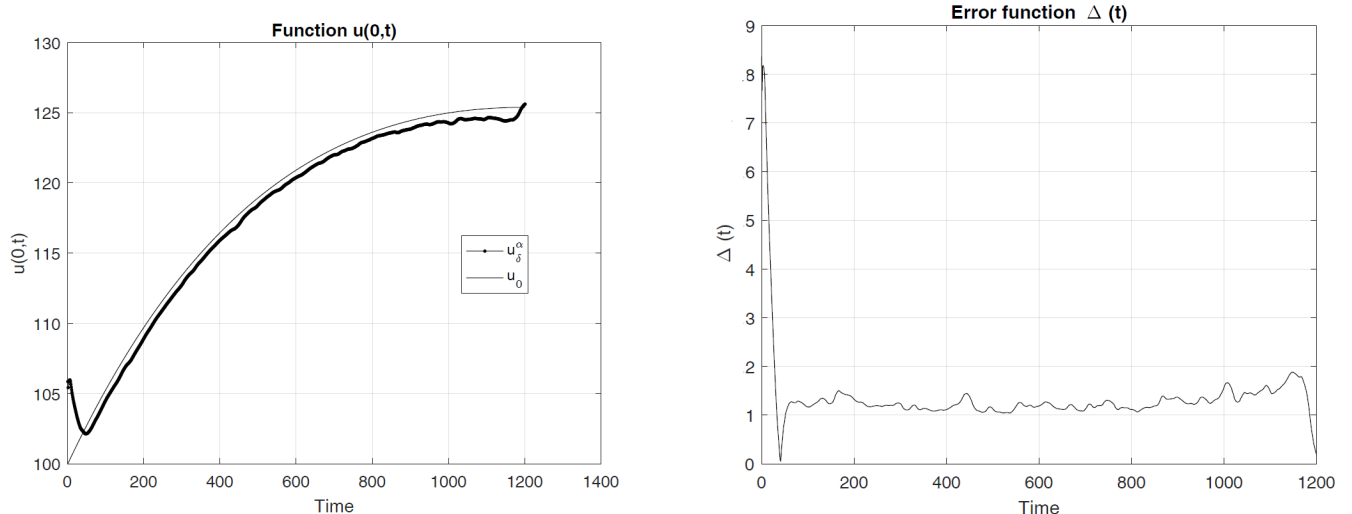


а)

б)

Рис. 76: Температурное поле во внутренних точках цилиндра. Рис.(а) – тестовые значения, сформированные с использованием функций из примера 2. Рис.(б) – результаты прогнозирования температурного поля сечения.

Двумерные поверхности, представленные на рис.74, 76, 78, 80 иллюстрируют температурные поля точек сечения цилиндра.

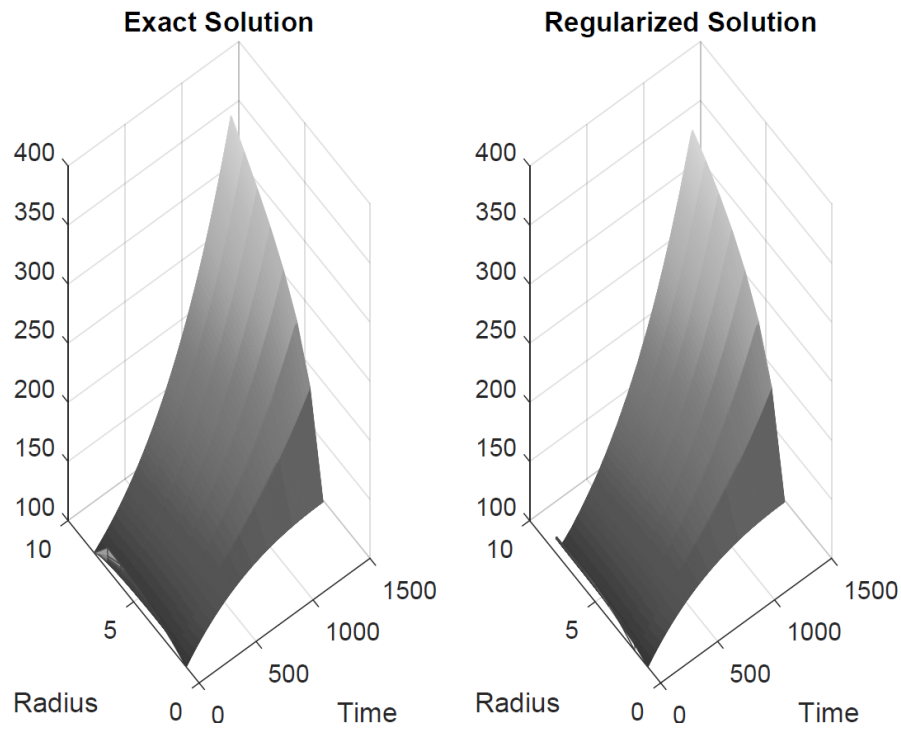


а)

б)

Рис. 77: Результаты численного решения задачи нелинейного теплопереноса для тестовых функций из примера 3. Рис.(а)–графики температурных функций. Рис.(б)–график функции $\Delta(t)$.

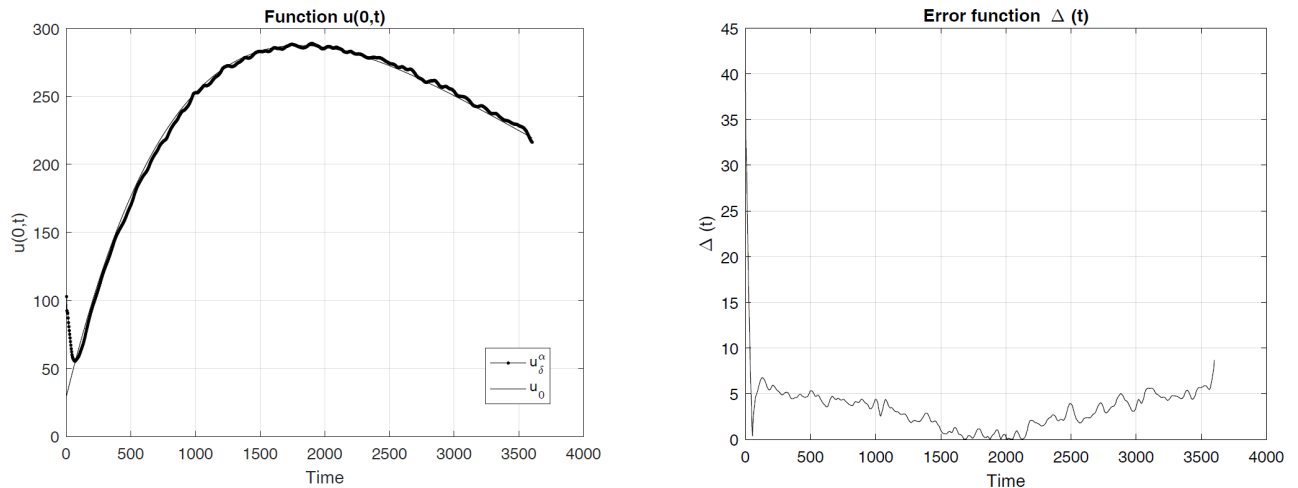
Поверхности ”*Exact Solution*” соответствуют тестовым значениям $u_0(r, t)$, сформированным при решении прямой задачи (85)–(??), а поверхности ”*Regularized*



а) б)

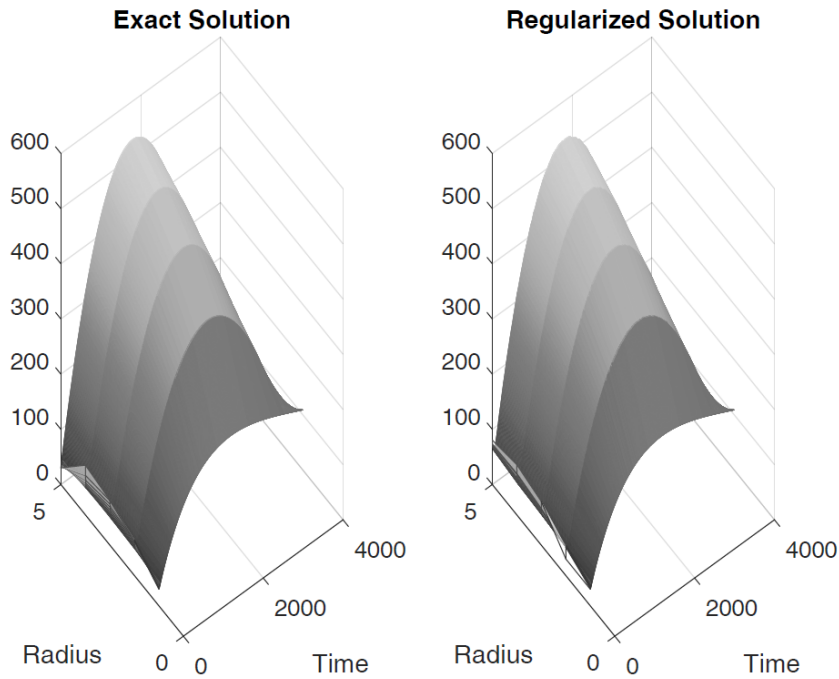
Рис. 78: Температурное поле во внутренних точках цилиндра. Рис.(а) – тестовые значения температур, сформированные с использованием функций из примера 3. Рис.(б) – результаты прогнозирования температурного поля сечения.

Solution” иллюстрируют решения обратной задачи (73)–(75) полученные с помощью предложенного метода и соответствующие результатам прогнозирования температурных полей точек сечения цилиндра.



а) б)

Рис. 79: Результаты численного решения задачи нелинейного теплопереноса для тестовых функций из примера 3. Рис.(а)–графики температурных функций. Рис.(б)–график функции $\Delta(t)$.



а)

б)

Рис. 80: Температурное поле во внутренних точках цилиндра. Рис.(а) – тестовые значения температур, сформированные с использованием функций из примера 4. Рис.(б) – результаты прогнозирования температурного поля сечения.

Результаты проведенных вычислительных экспериментов, свидетельствуют о принципиальной возможности прогнозирования температур по результатам поверхностных измерений при нелинейном теплопереносе в условиях отсутствия информации о начальном тепловом состоянии цилиндра по результатам граничных измерений. Получить приемлемый уровень точности возможно только при $t \in [\varepsilon, T - \varepsilon]$, где величина $\varepsilon > 0, 05T$. Предложенный метод служит основой для разработки алгоритма обработки результатов температурных измерений, полученных вблизи границы в условиях отклонения измеренных величин от действительных значений.

§ 4.4.5.1 Результаты вычислительного эксперимента, проведенного на основе имитационного моделирования процесса термообработки

Основная цель вычислительных экспериментов второго типа заключалась в верификации метода, исследовании структуры Ω_ε и в получении численных оценок погрешности, в ситуации, когда тестовые значения близки к действительным. В

качестве эталонной модели для эксперимента рассматривался процесс теплопереноса в цилиндре радиуса $\ell = 1$, помещаемого в печь, разогретую до температур $400^0C, 450^0C, 600^0C$. Теплофизические характеристики материала соответствовали характеристикам стали марки Ст45, приведенных в работах [59], [102]. Продолжительность процесса составила от 60 до 80 мин.

Методика эксперимента аналогична приведенной в разделе 4.4. При формировании тестовых функций $p(t)$, $\varphi(t)$, а также $q(t)$ использовались результаты, представленные в [66].

В эксперименте был проведен сравнительный анализ точности полученных решений $u_\delta(0, t) = \varphi_\delta(t)$ с тестовыми значениями $u_0(0, t) = \varphi_0(t)$ в области Ω_ε . Основная цель сравнительного анализа заключалась в оценке совместного влияния параметра дискретизации N , величины ε и уровня погрешности исходных данных δ на точность прогнозирования температур. Для проведения сравнительного анализа и оценки температурных погрешностей, использовали функцию $\Delta(t)$ и величину Δ_ϕ , определяемые формулами:

$$\Delta(t) = |u_\delta(0, t) - u_0(0, t)| = |\varphi_\delta(t) - \varphi_0(t)|,$$

$$\Delta_\phi = \max_{(r,t) \in \Omega_\varepsilon} \left| \frac{u_\delta(r, t) - u_0(r, t)}{u_0(r, t)} \right|$$

Величина $\Delta = \max_{(0,t) \in \Omega_\varepsilon} \Delta(t) = \max_{t \in [\varepsilon, T-\varepsilon]} \Delta(t)$ характеризует наибольшее отклонение результатов прогнозирования температур на оси цилиндра $u_\delta^\alpha(0, t)$ от действительных значений $u_0(0, t)$. Величина Δ_ϕ характеризует погрешности прогнозирования температур во внутренних точках сечения в области $\Omega_\varepsilon = [0, \ell] \times (\varepsilon, T - \varepsilon)$.

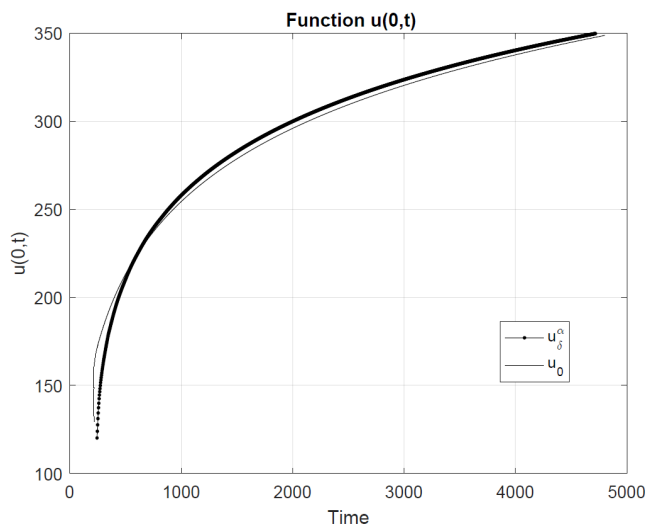
Результаты сравнения, полученные при различных значениях N , уровнях погрешности δ , и различных ε в эксперименте с тестовыми функциями, имитирующими термообработку, проводимую при температуре 400^0C (низкий отпуск), приведены в табл. 17.

Результаты вычислений температурных полей, полученные на основе тестовых функций при имитационном моделировании термообработки, проводимой при температуре 400^0C , $\varepsilon = 0.05T$ и уровне погрешности исходных данных $\delta = 0,05$ представлены на рис. 81, 82.

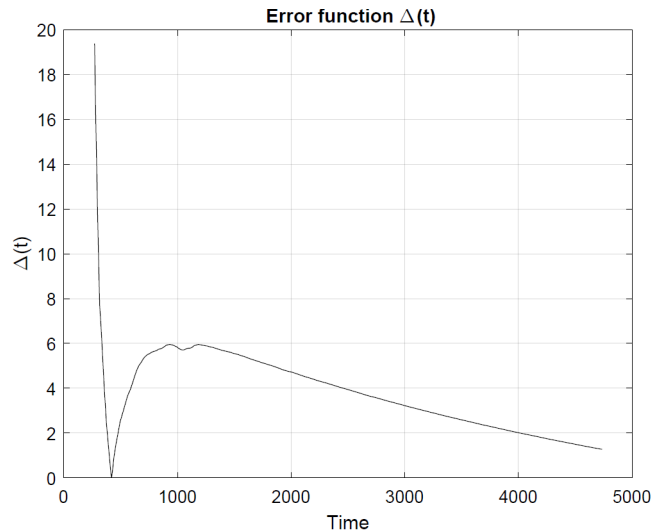
Таблица 17: оценки температурных погрешностей

δ	N	$\Delta = \max_{t \in [0.03T, 0.97T]} \Delta(t)$	$\Delta_\phi,$ $\varepsilon = 0.03T$	$\Delta = \max_{t \in [0.06T, 0.95T]} \Delta(t)$	$\Delta_\phi,$ $\varepsilon = 0.05T$
0.05	5	27,95	0,2023	18,23	0,08785
	6	26,86	0,1944	15,42	0,07657
	7	25,56	0,1850	12,67	0,06549
	8	20,72	0,1511	9,39	0,05445
	9	$2 \cdot 10^{56}$	–	$2 \cdot 10^{54}$	–
	10	$0,5 \cdot 10^{123}$	–	$0,5 \cdot 10^{121}$	–
0.1	5	29,54	0,2307	19,36	0,08881
	6	27,12	0,2118	16,56	0,07824
	7	26,08	0,2037	13,58	0,06742
	8	21,76	0,169	9,89	0,05596
	9	$0,5 \cdot 10^{64}$	–	$0,5 \cdot 10^{64}$	–
	10	$2 \cdot 10^{133}$	–	$2 \cdot 10^{133}$	–

Основываясь на результатах сравнительного анализа, получили, что погрешности прогнозирования температур достигают наименьшего значения при $N = 8$ и $\varepsilon = 0,05T$.



а)



б)

Рис. 81: Сравнение температур, вычисленных на оси цилиндра, с тестовыми значениями в имитационном моделировании термообработки, проводимой при 400°C . Рис.(а)–графики температурных функций. Рис.(б)–график функции $\Delta(t)$.

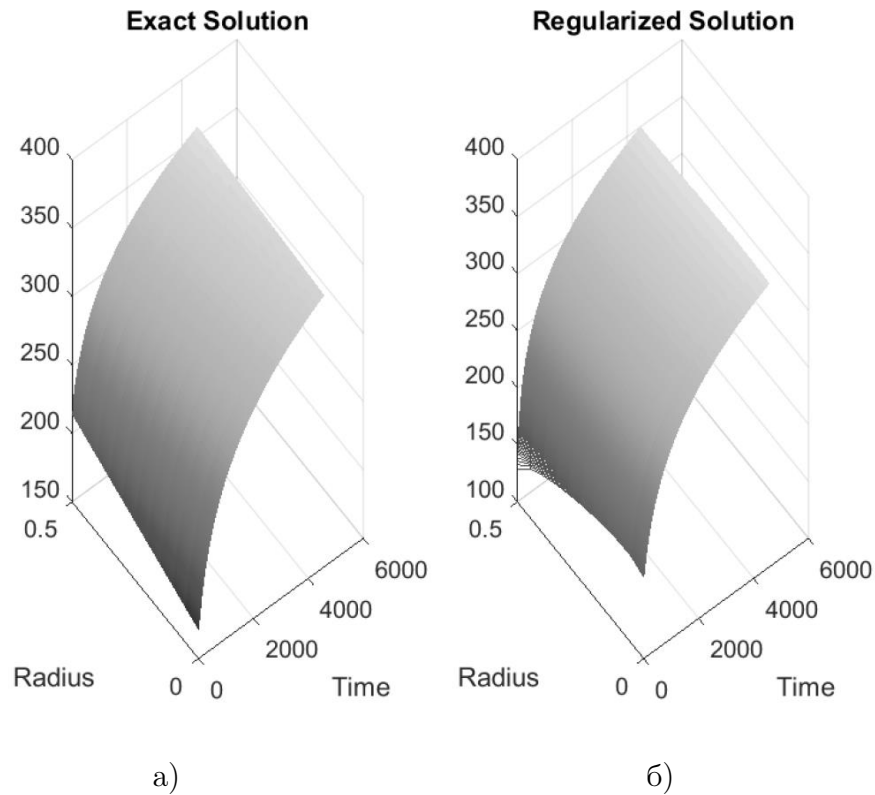
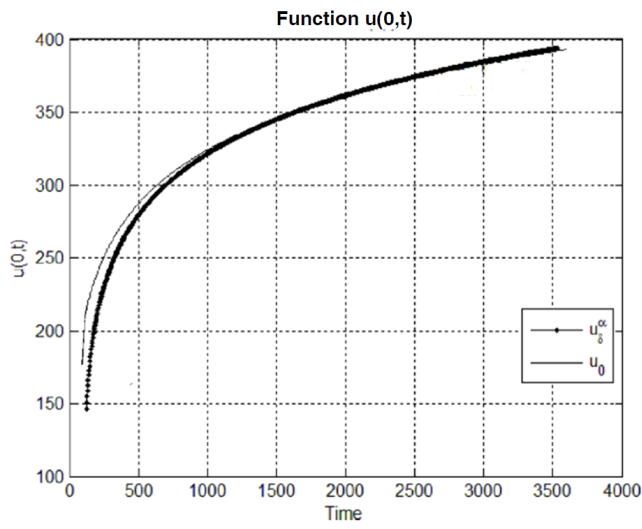


Рис. 82: Температурное поле во внутренних точках цилиндра в эксперименте по имитационному моделированию термообработки, проводимой при 400°C . Рис.(а) – результаты прогнозирования температурного поля, Рис.(б) – тестовые значения температур

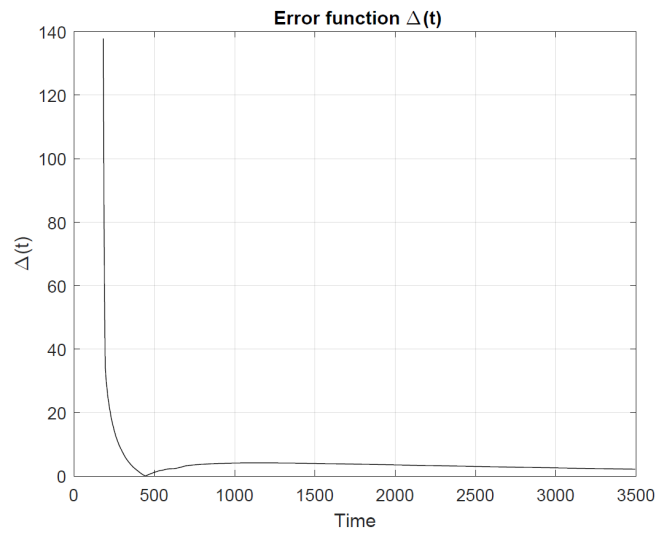
На всех рисунках используются одинаковые обозначения. Численным решениям $\varphi_{\delta}(t)$ соответствует обозначение u_{δ}^{α} , а для тестовых значений используется обозначение u_0 . Поверхности, озаглавленные ”*Exact solution*” соответствуют графику тестовой функции $u(r, t)$, сформированной при решении прямой задачи (4.56)–(4.58), а поверхности ”*Regularized solution*” представляют график приближенного решения $u_{\delta}(r, t)$ задачи 4.43), (4.44), (4.46), соответствующего прогнозируемым температурным значениям в подобласти Ω_{ε} .

Результаты прогнозирования $u_{\delta}(r, t)$, полученные с помощью предложенной вычислительной схемы в области $\Omega_{\varepsilon} = [0, \ell] \times (\varepsilon, T - \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0.03T$ и уровне погрешности исходных данных $\delta = 0,05$ представлены на рис. 83, 84. В качестве тестовых функций использовались результаты имитационного моделирования, связанные с термообработкой при температуре 450°C

Рис. 85, 86 иллюстрируют результаты прогнозирования температур и результаты сравнительного анализа в области $\Omega_{\varepsilon} = [0, \ell] \times (\varepsilon, T - \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0.05T$, по-



а)



б)

Рис. 83: Результаты численного решения задачи нелинейного теплопереноса для тестовых функций из примера 1. Рис.(а)–графики температурных функций. Рис.(б)–график функции температурной погрешности.

лученные при проведении вычислительного эксперимента с исходными данными, имитирующими процесс теплопереноса в теле, подвергнутом внешнему нагреву при температуре 600^0C . Уровень погрешности исходных данных $\delta = 0,05$.

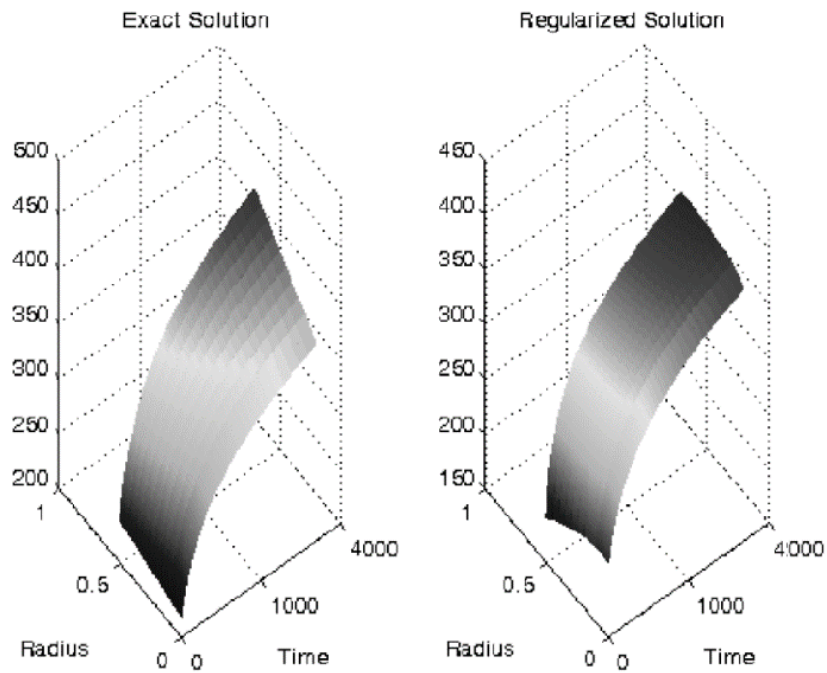
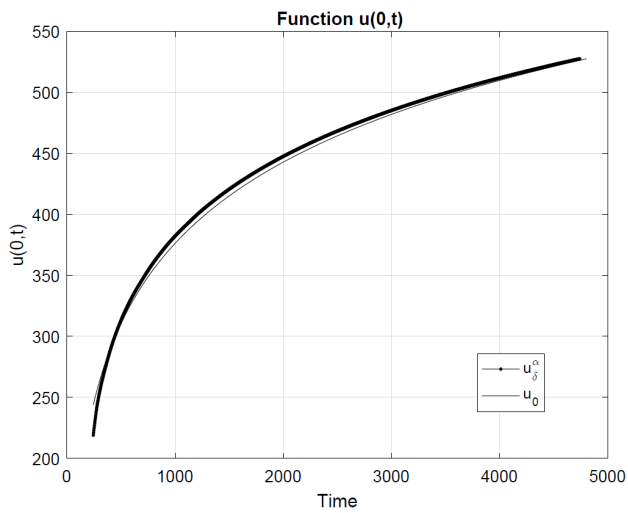
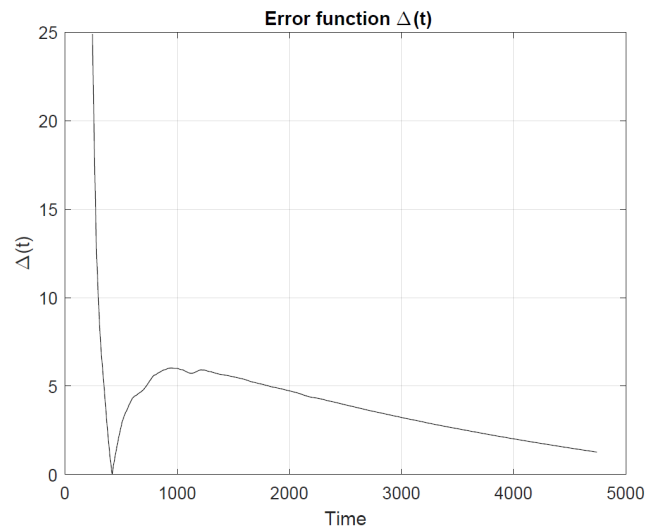


Рис. 84: Результаты численного решения задачи нелинейного теплопереноса в подобласти Ω_ϵ .

Обозначения, используемые на рис.83–86 аналогичны применяемым на рис.81, 82.

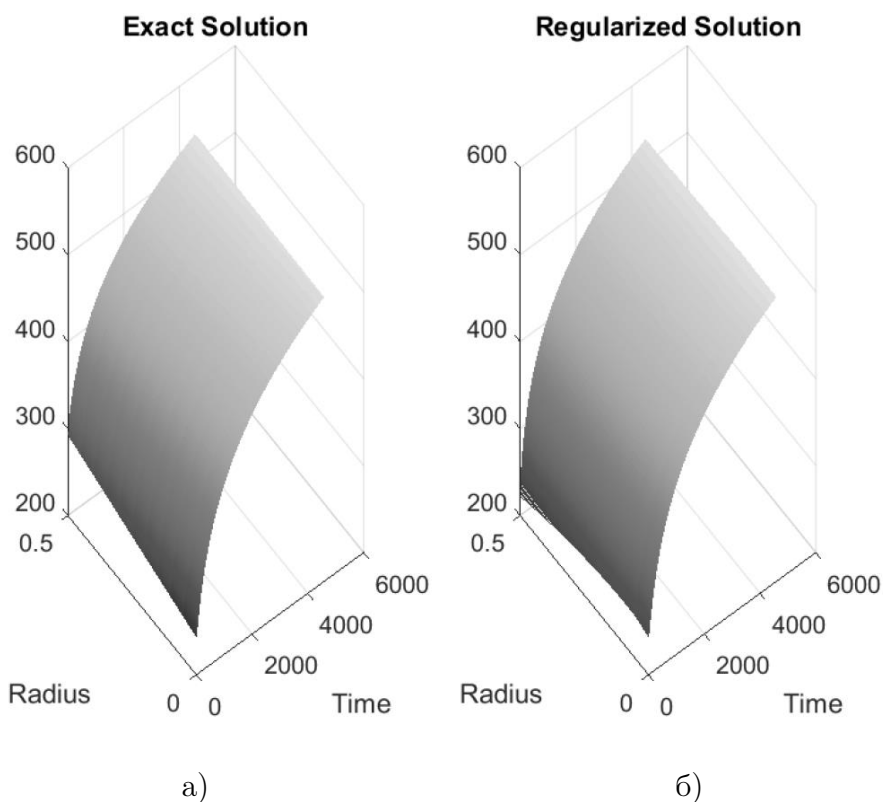


а)



б)

Рис. 85: Результаты численного решения задачи нелинейного теплопереноса для тестовых функций из примера 1. Рис.(а)–графики температурных функций. Рис.(б)–график функции температурной погрешности.



а)

б)

Рис. 86: Температурное поле во внутренних точках цилиндра. Рис.(а) – результаты прогнозирования температурного поля, Рис.(б) – тестовые значения температур

Результаты вычислительного эксперимента приводят к следующим выводам. Предложенный метод позволяет находить температурные поля во внутренних точках цилиндрического тела с неизвестным начальным тепловым состоянием

по результатам граничных температурных измерений, полученных в условиях погрешности. Соблюдении условий согласования величин шага дискретизации h , параметра регуляризации α с интервалом измерения τ гарантирует устойчивости вычислительной схемы. Численное прогнозирование возможно только при небольших значениях N , определяющем величину шага дискретизации h по пространственной переменной, что согласуется с теоретическими результатами. Исследование структуры области Ω_ε показало, что оценки температурных погрешностей являются достаточно точными для $t \in (\varepsilon, T - \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0.05T$.

4.5 Результаты экспериментального исследования

В данном разделе приведены результаты эксперимента по прогнозированию температур во внутренних точках цилиндра с неизвестным начальным тепловым состоянием, подвергаемом внешнему тепловому воздействию в технологическом процессе термообработки. Исходным данными служили экспериментальные данные, полученные из результатов температурных измерений вблизи поверхности. Прогнозирование осуществлялось с помощью предложенного метода. Эксперименты проводились в лабораторных условиях и на промышленном оборудовании. Цель экспериментов заключалась в верификации и исследовании точности метода определения температур при неизвестном начальном тепловом состоянии тела

4.5.1 Результаты лабораторного исследования

В данном разделе представлены результаты экспериментального исследования, проводимого в лабораторных условиях. Для проведения экспериментов использовали камерную электрическую печь ПКЛ-1,2-12. Образцом служил цилиндр, изготовленный из стали СТ-45, диаметром $d = 50$ мм и образующей длиной $L = 170$ мм. На внешней поверхности цилиндра закрепляли терморару. Внутри образца на оси цилиндра просверлен канал, в который помещалась вторая термомпара. Для проведения экспериментов выбирались температурные режимы, соответствующие технологическим процессам среднего и высокого отпуска. Схема эксперимента представлена на рис.87

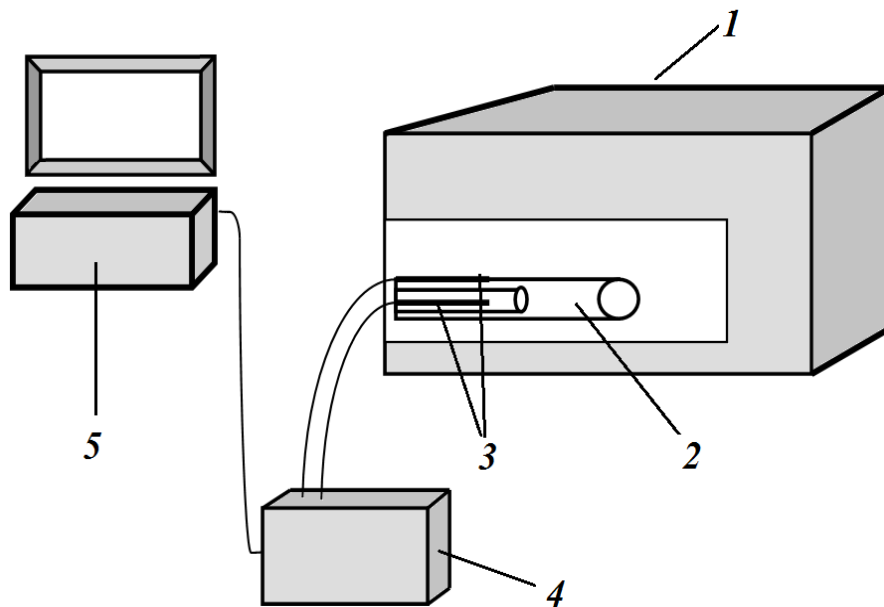


Рис. 87: Схема эксперимента. Обозначения: 1–камерная печь, 2– образец, 3– термопары для измерения температуры, 4–электронный измеритель, 5– компьютер

В исследовании проводились эксперименты двух типов. При проведении эксперимента первого типа печь разогревали до 550°C , что соответствует наибольшей температуре среднего отпуска, При проведении второго температура печи составила 650°C , что соответствует температуре высокого отпуска.

Методика проведения экспериментов заключалась в следующем. В разогретую печь помещали образец с закрепленными средствами измерения температуры. Продолжительность измерений в экспериментах первого типа составила $T = 1700$ сек., второго типа – $T = 1656$ сек., интервал измерения – 1 сек. Количество измерений определяло величину $M + 1$. Термопары подключались к микропроцессорному модулю регистрации сигналов термопар измерителю-регулятору температуры "Triton 6004TC". Результаты измерений $u_0(0, t) = \varphi_0(t)$, полученные с помощью термопары, закрепленной вдоль оси цилиндра использовали в качестве тестовой функции. В начальный момент времени температура образца составляла 25°C . Информация о начальной температуре цилиндра использовалась в дальнейшем при формировании тестовых значений температурных полей цилиндра $u_0(r, t)$, получаемых в результате численного решения прямой задачи.

По завершении измерений переходили к обработке результатов поверхностных измерений с помощью предложенного метода дискретной регуляризации. Для

обеспечения устойчивости вычислительной схемы на начальном этапе обработки данных нормировали переменную $t \in [0, T]$, характеризующую время. Нормирование проводится согласно формуле $t^* = \frac{\gamma t}{T}$.

На первом этапе обработки формировали исходные данные p_δ и q_δ для задачи теплоперноса (4.43), (4.44), (4.46) имеющей вид:

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r}\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda(u)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (r, t) \in \Omega_T.$$

$$u(\ell, t) = p(t), \quad u_r(\ell, t) = q(t), \quad t \in [0, T].$$

где $\Omega_T = [0, 170] \times [0, T]$, а коэффициенты заданы формулами:

$$c(u) = c_0 + k_c \cdot u, \quad \rho(u) = \rho_0 + k_\rho \cdot u, \quad \lambda(u) = \lambda_0 + k_\lambda \cdot u.$$

Значения k_c, k_ρ, k_λ согласовывались с результатами, приведенными в [102], [59].

Для формирования p_δ и q_δ использовали формулы:

$$p_\delta(t^*) = u(\ell, t^*), \quad q_\delta(t^*) = \alpha_\theta(u(\ell, t^*) - \theta),$$

где $u(\ell, t^*)$ – результаты температурных измерений на поверхности, α_θ – коэффициент теплоотдачи, а θ – температура разогретой печи.

На следующем этапе вычисляли температурное поле цилиндра $u_\delta(r, t)$ относительно пространственной переменной с помощью предложенной вычислительной схемы дискретной регуляризации (4.47)–(4.49) с регуляризованными коэффициентами (4.50), начиная от внешней поверхности цилиндра в направлении к оси цилиндра. Таким образом, на каждом шаге итерационного процесса находили температуру в точках цилиндра, расположенных на расстоянии r_i от поверхности цилиндра, для всех $t_j, j = \overline{1, M+1}$.

Следующий этап эксперимента включал проведение сравнительного анализа, проводимого по следующей методике. Сначала из результатов прогнозирования $u_\delta(r, t)$ выделяли значения $u_\delta(0, t)$, соответствующие прогнозируемым температурам на оси цилиндра, и $u_\delta(0, t)$ сравнивали с измеренными значениями $\varphi(t)$. Сравнение проводилось при всех $t \in [0, T]$. Далее осуществляли сравнение температурных значений в области Ω_ε .

В завершение, с целью исключения ситуации потери устойчивости схемы и возникновения неконтролируемых вычислительных погрешностей во внутренних точках объекта, проводили сравнительный анализ температур $u_\delta(r, t)$, полученных во всей области Ω_T с тестовыми значениями $u_0(r, t)$. В эксперименте в качестве тестовых функций использовали численное решение прямой задачи:

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r}\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda(u)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (r, t) \in \Omega_T. \quad (4.59)$$

с известными начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= u(0, t), \quad p(t) = u(\ell, t), \quad t \in [0, T], \\ u(r, 0) &= 25, \quad r \in [0, \ell] \end{aligned} \quad (4.60)$$

где функция $\varphi(t)$ формировалась из результатов измерений температуры на оси цилиндра $u(0, t)$, а $p(t)$ – из результатов измерений $u(\ell, t)$, полученных на поверхности цилиндра. Коэффициенты в уравнении (4.60) определяли по формулами:

$$c(u) = c_0 + k_c \cdot u, \quad \rho(u) = \rho_0 + k_\rho \cdot u, \quad \lambda(u) = \lambda_0 + k_\lambda \cdot u. \quad (4.61)$$

Значения k_c, k_ρ, k_λ согласовывались с приведенными в [59], [102].

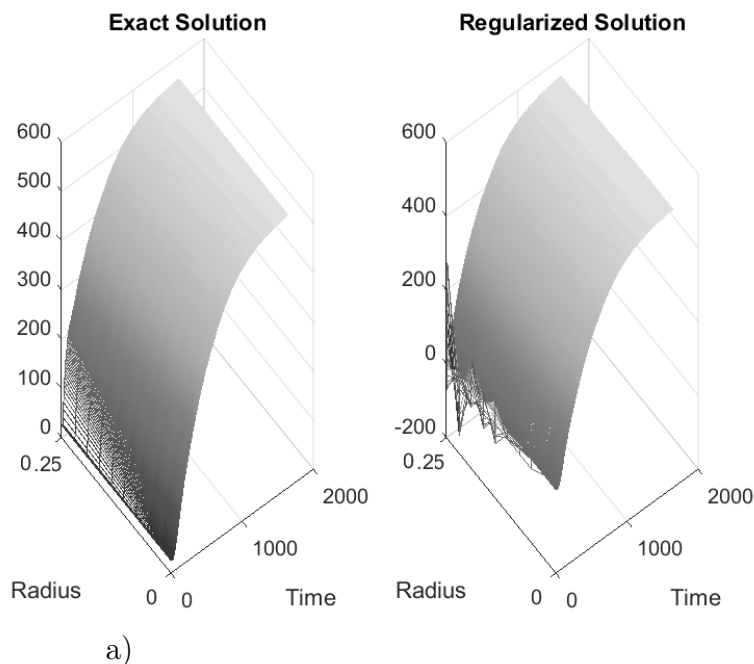


Рис. 88: Температурное поле во внутренних точках цилиндра при среднем отпуске. Рис.(а) – тестовые значения температур, Рис.(б) – результаты прогнозирования температурного поля при неизвестных начальных условиях

Рис. 88 иллюстрирует прогнозируемое температурное поле $u_\delta(r, t)$ и тестовые значения $u_0(r, t)$, соответствующие среднему отпуску, а на рис. 89 представлены температурные поля, соответствующие высокому отпуску.

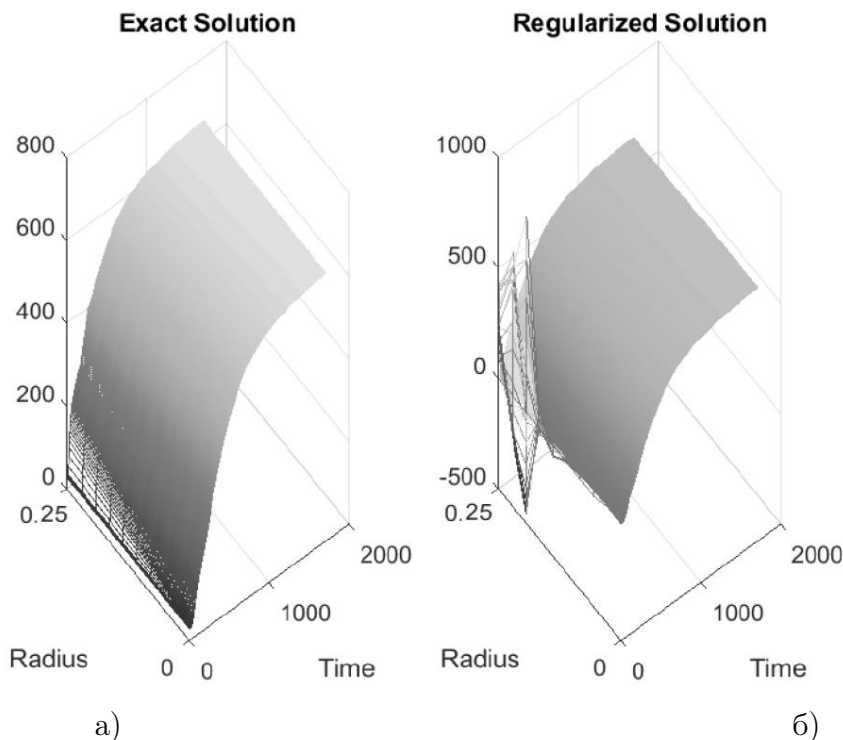


Рис. 89: Температурное поле во внутренних точках цилиндра при высоком отпуске. Рис.(а) – тестовые значения температур, Рис.(б) – результаты прогнозирования температурного поля при неизвестных начальных условиях

На рис.88, 89 используются одинаковые обозначения. Поверхности, озаглавленные ”*Exact solution*” соответствуют графику тестовой функции $u_0(r, t)$. Поверхности ”*Regularized solution*” иллюстрируют численные решения $u_\delta(r, t)$ обратной задачи теплопереноса (4.43)–(4.45), полученное с помощью предложенной вычислительной схемы и соответствующее прогнозируемым температурным значениям во всей области Ω_T .

Графики измеренных температур $\varphi_0(t)$ и вычисленных температур $\varphi_\delta(t)$, полученные при всех $t \in [0, T]$ на оси цилиндра, представлены на рис.90 . Обозначение $u(R, t)$ соответствует температурам, измеренным на поверхности цилиндра. Нижний график, обозначенный $u(0, t)$? соответствует результатам измерений температур $u_0(0, t) = \varphi_0(t)$ на оси цилиндра. Верхний график, обозначенный u_F , характеризует температурное состояние стенок печи. Обозначение u_δ^α соответствует

температурам $\varphi_\delta(t)$, найденным на оси цилиндра с помощью предложенного метода дискретной регуляризации при неизвестных начальных условия.

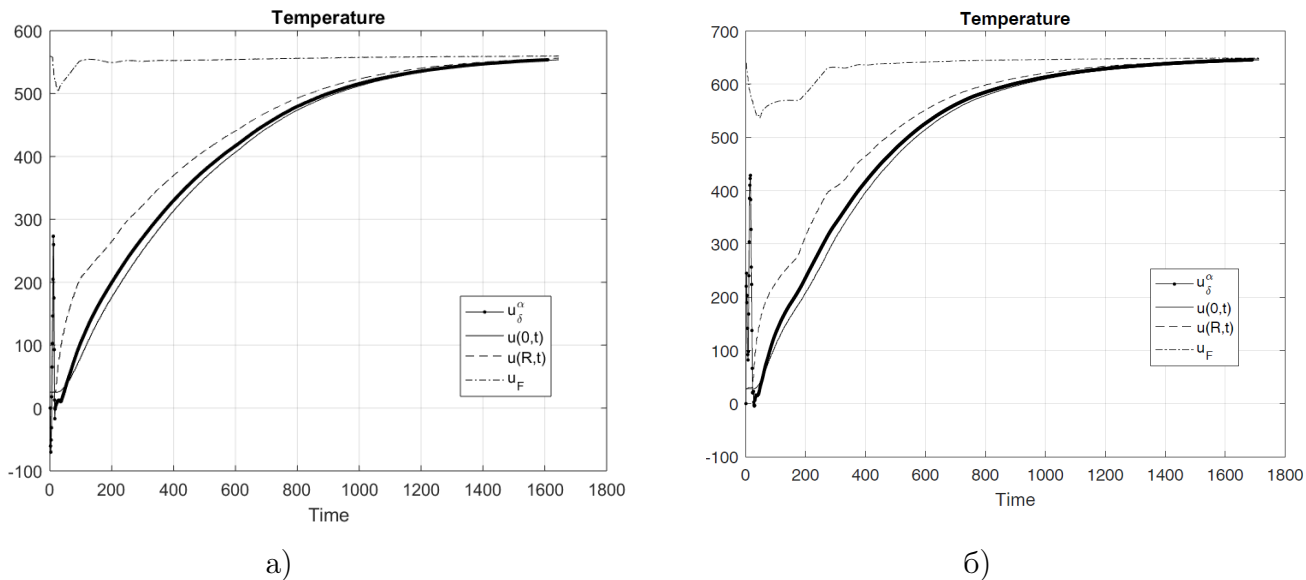


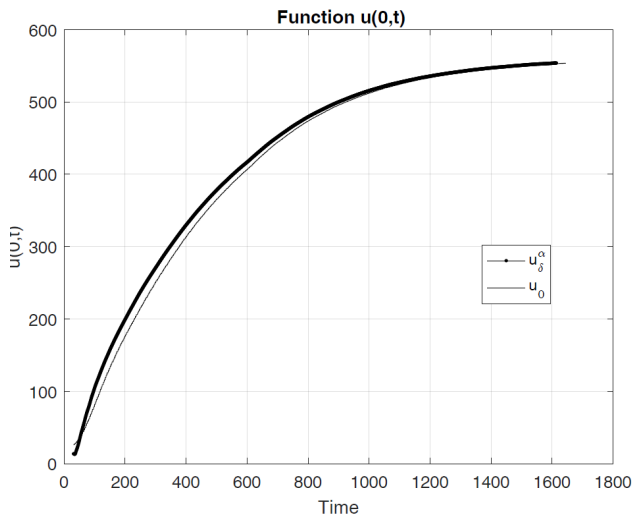
Рис. 90: Графики измеренных и вычисленных температур на оси цилиндра, полученные при всех $t \in [0, T]$, Рис.(а)–графики температурных функций при среднем отпуске. Рис.(б)–графики температурных функций при высоком отпуске.

Результаты эксперимента представленные графиками $\varphi_0(t)$ и $\varphi_\delta(t)$, при $t \in [\varepsilon, T - \varepsilon]$ и $\varepsilon = 0.02T$ приведены на рис.91. Функция $\varphi_0(t)$ соответствует результатам измерений температуры на оси цилиндра, а функция $\varphi_\delta(t)$ – температурам, вычисленным с помощью предложенного метода при неизвестных начальных условиях. Рис.91(а) иллюстрирует результаты эксперимента для среднего отпуска, рис.91(б) – для высокого отпуска.

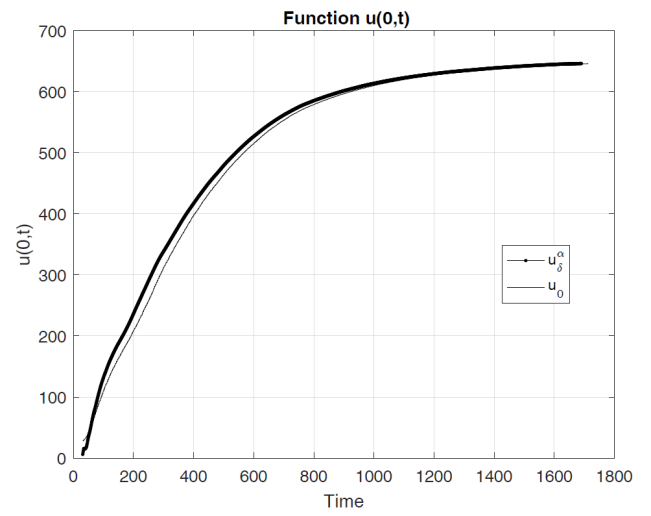
Результаты эксперимента по определению температурных полей в подобласти $\Omega_\varepsilon = [0, \ell] \times (\varepsilon, T - \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0.02T$ для среднего отпуска приведены на рис.92, а для высокого отпуска представлены на рис.93.

Рис.92(а), 93(а) иллюстрируют результаты прогнозирования температур внутренних точек цилиндра $u_\delta(r, t)$, найденных с помощью предложенного метода. Поверхности, соответствующие тестовым значениям $u_0(r, t)$, полученным при решении прямой задачи, приведены на рис.92(б), 93(б).

Для проведения сравнительного анализа температур, найденных на оси цилиндра с результатами измерений, для исследования влияния параметра γ , применяемого при нормировании переменной времени, на точность результатов про-

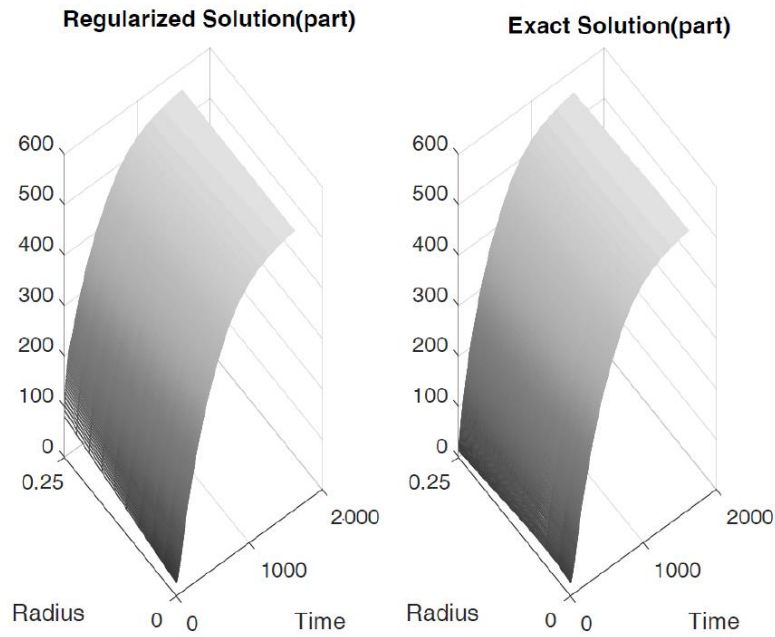


а)



б)

Рис. 91: Графики измеренных и вычисленных температур на оси цилиндра, полученные при всех $t \in [0, T]$, Рис.(а)–графики температурных функций при среднем отпуске. Рис.(б)–графики температурных функций при высоком отпуске.



а)

б)

Рис. 92: Температурное поле цилиндра в подобласти Ω_ε при $\varepsilon = 0.02T$ при среднем отпуске.

гнозирования, а также для получения экспериментальных оценок температурных погрешностей в области Ω_ε использовали функции $\Delta(t)$, Δ_{S-A} и величину Δ_φ ,

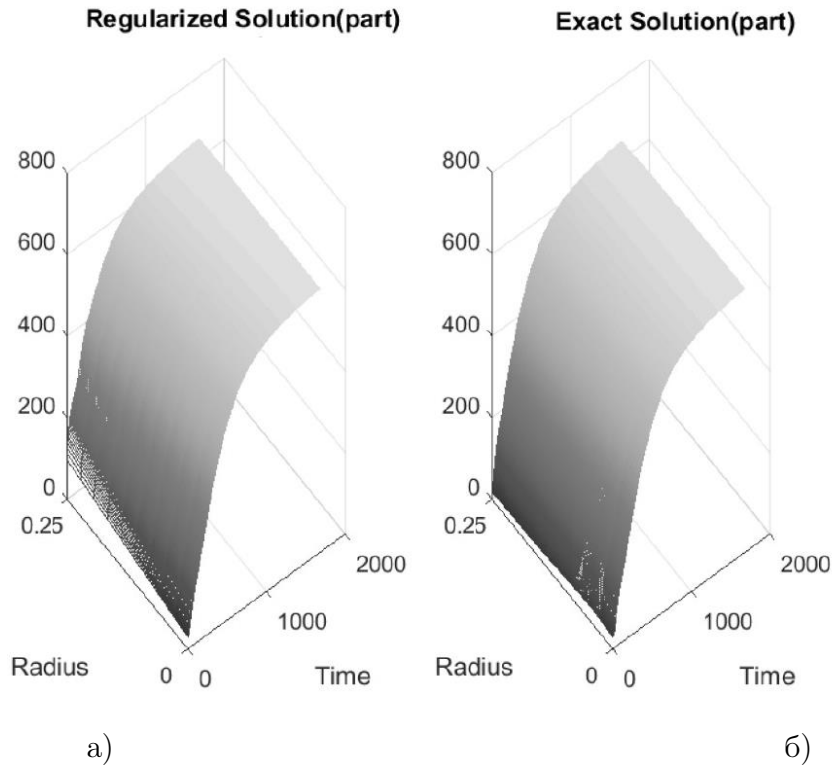


Рис. 93: Температурное поле цилиндра в подобласти Ω_ε при $\varepsilon = 0.02T$ при высоком отпуске.

определяемые формулами:

$$\Delta(t) = |u_\delta(0, t) - u_0(0, t)| = |\varphi_\delta(t) - \varphi_0(t)|, \quad t \in [\varepsilon, T],$$

$$\Delta_\varphi = \max_{(r,t) \in \Omega_\varepsilon} \left| \frac{u_\delta(r, t) - u_0(r, t)}{u_0(r, t)} \right|, \quad t \in [\varepsilon, T - \varepsilon]$$

$$\Delta_{S-A}(t) = |u_0(\ell, t) - u_0(0, t)|, \quad t \in [\varepsilon, T - \varepsilon].$$

Функция $\Delta(t)$ характеризует отклонение результатов прогнозирования температур на оси цилиндра $u_\delta(0, t)$ от измеренных значений $u_0(0, t)$. Величина Δ_φ характеризует погрешности прогнозирования температур во внутренних точках цилиндра в области $\Omega_\varepsilon = [0, \ell] \times (\varepsilon, T - \varepsilon)$. Функция Δ_{S-A} характеризует разницу между температурой $u_0(\ell, t)$, измеренной на поверхности, и температурой $u_0(0, t)$, измеренной на оси цилиндра.

Результаты экспериментов, связанных с исследованием целесообразности введения нормированной переменной $t^* = \frac{\gamma t}{T}$ при обработке экспериментальных данных и оценки влияния параметра γ на точность прогнозирования температур, представлены на рис. 94–99. Эти рисунки иллюстрируют графики функций $\Delta(t)$ и $\Delta_{S-A}(t)$, полученных при различных значениях параметра γ и представлен-

ных в промежутке $t \in [\varepsilon, 0.98T]$ с различными значениями ε . Рис. 94(а)–99(а) иллюстрируют график функции $\Delta(t)$. На рис. 94(б) – 99(б) приведены графики функции Δ_{S-A} , соответствующей разнице температур на поверхности и оси цилиндра, и функции $\Delta(t)$,

Результаты эксперимента, связанного со средним отпуском, когда образец помещали в печь, разогретую до 550°C , проиллюстрированы на рис.94– 96.

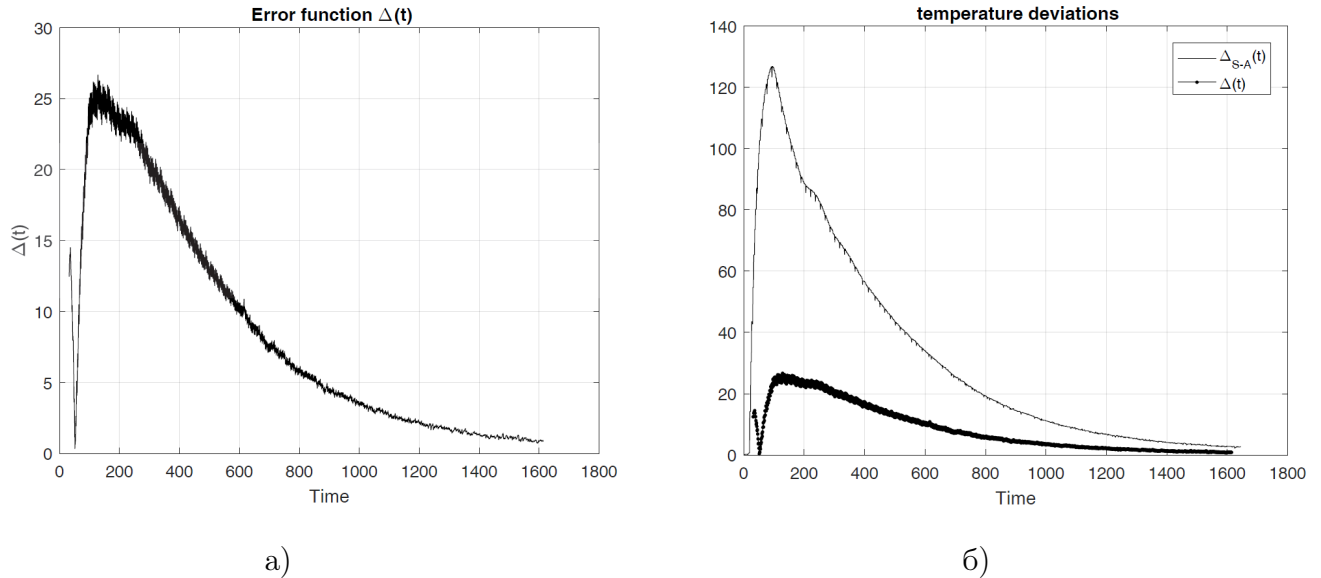


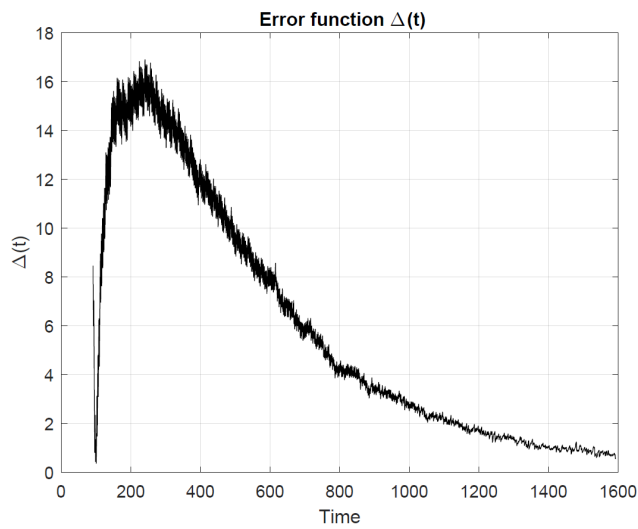
Рис. 94: Графики температурных отклонений, полученные в эксперименте, связанном со средним отпуском при $t \in [0.02T, 0.98T]$ и $\gamma = 2$. Рис.(а) – температурные отклонения $\Delta(t)$ на оси цилиндра, Рис.(б) – сравнение температурных отклонений поверхностных измерений и прогнозируемых температур от температур, измеренных на оси цилиндра.

Графики функций температурных отклонений $\Delta(t)$ и $\Delta_{S-A}(t)$, приведенные на рис. 97– 99 соответствуют результатам экспериментов, связанных с высоким отпуском.

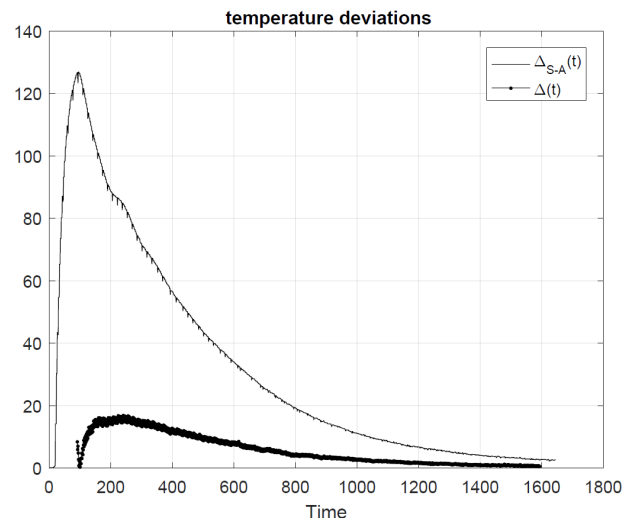
Оценки Δ наибольшего температурного отклонения результатов прогнозирования температур на оси цилиндра от измеренных значений, полученные при $t \in [0.05T, 0.98T]$ и определяемые формулой

$$\Delta = \max_{t \in [0.05T, 0.98T]} \Delta(t) = \max_{t \in [0.05T, 0.98T]} |\varphi_{\delta}(t) - \varphi_0(t)|$$

а также средние значения величин Δ_{φ} , характеризующие относительную погрешность результатов вычисления температур на оси цилиндра, представлены в табл.18.

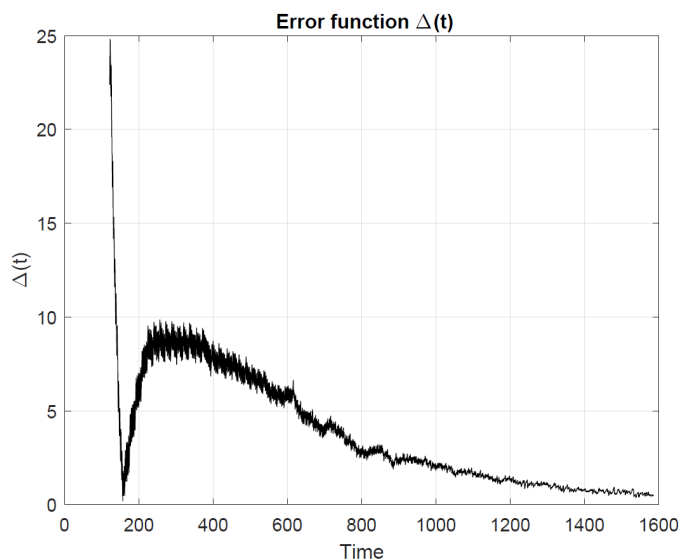


а)

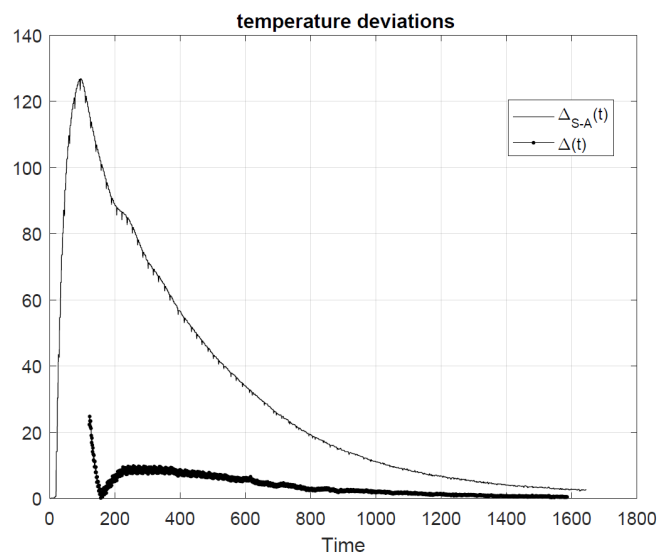


б)

Рис. 95: Графики температурных отклонений, полученные в эксперименте, связанном со средним отпуском при $t \in [0.035T, 0.98T]$ и $\gamma = 1$. Рис.(а) – температурные отклонения $\Delta(t)$ на оси цилиндра, Рис.(б) – сравнение температурных отклонений поверхностных измерений и прогнозируемых температур от температур, измеренных на оси цилиндра.



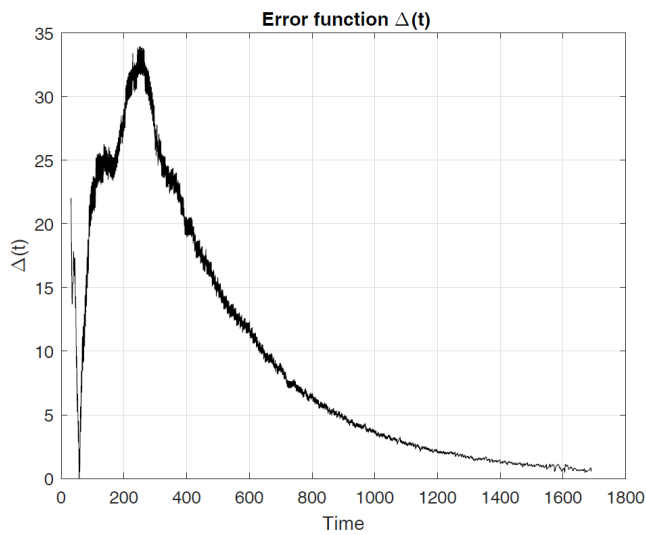
а)



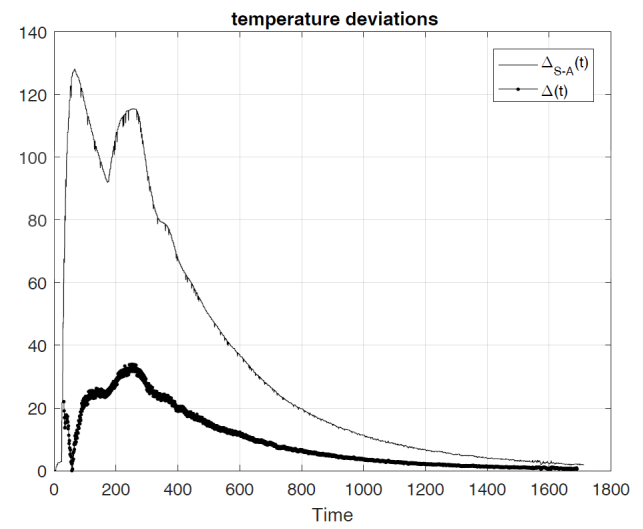
б)

Рис. 96: Графики температурных отклонений, полученные в эксперименте, связанном со средним отпуском при $t \in [0.05T, 0.98T]$ и $\gamma = 0.5$. Рис.(а) – температурные отклонения $\Delta(t)$ на оси цилиндра, Рис.(б) – сравнение температурных отклонений поверхностных измерений и прогнозируемых температур от температур, измеренных на оси цилиндра.

Результаты лабораторного исследования подтверждают принципиальную возможность прогнозирования температурного состояния объекта по результатам поверхностных измерений температуры в условиях, когда начальная температура тела является неизвестной и приводят к следующим выводам. Величина по-

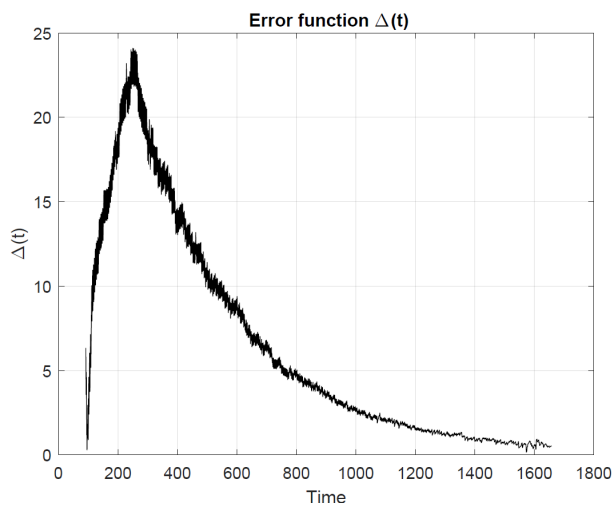


а)

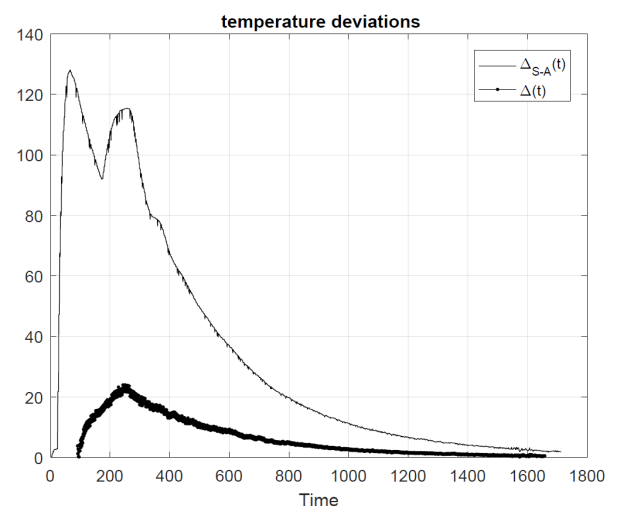


б)

Рис. 97: Графики температурных отклонений, полученные в эксперименте, связанном с высоким отпуском при $t \in [0.02T, 0.98T]$ и $\gamma = 2$. Рис.(а) – температурные отклонения $\Delta(t)$ на оси цилиндра, Рис.(б) – сравнение температурных отклонений поверхностных измерений и прогнозируемых температур от температур, измеренных на оси цилиндра.



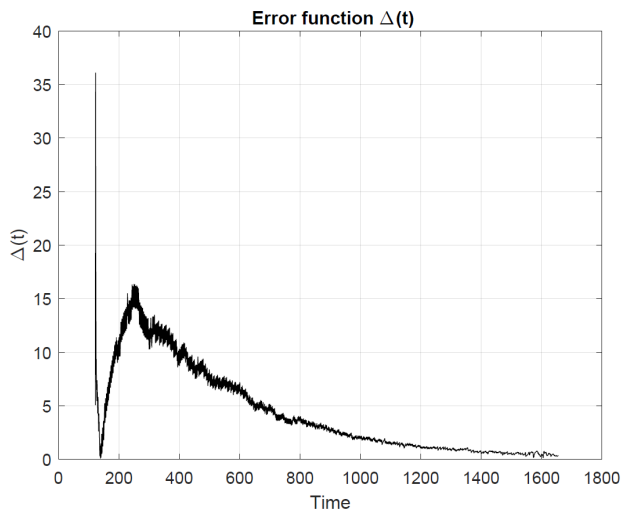
а)



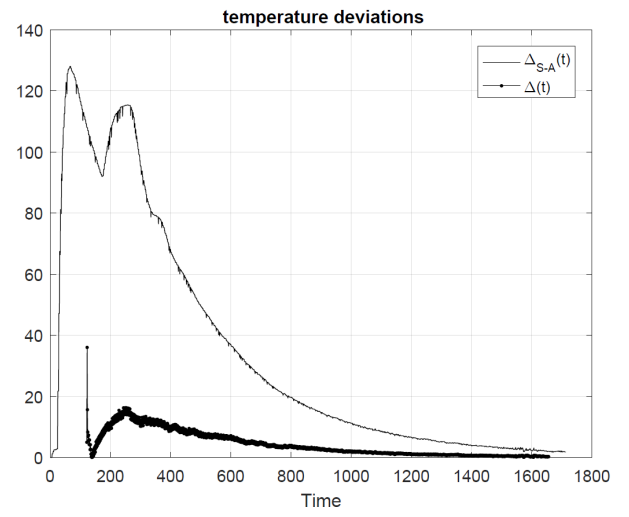
б)

Рис. 98: Графики температурных отклонений, полученные в эксперименте, связанном с высоким отпуском при $t \in [0.035T, 0.98T]$ и $\gamma = 1$. Рис.(а) – температурные отклонения $\Delta(t)$ на оси цилиндра, Рис.(б) – сравнение температурных отклонений поверхностных измерений и прогнозируемых температур от температур, измеренных на оси цилиндра.

грешности прогнозирования температур уменьшается с течением времени. При обработке результатов поверхностных температурных измерений целесообразно нормировать переменную, характеризующую время. Отметим, что при изменении подхода к нормированию этой переменной, изменяется точность прогнозирования



а)



б)

Рис. 99: Графики температурных отклонений, полученные в эксперименте, связанном с высоким отпуском при $t \in [0.05T, 0.98T]$ и $\gamma = 0.5$. Рис.(а) – температурные отклонения $\Delta(t)$ на оси цилиндра, Рис.(б) – сравнение температурных отклонений поверхностных измерений и прогнозируемых температур от температур, измеренных на оси цилиндра.

Таблица 18: Температурные погрешности

температура печи	ε	Δ	Δ_ϕ
550 ⁰ C	0,020T	23,12	0,06232
	0,035T	18,06	0,05576
	0,050T	8,17	0,03384
650 ⁰ C	0,020T	26,08	0,06324
	0,035T	19,23	0,05625
	0,050T	8,87	0,03364

температур. С уменьшением параметра γ , используемого для нормировки, при неизменной величине шага по пространственной переменной возрастает точность прогнозирования в интервале $[\varepsilon, T]$, но при этом увеличивается интервал неконтролируемых погрешностей $[0, \varepsilon]$. Таким образом, уровень точности прогноза зависит от величины шагов дискретизации. Результаты лабораторного эксперимента согласуются с теоретическими результатами и результатами вычислительного эксперимента, проведенного на основе имитационного моделирования.

4.5.2 Результаты эксперимента, полученные при проведении измерений на промышленном оборудовании

С целью оценки надежности и эффективности использования предложенной вычислительной схемы для прогнозирования теплового состояния объекта, получаемого во время термообработки при выбранном тепловом внешнем воздействии, было проведено несколько экспериментов.

В данном разделе представлены результаты экспериментальных исследований, проводимых на промышленном оборудовании и связанных с различными режимами термообработки.

Первый тип экспериментов связан со средним отпуском, когда под действием выбранного режима теплового воздействия обеспечивается равномерный нагрев тела до максимально возможного температурного значения, а к моменту завершения процесса отличия температур на поверхности и на оси цилиндра минимальны. Режим теплового воздействия регулировался следующим образом. В эксперименте печь разогревали до температуры 400°C , помещали в нее образцы и поддерживали эту температуру до конца эксперимента. Продолжительность термообработки составила $T = 80$ мин.

Второй тип эксперимента связан со средним отпуском, когда под действием выбранного режима теплового воздействия в точках на поверхности тела и в точках на оси цилиндра достигается определенная температура, а затем должно происходить плавное снижение температур. Режим теплового воздействия, обеспечивающий желаемый характер теплопереноса, регулировался следующим образом. Печь разогревали до температуры 400°C , помещали в нее образец, а через 35 мин. печь отключали, а измерения температуры осуществляли до конца эксперимента. Продолжительность термообработки составила $T = 60$ мин.

Образцами служили цилиндры изготовленные из стали СТ-45 с образующей $L = 400$ мм. Диаметр образцов составлял $d = 200$ мм. Внутри образцов на оси цилиндров были просверлены каналы диаметром $d = 100$ мм, которые перед началом экспериментов заполнялись асбестом. Нагрев образцов осуществляли в промышленной камерной муфельной электрической печи СНЗ-4*8*2,5/10М2. Изме-

рение температуры осуществляли посредством пирометра "Луч". Оборудование для эксперимента и пример образца представлены на рис.100.



а)



б)



в)

Рис. 100: Оборудование для проведения эксперимента. Рис.(а) – работающая печь, Рис.(б) – пирометр, Рис.(в) – пример образца с заполненным отверстием.

Методика экспериментов состояла в следующем. В разогретую печь помещали образцы. Продолжительность экспериментов составила $T = 4800$ сек. и $T = 3600$ сек., интервал измерения – 600 сек. В эксперименте продолжительностью $T = 4800$ сек. в печь помещали 8 образцов, а в эксперименте продолжительностью $T = 3600$ сек. в печь помещали 6 образцов. Для измерения температуры каждый раз извлекали по одному образцу, удаляли асбестовую вставку и проводили измерения температуры на поверхности и вдоль оси цилиндра. В начальный момент времени температура образцов составляла 37°C . Информация о начальной температуре цилиндра использовалась в дальнейшем при формировании тестовых значений температурных полей цилиндра $u_0(r, t)$, получаемых в результате численного решения прямой задачи (4.56)–(4.58).

По завершении измерений, полученные результаты обрабатывались с помощью предложенного метода дискретной регуляризации и далее проводился сравнительный анализ вычисленных температур и результатов измерений. Для обеспечения устойчивости вычислительной схемы на начальном этапе обработки данных нор-

мировали переменную $t \in [0, T]$, характеризующую время. Нормирование проводится согласно формуле $t^* = \frac{t}{2T}$ при $\gamma = 0.5$.

Первый этап обработки результатов измерений включал нормировку переменной времени формирование исходных данных p_δ и q_δ для задачи теплоперноса (4.43), (4.44). Для формирования p_δ и q_δ использовали формулы:

$$p_\delta(t^*) = u(\ell, t^*), \quad q(t^*) = \alpha_\theta(u(\ell, t^*) - \theta),$$

где $u(\ell, t^*)$ – результаты температурных измерений на поверхности, α_θ – коэффициент теплоотдачи, а θ – температура разогретой печи.

На следующем этапе вычисляли температурное поле цилиндра $u_\delta(r, t)$ относительно пространственной переменной с помощью предложенной вычислительной схемы дискретной регуляризации, начиная от внешней поверхности цилиндра в направлении к оси цилиндра. Таким образом, на каждом шаге итерационного процесса находили температуру в точках цилиндра, расположенных на расстоянии r_i от поверхности цилиндра, для всех $t_j, j = \overline{1, M+1}$.

Далее проводили сравнительный анализ температур $u_\delta(0, t)$ с результатами измерений на оси цилиндра $u(0, t) = \varphi(t)$, выделив $u_\delta(0, t)$ из полученных результатов прогнозирования $u_\delta(r, t)$. Сравнение проводилось при $t \in [0, 0.35T, 0.97T]$. Для сравнения точности результатов прогнозирования температур на оси цилиндра с измеренными температурами использовали функцию

$$\Delta(t) = |u_\delta(0, t) - u_0(0, t)| = |\varphi_\delta(t) - \varphi_0(t)|, \quad t \in [0, 0.35T, 0.97T],$$

В завершении, с целью исключения ситуаций потери устойчивости схемы и возникновения неконтролируемых вычислительных погрешностей во внутренних точках объекта, проводилось сопоставление $u_\delta(r, t)$ с тестовыми значениями $u_0(r, t)$. С этой целью на этапе сравнительного анализа формировали тестовое температурное поле цилиндра $u_0(r, t)$, решая прямую задачу (4.59)–(4.61) с граничными условиями, сформированными из результатов измерения температуры на поверхности $u(\ell, t) = p(t)$ и на оси цилиндра $u(0, t) = \varphi(t)$ и с известными начальными условиями $u(r, 0) = 37^0C$, при $r \in [0, \ell]$ и $t \in [0, T]$. Затем, сформированные тестовые значения $u_0(r, t)$ сопоставляли с результатами прогнозирования температуры

цилиндра во внутренних точках $u_\delta(r, t)$. Сопоставление проводилось в области $\Omega_\varepsilon = [0, \ell] \times [0.035T, 0.97T]$.

Результаты эксперимента первого типа представлены на рис.101, 102 и приведены в табл. 19. Результаты эксперимента второго типа представлены на рис.103,104 и приведены в табл. 20. На графиках и в таблице время указано в секундах.

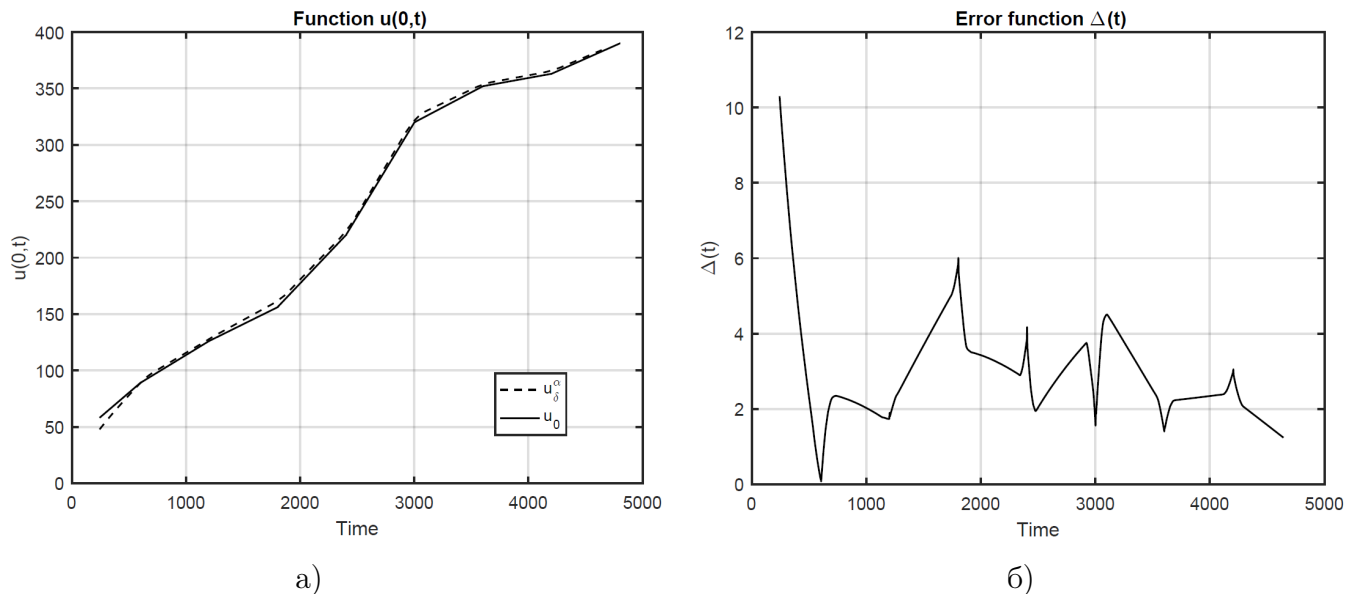


Рис. 101: Результаты сравнительного анализа $u_\delta(0, t) = \varphi_\delta(t)$ и $u_0(0, t) = \varphi_0(t)$ при $t \in [180, 4650]$.
 (а) Графики функций $\varphi_0(t)$ и $\varphi_\delta(t)$. (б) График функции температурных отклонений $\Delta(t)$

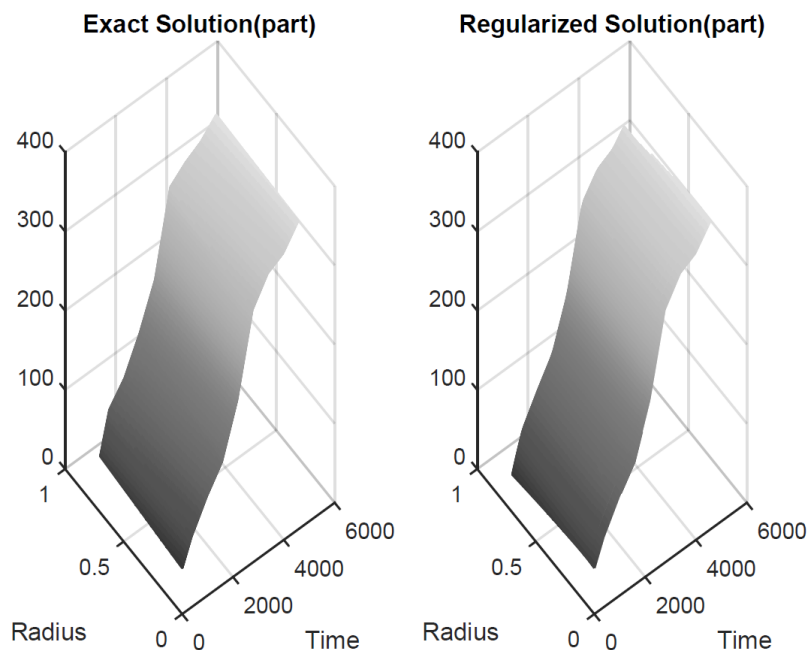


Рис. 102: Графики температурных полей $u(r, t)$ и $u_\delta(r, t)$ в области $\Omega_\ell = [0, \ell] \times [180, 4650]$.

На всех представленных рисунках используются следующие обозначения: u_0 соответствует температуре $u_0(0, t) = \varphi_0(t)$, измеренной на оси цилиндра, u_δ^α – ре-

зультат прогнозирования температур на оси $u_\delta(0, t) = \varphi_\delta(t)$. Обозначение ”*Exact solution*” соответствует тестовому температурному полю $u_0(r, t)$. ”*Regularized solution*” – результатам прогнозирования $u_\delta(r, t)$.

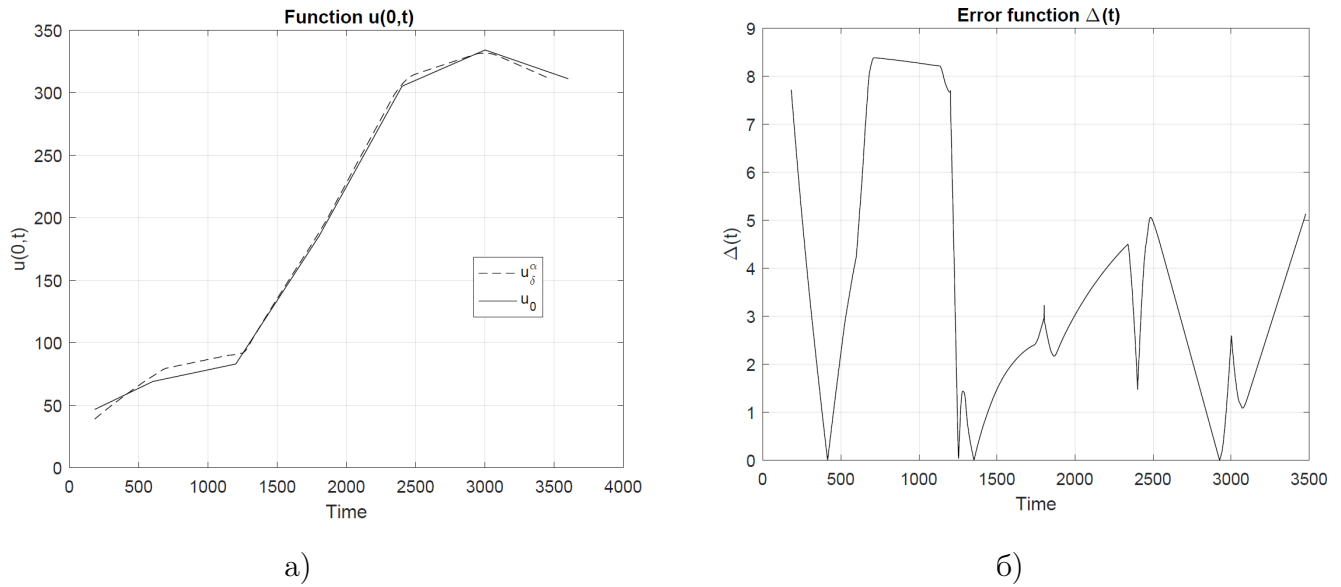


Рис. 103: Результаты сравнительного анализа $u_\delta(0, t) = \varphi_\delta(t)$ и $u_0(0, t) = \varphi_0(t)$ при $t \in [120, 3490]$.

(а) Графики функций $\varphi_0(t)$ и $\varphi_\delta(t)$. (б) График функции температурных отклонений $\Delta(t)$

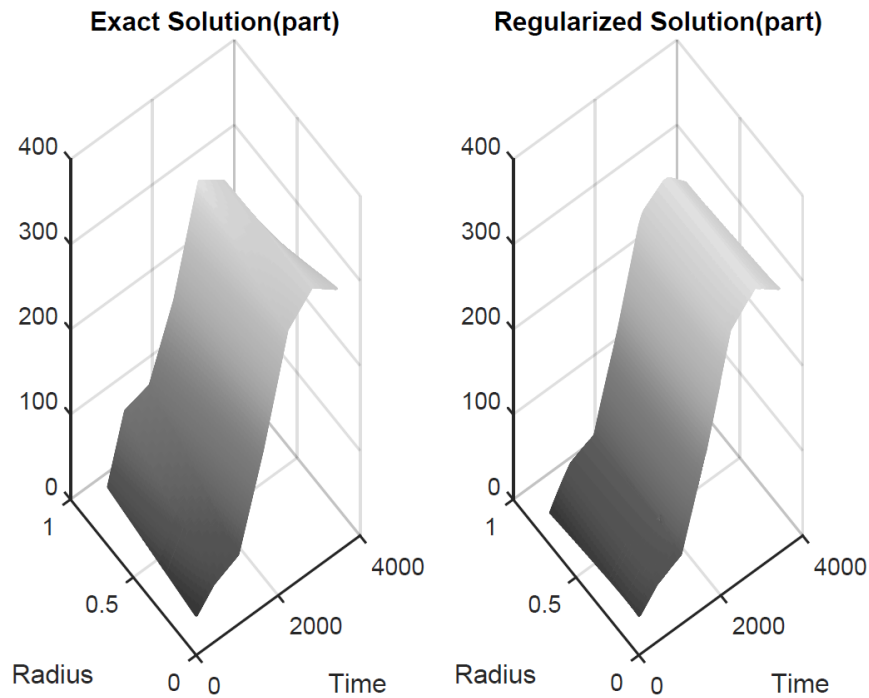


Рис. 104: Графики температурных полей $u(r, t)$ и $u_\delta(r, t)$ в подобласти $\Omega_\ell = [0, \ell] \times [120, 3490]$.

В табл.19 представлены результаты сравнения температурных измерений $u_0(0, t) = \varphi_0(t)$ и результаты прогнозирования температур $u_\delta(0, t) = \varphi_\delta(t)$, найденные с по-

мощью предложенной схемы для первого типа эксперимента. Используемые обозначения: t – время измерения, u_F – температура печи в момент измерения, $u(\ell, t)$ – результат измерения температуры на поверхности, $u(0, t)$ – результат измерения на оси, $u_\delta(0, t)$ – результат прогнозирования температуры на оси.

Таблица 19: Сравнение результатов измерений и прогнозирования

t , (сек)	$u_F, ^\circ C$	$u(\ell, t), ^\circ C$	$u(0, t), ^\circ C$	$u_\delta(0, t), ^\circ C$	$\Delta(t), ^\circ C$
0	400	37	37	–	–
600	400	121	89	88.8566	0.1434
1200	400	147	126	127.7344	1.7344
1800	400	190	156	161.8275	5.8275
2400	400	243	220	223.8308	3.8308
3000	400	346	320	321.5551	1.5551
3600	400	363	352	353.4015	1.4015
4200	400	375	363	365.9792	2.9792
4800	400	395	390	384.0388 *	–

* – температура, вычисленная при $t = 0.97T$

В табл. 20 представлены результаты сравнения температурных измерений $u_0(0, t) = \varphi_0(t)$ и результаты прогнозирования температур $u_\delta(0, t) = \varphi_\delta(t)$, полученные во втором типе эксперимента.

Таблица 20: Сравнение результатов измерений и прогнозирования

t , (сек)	$u_F, ^\circ C$	$u(\ell, t), ^\circ C$	$u(0, t), ^\circ C$	$u_\delta(0, t), ^\circ C$	$\Delta(t), ^\circ C$
0	400	37	37	–	–
600	400	144	69	73.2819	4.2819
1200	400	153	83	90.6652	7.6652
1800	400	232	185	187.9577	2.9575
2400	–	351	305	306.4769	1.4769
3000	–	330	334	331.4134	2.5866
3600	–	264	311	310.5832 *	–

* – температура, вычисленная при $t = 0.97T$

Результаты лабораторного исследования подтверждают принципиальную возможность прогнозирования температурного состояния объекта по результатам по-

верхностных измерений температуры в условиях, когда начальная температура тела является неизвестной и приводят к следующим выводам.

Необходимым условием устойчивости вычислительной схемы является соблюдение условий согласования величин шага дискретизации h , параметра регуляризации α с интервалом измерения τ , что согласуется с теоретическими результатами, результатами эксперимента лабораторного исследования и вычислительного эксперимента, проведенного на основе имитационного моделирования.

Предложенный метод позволяет прогнозировать температуру с достаточным уровнем точности и служит основой для разработки алгоритма обработки результатов поверхностных измерений, позволяет прогнозировать температуру во внутренних точках при нелинейном теплопереносе в условиях, когда начальная температура тела является неизвестной.

4.6 Основные результаты и выводы

В разделе рассмотрены задачи нелинейного переноса, связанные с прогнозированием температур во внутренних точках объекта, подвергаемом внешнему тепловому воздействию. Прогнозирование осуществляется по результатам поверхностных температурных измерений, содержащих отклонения от действительных значений, в условиях отсутствия информации о начальном тепловом состоянии объекта, когда изменения теплофизических свойств материала определялись в зависимости от температуры.

В работе предложены аналитические соотношения, характеризующие явную зависимость теплофизических характеристик от температуры в текущей точке. Соотношения имеют вид полиномов первой степени. В работе также предложен подход к построению метода численного решения задач нелинейного теплопереноса в сечении цилиндра, служащему основой для алгоритма прогнозирования температуры во внутренних точках при неизвестных начальных условиях. Основная идея метода заключается в том, что в коэффициентные соотношения включают стабилизирующий функционал, а искомая температурная функция определяют относительно пространственной переменной.

Вычислительная схема метода основана на конечно-разностных уравнениях, является комбинированной, включает основную и краевую явные схемы, а при вычислении значений коэффициентов в текущей точке используют соотношения со стабилизирующим функционалом. Основная схема предназначена для вычисления температурных значений во внутренних точках объекта в текущий момент времени за исключением финального значения времени T . Комбинирование в одном алгоритме основной и краевых схем позволило найти решение проблемы неизвестных начальных условий.

В работе исследована устойчивость основной вычислительной схемы. Доказана локальная устойчивость и найдены соотношения величин шагов дискретизации, параметра регуляризации с уровнем погрешности исходных данных обеспечивающих устойчивой схемы относительно накапливаемой вычислительной погрешности и погрешности исходных данных. Получены оценки погрешности численных решений рассматриваемых задач нелинейного теплопереноса.

С целью проверки принципиальной возможности построения численного метода решения задач нелинейного теплопереноса с неизвестными начальными условиями, экспериментального исследования устойчивости и точности предложенного метода были проведены вычислительные эксперименты на основе имитационного моделирования и эксперименты на лабораторном и промышленном оборудовании.

В экспериментах выявлена структура области Ω_ε , в которой прогнозируемые температурные значения являются наиболее точными. Получены экспериментальные оценки погрешности результатов прогнозирования температур в Ω_ε . Результаты экспериментов представлены в работе.

Полученные результаты приводят к следующим выводам:

1. Для задач нелинейного теплопереноса выявлена принципиальная возможность построения вычислительной схемы определения температур во внутренних точках объекта с неизвестным начальным тепловым состоянием по косвенным исходным данным, сформированным из результатов температурных измерений вблизи границы объекта.

2. Введение в математическую модель аналитических соотношений, характеризующих явную зависимость теплофизических свойств материала от температуры, позволяет сформировать явную вычислительную схему, что значительно упрощает реализацию вычислительной процедуры, а также позволяет получить теоретические оценки возможных температурных отклонений.

3. Построение комбинированных вычислительных схем относительно пространственной переменной для задач нелинейного теплопереноса осуществлено впервые и позволило найти решение проблемы неизвестных начальных условий, являющаяся принципиальным препятствием в разработке численных методов решения задач с неизвестными начальными условиями.

4. Вычислительная схема предложенного метода являются локально устойчивыми, а для обеспечения устойчивости численных результатов относительно погрешности исходных данных необходимо согласовывать шаг дискретизации по пространству и параметр регуляризации с шагом дискретизации по времени и допустимым уровнем погрешности исходных данных.

5. Оценки уклонений вычисленных температур от действительных значений, полученные в вычислительных экспериментах, согласуются с теоретическими результатами и свидетельствуют о достаточной точности предложенного метода в соответствующей подобласти.

6. Результаты лабораторного и промышленного экспериментов согласуются с теоретическими результатами и подтверждают достаточную точность прогнозирования температуру во внутренних точках объекта при неполных исходных данных при условии согласования шагов дискретизации.

7. Предлагаемые вычислительные схемы служат основой для разработки методов обработки информации о результатах поверхностных температурных измерений, предназначенных для прогнозирования температуры во внутренних точках цилиндра при нелинейном теплопереносе в условиях неполных и динамически изменяющихся исходных данных, служащих основой для обработкой информации, предназначенных для прогнозирования результатов теплового воздействия на температурное поле объекта.

Научная новизна результатов исследования, представленных в данном разделе, заключается в разработке подхода к решению задач измерения, связанных с нелинейным теплопереносом, происходящем в объекте с неизвестным начальным тепловым состоянием в ситуации, когда основные теплофизические характеристики материала зависят от температуры; в разработке вычислительных алгоритмов, устойчивых относительно погрешности исходных данных, служащих основой для обработкой информации, предназначенных для прогнозирования результатов теплового воздействия на температурное поле объекта и позволяющих определять температуру во внутренних точках с удовлетворительной точностью в условиях неполной исходной информации о состоянии объекта.

Практическая значимость полученных результатов состоит в разработке алгоритмов прогнозирования влияния выбранного управляющего режима теплового воздействия на значения температур во внутренних точках объекта в условиях неполных и динамически изменяющихся исходных данных, сформированных из результатов косвенных измерений, выполненных на границе объекта при неизвестном начальном тепловом состоянии объекта. Полученные результаты служат основой для разработки методов обработки информации о результатах косвенных измерений, предназначенных для прогнозирования теплового состояния объекта и используемых при выборе параметров внешнего управляющего режима теплового воздействия.

Глава 5. Метод определения температур на основе первичной измерительной информации

В данном разделе рассмотрена проблема обработки информации о первичных измерениях, когда по результатам измерений электрических сопротивлений необходимо определить температуру тела в точке измерения. В разделе предложена математическая модель зависимости температуры от сопротивления, метод идентификации параметров математической модели и алгоритмы обработки информации о первичных измерениях, основанный на результатах решения задачи параметрической идентификации и служащие основой для определения температуры. Получены теоретические оценки погрешностей метода идентификации коэффициентов математической модели, предложен методы определения температурных значений по результатам измерения сопротивлений как на этапе калибровки, так и в условиях эксплуатации, а также предложены алгоритмы оценки точности определения температур по результатам измерений, полученных посредством преобразователя, содержащего никелевый и платиновый термометры сопротивления.

5.1 Эталонная модель и математическое описание принципа работы термопреобразователя

Исходными данными в методах прогнозирования температуры во внутренних точках объекта и метода идентификации внутреннего теплового источника, представленных в данном исследовании, являются граничные условия, формируемые из результатов измерений температуры вблизи поверхности тела. Температурные показания, служащие основой для граничных условий, формируют, в свою очередь, из результатов первичных измерений. Одним из широко используемых средств измерения являются преобразователи температуры, содержащие термометры сопротивления.

Действие современных термометров сопротивления основано на зависимости электрического сопротивления материалов от температуры. Эта зависимость достаточно хорошо изучена и широко применяется на практике. Математическое

представление этой зависимости для преобразователя, содержащего никелевый и платиновый термометры, приведено в [22] и, согласно [47], имеет вид

$$\begin{cases} R_{Ni} = R_{01} \cdot (1 + a_1T + a_2T^2), & -60^{\circ}C \leq T < 100^{\circ}C, \\ R_{Ni} = R_0 \cdot (1 + a_1T + a_2T^2 + a_3(T - 100)T^2), & T \geq 100^{\circ}C, \\ R_{Pt} = R_{02} \cdot (1 + b_1T + b_2T^2 + b_3(T - 100)T^3), & -200^{\circ}C \leq T < 0^{\circ}C, \\ R_{Pt} = R_{02} \cdot (1 + b_1T + b_2T^2), & 0^{\circ}C \leq T \leq 850^{\circ}C. \end{cases} \quad (5.1)$$

где R_{01} , $\{a_m\}_1^3$ - коэффициенты никелевого сопротивления, R_{02} , $\{b_n\}_1^3$ - коэффициенты платинового сопротивления

В преобразователях температуры непосредственно измеряемой величиной является сопротивление и температурные значения, служащие основой для формирования граничных условий, вычисляются из результатов измерений сопротивлений. Существующие методики определения температур по результатам измерения сопротивлений разработаны отдельно для каждого типа сенсора. При применении этих методик необходимо учитывать тип материала, из которого изготовлен сенсор, температурный диапазон измерений, номинальное сопротивление и уже в зависимости от перечисленных параметров выбирать методику вычисления температуры [47], [95], и [212]. При обработке результатов измерений, полученных с помощью существующих методик, неизбежно возникает проблема оценки точности и качества результатов измерения температуры.

Таким образом, существует необходимость в построении универсального с точки зрения используемых материалов и легко реализуемого на практике метода, позволяющего определять значения температуры по результатам измерения сопротивлений и проводить качественную оценку результатов измерений.

5.1.1 Математическая модель зависимости температуры от сопротивлений

Предпосылки обобщенной математической модели зависимости температуры от сопротивлений, предлагаемая в данном исследовании, формулируется следующим образом.

При проведении первичных измерений происходит непосредственное измерение величин сопротивлений R_1 и R_2 преобразователем температуры, содержащим два

термометров сопротивления. В рассматриваемом преобразователе чувствительные элементы термометров изготовлены из никеля и платины. Значениям, измеренным посредством никелевого термометра соответствуют обозначения R_1 или R_{Ni} , а измеренным с помощью платинового термометра R_2 или R_{Pt} . Принципиальная схема преобразователя, содержащая никелевый и платиновый термометры предложена в [22] и приведена на рис. 105.

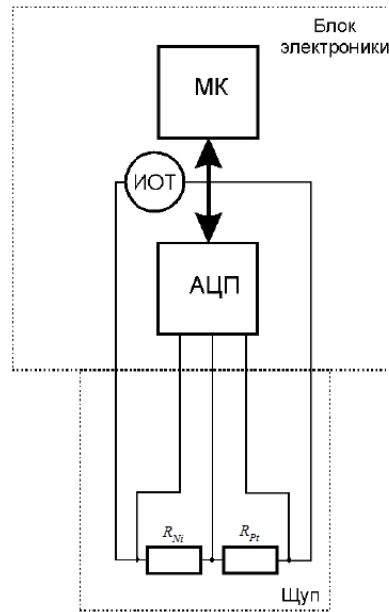


Рис. 105: Структурная схема преобразователя температуры. МК—микроконтроллер, ИОТ—источник опорного тока, АЦП — аналогово-цифровой преобразователь, R_{Ni} , R_{Pt} — никелевое и платиновое термочувствительные сопротивления, помещенные в щуп

На этапе калибровки регистрируется K измерений сопротивлений от каждого сенсора. Измерения сопротивлений осуществляется независимо каждым сенсором. Измерения проводятся в присутствии контрольного средства измерения

Для истинных значений температуры введем обозначения T_k , $k = \overline{1, K}$ и сопоставим T_k вектор $\mathring{T} = (\mathring{T}_1, \mathring{T}_2, \dots, \mathring{T}_K)$. Результаты измерения сопротивлений, полученные с помощью первого термометра на этапе калибровки, обозначим R_{1k} , с помощью второго — R_{2k} . Полагаем, что величины R_{1k} и R_{2k} , полученные из результатов измерений на этапе калибровки, известны точно.

Для значений температуры, полученных от контрольного средства измерения, введем обозначение $T_{\delta k}$, $k = \overline{1, K}$ и сопоставим им вектор $T_{\delta} = (T_{\delta 1}, T_{\delta 2}, \dots, T_{\delta K})$.

Основываясь на том, что действительные значения $\overset{\circ}{T}_k$, не могут быть определены из результатов измерений, а вместо них известны температуры $T_{\delta k}$, полученные от контрольного средства измерения и допустимый уровень точности контрольных измерений, не превосходящий величины δ , введем в математическую модель условие $\|T_{\delta} - \overset{\circ}{T}\| \leq \delta$.

Математическая модель зависимости температуры от результатов измерения сопротивлений, предлагаемая в данном исследовании включает уравнения, характеризующие зависимость температуры от сопротивлений:

$$\begin{cases} A_m R_{1k}^m + A_{m-1} R_{1k}^{m-1} + \dots + A_1 R_{1k} + A_0 = T_{\delta k}, \\ B_n R_{2k}^n + B_{n-1} R_{2k}^{n-1} + \dots + B_1 R_{2k} + B_0 = T_{\delta k}. \end{cases} \quad (5.2)$$

где правая часть удовлетворяет условию $\|T_{\delta} - \overset{\circ}{T}\| \leq \delta$. Коэффициенты A_i и B_j и степени m и n называют параметрами системы (5.2).

До начала калибровки значения коэффициентов A_i и B_j и степеней m и n являются неопределенными и на первом этапе калибровки необходимо найти значения этих параметров при условии $\|T_{\delta} - \overset{\circ}{T}\| \leq \delta$. Задачу определения степеней и коэффициентов системы (5.2) называют задачей параметрической идентификации.

Отметим, что предложенная математическая модель допускает обобщение и для преобразователей, содержащих более двух термометров сопротивления, которые могут быть изготовлены как из различных, так и из одинаковых металлов и не зависит от температурного диапазона, в котором проводят измерения. Математическая модель, метод параметрической идентификации и подход к оценке измерений опубликован в работе [236]

5.1.2 Постановка задачи идентификации коэффициентов и вычисления температур на этапе калибровки

Введем следующие обозначения. Сопоставим величинам сопротивлений, измеряемых каждым сенсором калибруемого прибора, матрицы \tilde{P}_1 и \tilde{P}_2 такие, что:

$$\tilde{P}_1 = \begin{pmatrix} R_{11}^m & R_{11}^{m-1} & \dots & R_{11} & 1 \\ R_{12}^m & R_{12}^{m-1} & \dots & R_{12} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R_{1K}^m & R_{1K}^{m-1} & \dots & R_{1K} & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{P}_2 = \begin{pmatrix} R_{21}^n & R_{21}^{n-1} & \dots & R_{21} & 1 \\ R_{22}^n & R_{22}^{n-1} & \dots & R_{22} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R_{2K}^n & R_{2K}^{n-1} & \dots & R_{2K} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Искомым коэффициентам A_i и B_j сопоставим векторы $\tilde{A} = (A_m, A_{m-1}, \dots, A_0)$ и $\tilde{B} = (B_n, B_{n-1}, \dots, B_0)$. Тогда матричное представление системы (5.2) имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{P}_1 \tilde{A} = T_\delta, \\ \tilde{P}_2 \tilde{B} = T_\delta, \end{cases} \quad (5.4)$$

где $\|T_\delta - \dot{T}\| \leq \delta$. В этой задаче коэффициенты A_i и B_j и степени m и n рассматриваются как неизвестные параметры системы, подлежащие идентификации. Отметим, что решение задачи параметрической идентификации включает процедуру верификации найденных значений степеней M, N и коэффициентов $A_\delta = (A_M, A_{M-1}, \dots, A_0)$ и $B_\delta = (B_N, B_{N-1}, \dots, B_0)$, с целью верификации результатов и получения оценки температурных отклонений введены функции $\Delta, \Delta_{Ni}, \Delta_{Pt}$. Каждая компонента Δ_k функции $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_K)$ определяется формулой

$$\Delta_k = (A_m R_{1k}^m + \dots + A_1 R_{1k} + A_0) - (B_n R_{2k}^n + \dots + B_1 R_{2k} + B_0), \quad (5.5)$$

Функции $\Delta_{Ni} = (\Delta_{Ni_1}, \Delta_{Ni_2}, \dots, \Delta_{Ni_K})$ и $\Delta_{Pt} = (\Delta_{Pt_1}, \Delta_{Pt_2}, \dots, \Delta_{Pt_K})$ определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta_{Ni_k} &= (A_m R_{1k}^m + \dots + A_1 R_{1k} + A_0) - T_{\delta k}, \\ \Delta_{Pt_k} &= (B_n R_{2k}^n + \dots + B_1 R_{2k} + B_0) - T_{\delta k}. \end{aligned}$$

Величины Δ_k характеризуют согласованность результатов вычисления температур из измерений, полученных от термометра и используется при формировании оценки качества измерений. Компоненты Δ_{Ni_k} и Δ_{Pt_k} характеризуют отклонения вычисленных температур T_{Ni_k} и T_{Pt_k} от контрольных значений $T_{\delta k}$.

Таким образом, задача параметрической идентификации и вычисления температур на этапе калибровки включает задачу идентификации степеней m и n ,

задачу определения значений A_i и B_j из системы

$$\begin{cases} \tilde{P}_1 \tilde{A} = T_\delta, \\ \tilde{P}_2 \tilde{B} = T_\delta, \end{cases}$$

при условии, что

$$\begin{cases} \|T_\delta - \tilde{T}\| \leq \delta, \\ \|\tilde{P}_1 \tilde{A} - \tilde{P}_2 \tilde{B}\| \leq \delta, \\ \|\tilde{P}_1 \tilde{A} - T_\delta\| \leq \delta, \\ \|\tilde{P}_2 \tilde{B} - T_\delta\| \leq \delta, \end{cases}$$

Далее, используя найденные параметры M, N, A_δ, B_δ , необходимо определить температуры $T_{Ni} = (T_{Ni_1}, T_{Ni_2}, \dots, T_{Ni_K})$ и $T_{Pt} = (T_{Pt_1}, T_{Pt_2}, \dots, T_{Pt_K})$ для каждого сенсора из результатов измерений сопротивлений.

Затем, используя функцию (5.5), проводят сравнительный анализ полученных температурных значений T_{Ni} и T_{Pt} со значениями T_δ , оценивая величину температурных отклонений найденных значений T_{Ni} и T_{Pt} от T_δ . В завершении, основываясь на полученных результатах, формируют значения измеренной температуры $\tilde{T} = (\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_K)$ и оценивают отклонение \tilde{T} от T_δ .

По завершении этапа калибровки температурные значения $\tilde{T} = (\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_K)$ принимаются в качестве опорных значений температуры преобразователя при проведении эксплуатационных измерений. Найденные температурные значения $T_{Ni} = P_1 A_\delta$ и $T_{Pt} = P_2 B_\delta$ определяют на этапе эксплуатации опорные значения температуры для соответствующего сенсора.

5.1.3 Специфика расчета температур на этапе эксплуатации

Важным обстоятельством, которое необходимо учитывать при расчете температур в процессе эксплуатации, является то, что при измерении сопротивлений неизбежно возникают различного рода погрешности. Если их появление обусловлено только системными факторами и не связаны с влиянием нетемпературных составляющих, таких как механическое повреждение или влияние изношенности прибора и тому подобное, то считаем, что матрицы измерений P_1 и P_2 , получаемые на этапе эксплуатации, известны точно. В противном случае, предполагаем, что

матрицы , составленные из результатов измерений сопротивлений на этапе эксплуатации известны с некоторой погрешностью h_1 и h_2 и имеют вид $P_{1h} = P_1 + h$ и $P_{2h} = P_2 + h$.

Для вычисления температур T_{Ni}^u и T_{Pt}^u , получаемых от по результатам измерений соответствующим сенсором, на этапе эксплуатации, используют коэффициенты (A_δ, B_δ) и степени полиномов, полученные на этапе калибровки в результате решения задачи параметрической идентификации системы (5.2). Затем, применяя предлагаемые функции оценки температурных погрешностей $\Delta, \Delta_{Ni}, \Delta_{Pt}$, находят величину отклонений температур T_{Ni}^u и T_{Pt}^u от значений T_{Ni} и T_{Pt} , сформированных на этапе калибровки, и проводят анализ полученных оценок. Далее оценивают точность и качество измерений и проводят оценку состояния средства измерения.

5.2 Метод решения задачи параметрической идентификации

Процедура параметрической идентификации степеней и коэффициентов системы (5.4) выполняется независимо для каждого сенсора на этапе калибровки и состоит из нескольких этапов.

На первом этапе осуществляется идентификация степеней системы (5.4). С этой целью предлагается использовать следующую процедуру. На начальном шаге полагаем $m = n = K + 1$. Далее находим ранги матриц \tilde{P}_1 и \tilde{P}_2 , выделив линейно-независимые столбцы с помощью методов линейной алгебры. В данном исследовании с этой целью был применен метод Жордана–Гаусса с выбором главного элемента по столбцам, начиная с последнего. Наибольшие номера M, N линейно-независимых столбцов определяют старшие степени полиномов m, n в системе (5.4). Затем преобразуем систему (5.4), исключив линейно-зависимые столбцы из матриц \tilde{P}_1 и \tilde{P}_2 и соответствующие компоненты из векторов \tilde{A} и \tilde{B} . Обозначим полученные матрицы P_1 и P_2 , а преобразованные вектора как A и B .

Прикладной смысл этой процедуры состоит в том, что ее выполнение позволяет избежать ситуации недостаточности и избыточности измерений. Если ранги матриц $r(\tilde{A})$ и $r(\tilde{B})$ равны или больше количества измерений K , то в этой си-

туации невозможно однозначно определить степени полиномов, так как в этом случае невозможно гарантировать, что при увеличении количества измерений K старшие степени полиномов не изменяться. Таким образом, значения $r(\tilde{A}) \geq K$ и (или) $r(\tilde{B}) \geq K$ свидетельствуют о недостаточности измерений. Для устранения этой неопределенности необходимо будет провести дополнительные измерения. Отметим, что при проведении данного исследования проблема недостаточности измерений не возникала. Если ранги матриц $r(\tilde{A})$ и $r(\tilde{B})$ меньше количества измерений K , то измерения, соответствующие линейно-зависимым столбцам матричного представления (5.4) системы (5.2), не оказывает существенного влияния на значение T_k и могут быть исключены из рассмотрения.

После исключения линейно-зависимых столбцов из \overline{P}_1 и \overline{P}_2 и соответствующих компонент из векторов \tilde{A} и \tilde{B} , система (5.4) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} P_1 A = T_\delta, \\ P_2 B = T_\delta, \end{cases} \quad (5.6)$$

с условием $\|P_1 A - \overset{\circ}{T}\| \leq \delta$ и $\|P_2 B - \overset{\circ}{T}\| \leq \delta$ и $\|T_\delta - \overset{\circ}{T}\| \leq \delta$. Далее из этой системы с помощью специально разработанного метода необходимо найти приближенные решения A_δ, B_δ уравнения (5.6) и оценить величину уклонений A_δ, B_δ от точных значений $\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}$.

В силу того, что преобразованная система (5.4) является переопределенной, числа обусловленности матриц P_1 и P_2 значительно превосходят единицу, а правая часть (5.4) задана с погрешностью, задача идентификации коэффициентов системы (5.4) относится к классу некорректных задач и для ее решения необходимо использовать регуляризирующие подходы, позволяющие получать приближенные решения, устойчивые относительно погрешности исходных данных.

Суть метода идентификации коэффициентов заключается в следующем. Исходную задачу сводят к вариационной

$$\begin{cases} \inf_{A \in R} \{\|P_1 A - T_\delta\|^2 + \alpha_1 \|A\|^2 : A \in R\}, & \alpha > 0. \\ \inf_{B \in R} \{\|P_2 B - T_\delta\|^2 + \alpha_2 \|B\|^2 : B \in R\}, & \alpha > 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Решение $A_\delta = (A_M, A_{M-1}, \dots, A_0)$, $B_\delta = (B_N, B_{N-1}, \dots, B_0)$ задачи (5.7) находят, используя необходимое условие экстремума функционала, определяющего норму в пространстве L_2 . Параметры α_1 и α_2 выбираются из принципа невязки, базирующегося на использовании функций $\|P_1 A_\delta - T_\delta\|$ и $\|P_2 B_\delta - T_\delta\|$, характеризующих отклонение рассчитанных температур от значений T_δ .

Полученные коэффициенты и степени подставляются в систему (5.6), находят температуры T_{Ni} и T_{Pt} , а затем оценивают отклонение T_{Ni} и T_{Pt} от значений T_δ .

5.2.1 Теоретические основы и алгоритм метода идентификации коэффициентов

Для теоретического обоснования метода решения задачи определения коэффициентов перейдем от матричного представления, требующего повторять разработку метода отдельно для каждого сенсора, к операторному представлению. При таком подходе задачи идентификации объединяются в одну, разрабатывается единый метод идентификации, для которого получают обобщенную оценку погрешности. Затем полученные результаты используют при практической реализации метода относительно каждого сенсора.

Переход осуществим, основываясь на следующих предположениях. В силу того, что в общем случае необходимо разработать метод идентификации коэффициентов для произвольного числа измерений K в зависимости от требуемого уровня точности калибровки δ , полагаем, что истинным значением коэффициентов $\mathring{A}, \mathring{B}$ соответствует элемент \mathring{x} сепарабельного гильбертового пространства H .

Искомым коэффициентам A, B соответствует элемент x , $x \in H$. Истинным значениям температуры \mathring{T} соответствует элемент $\mathring{f} \in H$, эталонным значениям температуры T_δ соответствует элемент $f_\delta \in H$. Матрицы P_1 и P_2 , составленные из результатов измерений сопротивлений каждым термометром на этапе калибровки, являются конечномерными аналогами непрерывных, линейных, ограниченных, инъективных операторов Q_1, Q_2 таких, что и при переходе от Q_1, Q_2 к P_1, P_2 уровень температурной погрешности остается в допустимых пределах. Используя введенные понятия, перейдем к непосредственному изложению теоретических основ метода идентификации коэффициентов.

§ 5.2.1.1 Основные определения и обобщенная постановка задачи идентификации коэффициентов

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, $Q : H \rightarrow H$ – линейный, ограниченный, инъективный оператор, Q^* – сопряженный к Q . Множества значений $R(Q)$ и $R(Q^*)$ операторов Q и Q^* всюду плотны в H , а спектр $Sp(Q^*Q) = [0, \|Q\|^2]$.

Оператор Q ассоциируется с измеряемыми в процессе калибровки сопротивлениями R_{1k} и R_{2k} , представленными операторами Q_1 и Q_2 . Температурам \mathring{T} и T_δ соответствуют элементы $f \in H$ и $f_\delta \in H$, а искомыми коэффициентами A и B в системе (5.4) поставим в соответствие элемент x . Точным значениям коэффициентов сопоставим элемент \mathring{x} . Система (5.6) представлена следующим обобщенным операторным уравнением:

$$Qx = f, \quad x, f \in H, \quad (5.8)$$

которого требуется определить элемент x .

Основываясь на предпосылках задачи параметрической идентификации, полагаем, что точное решение $\mathring{x} \in M_r$, где множество M_r порождено линейным непрерывным оператором C , обладающего следующими свойствами. Множества значений $R(C)$ и $R(C^*)$ операторов C и C^* всюду плотны в H и $(C^*C)^{\frac{1}{2}} = G\left((Q^*Q)^{\frac{1}{2}}\right)$, где функция $G(\sigma)$, $\sigma \in Sp\left((Q^*Q)^{\frac{1}{2}}\right)$ строго возрастает и $\lim_{\sigma \rightarrow 0} G(\sigma) = 0$. Полагаем, что множество $M_r = C\overline{S_r}$, где $\overline{S_r} = \{y : y \in H, \|y\| \leq r\}$.

Ситуацию, когда вместо действительных значений \mathring{T} используют измеренные значения T_δ , полученные от контрольного средства измерения, представим следующим образом. Известно, что при некотором \mathring{f} , ассоциированном с действительными значениями \mathring{T} , существует точное решение $\mathring{x} \in M_r$ уравнения (5.8), но вместо \mathring{f} известны приближения $f_\delta \in H$ и $\delta > 0$, ассоциированные с измеренными значениями T_δ такие, что $\|f_\delta - \mathring{f}\| \leq \delta$. Требуется по исходным M_r , f_δ и δ построить приближенное решение x_δ^α уравнения (5.8) и оценить его отклонение от точного решения \mathring{x} .

Задача (5.8), согласно подходу представленному в [62], относится к классу условно-корректных задач и для построения методов обработки информации, ба-

зирующихся на решении (5.8) и устойчивого относительно погрешности исходных данных, необходимо использовать регуляризирующие подходы.

Построение регуляризующего алгоритма и оценка точности получаемых приближенных решений осуществляется в соответствии со следующими понятиями, используемыми в теории некорректных задач.

Определение 1. Пусть $\hat{C}[H, H]$ – множество всех непрерывных операторов J , отображающих пространство H в H . Семейство $\{J_\delta^\alpha : \delta \in (0, \delta_0], J_\delta^\alpha \in \hat{C}[H, H]\}$, называют регуляризующим семейством на M_r , если $\forall \delta \in (0, \delta_0]$ имеет место равномерная сходимость $J_\delta^\alpha f_\delta \rightarrow \dot{x}$ при $\delta \rightarrow 0$ на множестве M_r при условии, что $\|f_\delta - Q\dot{x}\| \leq \delta$.

Для оценки уклонения приближенного решения x_δ^α , ассоциированного с коэффициентами системы (5.6) от истинных значений \dot{x} на множестве M_r используем функцию модуля непрерывности обратного оператора в нуле, введенного в работе [63] и определяемого формулой:

$$\omega(\tau, r) = \sup \left\{ \|x\| : x \in M_r, \|Qx\| \leq \tau \right\}, \quad (5.9)$$

и функцию $\Delta(J_\delta^\alpha)$, заданную следующим образом:

$$\Delta(J_\delta^\alpha) = \sup_{x, f_\delta} \left\{ \|x - J_\delta^\alpha f_\delta\| : x \in M_r, \|f_\delta - Qx\| \leq \delta \right\}. \quad (5.10)$$

Физический смысл $\Delta(J_\delta^\alpha)$ заключается в том, что эта функция определяет наибольшую вычислительную погрешность коэффициентов A_δ, B_δ . Другими словами, $\Delta(J_\delta^\alpha)$ характеризует наибольшее уклонение (наибольшую невязку) вычисляемых коэффициентов A_δ, B_δ , представленных элементом $J_\delta^\alpha f_\delta$ от точных значений $\dot{A}_\delta, \dot{B}_\delta$, представленных элементом \dot{x} .

Определение 2. Регуляризующий метод $\{J_\delta^{opt} : 0 < \delta \leq \delta_0\}$ называют оптимальным на множестве M_r , если для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ выполнено:

$$\Delta(J_\delta^{opt}) = \Delta_\delta^{opt} = \inf \left\{ \Delta(J_\delta^\alpha) : J : \alpha_\delta \in \hat{C}[H, H] \right\}. \quad (5.11)$$

Отметим, что проверка на оптимальность является достаточно сложной процедурой. В то же время, для решения широкого круга прикладных задач, в том

числе и рассматриваемой в данном исследовании, достаточно построить решения, оценка погрешности которых имеет тот же порядок малости, что и оценка оптимального решения. Метод, позволяющий получать такие решения называют оптимальными по порядку и для проверки метода на оптимальность используют следующий критерий, обоснованный в работе [62]:

Критерий оптимальности по порядку. Если существует число k , не зависящее от δ и r такое, что для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ выполнено:

$$\frac{1}{2}k\omega(\delta, r) \leq \Delta(J_\delta^\alpha) \leq k\omega(\delta, r),$$

то метод $\{J_\delta^\alpha : \delta \in (0, \delta_0] \ J_\delta^\alpha \in \hat{C}[H, H]\}$ оптимален по порядку на множестве M_r .

В данной работе предложен регуляризирующий метод идентификации коэффициентов системы и доказана его оптимальность по порядку.

§ 5.2.1.2 Алгоритм метода идентификации коэффициентов

Для построения регуляризованного решения уравнения (5.8) используем функционал Тихонова. В этом случае исходная задача (5.8) сводится к решению вариационной:

$$\inf_{x \in H} \{ \|Qx - f_\delta\|^2 + \alpha \|x\|^2 : x \in H \}, \quad \alpha > 0. \quad (5.12)$$

Величина $\|Qx - f_\delta\|$ называется невязкой и характеризует отклонение вычисляемых температур Qx от контрольных значений f_δ . Для получения приближенного решения, устойчивого относительно погрешности исходных данных, вводится дополнительный стабилизирующий функционал $\alpha \|x\|^2$ и, затем, минимизируя (5.12), находят приближенное решение x_δ^α , соответствующее коэффициентам A_δ и B_δ .

Из работы [118] следует, что для любого $f_\delta \in H$ существует единственное решение x_δ^α задачи (5.8). Это решение получают из операторного уравнения, представляющего необходимое условие минимума функционала (5.12) и имеющего следующий вид:

$$Q^*Qx + \alpha x = Q^*f_\delta, \quad \alpha > 0,$$

где α – некоторый параметр регуляризации. Решая это уравнение относительно элемента x , получаем, что регуляризующий оператор J_δ^α , порождающий регуляризующее семейство, определяется формулой

$$J_\delta^\alpha = (Q^*Q + \alpha E)^{-1}Q^*. \quad (5.13)$$

Регуляризованное решение x_δ^α уравнения (5.8) при приближенно заданной правой части имеет вид:

$$x_\delta^\alpha = J_\delta^\alpha f_\delta, \quad \alpha > 0. \quad (5.14)$$

Отметим, что при различных подходах к выбору параметра α получают решения, величины погрешностей которых могут быть как оптимальными по порядку, так и не являться таковыми. В данной работе выбор параметра регуляризации α осуществляли из принципа невязки, используя $\Delta_0(\alpha)$, определяемую формулой:

$$\Delta_0(\alpha) = \sup_{x \in M_r} \|x - J_\delta^\alpha Qx\|, \quad (5.15)$$

В качестве параметра регуляризации $\bar{\alpha} = \alpha(\delta)$ выбирают решение уравнения:

$$\Delta_0(\alpha) = \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (5.16)$$

В данном исследовании показано, что уравнение (5.16) имеет единственное решение и, следовательно, при практическом выборе параметра регуляризации достаточно использовать простейшие методы выбора, например, метод перебора или метод дихотомии.

Основные преимущества предлагаемого метода идентификации коэффициентов с выбором параметра регуляризации из уравнения (5.16, учитывающем только уровень точности δ заключаются в следующем.

- Предлагаемый метод идентификации коэффициентов для точно заданного оператора Q , ассоциированного с точными измерениями сопротивлений R_{Ni} и R_{Pt} , является оптимальным по порядку, когда нижняя и верхняя оценка погрешности расчета коэффициентов системы (5.6) гарантированно имеют одинаковый порядок. Таким образом, на этапе калибровки и в ситуации точных измерений сопротивлений на этапе эксплуатации температура определяется с гарантированной точностью.

• При возникновении на этапе эксплуатации дополнительных погрешностей h_1 и h_2 в измерениях сопротивлений, результаты расчета температур T_{Ni}^u и T_{Pt}^u гарантированно выявят отклонения рассчитанных значений T_{Ni}^u и T_{Pt}^u от опорных значений T_{Ni} и T_{Pt} и величина температурных отклонений отразит характер погрешностей h_1 и h_2 , появившейся в измерениях. Это преимущество обосновывается тем, что при использовании коэффициентов A_δ и B_δ и оператора с погрешностью P_h для расчета температур T_{Ni}^u и T_{Pt}^u , свойство оптимальности по порядку утрачивается.

Таким образом, использование на этапе эксплуатации коэффициентов A_δ, B_δ , найденных при калибровке, служит основой для формирования подхода, позволяющего качественно оценить отклонение температурных показаний преобразователя T_δ^u от значений \tilde{T} .

§ 5.2.1.3 Обоснование алгоритма метода идентификации коэффициентов

Теоретическое обоснование того, что предложенный алгоритм (5.13)–(5.16) порождает регуляризующее семейство операторов, гарантирующее устойчивость вычислительной схемы относительно погрешности исходных данных, включает несколько этапов. Первый этап связан с обоснованием непрерывности оператора J_δ^α , где параметр α является единственным решением уравнения (5.16). Далее обосновывается равномерная сходимость $J_\delta^\alpha f_\delta \rightarrow \dot{x}$ при $\delta \rightarrow 0$ на множестве M_r при условии, что $\|f_\delta - Q\dot{x}\| \leq \delta$.

Теоретическое обоснование регуляризующих свойств и оптимальности по порядку метода идентификации коэффициентов опубликовано автором в [236].

Обоснуем единственность решения уравнения (5.16). С этой целью сначала вычислим $\|J_\delta^\alpha\|$. Так как множества значений $R(C)$ и $R(C^*)$ всюду плотны в H , то из [117], [132], следует существование полярного разложения оператора

$$C = U (C^*C)^{1/2}, \quad (5.17)$$

где U – унитарный оператор. Подставляя в $\|J_\delta^\alpha\|$ представление (5.17), получаем

$$\|J_\delta^\alpha\|^2 = \sup_{\|w_0\| \leq r} \int_0^{\|Q\|} \left[\frac{\sigma}{\alpha + \sigma^2} \right]^2 G^2(\sigma) d(E_\sigma w_0, w_0),$$

где $w_0 = U^{-1}v_0$, а $\{E_\sigma : \sigma \in [0, \|Q\|]\}$ – разложение единицы E , порожденное $(Q^*Q)^{1/2}$. Из спектральной теоремы для самосопряженного нормального оператора [132] с.348-356 получаем, что имеет место следующее представление:

$$\|J_\delta^\alpha\|^2 = \sup_{\sigma \in [0, \|Q\|]} \left(\frac{\sigma}{\alpha + \sigma^2} \right)^2.$$

Функция $y(\sigma) = \frac{\sigma}{\alpha + \sigma^2}$ является непрерывной, дифференцируемой по $\sigma \in [0, \|Q\|]$ и $y(\sigma)$ достигает максимума или при $\sigma = \sqrt{\alpha}$ и $\alpha \leq \|Q\|^2$, или при $\sigma = \|Q\|$ и $\alpha = \|Q\|^2$ тогда

$$\|J_\delta^\alpha\| = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (5.18)$$

Покажем далее, что функция $\Delta_0(\alpha)$, определенная формулой (5.16), является непрерывной, ограниченной и строго возрастающей при $\alpha \in (0, \infty)$.

Так как множества $R(C)$ и $R(C^*)$ всюду плотны в H , Подставляя в $\Delta_0^2(\alpha)$ представление (5.17), получаем

$$\Delta_0^2(\alpha) = \max_{\|w_0\| \leq r} \int_0^{\|Q\|} \left[\frac{\alpha}{\alpha + \sigma^2} \right]^2 G^2(\sigma) d(E_\sigma w_0, w_0), \quad (5.19)$$

где $w_0 = U^{-1}v_0$, а $\{E_\sigma : \sigma \in [0, \|Q\|]\}$ – разложение E , порожденное $(Q^*Q)^{1/2}$.

Из (5.19) и результата, сформулированного в [132] получаем:

$$\Delta_0(\alpha) = r \max_{\sigma \in [0, \|Q\|]} \frac{\alpha}{\alpha + \sigma^2} G(\sigma). \quad (5.20)$$

Докажем непрерывность функции $\Delta_0(\alpha)$ при любом $\alpha > 0$. С этой целью для произвольного $\alpha > 0$ выберем $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 > 0$ такие, что $\beta_1 < \alpha < \beta_2$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(\sigma, \alpha) = \frac{r\alpha}{\alpha + \sigma^2} G(\sigma).$$

Эта функция непрерывна на $[0, \|Q\|] \times [\beta_1, \beta_2]$ и, в силу теоремы Кантора, она является равномерно непрерывной. Тогда, основываясь на свойствах функции $\Phi(\sigma, \alpha)$

получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\varsigma \in (0, \beta_2 - \beta_1)$ такое, что для любых значений α_1, α_2 , удовлетворяющих условию $|\alpha_1 - \alpha_2| < \varsigma$, имеет место неравенство $|\Delta_0(\alpha_1) - \Delta_0(\alpha_2)| < \varepsilon$. Получаем, что функция $\Delta_0(\alpha)$ равномерна непрерывна при $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и, следовательно, в силу произвольности α , непрерывна при $\alpha \in (0, \infty)$.

Покажем, что функция $\Delta_0(\alpha)$ является ограниченной. Докажем сначала, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta_0(\alpha) = 0 \quad (5.21)$$

Доказательство проведем от противного. С этой целью полагаем, что $\alpha_n \rightarrow 0$, но существует число $d > 0$ и подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\} \rightarrow 0$ такие, что для любого k выполнено:

$$\Delta_0(\alpha_{n_k}) \geq d. \quad (5.22)$$

Тогда, в силу непрерывности $\Phi(\sigma, \alpha_{n_k})$ на $[0, \|Q\|]$, найдется $\hat{\sigma}_k > 0$ при котором функция достигает максимума по σ . Заметим, что в случае, когда $\hat{\sigma} = 0$, выполнено $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta_0(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r\alpha}{\alpha} G(0) = rG(0) = 0$.

Если $\hat{\sigma} > 0$, то в силу свойств функции $G(\sigma)$ имеет место оценка:

$$r \frac{\alpha_{n_k}}{\alpha_{n_k} + \hat{\sigma}_k^2} G(\hat{\sigma}_k) \leq r \frac{\alpha_{n_k}}{\hat{\sigma}_k^2} G(\|Q\|).$$

Отсюда, из (5.20), а также из свойств непрерывной функции следует $\Delta_0(\alpha_{n_k}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, что противоречит (5.22).

Ограниченность $\Delta_0(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow \infty$ следует из (5.20), возрастания функции $G(\sigma)$ и соотношения

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Delta_0(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{r\alpha}{\alpha + \hat{\sigma}} G(\hat{\sigma}) = rG(\hat{\sigma}) \leq rG(\|Q\|). \quad (5.23)$$

Докажем возрастание функции $\Delta_0(\alpha)$. Полагаем $\alpha_1 > \alpha_2$. Так как $\Phi(\sigma, \alpha)$ непрерывна на $[0, \|Q\|]$, то существуют $\sigma_1, \sigma_2 \in [0, \|Q\|]$ такие, что

$$\Delta_0(\alpha_1) = r \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \sigma_1^2} G(\sigma_1), \quad \Delta_0(\alpha_2) = r \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \sigma_2^2} G(\sigma_2).$$

Для $\sigma_1 \neq \sigma_2$ из (5.20) следует, что $\Delta_0(\alpha_1) \geq r \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \sigma_2^2} G(\sigma_2)$. Тогда

$$\Delta_0(\alpha_1) - \Delta_0(\alpha_2) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \sigma_1^2} G(\sigma_1) - \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \sigma_2^2} G(\sigma_2) > \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \sigma_2^2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \sigma_2^2} \right) G(\sigma_2) > 0.$$

отсюда следует возрастание $\Delta_0(\alpha)$. При $\sigma_1 = \sigma_2$ возрастание $\Delta_0(\alpha)$ очевидно.

Таким образом, доказано, что функция $\Delta_0(\alpha)$ является непрерывной, ограниченной и строго возрастающей при $\alpha \in [0, \infty)$.

Полученные теоретические результаты служат основой для обоснования единственности решения $\bar{\alpha} = \alpha(\delta)$ уравнения (5.16), проводимого следующим образом. Отметим, что функция $\Delta_0(\alpha)$, заданная формулой (5.15) является непрерывной и строго возрастающей. Из соотношений (5.21) и (5.23) следует, что $\Delta_0(0) = 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ и $\Delta_0(\alpha) \rightarrow rG(\|Q\|)$ при $\alpha \rightarrow \infty$. С другой стороны, из (5.18) следует непрерывность и строгое убывание функции $\|J_\alpha\| \cdot \delta$ при $\alpha \rightarrow \infty$ и при фиксированном δ имеет место

$$\begin{aligned} \|J_\alpha\| \cdot \delta &\rightarrow \infty, \quad \text{при } \alpha \rightarrow +0 \\ \|J_\alpha\| \cdot \delta &\rightarrow 0, \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая (5.15), получаем, что при любом уровне погрешности исходных данных $\delta > 0$ уравнение (5.16) имеет единственное решение $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$.

Из доказанных свойств функции $\Delta_0(\alpha)$ и соотношения (5.18) следует, что $\bar{\alpha}(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. и имеет место равномерная сходимост J_δ^α . Из равномерной сходимости операторов J_δ^α следует, что семейство операторов $\{J_\delta^{\bar{\alpha}} : \delta \in (0, \delta_0], J_\delta^{\bar{\alpha}} \in \hat{C}[H, M_r]\}$ является методом приближенного решения уравнения (5.8) на множестве M_r в смысле определения 1.

5.2.2 Оценка погрешности определения коэффициентов. Оптимальность по порядку метода идентификации коэффициентов.

В разделе представлено теоретическое обоснование оптимальности по порядку приближенных решений задачи идентификации коэффициентов оператоного уравнения (5.8). Показано, что в случае точных измерений сопротивлений коэффициенты идентифицируются с гарантированной точностью.

§ 5.2.2.1 Теоретическая оценка погрешности метода идентификации коэффициентов

Для оценки погрешности метода идентификации коэффициентов используем величину $\Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}})$, определяемую формулой (5.10):

$$\Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}}) = \sup_{x, f_\delta} \left\{ \|x - J_\delta^{\bar{\alpha}} f_\delta\| : x \in M_r, \|f_\delta - Qx\| \leq \delta \right\}$$

Величина $\Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}})$ характеризует погрешность регуляризованного решения $x_\delta^{\bar{\alpha}}$, полученного с помощью $J_\delta^{\bar{\alpha}}$ при выборе параметра регуляризации из уравнения (5.16). С прикладной точки зрения $\Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}})$ характеризует наибольшее уклонение вычисляемых коэффициентов A_δ, B_δ от точных значений $\mathring{A}, \mathring{B}$. Верхняя и нижняя оценки для $\Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}})$ характеризуют наибольшее и наименьшее возможные уклонение найденных коэффициентов A_δ, B_δ от $\mathring{A}, \mathring{B}$.

Оценку коэффициентной погрешности $\Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}})$ осуществим в несколько этапов. Сначала сравним $\Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}})$, определенную в (5.10), и $\Delta_0(\bar{\alpha})$, заданную (5.15) и характеризующую наибольшее уклонение произвольно выбранных коэффициентов. Из (5.10), (5.18) и того, что $x \in M_r$ получаем следующую оценку сверху:

$$\|x - J_\delta^{\bar{\alpha}} f_\delta\| \leq \|x - J_\delta^{\bar{\alpha}} Qx\| + \|J_\delta^{\bar{\alpha}} Qx - J_\delta^{\bar{\alpha}} f_\delta\| \leq \Delta_0(\bar{\alpha}) + \|J_\delta^{\bar{\alpha}}\| \delta \leq 2\Delta_0(\bar{\alpha})$$

Оценка снизу для $\Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}})$ следует из свойств супремума функции, когда для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $\Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}}) > \Delta_0(\bar{\alpha}) - \varepsilon$ при всех $x \in M_r$. Таким образом, для $\Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}})$ справедливо

$$\Delta_0(\bar{\alpha}) < \Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}}) < 2\Delta_0(\bar{\alpha}) \quad (5.24)$$

Покажем, что при построении приближенного решения $x_\delta^{\bar{\alpha}}$ с помощью оператора $J_\delta^{\bar{\alpha}}$, определенного в (5.13) с параметром $\bar{\alpha}$, выбранным из (5.16) для $\Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}})$ заданной (5.10) при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ имеет место одна из следующих оценок.

- При $p \in (0, 2)$ имеет место оценка:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{p}{2-p} \right]^{p/2(p+1)} r^{1/p+1} \delta^{p/p+1} \leq \Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}}) \leq \left[\frac{p}{2-p} \right]^{p/2(p+1)} r^{1/p+1} \delta^{p/p+1}, \quad (5.25)$$

- Если $p = 2$, то найдется $\mathfrak{S} \in (0.5; 1)$ такое, что для $\Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}})$ справедливо:

$$\mathfrak{S} \cdot r^{1/3} \delta^{2/3} \leq \Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}}) \leq 2^{1/3} \cdot r^{1/3} \delta^{2/3}. \quad (5.26)$$

• Если $p > 2$, то при достаточно малых значениях δ будет выполнено:

$$\frac{1}{2} \|Q\|^{\frac{p-2}{3}} \cdot r^{1/3} \delta^{2/3} \leq \Delta(J_{\delta}^{\bar{\alpha}}) \leq \|Q\|^{\frac{p-2}{3}} \cdot r^{1/3} \delta^{2/3}.$$

Оценку величины $\Delta(J_{\delta}^{\bar{\alpha}})$ проведем опираясь на соотношение (5.24). Для этого оценим величину $\Delta_0(\alpha)$ в зависимости от уровня погрешности исходных данных. Из соотношения (5.19) следует:

$$\Delta_0(\alpha) = r \max_{\sigma \in [0, \|Q\|]} \frac{\alpha}{\alpha + \sigma^2} G(\sigma) = \max_{\sigma \in [0, \|Q\|]} \frac{\alpha}{\alpha + \sigma^2} \sigma^p.$$

Введем функцию

$$y(\sigma) = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha} + \sigma^2} \sigma^p. \quad (5.27)$$

Функция $y(\sigma)$ неотрицательна, непрерывна и дифференцируема по σ , тогда, используя достаточные условия экстремума, получаем, что наибольшее значение $y(\sigma)$ достигает либо при $\tilde{\sigma} = 0$, но тогда $y(\sigma) = 0$, либо в точке $\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{p\bar{\alpha}}{2-p}}$, при $p < 2$. В последнем случае имеем

$$\Delta_0(\bar{\alpha}) = r \max_{\sigma \in [0, \|Q\|]} y(\sigma) = \frac{r}{2} \left[\frac{p}{2-p} \right]^{p/2} \bar{\alpha}^{p/2}. \quad (5.28)$$

Из условия (5.16), используемого для выбора параметра $\bar{\alpha}$, единственности $\bar{\alpha}$, соотношений (5.18), (5.24) получаем

$$\frac{1}{2} \left[\frac{p}{2-p} \right]^{p/2(p+1)} r^{1/p+1} \delta^{p/p+1} \leq \Delta(J_{\delta}^{\bar{\alpha}}) \leq \left[\frac{p}{2-p} \right]^{p/2(p+1)} r^{1/p+1} \delta^{p/p+1}.$$

Оценим $\Delta(J_{\delta}^{\bar{\alpha}})$ при $p = 2$. Функция $y(\sigma)$ определяемая (5.27), является неубывающей по σ и тогда $\Delta_0(\bar{\alpha})$ имеет вид:

$$\Delta_0(\bar{\alpha}) = \frac{r\bar{\alpha}\|A\|^2}{\|A\|^2 + \bar{\alpha}}.$$

Отсюда и из (5.16) следует, что $\bar{\alpha}(\delta) \geq (\delta/2r)^{2/3}$ при достаточно малых δ . Тогда найдется $\mathfrak{F} \in (0.5; 1)$ такое, что

$$\mathfrak{F} \cdot r^{1/3} \delta^{2/3} \leq \Delta(J_{\delta}^{\bar{\alpha}}) \leq 2^{1/3} \cdot r^{1/3} \delta^{2/3},$$

Оценим $\Delta(J_{\delta}^{\bar{\alpha}})$ при $p > 2$. В этом случае функция $\Delta_0(\alpha)$ имеет вид

$$\Delta_0(\alpha) = \frac{r\|A\|^p \alpha}{\|A\|^2 + \alpha}.$$

Используя (5.16), получаем, что величина $\Delta_0(\bar{\alpha})$ может быть найдена из следующего уравнения:

$$\Delta_0(\bar{\alpha})^3 + \frac{\delta^2}{4\|Q\|^2}\Delta_0(\bar{\alpha}) - \frac{\delta^2}{4}\|Q\|^{p-2} = 0.$$

Так как параметр регуляризации $\bar{\alpha}$ удовлетворяет (5.16), то для решения этого уравнения имеет место следующая оценка при достаточно малых значениях δ :

$$\frac{1}{2}\|Q\|^{\frac{p-2}{3}} \cdot r^{1/3}\delta^{2/3} \leq \Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}}) \leq \|Q\|^{\frac{p-2}{3}} \cdot r^{1/3}\delta^{2/3}.$$

Таким образом, установлено, что нижняя и верхняя оценка погрешности коэффициентов $\Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}})$ являются величинами одного порядка, и значение $\Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}})$ имеет тот же порядок, что и исходный уровень точности калибровки прибора δ .

Отметим, что из результатов, представленных в работе [145] следует, что для функции $\omega(\delta, r)$ на множестве M_r , порожденном функцией $G(\sigma) = \sigma^p$ при $p > 0$ выполнено

$$\omega(\delta, r) = r^{1/p+1}\delta^{p/p+1}.$$

Тогда при $p \in (0, 2]$ имеет место оценка

$$\frac{1}{2} \left[\frac{p}{2-p} \right]^{p/2(p+1)} \omega(\delta, r) \leq \Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}}) \leq \left[\frac{p}{2-p} \right]^{p/2(p+1)} \omega(\delta, r) \quad (5.29)$$

Учитывая этот результат и оценки (5.25), (5.26) получаем, что, согласно критерию оптимальности по порядку, предложенный метод регуляризации (5.14) с выбором параметра регуляризации согласно (5.16) является оптимальным по порядку при $p \in (0, 2]$.

Таким образом, при использовании предлагаемого метода регуляризации гарантируется наилучший порядок точности определения коэффициентов и использование другого метода не приведет к существенному повышению точности.

§ 5.2.2.2 Интерпретация теоретических результатов для определения температур на этапах калибровки и эксплуатации.

Множество M_r в рассматриваемой задаче идентификации коэффициентов порождается функцией $G(\sigma) = \sigma$, где σ – собственные значения оператора Q ,

представленного матрицами P_1 или P_2 . Из (5.25) следует, что для величины погрешности $\Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}})$ коэффициентов A_δ , B_δ , найденных на этапе калибровки имеет место оценка:

$$\frac{\sqrt{r\delta}}{2} \leq \Delta(J_\delta^{\bar{\alpha}}) \leq \sqrt{r\delta}$$

из которой следует, что искомые коэффициенты A_δ и B_δ вычисляются с гарантированной точностью и величина отклонений этих коэффициентов от точных значений \mathring{A} , \mathring{B} зависит только от точности контрольного средства измерения, используемого при калибровке.

Найденные коэффициенты A_δ и B_δ и систему (5.6) используют для вычисления температур T_{Ni} и T_{Pt} на этапе калибровки:

$$\begin{cases} T_{Ni} = P_1 A_\delta, \\ T_{Pt} = P_2 B_\delta. \end{cases} \quad (5.30)$$

На этапе эксплуатации температуры T_{Ni}^u и T_{Pt}^u вычисляются согласно формулам:

$$\begin{cases} T_{Ni}^u = P_{1h} A_\delta = (P_1 + h_1) A_\delta, \\ T_{Pt}^u = P_{2h} B_\delta = (P_2 + h_2) B_\delta, \end{cases} \quad (5.31)$$

где матрицы P_{1h} и P_{2h} составлены из результатов измерения сопротивлений, полученных от каждого сенсора на этапе эксплуатации. Матрицы P_{1h} и P_{2h} формируются согласно принципу, представленному в (5.3).

В ситуации, когда на этапе эксплуатации измерения сопротивлений выполнены точно, получаем, что $h_1, h_2 \rightarrow 0$ и, следовательно, уклонение эксплуатационных значений T_{Ni}^u и T_{Pt}^u от опорных значений T_{Ni} и T_{Pt} гарантированно не превосходит заданного уровня калибровки δ . Таким образом, результаты расчета температур T_{Ni}^u и T_{Pt}^u гарантированно находятся в пределах класса допуска.

При возникновении на этапе эксплуатации значительных погрешностей h_1 и h_2 в измерениях сопротивлений, результаты расчета температур гарантированно выявят появление уклонений эксплуатационных значений T_{Ni}^u и T_{Pt}^u от значений T_{Ni} и T_{Pt} , найденных на этапе калибровки, а также отразят характер отклонений h_1 и h_2 , появившихся в измерениях.

Это свойство подхода к вычислению температур из результатов измерения сопротивлений, предлагаемого в данном исследовании, служит основой для разработки метода обработки результатов первичных измерений, позволяющих проводить оценку качества и точности измерений на этапе эксплуатации.

Отметим, что на этапе калибровки и эксплуатации предлагается использовать единую численную процедуру определения температур из измерений сопротивлений. Тем не менее, интерпретация, оценка результатов расчета и оценка точности измерений, осуществляемых на этапах калибровки и эксплуатации содержат принципиальные различия.

5.3 Метод обработки результатов измерений для определения температур на этапе калибровки

Метод обработки результатов измерений на этапе калибровки включает процедуру идентификации степеней и коэффициентов, процедуру вычисления температур, процедуру оценки точности результатов определения температур. Исходными данными являются результаты измерений сопротивлений R_{Ni_k} , R_{Pt_k} , полученные от каждого сенсора, результаты измерения температуры T_δ , полученные от контрольного средства измерения. После получения результатов измерений на первом этапе метода обработки данных решают задачу параметрической идентификации параметров системы (5.4), Далее определяют температуры T_{Ni} , T_{Pt} , используя найденные степени и коэффициенты, а затем осуществляют оценку точности и корректировку полученных результатов определения температур. Алгоритм метода представлен на рис.106

Вычислительная схема метода обработки результатов измерений включает этап идентификации параметров, этап вычисления температур и этап верификации. Входные данные формируются из результатов измерений сопротивлений R_{Ni_k} , R_{Pt_k} , полученным от каждого сенсора проверяемого средства измерения и измерений температур T_δ , полученных от эталонного средства измерения. Выходными данными являются значения сопротивлений $R_{\delta Ni}$, $R_{\delta Pt}$, температуры T_{Ni} , T_{Pt} и \tilde{T} , используемые на этапе эксплуатации в качестве опорных значений,

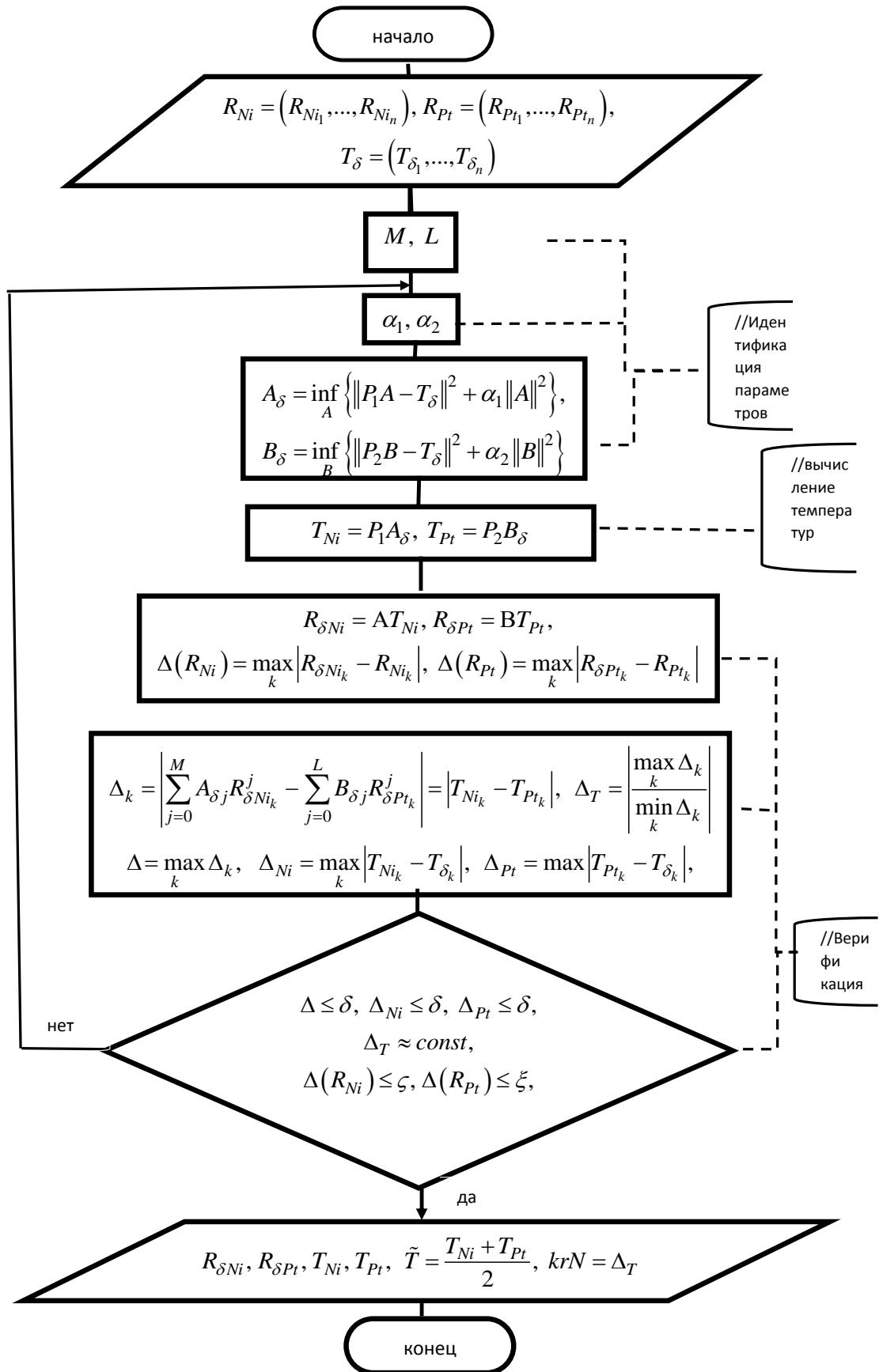


Рис. 106: Алгоритм вычислительной схемы метода обработки измерений сопротивлений на этапе калибровки.

а также величина krN , используемая для оценки точности и качества измерений на этапе эксплуатации.

Основой алгоритма определения температур служит математическая модель зависимости температуры от сопротивления, представленная системой (5.2), имеющая следующий вид:

$$\begin{cases} A_m R_{Ni_k}^m + A_{m-1} R_{Ni_k}^{m-1} + \dots + A_1 R_{Ni_k} + A_0 = T_k, \\ B_n R_{Pt_k}^n + B_{n-1} R_{Pt_k}^{n-1} + \dots + B_1 R_{Pt_k} + B_0 = T_k. \end{cases}$$

где R_{Ni_k} , R_{Pt_k} —результаты измерений сопротивлений первым и вторым сенсорами. Эквивалентная матричная форма системы (5.2), сформированной из результатов измерений сопротивлений на первом этапе вычислительной схемы, имеет вид:

$$\begin{cases} \overline{P}_1 \tilde{A} = T_\delta, \\ \overline{P}_2 \tilde{B} = T_\delta, \end{cases}$$

где \overline{P}_1 , \overline{P}_2 —матрицы, составленные из результатов измерений сопротивлений R_{Ni_k} , R_{Pt_k} согласно формул (5.3), матрицы \tilde{A} , \tilde{B} соответствуют искомым коэффициентам, а T_δ составлена из результатов измерений температур эталонным средством измерения.

Вычислительная схема предлагаемого метода обработки результатов измерений включает следующие этапы:

Этап 1. Идентификация параметров математической модели. На этом этапе сначала определяют степени полиномов M , N . Далее преобразуют систему с помощью методов линейной алгебры (5.4), исключая линейно-зависимые столбцы из матриц \overline{P}_1 , \overline{P}_2 , а также соответствующие компоненты векторов \tilde{A} , \tilde{B} . После исключения линейно-зависимых столбцов получают систему (5.6), имеющую вид

$$\begin{cases} P_1 A = T_\delta, \\ P_2 B = T_\delta, \end{cases} \quad (5.32)$$

Далее осуществляют процедуру идентификации коэффициентов системы (5.32) с помощью предложенного метода регуляризации. С этой целью переходят от (5.32)

к вариационной задаче:

$$\begin{cases} \inf_{A \in R} \{ \|P_1 A - T_\delta\|^2 + \alpha_1 \|A\|^2 : A \in R \}, & \alpha > 0. \\ \inf_{B \in R} \{ \|P_2 B - T_\delta\|^2 + \alpha_2 \|B\|^2 : B \in R \}, & \alpha > 0. \end{cases} \quad (5.33)$$

где параметры регуляризации α_1 и α_2 выбираются в соответствии с (5.16). В разделе 5.2.3 показано, что уравнение (5.16) имеет единственное решение, поэтому при практическом выборе параметра регуляризации достаточно использовать простейшие методы выбора.

Далее, основываясь на соотношениях (5.13) – (5.16), получают приближенное решение A_δ и B_δ системы (5.6), соответствующие искомым коэффициентам.

Этап 2. Формирование температурных значений T_{Ni} и T_{Pt} . Для вычисления T_{Ni} и T_{Pt} подставляют A_δ и B_δ в систему (5.6), получают

$$\begin{cases} T_{Ni} = P_1 A_\delta, \\ T_{Pt} = P_2 B_\delta, \end{cases}$$

Вычисление температур проводят по всему температурному диапазону. В данном исследовании вычисления проводились в диапазоне $[-50^{\circ}C, 250^{\circ}C]$.

Этап 3. Верификация результатов. Целью этой процедуры является проверка точности определения температур. Первым шагом процедуры верификации является численное моделирование функций сопротивлений $R_{\delta Ni}$ и $R_{\delta Pt}$ в соответствии с методикой, представленной в [47]. Для этого подставляют температурные значения T_{Ni_k} и T_{Pt_k} , $k = \overline{1, K}$ в систему (5.1), имеющую вид:

$$\begin{cases} R_{\delta Ni_k} = R_{01} \cdot (1 + a_1 T_{Ni_k} + a_2 T_{Ni_k}^2), & -60^{\circ}C \leq T_{Ni_k} < 100^{\circ}C, \\ R_{\delta Ni_k} = R_0 \cdot (1 + a_1 T_{Ni_k} + a_2 T_{Ni_k}^2 + a_3 (T_{Ni_k} - 100) T_{Ni_k}^2), & T_{Ni_k} \geq 100^{\circ}C, \\ R_{\delta Pt_k} = R_{02} \cdot (1 + b_1 T_{Pt_k} + b_2 T_{Pt_k}^2 + b_3 (T_{Pt_k} - 100) T_{Pt_k}^3), & -200^{\circ}C \leq T_{Pt_k} < 0^{\circ}C, \\ R_{\delta Pt_k} = R_{02} \cdot (1 + b_1 T_{Pt_k} + b_2 T_{Pt_k}^2), & 0^{\circ}C \leq T_{Pt_k} \leq 850^{\circ}C. \end{cases}$$

где R_{01} , $\{a_m\}_1^3$ - коэффициенты никелевого сопротивления, R_{02} , $\{b_n\}_1^3$ - коэффициенты платинового сопротивления, определенные в [47]. Получают значения сопротивлений $R_{\delta Ni} = (R_{\delta Ni_1}, R_{\delta Ni_2}, \dots, R_{\delta Ni_K})$ и $R_{\delta Pt} = (R_{\delta Pt_1}, R_{\delta Pt_2}, \dots, R_{\delta Pt_K})$.

Далее оценивают уклонение найденных $R_{\delta Ni}$ и $R_{\delta Pt}$ от исходных данных R_{Ni} и R_{Pt} . Для оценки используем величины, определяемые формулами:

$$\Delta(R_{Ni}) = \|R_{\delta Ni} - R_{Ni}\|, \quad \Delta(R_{Pt}) = \|R_{\delta Pt} - R_{Pt}\|. \quad (5.34)$$

Отметим что нормы, стоящих в правых частях (5.34), согласуются с принятой в практике методикой вычисления погрешностей сопротивлений согласно [48].

На втором шаге верификации осуществляют проверку согласованности результатов, находя оценку уклонений T_{Ni} и T_{Pt} от значений T_δ , а также оценивая величину уклонений $R_{\delta Ni}$ и $R_{\delta Pt}$ от значений R_{Ni} и R_{Pt} . Для получения оценки температурных уклонений и проверки согласованности результатов используют функцию Δ_k , которая, согласно (5.5) имеет следующий вид:

$$\Delta_k = T_{Ni_k} - T_{Pt_k} = \sum_{j=0}^M \left(A_{\delta j} R_{\delta Ni_k}^j \right) - \sum_{j=0}^L \left(B_{\delta j} R_{\delta Pt_k}^j \right) \quad (5.35)$$

а также величины Δ и Δ_T , определяемые следующим образом:

$$\Delta = \max_k \left| \Delta_k \right|, \quad \Delta_T = \left| \frac{\max_k \Delta_k}{\min_k \Delta_k} \right|. \quad (5.36)$$

Величина Δ характеризует наибольший уровень рассогласованности результатов вычисления температур, а Δ_T характеризует устойчивость вычислительной процедуры определения температур и служат основой для оценки точности и качества измерений.

Вычисление Δ_k , Δ , Δ_T и $\Delta(R_{Ni})$, $\Delta(R_{Pt})$ проводят по всему температурному диапазону. Далее проверяют условия:

1. величины $\Delta(R_{Ni})$, $\Delta(R_{Pt})$ находятся в допустимых пределах, регламентированных в [48];
2. $\Delta \leq \delta$ и $\|T_{Ni} - T_\delta\| \leq \delta$, $\|T_{Pt} - T_\delta\| \leq \delta$;
3. $\Delta_T = C(\delta) = const$.

При одновременном выполнении условий (1)–(3) верификация считается успешной и принимается решение о том, что набор коэффициентов A_δ , B_δ удовлетворяют требованиям, предъявляемым к решению задачи идентификации при заданных пользователем исходных данных.

Величина Δ_T , полученная на этапе калибровки определяет значение качественной характеристики krN (key ratio is normal), вводимой в рамках предлагаемой методики для оценки устойчивости и согласованности определения температур на этапе эксплуатации. Значение krN является опорным значением критической составляющей погрешности и на этапе эксплуатации используется для оценки устойчивости, точности измерений и оценки качества измерений.

При положительных результатах верификации полученные значения (A_δ, B_δ) принимают в качестве опорных коэффициентов системы (5.4), значения сопротивлений R_{Ni} и R_{Pt} принимают в качестве опорных значений для сопротивлений, температурные значения, найденные из системы (5.4) при подстановке в нее коэффициентов (A_δ, B_δ) , определяют опорные значения температур T_{Ni}, T_{Pt} , а в качестве опорных значений прибора \tilde{T}_δ , используемых для оценки точности и качества измерений на этапе эксплуатации, принимают значения

$$\tilde{T}_\delta = \frac{T_{Ni} + T_{Pt}}{2}$$

Эффективность метода параметрической идентификации и вычислительной схемы определения температур, а также точность предлагаемого метода обработки измерений оценивалась посредством проведения экспериментов, связанных с исследованием точности метода определения температур в стационарных и переходных режимах относительно времени и температурного диапазона. В ходе экспериментов проводился сравнительный анализ вычисленных температур, результатов измерения температуры контрольным средством измерения и тестовых значений, имитирующих действительные температурные значения. Результаты экспериментальных исследований представлены в работе.

5.4 Метод обработки результатов измерений для определения температур на этапе эксплуатации

Предлагаемый метод обработки результатов первичных измерений на этапе эксплуатации включает процедуру вычисления температур, процедуру оценки точности результатов и качества измерений.

Исходными данными являются результат k -го измерения сопротивлений каждым сенсором $\overline{R_{Ni_k}}$ и $\overline{R_{Pt_k}}$. После получения результатов измерений на первом этапе метода обработки определяют температуры $T_{Ni_k}^u, T_{Pt_k}^u$, используя предлагаемую вычислительную схему и формируют температурные показания прибора и $\overline{T_k}$. Далее осуществляют оценку точности и качества измерений.

5.4.1 Вычислительная схема метода обработки результатов измерений

Схема включает этапы вычисления температур, определения опорных температурных значений, формирование функций оценки точности и качества измерений. Входные данные формируются из результатов измерений сопротивлений, полученных от эксплуатируемого средства измерения. Выходными данными являются температурные значения $T_{Ni_k}^u, T_{Pt_k}^u$ и $\overline{T_k}$, найденные на этапе эксплуатации по результатам измерений, а также величина krU и функция качества измерений, представленная вектором $(F, eT, eT_{Ni}, eT_{Pt})$. Полученные результаты служат основой для разработки методики оценки точности и качества измерений.

Этап 1 Формирование температурных значений $T_{Ni_k}^u, T_{Pt_k}^u$ и \overline{T} по результатам эксплуатационных измерений сопротивлений $\overline{R_{Ni_k}}$ и $\overline{R_{Pt_k}}$. Для этого используют коэффициенты $A_\delta = (A_M, A_{M-1}, \dots, A_0)$ и $B_\delta = (B_M, B_{M-1}, \dots, B_0)$, найденные на этапе калибровки, и систему (5.2). Получаем:

$$\begin{cases} T_{Ni_k}^u = A_M(\overline{R_{Ni_k}})^M + A_{M-1}(\overline{R_{Ni_k}})^{M-1} + \dots + A_1(\overline{R_{Ni_k}}) + A_0, \\ T_{Pt_k}^u = B_N(\overline{R_{Pt_k}})^N + B_{N-1}(\overline{R_{Pt_k}})^{N-1} + \dots + B_1(\overline{R_{Pt_k}}) + B_0. \end{cases} \quad (5.37)$$

Далее формируют приборные значения \overline{T} согласно формуле

$$\overline{T_k} = \frac{T_{Ni_k}^u + T_{Pt_k}^u}{2}$$

Вычисление температур $T_{Ni_k}^u, T_{Pt_k}^u$ и $\overline{T_k}$ проводят для каждого k -го измерения сопротивлений.

Этап 2. Выбор опорных значений. С этой целью сначала подбирают наиболее близкие к измеренным $\overline{R_{Ni_k}}$ и $\overline{R_{Pt_k}}$ опорные значения сопротивлений $R_{Ni_k}^*, R_{Pt_k}^*$, вычисляя:

$$\min_{j=1, K} |\overline{R_{Ni_k}} - R_{Ni_j}|, \quad \min_{j=1, K} |\overline{R_{Pt_k}} - R_{Pt_j}|$$

где K – количество опорных значений, определяемое на этапе калибровки. Опорные значения, на которых достигается минимум этих функций

$$R_{Ni_k}^* = \arg \min_{j=1,K} |\overline{R_{Ni_k}} - R_{\delta Ni_j}|, \quad R_{Pt_k}^* = \arg \min_{j=1,K} |\overline{R_{Pt_k}} - R_{\delta Pt_j}|,$$

принимают в качестве $R_{Ni_k}^*$ и $R_{Pt_k}^*$. Далее, используя найденные $R_{Ni_k}^*$, $R_{Pt_k}^*$, выбирают соответствующие опорные значения $T_{Ni_k}^*$, $T_{Pt_k}^*$ и \tilde{T}_k .

Этап 3. Формирование функций оценки точности определения температур $T_{Ni_k}^u$, T_{Pt}^u , \overline{T}_k . Данный этап начинается с формирования функций оценки согласованности температурных вычислений $\overline{\Delta}_k$ определяемой формулой:

$$\overline{\Delta}_k = \sum_{i=0}^M A_i (\overline{R_{Ni_k}})^i - \sum_{j=0}^N B_j (\overline{R_{Pt_k}})^j$$

и функций err_{Ni_k} , err_{Pt_k} и erT_k , вычисляемых по формулам:

$$err_{Ni_k} = |T_{Ni_k}^u - T_{Ni_k}|, \quad err_{Pt_k} = |T_{Pt_k}^u - T_{Pt_k}|, \quad erT_k = |\tilde{T}_k - \overline{T}_k| \quad (5.38)$$

Функции err_{Ni_k} , err_{Pt_k} и erT_k характеризуют отклонение измеренных значений от опорных. Также для оценки качества измерений на этапе эксплуатации формируют величину Δ_T , характеризующую уровень устойчивости определения температур, определяемую формулой

$$\overline{\Delta}_T = \left| \frac{\max_{j=1,k} \overline{\Delta}_j}{\min_{j=1,k} \overline{\Delta}_j} \right|.$$

Методика формирования величины $\overline{\Delta}_T$ согласуется с формулой (5.36). Величина $\overline{\Delta}_T$, вычисляемая в процессе эксплуатации определяет параметр krU (Key Ratio is Unique). Отметим, что, используя формулу (5.36) на этапе калибровки, получают величину Δ_T и формируют параметр krN (Key Ratio is Normal).

Этап 4. Оценка точности и качества измерений. В данном исследовании оценку точности и качества измерений проводили в соответствии с подходами, предложенными в [147] и [211]. Алгоритмы оценки точности и качества измерений включают формирование функции $(F, eT, eT_{Ni}, eT_{Pt})$ и дальнейшую оценку точности и качества измерений в зависимости от численных значений krU и $(F, eT, eT_{Ni}, eT_{Pt})$. Основная идея формирования krU и $(F, eT, eT_{Ni}, eT_{Pt})$ заключается в следующем:

- Результаты сравнения отношения krU к krN с 1 определяют значения логической переменной F .

- Результаты сравнения значения erT_k с величиной ε , определяющей границы температурного допуска для средства измерения, определяют значение eT_k .

- Результаты сравнения значений err_{Ni_k} , err_{Pt_k} с величинами ε_{Ni} , ε_{Pt} , характеризующими границы класса допуска температурных погрешностей, принятых для термосопротивления, изготовленного из соответствующего материала [47], определяют значения eT_{Ni} , eT_{Pt} .

Разработанные алгоритмы оценки точности и качества измерений предусматривают численную реализацию идей, представленных в работах Р.Е. Тайманова [147] и М. Henry [211].

5.4.2 Алгоритм оценки точности и качества измерений на основе критических составляющих погрешностей

Согласно подходу, предложенным Р.Е. Тайманова в работе [147], оценка точности и качества измерения основана на выявлении критических составляющих погрешностей. В данном исследовании выявление критических составляющих осуществляли путем оценки согласованности результатов определения температур и оценки отклонений полученных температурных значений от опорных.

В соответствии с принципами, представленными в [147], в данной работе предлагается проводить оценку точности и качества измерения проверяя следующие условия:

- В ситуации, когда достоверность результата измерений подтверждена информацией о том, что погрешность прибора находится в установленных пределах и риск использования недостоверных результатов измерений пренебрежимо мал, измерение оценивается как ПОДТВЕРЖДЕННОЕ [147].

Идентифицировать эту ситуацию предлагается следующим образом. Одновременное выполнение условий: $krU \approx krN$ и $|err_{Ni_k}| < \varepsilon_{Ni}$, $|err_{Pt_k}| < \varepsilon_{Pt}$ и $|erT_k| < \varepsilon$ указывает на данную ситуацию. Значение ε_{Ni} определяет границы допустимых температурных погрешностей для никелевого термосопротивления, ε_{Pt} – для пла-

тинового, ε – допустимые границы класса точности для преобразователя, предусмотренные условиями калибровки.

- В ситуации, когда возможно появление недостоверных результатов измерений, но риск их возникновения достаточно невелик, измерение оценивается как НОРМАЛЬНОЕ [147]. Идентифицировать эту ситуацию предлагается следующим образом. Если выполнено условие $erT_k < \varepsilon$, но либо $krU \neq krN$ и ровно одна из функций err_{Ni_k} , err_{Pt_k} достигла граничных значений, либо $krU \approx krN$ и обе функции err_{Ni_k} , err_{Pt_k} достигли граничных значений, то допустима данная оценка качества измерений.

- В ситуации, когда риск появления недостоверных результатов измерений повышен, но результаты измерений могут быть использованы для ориентирующей оценки состояния оборудования и контроля состояния технологического процесса, измерение оценивается как ОРИЕНТИРУЮЩЕЕ [147]. На возникновение данной ситуации указывают условия $krU \neq krN$ и $erT_k \leq \varepsilon$, но либо обе функции err_{Ni_k} , err_{Pt_k} достигли граничных значений, либо одна достигла граничных значений, а другая вышла за допустимые пределы.

- В ситуации, когда выявлена недостоверность результатов измерений в течение достаточно короткого интервала времени, когда получение информации возможно путем экстраполяции данных из предыдущих измерений точность и качество измерений оценивается как ЭКСТРАПОЛИРОВАННОЕ [147].

В предлагаемом алгоритме на возникновение данной ситуации указывает выполнение одного из следующих наборов условий. Либо $krU \approx krN$, но не менее двух функций из erT_k , err_{Ni_k} , err_{Pt_k} вышли за пределы классов допуска или суммарные погрешности err_{Ni_k} , err_{Pt_k} вывели результирующую погрешность erT_k за допустимые пределы, либо $krU \neq krN$, $|erT_k| < \varepsilon$ и одна из функций err_{Ni_k} , err_{Pt_k} превысила допустимые границы, либо $krU \neq krN$ и обе функции err_{Ni_k} , err_{Pt_k} вышли за пределы классов допуска, но $|erT_k| = \varepsilon$.

- В ситуации, когда выявлена недостоверность результатов измерений и риск использования недостоверных результатов достаточно велик, измерение оценивают как НЕДОСТОВЕРНОЕ [147]. Этой ситуации в предлагаемом алгоритме соот-

ветствуют условия $krU \neq krN$ и $erT_k > \varepsilon$, либо когда имеет место противоречие в результатах измерений.

Представляемый алгоритм оценки точности и качества измерений включает присвоение параметрам $(F, eT, eT_{Ni}, eT_{Pt})$ следующих значений:

- $F = 0$, если $|krU - krN| < 0,2$. При $|krU - krN| \geq 0,2$ параметр $F = 1$.
- $eT = 0$, если $|erT_k| < \varepsilon$. В ситуации, когда $|erT_k| = \varepsilon$ параметр $eT = 1$, а в ситуации, когда величина температурной погрешности erT_k вышла за пределы классов допуска, то есть при выполнении условия $|erT_k| > \varepsilon$ параметр $eT = 2$.
- Аналогично, параметры eT_{Ni} и eT_{Pt} принимают нулевое, единичное значение и значение равное двум в зависимости от принадлежности функций err_{Ni_k} и err_{Pt_k} границам класса допуска для никелевого и платинового термосопротивлений соответственно.

Алгоритм предусматривает разбиение наборов на несколько групп в зависимости от значений $krU, (F, eT, eT_{Ni}, eT_{Pt})$. Группа G_1 соответствует оценке измерения ПОДТВЕРЖДЕННОЕ, G_2 – оценке НОРМАЛЬНОЕ, G_3 – оценке ОРИЕНТИРУЮЩЕЕ, G_4 – ЭКСТРАПОЛИРОВАННОЕ, G_5 – НЕДОСТОВЕРНОЕ.

Полученные наборы значений $krU, (F, eT, eT_{Ni}, eT_{Pt})$ проверяются на принадлежность одной из групп $G_j, j = \overline{1,5}$ и в зависимости от этого точности измерений присваивается соответствующая оценка.

5.4.3 Алгоритм оценки точности и качества измерений и оценки состояния средства измерения на основе неопределенности измерений

Согласно подходу, сформулированному М.Ненгу в [211], оценка точности и качества измерений и оценка состояния средства измерения основана на использовании величины, характеризующей неопределенность измерений. Эту характеристику получают в процессе эксплуатации прибора и согласовывают с существующими ограничениями. Уровень неопределенности измерений характеризует качество выполненных измерений и соответствует определенной оценке состояния средства измерения.

В соответствии с принципами, представленными в [211], предлагается определять оценку точности и качества измерения следующим образом:

- В ситуации, когда измерения не содержат ошибки и требуемая температурная величина (Validated Measurement Value (VMV)) вычисляется по обычному алгоритму, созданному для данного типа приборов из текущих данных, измерение оценивается как CLEAR (CL) (Чистые) [211]. В представляемом алгоритме на эту ситуацию указывает значения параметров $krU \approx krN$ при выполнении условий $err_{Ni_k} < |\varepsilon_{Ni}|$, $err_{Pt_k} < |\varepsilon_{Pt}|$ и $erT_k < \varepsilon$. Значение ε_{Ni} определяет границы допустимых температурных погрешностей для никелевого термосопротивления, ε_{Pt} – для платинового, ε – допустимые границы класса точности преобразователя, определяемые условиями калибровки.

- В ситуации, когда данные очевидно содержат ошибку, но появление ошибки не связано с возникновением серьезных неисправностей системы, а вызвано временными неисправностями и велика вероятность того, что через некоторое время проблема измерения будет решена, измерение оценивается как DUZZELED (DZ)(ослепленные) [211]. В предлагаемом алгоритме оценка DUZZELED присваивается при выполнении одного из следующих условий. Либо когда $krU \approx krN$ и из функций err_{Ni_k} , eT_{Pt_k} и erT_k не более двух могут принять граничные значения, либо при $krU \neq krN$ и из функций err_{Ni_k} , err_{Pt_k} и erT_k не более одной принимают граничные значения.

- В ситуации, когда измерения были частично нарушены из-за неисправности датчика и для расчета температуры (VMV) требуется применение коррекции, измерение оценивается как BLURRED (BR) (размытые) [211]. На эту ситуацию изменения точности вычислений указывают либо условия $krU \approx krU$ и из функций err_{Ni_k} , err_{Pt_k} и erT_k одна достигла граничных значений, а другая вышла за допустимые пределы, либо $krU \neq krN$ и из функций err_{Ni_k} , err_{Pt_k} и erT_k две достигли граничных значений.

- В ситуации, когда измеренные данные содержат ошибку, причиной возникновения которой является серьезная неисправность прибора, но общий уровень неопределенности измерений не вышел за допустимые пределы, и, следовательно,

значения измеренной величины не могут быть получены из текущих измерений с достаточной степенью точности измерение оценивается как BLIND (BL)(слепые) [211].

Основанием для получения оценки BLIND (BL) в предлагаемом алгоритме служит выполнение одного из условий: либо когда из функций err_{Ni_k} , err_{Pt_k} ровно одна вышла за границы, а все остальные находятся в допустимых пределах, либо когда $krU \neq krN$ и $erT_k = \varepsilon$ (исключая ситуацию, когда $erT_k = \varepsilon$ и ровно одна из err_{Ni_k} , err_{Pt_k} достигла граничных значений).

- В ситуации, когда значения измеренной температурной величины были сгенерированы на основании показаний приборов, каждый из которых находится в номинальном состоянии, но внутри измеряемой среды произошли изменения, не повлиявшие на состояние приборов измерение оценивается как SECURE(SC) (гарантированное)[211]. Эта оценка является полезной в критически важных ситуациях, когда пользователь нуждается в подтверждение того, что даже в случае отказа хотя бы одного преобразователя или датчика, чистые данные еще будут доступны. В предлагаемом алгоритме оценка SECURE присваивается при выполнении условий $krU \approx krN$ а $err_{Ni_k} \geq |\varepsilon_1|$, $err_{Pt_k} \geq |\varepsilon_2|$ и $erT_k > \varepsilon$

- В ситуации, когда исходные данные содержат ошибку, причиной возникновения которой является серьезная неисправность прибора и уровень неопределенности измерений вышел за допустимые пределы, а следовательно, значения измеренной величины являются недостоверными измерение оценивается как UNVALIDATED (UV)(недостоверные) [211]. Эта ситуация в алгоритме идентифицируется в случае, когда $krU \neq krN$ и $erT_k > \varepsilon$, либо когда имеет место противоречие в результатах измерений.

В предлагаемом алгоритме параметры $(F, eT, eT_{Ni}, eT_{Pt})$ принимают следующие значения:

- $F = 0$, если $|krU - krN| < 0,2$. При $|krU - krN| \geq 0,2$ параметр $F = 1$.
- Параметр $eT = 0$, если $|erT_k| < \varepsilon$. В ситуации, когда $|erT_k| = \varepsilon$ параметр $eT = 1$, а в ситуации, когда величина температурной погрешности erT_k вышла за пределы классов допуска: при выполнении условия $|erT_k| > \varepsilon$ и параметре $eT = 2$.

- Параметры eT_{Ni} и eT_{Pt} принимают нулевое, единичное значение и значение равное двум в зависимости от принадлежности функций err_{Ni_k} и err_{Pt_k} границам класса допуска для соответствующего термосопротивления.

Алгоритм предусматривает разбиение наборов на несколько групп в зависимости от значений $krU, (F, eT, eT_{Ni}, eT_{Pt})$. Группа G_1 соответствует оценке CLEAR, G_2 –DUZZELED, G_3 –BLURRELED, G_4 –BLIND, G_5 –UNVALIDATED, G_6 –SECURE. Полученные наборы значений $krU, (F, eT, eT_{Ni}, eT_{Pt})$ проверяются на принадлежность одной из групп $G_j, j = \overline{1, 6}$ и в зависимости от результата, качеству измерений присваивается соответствующая оценка.

Отметим, что согласно подходу, предложенному в [211], для диагностики состояния средства измерения вместе с оценкой точности и качества измерения, проводят также оценку состояния средства измерения. Следуя этому подходу, выделим следующие оценки состояния средства измерения:

- В ситуации, когда средство измерения не требует обслуживания, его состояние оценивается как ОК (годный). Условие $krU \approx krN$ в совокупности с требованиями $err_{Ni_k} < |\varepsilon_1|, err_{Pt_k} < |\varepsilon_2|$ и $erT_k < \varepsilon$ позволяют присвоить эту оценку.

- В ситуации, когда средство измерения относительно исправно, но нуждается в обслуживании его состояние оценивается как LOW (низкий). Этой ситуации соответствуют условия $erT_k < \varepsilon$.

- В ситуации, когда средство измерения существенно нуждается в обслуживании его состояние оценивается как HIGH (высокий). Условие $krU \neq krN$ выполнение только одного из условий $err_{Ni_k} < |\varepsilon_1|, err_{Pt_k} < |\varepsilon_2|$ и $erT_k < \varepsilon$ свидетельствуют о допустимости такой оценки.

- Если обнаружено состояние, которое свидетельствует о возможном повреждении датчика, и дальнейшая эксплуатация прибора без проведения обслуживания является нецелесообразной его состояние оценивается как CRITICAL (критический). Условие $krU \neq krN$ выполнение не менее одного из неравенств $err_{Ni_k} \geq |\varepsilon_1|, err_{Pt_k} \geq |\varepsilon_2|, erT_k \geq \varepsilon$ указывают допустимость данной оценки.

Предложенные схемы определения температур, алгоритмов оценки точности и качества измерений были реализованы при обработке экспериментальных данных.

5.5 Результаты экспериментальных исследований

С целью верификации предложенных методов обработки результатов первичных измерений, оценки точности определения температур и проверки пригодности разработанных алгоритмов для оценки качества измерений проводились несколько типов экспериментов.

Первый тип связан с исследованием точности метода определения температур на этапе калибровки относительно времени. Вторым типом включал исследование надежности предложенных методов параметрической идентификации и прогнозирования температур на этапе калибровки в температурном диапазоне. В третьем типе исследовалась принципиальная возможность использования разработанных методов для оценки точности и качества измерений и оценки состояния средства измерения. Результаты экспериментов представлены в данном разделе.

5.5.1 Результаты экспериментального исследования точности метода определения температур на этапе калибровки относительно времени

В данном разделе представлены результаты экспериментального исследования, связанного с оценкой эффективности предложенного метода определения температуры на этапе калибровки относительно времени. Цель эксперимента заключалась в верификации построенной модели зависимости температуры от результатов измерения сопротивлений, предложенных метода идентификации параметров модели и метода определения температурных значений по результатам первичных измерений.

Эксперименты проводились в двух температурных диапазонах $[0^{\circ}\text{C}, 110^{\circ}\text{C}]$ и $[100^{\circ}\text{C}, 250^{\circ}\text{C}]$ на калибраторах температуры КТ-110 и КТ-500 соответственно. В эксперименте регистрировались результаты измерения сопротивлений R_{Ni} и R_{Pt} , получаемые от исследуемых никелевого и платинового сенсоров. Измерения проводились в присутствии контрольного средства измерения с интервалом в 1 сек. В качестве контрольного средства измерения использовался термометр сопротивления ЭТС-100.

При проведении эксперимента чередовались стационарные и переходные режимы. Исследуемые сенсоры и контрольное средство измерения выдерживались в стационарных режимах в течение 10 мин. Температурный диапазон между стационарными режимами составлял 550 – 600 сек.

Результаты первичных измерений, полученных от контрольного термометра сопротивления обрабатывались с помощью преобразователя сигналов "Теркон" в соответствии с методикой, регламентируемой в [47] и служили основой для формирования температурных значений T_δ .

Результаты измерения сопротивлений R_{Ni} и R_{Pt} обрабатывались в соответствии с построенной математической моделью (5.2). Обработка проводилась с помощью предложенного метода определения температуры по результатам первичных измерений, используемого на этапе калибровки. Вычислительная схема метода представлена в разделе 5.3 и включает процедуру идентификации параметров системы (5.2), процедуру верификации результатов обработки и процедуру формирования температурных значений T_{Ni} , T_{Pt} , \tilde{T}_δ .

После обработки результатов первичных измерений проводился сравнительный анализ температурных значений T_{Ni} , T_{Pt} с T_δ . Для сравнения использовали величины Δ_{Ni} , Δ_{Pt} , Δ определяемые формулами:

$$\Delta_{Ni} = T_{Ni} - T_\delta, \quad \Delta_{Pt} = T_{Pt} - T_\delta, \quad \Delta = T_{Ni} - T_{Pt}$$

Результаты экспериментального исследования точности метода определения температур на этапе калибровки относительно времени представлены на рис.107-112.

Рис.107-109 соответствуют результатам эксперимента, полученным при измерениях в диапазоне $[0^{\circ}C, 110^{\circ}C]$. Рис.110-112 иллюстрируют результаты эксперимента, полученные из измерений в диапазоне $[100^{\circ}C, 250^{\circ}C]$.

На всех рисунках используются одинаковые обозначения. Контрольным измерениям соответствует обозначение T_δ , температурам, вычисленным по результатам измерений никелевым термометром, соответствует обозначение T_{Ni} , а температурам, вычисленным по результатам измерений сопротивлений платиновым термометром, соответствует обозначение T_{Pt} .

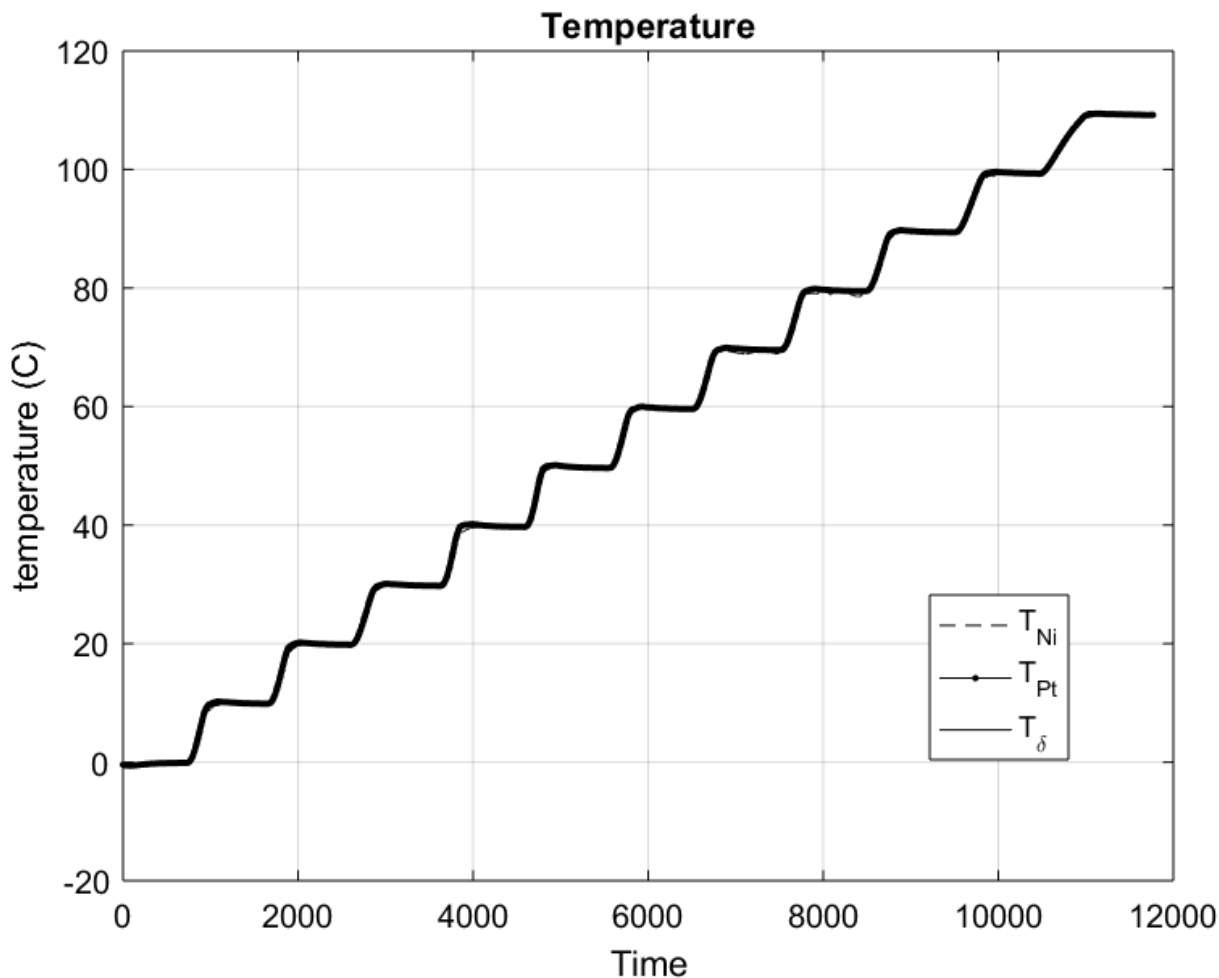


Рис. 107: Графики температурных функций, полученных в диапазоне $[0^{\circ}C, 110^{\circ}C]$.

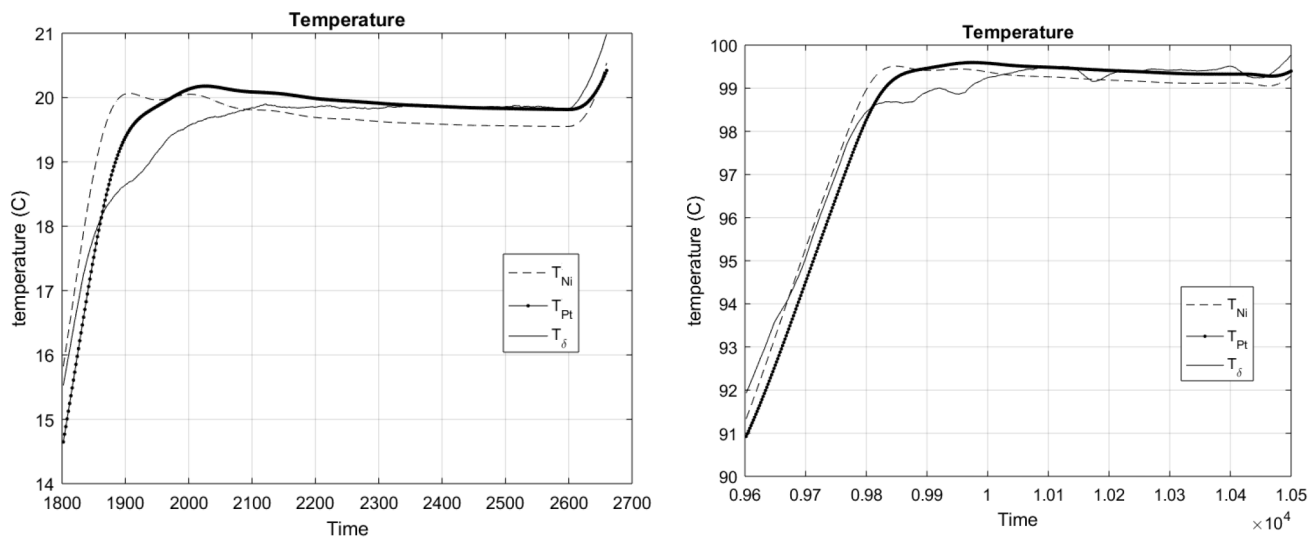


Рис. 108: Фрагменты графиков температурных функций, полученных на основе экспериментальных данных в диапазоне $[0^{\circ}C, 110^{\circ}C]$.

На рис. 109,112 представлены график функции $\Delta = T_{Ni} - T_{Pt}$, характеризующей согласованность результатов вычисления температур, а также графики температурных погрешностей $\Delta_{Ni} = T_{Ni} - T_{\delta}$ и $\Delta_{Pt} = T_{Pt} - T_{\delta}$, характеризующие отклонение вычисленных температур от тестовых значений.

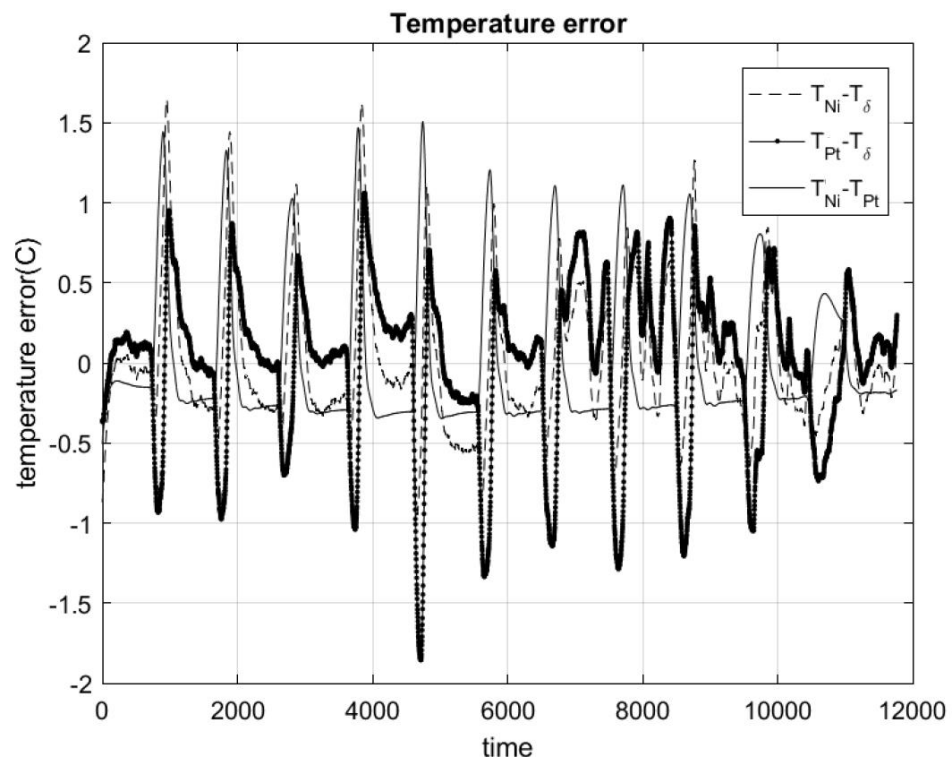


Рис. 109: Графики температурных погрешностей, полученных в диапазоне $[0^{\circ}C, 110^{\circ}C]$.

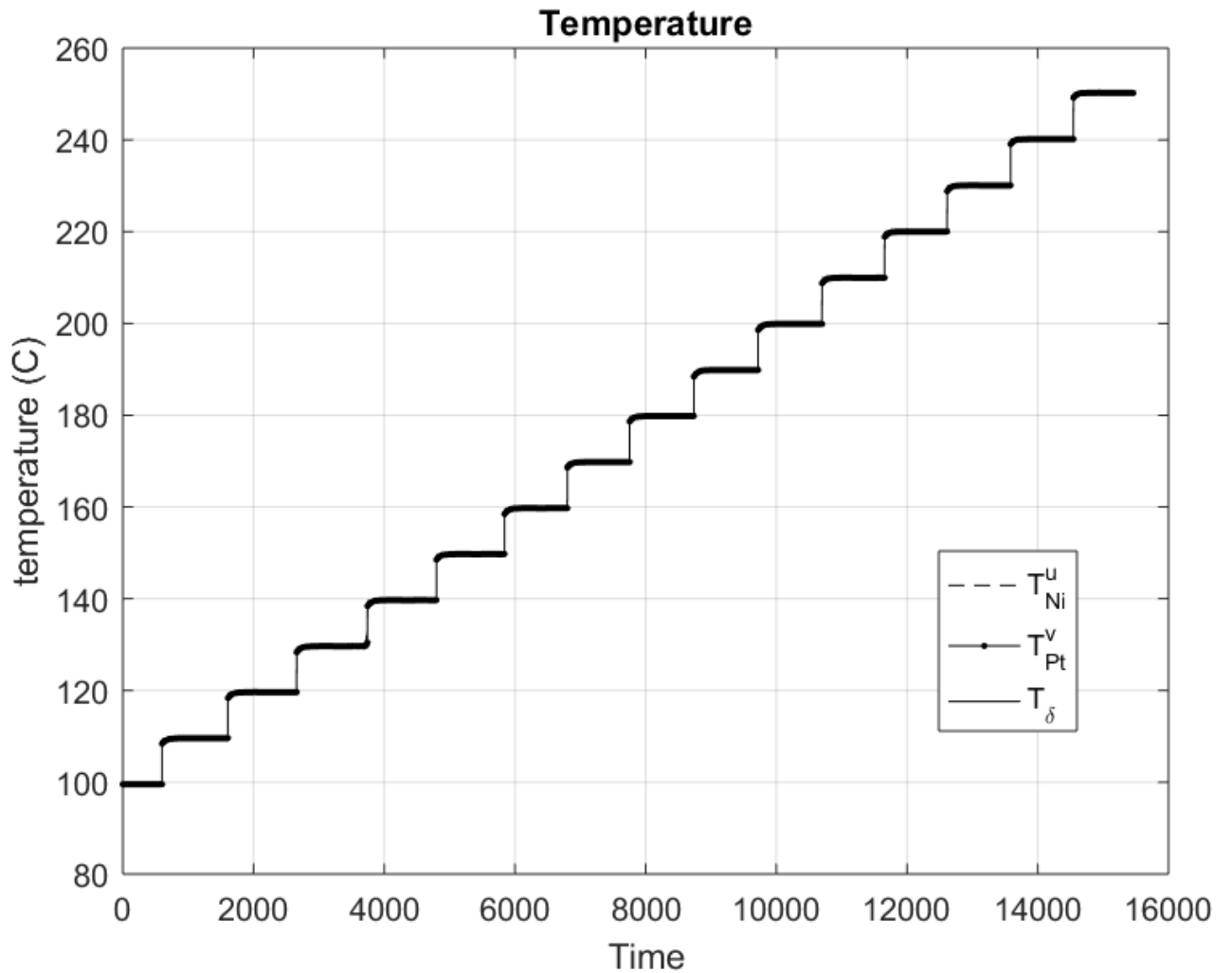


Рис. 110: Графики температурных функций функций, полученных в диапазоне $[100^{\circ}C, 250^{\circ}C]$.

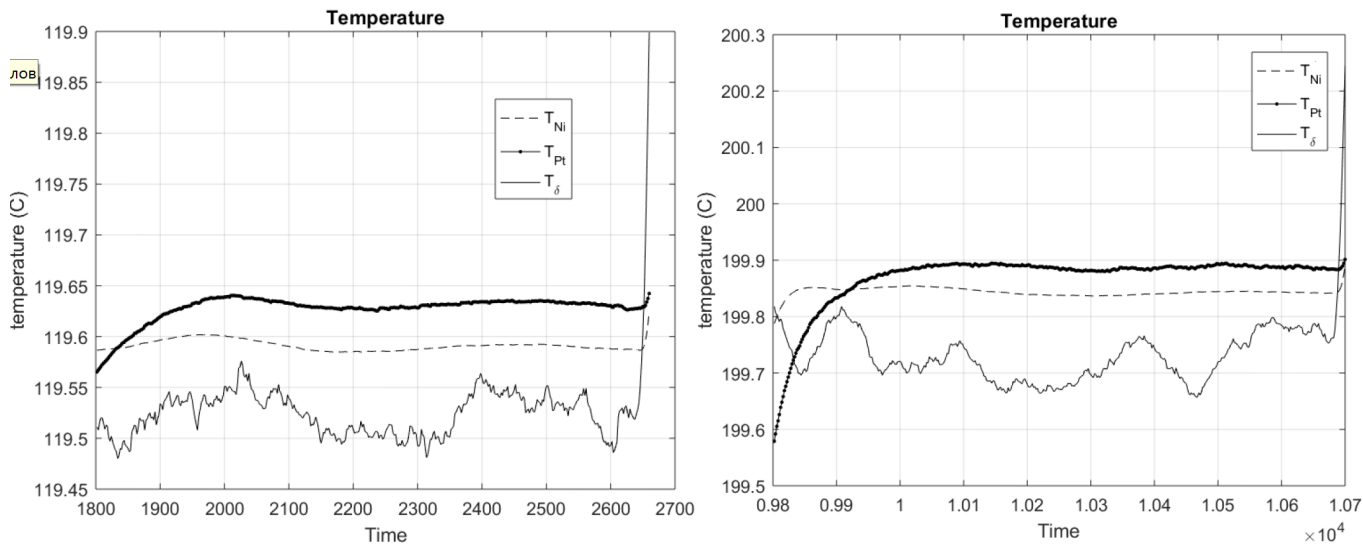


Рис. 111: Фрагменты графиков температурных функций функций, полученных на основе экспериментальных данных в диапазоне $[100^{\circ}C, 250^{\circ}C]$.

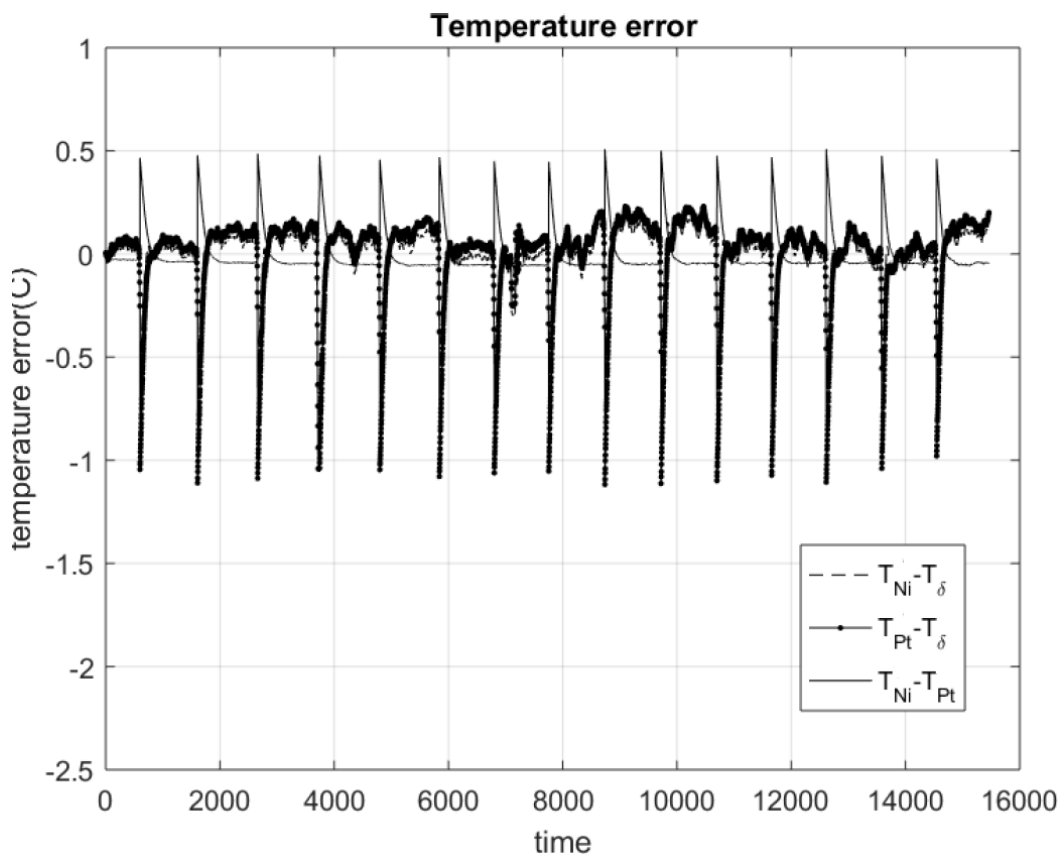


Рис. 112: Графики температурных погрешностей, полученных в диапазоне $[100^{\circ}C, 250^{\circ}C]$.

Полученные результаты служат основой для следующих выводов. Разработанный метод определения температур позволяет прогнозировать температуру в стационарном режиме с достаточной точностью. Метод устойчив относительно погрешности исходных данных. Применение предложенных методов приводит к одинаковым по точности результатам в различных температурных стационарных

и переходных режимах и остается неизменной с течением времени. Использование коэффициентов, найденных с помощью предложенного метода идентификации параметров в случае резкого изменения температурных градиентов в переходном режиме приводит к росту температурных отклонений, что может служить основой для разработки метода диагностики тепловых изменений, используемого в АСУТП технологических процессах, требующих поддержания стационарных температурных режимов.

5.5.2 Результаты экспериментов по температурному диапазону

В данном разделе представлены результаты экспериментальных исследований по температурному диапазону. Эксперименты по температурному диапазону разделялись на два типа. Первый тип связан с верификацией предложенной модели зависимости температур от сопротивлений, с верификацией и исследованием точности метода параметрической идентификации и метода определения опорных температур, реализуемых на этапе калибровки. Второй тип включал верификацию и исследование точности метода определения температур в условиях отклонений в измерениях сопротивлений, проверку принципиальной возможности проведения оценки точности и качества измерений с помощью предложенных алгоритмов обработки измерительной информации.

§ 5.5.2.1 Результаты экспериментов по температурному диапазону на этапе калибровки

Эксперименты, связанные с верификацией и исследованием точности относительно температурного диапазона метода идентификации параметров и метода определения температур, связанных с этапом калибровки, включали проведение сравнительного анализа температур, найденных посредством разработанных вычислительных схем с тестовыми значениями. В качестве тестовых функций использовались результаты имитационного моделирования, а также экспериментальные данные, сформированные в соответствии с общепринятой методикой [47] из результатов первичных измерений, полученных от контрольного средства из-

мерения. Использование различных типов исходных данных обусловлено необходимостью проверки универсальности предложенного метода определения температур относительно температурного диапазона.

В исследовании, основанном на обработке экспериментальных данных, измерения проводились в диапазоне $[0^{\circ}C, 250^{\circ}C]$ на калибраторах температуры КТ-110 и КТ-500. В эксперименте регистрировались результаты измерения сопротивлений R_{Ni} и R_{Pt} , получаемые от исследуемых никелевого и платинового сенсоров. Измерения проводились в присутствии контрольного средства измерения, в качестве которого использовался термометр сопротивления ЭТС-100. К обработке данных, полученных от исследуемых сенсоров и контрольного средства измерения, переходили после завершения измерений по температурному диапазону.

Основные этапы обработки данных, реализуемой в экспериментальном исследовании относительно температурного диапазона предложенных методов, состоят в следующем:

Этап 1. Формирование исходных данных. В исследовании, основанном на обработке экспериментальных данных, тестовые значения формируются после завершения измерений по температурному диапазону из результатов первичных измерений, полученных от контрольного термометра сопротивления ЭТС-100 после обработки, проведенной с помощью преобразователя сигналов "Теркон" в соответствии с методикой, регламентируемой в [47].

Для вычислительного эксперимента, проводимого на основе имитационного моделирования, тестовые значения формируются следующим образом. На отрезке $[T_1, T_2]$, представляющему температурный диапазон, вводят равномерную сетку из $(K + 1)$ узлов с шагом $h = \frac{T_2 - T_1}{K}$, тогда действительному температурному значению $\overset{\circ}{T}_k$ соответствует значение $T_k = T_1 + (k - 1)h$. Далее формируют тестовую функцию контрольных измерений $T_{\delta} = (T_1, T_2, \dots, T_K)$, полагая, что каждое значение T_k является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[\overset{\circ}{T}_k - \delta; \overset{\circ}{T}_k + \delta]$. Далее, основываясь на подходе, предложенном в [47] и уравнении (5.1), получают тестовые значения R_{1k} и R_{2k} , $k = \overline{1, (K + 1)}$.

Этап 2. Идентификация параметров системы (5.2) по исходным данным T_δ , R_{1k} и R_{2k} с помощью предложенного метода идентификации степеней и коэффициентов системы (5.2), имеющей вид:

$$\begin{cases} A_m R_{1k}^m + A_{m-1} R_{1k}^{m-1} + \dots + A_1 R_{1k} + A_0 = T_k, \\ B_n R_{2k}^n + B_{n-1} R_{2k}^{n-1} + \dots + B_1 R_{2k} + B_0 = T_k. \end{cases}$$

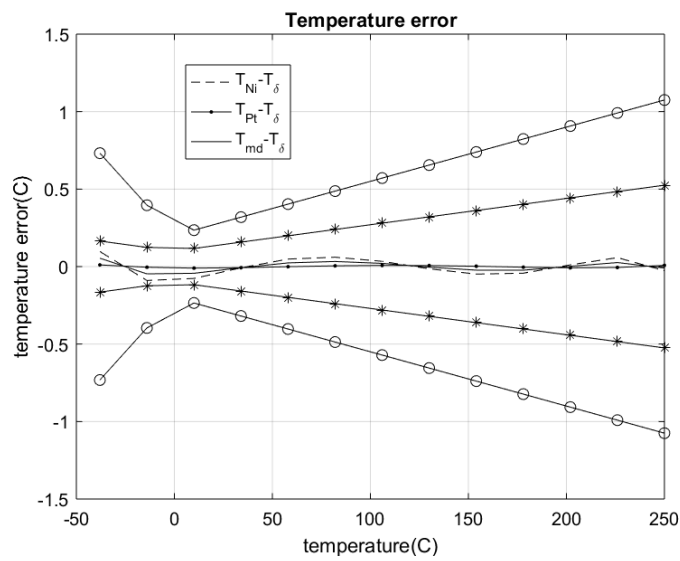
Сначала определяют степени полиномов M, N . Затем преобразуем систему (5.2) в систему (5.32). Далее, из (5.32), используя оператор $J_\delta^\alpha = (Q^*Q + \alpha E)^{-1}Q^*$, определяемые в (5.13) с параметром, выбранным из принципа невязки (5.16) находят решение A_δ и B_δ , соответствующее искомым коэффициентам A_δ и B_δ .

Этап 3. Вычисление температур и опорных значений сопротивлений. Для этого подставляют найденные степени и коэффициенты A_δ и B_δ в систему (5.32) вычисляют T_{Ni} , T_{Pt} и \tilde{T} . Затем найденные T_{Ni} , T_{Pt} подставляют в систему (5.1) и находят $R_{\delta Ni}$ и $R_{\delta Pt}$.

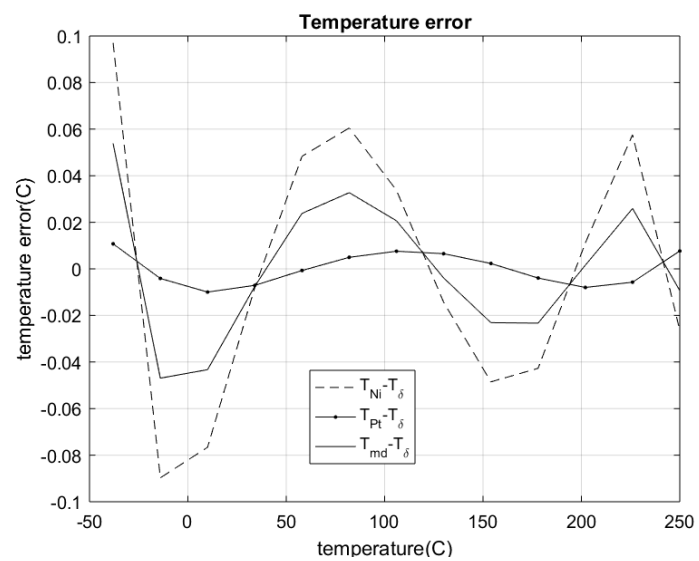
Этап 4. Верификация результатов. На этом этапе находят величины Δ_T , $\Delta(R_{Ni})$, $\Delta(R_{Pt})$, $\tilde{\Delta}_T$, а также функции $\Delta_{Ni} = T_{Ni} - T_\delta$, $\Delta_{Pt} = T_{Pt} - T_\delta$ и $\Delta = \tilde{T} - T_\delta$. Если величины $\Delta(R_{Ni})$, $\Delta(R_{Pt})$, $\tilde{\Delta}_T$ находятся в допустимых пределах, а каждая из функций Δ_T , Δ_{Ni} , Δ_{Pt} не превосходит требуемого уровня точности ε , то верификация считается успешной.

Результаты экспериментов, связанных исследованием по температурному диапазону методов обработки информации, связанных с калибровкой, представлены на рис.113 и 114. Рис.113 иллюстрирует результаты вычислительного эксперимента для тестовых функций, сформированных на основе имитационного моделирования. На рис. 114 представлены графики температурных погрешностей Δ_{Ni} , Δ_{Pt} и Δ , полученные при сравнении вычисленных температур T_{Ni} , T_{Pt} с экспериментальными значениями T_δ , сформированными контрольным преобразователем температуры.

На рис.113(а), 114 (а) приведены графики функций Δ_{Ni} , Δ_{Pt} и Δ , характеризующих величины отклонений вычисленных температур T_{Ni} , T_{Pt} и \tilde{T} от тестовых значений T_δ относительно границ классов допуска, принятых для каждого сенсора. Линии, маркированные окружностями, обозначают границы допустимых

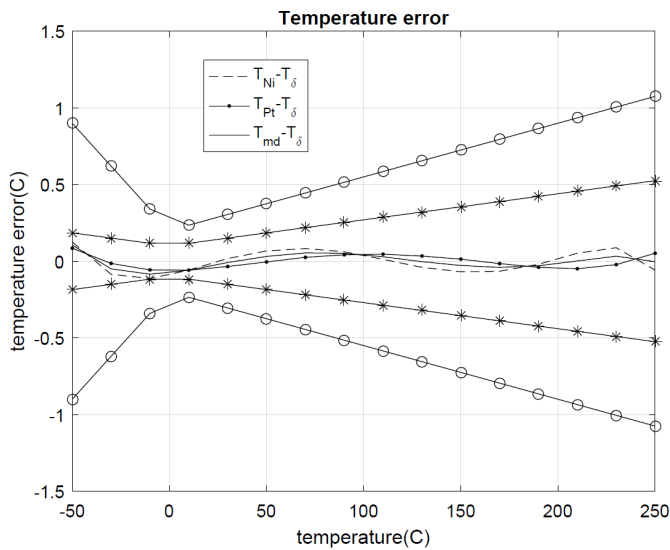


а)

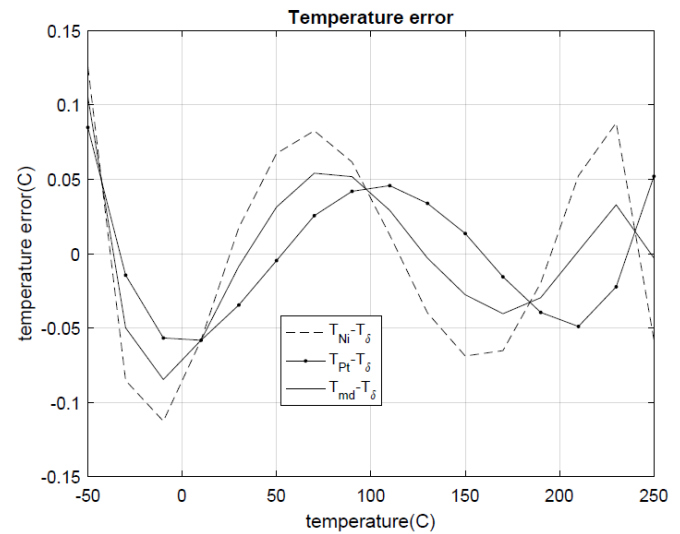


б)

Рис. 113: Графики отклонений вычисленных температур T_{Ni} , T_{Pt} и \tilde{T} от тестовых значений T_δ , сформированных на основе имитационного моделирования. Обозначение T_{md} соответствует вычисленным температурам \tilde{T} . Рис.(а)–графики функций Δ_{Ni} , Δ_{Pt} и Δ относительно границ классов допуска, принятых для каждого сенсора. Рис.(б)–результаты сравнение температурных погрешностей.



а)



б)

Рис. 114: Графики отклонений вычисленных температур T_{Ni} , T_{Pt} и \tilde{T} от тестовых значений T_δ , сформированных из экспериментальных данных. Обозначение T_{md} соответствует вычисленным температурам \tilde{T} . Рис.(а)–графики функций Δ_{Ni} , Δ_{Pt} и Δ относительно границ классов допуска, принятых для каждого сенсора. Рис.(б)–результаты сравнение температурных погрешностей.

температурных погрешностей для никелевого термосопротивления, а линии, маркированные ромбами – для платинового термосопротивления. На рис.113(б) 114(б) приведены графики температурных погрешностей Δ_{Ni} , Δ_{Pt} и Δ , иллюстрирую-

щие результаты сравнения точности определения температур каждым сенсором и общую точность определения температуры по известным сопротивлениям.

Результаты эксперимента приводят к следующим выводам. Предложенные метод идентификации параметров и метод определения температур, связанные с калибровкой, позволяют получать оптимальные по порядку решения задачи параметрической идентификации, и, следовательно, проводить идентификацию коэффициентов и определять температуры с гарантированной точностью. Результаты вычислительного эксперимента и результаты исследования, проводимого на основе экспериментальных данных, согласуются с теоретическими результатами и подтверждают достаточную точность температур, найденных с помощью предложенного метода. Построенная математическая модель зависимости температуры от сопротивлений, метод идентификации параметров и метод определения температур позволяют сформировать метод обработки результатов первичных измерений для этапа калибровки.

§ 5.5.2.2 Результаты экспериментов в температурном диапазоне по оценке точности и качества измерений

В данном разделе представлены результаты экспериментального исследования точности метода определения температур, получаемых из результатов измерений сопротивлений, имеющих различный уровень отклонений от опорных значений. Проведенные эксперименты связаны с определением температуры на этапе эксплуатации и оценками точности и качества измерения. Цель данного типа экспериментов заключалась в проверке принципиальной возможности построения численных алгоритмов оценки точности и качества измерения.

В экспериментальном исследовании проводилось $K + 1$ измерение в температурном диапазоне $[0^{\circ}\text{C}, 250^{\circ}\text{C}]$. В эксперименте регистрировались результаты измерения сопротивлений $\overline{R_{Ni}}$ и $\overline{R_{Pt}}$, получаемые от исследуемых никелевых и платиновых сенсоров. К обработке данных, полученных от исследуемых сенсоров и контрольного средства измерения, переходили после завершения измерений по температурному диапазону.

Обработка данных, реализуемая в данном экспериментальном исследовании относительно температурного диапазона включают следующие этапы.

Этап 1. Вычисление температур. Для этого, степени M, N и коэффициенты A_δ, B_δ , найденные на этапе калибровки подставляют в систему (5.37), сформированную из результатов измерений сопротивлений $\overline{R_{Ni}}$ и $\overline{R_{Pt}}$ и имеющую вид:

$$\begin{cases} T_{Ni}^u = A_M(\overline{R_{Ni}})^M + A_{M-1}(\overline{R_{Ni}})^{M-1} + \dots + A_1(\overline{R_{Ni}}) + A_0, \\ T_{Pt}^u = B_N(\overline{R_{Pt}})^N + B_{N-1}(\overline{R_{Pt}})^{N-1} + \dots + B_1(\overline{R_{Pt}}) + B_0. \end{cases}$$

и вычисляют температуры $T_{Ni}^u, T_{Pt}^u, \overline{T_k} == \frac{T_{Ni}^u + T_{Pt}^u}{2}$.

Этап 2. Выбор опорных значений. С этой целью, используя метод обработки первичных измерений, приведенный в разделе 5.4.1, подбирают наиболее близкие к измеренным $\overline{R_{Ni}}$ и $\overline{R_{Pt}}$ опорные значения $R_{\delta Ni}$ и $R_{\delta Pt}$, минимизируя функции отклонений сопротивлений. Далее по выбранным $R_{\delta Ni}$ и $R_{\delta Pt}$ определяют соответствующие опорные температуры T_{Ni} и T_{Pt} .

Этап 3. Формирование функций оценки точности и качества измерений. Вычисляют величину krU и функции $(F, eT, eT_{Ni}, eT_{Pt})$ используя вычислительную схему обработки результатов измерений предложенную в разделе 5.4.1.

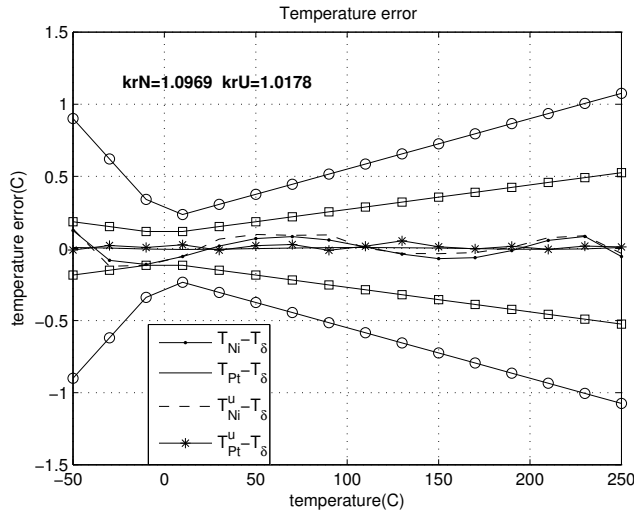
Этап 4. Оценка точности и качества измерений. Используя алгоритмы оценки точности и качества измерений, представленные в разделах 5.4.2 и 5.4.3, проверяют соответствие значений $(F, eT, eT_{Ni}, eT_{Pt})$ и krU предложенным условиям определения значений оценки точности и качества измерения.

Результаты эксперимента по верификации алгоритма оценки точности и качества измерений, предложенного в данном исследовании и направленного на численную реализацию концепции Р.Е. Тайманова в [147], представлены на рис. 115–117 и приведены в табл.21.

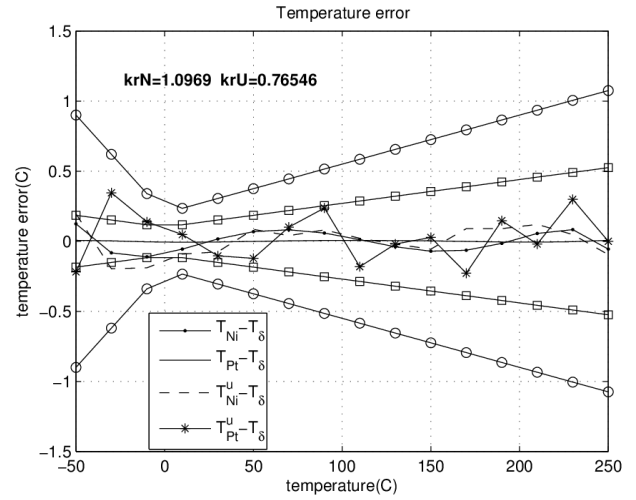
Основная идея концепции заключается в выявлении критической составляющей погрешности. В качестве величины, характеризующую критическую составляющую, используется величина krU .

Таблица 21: Оценка качества измерений

\widetilde{T}_{δ_k}	k	err_{Ni_k}	err_{Pt_k}	erT_k	ε_{Ni_k}	ε_{Pt_k}	ε	$(F, eT_{Ni}, eT_{Pt}, eT)$	G	оценка
0,022185	4	0,050911	0,001923	0,026417	0,15	0,1	0,125	(0,0,0,0)	G_1	подтвержденное
90,873685	8	0,224396	0,006467	0,144533	0,5017	0,2578	0,146	(1,0,0,0)	G_2	нормальное
-27,965037	2	0,193287	0,395332	0,14281	0,621	0,139	0,143	(1,0,2,0)	G_3	ориентирующее
90,873685	8	0,519847	0,002493	0,395332	0,5017	0,2578	0,146	(1,2,0,1)	G_4	экстраполированное
90,873685	8	0,937142	0,003514	0,474512	0,5017	0,2578	0,146	(1,2,0,2)	G_5	недостовверное



а)



б)

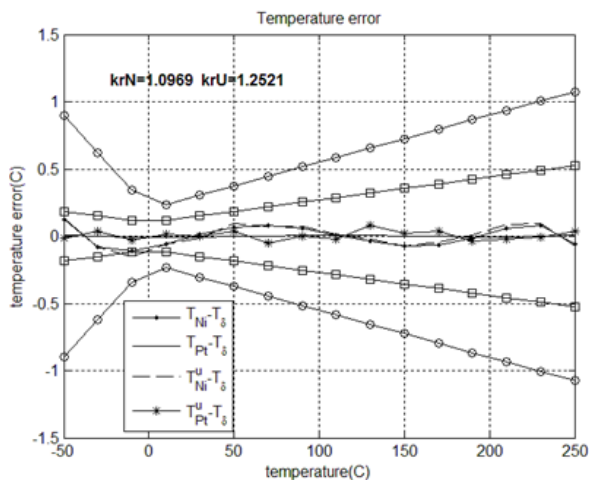
Рис. 115: Графики функций температурных отклонений. Рис.(а) соответствует оценке ПОДТВЕРЖДЕННОЕ. Рис.(б) иллюстрирует оценку ОРИЕНТИРУЮЩЕЕ.

На рис.115–117 изображены графики функций

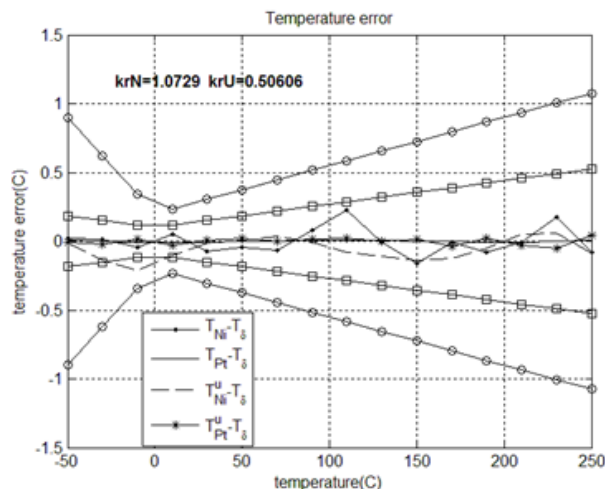
$$\Delta_{Ni} = T_{Ni} - T_{\delta}, \quad \Delta_{Pt} = T_{Pt} - T_{\delta},$$

$$err_{Ni} = T_{Ni}^u - T_{\delta}, \quad err_{Pt} = T_{Pt}^u - T_{\delta}$$

На всех рисунках используются одинаковые обозначения для границ допустимых температурных отклонений. Линии, маркированные окружностями, обозначают границы допустимых температурных отклонений для никелевого термосопротивления. Линии, маркированные ромбами соответствуют границам класса допуска для платинового термосопротивления. Границы допустимых температур-

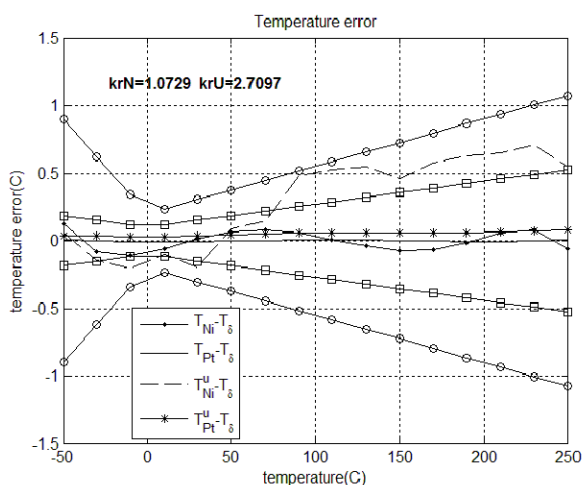


а)

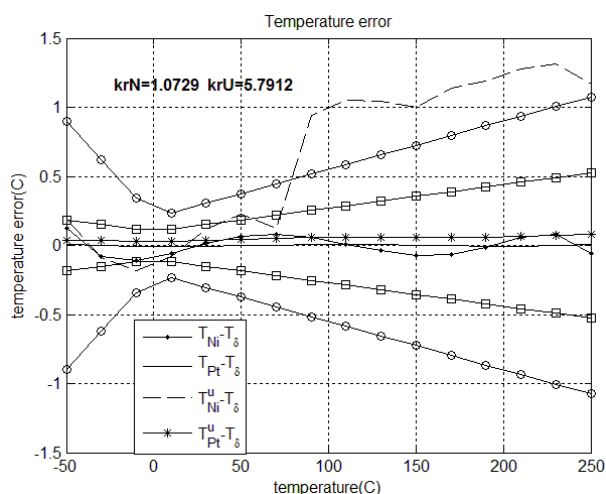


б)

Рис. 116: Графики функций температурных отклонений, иллюстрирующие оценку НОРМАЛЬНОЕ.



а)



б)

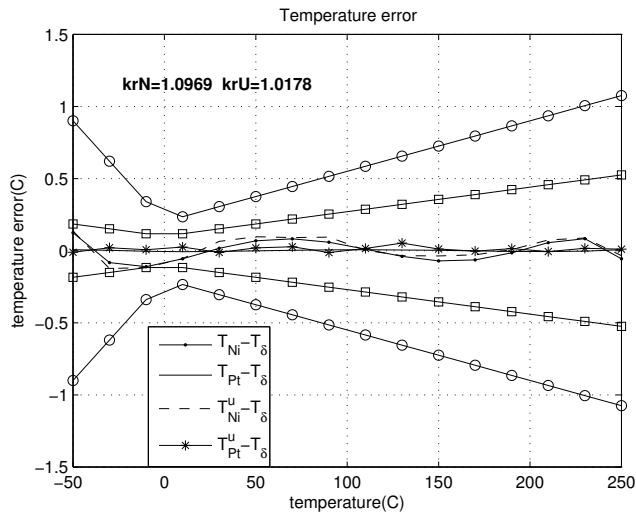
Рис. 117: Графики погрешности температурных функций функций. Рис. (а) иллюстрирует оценку ЭКСТРАПОЛИРОВАННОЕ. Рис. (б) иллюстрирует оценку НЕДОСТОВЕРНОЕ.

ных отклонений для каждого типа термосопротивления определялись в соответствии с общепринятой методики, утвержденной в [47].

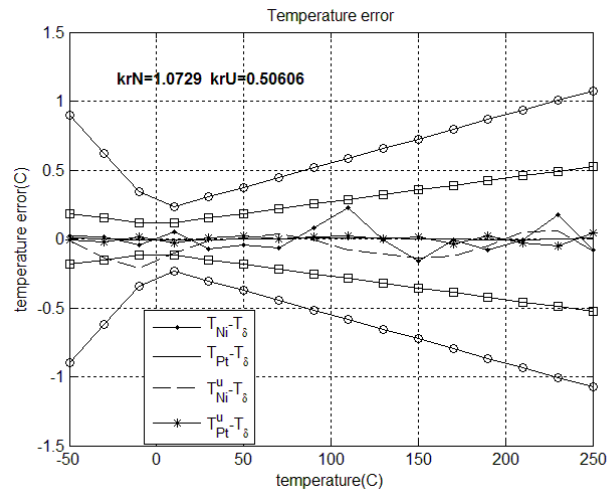
Результаты эксперимента по апробации алгоритма оценки точности и качества измерений, ориентированного на численную реализацию концепции М. Henry [211], представлены на рис.118–120 и приведены в табл.22. Оценку точности и качества измерений проводили с помощью алгоритма, основанного на использовании величины, характеризующей неопределенность измерений. На рис.118–120 приведены графики функций Δ_{Ni} , Δ_{Pt} , err_{Ni} , err_{Pt} . Обозначения границ классов допуска аналогичны используемым на рис.115–117. В качестве величины, оценивающей неопределенность измерений, используется величина krU .

Таблица 22: Оценка качества измерений

\widetilde{T}_{δ_k}	k	err_{Ni_k}	err_{Pt_k}	erT_k	ε_{Ni_k}	ε_{Pt_k}	ε	$(F, eT_{Ni}, eT_{Pt}, eT)$	G	оценка
0,022185	4	0,050911	0,001923	0,026417	0,15	0,1	0,125	(0,0,0,0)	G_1	<i>clear</i>
90,873685	8	0,224396	0,006467	0,144533	0,5017	0,2578	0,146	(1,0,0,0)	G_2	<i>blurred</i>
-27,965037	2	0,193287	0,395332	0,14281	0,621	0,139	0,143	(1,0,2,0)	G_3	<i>dazzled</i>
90,873685	8	0,519847	0,002493	0,395332	0,5017	0,2578	0,146	(1,2,0,1)	G_4	<i>blind</i>
90,873685	8	0,937142	0,003514	0,474512	0,5017	0,2578	0,146	(1,2,0,2)	G_5	<i>unvalidated</i>

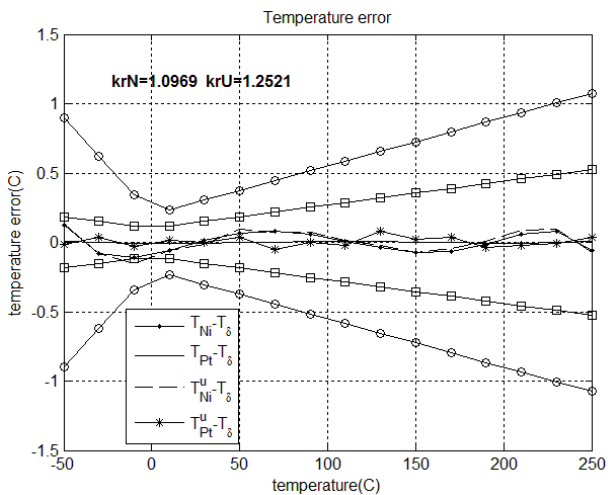


а)

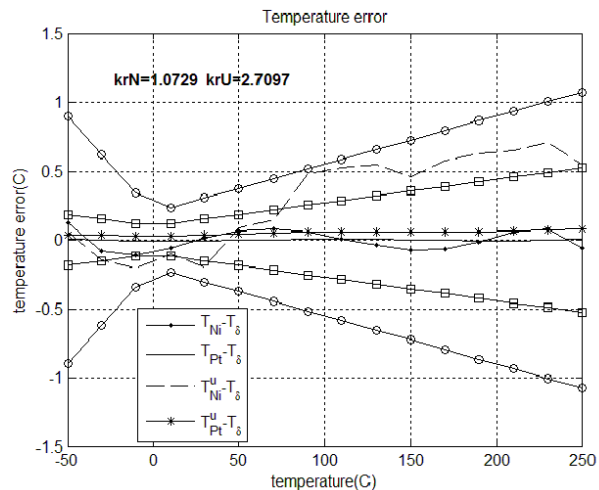


б)

Рис. 118: Графики функций температурных отклонений. Рисунок (а) иллюстрирует оценку CLEAR. Рисунок (б) иллюстрирует оценку BLURRED.

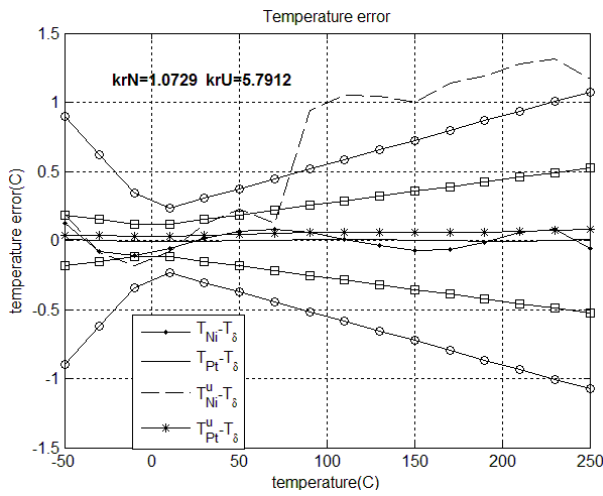


а)

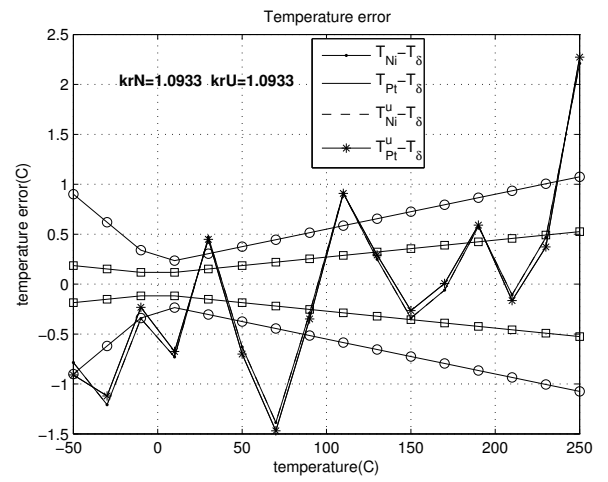


б)

Рис. 119: Графики функций температурных отклонений.. Рисунок (а) иллюстрирует оценку DAZZLED. Рисунок (б) иллюстрирует оценку BLIND.



a)



б)

Рис. 120: Графики погрешности температурных функций функций, полученных в результате вычислительного эксперимента. Рисунок (а) иллюстрирует оценку UNVALIDATED. Рисунок (б) иллюстрирует оценку SECURE.

Результаты эксперимента свидетельствуют о следующем. Разработанные методы обработки результатов измерений сопротивлений позволяют формировать опорные температурные значения на этапе калибровки, а на этапе эксплуатации определять температуру с точностью, отражающей характер и уровень отклонений измеренных сопротивлений от опорных значений. Полученные результаты служат основой для определения уровня погрешности граничных температурных функций, формируемых из результатов первичных измерений и являющихся исходными данными в рассматриваемых задачах теплопереноса. Предложенные алгоритмы оценки точности и качества измерений позволяют получать количественную оценку точности определения температур и впервые позволили осуществить численную реализацию концепций, являющихся основой для формирования статусов измерения и диагностики состояния средства измерения.

5.6 Основные результаты и выводы

В разделе предложен подход к определению температуры по результатам первичных измерений сопротивления и построена математическая модель зависимости температуры от сопротивления. Предложены метод идентификации параметров модели и методы определения температуры по результатам обработки информации о первичных измерениях сопротивлений. Основная идея модели допускает обобщение для средств измерения, содержащих один или несколько термомет-

ров сопротивления, которые могут быть изготовлены как из различных, так и из одиakoвых металлов. В работе исследована точность метода идентификации коэффициентов, получены теоретические оценки коэффициентных погрешностей, свидетельствующие об оптимальности по порядку предлагаемого метода в ситуации, когда результаты измерений сопротивлений содержат несущественные отклонения от контрольных значений. Предложены методы определения температурных значений по результатам обработки первичных измерений сопротивлений на этапах калибровки и эксплуатации. Для оценки эффективности метода параметрической идентификации и вычислительных схем определения температур, а также для проверки принципиальной возможности проведения оценки точности и качества измерений с помощью предложенных алгоритмов, проводились экспериментальные исследования относительно времени и температурных диапазонов.

В экспериментах подтверждена достаточная точность определения температур, в ситуации, когда погрешность измерения сопротивлений находится в допустимых пределах. Результаты экспериментов свидетельствуют о том, что предложенные методы обработки результатов измерений сопротивлений позволяют на этапе эксплуатации определять температуру с точностью, отражающей характер и уровень отклонений измеренных сопротивлений.

Результаты эксперимента подтверждают существование количественной характеристики, позволяющей оценить величину температурных отклонений в зависимости от изменений сопротивлений, происходящих на этапе эксплуатации. Предложенные в работе алгоритмы оценки точности и качества измерений впервые позволили осуществить численную реализацию концепций, являющихся основой для формирования статусов измерения и диагностики состояния средства измерения. Полученные результаты приводят к следующим выводам:

- Предложенная математическая модель зависимости температуры от сопротивлений позволяет сформировать единый подход к определению температуры в различных температурных диапазонах по результатам измерений сопротивлений термометрами, изготовленных из различных материалов

- Разработанный метод идентификации параметров системы позволяет вычислять коэффициенты математической модели с гарантированной точностью.
- Предложенный метод определения температур по результатам первичных измерений позволяет на этапе калибровки и в ситуации, когда погрешность первичных измерений находится в допустимых пределах, вычислять температурные значения с гарантированной точностью,
- Разработанный метод обработки первичных измерений позволяет на этапе эксплуатации формировать температурные значения с точностью, отражающей характер и уровень отклонений измеренных сопротивлений от опорных значений.
- Предложенные в работе алгоритмы оценки качества и точности измерений служат для количественной оценки точности определения температур и впервые позволили осуществить численную реализацию идей, являющихся основой для формирования статусов измерения и диагностики состояния средства измерения.
- Разработанные подходы и алгоритмы служат основой для определения уровня отклонений в граничных температурных измерениях формируемых из результатов первичных измерений и являющихся исходными данными в рассматриваемых задачах теплопереноса.

Научная новизна результатов исследования, представленных в данном разделе, заключается в разработке единой математической модели явной зависимости температур от результатов измерений сопротивлений, в разработке оптимального по порядку метода идентификации коэффициентов, в разработке подходов к построению вычислительных алгоритмов, позволяющих определять температуру с точностью, отражающей характер погрешности первичных измерений, а также в разработке алгоритмов оценки точности и качества измерений, служащих основой для диагностики состояния средства измерения.

Практическая значимость полученных результатов состоит в разработке методики расчета температур по измеренным сопротивлениям, единой для различных материалов и температурных диапазонов, в разработке алгоритмов обработки результатов измерений сопротивлений. Полученные результаты служат основой для методов оценки качества измерений и состояния средств измерений.

Заключение

В диссертационной работе предложены методы и алгоритмы обработки результатов измерений, служащие основой для методов контроля и прогнозирования теплового состояния объекта, подвергаемого внешнему тепловому воздействию, в условиях неполных и динамически изменяющихся исходных данных. При решении рассматриваемых задач обработки информации получены новые результаты, заключающиеся в следующем.

1. Разработаны интегральные модели и методы решения задач теплопереноса и идентификации внутреннего теплового источника. На основе полученных результатов в работе сделан вывод о том, что предложенные подходы к построению методов определения температуры в контрольной точке и идентификации внутреннего теплового источника по результатам поверхностных измерений служат основой для прогнозирования температурных значений, получаемых в результате выбранного управляющего режима теплового воздействия, позволяют повысить точность прогнозирования температур и оптимизировать управляющий режим внешнего теплового воздействия

2. Создан единый подход к разработке методов численного решения задач линейного и нелинейного теплопереноса в объектах с неизвестным начальным тепловым состоянием, заключающийся в построении комбинированной конечно-разностной схемы со стабилизирующим функционалом, с помощью которой находят искомые температурные значения относительно пространственной переменной.

3. Разработаны методы прогнозирования температуры во внутренних точках при линейном теплопереносе в объектах с неизвестным начальным тепловым состоянием, найдены условия, гарантирующие устойчивость вычислительных схем относительно погрешности исходных данных, и оценки точности результатов прогнозирования. Полученные результаты приводят к следующим выводам. Построение комбинированной схемы позволило найти решение проблемы краевых точек и осуществить численное прогнозирование температур в объектах с неизвестным

начальным тепловым состоянием Предложенные методы прогнозирования обладают достаточной точностью служат основой для выбора параметров внешнего управляющего режима теплового воздействия, формирующего требуемое температурное поле внутри объекта.

4. Разработана методика аппроксимации коэффициентов в задаче нелинейного теплопереноса в ситуации, когда теплофизические характеристики материала зависят от температуры. Введенные соотношения позволяют сформировать явную вычислительную схему, получить теоретические оценки возможных температурных отклонений и значительно упрощают реализацию вычислительной процедуры.

5. Разработаны и верифицированы методы решения обратных задач нелинейного теплопереноса, связанные с прогнозированием температур во внутренних точках объектов с неизвестным начальным тепловым состоянием при внешнем тепловом воздействии. Найдены условия, обеспечивающие устойчивость методов по исходным данным, и получены оценки точности вычисляемых температур, подтвержденные результатами обработки экспериментальных данных. Полученные результаты приводят к следующим выводам. Построение комбинированной схемы относительно пространственной переменной позволило найти решение проблемы неизвестных начальных условий, препятствующей численному решению обратных задач теплопереноса. Предложенные методы обладают достаточной точностью, используются при прогнозировании влияния выбранного теплового воздействия на формирование температурных полей при неполных исходных данных

6. Разработана математическая модель, характеризующая явную зависимость температуры от измеренных электрических сопротивлений, единая для термометров сопротивления, изготовленных из различных металлов и различных температурных диапазонов. Построен метод параметрической идентификации коэффициентов модели и обоснована его оптимальность по порядку. Разработан метод определения температур по результатам обработки первичной измерительной информации, апробированный на экспериментальных данных. Полученные результаты приводят к следующим выводам. Предложенный метод позволяет на этапе

калибровки и в ситуации, когда погрешность первичных измерений находится в допустимых пределах, определять температурные значения с гарантированной точностью.

7. Разработан метод определения температур по результатам обработки первичных измерений, содержащих отклонения от действительных значений. Результаты исследования приводят к выводу о том, что построенный метод позволяет на этапе эксплуатации формировать температурные значения с точностью, отражающей характер и уровень отклонений измеренных сопротивлений.

8. Разработаны алгоритмы оценки точности измерений, апробированные на экспериментальных данных. Построенные алгоритмы позволяют осуществлять количественную оценку точности результатов определения температур по первичным измерениям на этапе эксплуатации и осуществлять численную реализацию концепций, являющихся основой для диагностики состояния средства измерения.

Основные результаты, представленные в диссертации являются новыми, имеют теоретическую и практическую значимость и служат основой для разработки и совершенствования методов обработки информации в системах контроля и прогнозирования процессов теплопереноса в условиях неполных и динамически изменяющихся данных.



ИНН 7715729877
КПП 997650001
ОГРН 5087746570830

Челябинский электровозоремонтный завод –
филиал акционерного общества
«Желдорремаш»

454008, г. Челябинск, улица Косарева, 1
+7 (351) 791-55-12, ф.791-47-14
e-mail: cherz@cherz.ru

УТВЕРЖДАЮ

Главный инженер ЧЭРЗ



[Signature]
И.Г.Веретенников

» *[Signature]* 2018г.

АКТ

внедрения результатов диссертационной работы
на соискание ученой степени доктора технических наук
Япаровой Натальи Михайловны

Результаты диссертационного исследования Япаровой Натальи Михайловны по системному анализу, управлению, разработке методов, алгоритмов и программных комплексов по обработке информации, предназначенных для анализа и прогнозирования температурного состояния, являются актуальными для обеспечения оптимальности температурного режима электрической печи при комплексной термообработке изделий из металла.

Проблема полноты и точности прогнозирования температурного состояния изделия, подвергаемого комплексной термообработке, играют важную роль при выборе температурных режимов работы печей для термообработки изделий. Разработанные в диссертации теоретические положения и алгоритмы способствуют повышению точности оценки температурного состояния изделия, подвергаемого термообработке, позволяют оптимизировать продолжительность и температурные условия технологического процесса.

Разработанные Япаровой Н.М. модели и алгоритмы обработки результатов температурных изменений используются при разработке технического регламента проведения термообработки (отпуск, нормализация) в электрических печах.

Главный технолог

А.А. Напольских

Рис. 121: Акт внедрения.



МЕТРАН™

Акционерное общество
«Промышленная группа «Метран» (АО «ПГ «Метран»)

Проспект Новоградский, 15
Челябинск, Российская Федерация, 454003
Т (351) 799-51-52, ф (351) 799-55-90
www.Metran.ru, www.EmersonProcess.ru
ИНН 7448024720, ОГРН 1027402540065, КПП 742150001

Утверждаю
Генеральный директор
АО «ПГ «Метран»
А.А. Глазырин



2019 г.

№ _____
на № _____ от _____

АКТ

использования результатов диссертационной работы на соискание ученой степени доктора технических наук

Япаровой Натальи Михайловны

Требования, предъявляемые к современным технологическим процессам, подразумевают наличие достоверной информации о многих параметрах. Современные технологии достигли высоких результатов при проведении прямых измерений, но для большего понимания сути процессов и их взаимного влияния на конечный результат требуются дополнительные данные, получение которых невозможно путем прямого измерения. Данная задача зачастую решается разработкой моделей, использующих знания о физических свойствах объектов. На основе этих моделей могут быть построены виртуальные сенсоры, тренировочные модели операторов, прогнозирующие управляющие алгоритмы и т.п. Основным ограничением данных моделей является необходимость наличия как можно более полной информации о начальном состоянии системы, что не всегда возможно обеспечить. Исходя из «некорректной» природы таких задач, малые погрешности в параметрах системы или результатах измерения могут приводить к значительным ошибкам при использовании обычных методов решения.

В качестве реального класса технологических процессов, требующих непрерывного теплового мониторинга параметров, но не допускают их прямого измерения, т.е. требующих косвенных измерений, в данной работе рассмотрен комплекс, связанный со вторичной термической обработкой при горячей прокатке, комплексной термообработке изделий, тепловом мониторинге работающих систем и механизмов, Результатом использования точных данных на предприятиях реального сектора экономики являются повышение качества выпускаемой продукции, а также

снижение непроизводительных издержек, связанных с нарушениями в технологических процессах и выходом из строя оборудования.

Кроме того, в рамках реализации концепции Индустрии 4.0 и Pervasive sensing (всеобъемлющих измерений) данный подход позволяет собирать дополнительную информацию для реализации перспективных методов анализа и управления процессами на современных производственных предприятиях.

Важно упомянуть, что кроме задачи повышения точности прогнозирования температуры во внутренних точках объекта по результатам граничных изменений для объектов с неизвестными начальными характеристиками, критичным для реализации алгоритмов управления производственными процессами является достоверность полученных данных, которая может быть достигнута с помощью самодиагностики и использованием принципов SEVA.

Все вышесказанное доказывает актуальность тематики, выбранной Натальей Михайловной Япаровой в качестве направления своего диссертационного исследования.

Математический аппарат в диссертационном исследовании проработан на высоком уровне. В результате автором получен достаточно интересный метод косвенного измерения температур и качественной оценки измерений, который имеет широкие перспективы применения в реальных отраслях промышленности и проведения дальнейших исследований.

Разработанные Япаровой Н.М. модели, алгоритмы и комплексы программ дополняют информационно-аналитическое обеспечение Промышленной Группы «Метран», используемое для обеспечения точности и достоверности результатов измерения температуры. На основе представленных результатов планируется формирование кросс-функциональной группы для анализа и внедрения модернизации АСУТП на конкретных предприятиях металлургического комплекса с использованием ресурсов Промышленной Группы «Метран».

Директор Глобального инженерного центра
АО ПГ «Метран»



Д.Ю. Иосифов

Рис. 122: Акт использования.



**Челябинский
Компрессорный
Завод**

ООО «Челябинский
компрессорный завод»
456671, Челябинская область,
Красноармейский район,
14-км автодороги Челябинск-
Новосибирск

454071, г. Челябинск, а/я 6340
Тел./факс: (351) 216-50-50
e-mail: chkz@chkz.ru <http://www.chkz.ru>
ОГРН 1147452004809
ИНН 7452118226 КПП 74545000

УТВЕРЖДАЮ
Директор по производству
ООО «Челябинский
компрессорный завод»



П. Р. Ялалтдинов
«18» _____ ноября 2019г.



АКТ

внедрения результатов диссертационной работы
на соискание ученой степени доктора технических наук
Япаровой Натальи Михайловны

Результаты диссертационного исследования Япаровой Натальи Михайловны по системному анализу, управлению, разработке методов, алгоритмов и программных комплексов по обработки информации, предназначенных для анализа и прогнозирования температурного состояния, являются актуальными для обеспечения эксплуатационной безопасности компрессорных станций и установок.

Эксплуатационная безопасность компрессорного оборудования обеспечивается с помощью блоков жизнеобеспечения, включающих системы охлаждения. Управление системами охлаждения базируется на результатах теплового контроля, поэтому повышение точности результатов обработки температурных показаний, полученных системами теплового контроля, позволяет повысить точность прогнозирования температурного состояния работающих станций и установок.

Разработанные Япаровой Н.М. модели, алгоритмы и комплексы программ используются при разработке рекомендаций по выбору и регулированию настраиваемых параметров температурных режимов, реализуемых в система контроля и управления тепловым состоянием компрессорного оборудования.

Руководитель департамента
технической поддержки



Р.Ф. Нуреев

www.chkz.ru

Рис. 123: Акт внедрения.

Certificate

SMS Data Challenge 2.0

Data Analytics – Improved Sticker Detection
based on Fiber Optical Temperature
Measurement

Took part

Team: Drozin

Alexander Drozin
Nataliya Yaparova
Elena Kurkina

SMS group GmbH • Eduard-Schloemann-Str. 4 • 40237 Düsseldorf

Рис. 124: Сертификат исследователя по анализу и обработке экспериментальных данных

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2013660232

Программно-вычислительный комплекс моделирования
граничной тепловой функции для однородного стержня при
решении обратной граничной задачи теплопроводности с
начальными данными

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего профессионального
образования "Южно-Уральский государственный университет"
(национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВПО
"ЮУрГУ" (НИУ)) (RU)*

Автор: *Япарова Наталья Михайловна (RU)*

Заявка № 2013618199

Дата поступления 10 сентября 2013 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 29 октября 2013 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов



Рис. 125: Свидетельство о государственной регистрации

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015615653

Программа моделирования функции распределения по времени плотности тепловых потоков, связанных с выделением (поглощением) тепла внутри тела в одномерной обратной задаче об определении источника для параболического уравнения с возмущенными граничными условиями

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Южно-Уральский государственный университет" (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВПО "ЮУрГУ" (НИУ)) (RU)*

Автор: *Япарова Наталья Михайловна (RU)*

Заявка № 2015612249

Дата поступления 26 марта 2015 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 22 мая 2015 г.



Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий

Рис. 126: Свидетельство о государственной регистрации

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2014614775

**Программа моделирования распределения одномерного
теплового режима на границе при неизвестных начальных
условиях**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего профессионального
образования "Южно-Уральский государственный университет"
(национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВПО
"ЮУрГУ" (НИУ)) (RU)*

Автор: *Япарова Наталья Михайловна (RU)*

Заявка № **2014612053**

Дата поступления **12 марта 2014 г.**

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **07 мая 2014 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Б.Н. Симонов



2014-5

Рис. 127: Свидетельство о государственной регистрации

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015616527

Программа моделирования тепловой функции внутри области и на внешних границах при решении многомерной обратной граничной задачи для параболического уравнения с неизвестными начальными условиями и граничными условиями, известными на части границы

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Южно-Уральский государственный университет" (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВПО "ЮУрГУ" (НИУ)) (RU)*

Автор: *Япарова Наталья Михайловна (RU)*

Заявка № 2015613338

Дата поступления 23 апреля 2015 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 11 июня 2015 г.

*Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Л.Л. Кирий



Рис. 128: Свидетельство о государственной регистрации.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015660117

Программа моделирования тепловой функции внутри цилиндрической области и на внешних границах при решении обратной граничной задачи для нелинейного параболического уравнения с неизвестными начальными условиями

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Южно-Уральский государственный университет" (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВПО "ЮУрГУ" (НИУ)) (RU)*

Автор: *Япарова Наталья Михайловна (RU)*

Заявка № 2015617294

Дата поступления 06 августа 2015 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 22 сентября 2015 г.

Заместитель руководителя Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий



Рис. 129: Свидетельство о государственной регистрации

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2013613515

Программно-вычислительный комплекс для обработки информации при калибровке термометров сопротивлений

Правообладатель(ли): *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Южно-Уральский государственный университет" (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВПО "ЮУрГУ" (НИУ)) (RU)*

Автор(ы): *Япарова Наталья Михайловна (RU)*

Заявка № 2013611312

Дата поступления 14 февраля 2013 г.

Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ
09 апреля 2013 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'B.P. Simonov', is written over a light blue grid background.

Б.П. Симонов



Рис. 130: Свидетельство о государственной регистрации

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2013614596

Программно-вычислительный комплекс для обработки информации при оценке собственного состояния термометров сопротивлений

Правообладатель(ли): *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Южно-Уральский государственный университет" (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВПО "ЮУрГУ" (НИУ)) (RU)*

Автор(ы): *Япарова Наталья Михайловна (RU)*

Заявка № 2013612106

Дата поступления 19 марта 2013 г.

Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ
16 мая 2013 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов



Рис. 131: Свидетельство о государственной регистрации

Список литературы

- [1] Авдеев В.А., Друян, В.М., Кудрин, Б.И. Основы проектирования металлургических заводов/ М.: Интермет Инжиниринг, 2002. 464с.
- [2] Агамалов Ю.Р. О реализации принципа самопроверяемости в измерителях одной электрической величины/Ю.Р.Агмалов//Метрология.2011.№9.С41-50
- [3] Агеев А.Л. Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций/А.Л. Агеев// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. Т.20. №4. С. 819.
- [4] Агеев А.Л., Антонова Т.В. Регуляризирующие алгоритмы выделения разрывов в некорректных задачах/ А.Л. Агеев, Т.В, Антонова// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т.48. №8. С. 1284-1292.
- [5] Акулич Н.В. Процессы производства черных и цветных металлов и их сплавов/ Минск : Новое знание. 2008. 270 с.
- [6] Алифанов О.М.Обратные задачи теплообмена/М.:Машиностроение.1988.280
- [7] Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач/ М.: Наука, 1988. 288 с.
- [8] Алифанов О.М., Будник С.А., Ненарокомов А.В., Нетелев А.В. Идентификация математических моделей теплоперноса в разлагающихся материалах. Тепловые процессы в технике. 2011. № 8. С. 338-347.
- [9] Алифанов О.М., Вабищевич П.Н., Михайлов В.В., Ненарокомов А.В., Полежаев Ю.В., Резник С.В. Основы идентификации и проектирования тепловых процессов и систем/ О.М. Алифанов, П.Н. Вабищевич, В.В. Михайлов, А.В. Ненарокомов, Ю.В. Полежаев, С.В. Резник//М.: Логос, 2001. 400 с.
- [10] Алифанов О.М., Иванов Н.А., Колесников В.А. Методика и алгоритм определения температурных зависимостей теплофизических характеристик анизотропных материалов из решения обратной задачи. Вестник Московского авиационного института. 2012. Т. 19. № 5. С. 14-20.

- [11] Анищенко Л.М., Лавренюк С.Ю. Математические основы проектирования высокотемпературных технологических процессов. М.: Наука, 1980.
- [12] В.Т. Борисов Теория двухфазной зоны металлического слитка/ М.: Металлургия, 1987. 224 с.
- [13] Апарцин А.С., Бакушинский А.Б. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм // Дифференц. и интегр. ур-ния, Иркутск: Иркут. гос. ун-т. 1972. Вып. 1. С. 248-258.
- [14] Апарцин А.С. Неклассические уравнения вольтерра I рода: Теория и численные методы/ Новосибирск: 1999. 192 с.
- [15] Бакушинский А.Б., Гончарский А.В., Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: МГУ, 1989, 199с.
- [16] Бакушинский А.Б. Об одном численном методе решения интегральных уравнений Фредгольма I рода Журнал вычислительной математики и математической физики, 1965 Т.5, №4, С.226-233.
- [17] Бакушинский А.Б. Апостериорные оценки погрешности приближенных решений нерегулярных операторных уравнений/ А.Б. Бакушинский// Доклады АН 2011ю Т.437, С. 439-440.
- [18] Бакушинский А.Б., Страхов В.Н. О решении некоторых интегральных уравнений I рода методом последовательных приближений/ А.Б. Бакушинский, В.Н. Страхов// Журнал вычислительной математики и математической физики, 1968 Т.8, №1, С.250-256.
- [19] Балабанов П.В., Пономарев С.В., Трофимов А.В. Математическое моделирование теплопереноса в процессе хемосорбции/ П.В. Балабанов, С.В. Пономарев, А.В. Трофимов// Вестник ТГТУ. 2008. Том 14. № 2. С. 334-341.
- [20] Баринов И.Н., Тихоненков В.А., Волков В.С., Кучумов Е.В. Обратная задача аппроксимации для полиномиальной кубической функции преобразова-

- ния датчика / И.Н. Баринов, В.А. Тихоненков, В.С. Волков, Е.В. Кучумов// Измерительная техника. 2016. № 2. С. 18-21.
- [21] Башнин Ю.Ф., Ушаков Б.К., Секей А.Г. Технология термической обработки стали М.: Металлургия, 1986. 424 с.
- [22] Белоусов М.Д., Шестаков А.Л. Преобразователь температуры без опорного сопротивления / М.Д. Белоусов, А.Л. Шестаков// Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2008. № 3 (103). С. 29-33.
- [23] Белоусов М.Д., Шестаков А.Л., Япарова Н.М. Оценка собственного состояния термометров сопротивлений/М.Д.Белоусов, А.Л.Шестаков, Н.М. Япарова//Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Комп.технологии, управление, радиоэлектроника. 2012.№35.С.105-109
- [24] Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
- [25] Бутковский А.Г., Малый С.А., Андреев Ю.Н. Управление нагревом металла. М.: Металлургия, 1981. 272 с.
- [26] Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1980. 384 с.
- [27] Бухгейм А.Л. Введение в теорию обратных задач/ Новосибирск:Наука. 1988.
- [28] Вабищевич П. Н. Численное решение задачи идентификации правой части параболического уравнения/ П.Н. Вабищевич //Известия вузов. Математика.–2003.–№ 1(488), С. 9-36.
- [29] Вабищевич П.Н., Васильев В.И., Васильева М.В. Вычислительная идентификация правой части параболического уравнения/ П.Н. Вабищевич, В.И. Васильев, М.В. Васильева//Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55. № 6. С. 1020-1027.

- [30] Вабищевич П.Н., Васильев В.И. Выбор шага при численном решении краевых задач для параболических уравнений/ П.Н. Вабищевич, В.И. Васильев//Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 5. С. 842-853.
- [31] Вабищевич П.Н., Васильев В.И. Вычислительная идентификация младшего коэффициента параболического уравнения/ П.Н. Вабищевич, В.И. Васильев// Доклады Академии наук. 2014. Т. 455. № 3. С. 258.
- [32] Вабищевич П.Н. Григорьев А.В. Схемы расщепления для псевдопараболических уравнений // Дифференциальные уравнения.2013. Т. 49, №7. С. 837-843
- [33] Вайникко Г.М. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах/ Тарту: Из-во Тартуского гос. университета. 1982, 110 с.
- [34] Вайникко Г.М. Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректно поставленных задачах/Тарту:Из-во Тартуского гос. университета.1982.114с
- [35] Васильев В.И., Кардашевский А.М. Численное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности с помощью интеграла Пуассона/ В.И. Васильев, А.М. Кардашевский// Сибирский журнал индустриальной математики. 2018.Т.21. № 3 (75). С. 26-36.
- [36] Васильев Ф.П. Методы оптимизации/ М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
- [37] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач/М.: Физматлит. 1988.
- [38] Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией.// УрО РАН, Ин-т математики и механики. Екатеринбург: Наука, 1993, 261с.
- [39] Васин В.В. Регулярный алгоритм аппроксимации негладких решений для интегральных уравнений Фредгольма первого рода/ В.В. Васин, Т.И. Серезникова// Выч. технологии. 2010. Т.15, № 2, С.15-23.

- [40] Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого тела М.: Физматлит 2007, 223с.
- [41] Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем/ М.: Наука, 1985. 351с.
- [42] Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры / В.А. Галактионов, В.А. Дородницын, Г.Г. Еленин, С.П. Курдюмов, А.А. Самарский // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Новые достижения. 1986, Т. 28, С. 95-205
- [43] Гинкул С.И., Туяхов А.И., Сибирцева Ю.С. Математическое моделирование температурного режима нагревательных печей прокатных станов при одновременном нагреве металла различного сортамента// Сборник научных трудов Донецкого национального технического университета - 2012. Серия: металлургия, №1-2, 2012, С. 178-185.
- [44] Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики/ М.:МГУ. 1984. 111 с
- [45] Гольдман Н.Л. Однозначность определения функции источника в квазилинейной обратной задаче Стефана с финальным наблюдением/ Н.Л. Гольдман// Доклады РАН.– 2012.– т. 444, № 6. С. 597-601.
- [46] Горунович С.Б., Злобин В.С., Садовский В.М. Термонапряженное состояние подовой секции алюминиевого электролизера/ С.Б. Горунович, В.С. Злобин, В.М. Садовский // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 5. № 2 (10). С. 61-69.
- [47] ГОСТ 6651-2009. Государственная система обеспечения единства измерений. Термопреобразователи сопротивления из платины, меди и никеля. Общие технические требования и методы испытаний/М: Стандартинформ, 2011.

- [48] ГОСТ ГОСТ 8.461-2009 Государственная система обеспечения единства измерений. Термометры сопротивления из платины, меди и никеля. Методика поверки/М: Стандартинформ, 2011.
- [49] Гухман А.А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепло- и массообмена (Процессы переноса в движущейся среде)/М.:URSS. 2018. 328с.
- [50] П. Г. Данилаев, Сравнение двух регуляризирующих алгоритмов решения одной коэффициентной обратной задачи/ П.Г. Данилаев // Известия высших учебных заведений. Математика, 2003, № 5, С. 3–8
- [51] Данилюк И.И. О задаче Стефана/И.И. Данилюк// Успехи математических наук. 1985. Т. 40. № 5(245) С. 133–185.
- [52] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач/ М.:Из-во МГУ. 1994. 208с.
- [53] Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / М.: Наука, 1971. 291 с.
- [54] Дилигенская А.Н. Метод минимаксной оптимизации в двумерной граничной обратной задаче теплопроводности/ А.Н. Дилигенская// Теплофизика высоких температур. 2019.Т. 57.№ 2. С. 226-233.
- [55] Дилигенская А.Н.Решение граничных обратных задач теплопроводности на основе методов оптимизации/ А.Н.Дилигенская//Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион.Технические науки.2016.№ 3(191). С.46-50.
- [56] Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами/ М.:Наука. 1978. 464 с.
- [57] Егоров А.И. Основы теории управления / М.:Физматлит. 2004. 385 с.
- [58] Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Абищева Л.С. Идентификация источника теплоты на основе аналитического решения задачи теплопроводности/ А.В. Еремин, Е.В. Стефанюк, Л.С. Абищева // Известия высших учебных заведений. Серия: Черная металлургия. 2016. №5. С. 339-346.

- [59] Зубченко А.С., Колосков М.М., Каширский Ю.В. Марочник сталей и сплавов/ М.: Машиностроение, 2003. 784 с.
- [60] Иванов В.К. О линейных некорректных задачах/ В.К. Иванов// Доклады АН СССР. 1962. Т.145, №2. С. 270-272.
- [61] Иванов В.К. О равномерной регуляризации неустойчивых задач/ В.К. Иванов//Сибирский математический журнал, 1966, Т.7, № 3, с. 546–558.
- [62] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения/М.: Наука. 1978. 208с.
- [63] Иванов В.К., Королюк Т.И. Об оценке погрешности при решении некорректных задач //Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, Т. 9, № 1, С.30–41.
- [64] Иванов В.К. Избранные научные труды/Редколлегия: В.В. Васин, А.Л. Агеев, В.В. Арестов, К.Н. Гурьянов, И.В.Мельникова// М.:Физматлит.2008.552
- [65] Ивахненко А.Г., Юрачковский Ю.П. Моделирование сложных систем по экспериментальным данным/ М.: Радио и связь, 1987. 120с.
- [66] Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача/ М.: Энергия. 1975. 483 с.
- [67] Исхаков Р.Ф., Котельников А.Б., Ямасаки К. Результаты промышленных испытаний кристаллизаторов Mishima Kosan // Научно-производственное предприятие "Машпром"[Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: [http : //www.mashprom.ru/press/publication/_aview_b6/](http://www.mashprom.ru/press/publication/_aview_b6/) (дата обращения 20.10.2018).
- [68] Ишметьев Е.Н., Андреев С.М., Парсункин Б.Н., Салихов З.Г., Ахметов У.Б. Автоматизация и оптимизация управления технологическими процессами внепечной доводки стали./ Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГУ», 2008. 311 с.
- [69] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.

- [70] Кабанихин С.И., Гасанов А., Пененко А.В. Метод градиентного спуска для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности // Сиб. журн. вычисл. матем. 2009. Т. 11, № 1. С. 41–51.
- [71] Кабанихин С.И., Криворотько О.И., Шишленин М.А. О численном решении обратной задачи термоакустики // Сиб. журн. вычисл. матем. 2013. Т. 16, № 1. С. 39–44.
- [72] Кабанихин С.И., Черемисин А.Н., Шишленин М.А. Обратная задача определения обводненности и дебита в вертикальной фонтанной скважине // Сиб. журн. индустр. матем. 2011. Т. 14, № 3. С. 31–36.
- [73] Казанцев Е.И. Промышленные печи. Справочное руководство для расчетов и проектирования/ М.: Металлургия, 1975. 368 с.
- [74] Калашников А.С. Технология изготовления зубчатых колес/ М.: Машиностроение, 2004. 479 с.
- [75] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1995, 512 с.
- [76] Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел/ М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
- [77] Козлов И.А., Чугунов В.А. Решение обратных задач для нелинейного уравнения параболического типа/ И.А.Козлов, В.А. Чугунов // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2012. № 2. С. 138–143.
- [78] Колибаба О.Б., Бухмиров В.В., Сулейманов М.Г. Математическая модель оптимизации работы термической печи для нагрева насыпных садов / О.Б. Колибаба, В.В. Бухмиров, М.Г. Сулейманов// Вестник Ивановский государственный энергетический университет вып.1, 2014, С.21-24.
- [79] Компания "ПЛК системы"[Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: <https://www.plcsystems.ru/about/index.php> (дата обращения 12.04.2018)

- [80] Королев Ю.М., Ягола А.Г. Оценка погрешностей линейных обратных задачах при наличии априорной информации/Ю.М.Королев, А.Г.Ягола// Выч. методы и программирование:новые выч.технологии.2012.Т.13.№1(25)С.14-18
- [81] Короткий А.И., Ковтунов Д.А. Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Труды института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 2. С. 88-97.
- [82] Короткий А.И., Стародубцева Ю.В. Моделирование прямых и обратных граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2015. 168 с.
- [83] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию / М.: Наука. 1975. 302 с.
- [84] Куликов В.А., Сяктерев В.Н., Сяктерева В.В., Охильков И.Л. Экспериментальный метод определения граничных условий теплообмена в деталях двигателей внутреннего сгорания/ В. А. Куликов, В. Н. Сяктерев, В. В. Сяктерева, И. Л. Охильков// Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2017. Т. 20, № 4, С.82-85.
- [85] С.С.Кутателадзе, Основы теории теплообмена. Атомиздат, 1979, 416с.
- [86] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного/ М.: Наука, 1973, 738 с.
- [87] Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / Новосибирск: СО АН СССР. 1962. 92 с.
- [88] Лаврентьев М.М. Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений /Новосибирск: НГУ, 1973. 71 с.
- [89] Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики/ Новосибирск: Наука, 1982. 88 с.
- [90] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа/ М.:Наука. 1980. 287 с.

- [91] Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи /Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1999, 702 с.
- [92] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики/ М.: Наука, 1972, 407 с.
- [93] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа/ М.: Наука, 1967, 736 с.
- [94] Ландис Е.М. О поведении решения параболического уравнения на характеристике /Е. М. Ландис// Математические заметки 1972.Т. 12, № 3. С.695-703.
- [95] Ларионов В.А. Оптимальное планирование с гарантированной точностью: Дисс. на соискание ученой степени доктора наук/ В.А. Ларионов//Челябинск: Из-во ЮУрГУ. 2012. 301с.
- [96] Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений/ М.: Логос, 2002. 392 с.
- [97] Латтес Р. , Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения/ М.:Мир. 1970. 336 с.
- [98] Лахтин Ю.М., Рахштадт А.Г. Термическая обработка в машиностроении/ М.: Машиностроение. 1980. 367 с.
- [99] Леонов А.С. О квазиоптимальном выборе параметра регуляризации в методе Лаврентьева /А.С. Леонов// Сибирский математический журнал. 1993. Т. 34, № 4. С.695-703.
- [100] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными/ М.:Мир, 1972. 416 с.
- [101] Лисковец О.А, Вариационные методы решения неустойчивых задач/ Минск: Наука и техника. 1981. 343с.
- [102] Лившиц Б.Г., Крапошин В.С., Линецкий Я.Л. Физические свойства металлов и сплавов. / М.: Металлургия. 1980. 320с.

- [103] Ломакин Г.В., Мацулевич М.А. Методика оценки граничных условий при решении задачи определения теплового состояния поршня бензинового двигателя /Г.В. Ломакин, М.А. Мацулевич// Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Машиностроение. 2014, т.14, №1, С.26-32.
- [104] Лукин С. В., Гофман А. В., Баширов Н. Г. Оптимизация вторичного охлаждения в машине непрерывного литья заготовок/С.В. Лукин, А.В. Гофман, Н.Г. Баширов //Вестник Череповецкого государственного университета №1(24), 2010, С.115-120.
- [105] Лукин С.В., Левашев К.Ю., Збродов А.А. Математическое моделирование заготовки квадратного сечения в сортовой МЛНЗ и в термосе./С.В. Лукин, К.Ю. Левашев, А.А. Збродов //Вестник Череповецкого государственного университета №3(24), 2018, С.37-44.
- [106] Лыков А.В. Теория теплопроводности / М.: Высшая школа. 1967. 599 с.
- [107] Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Т.1, Т.2 М.: Мир, 1983, 256 с.
- [108] Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущения/М.: Наука, 1988, 312 с.
- [109] Маркушин А.Н., Бакланов А.В. Исследование рабочего процесса камер сгорания в составе ГТД // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2016. Т. 15, № 3. С. 81-89.
- [110] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 476 с.
- [111] Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 263 с.
- [112] Марчук Г.И. Шайдуров В.В. О численном решении эволюционной задачи с ограниченным оператором // ДАН СССР, Т.216, № 1, 1974. С.
- [113] Марчук Г.И. Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем/М.:Наука. 1979. 320 с.

- [114] Менихес Л.Д. О связи достаточных условий регуляризуемости интегральных уравнений / Л. Д. Менихес // Вестник Южно-Уральского университета. Серия: Математика, Механика, Физика. 2013. Т. 5, №1, С. 50–54.
- [115] Менихес Л.Д. Об одном достаточном условии регуляризуемости линейных обратных задач / Л. Д. Менихес // Математические заметки. 2007. Т.82. №2 С. 242–246.
- [116] Менихес Л.Д. О регуляризуемости некоторых классов отображений, обратных к интегральным операторам/ Л. Д. Менихес // Математические заметки, 1999. Т. 65. №2 , С. 222–229.
- [117] Менихес Л.Д., Танана В.П.: Конечномерные аппроксимации метода Лаврентьева /Л.Д Менихес, В.П. Танана// Сибирский журнал вычислительной математики, 1998. т.1, № 1. с. 416-423.
- [118] Морозов В.А. О регуляризирующих семействах операторов // В кн. Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1967, вып. 8, с.63-93.
- [119] Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач/ М.: Наука, 1987. 360 с.
- [120] Немчинский А.Л. Тепловые расчеты термической обработки/М.: Судпромгиз, 1953. 106с.
- [121] Павлюченков И.А., Усенко С.А. О решении сопряженной задачи тепло- и массопереноса для слитка, полученного методом электрошлаковой наплавки жидким металлом / И.А. Павлюченков, С.А. Усенко С.А // Известия Высших Учебных Заведений. Черная Металлургия. 2012. № 55(2), С.29-31. <https://doi.org/10.17073/0368-0797-2012-2-29-31>
- [122] Пилипенко Н.В. Восстановление нестационарных тепловых потоков на основе решения обратных задач теплопроводности/ Н.В. Пилипенко// Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2017. Т. 60. № 6. С. 538-544.

- [123] Пилипенко Н.В., Сиваков И.А. Метод определения нестационарного теплового потока и теплопроводности с использованием параметрической идентификации /Н.В. Пилипенко, И.А. Сиваков // Измерительная техника. 2011. №3. С. 48-51.
- [124] Пономарев С.В., Мищенко С.В., Дивин А.Г., Ветроградский В.А., Чуриков А.А. Теоретические и практические основы теплофизических измерений/М.: Физматлит, 2008. 408с.
- [125] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов/ М.: Наука, 1983. 393с.
- [126] Прилепко А.И. Корректность обратной задачи об источнике для параболических систем. /А.И. Прилепко, Д.С. Ткаченко // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 11. С. 1540–1547.
- [127] Рапопорт Э.Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 2009. 680 с.
- [128] Рапопорт Э.Я., Дилигенская А.Н. Модальная идентификация граничного воздействия в двумерной обратной задаче теплопроводности / Э.Я. Рапопорт, А.Н. Дилигенская//Вестник Самарского гос. технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2018. Т. 22. № 2. С. 380-394.
- [129] Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э. Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. М.: Наука, 2012. 309 с.
- [130] Репкин Д.А., Мелюков В.В., Гукасов А.К., Чирков А.М., Князева И.А. Определение режима воздействия концентрированными потоками энергии на материалы методом обратной задачи. Вестник Нижегородского университета, 2013. №2. с. 88-91.
- [131] Розенблит Г. Б. Теплопередача в дизелях. М.: Машиностроение, 1977. 216с.
- [132] Рудин У., Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. — 444 с.

- [133] Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Добровольский Ю.Н., Мелюков В.В. Об оптимальном по быстродействию режиме регулирования термического цикла при нагреве стержня/Н.Н. Рыкалин, А.А. Углов, Ю.Н. Добровольский, В.В. Мелюков // Физика и химия обработки материалов. 1976. №4. с. 3-7.
- [134] Сагоустин С.С., Муратов В.А., Ковальчук А.В. Металловедение и термическая обработка металлов/ С.С. Сагоустин, В.А. Муратов, А.В. Ковальчук// Металловедение и термическая обработка металлов. 1997. №10. С.2-4.
- [135] Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред/ М.:Физматлит. 2008. 366с.
- [136] Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем/ М.: Наука, 1971. 553с.
- [137] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.:УРСС, 2003. 784 с.
- [138] Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Васильев В.И. Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности/ А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, В.И. Васильев // Матем. моделирование. 1997. Т. 9, № 5. С. 119—127.
- [139] Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем/ М.: Наука, 1973, 295 с.
- [140] Избранные труды А.А. Самарского/ Отв. ред. А.В. Гулин, В.И. Дмитриев. // М.: МАКС Пресс, 2003. - 531 с.
- [141] Самойлович Ю. А. Формирование слитка /М.: Металлургия, 1977, с. 153.
- [142] Семенов К.К., Солопченко Г.Н. Теоретические предпосылки реализации метрологического автосопровождения программ обработки результатов измерений/К.К. Семенов, Г.Н. Солопченко//Измерительная техника.2010.№6.С.9-14
- [143] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.:Наука, 1966. 444с.

- [144] Солодуша С.В. Япарова Н.М. Численное решение обратной граничной задачи теплопроводности с помощью уравнений Вольтерра I рода /С.В. Солодуша, Н.М. Япарова // Сибирский журнал вычислительной математики. 2015. Т. 18. № 3. С. 327-335.
- [145] Страхов В.Н. О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве //Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 8, с. 1490–1495.
- [146] Табаринцева Е.В., Менихес Л.Д., Дрозин А.Д. О решении граничной обратной задачи для параболического уравнения методом квазиобращения / Е. В. Табаринцева, Л. Д. Менихес, А. Д. Дрозин // Вестник Южно-Уральского университета. Серия: Математика, Механика, Физика. 2012, № 6, С. 8-13.
- [147] Тайманов Р.Е., Сапожникова К.В. Метрологический самоконтроль датчиков/Р.Е.Тайманов, К.В.Сапожникова//Датчики и системы. 2011,№2.С.58-66
- [148] Танана В.П. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации/В.П. Танана//Сиб. журнал индустр. матем. 2004.Т.7.№7.С.117-132.
- [149] Танана В.П., Рекант М.А., Янченко С.И. Оптимизация методов решения операторных уравнений./Свердловск: Изд-во УрГУ, 1987. 220 с.
- [150] Танана В.П., Худышкина Е.В. Об оптимальном методе решения одной обратной задачи Стефана/ В.П. Танана, Е.В. Худышкина// Сибирский журнал индустр. матем., 2005, Т. 8, № 4, С. 124–130
- [151] Танана В.П., Япарова Н.М. Об оптимальном по порядку методе решения условно-корректных задач/ В.П. Танана, Н.М. Япарова// Сиб. журнал вычислительной математики, 2006. Т. 9, № 4. С. 353-368.
- [152] Тарбеев Ю.В., Кузин А.Ю., Тайманов Р.Е., Лукашев А.Л. Новый этап в развитии метрологического обеспечения датчиков/ Ю. В. Тарбеев, А.Ю. Кузин, Р.Е. Тайманов, А.Л. Лукашев //Измерительная техника. 2007. № 3. С. 69-72.
- [153] Телегин А.С., Авдеев В.Г. Теплотехника и нагревательные устройства / А.С. Телегин, В. Г. Авдеева. М.: Машиностроение, 1985., 248с.

- [154] Тимошпольский В.И., Герман М.Л., Кабишов С.М., Корнеев С.В. Теплообмен и тепловые режимы кольцевых печей современных конструкций / В.И. Тимошпольский, М.Л. Герман, С.М. Кабишов, С.В. Корнеев // Энергетика. Известия ВУЗов и энергетических объединений СНГ. 2007. №5. С. 66-77.
- [155] Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач /А.Н. Тихонов // Доклады АН СССР. 1943. Т.39. № 5. С.195–198.
- [156] Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР, 1963, Т. 153, № 1, С. 49–52.
- [157] Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации// Докл. АН СССР, 1963, т.151, №3, с.501-504.
- [158] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач, М.: Наука, 1986 , 288 с.
- [159] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач, М.: Наука, 1990 , 232 с.
- [160] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация/ М.: Наука, 1983, 200 с.
- [161] Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении/ М.: Машиностроение. 1990. 264с.
- [162] Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи// М.: Наука, 1995, 311 с.
- [163] Тихонов А.Н., Самарский А.А Уравнения математической физики, М.: Наука, 1977 (2004), 735 с.
- [164] Товстоног В.А., Боровкова Т.В., Елисеев В.Н. Анализ погрешностей измерения тепловых потоков при испытаниях конструкций , нагреваемых излучением // Инженерный журнал : наука и инновации , 2013, Вып . 7. URL:<http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/851.htm>

- [165] Тутарова В.Д., Сафонова Д.С., Баранчиков К.В., Шаповалов А.Н., Шевченко Е.А. Экспериментальные исследования температуры поверхности непрерывнолитой слябовой заготовки/В.Д. Тутарова, Д.С. Сафонова, К.В. Баранчиков, А.Н. Шаповалов, Е.А.Шевченко // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2012. №3, С.40-42.
- [166] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968
- [167] Черепанова О.Н., Шипина Т.Н. Об одной задаче идентификации функции источника в параболическом уравнении/ О.Н. Черепанова, Т.Н. Шипина// Журнал Северного Федерального университета. Серия: Математика и физика. 2009. Т. 2,№3, С. 370-375.
- [168] Чжан Е, Лукьяненко Д.В., Ягола А.Г. Применение принципа Лагранжа для решения линейных некорректно поставленных обратных задач с использованием априорной информации о решении/Е. Чжан, Д.В. Лукьяненко, А.Г. Ягола // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2013. Т.14 №1. С.468-482.
- [169] Чуновкина А.Г., Сулаберидзе В.Ш. О количественном выражении точности лабораторных и технических измерений/ А.Г.Чуновкина, В.Ш.Сулаберидзе // Измерительная техника. 2017. № 12. С. 58-61.
- [170] Шайдуров В.В. Ричардсона экстраполяция/В.В. Шайдуров// Математическая энциклопедия. М.:Советская энциклопедия. 1984. Т.4, С.
- [171] Шайдуров В.В. Ричардсона экстраполяция. В кн. Математический энциклопедический словарь.М.:Советская энциклопедия.1988, 2003.С.532
- [172] Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов/М.:Наука. 1989. 288 с.
- [173] Шайдуров В.В. О каскадной организации итерационных алгоритмов/ В.В. Шайдуров//Доклады АН. 1998. Т. 358. №5. С.

- [174] Шайдуров В.В., Корнеева А.А. Численный метод анализа нелокальных данных с пленочных терморезисторов электронных плат / В. В. Шайдуров, А. А. Корнеева // Сибирские электронные математические известия, 2017, вып. 14. С. 914–926.
- [175] Шарапов А.И. Дождиков В.И. Оптимизация температурных полей процессов нестационарной теплопроводности / А.И. Шарапов, В.И. Дождиков. // Вести высших учебных заведений черномозья. №3(13). 2008 С.93-97.
- [176] Шестаков А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях / Челябинск: Из-во ЮУрГУ, 2013, 257 с.
- [177] Шестаков А.Л., Семенов А.С. Модель самодиагностирующегося датчика параметра с нелинейной функцией преобразования / А.Л. Шестаков, А.С. Семенов // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. 2015. № 1(11) С.17-22.
- [178] Шульце Ш., Лифтухт Д. Плоцинник У. Патент 2011102580/02 РФ 23.06.2009 Кристаллизатор для разлики металла // Патент России 2448804.27.04.2012 Бюл. № 12
- [179] Юревич Е.И. Теория автоматического управления / Л.: Машиностроение, 1980. 412 с.
- [180] Япарова Н.М. Принцип невязки и его применение к численному моделированию некоторых обратных задач математической физики. Дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук: Челябинск, 2007. 135 с.
- [181] Япарова Н.М. О различных подходах к решению обратных граничных задач тепловой диагностики / Н.М. Япарова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2012. Т. 7. № 34 (293). С. 60–67.
- [182] Япарова Н.М. Численное моделирование решений обратной граничной задачи теплопроводности / Н.М. Япарова // Вестник Южно-Уральского госу-

дарственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2013. Т.6, №3. С. 112-124.

- [183] Япарова Н.М. Об оптимальном по порядку методе решения задачи параметрической идентификации при оценке собственного состояния средств измерения/ Н.М. Япарова// Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т.18. №5. С. 2759-2761.
- [184] Япарова Н.М. Программное обеспечение и алгоритмы обработки информации при калибровке термометров сопротивления /Н.М. Япарова// Программные продукты и системы. 2014. № 1. С. 179-183.
- [185] Япарова Н.М. Численный метод решения некоторых обратных задач теплопроводности с неизвестными начальными условиями/Н.М.Япарова// Вестник Южно-Уральского государственного университета.Серия: Компьютерные технологии,управление,радиоэлектроника.2015.Т.15.№2.С.55 -65.
- [186] Япарова Н.М. Метод решения некоторых многомерных обратных граничных задач параболического типа без начальных условий /Н.М.Япарова// Вестник Южно-Уральского государственного университета.Серия: Компьютерные технологии,управление,радиоэлектроника.2015.Т.15.№2. С. 97-108.
- [187] Япарова Н.М. Метод решения одной обратной задачи идентификации функции источника для систем с распределенными параметрами /Н.М.Япарова// Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т.20. №5. С.1549-1552.
- [188] Япарова Н.М . Численный метод решения обратной задачи с неизвестными начальными условиями для нелинейного параболического уравнения /Н.М. Япарова// Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика, 2016 Т.5. №2. С.43-58.
- [189] Япарова Н.М. Метод решения обратной задачи идентификации функции источника с использованием преобразования Лапласа/Н.М. Япарова// Вест-

ник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика, 2016 Т.5. №3. С. 20-35.

- [190] Япарова Н.М. Метод прогнозирования температурного состояния цилиндра при термообработке в условиях неполной исходной информации /Н.М.Япарова// Вестник Южно-Уральского государственного университета.Серия: Компьютерные технологии,управление,радиоэлектроника. 2019. Т.19. № 2. С.54-65.
- [191] Япарова Н.М. Белоусов М.Д., Шестаков А.Л. Использование регуляризирующего алгоритма для определения коэффициентов в задаче оценки собственного состояния термометров сопротивления/ Н.М. Япарова, М.Д.Белоусов, А.Л.Шестаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2012. № 35. С. 45-49.
- [192] Япарова Н.М. Гаврилова Т.П. Интегральная модель и численный метод определения температуры при линейном теплопереносе/ Н.М. Япарова, Т.П. Гаврилова// Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2019. Т.19. №4. С. 60-71
- [193] Япарова Н.М., Солодуша С.В. О точности численных методов решения уравнений Вольтерра I рода в задачах теплопереноса/Н.М.Япарова, С.В. Солодуша //Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника.2019.Т.19.№1. С.20-29.
- [194] Afridi M., Montgomery C., Cooper-Balis E., Semancik E.S., Kreider K.G., Geist J. Micro hotplate Temperature Sensor Calibration and BIST. Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, 2011. Vol.116, Issue:6, pp.827-838.

- [195] J.V. Beck, B. Blackwell, Charles R. St. Clair Jr. Inverse heat conduction: Ill-Posed Problems, New York, Wiley-Interscience, 1985, 308 p.
- [196] Beilina L., Klivanov M. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problem, Springer, 2012, 420 p.
- [197] M. Bernadou, C. Haenel. Modelization and numerical approximation of piezoelectric thin shells Part I: The continuous problem. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2003. 37-38. pp. 4003-4043.
- [198] Bushuev I. Global uniqueness for inverse parabolic problems with final observation. / I. Bushuev // Inverse Problems. 1995. Vol.11, Issue 4. pp. L11–L16.
- [199] A.P. Calderon, On an inverse boundary value problem, Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Soc. Brasileira de Matematica, Rio de Janeiro, 1980, pp 65–73.
- [200] Cialkowski M. A sequential and global method of solving an inverse problem of heat conduction equation/ M. Cialkowski, K. Grysa//Journal of Theoretical and Applied Mechanics.–2010.–Vol. 48, N 1.–P. 111-134.
- [201] M. Cialkowski, K Grysa.: Sequential and global method of solving an inverse problem of heat conduction equation. Journal of Theoretical and applied Mechanics, 2010, Vol. 48, Number 1, pp. 111-134.
- [202] Chu-Li Fu, Yuan-Xiang Zhang, Hao Cheng, Yun-Jie Ma: The a posteriori Fourier method for solving ill-posed problems. Inverse Problems.2012.Vol.28.pp. 168-194.
- [203] Chunovkina A.G., Stepanov A.V., Burmistrova N.A. Evaluation of inconsistent data: Comparison of two adjustment algorithms / A.G. Chunovkina , A.V. Stepanov , N.A. Burmistrova // Measurement. 2016. Vol. 91. pp. 707-712.
- [204] Clason C., Klivanov M., The quasi-reversibility method for thermoacoustic tomography in a heterogeneous medim, SIAM J. Scientific Computing, 2007. Vol.30, pp. 1-23.

- [205] Cordier L., Abou El Majd, Favier J. Calibration of POD reduced-order models using Tikhonov regularization/International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2010. Vol. 63. issue 2. pp. 269-296.
- [206] Diligenskaya A. N. Solution of the retrospective inverse heat conduction problem with parametric optimization // High Temperature. — 2018. Vol. 56, Issue 3. pp. 382—388.
- [207] Diligenskaya A. N., Rapoport E. Y. Method of minimax optimization in the coefficient inverse heat-conduction problem // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2016. Vol. 89, Issue 4. pp. 1008—1013.
- [208] Forbes A. Efficient Algorithms for Structured Self-Calibration Problems. Algorithms For Approximation IV. Defense Technical Information Center, 2001. pp. 146-153.
- [209] Jonas P., Louis A.K.: Approximate inverse for a one-dimensional inverse heat conduction problem. Inverse Problems, 2000, Vol. 16, pp. 175-185.
- [210] Hasanov A. Pektas B. Identification of an unknown time-dependent heat source term from overspecified Dirichlet boundary data by conjugate gradient method. Computers and Mathematics with Applications. 2013. Vol. 65. Issue 1. pp. 42–57.
- [211] Henry M. Sensor validation: principles and standards. ATP International, University of Oxford, and Graeme Wood, UK National Fieldbus Standards committee, pp39-52, 2005.
- [212] IEC 60751 (2008) Industrial platinum resistance thermometers and platinum temperature sensors. Новая редакция введена в обращение в июле 2008 г.
- [213] Imanuvilov O., Uhlmann G., Yamamoto M. The Calderon Problem with Partial Data in Two Dimensions. Journal American Math. Society. 2010. Issue 23, pp. 655-691.

- [214] Kalivas J. Overview of two-norm and one-norm Tikhonov regularization variants for full wavelength or sparse spectral multivariate calibration models or maintenance. *Journal of Chemometrics*. 2012. Vol. 26, issue 6, pp.218-230.
- [215] Kolodziej J., Mierzwiczak M., Cialkowski M.: Application of the method of fundamental solutions and radial basis functions for inverse heat source problem in case of steady-state. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2010, Vol.37, No.2, pp. 121-124.
- [216] Kreinovich V., Chang C.C., Reznik L., Solopchenko G.N. Inverse problems: fuzzy representation of uncertainty generates a regularization NASA Johnson Space Center 1982
- [217] Krupchyk K., Uhlmann G. The Calderon problem with partial data for conductivities with $3/2$ derivatives *Comm. Math. Phys.* 348 (2016), 185–219.
- [218] Masanori Monde, Hirofumi Arima, Wei Liu, Yuhichi Mitutake, Jaffar A. Hammad.: An analytical solution for two-dimensional inverse heat conduction problems using Laplace transform. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2003, Vol. 46, pp.2135-2148.
- [219] M. Monde. An analytical solution for two-dimensional inverse heat conduction problems using Laplace transform / *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2003. Vol. 46. pp. 2135-2148.
- [220] Ostanin I., Mikhalev A., Zorin D., Oseledets I. Engineering optimization with the fast boundary element method/ *WIT transactions on modelling and simulation*. 2015. Vol.61 pp.175-181 DOI: 10.2495/BEM380141
- [221] Palermo E., Rossi S., Marini F., Patane F., Cappa P., Experimental evaluation of accuracy and repeatability of a novel body-to-sensor calibration procedure for inertial sensor-based gait analysis. *Measurement*. 2014. Vol. 52, pp. 145-155

- [222] Pleshchinskii N.B. On the structure of the solutions of Volterra integral equations with degenerate kernel/ N.B. Pleshchinskii N.B., R.R. Tagirov// Journal of Mathematical Sciences.–1995.–Vol.74, N 5.–P. 1268-1273.
- [223] Prud'homme M., Hguyen T.H.: Fourier analysis of conjugate gradient method applied to inverse heat conduction problems. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1999, Vol. 42, pp. 4447-4460.
- [224] K.K. Semenov, G.N. Solopchenko, V.Y. Kreinovich Inverse problems in theory and practice of measurements and metrology/ Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing X. 2015. pp.330-339.
- [225] Solodusha S.V., Yaparova N.M. Numerical solutions of dynamic measurement challenges by Volterra equations / Proceedings ICIEAM 2018, IEEE Xplore. INSPEC Accession Number: 18738388. DOI: 10.1109/ICIEAM.2018.8729132.
- [226] Solopchenko G. N. Ill-posed problems of measuring engineering/ G.N. Solopchenko // Measuring Engineering, 1974. Issue 1. pp. 51-54
- [227] Shestakov, A.L. Dynamic measuring methods: A review / A.L. Shestakov Acta IMEKO. Volume 8, Issue 1, 2019, pp. 64-76
- [228] Shestakov A.L. Dynamic error correction method/ A.L. Shestakov// IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. 1996. Vol. 45. Issue 1. pp. 250-255.
- [229] Sondow J., Weisstein E.: "Riemann Zeta Function."From MathWorld–A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html>.
- [230] Taymanov R., Sapozhnikova K. Metrological self-check and evolution of metrology/ R. Taymanov, K. Sapozhnikova// Measurement. 2010. Vol. 43. Issue 7. pp. 869-877.
- [231] G. Uhlmann, Calderon's Problem and Electrical Impedance Tomography. Inverse Problems. 2009. Vol.25, 123011

- [232] Uhlmann G., Zhou T. Inverse Electromagnetic Problems. Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics. Springer. 2015 pp. 716-725.
- [233] Vasil'ev V.I., Popov V.V., Kardashevsky A.M. Conjugate gradient method for identification of a spacewise heat source. Lecture Notes in Computer Science. 2018. Vol. 10665 LNCS. pp. 600-607.
- [234] Weber C.F. Analysis and Solution of the Ill-Posed Inverse Heat Conduction Problem, International journal heat mass transfer 1981. Vol.24 Issue 11, pp. 1783–1792.
- [235] Yaparova N. Numerical methods for solving a boundary value inverse heat conduction problem /N. Yaparova// Inverse Problems in Science and Engineering. 2014. Vol.22, Issue 5. pp.832-847.
- [236] Yaparova N. Mathematical modelling and method for solving a parametric identification problem for self-test of measuring devices /Inverse Problems in Science and Engineering. 2016. Vol.24. Issue 1. pp. 77-91 DOI:10.1080/17415977.2015.1017482
- [237] Yaparova N., Shestakov A.L. Methods of calculating temperature values and estimating errors for identification of the state of temperature transducers/ 21st IMEKO World Congress on Measurement in Research and Industry.2015.p.8.-12
- [238] Yaparova N., Shestakov A.L. Method for temperature measuring inside a cylindrical body based on surface measurements/14th IMEKO TC10 Workshop on Technical Diagnostics 2016: New Perspectives in Measurements, Tools and Techniques for Systems Reliability, Maintainability and Safety. 2016. pp.8-12
- [239] Yaparova N. Method for temperature measuring in the rod with heat source under uncertain initial temperature/2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM) 2016 IEEE Conference Publications, pp. 1-4. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7911716

- [240] Yaparova N. Method for solving the problem of nonlinear heating a cylindrical body with unknown initial temperature/ Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings, 2017, 1895:110011, DOI: 10.1063/1.5007417, ULR <http://dx.doi.org/10.1063/1.5007417>
- [241] Yaparova N., Drozin A. Method for internal heat source identification in a rod based on indirect temperature measurements/ Proceedings UralCon 2017, IEEE Xplore. INSPEC Accession Number: 17379433. DOI: 10.1109/URALCON.2017.8120693.
- [242] Yaparova N. Numerical method for solving an inverse boundary problem with unknown initial conditions for parabolic pde using discrete regularization /LNCS, 2017, Vol. 10187, pp.752-759 DOI: 10.1007/978-3-319-57099-0-87
- [243] Yaparova N., Gavrilova T. Mathematical modeling and method for solving an inverse heat conduction problem via the Volterra equation/ Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings, 2018, Vol.2025, 100013
- [244] Zenkour A.M., Vibration of FG nanobeams induced by sinusoidal pulse-heating via a nonlocal thermoelastic model/ A.M. Zenkour, A.E. Abouelregal // ACTA Mechanica.–2014.–Vol. 225, N 12.–P. 3409-3421.
- [245] Zhi Qian, Xiaoli Feng: Numerical solution of a 2D inverse heat conduction problem. Inverse Problems in Science and Engineering, 2013, Vol. 21. Issue 3, pp. 467-484.