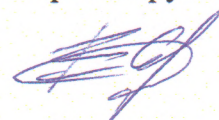


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ЮГОРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи



САФОНОВ ЕГОР ИВАНОВИЧ

**НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА**

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор ф.-м. наук, профессор
Пятков С.Г.

Ханты-Мансийск — 2015

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ.....	4
ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1 Определения и вспомогательные результаты.....	25
1.1 Необходимые определения. Разрешимость прямых задач для параболических систем.....	25
1.2 Необходимые определения. Разрешимость некоторых обратных задач для параболических систем.	28
ГЛАВА 2 Линейный случай. Модели тепломассопереноса и их обобщения.....	32
2.1 Обратные задачи с интегральным условием переопределения для моделей тепломассопереноса. Общий случай.	33
2.2 Обратные задачи с интегральным условием переопределения для моделей тепломассопереноса, описываемых системами уравнений второго порядка.	37
2.3 Ослабленные условия на весовую функцию и обратные задачи для моделей тепломассопереноса. Общий случай.	40
2.4 Обратные задачи с ослабленными условиями на весовую функцию для моделей тепломассопереноса, описываемых системами уравнений второго порядка.	42
2.5 Теорема о сходимости	43
ГЛАВА 3 Коэффициентная обратная задача для моделей тепломассопереноса	47
3.1 Коэффициентные обратные задачи с интегральным условием переопределения для моделей тепломассопереноса. Общий случай.	49
3.2 Коэффициентные обратные задачи с интегральным условием переопределения для моделей тепломассопереноса, описываемых системами уравнений второго порядка.....	60
3.3 Ослабленные условия на весовую функцию и коэффициентные обратные задачи для моделей тепломассопереноса. Общий случай.....	64

3.4 Коэффициентные обратные задачи с ослабленными условиями на весовую функцию для моделей тепломассопереноса, описываемых системами уравнений второго порядка.	69
3.5 Теорема о сходимости	73
ГЛАВА 4 Описание алгоритма численного решения обратной задачи для моделей тепломассопереноса	81
4.1 Алгоритм численного решения задачи	81
4.2 Описание алгоритма	83
4.2.1 Реализация алгоритма.....	85
ГЛАВА 5 Описание программного комплекса и результаты вычислительных экспериментов	93
5.1 Описание программы.....	93
5.1.1 Обоснование и выбор программных средств	93
5.1.2 Разработка web-приложения	96
5.2 Разработка базы данных	98
5.2.1 Описание MS SQL 2008 R2 Express	100
5.3 Результаты вычислительных экспериментов	100
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	106
СПИСОК РИСУНКОВ.....	107
СПИСОК ТАБЛИЦ.....	109
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	110
ПРИЛОЖЕНИЕ А ОПИСАНИЕ ТАБЛИЦ БАЗЫ ДАННЫХ	119
ПРИЛОЖЕНИЕ Б СВИДЕТЕЛЬСТВА О ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММ ДЛЯ ЭВМ	124

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

Обозначим через E — Банахово пространство.

Через $L_p(G; E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) обозначается пространство сильно измеримых функций, определённых на G со значениями в E и конечной нормой $\| \|u(x)\|_E \|_{L_p(G)}$ [1].

Мы также используем пространства $C^k(\overline{G})$, состоящие из функций, имеющих в G все производные до порядка k включительно, непрерывные в G и допускающие непрерывное продолжение на замыкание $\overline{G}$.

Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G; E)$, $W_p^s(Q; E)$ и т.д. стандартные (см. [1]).

Если $E = \mathbb{C}$ или $E = \mathbb{C}^n$, то вместо $W_p^s(G; E)$ или $C^k(\overline{G}; E)$ используем обозначения $W_p^s(G)$ или $C^k(\overline{G})$. Таким образом, включение $u \in W_p^s(G)$ (или $u \in C^k(\overline{G})$) для данной вектор-функции $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ означает, что каждая из компонент u_i принадлежит пространству $W_p^s(G)$ (или $C^k(\overline{G})$). В этом случае под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Будем считать, что аналогичное соглашение справедливо и для матриц, т.е. включение $a \in W_p^s(G)$ для данной матрицы-функции $a = \{a_{ij}\}_{j,i=1}^k$ означает, что $a_{ij}(x) \in W_p^s(G)$ для всех i, j . Для данного интервала $J = (0, T)$, положим $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$, соответственно, $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$.

Под $\rho(x, M)$ понимаем расстояние от точки x до множества M .

Условие $\Gamma \in C^\alpha$ ($\alpha \geq 1$ означает, что для любой точки $x_0 \in \Gamma$ найдется окрестность U (координатная окрестность) и система координат y (локальная система координат), полученная путём поворота и переноса начала координат из исходной, в которой

$$\overline{U} \cap G = \{y \in \mathbb{R}^n : y' \in \overline{B_r}, \omega(y') < y_n \leq \omega(y') + \delta\},$$

$$\overline{U} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}) = \{y \in \mathbb{R}^n : \omega(y') - \delta \leq y_n < \omega(y')\},$$

$$\Gamma \cap \overline{U} = \{y \in \mathbb{R}^n : y' \in \overline{B_r}, y_n = \omega(y')\},$$

где $y' = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, $B_r = \{y' : |y'| < r\}$, $\delta > 0$ — некоторая постоянная и $\omega \in C^\alpha(\overline{B_r})$. Без ограничения общности, считаем, что для локальной системы координат ось y_n направлена по нормали к Γ в точке x_0 .

Выражение (u, v) обозначает скалярное произведение в пространстве $L_2(G)$, т.е. $(u, v) = \int_G u(x)v(x)dx$.

ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи

Основное внимание в данной работе посвящено исследованию вопросов корректности обратных задач для математических моделей тепломассопереноса и построению на основе полученных теоретических результатов новых численных алгоритмов решения этих задач. Процессы тепломассопереноса описываются моделями параболических уравнений второго порядка. Кроме этих моделей, рассматриваются и некоторые их обобщения, в частности, рассматривается ряд обратных задач и для произвольных параболических систем уравнений высокого порядка $2m$. В самом общем случае рассматриваемая модель имеет вид

$$Lu = u_t + A(t, x, D)u = f_c, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (1)$$

где G – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\Gamma \in C^{2m}$.

Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x, t) D^\alpha u|_S = g_j(t, x), \quad S = \Gamma \times (0, T). \quad (2)$$

Правая часть в (1) имеет вид:

$$f_c = \sum_{i=1}^{r_0} b_i(t, x) q_i(t) + f. \quad (3)$$

В случае обратной задачи об определении функции источников (правой части f_c) эллиптический оператор A порядка $2m$ имеет вид $A = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x, t) D^\alpha$, где $a_\alpha(x, t)$ матрицы-функции размерности $h \times h$. В случае коэффициентной обратной задачи считается, что оператор A - представим в виде:

$$A = \sum_{i=r_0+1}^r q_i A_i(x, t) + A_{r+1}(x, t), \quad A_i u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha^i D^\alpha u. \quad (4)$$

Неизвестными в уравнении (1) являются решение u и функции $q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, r$), входящие в правую часть (1) и оператор A . Рассматриваются два вида условий переопределения. В первом случае условия переопределения имеют

вид

$$\int_{G_i} u \varphi_i(x) dx = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (5)$$

где $\varphi_i(x), \psi_i(t)$ – некоторые функции, условия на которые уточняются ниже, и $G_i \subset G$ некоторые области. Во втором случае рассматриваем условия вида

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad x_i \in G, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (6)$$

Параметры s, r связаны равенством $r = sh$. Задача о нахождении функций u, q_i с использованием краевых условий и приведённых выше условий переопределения может быть сформулирована и как некоторая задача управления.

Основные приложения рассматриваемых задач – задачи переноса примесей (в частности, загрязняющих веществ) в жидкости и некоторые задачи переноса тепла.

Целью диссертационной работы является исследование математических моделей тепломассопереноса и их обобщений с последующей разработкой, обоснованием и программной реализации эффективных численных методов решения соответствующих обратных задач математической физики.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

- Исследовать вопросы корректности обратных задач для математических моделей тепломассопереноса с интегральными условиями переопределения с минимальными условиями на ядра интегральных операторов.
- Установить порядок сходимости по параметру приближённых решений для исследуемых моделей тепломассопереноса.
- Разработать эффективные численные методы и алгоритмы поиска приближённых решений с помощью методов конечных элементов и конечных разностей, получить соответствующие оценки погрешности решений, которые позволяют оценить степень надёжности полученных результатов.
- Реализовать в виде комплекса программ для решения задач на компьютере разработанные численные методы и алгоритмы.
- Провести вычислительные эксперименты на модельных примерах и проанализировать полученные результаты.

Методы исследования основаны на методах уравнений математической физики, математического моделирования и численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений.

Актуальность темы исследования

Системы конвекции-диффузии (тепломассопереноса) возникают в самых различных областях математической физики. Одной из моделей, возникающей при описании процессов тепломассопереноса, является система уравнений Навье-Стокса, дополненная уравнениями для температуры и концентраций переносимых веществ. Простейшая модель такого вида — модель Обербека–Буссинеска (см. [2, 3]). Очень часто, особенно в одномерном случае, для упрощения модели считается, что скорости течения известны и рассматривается чисто параболическая система уравнений. Кроме этих, самых естественных, имеется и много других приложений. Н. Шигесада, К. Кавасаки и И. Терамото [4] изучали динамику популяции в своем теоретическом исследовании пространственной сегрегации взаимодействующих видов. Авторы представили модель двух популяции в виде

$$\begin{aligned}\partial_t u_r + \operatorname{div} \vec{j}_r(u) &= u_r g_r(u) \text{ в } \Omega, \\ (\vec{j}_r(u) | \vec{\nu}) &= 0 \text{ на } \partial\Omega,\end{aligned}$$

$r = 1, 2$, где $u = (u_1, u_2)$ вектор плотности населения (т.е. $h = 2$) и Ω является двумерной областью (т.е. $n = 2$). Поскольку величина u_r представляет собой плотность, в работе идёт поиск только неотрицательного решения.

Кроме того, вектор потока $\vec{j}_r(u)$ имеет вид

$$\vec{j}_r(u) = -\nabla[(\alpha_r + \beta_{r1}u_1 + \beta_{r2}u_2)u_r] - \gamma_r u_r \nabla\varphi,$$

где $\alpha_r > 0$, $\beta_{rs} \geq 0$, $\gamma \geq 0$ константы, а φ известный внешний потенциал.

О. Пенрос и П.К. Фире [5] изучают термодинамически согласованные модели фазового поля для изучения фазовых переходов, которые включают в себя "параметр порядка" φ и абсолютную температуру T , которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}\partial_t \varphi &= \nabla(k(T)\nabla\varphi) + f_1(\varphi, T) \\ \mu(\varphi)\partial_t T - \lambda(\varphi, T)\partial_t \varphi &= -\nabla(M(\varphi, T)\nabla(1/T))\end{aligned} \quad \text{в } \Omega. \quad (7)$$

Здесь k , λ , μ , M и f_1 некоторые известные гладкие функции такие, что k , μ и M положительные. Граничные условия в работе [5] не рассматриваются.

Ж. Спрэжелс и С. Женг [6] изучается частный случай уравнения (7) с коэффициентами

$$k = const, \quad M = const, \quad \mu = 1, \quad \lambda(\varphi, T) = a\varphi$$

и для некоторого положительного выполняется условие

$$f_1(\varphi, T) = s'(\varphi) + a\varphi/T,$$

где s – некоторая заданная гладкая функция. Так же авторы дополнили задачу, используя граничные условия Неймана вида

$$\partial_v \varphi = 0, \quad \partial_v T + \alpha(T - T_\partial) = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

где α положительная константа, а T_∂ положительная функция.

Ф. Климент, Х. ван Дуейн и С. Ли [7] рассматривают задачу смешивания пресной и морской грунтовых вод, происходящих из-за процессов механической дисперсии и молекулярной диффузии. Авторы свели задачу к одному сбалансированному уравнению

$$\partial_t u + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \text{ в } \Omega,$$

с граничным условием

$$(\vec{j}|\vec{\nu}) = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

где $\vec{j} = -M(\vec{q})\nabla u + \vec{q}u$ и $n = 2$. Здесь $M(\vec{q})$ гидродинамическая дисперсионная матрица, заданная (в безразмерном виде) как

$$M(\vec{q})_{jk} = \begin{cases} (a|\vec{q}| + m)\delta_{jk} + bq_j q_k / |\vec{q}| & \text{если } \vec{q} \neq 0, \\ m\delta_{jk} & \text{если } \vec{q} = 0, \end{cases}$$

где m положительное, а a и b неотрицательные константы.

Д.С. Коэн совместно с Р.В. Кокс и А.Б. Вайт [8–10] проводили исследования диффузии и вязко-упругой релаксации в полимерах, где был введен класс нестандартных моделей реакции-диффузии, которые были проанализированы с помощью формальных асимптотических методов и других численных методов. Задача сводится к нахождению двух неизвестных функций плотности u жидкости, проникающей в запутанную сеть полимера, и напряжение σ показывающее проникновение молекул. Эти величины удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u_t + j_x &= 0 \\ \sigma_t - \varphi(u)u_t &= \rho(u)u - \beta(u)\sigma \end{aligned} \quad \text{в } \Omega,$$

где в $\Omega \subset \mathbb{R}$ и в качестве граничного условия рассматривается граничное условие Дирихле

$$u = \psi \text{ на } \partial\Omega.$$

Вектор потока задаётся в виде

$$j = -D(u)u_x - H(u)\sigma_x - M(u, \sigma)u,$$

где $D > 0$ и H, φ, ρ и β неотрицательны, а M и ψ некоторые гладкие функции.

В книге К. Мика, А. Кимла и Ж. Ньюман [11], а так же в монографии [12] рассматривается сосуд Ω , граница которого состоит из наружной стенки $\partial_W\Omega$ и поверхности $\partial_E\Omega$ электродов, анодом A и катодом C , так что $\partial\Omega$ это объединение непересекающихся $\partial_W\Omega$ и $\partial_E\Omega$. В Ω в растворе содержатся N частиц, которые могут быть либо ионами, либо электрически нейтральными частицами с неотрицательной концентрацией обозначаемых как $u_1, \dots, u_N$. Каждая частица r удовлетворяет закону сохранения масс.

$$\partial_t u_r + \operatorname{div} \vec{j}_r = f_r \text{ в } \Omega \quad (8)$$

Поток $\vec{j}_r$ обусловлен градиентом концентрации частиц r , конвекции и миграции в электрическом поле φ .

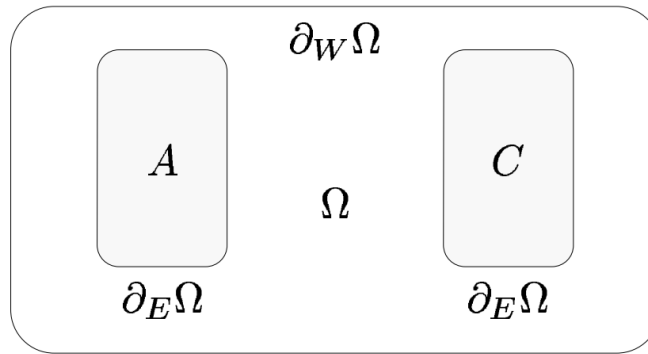


Рисунок 1 — Рассматриваемый сосуд Ω .

Большее количество описаний различных приложений параболических систем второго порядка могут быть найдены, например, в работе [13].

Обратные задачи возникают при исследовании многих прикладных задач, в частности, в геофизике, сейсмике, томографии и ряде других областей. В настоящее время имеется огромное количество различных постановок обратных задач и можно отметить, что некоторые классы обратных задач исследованы

уже достаточно полно: имеются теоремы единственности, разрешимости, или, по крайней мере оценки устойчивости решений. Среди работ, посвящённых параболическим уравнениям и системам выделим работы: Прилепко А.И., Орловский Д.Г., Денисов А.М. (МГУ), Камынин В.Л. (Национальный исследовательский ядерный университет, МИФИ), Исаков В. (США), Ямамото М. (Япония), Кожанов А.И. (Новосибирск), А. Лорензи. (Италия), Белов Ю.Я. (Красноярск) и многие другие. Основные классы исследуемых задач отличаются по виду условий переопределения: интегральные условия с данными зависящими от времени и (или) пространственных переменных, условие финального переопределения (в этом случае в финальный момент времени задано решение), оператор Дирихле-Неймана или Неймана-Дирихле, эволюционные данные переопределения (в этом случае данные зависят от времени, как правило решение или его производные задаются на некоторых пространственных многообразиях или в отдельных точках). Стоит отметить большое количество работ Новосибирской школы по обратным задачам (это в основном работы, посвящённые гиперболическим уравнениям и системам): Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Яхно В., Аниконов Ю.Е., Бухгейм А.Л., Кабанихин С.И., а также работы Белишева М.И. (Санкт-Петербург), Клибанова М.И. (США), Ухлман Г. (США). Отметим ряд недавних монографий, где можно найти постановки и подробную библиографию: [14–16]. Среди последних монографий, посвящённым численным методам решения обратных задач можно выделить, например, монографии: [17–19]. Опишем некоторые классы уже достаточно хорошо рассмотренных задач. Обратным задачам с финальным переопределением посвящено большое количество работ, в частности, работы Прилепко А.И., Орловского Д.Г., Васина И.А., Гольдман Н.А., Камынина В.Л. и ряда других авторов. Подобные задачи были рассмотрены и для некоторых систем уравнений, включая систему уравнений Навье-Стокса. Большое количество результатов и библиография может быть найдено в известной монографии: [20]. Второй класс задач, возникающих прежде всего в геофизике, это задачи восстановления параметров среды (коэффициентов уравнения) по данным Коши на боковой поверхности цилиндра или по оператору Неймана-Дирихле (Дирихле-Неймана) (см. недавние обзорную работу [21] или работу [22]). Теорем существования в случае, если условия переопределения типа данных Коши задаются на боковой поверхности или её части в литературе

не имеется (прямым задачам с данными Коши на боковой поверхности цилиндра посвящена, например, монография [23]) за исключением некоторых самых простых модельных ситуаций. В этом случае основные результаты - теоремы единственности и оценки устойчивости задачи. Ряд результатов по обратным задачам с данными Коши на боковой поверхности цилиндра и по задачам с заданным оператором Дирихле-Неймана, (Неймана-Дирихле) изложен в монографиях Исакова В. и Рамма А.Г. [24, 25]. В этих монографиях кроме ряда результатов имеется также и подробная библиография, касающаяся оценок устойчивости в случае, когда неизвестный коэффициент уравнения или правая часть зависят от пространственных переменных и не зависят от времени. Другие классы обратных задач - это задачи с условиями переопределения интегрального характера (см., например, работы [26] и имеющуюся там библиографию) и с условиями когда данные измерений заданы на некоторых многообразиях часто лежащих внутри области определения. Задачи, с переопределением на гиперплоскостях рассматривались в работах Белова Ю.Я., Баранова С.Н., Полинцева С.В., Шипиной Т.Н., Аниконова Ю.Е. и ряда других авторов (см. монографию: [27]), а с переопределением на прямых в работах Иванчова М. (см. монографию [28]). Среди последних работ отметим также работы: [29–31]. Однако, теоремы существования и доказательства корректности были получены для достаточно узких классов уравнений (модельных уравнений второго порядка). Рассматривались в основном линейные или самые простые квазилинейные случаи, зачастую рассматриваемые уравнения были одномерны и их коэффициенты, как правило, не зависели от части переменных. Все это было связано с методами исследования. Обратные и экстремальные задачи для различных моделей тепломассопереноса и магнитной гидродинамики в стационарном случае исследуются в монографии Алексеева Г.В. [32], где рассматривается большое количество обратных и экстремальных задач для моделей тепломассопереноса, магнитной гидродинамики и некоторых других. Всевозможные постановки обратных задач для моделей тепломассопереноса и конвекции-диффузии (по сути это один и тот же класс моделей) описаны например, в монографиях [33–36] и ряде других. Отметим, однако, что теоретических результатов посвящённых обратным задачам для таких математических моделей крайне мало. В многомерном случае есть только отдельные результаты, касающиеся оценок устойчивости. Можно сослать-

ся на работы Ямомото М. (см., например, [37]), Искендерова А.Д. и Ахундова А.Я. [38] и некоторых других авторов. В вышеприведённых монографиях имеется большое количество различных физических постановок обратных задач и приводятся численные методы их решения. К сожалению, подавляющее большинство численных алгоритмов решения рассматриваемых обратных задач для моделей тепломассопереноса основаны на замене задачи задачей оптимального управления путём введения подходящего функционала качества и затем выбором подходящего алгоритма для решения этой задачи оптимального управления. Однако, функционал в нелинейном случае не является выпуклым, и фактически не очень понятно даёт ли его минимизация решение искомой задачи. Самая простая задача тепломассопереноса – модельная задача об определении точечного источника, например, источника загрязнения в водоеме или атмосфере, (его местоположения и мощности). С математической точки зрения здесь речь идет об определении правой части в уравнении имеющей вид дельта-функции Дирака умноженной на некоторую функцию зависящую от времени, которая характеризует мощность источника. В одномерном случае имеются некоторые результаты (например о возможности его определения по замерам в двух точках [39], однако, приведённые условия трудно проверяемы и фактически имеются только теоремы о единственности решений. Аналогичная ситуация имеется и в многомерном случае. В многомерном случае ($n = 2, 3$ см. [40, 41]) имеется только ряд результатов по численному решению этой задачи. Задачам такого типа посвящены также работы Каннона Дж.Р. [42], Ингл Г.В. [43], Ямомото М. [44, 45] (источники вида $F(x, t) = \alpha(t)f(x)$, $f \in L_2$), Хеттлич Ф. и Рандел В. [46]. Задача с нелинейным источником вида $F(x, t) = G(u(x, t))$, рассматривается в работах [47, 48]. К сожалению, подавляющее большинство численных методов решения подобных задач основано, как уже отмечалось, на сведении задачи к задаче оптимального управления. Такая ситуация с численными методами имеет место в силу того, что нет хороших теоретических результатов, либо обосновывающих корректность задачи, либо хотя бы позволяющих строить хорошие численные алгоритмы. Аналогичная ситуация имеет место и в случае многих других задач, возникающих в приложениях для параболических и многих других классов уравнений и систем (например, задача об определении потока через границу области и в целом в задачах конвективного теплообмена) (см. [34, 35]).

Некоторые конкретные модели, близкие к рассматриваемой в диссертации приведены ниже.

И.В. Фроленков и Г.В. Романенко [31] исследуется коэффициентная обратная задача для многомерного параболического уравнения в случае данных Коши с неизвестным коэффициентом, стоящим перед дифференциальным оператором второго порядка.

$$u_t = a(t)u_{zz}(t, x, z) + b(t)\Delta_x u(t, x, z) + \lambda(t, z)B_z(u),$$

где $B_z(u) = c_1(t)u_{zz}(t, x, z) + c_2(t)u_z(t, x, z) + c_3(t)u(t, x, z)$, $a(t)$, $b(t)$, $c_i(t)$ – непрерывные ограниченные на $[0, T]$. Функция $u_0(x, z)$ действительная и задана в R^{n+1} . Функция $\lambda(t, z)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t, x, z)$.

В своей работе [40] Чинг-Ю Янг рассматривает вопрос восстановления функции мощности теплового источника $s(t)$ в двумерной задаче теплопроводности представленной вместе с начальным условием в следующем виде

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + s(t)\delta(x - \bar{x}, y - \bar{y}) = \frac{\partial T}{\partial t},$$

$$0 < x < 1, 0 < y < 1, t > 0,$$

$$T(x, y, 0) = T_0 = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, t = 0,$$

с граничными условиями следующего вида:

$$T(1, y, t) = 1, x = 1, 0 \leq y \leq 1, t > 0;$$

$$T(x, 0, t) = 1, 0 \leq x < 1, y = 0, t > 0;$$

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} = 0, x = 0, 0 \leq y < 1, t > 0;$$

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} = 0, 0 \leq x < 1, y = 1, t > 0.$$

Условие переопределения представлено в виде

$$T(\bar{x}, \bar{y}) = \psi(t).$$

Функция источника принимает вид

$$s(t) = \sum_{m=1}^{\bar{m}} a_m \psi_m(t),$$

где $\psi_m(t)$ любая невырожденная функция, a_m коэффициенты и $\bar{m}$ положительное число. Автор приводит численный метод основанный на методе конечно-разностных аппроксимаций для дифференциального уравнения теплопроводности. Для демонстрации работы метода приводятся три эксперимента. По ним

видно, что вне зависимости от положения точек измерения, вводимого возмущения ω и типа изменения мощности теплового источника (ступенчатый, треугольный, синусоидальный) показанные результаты очень близки к искомым.

В.Г. Романов [49] рассматривает обратную задачу для дифференциального уравнения

$$u_t = u_{xx} + q(x, t)u, \quad (-\infty < x < \infty; t \geq 0),$$

задача сводится к нахождению коэффициента $q(x, t)$ для этого уравнения, решение задаётся на некотором многообразии. Основным результатом работы является доказательство теоремы единственности. Автор рассматривает искомый коэффициент $q(x, t)$ в виде

$$q(x, t) = \sum_{k=1}^N a_k(x)b_k(t),$$

где $a_k(x) \in C^2(-\infty, \infty)$, $b_k(t) \in C^1[0, \infty)$ функции однозначно определённые в области $D(T) = \{(x, t) : |x| < \infty, 0 \leq t \leq T\}$

А. Шидфар, К. Таваколи [50] рассматривают обратную задачу теплопроводности

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + a(t)u(x, t) \quad (x, t) \in D \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \geq 0, \\ u(0, t) &= h(t), \quad h(t) \neq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где $f(x)$ и $h(t)$ некоторые данные функции на области $D = \{(x, t) | x > 0, 0 < t < T\}$. Неизвестными являются функция $a(t)$ и решение $u(x, t)$. Для данной задачи понадобится условие переопределения

$$-u_x(0, t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $g(t)$ заданная функция. Уравнение сводится ко второму интегральному уравнению Вольтерра второго рода, используя его авторы доказывают, что решение существует и оно единственно.

В.Т. Борухов, П.Н. Вабищевич [51] обсуждается возможность численного решения задачи восстановления неизвестных функций источников тепла по дополнительным измерениям температуры в отдельных точках. В работе рассматривается простейшая одномерная по пространству обратная задача по восстановлению переменной интенсивности источников тепла при известном их распре-

лении по пространству. Предложенный авторами численный алгоритм приближённого решения обратной задачи основан на преобразовании исходной задачи к краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности. Состояние модели описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

неизвестной помимо $u(x, t)$ является и правая часть $f(x, t)$.

О.А. Афиногенов, Ю.Я. Белов и И.В. Фроленков [52] найдены достаточные условия разрешимости в целом (глобально) и стабилизации решения задачи в классах гладких ограниченных функций. В работе исследуется задача Коши и краевые задачи с условиями Дирихле и Неймана. В области $\Pi_{(0,T)} = \{(t, x) | 0 < t < T, x \in E_1\}$ задача Коши

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= b(t)u_{xx}(t, x) + a(t)u(t, x) + f(t)g(t, x), \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $u_0(x)$ и $g(t, x)$ вещественные функции, определённые на промежутке $[0, T]$, E_1 и $\Pi_{[0,T]}$ соответственно. Задача состоит в определении вместе с решением $u(t, x)$ функции $f(t)$, удовлетворяющее локальным условиям переопределения

$$u(t, 0) = \varphi(t), \quad t \in [0, T],$$

при условии согласования

$$u_0(0) = \varphi(0).$$

Авторами И.В. Фроленковым и Е.Н. Кригер в своей работе [53, 54] рассматривали задачу идентификации функции источника специального вида в параболическом уравнении в случае данных Коши. Существование и единственность решения задачи доказаны в классах гладких ограниченных функций. Для исследования задачи применяется метод, позволяющий, используя условия переопределения, привести исходную обратную задачу к прямой задаче для нагруженного уравнения. Существование решения прямой задачи доказано методом слабой аппроксимации. Правая часть параболического уравнения представлена в виде

$$\begin{aligned} f(t, x, z) &\cdot \lambda(t, x, z), \quad t \in (0, T), \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2, \\ \lambda(t, x, z) &= \lambda_1(t, x) + \lambda_2(t, z). \end{aligned}$$

В работе доказаны существование, единственность и устойчивость по входным данным решения задачи идентификации функции источника специального вида в параболическом уравнении в случае данных Коши.

М.И. Измайлов и Ф. Канка в своих работах [55, 56] рассматривают задачу определения зависящих от времени коэффициента теплопроводности и распределения температуры в одномерном уравнении теплопроводности

$$u_t - u_{xx} + a(t)u = F(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

в случае нелокальной границы

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

и интегральных условий переопределения

$$\int_0^1 u(x, t) dx = g(t).$$

Начальное условие

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

В работе изучаются вопросы существования, единственности и непрерывной зависимости от данных. А так же приводятся результаты численных экспериментов, которые показывают хорошую сходимость полученных приближений функции $a(t)$ к исходным значениям, с относительной погрешностью порядка 0.01.

А. Хазани и прочими авторами [57] исследовалась обратная задача определения зависящих от времени источника тепла $r(t)$ вместе с решением уравнения теплопроводности с нелокальными граничными условиями и интегральными условиями переопределения.

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= r(t)f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= u(1, t), \quad u_x(0, t) + \alpha u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \int_0^1 u(x, t) dx &= E(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

В работе доказываются существование, единственность и непрерывная зависимость решения обратной задачи от данных. В работе используется метод граничных элементов в сочетании с методом регуляризации Тихонова различного порядка, чтобы получить стабильное решение. Так же представлены численные результаты экспериментов.

М.А. Кулиев [58] рассматривается n -мерная обратная граничная задача для линейного гиперболического уравнения

$$\partial^2 u(x, t) / \partial t^2 - Lu(x, t) = c(t)d(x, t)\partial u(x, t) / \partial t + a(t)b(x, t)u(x, t) + f(t)F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T],$$

в котором определяются вместе с решением $u(x, t)$, функции $a(t)$, $c(t)$ и $f(t)$ - мощность функции источника

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad \partial u(x, t) / \partial t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Omega, \\ U(x, t)|_{\Gamma_T} = 0, \quad \Gamma_T = S \times (0, T),$$

с локальными условиями переопределения вида

$$U(x_i, t) = h_i(t), \quad (i = 1, 2, 3), \quad t \in [0, T].$$

В работе доказано существование и единственность решения обратной задачи в Банаховом пространстве $B_{2,T}^{\alpha, \alpha-1}$.

В работах Н.И. Иванчова [59, 60] рассматриваются обратная задача для одномерного параболического уравнения с локальными условиями переопределения. В [59] уравнение принимает вид

$$u_t - a(t)u_{xx} - b(t)u_x - c(x, t)u = f(x, t), \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T,$$

неизвестными являются два зависящих от времени коэффициента $a(t)$ и $b(t)$ и решение $u(x, t)$. В [60] решением является тройка $a(t)$, $b(x)$, $u(x, t)$, а уравнение принимает вид

$$u_t - a(t)(u_{xx} - b(x)u_x) - c(x, t)u = f(x, t), \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T,$$

решением, которого является тройка $a(t)$, $b(x)$, $u(x, t)$. один зависящий от времени, второй зависящий от пространственной переменной. В работах установлены условия существования решения на некотором промежутке времени, длина

которого зависит от исходных данных задачи. Единственность решения имеет место на всем промежутке времени.

А.И. Кожанов в своих работах [61, 62] исследует разрешимость нелинейных обратных задач нахождения решения $u(x, t)$ и коэффициентов зависящих от времени $p(t)$ или $q(t)$ в параболических уравнениях

$$\begin{aligned} p(t)u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x, t)u_{x_j}) + a^i(x, t)u_{x_i} + a(x, t)u &= f(x, t), \\ u_t - q(t)\frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x, t)u_{x_j}) + a^i(x, t)u_{x_i} + a(x, t)u &= f(x, t), \end{aligned}$$

при задании условий первой или второй начально-краевых задач и интегрального условия переопределения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярного решения.

Пусть D – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с границей Γ , Q – цилиндр $D \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$

$$Lu \equiv u_t - \partial u + \lambda u + q(x, t)c(x, t)u = f(x, t),$$

где λ – известная положительная постоянная, $f(x, t)$ и $c(x, t)$ – известные функции, условия на которые будут уточняться ниже, функция же $q(x, t)$ наряду с решением $u(x, t)$ подлежит определению.

С.Н. Баранов и Ю.Я. Белов [63] рассматривали обратную задачу идентификации трёх старших коэффициентов многомерного параболического уравнения в случае неоднородных условий переопределения. Задачи идентификации двух коэффициентов

$$\begin{aligned} u_t(t, x, z) &= L_x(u(t, x, z)) + a(t, x)u_{zz}(t, x, z) + \\ &+ b(t, x)u_z(t, x, z) + c(t, x)u(t, x, z) + f(t, x, z), \\ u(0, x, z) &= u_0(x, z), \quad x \in E_m, \quad z \in E_1. \end{aligned}$$

Среди других работ стоит отметить также работы [27, 32, 56, 64–72]. В литературе рассматривались как условия переопределения вида (5) так и условия переопределения (6). В частности, обратные задачи об определении коэффициентов уравнения (1), зависящих от переменной t , с условием переопределения (5), где $r = 1$ и $G_i = G$, рассматривались в [38, 55, 60, 61, 73–75]. Соответственно линейные обратные задачи об определении правой части исследовались в [70, 76]. Аналогично, как линейные так и коэффициентные обратные задачи

с условием переопределения (6) рассматривались в [20, 69] и в [77–79] соответственно. Большое количество физических постановок и численные методы решения обратных коэффициентных задач и задач об определении функции источника с условиями переопределения вида (6) приведены в [33], [34]. Задачи определения функции источника вида (3) с условиями переопределения вида (6) рассмотрены в [35, гл. 3], где основное внимание уделено численным методам решения обратных задач. В этой монографии рассматривается задача определения произвольной функции источника $G(x, t)$, исходя из произвольного количества измерений вида (6). При этом функция источника заменяется его приближением вида (3), которое и подлежит определению. Однако, отметим, что большинство работ посвящено модельным уравнениям и случаю $n = 1$. Можно отметить работы [80, 81], где были рассмотрены задачи вида (1), (2), (6) в общей постановке. Также ссылаясь на монографии [20, 27, 28, 38, 82], где имеется большое количество постановок обратных задач для параболических уравнений и систем, и ряд результатов. В работе [69] рассматривалась более простая, чем у нас, задача: определялась временная компонента $q(t)$ функции источника $q(t)\psi(x, y)$ и задача рассматривалась при более жёстких, чем у нас условиях на правую часть, точнее, требовалось, чтобы $\psi|_{\Gamma} = 0$.

В целом, анализируя приведённую литературу, можно сделать вывод, что теоретических результатов посвящённых вопросам корректности исследуемых постановок очень мало, особенно в многомерном случае. Результаты подобного типа важны при построении численных алгоритмов решения обратных задач и позволяют обосновать их сходимость, а также и строить новые численные методы.

Краткое содержание диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и двух приложений, содержит 8 рисунков и 1 таблиц. Список литературы содержит 97 наименований. Полный объём диссертации составляет 126. Опишем содержание работы. В первой главе приводятся ряд вспомогательных утверждений, используемых в доказательствах основных результатов.

Во второй главе рассматривается обратную задачу (1)-(3), с интегральным условием переопределения вида (5) для моделей тепломассопереноса, предпо-

лагая, что неизвестные функции $q_i(t)$ входят только, в правую часть уравнения (1). Обратная задача в таком случае является линейной.

Третья глава посвящена рассмотрению коэффициентных обратных задач для моделей тепломассопереноса в общем виде, где неизвестные функции входят как в правую часть уравнения, так и в оператор A как коэффициенты. Задача в таком случае является нелинейной.

В четвертой главе описываются используемые программные решения при реализации алгоритма и программы решения задач.

Основные результаты численных экспериментов работы представлены в пятой главе.

В данной работе, при определённых естественных условиях на данные задачи показывается, что задача (1)-(5) имеет единственное решение. Далее, выбирая подходящим образом функции $\varphi_i = \varphi_i(x, \varepsilon)$, зависящее от параметра $\varepsilon > 0$ (фактически строится приближение δ -функции Дирака, см. ниже), показывается, что решение u_ε задачи (1)-(5) сходится к решению задачи (1)-(4), (6) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теоремы подобного рода важны при построении численных алгоритмов построения решений задач вида (1)-(4), (6). С одной стороны, для этих задач приходится вычислять производные высокого порядка для приближённых решений, что является некорректной задачей, и по этим причинам иногда возникают и излишние условия на коэффициенты уравнения (см., например, [69]). С другой стороны, стоит однако отметить, что чаще всего для численного решения задач (1)-(4), (6) использовались методы, основанные на минимизации некоторого функционала (который вообще говоря не являлся выпуклым) (см. например, [33] или [35]). Алгоритмы, основанные на идее приближения решений задачи (1)-(4), (6) решениями некоторых задач вида (1)-(5), позволяют построить решение довольно простым способом и с небольшим количеством расчётов, что подтверждается и численными экспериментами.

Основные положения, выносимые на защиту.

- Исследованы вопросы разрешимости, существования и единственности решений новых классов обратных задач для математических моделей тепломассопереноса с интегральными условиями переопределения, для таких задач также получены оценки устойчивости.

- Доказано, что задача с точечными условиями переопределения для математических моделей тепломассопереноса может быть аппроксимирована задачей с интегральным условием переопределения при подходящем выборе плотностей в этих интегральных условиях. Получены оценки сходимости.
- Предложен и реализован новый алгоритм численного решения обратных задач для моделей тепломассопереноса, алгоритм реализован в случае определения функции плотности источника.
- Создан и зарегистрирован комплекс программ для решения ряда модельных обратных задач для моделей тепломассопереноса и проведены вычисленные эксперименты.

Научная новизна.

- Впервые исследованы вопросы корректности для многомерных достаточно общих классов обратных задач для математических моделей тепломассопереноса и более общих моделей с интегральными условиями переопределения.
- В отличие от предыдущих работ в диссертации рассмотрены вопросы о построении неизвестных функций, входящих в уравнение, в виде конечных отрезков ряда по известному базису.
- Впервые, рассмотрен вопрос о возможности приближения решений задач с точечными условиями переопределения решениями задач с интегральными условиями переопределения.
- Теоретические результаты работы позволяют строить большое количество новых методов, основанных на методе конечных разностей, методе конечных элементов и других классических методах численного решения задач математической физики.
- Построен и реализован новый прямой итерационный численный метод для нахождения плотности функции источника или коэффициентов уравнения характеризующих параметров среды.
- Создан новый комплекс программ для решения ряда модельных обратных задач тепломассопереноса.

Научная и практическая значимость Теоретические результаты работы развивают теорию обратных задач для математических моделей тепломассопереноса, указывают новые подходы в их решении и могут быть использова-

ны в дальнейшем при изучении обратных задач для математических моделей тепломассопереноса, и других моделей, в частности, моделей экологии, фильтрации, динамики популяции, фазовых полей, модели описывающие процессы механической дисперсии и молекулярной диффузии и ряд других. Предлагаемый алгоритм позволяет разрабатывать новые программы и информационно-моделирующие комплексы, а также системы поддержки принятия решений в задачах рационального природопользования и предупреждения чрезвычайных ситуаций. Разработанный программный комплекс позволяет проводить распараллеливание процессов, что обеспечит повышение эффективности работы для использования в практических задачах построения и определения функции источника загрязнения по данным замера.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждается согласием между теоретическими положениями и результатами вычислительных экспериментов, проведённых в данной работе и исследованиями других авторов. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах ЮГУ, а также на 5-и научных и научно-практических конференциях:

- LI Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск 2014).
- III Молодежная научно-практическая конференция «Информационные технологии Югры» (Ханты-Мансийск 2014).
- VII Международная конференция по математическому моделированию (Якутск 2014).
- Международная научная конференция «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций» (Казань 2014).
- Международная конференция «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» (Челябинск 2014).

Личный вклад. Все приведённые в диссертации теоретические результаты, алгоритмы численного нахождения решения u и вектора правой части f на основе метода конечных элементов, программная реализация и численные экс-

перименты восстановления функций источников и коэффициентов q получены автором лично.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в восьми печатных изданиях [83–90], четыре из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [87–90], четыре — в тезисах докладов [83–86], зарегистрированы две программы [91, 92] и одна база данных [93] в реестрах программ для ЭВМ и баз данных соответственно.

Благодарности. Приношу свою искреннюю благодарность своему научному руководителю Пяткову Сергею Григорьевичу за чуткое руководство, ценные советы и консультации.

ГЛАВА 1

Определения и вспомогательные результаты

Для удобства ссылок в этой главе приводится ряд вспомогательных утверждений, используемых в доказательствах основных результатов диссертации.

1.1 Необходимые определения. Разрешимость прямых задач для параболических систем.

Пусть G – ограниченная область с границей класса C^{2m} , $Q = G \times (0, T)$, рассмотрим задачу

$$u_t + A(t, x, D_x)u = f, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad B_j u|_S = g_j \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (1.1)$$

где $(x, t) \in Q$, A – матричный эллиптический оператор порядка $2m$ вида

$$Au = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x, t) D^\alpha u(x, t),$$

соответственно, операторы B_j – граничные операторы, определяемые равенствами:

$$B_j u = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x, t) D^\alpha u(x, t), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь u – вектор размерности h , соответственно, $a_\alpha, b_{j\alpha}$ – матрицы-функции размерности $h \times h$. Соответственно операторы A_0, B_{j0} – главные части операторов A, B_j , таким образом,

$$A_0 = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha u, \quad B_{j0} = \sum_{|\beta|=m_j} b_{j\beta} D^\beta.$$

В связи с приложениями приведённых ниже результатов и для простоты формулировок, рассматривается случай $p > n + 2m$. Приведем используемые ниже условия на данные задачи.

$$f \in L_p(Q), \quad u_0(x) \in W_p^{2m-2m/p}(G), \quad g_j(x, t) \in W_p^{k_j, 2mk_j}(S), \quad (1.2)$$

где $j = 1, 2, \dots, m$ и $k_j = 1 - \frac{m_j}{2m} - \frac{1}{2pm}$.

$$g_j(x, 0) = B_j(x, 0)u_0(x)|_{\partial G}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.3)$$

Условия на коэффициенты операторов A, B_j более или менее стандартные. Более того, для простоты выкладок будут использоваться не самые точные условия на коэффициенты. Считается, что

$$\begin{aligned} a_\alpha(t, x) &\in L_\infty(Q) \quad (|\alpha| < 2m), \quad a_\alpha \in C(\overline{Q}) \quad (|\alpha| = 2m), \\ b_{j\beta} &\in C^{2m-m_j}(\overline{S}) \quad (j = 1, \dots, m, |\beta| \leq m_j). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Говорим, что оператор $\partial_t + A$, ($A = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x, t) D^\alpha$) параболичен, если найдется постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что любой корень p многочлена

$$\det(A_0(t, x, i\xi) + pE) = 0, \quad (A_0 = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha u),$$

(E – единичная матрица) удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re} p \leq -\delta_1 |\xi|^{2m}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (x, t) \in Q \quad (1.5)$$

и выполнено условие Лопатинского, т.е. для любой точки $(t_0, x_0) \in S$ система

$$(\lambda E + A_0(i\xi', \partial_{y_n}))v(z) = 0, \quad B_{j0}(i\xi', \partial_{y_n})v(0) = h_j, \quad (1.6)$$

($\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $y_n \in \mathbb{R}^+$, $j = 1, 2, \dots, m$) имеет единственное решение из $C(\overline{\mathbb{R}^+})$ убывающее на бесконечности для всех $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\arg \lambda| \leq \pi/2$ и $h_j \in E$ таких что $|\xi'| + |\lambda| \neq 0$.

Здесь $A_0(i\xi', \partial_{y_n})$, $B_{j0}(i\xi', \partial_{y_n})$ это есть операторы $A_0(t_0, x_0, D)$, $B_{j0}(t_0, x_0, D)$ ($B_{j0} = \sum_{|\beta|=m_j} b_{j\beta} D^\beta$), записанные в локальной системе координат y после подстановки $\frac{\partial}{\partial y_k} \rightarrow i\xi_k$ ($k \leq n-1$). Алгебраические условия, гарантирующие выполнение (1.6) могут быть найдены, например, в [94].

Пусть $G_i \subset G$ ($i = 1, 2, \dots, S$) некоторый набор областей с границей класса C^1 . Пусть $G_0 = \bigcup_{i=1}^S G_i$, $Q_0 = G_0 \times (0, T)$, $Q_0^\gamma = G_0 \times (0, \gamma)$, $G_{\delta,i} = \{x \in G_i : \rho(x, \partial G_i) > \delta\}$, $Q_{\delta,i}^\gamma = G_{\delta,i} \times (0, \gamma)$, $G_\delta = \bigcup_{i=1}^S G_{\delta,i}$ и $Q_\delta = G_\delta \times (0, T)$, $Q_\delta^\gamma = G_\delta \times (0, \gamma)$ ($\delta \geq 0$), $Q^\gamma = G \times (0, \gamma)$.

Справедлива следующая теорема

Теорема 1. Пусть G – ограниченная область с границей класса C^{2m} и выполнены условия (1.2)–(1.6). Тогда существует единственное решение $u \in W_p^{1,2m}(Q)$ задачи (1.1) удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} \leq c \left[\|f\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} \right], \quad (1.7)$$

где c – постоянная, не зависящая от данных задачи f, g_j, u_0 и решения u . Если дополнительно выполнено условие

$$\nabla u_0 \in W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G_0), \quad \nabla a_\alpha(x, t) \in L_\infty(Q_0), \quad |\alpha| \leq 2m, \quad (1.8)$$

и $\nabla f \in L_p(Q_0)$, то решение u обладает свойством $\nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta)$ при всех $\delta > 0$ и при любом фиксированном $\delta > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{W_p^{1,2m}(Q_\delta)} + \|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} &\leq c \left[\|f\|_{L_p(Q)} + \|\nabla f\|_{L_p(Q_0)} + \right. \\ &\left. \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \|\nabla u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G_0)} \right]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Доказательство. Первое утверждение – следствие из теоремы 10.4 в [94]. Получим второе утверждение. Покажем, что полученное решение обладает большей гладкостью в областях $Q_{\delta,j}$. Фиксируем $\delta_2 > \delta_1 > \delta$ (считаем, что δ_2 достаточно мало и таким образом $G_{\delta_2,j} \neq \emptyset$). Построим функцию $\psi_0(x) \in C_0^\infty(R^n)$; $\psi_0 \equiv 1$ в $G_{\delta_2,j}$ и $\psi_0 \equiv 0$ в $G \setminus G_{\delta_1,j}$. Положим $\Delta_i u = (u(x + e_i \eta) - u(x))/\eta$ (e_i – i -й координатный вектор), где $|\eta| < \delta - \delta_1$. Тогда функция $\tilde{v} = \psi_0(x) \Delta_i u$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} \tilde{v}_t + A_0(t, x, D) \tilde{v} &= \psi_0[A_0, \Delta_i]u + \psi_0 \Delta_i f + [A_0, \psi_0] \Delta_i u + \\ &+ \psi_0 \Delta_i ((A_0 - A)(u + \Phi)), \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$B_r \tilde{v}|_S = 0, \quad \tilde{v}|_{t=0} = \psi_0(x) \Delta_i u_0, \quad (r = 1, 2, \dots, m).$$

где $[A_0, \Delta_i] = A_0 \Delta_i - \Delta_i A_0$, $[A_0, \psi] = A_0 \psi - \psi A_0$ и т.д. (т.е. квадратные скобки обозначают соответствующий коммутатор). Тогда функция $\tilde{v}$ удовлетворяет оценке (1.7), где правая часть, граничные функции g_j и функция u_0 заменяются на выражения, входящие в правые части в (1.10), соответствующие нормы которых оцениваются постоянной не зависящей от параметра h . Используя лемму 4.6 главы 2 в [95], получим, что обобщённая производная u_{x_i} принадлежит $W_p^{1,2m}(Q_{\delta_2,j})$ и удовлетворяет оценке

$$\|u_{x_i}\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_2,j})} \leq c_0 \left[\|\nabla f\|_{L_p(Q_0)} + \|\nabla u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G_0)} + \|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} \right]. \quad (1.11)$$

В силу произвольности δ_2, δ_1 и i, j заключаем, что $\nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1})$ для всех $\delta_1 > 0$. Используя (1.11) и (1.7) получим (1.9). $\square$

Как следствие теоремы 1, имеем

Теорема 2. Пусть G – ограниченная область с границей класса C^{2m} , выполнены условия (1.4)-(1.6) и $f \in L_p(Q^\gamma)$ ($\gamma \in (0, T]$). Тогда существует единственное решение $u \in W_p^{1,2m}(Q^\gamma)$ задачи

$$u_t + A(t, x, D_x)u = f, \quad u|_{t=0} = 0, \quad B_j u|_S = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (1.12)$$

удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q^\gamma)} \leq c \|f\|_{L_p(Q^\gamma)}, \quad (1.13)$$

где c – постоянная, не зависящая от γ . Если дополнительно выполнено условие (1.8) и $\nabla f \in L_p(Q_0^\gamma)$, то решение u обладает свойством $\nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta^\gamma)$ при всех $\delta > 0$ и при фиксированном $\delta_1 > 0$ удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q^\gamma)} + \|\nabla u\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^\gamma)} \leq c(\|f\|_{L_p(Q^\gamma)} + \|\nabla f\|_{L_p(Q_0^\gamma)}), \quad (1.14)$$

где постоянная c не зависит от γ .

Доказательство. Искомое решение на промежутке $[0, \gamma]$ совпадает с решением u_γ задачи (1.1) с правой частью:

$$f_\gamma = \begin{cases} f, & t \in [0, \gamma] \\ 0, & t \in (\gamma, T] \end{cases} \in L_p(Q)$$

и однородными начальными и краевыми условиями. По теореме 1 имеем оценку $\|u_\gamma\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq c \|f_\gamma\|_{L_p(Q)} \leq c \|f\|_{L_p(Q^\gamma)}$ из которой и вытекает оценка (1.13). Аналогично получается и оценка (1.14). $\square$

1.2 Необходимые определения. Разрешимость некоторых обратных задач для параболических систем.

Приведем некоторые теоремы о разрешимости вспомогательных обратных задач. В разделе рассматривается вопрос об определении вместе с решением правой части специального вида в параболических уравнениях и системах. Как и выше, пусть G – область в R^n с границей Γ класса C^{2m} и $Q = G \times (0, T)$. Параболическое уравнение имеет вид

$$u_t + A(t, x, D)u = \sum_{i=1}^{r_0} b_i(t, x)q_i(t) + f, \quad (t, x) \in Q, \quad (1.15)$$

где A – матричный эллиптический оператор порядка $2m$ с матричными коэффициентами размерности $h \times h$, представимый в виде

$$A(t, x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(t, x) D^\alpha, \quad D = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}),$$

b_i, f ($i = 1, 2, \dots, r_0$ – вектор-функции длины h и q_i – скалярные функции. Уравнение (1.15) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(t, x) D^\beta u|_S = g_j(t, x), \quad (1.16)$$

где $m_j < 2m$, $j = 1, 2, \dots, m$ и $S = (0, T) \times \Gamma$. Неизвестными в (1.15), (1.16) являются решение u и функции $q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, r_0$, $r_0 = sh$), входящие в правую часть (1.15). Рассматривается условие переопределения вида

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (1.17)$$

где x_j – внутренние точки области G . Положим $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_{r_0})$. Кроме введённых ранее условий нужны также условия на функции b_j вида

$$b_j \in L_\infty(0, T, L_p(G)), \quad j = 1, 2, \dots, r_0. \quad (1.18)$$

Пусть $B_\rho(x)$ – шар радиуса ρ с центром в точке x . Найдется $\delta_0 > 0$ такое, что $B_{\delta_0}(x_i) \cap B_{\delta_0}(x_j) = \emptyset$ при $i \neq j$ и $B_{\delta_0}(x_i) \cap \partial G = \emptyset$ для всех $i, j = 1, 2, \dots, s$. Фиксируем $\delta_1 < \delta_0$ и возьмём в качестве областей G_j шары $B_{\delta_1}(x_j)$. Как и ранее $G_0 = \cup_{i=1}^s G_j$. Аналогично определяем области G_δ, Q_δ . Предполагаем, что

$$\nabla f \in L_p(Q_0), \quad \nabla b_j \in L_\infty(0, T, L_p(G_0)), \quad j = 1, 2, \dots, r_0, \quad (1.19)$$

$$\psi_j \in W_p^1(0, T), \quad \psi_j(0) = u_0(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (1.20)$$

Определим матрицу $B(t)$ размера $r \times r$, строки которой с номерами $(k-1)h+1, kh, (k=1, 2, \dots, s)$ занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами $b_1(x_k, t), \dots, b_{r_0}(x_k, t)$. При выполнении вышеприведённых условий, элементы этой матрицы принадлежит $L_\infty(0, T)$. Требуется, чтобы существовала постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det B(t)| \geq \delta_0, \quad \text{для п.в. } t \in [0, T]. \quad (1.21)$$

Рассмотрим задачу (1.15), (1.16), (1.17). Воспользуясь теоремой 2.3 из [96] (см. также теорему 2.1 в [81]) как следствие которой имеем

Теорема 3. При выполнении условий теоремы 1 в том числе и условия (1.8) и условий (1.18)-(1.21), существует единственное решение задачи (1.15), (1.16), (1.17) такое, что $\vec{q} \in L_q(0, T)$, $u \in W_q^{1,2m}(Q)$, $\nabla u \in W_q^{1,2m}(Q_{\delta_1})$, $\forall \delta_1 > 0$.

Нам понадобится также и нелинейный вариант этой теоремы. В этом случае неизвестные функции q_i входят также и в оператор A как коэффициенты.

Оператор A - представим в виде:

$$A = \sum_{i=r_0+1}^r q_i A_i(x, t) + A_{r+1}(x, t), \quad A_i u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha^i D^\alpha u. \quad (1.22)$$

Неизвестными в (1.15), (1.16) являются решение u и функции $q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, r$), входящие в правую часть (1.15) и оператор A .

Мы считаем, что

$$a_\alpha^i(t, x) \in L_\infty(Q) \quad (|\alpha| < 2m), \quad a_\alpha^i \in C(\overline{Q}) \quad (|\alpha| = 2m), \quad (1.23)$$

$$b_{j\beta} \in C^{2m-m_j}(\overline{S}), \quad (j = 1, \dots, m, \quad |\beta| \leq m_j),$$

$$b_j(x, t) \in C([0, T]; L_p(G)), \quad j = 1, 2, \dots, r_0, \quad (1.24)$$

$$a_\alpha^i \in C([0, T], L_\infty(G_0)), \quad \nabla a_\alpha^i(x, t) \in L_\infty(Q_0), \quad (1.25)$$

$$(i = r_0 + 1, r_0 + 2, \dots, r + 1), \quad |\alpha| \leq 2m,$$

$$\nabla u_0 \in W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G_0), \quad (1.26)$$

$$\nabla f \in L_p(Q_0), \quad \nabla b_j \in L_\infty(0, T; L_p(G_0)), \quad j = 1, 2, \dots, r_0, \quad (1.27)$$

$$b_k(x_l, t), \quad f(x_l, t), \quad a_\alpha^i(x_l, t) \in C([0, T]), \quad (1.28)$$

где $k = 1, 2, \dots, r_0$, $i = r_0 + 1, r_0 + 2, \dots, r$, $l = 1, 2, \dots, s$ и $|\alpha| \leq 2m$,

$$\psi_j \in C^1([0, T]), \quad \psi_j(0) = u_0(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (1.29)$$

Определим матрицу B размера $r \times r$, строки которой с номерами $(k-1)h+1, kh$, ($k = 1, 2, \dots, s$) занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами:

$$b_1(x_k, 0), \dots, b_r(x_k, 0), -A_{r_0+1}u_0(x_k), \dots, -A_r u_0(x_k).$$

Как и ранее, требуется, чтобы выполнялось неравенство существовала постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det B(t)| \geq \delta_0, \quad \text{для } t \in [0, T]. \quad (1.30)$$

Определим постоянные q_i^0 исходя из решений системы

$$\begin{aligned} \psi_{kt}(0) + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^0(t) A_i u_0(x_k, 0) + A_{r+1} u_0(x_k, 0) = \\ \sum_{i=1}^{r_0} q_i^0 b_i(x_k, 0) + f(x_k, 0), \quad k = 1, 2, \dots, s \end{aligned}$$

и введем оператор $A^0 = \sum_{i=r_0+1}^r q_i^0(t) A_i + A_{r+1}$.

Теорема 4. Пусть оператор $\partial_t + A^0$ параболичен. При выполнении условий (1.2), (1.3), (1.23)-(1.30) найдется такое $\tau_2 > 0$, что на $[0, \tau_2]$ существует единственное решение задачи (1.15), (1.16), (1.17) такое, что $\vec{q} \in C([0, \tau_2])$, $u \in W_p^{1,2m}(Q^{\tau_2})$, $\nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta^{\tau_2})$, $\forall \delta > 0$.

ГЛАВА 2

Линейный случай. Модели тепломассопереноса и их обобщения.

В этой главе рассматривается обратная задача (1)-(3), (5) с интегральным условием переопределения вида (5) и предполагаем, что неизвестные функции $q_i(t)$ входят только, в правую часть уравнения (1). Обратная задача в таком случае является линейной. Таким образом, рассматривается задача

$$u_t + A(t, x, D_x)u = f_c, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad B_j u|_S = g_j \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (2.1)$$

где $(x, t) \in Q = G \times (0, T)$, G – ограниченная область с границей класса C^{2m} , A – матричный эллиптический оператор порядка $2m$ вида

$$Au = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x, t) D^\alpha u(x, t),$$

соответственно, операторы B_j – граничные операторы, определяемые равенствами:

$$B_j u = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x, t) D^\alpha u(x, t), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Условия переопределения имеют вид

$$\int_{G_i} u \varphi_i(x) dx = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, s/ \quad (2.2)$$

Правая часть в (2.1) имеет вид:

$$f_c = \sum_{i=1}^{r_0} b_i(t, x) q_i(t) + f. \quad (2.3)$$

Приведем используемые ниже условия на данные задачи.

$$\psi_i(t) \in W_p^1([0, T]) \quad (p > n + 2m), \quad \psi_i(0) = \int_{G_i} u_0(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (2.4)$$

Считаем всюду далее, что граница областей $\{G_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, s$) из условия (2.2) принадлежит классу C^1 . Будет использоваться два вида условий на весовые функции $\{\varphi_j(x)\}$, первое из которых записывается в виде:

$$\text{supp } \varphi_j \subset \overline{G_j}, \quad \varphi_j \in W_q^1(G_j) \quad \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1\right), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.5)$$

Дополнительно считаем также, что

$$a_\alpha(x, t) \in L_\infty(0, T; W_\infty^1(G_0)), \quad |\alpha| = 2m. \quad (2.6)$$

Определим матрицу $B(t)$ размера $r \times r$, строки которой с номерами $(k-1)h+1, kh, (k=1, 2, \dots, s)$ занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами $\int_G b_1 \varphi_k dx, \dots, \int_G b_{r_0} \varphi_k dx$. Из условий (1.18), (2.5) вытекает, что элементы этой матрицы принадлежат $L_\infty(0, T)$. Как и ранее, требуется, чтобы выполнялось следующее: существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det B(t)| \geq \delta_0, \quad \text{для } t \in [0, T]. \quad (2.7)$$

2.1 Обратные задачи с интегральным условием переопределения для моделей тепломассопереноса. Общий случай.

Теорема 5. Пусть выполнены условия (1.2)-(1.6), (1.18), (2.4)-(2.7). Тогда существует единственное решение $(u, q_1, \dots, q_{r_0})$ задачи (2.1)-(2.3) такое, что

$$u \in W_p^{1,2m}(Q), \quad q_i(t) \in L_p(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, r_0.$$

Решение удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} & \|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \sum_{i=1}^{r_0} \|q_i(t)\|_{L_p(0,T)} \leq \\ & c(\|f\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{W_p^{k_j,2mk_j}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_{W_p^1(0,T)}). \end{aligned}$$

Доказательство. Продолжим граничные данные внутрь области, построив функцию $\Phi \in W_p^{1,2m}(Q)$ такую, что $\Phi|_{t=0} = u_0(x)$, $B_j \Phi|_S = g_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$). В качестве функции Φ возьмём решение задачи (1.1) (см. теорему 1). Тогда, если u решение задачи (1)–(3), (5), то функция $v = u - \Phi$ есть решение задачи

$$v_t + Av = \sum_{i=1}^{r_0} f_i(t, x) q_i(t), \quad v|_{t=0} = 0, \quad B_j v|_S = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.8)$$

$$\int_G v \varphi_i dx = \psi_i - \int_G \Phi \varphi_i dx = \tilde{\psi}_i \in W_p^1(0, T). \quad (2.9)$$

Интегрируем (2.8) с весом φ_i и используем (2.9). Имеем

$$\begin{aligned} \int_G \varphi_i(x) v_t dx &= \frac{\partial}{\partial t} \int_G \varphi_i(x) v(x, t) dx = \tilde{\psi}_{it}, \\ \tilde{\psi}_{it} + \int_G \varphi_i A v dx &= \sum_{j=1}^{r_0} q_i \int_G \varphi_i f_j(t, x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (2.10)$$

На равенство можно смотреть как на уравнение для нахождения функций $q_i(t)$. Действительно, пусть B – матрица, определённая перед теоремой 5. Правая часть (2.10) записывается в виде $B\vec{q}$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_{r_0})$. Равенство (2.10) перепишется в виде

$$B\vec{q} = \vec{\psi} + R(\vec{q}), \quad (2.11)$$

где компоненты векторов $R(\vec{q})$, $\vec{\psi}$ с номерами от $(k-1)h+1$, до kh , ($k = 1, 2, \dots, s$) занимают столбцы $\int_G \varphi_k A v dx$ и $\tilde{\psi}_{kt}$, соответственно, причём v решение задачи (2.8) и значит $v = (\partial_t + A)^{-1}(\sum_{j=1}^{r_0} f_j q_j(t))$. Или

$$\vec{q} = B^{-1}\vec{\psi} + B^{-1}R(q) = \vec{\psi}_0 + R_0(\vec{q}). \quad (2.12)$$

Покажем, что уравнение (2.12) разрешимо в $L_p(0, T)$. Получим оценки. Оценим $\|R_0\vec{q}\|_{L_p(0, \gamma)}$. По условию матрица B обратима, и в силу условия (1.18) имеем

$$\|R_0(\vec{q})\|_{L_p(0, \gamma)} \leq c_0 \|R(\vec{q})\|_{L_p(0, \gamma)} \leq \sum_{j=1}^s c_0 \left\| \int_G A v \varphi_j dx \right\|_{L_p(0, \gamma)}. \quad (2.13)$$

Имеем $Au = A_0v + A_1v$, где $A_0v = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha v$ и $A_1v = \sum_{|\alpha|<2m} a_\alpha D^\alpha v$. При $|\alpha| \leq 2m-1$, получим

$$\left| \int_G a_\alpha D^\alpha u \varphi_i \right| \leq M \left(\int_G |D^\alpha v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_G |\varphi_i|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \|u\|_{W_p^{2m-1}(G)},$$

$$c = M \max_i \left(\int_G |\varphi_i|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad M = \max_{|\alpha|<2m} \|a_\alpha(x, t)\|_{L_\infty(Q)}.$$

Таким образом,

$$\left| \int_G A_1 v \varphi_i dx \right| \leq c_1 \|v\|_{W_p^{2m-1}(G)}. \quad (2.14)$$

Рассмотрим выражение $\int_G A_0 v \varphi_i dx$. Сюда входят слагаемые

$$\int_G a_\alpha(x, t) D^\alpha v \varphi_i dx dt = \int_{\Gamma_i} a_\alpha(x, t) D^{\alpha'} v \varphi_i n_k d\Gamma - \int_{G_i} (a_\alpha \varphi_i)_{x_k} D^{\alpha'} v dx,$$

где $D^\alpha v = \frac{\partial}{\partial x_k} D^{\alpha'} v$, n_k – координаты единичной внешней нормали к $\Gamma_i = \partial G_i$.

Второй интеграл оценивается через

$$\begin{aligned} & \int_{G_i} |a_\alpha| |D^{\alpha'} v| |\varphi_i| dx + \int_{G_0} |a_{\alpha x_k}| |D^{\alpha'} v| |\varphi_i| dx \leq \\ & \leq M \left(\int_{G_i} |D^{\alpha'} v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{G_i} |\varphi_i|^{q_i} dx \right)^{\frac{1}{q_i}} + M_1 \left(\int_{G_i} (D^{\alpha'} v)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{G_i} \varphi_i^{q_i} dx \right)^{\frac{1}{q_i}}. \end{aligned}$$

Таким образом, второй интеграл оценивается через $c_2 \|v\|_{W_p^{2m-1}(G)}$. Оцениваем первый интеграл с использованием теорем о следах (см., например, [1, 94, 95])

$$\left| \int_{\Gamma_i} a_\alpha D^{\alpha'} v \varphi_i n_k d\Gamma \right| \leq M \int_{\Gamma_i} |D^{\alpha'} v| |\varphi_i n_k| d\Gamma \leq M \left(\int_{\Gamma_i} |D^{\alpha'} v|^p d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Gamma_i} \varphi_i^{q_i} d\Gamma \right)^{\frac{1}{q_i}} \leq$$

$$c_3 \|D^{\alpha'} v\|_{L_p(\Gamma_i)} \leq c_4 \|D^{\alpha'} v\|_{W_p^\beta(G_i)} \leq c_5 \|v\|_{W_p^{\beta+2m-1}(G_i)}, \quad 1 > \beta > \frac{1}{p}.$$

Из последних двух неравенств вытекает, что найдется постоянная c_6 такая, что

$$\left| \int_G A_0 v \varphi_i dx \right| \leq c_6 \|v\|_{W_p^{\beta+2m-1}(G)}. \quad (2.15)$$

Фиксируем β . Тогда из (2.14), (2.15) и интерполяционных неравенств (см. [1]) следует, что

$$\|R_0(q)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c_7 \| \|v\|_{W_p^{2m-1+\beta}(G)} \|_{L_p(0,\gamma)} \leq c_8 \|v\|_{L_p(0,\gamma; W_p^{2m}(G))}^\theta \|v\|_{L_p(0,\gamma; L_p(G))}^{1-\theta},$$

где $2m\theta + (1-\theta)0 = (2m-1+\beta)$. По теореме 2

$$\|v\|_{W_p^{1,2m}(Q^\gamma)} \leq c_9 \left\| \sum_{i=1}^{r_0} q_i f_i \right\|_{L_p(Q^\gamma)}. \quad (2.16)$$

Правая часть оценивается так:

$$\|q_i f_i\|_{L_p(Q^\gamma)}^p = \left(\int_0^\gamma \int_G |q_i|^p |f_i|^p dx dt \right) =$$

$$\int_0^\gamma |q_i|^p \int_G |f_i|^p dx dt \leq \|f_i\|_{L_\infty(0,T;L_p(G))} \int_0^\gamma |q_i|^p dt \leq c_{10} \|q_i\|_{L_p(0,\gamma)}^p. \quad (2.17)$$

Кроме того,

$$v(x, t) = \int_0^t v_\tau(x, \tau) d\tau, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$\|v\|_{L_p(G)} \leq \int_0^t \|v_\tau(x, \tau)\|_{L_p(G)} d\tau \leq \left(\int_0^t \|v_\tau(x, \tau)\|_{L_p(G)}^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \gamma^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда получим, что

$$\|v\|_{L_p(Q^\gamma)} \leq \gamma \|v_t\|_{L_p(Q^\gamma)}. \quad (2.18)$$

Используя (2.16)-(2.18) и приведённое выше неравенство для $\|R_0(\vec{q})\|$, получим

$$\|R_0(\vec{q})\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c_{11} \|\vec{q}\|_{L_p(0,\gamma)} \gamma^{1-\theta}. \quad (2.19)$$

Таким образом, если $c_{11} \gamma^{1-\theta} \leq q_0 < 1$, то уравнение (2.12) имеет единственное решение $\vec{q}$ из $L_p(0, \gamma) \forall \vec{\psi}_0 \in L_p(0, \gamma)$. Возьмём

$$\vec{q}_0 = \begin{cases} \vec{q}, & t \in (0, \gamma) \\ 0, & t \in [\gamma, 2\gamma] \end{cases}$$

и сделаем замену $\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_0$ в (2.12). Тогда

$$\vec{q}_1 = R_0(\vec{q}_1) + c_0 - \vec{q}_0 + R_0(q_0). \quad (2.20)$$

Если q_1 есть решение уравнения (2.20) на $[0, 2\gamma]$, то $q_1 - R_0(\vec{q}_1) = 0$ на $(0, \gamma)$ и по доказанному $q_1 = 0$ на $(0, \gamma)$. Имеем $q_1|_{[\gamma, 2\gamma]} \in L_p(\gamma, 2\gamma)$. Оценим $\|R_0(\vec{q}_1)\|_{L_p(\gamma, 2\gamma)}$. Как и ранее получим оценку

$$\|R_0(\vec{q}_1)\|_{L_p(\gamma, 2\gamma)} \leq c \|\vec{q}_1\|_{L_p(\gamma, 2\gamma)} \gamma^{1-\theta},$$

где без ограничения общности считаем, что постоянная c совпадает с постоянной c_{11} из (2.19). Тогда уравнение (2.20) имеет единственное решение из $L_p(\gamma, 2\gamma)$. Функция $\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_0$ есть решение (2.12) на промежутке $[0, 2\gamma]$. Повторяя рассуждения, за конечное число шагов докажем, что уравнение (2.12) имеет единственное решение из $L_p(0, T)$.

Восстановим функцию v как решение уравнения (2.8). Покажем, что функция v есть решение поставленной задачи. По построению $v|_{t=0} = 0$, $B_iv|_S = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Докажем, что $\int_G \varphi_i v dx = \tilde{\psi}_i(t)$. Интегрируем уравнение в (2.8) по G с весом φ_i . Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_G \varphi_i v dx + \int_G A v \varphi_i dx = \sum_{j=1}^{r_0} q_j \int_G f_j \varphi_i dx.$$

Функции q_j удовлетворяют системе (2.10), вычитая i -е уравнение которой из предыдущего равенства получим, что $(\int_G \varphi_i v dx - \tilde{\psi}_i)_t = 0$ или $\int_G \varphi_i v dx - \tilde{\psi}_i = (\int_G \varphi_i v dx - \tilde{\psi}_i)|_{t=0} = 0$ в силу условий согласования. Таким образом функция v есть решение поставленной задачи. Оценка из утверждения теоремы фактически была получена в процессе доказательства разрешимости обратной задачи. $\square$

2.2 Обратные задачи с интегральным условием переопределения для моделей тепломассопереноса, описываемых системами уравнений второго порядка.

В этом разделе записываются следствия из предыдущего параграфа для параболических систем второго порядка. Таким образом, рассматривается случай $m = 1$. Тогда эллиптический оператор A примет вид

$$A(t, x, D)u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t, x) u_{x_i} + a_0(t, x) u.$$

Условия (1.2)-(1.3) примут вид

$$\begin{aligned} u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \quad g(x, t) \in W_p^{1-1/2p, 2-1/p}(S) \\ \text{или } g(x, t) \in W_p^{1/2-1/2p, 1-1/p}(S), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где первое из условий на g используется в случае задачи Дирихле и второе в случае оставшихся краевых условий (Неймана, условий третьей краевой задачи, или условий с косой производной). Таким образом в случае условий Дирихле имеем граничное условие

$$Bu|_S = u|_S = g, \quad (2.22)$$

а в случае более общих краевых условий

$$Bu|_S = \sum_{i=1}^n l_i(x, t)u_{x_i} + \sigma(x, t)u|_S = g, \quad (2.23)$$

где l_i ($i = 1, 2, \dots, n$), σ – матрицы размера $h \times h$. Как и ранее выпишем условия на данные задачи:

$$f \in L_p(Q), \quad (2.24)$$

$$g(x, 0) = B(x, 0)u_0(x)|_{\partial G}. \quad (2.25)$$

Условие (2.4) примет вид

$$\psi_i(t) \in W_p^1(0, T), \quad \psi_i(0) = \int_{G_i} u_0(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, r_0, \quad (2.26)$$

Условия на коэффициенты операторов A меняются на следующие

$$\begin{aligned} a_i(t, x) &\in L_\infty(Q), \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad a_{ij} \in C(\bar{Q}) \cap W_\infty^1(Q_0), \\ (i, j = 1, \dots, n), \quad l_j &\in C^1(\bar{S}) \quad (j = 1, \dots, n), \quad \sigma(x, t) \in C^1(\bar{S}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

Возникает вопрос о том как записать условия (1.5), (1.6). В самом общем случае они имеют тот же самый вид. Однако, например, условие (1.5) может быть заменено на более сильное, но тем не менее, более простое по формулировке условие вида: существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \xi_i, \xi_j) \geq \delta_0 |\xi|^2, \quad \forall (x, t) \in Q, \quad \forall \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^h. \quad (2.28)$$

Условие (2.28) используется в литературе более часто (см., например, [13]) чем аналогичное более слабое условие 7.6.1 в [94]: существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \eta, \eta \right) \geq \delta_0 |\xi|^2 |\eta|^2, \quad \forall (x, t) \in Q, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^h. \quad (2.29)$$

Здесь скобки $(\cdot, \cdot)$ обозначают скалярное произведение в соответствующем пространстве, т.е. в $\mathbb{R}^h$. В случае $h = 1$, условие (1.6) выполняется в случае условий Дирихле и в случае задачи с косой производной (2.23), например, если коэффициенты операторов A, B вещественны и

$$\exists \delta_1 > 0 : \quad \left| \sum_{i=1}^n l_i n_i \right| \geq \delta_1 > 0 \quad \forall (x, t) \in S. \quad (2.30)$$

Здесь как обычно n_i – координаты внешней единичной нормали к ∂G . В общем случае условия (1.5), (1.6) выполняется для условий Дирихле и для условий вида (см. например, [13])

$$Bu|_S = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} n_i u_{x_i} + \sigma(x, t) u|_S = g. \quad (2.31)$$

Следующая формулировка наиболее общая.

Теорема 6. Пусть выполнены условия (1.6), (1.18), (2.5), (2.7), (2.21), (2.24)-(2.27), (2.29). Тогда существует единственное решение $(u, q_1, \dots, q_{r_0})$ задачи (2.1)-(2.3) такое, что

$$u \in W_p^{1,2}(Q), \quad q_i(t) \in L_p(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, r_0.$$

Решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} + \sum_{i=1}^{r_0} \|q_i(t)\|_{L_p(0,T)} \leq c(\|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{k_0, 2k_0}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \sum_{j=1}^{r_0} \|\psi_j\|_{W_p^1(0,T)}),$$

где $k_0 = 1 - 1/2p$ в случае условия Дирихле и $k_0 = 1/2 - 1/2p$ в случае оставшихся краевых условий.

В следующей теореме приводится ряд условий в более простом виде.

Теорема 7. Пусть выполнены условия (1.18), (2.5), (2.7), (2.21), (2.24)-(2.27), (2.29) и оператор B записывается в виде (2.22) или (2.31). Тогда существует единственное решение $(u, q_1, \dots, q_{r_0})$ задачи (2.1)-(2.3) такое, что

$$u \in W_p^{1,2}(Q), \quad q_i(t) \in L_p(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, r_0.$$

Решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} + \sum_{i=1}^{r_0} \|q_i(t)\|_{L_p(0,T)} \leq c(\|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{k_0, 2k_0}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \sum_{j=1}^{r_0} \|\psi_j\|_{W_p^1(0,T)}),$$

где $k_0 = 1 - 1/2p$ в случае условия Дирихле и $k_0 = 1/2 - 1/2p$ в случае оставшихся краевых условий.

2.3 Ослабленные условия на весовую функцию и обратные задачи для моделей тепломассопереноса. Общий случай.

В этом параграфе рассматривается второй случай – случай, когда условия на весовые функции в интегральных условиях переопределения сводятся к минимальным:

$$\text{supp } \varphi_j \subset \overline{G_j}, \quad \varphi_j \in L_1(G_j), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.32)$$

Естественным образом, при введении более слабых условий на весовую функцию, возникают дополнительные условия на данные задачи, в частности, на коэффициенты уравнений и на данные из краевых и начальных условий. Далее используются обозначения из предыдущего параграфа. Дополнительные условия имеют вид:

$$\nabla f \in L_p(Q_0), \quad \nabla b_j \in L_\infty(0, T, L_p(G_0)), \quad (2.33)$$

$$\nabla u_0 \in W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G_0), \quad \nabla a_\alpha(x, t) \in W_\infty^1(Q_0), \quad (|\alpha| \leq 2m). \quad (2.34)$$

Матрица B , определённая в предыдущем параграфе, имеет тот же смысл. Выясним какому классу принадлежат коэффициенты этой матрицы. Пусть выполнены условия (2.33), (1.18). По определению получим, что $b_i \in L_\infty(0, T; W_p^1(G_0))$. В силу теорем вложения класс $W_p^1(G_0)$ при условиях на p ($p > n + 2m$) вкладывается в пространство $C^\alpha(\overline{G_0})$ с $\alpha \leq 1 - n/p$ (см. теорему 4.6.1 в [1]) и соответственно в $C(\overline{G_0})$. Отсюда вытекает включение $b_i \in L_\infty(0, T; C(\overline{G_0}))$ ($i = 1, 2, \dots, r_0$). Как следствие имеем, что элементы матрицы B , $b_{ij} = \int_{G_j} b_i \varphi_j dx$ принадлежат $L_\infty(0, T)$.

Теорема 8. Пусть выполнены условия (1.2)-(1.6), (1.18), (2.4), (2.7), (2.32)-(2.34). Тогда существует единственное решение $(u, q_1, \dots, q_{r_0})$ задачи (2.1)-(2.3) такое, что

$$u \in W_p^{1,2m}(Q), \quad q_i(t) \in L_p(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad \nabla_x u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta),$$

для всех $\delta > 0$. При фиксированном $\delta > 0$ решение удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} & \|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \|\nabla_x u\|_{W_p^{1,2m}(Q_\delta)} + \sum_{i=1}^{r_0} \|q_i(t)\|_{L_p(0,T)} \leq c(\|f\|_{L_p(Q)} + \|\nabla_x f\|_{L_p(Q_0)} + \\ & \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{W_p^{k_j,2mk_j}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G)} + \|\nabla_x u_0\|_{W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G_0)} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_{W_p^1(0,T)}). \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы (5). Единственное отличие в доказательстве - способ получения оценки для нормы оператора R_0 . Приведем его. Оценим $\|R_0 \vec{q}\|_{L_p(0,\gamma)}$. Как и ранее имеем

$$\|R_0(\vec{q})\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c_0 \|R(q)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq \sum_{j=1}^s c_0 \left\| \int_G Av \varphi_j dx \right\|_{L_p(0,\gamma)}.$$

В силу компактности множеств $\text{supp } \varphi_j$, найдется $\delta_0 > 0$ такое, что $\text{supp } \varphi_j \subset G_{\delta,j}$ для всех $\delta \geq \delta_0$ и для всех j . В силу условий на коэффициенты и теорем вложения (см. теорему 4.6.1 в [1])

$$\begin{aligned} \left| \int_G Av \varphi_j dx \right| &= \left| \int_{G_{\delta_0,j}} Av \varphi_j dx \right| \leq M \sum_{|\alpha| \leq 2m} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(G_{\delta_0,j})} \|\varphi_j\|_{L_1(G)} \leq \\ &M_1 \sum_{|\alpha| \leq 2m} \|D^\alpha v\|_{W_p^\beta(G_{\delta_0,j})} \leq M_2 \|v\|_{W_p^{2m+\beta}(G_{\delta_0,j})}, \quad \beta \in (n/p, 1). \end{aligned}$$

Далее используя интерполяционные неравенства [1] получим оценку для последней нормы через

$$M_3 \|v\|_{W_p^{2m+1}(G_{\delta_0,j})}^\theta \|v\|_{L_p(G)}^{1-\theta}, \quad (2m+1)\theta = 2m + \beta.$$

Неравенство справедливо для всех j . Тогда

$$\|R_0(q)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq M_4 \|v\|_{L_p(0,\gamma; W_p^{2m+1}(G_{\delta_0}))}^\theta \|v\|_{L_p(0,\gamma; L_p(G))}^{1-\theta}.$$

В силу оценки (2.18) имеем

$$\|R_0(q)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq M_5 \|v\|_{L_p(0,\gamma; W_p^{2m+1}(G_{\delta_0}))}^\theta \|v_t\|_{L_p(0,\gamma; L_p(G))}^{1-\theta} \gamma^{1-\theta}.$$

Далее в силу оценки из теоремы 2

$$\|v\|_{L_p(0,\gamma; W_p^{2m+1}(G_{\delta_0}))} \leq c \sum_{i=1}^{r_0} (\|q_i \nabla_x f_i\|_{L_p(Q_0^\gamma)}^p + \|q_i f_i\|_{L_p(Q^\gamma)}^p),$$

где c – постоянная не зависящая от γ . Используя условия на функции f_i , $\nabla_x f_i$, как и при доказательстве теоремы 4, получим оценку

$$\|R_0(\vec{q})\|_{L_p(0,\gamma)} \leq M_4 \|\vec{q}\|_{L_p(0,\gamma)} \gamma^{1-\theta}. \quad (2.35)$$

Искомая оценка найдена. Остальные рассуждения совпадают с рассуждениями из предыдущей теоремы. $\square$

2.4 Обратные задачи с ослабленными условиями на весовую функцию для моделей тепломассопереноса, описываемых системами уравнений второго порядка.

Как и в предыдущем параграфе, здесь записываются следствия полученных результатов для параболических систем второго порядка. Таким образом, рассматривается случай $m = 1$. Тогда эллиптический оператор A примет вид

$$A(t, x, D)u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t, x)u_{x_i} + a_0(t, x)u.$$

Таким образом, используется или условие Дирихле

$$Bu|_S = u|_S = g \quad (2.36)$$

или более общее краевое условие вида

$$Bu|_S = \sum_{i=1}^n l_i(x, t)u_{x_i} + \sigma(x, t)u|_S = g, \quad (2.37)$$

где l_i ($i = 1, 2, \dots, n$), σ – матрицы размера $h \times h$. Условия на данные задачи у нас уже были выписаны ранее в предыдущем параграфе. Запишем дополнительное условие:

$$\begin{aligned} \nabla u_0 \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G_0), \quad \nabla a_{ij}(x, t), \nabla a_k(x, t) \in W_\infty^1(Q_0), \\ (i, j = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Имеем следующую теорему.

Теорема 9. Пусть выполнены условия (1.6), (1.18), (2.7), (2.21), (2.24)-(2.27), (2.29), (2.32), (2.38), Тогда существует единственное решение $(u, q_1, \dots, q_{r_0})$ задачи (2.1)-(2.3) такое, что

$$u \in W_p^{1,2}(Q), \quad q_i(t) \in L_p(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, r_0.$$

Решение удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} + \sum_{i=1}^{r_0} \|q_i(t)\|_{L_p(0,T)} \leq \\ c(\|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{k_0, 2k_0}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \sum_{j=1}^{r_0} \|\psi_j\|_{W_p^1(0,T)}), \end{aligned}$$

где $k_0 = 1 - 1/2p$ в случае условия Дирихле и $k_0 = 1/2 - 1/2p$ в случае оставшихся краевых условий.

В следующей теореме записывается ряд условий в более простом виде.

Теорема 10. Пусть выполнены условия (2.7), (2.21), (2.24)-(2.27), (2.29), (2.32) и оператор B записывается в виде (2.22) или (2.30). Тогда существует единственное решение $(u, q_1, \dots, q_{r_0})$ задачи (2.1)-(2.3) такое, что

$$u \in W_p^{1,2}(Q), \quad q_i(t) \in L_p(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} + \sum_{i=1}^{r_0} \|q_i(t)\|_{L_p(0,T)} \leq c(\|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{k_0, 2k_0}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \sum_{j=1}^{r_0} \|\psi_j\|_{W_p^1(0,T)}),$$

где $k_0 = 1 - 1/2p$ в случае условия Дирихле и $k_0 = 1/2 - 1/2p$ в случае оставшихся краевых условий.

Утверждения теорем 9, 10 вытекают из 8 и рассуждений приведённых перед теоремой 6.

2.5 Теорема о сходимости

В этом параграфе рассматривается вопрос о приближении решений обратных задач с точечными условиями переопределения решениями задач с интегральными условиями переопределения. Теоремы такого рода интересны с точки зрения построения численных алгоритмов решения обратных задач. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(B_1)$, $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ такую, что $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ и $\varphi(x) \geq 0$ для всех x . Определим $\varphi_{j\varepsilon}(x) = \varphi(\frac{x-x_j}{\varepsilon}) \frac{1}{\varepsilon^n}$. Имеем $\|\varphi_j\|_{L_1(G)} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{j\varepsilon}(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\frac{x-x_j}{\varepsilon}) dx = 1$. Введем $r_{j\varepsilon} = \int_G \varphi_{j\varepsilon}(x) u_0(x) dx - u_0(x_j)$. Если функция u_0 удовлетворяет условиям теоремы 8, то легко увидеть, что найдется постоянная $M > 0$ такая, что $|r_{j\varepsilon}| \leq M\varepsilon$ для всех j . Рассмотрим задачу (2.1)-(2.3), где $\varphi_j = \varphi_{j\varepsilon}$, $\varepsilon \leq \delta_1$, $G_j = B_{\delta_1}(x_j)$ (см. 1), а в качестве функций ψ_j возьмём функции $\psi_{j\varepsilon} = \psi_j(t) + r_{j\varepsilon}$. Если выполнены условия (1.20), то по построению

$$\psi_{j\varepsilon}(0) = \int_G \varphi_{j\varepsilon} u_0(x) dx.$$

Решение этой задачи (2.1)-(2.3) (оно существует при выполнении соответствующих условий теоремы 8 и обладает свойствами указанными в теореме 8) обозначим через u_ε , $\vec{q}_\varepsilon = (q_1^\varepsilon, \dots, q_{r_0}^\varepsilon)$, а решение задачи (2.1), (2.3), (1.17) (или задачи (1.15)-(1.17)) через u , $\vec{q} = (q_1, \dots, q_{r_0})$.

Теорема 11. Пусть выполнены условия (1.2)-(1.6), (1.18), (1.20), (1.21), (2.33)-(2.34). Тогда

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы и выполнении условий теоремы 3. Следовательно, решение задачи (2.1), (2.3), (1.17) (или задачи (1.15)-(1.17)) существует и единственно. С другой стороны, все условия теоремы 8 где в качестве функций ψ_j берутся функции $\psi_{j\varepsilon} = \psi_j(t) + r_{j\varepsilon}$, за исключением условия (2.7), также выполнены. Покажем, что начиная с некоторого ε_0 , т.е. при всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ это условие также выполнено, т.е. решение u_ε , $\vec{q}_\varepsilon$ существует. Действительно, как было отмечено, фактически имеется вложение $b_i \in L_\infty(0, T; C^\alpha(\overline{G_0}))$ с $\alpha \leq 1 - n/p$. Тогда имеем, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_{G_j} b_i(x, t) \varphi_{j\varepsilon}(x) dx - b_i(x_j, t) \right| = \\ & \left| \int_{G_j} [b_i(x_j + \varepsilon \eta, t) - b_j(x_j, t)] \varphi_{j\varepsilon}(\eta) dx \right| \leq c \varepsilon^\alpha \|b_j\|_{L_\infty(0, T; C^\alpha(\overline{G_0}))} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В силу этой сходимости для элементов определителя матрицы B , число ε_0 с вышеуказанными свойствами найдется.

Введем функции $v = u - \Phi$ и $v_\varepsilon = u_\varepsilon - \Phi$ (функция Φ была построена в доказательстве теоремы 5). Имеем v и v_ε есть решения задач

$$v_{\varepsilon t} + A v_\varepsilon = \sum_{i=1}^{r_0} q_i^\varepsilon f_i, \quad v_\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad B_j v_\varepsilon|_S = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.39)$$

$$v_t + A v = \sum_{i=1}^{r_0} q_i f_i, \quad v|_{t=0} = 0, \quad B_j v|_S = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.40)$$

Выполнены условия

$$v(x_j, t) = \psi_j - \Phi(x_j, t), \quad (2.41)$$

$$\int_G v_\varepsilon \varphi_{j\varepsilon} dx = \psi_{j\varepsilon} - \int_G \Phi \varphi_{j\varepsilon}(x) dx. \quad (2.42)$$

В силу теоремы 1, $\nabla\Phi \in W_q^{1,2m}(Q_\delta)$, $\forall \delta > 0$. Фиксируем $\delta \in (0, \delta_1)$ и считаем, что $\varepsilon < \delta_1 - \delta$. Обозначим $\omega_\varepsilon = v - v_\varepsilon$ и $a_i^\varepsilon = q_i - q_i^\varepsilon$. Вычитая (2.39) и (2.40), а также (2.41), (2.42), получим

$$\begin{aligned} \omega_{\varepsilon t} + A\omega_\varepsilon &= \sum_{i=1}^{r_0} a_i^\varepsilon f_i, \quad \omega_\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad B_j\omega_\varepsilon|_S = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ \int_G \omega_\varepsilon \varphi_{j\varepsilon} dx &= \int_G (v(x, t) - v(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx + \int_G (\Phi - \Phi(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon}(x) dx - r_{j\varepsilon}. \end{aligned}$$

По теореме 8 справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\omega_\varepsilon\|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \sum_{i=1}^{r_0} \|a_i^\varepsilon\|_{L_p(0,T)} &\leq c \left(\sum_{j=1}^s \left\| \int_G (v - v(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx \right\|_{W_p^1(0,T)} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^s \left\| \int_G (\Phi - \Phi(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon}(x) dx \right\|_{W_p^1(0,T)} \right) + M_1 \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Рассмотрим второе слагаемое

$$\sum_{j=1}^s \left\| \int_G (\Phi - \Phi(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon}(x) dx \right\|_{W_p^1(0,T)}.$$

Используя теоремы вложения, оценим, например,

$$J_j = \left\| \int_G (\Phi_t(x, t) - \Phi_t(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon}(x) dx \right\|_{L_p(0,T)}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\left| \int_{G_j} (\Phi_t(x, t) - \Phi_t(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon}(x) dx \right| \leq \\ &\sup_{x \in B_\varepsilon(x_j)} |\Phi_t(x, t) - \Phi_t(x_j, t)| \cdot \int_{G_j} |\varphi_{j\varepsilon}(x)| dx \leq \\ &\varepsilon^\alpha \sup_{x \in B_\varepsilon(x_j)} \frac{|\Phi_t(x, t) - \Phi_t(x_j, t)|}{|x - x_j|^\alpha} \leq \varepsilon^\alpha \sup_{x, y \in G_\delta} \frac{|\Phi_t(x, t) - \Phi_t(y, t)|}{|x - y|^\alpha} \leq \\ &\varepsilon^\alpha \|\Phi_t\|_{C^\alpha(G_\delta)} \leq c \varepsilon^\alpha \|\Phi_t\|_{W_p^1(G_\delta)}, \quad \alpha = 1 - n/p. \end{aligned}$$

Окончательная оценка будет иметь вид

$$J_j \leq c_1 \|\Phi_t\|_{L_p(0,T;W_p^1(G_\delta))} \varepsilon^\alpha.$$

где постоянная c_1 не зависит от ε , j . Аналогично оцениваем выражение $\left\| \int_G (\Phi(x, t) - \Phi(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon}(x) dx \right\|_{L_p(0,T)}$. Тогда справедлива оценка

$$\left\| \int_G (\Phi - \Phi(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx \right\|_{W_p^1(0,T)} \leq c_2 \varepsilon^\alpha (\|\Phi_t\|_{L_p(0,T;W_p^1(G_\delta))} + \|\Phi\|_{L_p(0,T;W_p^1(G_\delta))}),$$

Рассмотрим второе слагаемое $\int_G (v - v(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx$. Совершенно аналогично имеем оценку:

$$\left\| \int_G (v - v(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx \right\|_{W_p^1(0,T)} \leq c_3 \varepsilon^\alpha (\|v_t\|_{L_p(0,T;W_p^1(G_\delta))} + \|v\|_{L_p(0,T;W_p^1(G_\delta))}),$$

где постоянная c_3 не зависит от ε, j . Ввиду (2.43) окончательная оценка имеет вид

$$\|\omega_\varepsilon\|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \sum_{i=1}^{r_0} \|a_i^\varepsilon\|_{L_p(0,T)} \leq c_4 \varepsilon^\alpha,$$

где постоянная c_4 не зависит от ε . □

Замечание. Отметим, что фактически показывается, что сходимость по параметру ε степенная и показатель сходимости не меньше чем $1 - n/p$.

ГЛАВА 3

Коэффициентная обратная задача для моделей тепломассопереноса

В этой главе рассматриваются коэффициентные обратные задачи в самом общем виде, считая, что неизвестные функции входят как в правую часть уравнения, так и в оператор A как коэффициенты. Таким образом, рассматривается задачу:

$$Lu = u_t + A(t, x, D)u = f_c, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (3.1)$$

где G – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\Gamma \in C^{2m}$.

$$u|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x, t) D^\alpha u|_S = g_j(t, x), \quad S = \Gamma \times (0, T). \quad (3.2)$$

Правая часть в (3.1) имеет вид:

$$f_c = \sum_{i=1}^{r_0} b_i(t, x) q_i(t) + f. \quad (3.3)$$

Оператор A - представим в виде:

$$A = \sum_{i=r_0+1}^r q_i A_i(x, t) + A_{r+1}(x, t), \quad A_i u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha^i D^\alpha u. \quad (3.4)$$

Неизвестными в (3.1) являются решение u и функции $q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, r$), входящие в правую часть (3.1) и оператор A . Условия переопределения имеют вид

$$\int_{G_i} u \varphi_i(x) dx = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (3.5)$$

где $\varphi_i(x), \psi_i(t)$ - некоторые функции, условия на которые уточняются ниже, и $G_i \subset G$ некоторые области. Параметры s, r связаны равенством $r = sh$. Задача о нахождении функций u, q_i с использованием краевых условий и приведённых выше условий переопределения может быть сформулирована и как некоторая задача управления.

Нелинейные задачи вида (3.1)-(3.5) включают в себя постановки, приведённые в предыдущих главах. Однако, имеются отличия в результатах в линейном и нелинейном случае: в линейном случае полученные результаты являются глобальными по времени, а в нелинейном случае в столь общей постановке они

только локальны. Кроме того, фактически неизвестные функции $\{q_i\}$ в этой главе ищутся в классе непрерывных функций, в то время как в линейном случае они могут быть найдены и в более широком классе суммируемых функций из пространства L_p . Причина этого состоит в том, что в нелинейном случае неизвестные функции могут входить в том числе и в главную часть эллиптического оператора, а для того чтобы имела место регулярная разрешимость краевых задач для такого оператора необходимо, чтобы коэффициенты главной части были непрерывны.

Приведем условия на данные задачи. Как и ранее $G_0 = \cup_{j=1}^s G_j$, $Q_0 = G_0 \times (0, T)$. Потребуется, чтобы:

$$b_j, f \in C([0, T]; L_p(G_0)) \cap L_p(Q) \quad (j = 1, 2, \dots, r_0), \quad (3.6)$$

$$a_\alpha^i \in C([0, T]; W_p^1(G_0)) \text{ при } |\alpha| = 2m, \quad (3.7)$$

$$a_\alpha^i \in C([0, T]; L_p(G_0)), \quad (i = r_0 + 1, r_0 + 2, \dots, r + 1) \text{ при } |\alpha| \leq 2m - 1. \quad (3.8)$$

Условия на функции $\psi_i(t)$ в данном случае имеют вид

$$\psi_i(t) \in C^1([0, T]), \quad \psi_i(0) = \int_{G_i} u_0(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} a_\alpha^i(t, x) &\in L_\infty(Q) \quad (|\alpha| < 2m), \quad a_\alpha^i \in C(\overline{Q}), \\ (|\alpha| &= 2m, \quad i = r_0 + 1, r_0 + 2, \dots, r + 1), \\ b_{j\beta} &\in C^{2m-m_j}(\overline{S}) \quad (j = 1, \dots, m, \quad |\beta| \leq m_j). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Определим матрицу B размера $r \times r$, строки которой с номерами $(k-1)h + 1, kh, (k = 1, 2, \dots, s)$ занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами:

$$\begin{aligned} &\int_G b_1(x, 0) \varphi_k dx, \dots, \int_G b_{r_0}(x, 0) \varphi_k dx, \\ &-\int_G A_{r_0+1}(x, 0) u_0 \varphi_k dx, \dots, -\int_G A_r(x, 0) u_0 \varphi_k dx. \end{aligned}$$

Пусть скобки $(\cdot, \cdot)$ обозначают скалярное произведение в $L_2(G)$. Выражение $(A_i u_0, \varphi_k) = \int_G A_i(x, 0) u_0 \varphi_k dx$ понимается в смысле отношения двойственности между $W_q^1(G_k)$ и $(W_q^1(G_k))'$ – двойственное пространство. Таким образом, для каждого старшего слагаемого входящего в выражение $A_i(x, 0) u_0$ имеем

$$\int_G a_\alpha^i(x, t) D^\alpha u_0 \varphi_k dx = \int_{\Gamma_k} a_\alpha(x, t) D^{\alpha'} u_0 \varphi_k n_j d\Gamma - \int_{G_k} (a_\alpha \varphi_k)_{x_j} D^{\alpha'} u_0 dx,$$

где $|\alpha| = 2m$, $D^\alpha u_0 = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha'} u_0$, n_j – координаты единичной внешней нормали к $\Gamma_k = \partial G_k$. Каждый из интегралов в правой части понимается в обычном смысле: в силу теорем вложения $\varphi_k \in W_q^{1-1/q}(\Gamma_k)$ и $D^{\alpha'} u_0 \in C(\bar{Q})$ при $|\alpha| \leq 2m - 1$. Требуется, чтобы выполнялось неравенство

$$\det B \neq 0. \quad (3.11)$$

3.1 Коэффициентные обратные задачи с интегральным условием перепределения для моделей тепломассопереноса. Общий случай.

В этом параграфе рассматривается случай, когда у нас выполнено условие (2.5). Случай, когда условие (2.5) ослаблено рассматривается в следующем параграфе. Определим постоянные q_i^0 ($i = 1, 2, \dots, r$) исходя из решений системы

$$\begin{aligned} \psi_{jt}(0) + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^0 \int_G A_i u_0 \varphi_j dx + \int_G A_{r+1} u_0 \varphi_j dx = \\ \sum_{i=1}^{r_0} q_i^0 \int_G b_i(x, 0) \varphi_j dx + \int_G f \varphi_j dx, \quad j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В следующей теореме считается, что выполнены условия (1.5), (1.6) для вспомогательного оператора $A^0 = \sum_{i=r_0+1}^r q_i^0 A_i + A_{r+1}$ или другими словами, что

$$\text{оператор } \partial_t + A^0 \text{ параболичен.} \quad (3.13)$$

Теорема 12. Пусть выполнены условия (1.2)-(1.3), (2.5), (3.6)-(3.11), (3.13). Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что на промежутке $t \in [0, \gamma_0]$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$) задачи (3.1)-(3.5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_0}), \quad q_i(t) \in C([0, \gamma_0]), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Решение непрерывно зависит от данных задачи в следующем смысле. Фиксируем $R > 0$ и рассмотрим класс данных задачи S_R , состоящий из наборов $(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, \{g_j\}_{j=1}^m)$ таких, что выполнены условия (3.9), (1.2), (1.3), $\psi_j \in C^{1+\beta}([0, T])$ для некоторого $\beta \in (0, 1]$ и всех j и

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_{C^{1+\beta}([0, T])} + \|f\|_{C([0, T]; L_p(G_0))} + \\ \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S)} \leq R, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда найдется $\gamma_1 > 0$ такое, что для любого набора данных $(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, \{g_j\}_{j=1}^m) \in S_R$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$) задачи (3.1)-(3.5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_1}), \quad q_i(t) \in C([0, \gamma_1]), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

и для любых двух решений $(u^i, q_1^i, \dots, q_r^i)$ ($i = 1, 2$) задачи (3.1)-(3.5) из класса

$$u^i \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_1}), \quad q_j^i \in C([0, \gamma_1]), \quad (i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, r),$$

отвечающих двум различным наборам данных $f^i, \psi_j^i, u_0^i, g_\eta^i$ ($j = 1, 2, \dots, s, i = 1, 2, \eta = 1, 2, \dots, m$) из S_R справедлива оценка устойчивости

$$\begin{aligned} & \|u^1 - u^2\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^r \|q_j^1 - q_j^2\|_{C([0, \gamma_1])} \leq \\ & C(\|f^1 - f^2\|_{L_p(Q^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^r \|\psi_j^1 - \psi_j^2\|_{C^1([0, \gamma_1])} + \|f^1 - f^2\|_{C([0, \gamma_1]; L_p(G_0))} + \\ & \|u_0^1 - u_0^2\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^m \|g_j^1 - g_j^2\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S^{\gamma_1})}), \end{aligned}$$

где постоянная C – не зависит от данных задач класса S_R , но зависит от R и $S^{\gamma_1} = \partial G \times (0, \gamma_1)$.

Доказательство. Построим функцию Φ как решение задачи

$$\Phi_t + \left(\sum_{i=r_0+1}^r q_i^0 A_i + A_{r+1} \right) \Phi = f + \sum_{i=1}^{r_0} q_i^0 b_i(x, t), \quad (3.14)$$

$$\Phi|_{t=0} = u_0(x), \quad B_j \Phi|_S = g_j \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (3.15)$$

Решение этой задачи существует и обладает свойствами, указанными в теореме 1. Делаем замену $V = u - \Phi$, $\vec{q} = \vec{q}^1 + \vec{q}^0$ ($\vec{q}^i = (q_1^i, \dots, q_r^i)$, $i = 0, 1$). Тогда V есть решение задачи

$$\begin{aligned} V_t + A^0 V + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^1 A_i V &= \sum_{i=1}^{r_0} b_i q_i^1 - \sum_{i=r_0+1}^r q_i^1 A_i \Phi, \\ V|_{t=0} &= 0, \quad B_j V|_S = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Так как оператор $\partial_t + A^0$ параболичен, в силу теоремы 2 для любого $g \in L_p(Q^\tau)$ задача

$$V_t + A^0 V = g, \quad V|_{t=0} = 0, \quad B_j V|_S = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (3.17)$$

имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\|V\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \leq c\|g\|_{L_p(Q^\tau)}, \quad (3.18)$$

где постоянная c не зависит от $\tau \in [0, T]$, $Q^\tau = G \times (0, \tau)$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$V_t + A^0 V + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^1 A_i V = g(x, t), \quad (3.19)$$

$$V|_{t=0} = 0, \quad B_j V|_S = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (3.20)$$

Считаем, что $\vec{q}^1 \in B_{\mu, \tau} = \{\vec{q}^1 \in C([0, \tau]) : \|\vec{q}^1\|_{C([0, \tau])} \leq \mu\}$, где $\tau \leq T$ фиксировано. Имеем в силу теоремы 2:

$$V + (\partial_t + A^0)^{-1} \sum_{i=r_0+1}^r q_i^1 A_i V = (\partial_t + A^0)^{-1} g(x, t). \quad (3.21)$$

В силу оценки (3.18) имеем

$$\begin{aligned} \|(\partial_t + A^0)^{-1} \sum_{i=r_0+1}^r q_i^1 A_i V\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} &\leq c \left\| \sum_{i=r_0+1}^r q_i^1 A_i V \right\|_{L_p(Q^\tau)} \leq \\ &\|\vec{q}^1\|_{C([0, \tau])} c c_1 \|V\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \leq \mu c c_1 \|V\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Далее считаем, что $\mu \leq \mu_0 = \frac{1}{2cc_1}$. В этом случае

$$\|(\partial_t + A^0)^{-1} \left(\sum_{i=r_0+1}^r q_i^1 A_i V \right)\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \leq \frac{1}{2} \|V\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)}.$$

и следовательно, уравнение (3.21) имеет единственное решение $V \in W_p^{1,2m}(Q)$ удовлетворяющее однородным краевым условиям (3.20) и оценке

$$\|V\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \leq 2\|(\partial_t + A^0)^{-1} g\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \leq 2c\|g\|_{L_p(Q^\tau)}, \quad \forall \vec{q}^1 \in B_{\mu, \tau}. \quad (3.23)$$

Составим систему уравнений для нахождения $\vec{q}^1$. Интегрируем уравнение (3.16) с весом φ_i по области G получим

$$\int_G V_t \varphi_i dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_G V \varphi_i dx = \tilde{\psi}_{it}(t), \quad \tilde{\psi}_i(t) = \psi_i - \int_G \Phi \varphi_i dx,$$

и значит

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{it} + \int_G A^0 V \varphi_j dx + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^1 \int_G A_i V \varphi_j dx = \\ \sum_{i=1}^{r_0} q_i^1 \int_G b_i \varphi_j dx - \sum_{i=r_0+1}^r q_i^1 \int_G A_i \Phi \varphi_j dx, \quad i = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Рассмотрим матрицу $B(t)$ размера $r \times r$, строки которой с номерами $(k-1)h+1, kh, (k=1, 2, \dots, s)$ занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами

$$\int_G b_1 \varphi_k dx, \dots, \int_G b_{r_0} \varphi_k dx, - \int_G A_{r_0+1} \Phi \varphi_k dx, \dots, - \int_G A_r \Phi \varphi_k dx.$$

Отметим, что $B(0) = B$, где матрица B была определена перед (3.11). Покажем, что элементы матрицы $B(t)$ непрерывны по t . Непрерывность элементов первых r_0 столбцов вытекает из (3.6). Рассмотрим последние $r - r_0$ столбцов. Поскольку $\Phi \in W_p^{1,2m}(Q)$, в силу теорем вложения

$$\Phi \in C([0, T]; W_p^\alpha(G)), \quad \alpha \leq 2m(1 - 1/p). \quad (3.25)$$

Это следствие, например, теоремы 1.8.3 в [1], где в качестве абстрактных банаховых пространств A_0, A_1 рассматриваются пространства Соболева $W_p^{2m}(G)$ и $L_p(G)$. В силу условий на p , $2m(1 - 1/p) > n/p + 2m - 1$ и значит, в частности, $W_p^{2m(1-1/p)}(G) \subset C^\beta(\overline{G})$ с $\beta \leq 2m - 2m/p - n/p$ [1]. Таким образом,

$$W_p^{1,2m}(Q) \subset C([0, T]; W_p^{2m(1-\frac{1}{p})}(G)) \subset C([0, T]; C^\beta(\overline{G})), \quad (3.26)$$

$$\beta \leq 2m - \frac{2m}{p} - \frac{n}{p}.$$

В частности, после может быть изменения функции Φ на множестве меры 0 функции $D_x^\alpha \Phi$ при $|\alpha| \leq 2m - 1$ непрерывны. Имеем $A_j \Phi = A_{j0} \Phi + A_{j1} \Phi$ ($j > r_0$, где $A_{j0} \Phi = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha^j D^\alpha \Phi$ и $A_{j1} \Phi = \sum_{|\alpha| < 2m} a_\alpha^j D^\alpha \Phi$). В силу условий (3.8) и указанных выше свойств функций Φ при $|\alpha| \leq 2m - 1$, функции $\int_G a_\alpha^j D^\alpha \Phi \varphi_i dx$ непрерывны по t . Рассмотрим случай $|\alpha| = 2m$. Имеем

$$\int_G a_\alpha^j(x, t) D^\alpha \Phi \varphi_i dx dt = \int_{\Gamma_i} a_\alpha(x, t) D^{\alpha'} \Phi \varphi_i n_k d\Gamma - \int_{G_i} (a_\alpha \varphi_i)_{x_k} D^{\alpha'} \Phi dx,$$

где $D^\alpha \Phi = \frac{\partial}{\partial x_k} D^{\alpha'} \Phi$, n_k — координаты единичной внешней нормали к $\Gamma_i = \partial G_i$. По тем же самым причинам (условия (3.8), (3.7) и указанные выше свойства функций Φ) полученные интегралы непрерывны по t . Те же соображения позволяют доказать, что функции $\int_{G_j} \Phi \varphi_j dx$ непрерывно дифференцируемы по t , т.е., принадлежат классу $C^1([0, T])$. Непрерывность этих функций и даже функций вида $\int_{G_j} A_i \Phi \varphi_j dx$ уже была доказана. Из уравнения (3.14) вытекает, что

$$- \int_{G_j} \Phi_t \varphi_j dx = \int_{G_j} ((\sum_{i=r_0+1}^r q_i^0 A_i + A_{r+1}) \Phi - (f + \sum_{i=1}^{r_0} q_i^0 b_i(x, t))) \varphi_j dx.$$

Из условий на правую часть и функции b_i и доказанного имеем, что левая часть этого равенства также непрерывна по t . Более того, сравнивая это равенство и равенство (3.12) убеждаемся в том, что $\tilde{\psi}_{jt}(0) = 0$. Таким образом, определённые выше функции $\tilde{\psi}_i$ обладают тем свойством, что

$$\tilde{\psi}_i \in C^1([0, T]), \quad \tilde{\psi}_{it}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (3.27)$$

В силу непрерывности элементов матрицы $B(t)$, существует $\tau_0 > 0$ и постоянная $\tilde{\delta} > 0$ такие, что $|\det B(t)| > \tilde{\delta}$, $\forall t \in [0, \tau_0]$. Равенства (3.24) могут быть переписаны в виде

$$B(t)\vec{q}^1 = \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{1t} + (A^0V, \varphi_1) + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^1(A_iV, \varphi_1) \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_{st} + (A^0V, \varphi_s) + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^1(A_iV, \varphi_s) \end{bmatrix}, \quad (u, v) = \int_G u \bar{v} dG.$$

Таким образом

$$\vec{q}^1 = g_0 + R(\vec{q}^1), \quad (3.28)$$

$$\text{где } g_0 = B(t)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{1t} \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_{st} \end{bmatrix}, \quad R(\vec{q}^1) = B(t)^{-1} \begin{bmatrix} (A^0V, \varphi_1) + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^1(A_iV, \varphi_1) \\ \vdots \\ (A^0V, \varphi_s) + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^1(A_iV, \varphi_s) \end{bmatrix} \text{ и } V$$

решение задачи (3.16), которое существует, если $\vec{q}^1 \in B_{\mu, \tau}$, с $\mu \leq \mu_0$ и $\tau \leq T$.

Рассмотрим вектор

$$g_0 = B(t)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{1t} \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_{st} \end{bmatrix}.$$

Возьмём $\tau \leq \tau_0$. Имеем $\|g_0\|_{C([0, \tau])} \leq c \max_{1 \leq i \leq s} \|\tilde{\psi}_{it}\|_{C([0, \tau])}$.

В силу равенств (3.27), $\tilde{\psi}_{it}(0) = 0$. В силу непрерывности функции $\tilde{\psi}_{it}$, $\exists \tau_1 \leq \tau_0$:

$$\|g_0\|_{C([0, \tau])} \leq \frac{\mu_0}{2}, \quad \forall \tau_0 \leq \tau_1.$$

Покажем, что найдется $\tau_2 \leq \tau_1$ такое, что уравнение (3.28) имеет единственное решение в шаре $B_{\mu_0, \tau_2} = \{\vec{q}^1 : \|\vec{q}^1\|_{C([0, \tau_2])} \leq \mu_0\}$.

Получим оценки для оператора $R(\vec{q}^1)$.

Пусть $\vec{q}^1, \vec{q}^2 \in B_{\mu_0, \tau}$, ($\tau \leq \tau_1$), и V^1, V^2 – решения задачи (3.16), где в правой части участвуют функции $\vec{q}^1, \vec{q}^2$, соответственно, удовлетворяющие краевым условиям $V^j|_{t=0} = 0$, $B_i V^j|_S = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2$).

Имеем

$$V_t^j + A^0 V^j + \sum_{j=r_0+1}^r q_i^j A_i V^j = \sum_{i=1}^{r_0} q_i^j b_i - \sum_{i=r_0+1}^r q_i^j A_i \Phi, \quad (3.29)$$

$$V^j|_{t=0} = 0, \quad B_i V^j|_S = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2).$$

Оценим $\|R(\vec{q}^1) - R(\vec{q}^2)\|_{C([0, \tau])}$, имеем

$$\begin{aligned} \|R(\vec{q}^1) - R(\vec{q}^2)\|_{C([0, \tau])} &\leq c \max_{1 \leq j \leq s} \|(A^0(V^1 - V^2), \varphi_j) + \\ &\sum_{i=r_0+1}^r (q_i^1(A_i V^1, \varphi_j) - q_i^2(A_i V^2, \varphi_j))\|_{C([0, \tau])}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Вычтем уравнения (3.29) при $j = 1, 2$.

$$\begin{aligned} (V^1 - V^2)_t + A^0(V^1 - V^2) + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^2(A_i V^1 - A_i V^2) = \\ \sum_{i=1}^{r_0} (q_i^1 - q_i^2) b_i - \sum_{i=r_0+1}^r (q_i^1 - q_i^2) A_i V^1 - \sum_{i=1}^{r_0} (q_i^1 - q_i^2) A_i \Phi. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Отметим, что в силу оценки (3.23) функции V^j удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} \|V^j\|_{W_p^{1, 2m}(Q_\tau)} &\leq 2C \left\| \sum_{i=1}^{r_0} q_i^j b_i - \right. \\ &\left. \sum_{i=r_0+1}^r q_i^j A_i \Phi \right\|_{L_p(Q_\tau)} \leq C_1 \|\vec{q}^j\|_{C([0, \tau])} \leq C_1 \mu_0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где C_1 не зависит от x и τ . В силу оценки (3.23) и равенств (3.31) имеем

$$\begin{aligned} \|V^1 - V^2\|_{W_p^{1, 2m}(Q_\tau)} &\leq \\ C_2 \|\vec{q}^1 - \vec{q}^2\|_{C([0, \tau])} + \max_i \|A_i V^1\|_{L_p(Q_\tau)} C_3 \|\vec{q}^1 - \vec{q}^2\|_{C([0, \tau])} &\leq \\ \|\vec{q}^1 - \vec{q}^2\|_{C([0, \tau])} (C_2 + C_3 \|V^1\|_{W_p^{1, 2m}(Q_\tau)}) &\leq \\ \|\vec{q}^1 - \vec{q}^2\|_{C([0, \tau])} (C_2 + C_3 C_1 \mu_0). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Оценим правую часть в (3.30) используя включение $\varphi_j \in W_q^1(G_j)$. В силу (3.26) можем считать, что $v \in C([0, T]; C^{2m-1}(\bar{G}))$, а в силу наших условий, что $a_\alpha \in C(\bar{Q}_0)$. Рассмотрим $|(A^0 v, \varphi_j)|$ для $v = V^1 - V^2$. Имеем $A^0 v = A_0 v + A_1 v$, где

$A_0 v = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha v$ и $A_1 v = \sum_{|\alpha|<2m} a_\alpha D^\alpha v$. При $|\alpha| \leq 2m - 1$, получим

$$\left| \int_G a_\alpha D^\alpha v \varphi_i \right| \leq c \|D^\alpha v\|_{C(\overline{G_0})} \leq c \|v\|_{C^{2m-1}(\overline{G_0})},$$

$$c = M \max_i \left(\int_G |\varphi_i|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad M = \max_{t \in [0, T], |\alpha| < 2m} \|a_\alpha(x, t)\|_{L_\infty(G_0)}.$$

Таким образом,

$$\left| \int_G A_1 v \varphi_i dx \right| \leq c_1 \|v\|_{C^{2m-1}(\overline{G_0})}. \quad (3.34)$$

Рассмотрим выражение $\int_G A_0 v \varphi_i dx$. Сюда входят слагаемые

$$\int_G a_\alpha(x, t) D^\alpha v \varphi_i dx dt = \int_{\Gamma_i} a_\alpha(x, t) D^{\alpha'} v \varphi_i n_k d\Gamma - \int_{G_i} (a_\alpha \varphi_i)_{x_k} D^{\alpha'} v dx,$$

где $D^\alpha v = \frac{\partial}{\partial x_k} D^{\alpha'} v$, n_k — координаты единичной внешней нормали к $\Gamma_i = \partial G_i$.

Второй интеграл оценивается через

$$\begin{aligned} & \int_{G_i} |a_\alpha| |D^{\alpha'} v| \cdot |\varphi_{ix_k}| dx + \int_{G_0} |a_{\alpha x_k}| \cdot |D^{\alpha'} v| \cdot |\varphi_i| dx \leq \\ & \leq M \|D^{\alpha'} v\|_{C(\overline{G_0})} \left(\int_{G_i} |\varphi_{ix_k}|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + M_1 \|D^{\alpha'} v\|_{C(\overline{G_0})} \left(\int_{G_i} \varphi_i^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Таким образом, второй интеграл оценивается через $c_1 \|v\|_{C^{2m-1}(\overline{G_0})}$. Оцениваем первый интеграл с использованием теорем о следах (см., например, [1, 94, 95]).

Имеем, что

$$\left| \int_{\Gamma_i} a_\alpha D^{\alpha'} v \varphi_i n_k d\Gamma \right| \leq \|v\|_{C^{2m-1}(\overline{G_0})} \|a_\alpha\|_{L_\infty(G_0)} \|\varphi_i\|_{L_q(\Gamma_i)} \leq c_2 \|v\|_{C^{2m-1}(\overline{G_0})}.$$

Здесь используется тот факт, что $\varphi_i \in W_q^{1-1/q}(\Gamma_i)$ в силу теорем вложения. Из последних двух неравенств вытекает, что найдется постоянная c_3 такая, что

$$\left| \int_G A_0 v \varphi_i dx \right| \leq c_3 \|v\|_{C^{2m-1}(\overline{G_0})}. \quad (3.35)$$

В силу теорем вложения и интерполяционных неравенств (см. (3.26), [1]) имеем

$$\begin{aligned} \|v\|_{C^{2m-1}(\overline{G_0})} & \leq c_4 \|v\|_{W_p^{2m-1+\frac{n}{p}+\varepsilon_0}(G)} \leq c_5 \|v\|_{W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G)}^\theta \|v\|_{L_p(G)}^{1-\theta}, \\ \theta(2m - \frac{2m}{p}) & = 2m - 1 + \frac{n}{p} + \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где выбираем постоянную ε_0 настолько малым числом, что $2m - \frac{2m}{p} > 2m - 1 + \frac{n}{p} + \varepsilon_0$. Тогда из (3.34), (3.35), (3.36) следует, что

$$\max_{1 \leq j \leq s} \|(A^0(V^1 - V^2), \varphi_j)\|_{C([0, \tau])} \leq C_6 \|v\|_{C([0, \tau]; W_p^{2m - \frac{2m}{p}}(G))}^\theta \|v\|_{C([0, T]; L_p(G))}^{1-\theta}. \quad (3.37)$$

Как было отмечено, $v \in C([0, \tau]; W_p^{2m - 2m/p}(G))$ после может быть изменения на множестве меры 0. Далее $v = \int_0^t v_\tau(x, \tau) d\tau$. Отсюда

$$\|v\|_{C([0, \tau]; L_p(G))} \leq \tau^{\frac{1}{q}} \|v_t\|_{L_p([0, \tau]; L_p(G))}, \quad (1/p + 1/q = 1). \quad (3.38)$$

Следовательно $\|(Av, \varphi_j)\|_{C([0, \tau])} \leq C \tau^{\frac{1-\theta}{q}} \|v\|_{W_p^{1, 2m}(Q_\tau)}$. Таким образом

$$\|(A^0(V^1 - V^2), \varphi_j)\|_{C([0, \tau])} \leq c_7 \tau^{\frac{1-\theta}{q}} \|V^1 - V^2\|_{W_p^{1, 2m}(Q_\tau)}, \quad (3.39)$$

где C_1 не зависит от τ . Используя (3.33), получим

$$\|(A^0(V^1 - V^2), \varphi_j)\|_{C([0, \tau])} \leq c_8 \tau^{\frac{1-\theta}{q}} \|\vec{q}^1 - \vec{q}^2\|_{C([0, \tau])}. \quad (3.40)$$

Рассмотрим второе слагаемое в (3.30):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=r_0+1}^r (q_i^1(A_i V^1, \varphi_j) - q_i^2(A_i V^2, \varphi_j)) = \\ & \sum_{i=r_0+1}^r (q_i^1 - q_i^2)(A_i V^1, \varphi_j) + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^2(A_i V^1 - A_i V^2, \varphi_j). \end{aligned}$$

Слагаемые $(A_i V^1, \varphi_j)$, $(A_i(V^1 - V^2), \varphi_j)$ оцениваются так же как и выражение $(A^0(V^1 - V^2), \varphi_j)$ (см. (3.39)). Имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=r_0+1}^r (q_i^1 - q_i^2)(A_i V^1, \varphi_j) \right\|_{C[0, \tau]} & \leq \|\vec{q}^1 - \vec{q}^2\|_{C[0, \tau]} \tau^{\frac{1-\theta}{q}} c_9 \|V^1\|_{W_p^{1, 2m}(Q_\tau)} \leq \\ & \tau^{\frac{1-\theta}{q}} C(\mu_0) \|\vec{q}^1 - \vec{q}^2\|_{C([0, \tau])}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Аналогично в силу (3.33)

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=r_0+1}^r q_i^2(A_i(V^1 - V^2), \varphi_j) \right\| & \leq \mu_0 \tau^{\frac{1-\theta}{q}} C \|V^1 - V^2\|_{W_p^{1, 2m}(Q_\tau)} \leq \\ & c_{10} \tau^{\frac{1-\theta}{q}} \|\vec{q}^1 - \vec{q}^2\|_{C([0, \tau])}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Имеем из (3.40)-(3.42), что

$$\|R(\vec{q}^1) - R(\vec{q}^2)\|_{C[0, \tau]} \leq c_{11} \tau^{\frac{1-\theta}{q}} \|\vec{q}^1 - \vec{q}^2\|_{C([0, \tau])}, \quad \forall \vec{q}^i \in B_{\mu_0, \tau}.$$

Найдем $\tau_2 \leq \tau_1$: $c_{11}\tau_2^{\frac{1-\theta}{q}} \leq \frac{1}{2}$. Тогда

$$\|R(\vec{q}^1) - R(\vec{q}^2)\|_{C([0, \tau_2])} \leq \frac{1}{2}\|\vec{q}^1 - \vec{q}^2\|_{C([0, \tau_2])}. \quad (3.43)$$

Поскольку при $\vec{q}^2 = 0$ имеем $R(\vec{q}^2) = 0$, то имеем

$$\|R(\vec{q}^1)\|_{C([0, \tau_2])} \leq \frac{1}{2}\|\vec{q}^1\|_{C([0, \tau_2])}. \quad (3.44)$$

Тогда оператор $R_0(\vec{q}^1) = g_0 + R(\vec{q}^1)$ переводит шар B_{μ_0, τ_2} в себя. Действительно,

$$\|R_0(q)\|_{C([0, \tau_2])} \leq \|g_0\|_{C([0, \tau_2])} + \|R(\vec{q}^1)\|_{C([0, \tau_2])} \leq \frac{\mu_0}{2} + \frac{\mu_0}{2} = \mu_0,$$

и является в нём сжимающим. По теореме о неподвижной точке уравнения (3.28) имеет в этом шаре единственное решение $\vec{q}^1$. По построению, функция V есть решение задачи (3.16). Возьмём $\gamma_0 = \tau_2$. Покажем, что V удовлетворяет условию $\int_G V \varphi_j dx = \tilde{\psi}_i(t)$. Интегрируем уравнение в (3.16) по G с весом φ_i . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_G \varphi_i V dx + \int_G A^0 V \varphi_i dx + \sum_{j=r_0+1}^r q_j^1 \int_G A_j V \varphi_i dx = \\ \sum_{j=1}^{r_0} q_j^1 \int_G b_j \varphi_i dx - \sum_{j=r_0+1}^r q_j^1 \int_G A_j \Phi \varphi_i dx. \end{aligned}$$

Функции q_j удовлетворяют системе (3.24), вычитая i -е уравнение которой из предыдущего равенства получим, что $\left(\int_G \varphi_i v dx - \tilde{\psi}_i\right)_t = 0$ или $\int_G \varphi_i v dx - \tilde{\psi}_i = (\int_G \varphi_i v dx - \tilde{\psi}_i)|_{t=0} = 0$ в силу условий согласования. Таким образом функция v есть решение нашей задачи.

Вначале покажем, что найдется $\gamma_1 > 0$ такое, что для любых данных класса S_R существует решение нашей задачи из класса указанного в теореме на промежутке времени $[0, \gamma_1]$. Обратимся к выбору параметра γ_0 в доказательстве существования. Вначале выбирается параметр τ_0 такой, что $|\det B(t)| \geq \tilde{\delta} > 0$ для всех $t \in [0, \tau_0]$. Покажем, что этот параметр может быть выбран одним и тем же для всех данных класса S_R . Известно, что $|\det B(0)| = \delta_1 > 0$ ($B(0) = B$). Рассмотрим элементы матрицы $B(t)$, являющиеся компонентами векторов

$$\alpha_{ij}(t) = \int_G b_i(x, t) \varphi_j(x) dx, \quad \beta_{ij} = \int_G A_i \Phi(x, t) \varphi_j(x) dx.$$

От данных задачи у нас зависит вспомогательная функция $\Phi(x, t)$, норма которой в силу оценки из теоремы 1 оценивается через некоторую постоянную, зависящую от параметра R . Фиксируем $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности (как у нас было доказано выше) найдется параметр $\tilde{\tau}_0$ такой, что на $[0, \tilde{\tau}_0]$ выполнено неравенство $|\alpha_{ij}(t) - \alpha_{ij}(0)| \leq \varepsilon$. Рассмотрим оставшиеся векторы и оценим $|\beta_{ij}(t) - \beta_{ij}(0)| = |\int_G A_i(\Phi - u_0)\varphi_j dx|$. Повторяя рассуждения, приведённые выше при оценке выражений вида $|(A^0 v, \varphi_j)|$ и взяв вместо v функцию $\Phi - u_0$ как и ранее (см.(3.38), (3.34)) получим оценки

$$|\beta_{ij}(t) - \beta_{ij}(0)| \leq ct^{(1-\theta)/q} \|\Phi - u_0\|_{C([0,T]; W_p^{2m-2m/p}(G))} \|\Phi\|_{L_p(Q)} \leq c_1(R)t^{(1-\theta)/q}. \quad (3.45)$$

Таким образом, равномерно по всем данным класса S_R за счёт выбора параметра $\tilde{\tau}_0$, можно сделать величину $|\beta_{ij}(t) - \beta_{ij}(0)|$ меньше наперед заданного ε на промежутке $[0, \tilde{\tau}_0]$. Этот факт позволяет легко обосновать, что найдется число $\tilde{\tau}_0$, такое что на $[0, \tilde{\tau}_0]$ выполняется неравенство $|\det B(t)| \geq \delta_1/2 > 0$. Далее выбирая параметр $\tau_1 \leq \tau_0$ такой что

$$\|g_0\|_{C([0, \tau_1])} \leq c \max_{1 \leq i \leq s} \|\tilde{\psi}_{it}\|_{C([0, T])} \leq \mu_0/2,$$

покажем, что возможен выбор такого τ_1 , не зависящий от данных из нашего класса. Действительно,

$$\tilde{\psi}_{it} = \psi_{it} - \int_{G_j} \Phi_t \varphi_i dx.$$

Имеем $|\psi_{it} - \psi_{it}(0)| \leq Rt^\beta$ в силу определения класса S_R . С другой стороны, поскольку функция Φ удовлетворяет уравнению (3.14), можем заменить функцию Φ_t выражением $-(\sum_{i=r_0+1}^r q_i^0 A_i + A_{r+1})\Phi + f + \sum_{i=1}^{r_0} q_i^0 b_i(x, t)$. Функции (f, φ_j) , (b_j, φ_j) непрерывны по t и не зависят от данных задачи класса S_R , а для функции $(A_i \Phi, \varphi_j)$ выполнено неравенство (3.45). Следовательно, найдется $\tilde{\tau}_1$ такое, что на промежутке $[0, \tilde{\tau}_1]$ выполнено неравенство

$$c \max_{1 \leq i \leq s} \|\tilde{\psi}_{it}\|_{C([0, T])} \leq \mu_0/2.$$

Как и ранее. выбор параметра τ_2 может быть также сделан не зависящим от данных задачи. Можем взять параметр τ_2 в качестве параметра γ_1 .

Как вытекает из доказательства, найдется постоянная $c(R)$ такая, что

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\gamma_1})} + \|\vec{q}\|_{C([0,\gamma_1])} \leq c(R). \quad (3.46)$$

Оценка устойчивости из утверждения теоремы фактически была получена в процессе доказательства разрешимости обратной задачи. Поэтому приведем только схему доказательства. Пусть $(u^i, \vec{q}^i)$ ($\vec{q}^i = (q_1^i, \dots, q_r^i)$) ($i = 1, 2$) два решения задачи (1)-(5) из класса

$$u^i \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_0}), \quad q_j^i \in C([0, \gamma_0]), \quad (i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, r),$$

отвечающих двум различным наборам данных $f^i, \psi_j^i, u_0^i, g_\eta^i$ ($j = 1, 2, \dots, s, i = 1, 2, \eta = 1, 2, \dots, m$) класса S_R . Для любого такого набора данных можем построить функцию Φ как решение соответствующей задачи (3.14), (3.15) и числа q_{0j} как решение системы вида (3.12). Как и ранее имеем

$$\tilde{\psi}_j(t) = \psi_j - \int_G \Phi \varphi_j dx, \quad j = 1, 2, \dots, s, i = 1, 2.$$

Каждому набору построенных функций отвечает своя матрица $B(t)$ и своя функция g_0 , входящая в правую часть системы (3.28). Параметр μ_0 определённый в процессе доказательства имеет одно тоже значение для всех наборов, поскольку его величина фактически определяется коэффициентами уравнения и областью G . Теперь рассмотрим наши данные и обозначим через Φ_i решения соответствующих задач (3.14), (3.15), где u_0, g_η ($\eta = 1, \dots, m$) заменены на $u_0^i, g_\eta^i, i = 1, 2$. Далее найдем соответствующие числа q_{0j}^i как решения систем вида (3.12), отвечающих уже новым данным ψ_j^i и u_0^i . и сделаем замену $\vec{q}^i = \vec{q}_1^i + \vec{q}_0^i$, или по координатно $q_j^i = q_{1j}^i + q_{0j}^i$ ($j = 1, \dots, r, i = 1, 2$). Сделаем также замены $V^i = u^i - \Phi_i$. Тогда функции V^i есть решения задач

$$\begin{aligned} V_t^i + A^0 V^i + \sum_{j=r_0+1}^r q_{1j}^i A_i V &= \sum_{j=1}^{r_0} b_j q_{1j}^i - \sum_{j=r_0+1}^r q_{1j}^i A_j \Phi_i, \\ V^i|_{t=0} &= 0, \quad B_j V^i|_S = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.47)$$

а условия переопределения запишутся в виде

$$\int_G V^i \varphi_j dx = \tilde{\psi}_j^i(t), \quad \tilde{\psi}_j^i(t) = \psi_j - \int_G \Phi_i \varphi_j dx, \quad j = 1, 2, \dots, s, i = 1, 2.$$

Уравнения (3.28) для вектор-функций $\vec{q}^i$ имеет вид

$$\vec{q}_1^i = g_0^i + R_i(\vec{q}_1^i), \quad i = 1, 2. \quad (3.48)$$

Далее применяется схема рассуждений используемая при получении оценок (3.43) и оценивается $\|R_1(\vec{q}_1^1) - R_2(\vec{q}_1^2)\|$. Получаем оценку вида

$$\|R_1(\vec{q}_1^1) - R_2(\vec{q}_1^2)\| \leq c_1 \tau^{\frac{1-\theta}{q}} \|\vec{q}^1 - \vec{q}^2\|_{C([0, \tau])} + c_2 \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{W_p^{1,2m}(Q_\tau)}, \quad \tau \leq \gamma_1.$$

Затем выбирая $\tau_3 \leq \gamma_1$ так чтобы $c_1 \tau_3^{\frac{1-\theta}{q}} \leq 1/2$, вычитая уравнения (3.48) при $i = 1, 2$ и используя полученное выше неравенство, приходим к оценке устойчивости из утверждения теоремы для разности $\|\vec{q}_1^1 - \vec{q}_1^2\|_{C([0, \tau_3])}$. Используя эту оценку уже легко получить оценку и для нормы $\|V^1 - V^2\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\tau_3})}$. $\square$

3.2 Коэффициентные обратные задачи с интегральным условием переопределения для моделей тепломассопереноса, описываемых системами уравнений второго порядка.

В этом параграфе записываем следствия из предыдущего параграфа для параболических систем второго порядка. Таким образом, рассматривается случай $m = 1$. Оператор A - представим в виде:

$$A = \sum_{k=r_0+1}^r q_k A_k(x, t) + A_{r+1}(x, t), \quad (3.49)$$

где

$$A_k(t, x, D)u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(t, x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i^k(t, x) u_{x_i} + a_0^k(t, x) u.$$

Условия переопределения имеют вид

$$\int_{G_i} u \varphi_i(x) dx = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (3.50)$$

Приведем условия на данные задачи.

$$b_j, f \in C([0, T]; L_p(G_0)) \cap L_p(Q) \quad (j = 1, 2, \dots, r_0), \quad (3.51)$$

$$a_{ij}^k \in C([0, T]; W_p^1(G_0)), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = r_0 + 1, \dots, r, \quad (3.52)$$

$$a_i^k \in C([0, T]; L_p(G_0)) \quad (k = r_0 + 1, r_0 + 2, \dots, r + 1), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.53)$$

Условия на функции $\psi_i(t)$ имеют вид

$$\psi_i(t) \in C^1([0, T]), \quad \psi_i(0) = \int_{G_i} u_0(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (3.54)$$

Условия на данные имеют вид

$$\begin{aligned} u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \quad g(x, t) \in W_p^{1-1/2p, 2-1/p}(S) \\ \text{или } g(x, t) \in W_p^{1/2-1/2p, 1-1/p}(S), \end{aligned} \quad (3.55)$$

где первое из условий на g используется в случае задачи Дирихле и второе в случае оставшихся краевых условий (Неймана, условий третьей краевой задачи, или условий с косой производной). Таким образом, в случае условий Дирихле имеем граничное условие

$$Bu|_S = u|_S = g, \quad (3.56)$$

а в случае более общих краевых условий

$$Bu|_S = \sum_{i=1}^n l_i(x, t) u_{x_i} + \sigma(x, t) u|_S = g, \quad (3.57)$$

где l_i ($i = 1, 2, \dots, n$), σ – матрицы размера $h \times h$. Предполагаем, что

$$l_j \in C^1(\bar{S}) \quad (j = 1, \dots, n), \quad \sigma(x, t) \in C^1(\bar{S}). \quad (3.58)$$

Мы рассматриваем также условия вида

$$Bu|_S = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} n_i u_{x_i} + \sigma(x, t) u|_S = g. \quad (3.59)$$

Пусть также выполнено условие (условие 7.6.1 в [94]): существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \eta, \eta \right) \geq \delta_0 |\xi|^2 |\eta|^2, \quad \forall (x, t) \in Q, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^h. \quad (3.60)$$

Определим матрицу B размера $r \times r$, строки которой с номерами $(k-1)h+1, kh$, ($k = 1, 2, \dots, s$) занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами:

$$\begin{aligned} \int_G b_1(x, 0) \varphi_k dx, \dots, \int_G b_{r_0}(x, 0) \varphi_k dx, \\ - \int_G A_{r_0+1}(x, 0) u_0 \varphi_k dx, \dots, - \int_G A_r(x, 0) u_0 \varphi_k dx. \end{aligned}$$

Мы требуем, чтобы выполнялись условия

$$\det B \neq 0, \quad (3.61)$$

$$g(x, 0) = B(x, 0)u_0(x)|_{\partial G}. \quad (3.62)$$

Следующая формулировка наиболее общая.

Теорема 13. Пусть выполнены условия (1.6), (2.5), (3.51)-(3.55), (3.61)-(3.62) и условие (3.58), если краевое условие имеет вид (3.57). Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что на промежутке $t \in [0, \gamma_0]$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$) задачи (3.1)-(3.5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2}(Q^{\gamma_0}), \quad q_i(t) \in C([0, \gamma_0]), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Решение непрерывно зависит от данных задачи в следующем смысле. Фиксируем $R > 0$ и рассмотрим класс данных задачи S_R , состоящий из наборов $(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, g)$ таких, что выполнены условия (3.54), (3.55), (3.61), $\psi_j \in C^{1+\beta}([0, T])$ для некоторого $\beta \in (0, 1]$ и всех j и

$$\begin{aligned} & \|f\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_{C^{1+\beta}([0, T])} + \|f\|_{C([0, T]; L_p(G_0))} + \\ & \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \|g\|_{W_p^{k_0, 2mk_0}(S)} \leq R, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где $k_0 = 1 - 1/2p$ в случае условия Дирихле и $k_0 = 1/2 - 1/2p$ в случае оставшихся краевых условий. Тогда найдется $\gamma_1 > 0$ такое, что для любого набора данных $(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, g) \in S_R$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$) задачи (3.1)-(3.5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2}(Q^{\gamma_1}), \quad q_i(t) \in C([0, \gamma_1]), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

и для любых двух решений $(u^i, q_1^i, \dots, q_r^i)$ ($i = 1, 2$) задачи (3.1)-(3.5) из класса

$$u^i \in W_p^{1,2}(Q^{\gamma_1}), \quad q_j^i \in C([0, \gamma_1]), \quad (i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, r),$$

отвечающих двум различным наборам данных $f^i, \psi_j^i, u_0^i, g^i$ ($j = 1, 2, \dots, s, i = 1, 2$, из S_R справедлива оценка устойчивости

$$\begin{aligned} & \|u^1 - u^2\|_{W_p^{1,2}(Q^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^r \|q_j^1 - q_j^2\|_{C([0, \gamma_1])} \leq \\ & C(\|f^1 - f^2\|_{L_p(Q^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j^1 - \psi_j^2\|_{C^1([0, \gamma_1])} + \|f^1 - f^2\|_{C([0, T]; L_p(G_0))} + \\ & \|u_0^1 - u_0^2\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \|g^1 - g^2\|_{W_p^{k_0, 2mk_0}(S^{\gamma_1})}), \end{aligned}$$

где постоянная C – не зависит от данных задач класса S_R , но зависит от R и $S^{\gamma_1} = \partial G \times (0, \gamma_1)$.

В следующей теореме записывается ряд условий в более простом виде.

Теорема 14. Пусть выполнены условия (2.5), (3.51)-(3.55), (3.61)-(3.62) и оператор B записывается в виде (3.56) или (3.61). Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что на промежутке $t \in [0, \gamma_0]$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$) задачи (3.1)-(3.5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2}(Q^{\gamma_0}), \quad q_i(t) \in C([0, \gamma_0]), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Решение непрерывно зависит от данных задачи в следующем смысле. Фиксируем $R > 0$ и рассмотрим класс данных задачи S_R , состоящий из наборов $(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, g)$ таких, что выполнены условия (3.54), (3.55), (3.61), $\psi_j \in C^{1+\beta}([0, T])$ для некоторого $\beta \in (0, 1]$ и всех j и

$$\begin{aligned} & \|f\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_{C^{1+\beta}([0, T])} + \|f\|_{C([0, T]; L_p(G_0))} + \\ & \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \|g\|_{W_p^{k_0, 2mk_0}(S)} \leq R, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где $k_0 = 1 - 1/2p$ в случае условия Дирихле и $k_0 = 1/2 - 1/2p$ в случае оставшихся краевых условий. Тогда найдется $\gamma_1 > 0$ такое, что для любого набора данных $(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, g) \in S_R$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$) задачи (3.1)-(3.5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2}(Q^{\gamma_1}), \quad q_i(t) \in C([0, \gamma_1]), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

и для любых двух решений $(u^i, q_1^i, \dots, q_r^i)$ ($i = 1, 2$) задачи (3.1)-(3.5) из класса

$$u^i \in W_p^{1,2}(Q^{\gamma_1}), \quad q_j^i \in C([0, \gamma_1]), \quad (i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, r),$$

отвечающих двум различным наборам данных $f^i, \psi_j^i, u_0^i, g^i$ ($j = 1, 2, \dots, s, i = 1, 2$, из S_R справедлива оценка устойчивости

$$\begin{aligned} & \|u^1 - u^2\|_{W_p^{1,2}(Q^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^r \|q_j^1 - q_j^2\|_{C([0, \gamma_1])} \leq \\ & C(\|f^1 - f^2\|_{L_p(Q^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j^1 - \psi_j^2\|_{C^1([0, \gamma_1])} + \|f^1 - f^2\|_{C([0, \gamma_1]; L_p(G_0))} + \\ & \|u_0^1 - u_0^2\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \|g^1 - g^2\|_{W_p^{k_0, 2mk_0}(S^{\gamma_1})}), \end{aligned}$$

где постоянная C – не зависит от данных задач класса S_R , но зависит от R и $S^{\gamma_1} = \partial G \times (0, \gamma_1)$.

3.3 Ослабленные условия на весовую функцию и коэффициентные обратные задачи для моделей тепломассопереноса. Общий случай.

В этом параграфе рассматривается второй случай – случай когда условия на весовые функции в интегральных условиях переопределения сводятся к минимальным:

$$\text{supp } \varphi_j \subset \overline{G_j}, \quad \varphi_j \in L_1(G_j), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.63)$$

Как и ранее $G_0 = \cup_{j=1}^s G_j$, $Q_0 = G_0 \times (0, T)$. Потребуется, чтобы:

$$\begin{aligned} a_\alpha^i(t, x) &\in L_\infty(Q), \quad (|\alpha| < 2m), \quad a_\alpha^i \in C(\overline{Q}), \\ (|\alpha| = 2m, \quad i = r_0 + 1, r_0 + 2, \dots, r + 1) \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$b_{j\beta} \in C^{2m-m_j}(\overline{S}), \quad (j = 1, \dots, m, \quad |\beta| \leq m_j),$$

$$b_i, f \in L_p(Q), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad p > n + 2m, \quad (3.65)$$

$$u_0(x) \in W_p^{2m-2m/p}(G), \quad g_j(x, t) \in W_p^{k_j, 2mk_j}(S). \quad (3.66)$$

Условия на функции $\psi_i(t)$ те же, что и в предыдущем параграфе:

$$\psi_i(t) \in C^1([0, T]), \quad \psi_i(0) = \int_{G_i} u_0(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (3.67)$$

Также требуем выполнения условий:

$$\nabla b_k, \nabla f \in L_p(Q_0) \quad (k = 1, 2, \dots, r_0), \quad (3.68)$$

$$\nabla u_0 \in W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G_0), \quad \nabla a_\alpha^i(x, t) \in L_\infty(Q_0) \quad (|\alpha| \leq 2m), \quad (3.69)$$

$$a_\alpha^i \in C([0, T], L_\infty(G_0)), \quad (|\alpha| \leq 2m - 1, \quad i = r_0 + 1, r_0 + 2, \dots, r + 1), \quad (3.70)$$

$$b_k, f \in C([0, T]; L_\infty(G_0)) \quad (k = 1, 2, \dots, r_0). \quad (3.71)$$

Как и ранее определим матрицу B размера $r \times r$, строки которой с номерами $(k-1)h+1, kh, (k=1, 2, \dots, s)$ занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами:

$$\begin{aligned} &\int_G b_1(x, 0) \varphi_k dx, \dots, \int_G b_{r_0}(x, 0) \varphi_k dx, \\ &-\int_G A_{r_0+1}(x, 0) u_0 \varphi_k dx, \dots, -\int_G A_r(x, 0) u_0 \varphi_k dx. \end{aligned}$$

Выражение $(A_i u_0, \varphi_k) = \int_G A_i(x, 0) u_0 \varphi_k dx$ здесь уже понимается в обычном смысле. Требуется, чтобы выполнялось неравенство

$$\det B \neq 0. \quad (3.72)$$

Определим постоянные q_i^0 ($i = 1, 2, \dots, r$) исходя из решений системы

$$\begin{aligned} \psi_{jt}(0) + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^0 \int_G A_i u_0 \varphi_j dx + \int_G A_{r+1} u_0 \varphi_j dx = \\ \sum_{i=1}^{r_0} q_i^0 \int_G b_i(x, 0) \varphi_j dx + \int_G f \varphi_j dx, \quad j = 1, 2, \dots, s, \end{aligned} \quad (3.73)$$

и потребуем, что выполнены условия (1.5), (1.6) для вспомогательного оператора $A^0 = \sum_{i=r_0+1}^r q_i^0 A_i + A_{r+1}$ или другими словами, что

$$\text{оператор } \partial_t + A^0 \text{ параболичен.} \quad (3.74)$$

Теорема 15. Пусть выполнены условия (3.63)-(3.72), (3.74). Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что на промежутке $t \in [0, \gamma_0]$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$) задачи (3.1)-(3.5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_0}), \quad \nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta^{\gamma_0}), \quad \forall \delta > 0, \quad q_i(t) \in C([0, \gamma_0]), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Решение непрерывно зависит от данных задачи в следующем смысле. Фиксируем $R > 0$ и рассмотрим класс данных задачи S_R , состоящий из наборов $(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, \{g_j\}_{j=1}^m)$ таких, что выполнены условия (3.9), (1.2), (1.3), $\psi_j \in C^{1+\beta}([0, T])$ для некоторого $\beta \in (0, 1]$ и всех j и

$$\begin{aligned} \|f^i\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_{C^{1+\beta}([0, T])} + \|f^i\|_{C([0, T]; L_\infty(G_0))} + \|\nabla f^i\|_{L_p(Q_0)} \\ \|u_0^i\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \|\nabla u_0^i\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^m \|g_j^i\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S)} \leq R, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда найдется $\gamma_1 > 0$ такое, что для любого набора данных $(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, \{g_j\}_{j=1}^m) \in S_R$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$) задачи (3.1)-(3.5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_1}), \quad \nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta^{\gamma_1}) \quad \forall \delta > 0, \quad q_i(t) \in C([0, \gamma_1]), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

и для любых двух решений $(u^i, q_1^i, \dots, q_r^i)$ ($i = 1, 2$) задачи (3.1)-(3.5) из класса

$$u^i \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_1}), \quad \nabla u^i \in W_p^{1,2m}(Q_\delta^{\gamma_1}), \quad q_j^i \in C([0, \gamma_1]), \quad (i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, r),$$

отвечающих двум различным наборам данных $f^i, \psi_j^i, u_0^i, g_\eta^i$ ($j = 1, 2, \dots, s$, $i = 1, 2, \eta = 1, 2, \dots, m$) из S_R и для фиксированного $\delta > 0$ справедлива оценка устойчивости

$$\begin{aligned} & \|u^1 - u^2\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_1})} + \|\nabla(u^1 - u^2)\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^r \|q_j^1 - q_j^2\|_{C([0, \gamma_1])} \leq \\ & C(\|f^1 - f^2\|_{L_p(Q^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^r \|\psi_j^1 - \psi_j^2\|_{C^1([0, \gamma_1])} + \|f^1 - f^2\|_{C([0, T]; L_\infty(G_0))} + \\ & \|\nabla(f^1 - f^2)\|_{L_p(Q_0)} + \|u_0^1 - u_0^2\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \\ & \|\nabla(u_0^1 - u_0^2)\|_{W_p^{2m-2m/p}(G_0)} + \sum_{j=1}^m \|g_j^1 - g_j^2\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S^{\gamma_1})}), \end{aligned} \quad (3.75)$$

где постоянная C – не зависит от данных задач класса S_R , но зависит от R и $S^{\gamma_1} = \partial G \times (0, \gamma_1)$.

Доказательство. Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы (12). Как и ранее утверждение сводится к исследованию вопроса о разрешимости уравнения (3.28). Единственное отличие в доказательстве – способ получения оценок для оператора R . Приведем его. Пусть $\vec{q}^1, \vec{q}^2 \in B_{\mu_0, \tau}$, ($\tau \leq \tau_2$) (параметры μ_0, τ_2 определены в доказательстве предыдущей теоремы), и V^1, V^2 – решения задачи (3.16), где в правой части участвуют функции $\vec{q}^1, \vec{q}^2$, соответственно, удовлетворяющие краевым условиям $V^j|_{t=0} = 0$, $B_i V^j|_S = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2$). Имеем

$$\begin{aligned} & V_t^j + A^0 V^j + \sum_{j=r_0+1}^r q_i^j A_i V^j = \sum_{i=1}^{r_0} q_i^j b_i - \sum_{i=r_0+1}^r q_i^j A_i \Phi, \\ & V^j|_{t=0} = 0, \quad B_i V^j|_S = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Поскольку $\vec{q}^j \in B_{\mu_0, \tau}$, задача (3.76) (задача (3.19), (3.20)) разрешима и справедлива оценка (см. (3.23))

$$\|V^j\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \leq 2c \left\| \sum_{i=1}^{r_0} q_i^j b_i - \sum_{i=r_0+1}^r q_i^j A_i \Phi \right\|_{L_p(Q^\tau)} \leq c_1 \|\vec{q}^j\|_{C([0, \tau])} \leq c_1 \mu_0, \quad (3.77)$$

где c_1 не зависит от x и t . Найдется $\delta_1 > 0$ такое, что $\text{supp } \varphi_j \subset G_{\delta_1, j} \subset G_{\delta_1}$ для всех j .

Используя оценку (3.23) и оценку из теоремы 3 получим, что функции V^j также удовлетворяют оценке

$$\|\nabla V^j\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^\tau)} \leq c_2 \|\vec{q}^j\|_{C([0, \tau])} \leq c_2 \mu_0. \quad (3.78)$$

Вычитая уравнения (3.76) при $j = 1, 2$, получим

$$(V^1 - V^2)_t + A^0(V^1 - V^2) + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^2(A_i V^1 - A_i V^2) = \sum_{i=1}^{r_0} (q_i^1 - q_i^2) b_i - \sum_{i=r_0+1}^r (q_i^1 - q_i^2) A_i V^1 - \sum_{i=1}^{r_0} (q_i^1 - q_i^2) A_i \Phi. \quad (3.79)$$

Опять в силу оценки (3.23), равенств (3.79) имеем

$$\|V^1 - V^2\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \leq c_3 \|\vec{q}^1 - \vec{q}^2\|_{C([0,\tau])}, \quad (3.80)$$

$$\|\nabla(V^1 - V^2)\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^\tau)} \leq c_4 \|\vec{q}^1 - \vec{q}^2\|_{C([0,\tau])}. \quad (3.81)$$

Оценим $\|R(\vec{q}^1) - R(\vec{q}^2)\|_{C([0,\tau])}$. Имеем

$$\begin{aligned} \|R(\vec{q}^1) - R(\vec{q}^2)\|_{C([0,\tau])} &\leq c \max_{1 \leq j \leq s} \|(A^0(V^1 - V^2), \varphi_j) + \\ &\sum_{i=r_0+1}^r (q_i^1(A_i V^1, \varphi_j) - q_i^2(A_i V^2, \varphi_j))\|_{C([0,\tau])}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Оценим правую часть в (3.82), используя включение $\varphi_j \in L_1(G_j)$. Рассмотрим $|(A^0 v, \varphi_j)|$ для $v = V^1 - V^2$. В силу условий на коэффициенты и теорем вложения [1, 97]

$$\begin{aligned} \left| \int_G A^0 v \varphi_j dx \right| &= \left| \int_{G_{\delta_1,j}} A^0 v \varphi_j dx \right| \leq \\ M \sum_{|\alpha| \leq 2m} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(G_{\delta_1,j})} \|\varphi_j\|_{L_1(G)} &\leq M_1 \|v\|_{W_\infty^{2m}(G_{\delta_1,j})} \leq \\ M_2 \|v\|_{W_p^{2m+\beta}(G_{\delta_1,j})}, \quad \beta &\in (n/p, 1 - 2m/p). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Далее используя интерполяционные неравенства [1] получим оценку для последней нормы

$$\|v\|_{W_p^{2m+\beta}(G_{\delta_1,j})} \leq M_3 (\|\nabla v\|_{W_p^{2m-2m/p}(G_{\delta_1,j})} + \|v\|_{L_p(G_{\delta_1,j})})^\theta \|v\|_{L_p(G)}^{1-\theta}, \quad (3.84)$$

где $\theta(2m - 2m/p + 1) = 2m + \beta$. Неравенство справедливо для всех j . Следовательно, имеем (см. (3.26), (3.38))

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (0,\tau)} \left| \int_G A v \varphi_j dx \right| &\leq \\ M_4 (\|\nabla v\|_{C([0,\tau]; W_p^{2m-2m/p}(G_{\delta_1,j}))} + \|v\|_{C([0,\tau]; L_p(G_{\delta_1,j}))})^\theta &\|v\|_{C([0,\tau]; L_p(G))}^{1-\theta} \leq \\ M_5 (\|\nabla v\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^\tau)} + \|v_t\|_{L_p(Q_{\delta_1}^\tau)}) \|v_t\|_{L_p(0,\tau; L_p(G))}^{1-\theta} &\tau^{(1-\theta)/q}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Используя неравенства (3.80), (3.81) получим

$$\sup_{t \in [0, \tau]} \left| \int_G A v \varphi_j dx \right| \leq M_6 \| \vec{q}^1 - \vec{q}^2 \|_{C([0, \tau])} \tau^{(1-\theta)/q}, \quad (3.86)$$

где постоянная M_6 не зависит от τ . Оценим второе слагаемое в (3.82). Как и в предыдущих оценках используются (3.77), (3.78), (3.80), (3.81). Имеем

$$\begin{aligned} & \| q_i^1(A_i V^1, \varphi_j) - q_i^2(A_i V^2, \varphi_j) \|_{C([0, \tau])} \leq \\ & \| (q_i^1 - q_i^2)(A_i V^1, \varphi_j) \|_{C([0, \tau])} + \| q_i^2(A_i V^1 - A_i V^2, \varphi_j) \|_{C([0, \tau])}. \end{aligned}$$

Как и в предыдущих оценках получается

$$\begin{aligned} & \| (q_i^1 - q_i^2)(A_i V^1, \varphi_j) \|_{C([0, \tau])} + \| q_i^2(A_i V^1 - A_i V^2, \varphi_j) \|_{C([0, \tau])} \leq \\ & c \tau^{(1-\theta)/q} \| \vec{q}^1 - \vec{q}^2 \|. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Из (3.86), (3.87) вытекает оценка

$$\| R(\vec{q}^1) - R(\vec{q}^2) \|_{C([0, \tau])} \leq c \tau^{(1-\theta)/q} \| \vec{q}^1 - \vec{q}^2 \|_{C([0, \tau])}. \quad (3.88)$$

В частности,

$$\| R(\vec{q}^1) \| \leq c \tau^{(1-\theta)/q} \| \vec{q}^1 \|_{C([0, \tau])}. \quad (3.89)$$

Выберем параметр $\tau_2 \leq \tau_1$ (см. доказательство теоремы 8) такой, что $c \tau_2^{\frac{1-\theta}{q}} = \frac{1}{2}$. Тогда $\forall \tau \in [0, \tau_2]$. Имеем $\| R(\vec{q}^1) - R(\vec{q}^2) \|_{C([0, \tau])} \leq \frac{1}{2} \| \vec{q}^1 - \vec{q}^2 \|_{C([0, \tau])}$ и $\| g_0 + R(q) \|_{C([0, \tau])} \leq \mu_0$. Таким образом оператор $g_0 + R(q)$ переводит шар B_{μ_0, τ_2} в себя и является в нём сжимающим. Следовательно уравнение (3.28) имеет единственное решение в этом шаре и это решение удовлетворяет оценке

$$\| \vec{q} \|_{C([0, \tau_2])} \leq 2 \| g_0 \|_{C([0, \tau_2])}. \quad (3.90)$$

Остальные рассуждения совпадают с рассуждениями из предыдущей теоремы. □

3.4 Коэффициентные обратные задачи с ослабленными условиями на весовую функцию для моделей тепломассопереноса, описываемых системами уравнений второго порядка.

В этом параграфе записываются следствия из предыдущего параграфа для параболических систем второго порядка. Оператор A - представим в виде:

$$A = \sum_{k=r_0+1}^r q_k A_k(x, t) + A_{r+1}(x, t), \quad (3.91)$$

где

$$A_k(t, x, D)u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(t, x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i^k(t, x) u_{x_i} + a_0^k(t, x) u.$$

Условия переопределения имеют вид

$$\int_{G_i} u \varphi_i(x) dx = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (3.92)$$

Приведем условия на данные задачи:

$$b_j, f \in C([0, T]; L_p(G_0)) \cap L_p(Q) \quad (j = 1, 2, \dots, r_0), \quad (3.93)$$

$$a_{ij}^k \in C(\overline{Q}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = r_0 + 1, \dots, r, \quad (3.94)$$

$$a_i^k \in C([0, T]; L_\infty(G_0)), \quad (k = r_0 + 1, r_0 + 2, \dots, r + 1), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.95)$$

Также требуем выполнения условий:

$$\nabla b_k, \nabla f \in L_p(Q_0) \quad (k = 1, 2, \dots, r_0). \quad (3.96)$$

Условия на функции $\psi_i(t)$ имеют вид

$$\psi_i(t) \in C^1([0, T]), \quad \psi_i(0) = \int_{G_i} u_0(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (3.97)$$

Мы рассматриваем либо условие Дирихле

$$Bu|_S = u|_S = g \quad (3.98)$$

либо условие

$$Bu|_S = \sum_{i=1}^n l_i(x, t) u_{x_i} + \sigma(x, t) u|_S = g, \quad (3.99)$$

где l_i ($i = 1, 2, \dots, n$), σ – матрицы размера $h \times h$. Предполагаем, что

$$l_j \in C^1(\overline{S}) \quad (j = 1, \dots, n), \quad \sigma(x, t) \in C^1(\overline{S}). \quad (3.100)$$

Условия на данные имеют вид:

$$\begin{aligned} u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \quad g(x, t) \in W_p^{1-1/2p, 2-1/p}(S) \\ \text{или } g(x, t) \in W_p^{1/2-1/2p, 1-1/p}(S), \end{aligned} \quad (3.101)$$

где первое из условий на функцию g используется в случае условий Дирихле и второе в случае оставшихся краевых условий,

$$\nabla u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G_0). \quad (3.102)$$

Определим матрицу B размера $r \times r$, строки которой с номерами $(k-1)h+1, kh$, ($k = 1, 2, \dots, s$) занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами:

$$\begin{aligned} \int_G b_1(x, 0) \varphi_k dx, \dots, \int_G b_{r_0}(x, 0) \varphi_k dx, \\ - \int_G A_{r_0+1}(x, 0) u_0 \varphi_k dx, \dots, - \int_G A_r(x, 0) u_0 \varphi_k dx. \end{aligned}$$

Мы требуем, чтобы выполнялись условия

$$\det B \neq 0, \quad (3.103)$$

$$g(x, 0) = B(x, 0) u_0(x)|_{\partial G}, \quad (3.104)$$

$$\text{supp } \varphi_j \subset \overline{G_j}, \quad \varphi_j \in L_1(G_j), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.105)$$

Определим постоянные q_i^0 ($i = 1, 2, \dots, r$) исходя из решений системы

$$\begin{aligned} \psi_{jt}(0) + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^0 \int_G A_i u_0 \varphi_j dx + \int_G A_{r+1} u_0 \varphi_j dx = \\ \sum_{i=1}^{r_0} q_i^0 \int_G b_i(x, 0) \varphi_j dx + \int_G f \varphi_j dx, \quad j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (3.106)$$

и определим вспомогательный оператор $A^0 = \sum_{i=r_0+1}^r q_i^0 A_i + A_{r+1}$, старшие коэффициенты которого обозначим через a_{ij}^0 . Рассматриваются также условия вида

$$Bu|_S = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 n_i u_{x_i} + \sigma(x, t) u|_S = g. \quad (3.107)$$

Пусть также выполнено условие (условие 7.6.1 в [94]): существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 \xi_i \xi_j \eta, \eta \right) \geq \delta_0 |\xi|^2 |\eta|^2, \quad \forall (x, t) \in Q, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^h. \quad (3.108)$$

Следующая формулировка наиболее общая.

Теорема 16. Пусть выполнены условия (3.93)-(3.97), (3.101)-(3.105), (3.108) и условие (3.100), если краевое условие имеет вид (3.99). Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что на промежутке $t \in [0, \gamma_0]$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$) задачи (3.1)-(3.5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2}(Q^{\gamma_0}), \quad \nabla u \in W_p^{1,2}(Q^{\gamma_0}) \quad \forall \delta > 0, \quad q_i(t) \in C([0, \gamma_0]), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Решение непрерывно зависит от данных задачи в следующем смысле. Фиксируем $R > 0$ и рассмотрим класс данных задачи S_R , состоящий из наборов $(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, g)$ таких, что выполнены условия (3.93), (3.97), (3.101), (3.102), (3.104), $\psi_j \in C^{1+\beta}([0, T])$ для некоторого $\beta \in (0, 1]$ и всех j и

$$\begin{aligned} & \|f\|_{L_p(Q)} + \|\nabla f\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_{C^{1+\beta}([0, T])} + \|f\|_{C([0, T]; L_p(G_0))} + \\ & \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \|\nabla u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G_0)} + \|g\|_{W_p^{k_0, 2mk_0}(S)} \leq R, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где $k_0 = 1 - 1/2p$ в случае условия Дирихле и $k_0 = 1/2 - 1/2p$ в случае оставшихся краевых условий. Тогда найдется $\gamma_1 > 0$ такое, что для любого набора данных $(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, g) \in S_R$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$) задачи (3.1)-(3.5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2}(Q^{\gamma_1}), \quad q_i(t) \in C([0, \gamma_1]), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

и для любых двух решений $(u^i, q_1^i, \dots, q_r^i)$ ($i = 1, 2$) задачи (3.1)-(3.5) из класса

$$u^i \in W_p^{1,2}(Q^{\gamma_1}), \quad q_j^i \in C([0, \gamma_1]), \quad (i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, r),$$

отвечающих двум различным наборам данных $f^i, \psi_j^i, u_0^i, g^i$ ($j = 1, 2, \dots, s, i = 1, 2$, из S_R для фиксированного $\delta_1 > 0$ справедлива оценка устойчивости

$$\begin{aligned} & \|u^1 - u^2\|_{W_p^{1,2}(Q^{\gamma_1})} + \|\nabla(u^1 - u^2)\|_{W_p^{1,2}(Q_{\delta_1}^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^r \|q_j^1 - q_j^2\|_{C([0, \gamma_1])} \leq \\ & C(\|f^1 - f^2\|_{L_p(Q^{\gamma_1})} + \|\nabla(f^1 - f^2)\|_{L_p(Q_0^{\gamma_1})} + \\ & \sum_{j=1}^r \|\psi_j^1 - \psi_j^2\|_{C^1([0, \gamma_1])} + \|f^1 - f^2\|_{C([0, T]; L_p(G_0))} + \\ & \|u_0^1 - u_0^2\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \|\nabla(u_0^1 - u_0^2)\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \|g^1 - g^2\|_{W_p^{k_0, 2mk_0}(S^{\gamma_1})}), \end{aligned}$$

где постоянная C – не зависит от данных задач класса S_R , но зависит от R и $S^{\gamma_1} = \partial G \times (0, \gamma_1)$.

В следующей теореме записывается ряд условий в более простом виде.

Теорема 17. Пусть выполнены условия (3.93)-(3.97), (3.101)-(3.105), (3.108) и краевое условие имеет вид (3.101) или (3.107). Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что на промежутке $t \in [0, \gamma_0]$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$) задачи (3.1)-(3.5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2}(Q^{\gamma_0}), \quad \nabla u \in W_p^{1,2}(Q_0^{\gamma_0}) \quad \forall \delta > 0, \quad q_i(t) \in C([0, \gamma_0]), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Решение непрерывно зависит от данных задачи в следующем смысле. Фиксируем $R > 0$ и рассмотрим класс данных задачи S_R , состоящий из наборов $(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, g)$ таких, что выполнены условия (3.93), (3.97), (3.101), (3.102), (3.104), $\psi_j \in C^{1+\beta}([0, T])$ для некоторого $\beta \in (0, 1]$ и всех j и

$$\begin{aligned} & \|f\|_{L_p(Q)} + \|\nabla f\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_{C^{1+\beta}([0, T])} + \|f\|_{C([0, T]; L_p(G_0))} + \\ & \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \|\nabla u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G_0)} + \|g\|_{W_p^{k_0, 2mk_0}(S)} \leq R, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где $k_0 = 1 - 1/2p$ в случае условия Дирихле и $k_0 = 1/2 - 1/2p$ в случае оставшихся краевых условий. Тогда найдется $\gamma_1 > 0$ такое, что для любого набора данных $(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, g) \in S_R$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$) задачи (3.1)-(3.5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2}(Q^{\gamma_1}), \quad q_i(t) \in C([0, \gamma_1]), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

и для любых двух решений $(u^i, q_1^i, \dots, q_r^i)$ ($i = 1, 2$) задачи (3.1)-(3.5) из класса

$$u^i \in W_p^{1,2}(Q^{\gamma_1}), \quad q_j^i \in C([0, \gamma_1]), \quad (i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, r),$$

отвечающих двум различным наборам данных $f^i, \psi_j^i, u_0^i, g^i$ ($j = 1, 2, \dots, s, i = 1, 2$, из S_R справедлива оценка устойчивости

$$\begin{aligned} & \|u^1 - u^2\|_{W_p^{1,2}(Q^{\gamma_1})} + \|\nabla(u^1 - u^2)\|_{W_p^{1,2}(Q_0^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^r \|q_j^1 - q_j^2\|_{C([0, \gamma_1])} \leq \\ & C(\|f^1 - f^2\|_{L_p(Q^{\gamma_1})} + \|\nabla(f^1 - f^2)\|_{L_p(Q_0^{\gamma_1})} + \\ & \sum_{j=1}^r \|\psi_j^1 - \psi_j^2\|_{C^1([0, \gamma_1])} + \|f^1 - f^2\|_{C([0, T]; L_p(G_0))} + \\ & \|u_0^1 - u_0^2\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \|\nabla(u_0^1 - u_0^2)\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \|g^1 - g^2\|_{W_p^{k_0, 2mk_0}(S^{\gamma_1})}), \end{aligned}$$

где постоянная C – не зависит от данных задач класса S_R , но зависит от R и $S^{\gamma_1} = \partial G \times (0, \gamma_1)$.

3.5 Теорема о сходимости

В этом параграфе рассматривается вопрос о приближении решений обратных задач с точечными условиями переопределения решениями задач с интегральными условиями переопределения в случае когда задача является нелинейной. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(B_1)$, $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ такую, что $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ и $\varphi(x) \geq 0$ для всех x . Определим $\varphi_{j\varepsilon}(x) = \varphi(\frac{x-x_j}{\varepsilon}) \frac{1}{\varepsilon^n}$. Имеем $\|\varphi_j\|_{L_1(G)} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{j\varepsilon}(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\frac{x-x_j}{\varepsilon}) dx = 1$. Введем $r_{j\varepsilon} = \int_G \varphi_{j\varepsilon}(x) u_0(x) dx - u_0(x_j)$. Если функция u_0 удовлетворяет условиям теоремы 15, то легко увидеть, что найдется постоянная $M > 0$ такая, что $|r_{j\varepsilon}| \leq M\varepsilon$ для всех j . Рассмотрим задачу (3.1)-(3.5), где $\varphi_j = \varphi_{j\varepsilon}$, $\varepsilon \leq \delta_1$, $G_j = B_{\delta_1}(x_j)$ (см. выбор параметра δ_1 перед теоремой 3), а в качестве функций ψ_j возьмём функции $\psi_{j\varepsilon} = \psi_j(t) + r_{j\varepsilon}$. Если выполнены условия (3.67), то

$$\psi_{j\varepsilon}(0) = \int_G \varphi_{j\varepsilon} u_0(x) dx.$$

В качестве области G_0 выберем область $G_0 = \cup_{j=1}^s G_j$. Таким образом, вообще говоря, область G_0 зависит от выбора параметра $\delta_1 > 0$. Далее считается, что условия на данные (3.109)-(3.117), (3.119), приведённые ниже, выполнены для некоторого (достаточно малого) параметра δ_1 и далее считаем этот параметр фиксированным.

Решение задачи (3.1)-(3.5) с этими данными (оно существует локально по времени при выполнении соответствующих условий теоремы 15 и обладает

свойствами указанными в теореме 15) обозначим через u_ε , $\vec{q}_\varepsilon = (q_1^\varepsilon, \dots, q_{r_0}^\varepsilon)$, а решение задачи (1.15), (1.16), (1.17) через u , $\vec{q} = (q_1, \dots, q_{r_0})$. Сформулируем условия на данные.

Мы потребуем, чтобы:

$$\begin{aligned} a_\alpha^i(t, x) &\in L_\infty(Q), \quad (|\alpha| < 2m), \quad a_\alpha^i \in C(\overline{Q}), \\ (|\alpha| = 2m, \quad i = r_0 + 1, r_0 + 2, \dots, r + 1) \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$b_{j\beta} \in C^{2m-m_j}(\overline{S}) \quad (j = 1, \dots, m, \quad |\beta| \leq m_j),$$

$$\begin{aligned} a_\alpha^i &\in C([0, T], L_\infty(G_0)), \quad \nabla a_\alpha^i(x, t) \in L_\infty(Q_0), \\ (|\alpha| \leq 2m, \quad i = r_0 + 1, r_0 + 2, \dots, r + 1), \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$b_k, f \in C(0, T; C^\alpha(\overline{G_0})) \quad (k = 1, 2, \dots, r_0), \quad \alpha \geq 1 - (n + 2m)/p, \quad (3.111)$$

$$\nabla f \in L_p(Q_0), \quad \nabla b_j \in L_\infty(0, T; L_p(G_0)), \quad j = 1, \dots, r_0, \quad (3.112)$$

$$\psi_i(t) \in C^1([0, T]), \quad \psi_i(0) = \int_{G_i} u_0(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (3.113)$$

$$u_0(x) \in W_p^{2m-2m/p}(G), \quad g_j(x, t) \in W_p^{k_j, 2mk_j}(S), \quad (3.114)$$

$$\nabla u_0 \in W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G_0), \quad (3.115)$$

$$b_k(x_l, t), \quad f(x_l, t), \quad a_\alpha^i(x_l, t) \in C([0, T]), \quad (3.116)$$

где $k = 1, 2, \dots, r_0$, $i = r_0 + 1, r_0 + 2, \dots, r$, $l = 1, 2, \dots, s$ и $|\alpha| \leq 2m$.

Как и ранее определим матрицу B размера $r \times r$, строки которой с номерами $(k-1)h+1, kh, (k=1, 2, \dots, s)$ занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами:

$$b_1(x_k, 0), \dots, b_r(x_k, 0), -A_{r_0+1}u_0(x_k), \dots, -A_ru_0(x_k).$$

Мы требуем, чтобы выполнялось неравенство

$$\det B \neq 0. \quad (3.117)$$

Определим постоянные q_i^0 ($i = 1, 2, \dots, r$) исходя из решений системы

$$\begin{aligned} \psi_{jt}(0) + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^0 \int_G A_i u_0 \varphi_j dx + \int_G A_{r+1} u_0 \varphi_j dx = \\ \sum_{i=1}^{r_0} q_i^0 \int_G b_i(x, 0) \varphi_j dx + \int_G f \varphi_j dx, \quad j = 1, 2, \dots, s, \end{aligned} \quad (3.118)$$

и потребуем, что выполнены условия (1.5), (1.6) для вспомогательного оператора $A^0 = \sum_{i=r_0+1}^r q_i^0 A_i + A_{r+1}$ или другими словами, что

$$\text{оператор } \partial_t + A^0 \text{ параболичен.} \quad (3.119)$$

Теорема 18. Пусть выполнены условия (3.109)-(3.117), (3.119) выполнены. Тогда найдется промежуток $[0, \tau_0]$, не зависящий от ε такой, что:

1) на $[0, \tau_0]$ существует единственное решение задачи (1.15), (1.16), (1.17) такое, что $\vec{q} \in C([0, \tau_0])$, $u \in W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0})$, $\nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta^{\tau_0})$, $\forall \delta \in (0, \delta_1)$.

2) при всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и некоторого $\varepsilon_0 > 0$ на $[0, \tau_0]$ существует единственное решение $(u_\varepsilon, \vec{q}_\varepsilon)$ задачи (3.1)-(3.5) такое, что $\vec{q}_\varepsilon \in C([0, \tau_0])$, $u_\varepsilon \in W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0})$, $\nabla u_\varepsilon \in W_p^{1,2m}(Q_\delta^{\tau_0})$ при всех $\delta \in (0, \delta_1)$.

3) Справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0})} + \|\nabla(u_\varepsilon - u)\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^{\tau_0})} + \sum_{j=1}^r \|q_j^\varepsilon - q_j\|_{C([0, \tau_0])} \leq c\varepsilon^\alpha,$$

где постоянная c не зависит от ε .

Доказательство. Пусть u есть решение задачи (1.15), (1.16), (1.17), которое существует по теореме 4 на некотором промежутке $[0, \tau_1]$. Рассмотрим задачу (3.1)-(3.5), где $\varphi_j = \varphi_{j\varepsilon}$, $\varepsilon < \delta_1$, а в качестве функций ψ_j взяты функции $\psi_{j\varepsilon} = \psi_j(t) + r_{j\varepsilon}$. Покажем её разрешимость. У нас выполнены все условия теоремы 15 за исключением может быть условия (3.72). Соответствующую матрицу B ($B(t)$) (см. обозначения перед теоремой 15) обозначим через B_ε ($B_\varepsilon(t)$). Строки матрицы B_ε с номерами от $(k-1)h+1$ до kh , ($k = 1, 2, \dots, s$) занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами:

$$\begin{aligned} & \int_G b_1(x, 0) \varphi_{k\varepsilon} dx, \dots, \int_G b_{r_0}(x, 0) \varphi_{k\varepsilon} dx, \\ & - \int_G A_{r_0+1}(x, 0) u_0 \varphi_{k\varepsilon} dx, \dots, - \int_G A_r(x, 0) u_0 \varphi_{k\varepsilon} dx. \end{aligned}$$

Соответственно, строки матрицы $B_\varepsilon(t)$ с номерами $(k-1)h+1$, kh , ($k = 1, 2, \dots, s$) занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами:

$$\begin{aligned} & \int_G b_1(x, t) \varphi_{k\varepsilon} dx, \dots, \int_G b_{r_0}(x, t) \varphi_{k\varepsilon} dx, \\ & - \int_G A_{r_0+1} \Phi(x, t) \varphi_{k\varepsilon} dx, \dots, - \int_G A_r \Phi(x, t) \varphi_{k\varepsilon} dx. \end{aligned}$$

Через $B(t)$ обозначим матрицу строки которой с номерами $(k-1)h+1, kh, (k=1, 2, \dots, s)$ занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами:

$$b_1(x_k, t), \dots, b_r(x_k, t), -A_{r_0+1}\Phi(x_k, t), \dots, -A_r\Phi(x_k, t).$$

По условию и в силу непрерывности элементов матрицы $B(t)$ по t найдется $\tau_2 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что

$$|\det B(t)| \geq \delta_2 \text{ для всех } t \in [0, \tau_2].$$

Покажем что найдется $\varepsilon_0 \in (0, \delta_1)$ такое, что

$$|\det B_\varepsilon(t)| \geq \delta_2/3 \text{ для всех } t \in [0, \tau_2], \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Достаточно доказать сходимость элементов матрицы $B_\varepsilon(t)$ к элементам $B(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ откуда будет вытекать, что начиная с некоторого ε_0 первая матрица также будет невырожденной и справедливо вышеприведённое неравенство. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_G b_j(x, t) \varphi_{k\varepsilon} dx - b_j(x_j, t) \right| = \\ & \left| \int_{B_1(0)} (b_j(x_j + \eta\varepsilon, t) - b_j(x_j, t)) \varphi(\eta) d\eta \right| \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.120)$$

в силу равномерной непрерывности b_j на Q_0 . Аналогичная сходимость имеет место и для столбцов $\int_G A_j \Phi \varphi_\varepsilon dx$. Таким образом, величина τ_2 со свойствами указанными выше действительно существует. Тогда как легко увидеть из доказательств (см. доказательство теоремы 15) найдется промежуток $[0, \tau_3]$ ($\tau_3 \leq \tau_2$), на котором решение u_ε задачи (3.1)-(3.5) существует и удовлетворяет оценке (3.75), где $u^1 = u_\varepsilon$ и $u^2 \equiv 0$. Более того, величина τ_3 будет зависеть от норм данных задачи и не будет зависеть от $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Таким образом, имеет место равномерная по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\tau_3})} + \|\nabla_x u_\varepsilon\|_{W_p^{1,2m}(Q_\delta^{\tau_3})} + \sum_{i=1}^r \|q_i^\varepsilon(t)\|_{C([0, \tau_3])} \leq M, \quad (3.121)$$

где $\delta > 0$ – фиксированный параметр. Функции u и u_ε есть решение задач

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon t} + A_{r+1}u_\varepsilon + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^\varepsilon A_i u_\varepsilon &= \sum_{i=0}^{r_0} b_i q_i^\varepsilon, \\ u_\varepsilon|_{t=0} &= u_0, \quad B_j u_\varepsilon|_S = g_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.122)$$

$$\begin{aligned}
u_t + A_{r+1}u + \sum_{i=r_0+1}^r q_i A_i u &= \sum_{i=0}^{r_0} b_i q_i, \\
u|_{t=0} &= u_0, \quad B_j u|_S = g_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{3.123}$$

Выполнены условия

$$u(x_i, t) = \psi_i, \quad i = 1, \dots, r, \tag{3.124}$$

$$\int_G u_\varepsilon \varphi_{i\varepsilon} dx = \psi_{i\varepsilon}, \quad i = 1, \dots, r. \tag{3.125}$$

В силу теоремы 1, $\nabla u, \nabla u_\varepsilon \in W_q^{1,2m}(Q_\delta)$, $\forall \delta > 0$. Фиксируем $\delta \in (0, \delta_1)$ и считаем, что $\varepsilon < \delta_1 - \delta$. Обозначим $\omega_\varepsilon = u_\varepsilon - u$ и $a_i^\varepsilon = q_i^\varepsilon - q_i$. Вычитая (3.122) и (3.123), а также (3.124), (3.125), получим

$$\begin{aligned}
\omega_{\varepsilon t} + A_{r+1}\omega_\varepsilon + \sum_{i=r_0+1}^r (q_i^\varepsilon A_i u_\varepsilon - q_i A_i u) &= \sum_{i=0}^{r_0} b_i a_i^\varepsilon, \\
\int_G \omega_\varepsilon \varphi_{j\varepsilon} dx &= \int_G (u(x, t) - u(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx + r_{j\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Или имеем

$$\omega_{\varepsilon t} + A_0 \omega_\varepsilon = \sum_{i=0}^{r_0} b_i a_i^\varepsilon - \sum_{i=r_0+1}^r a_i^\varepsilon A_i u_\varepsilon, \quad A_0 \omega_\varepsilon = A_{r+1} \omega_\varepsilon + \sum_{i=r_0+1}^r q_i A_i \omega_\varepsilon. \tag{3.126}$$

$$\begin{aligned}
\omega_\varepsilon|_{t=0} &= 0, \quad B_j \omega_\varepsilon|_S = 0, \\
\int_G \omega_\varepsilon \varphi_{j\varepsilon} dx &= \int_G (u(x, t) - u(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx + r_{j\varepsilon}, \quad j = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{3.127}$$

Рассмотрим оператор A_0 . Отметим, что величины $q_i(0)$ совпадают с величинами q_i^0 , построенными перед теоремой 4. Чтобы в этом убедиться достаточно положить $t = 0$, $x = x_j$ в (3.123). Тогда в силу условия (3.119) оператор $\partial_t + A_0(x, 0, D) = A^0$ параболичен. И значит найдется такое $\tau_4 \leq \tau_3$, что оператор $\partial_t + A_0(x, t, D)$ параболичен на $[0, \tau_4]$. Этот результат может быть найден в известной литературе по параболическим задачам. Однако, нам на самом деле нужен менее общий результат о справедливости теоремы 1 (соответственно теорем 2 и 3) в том случае, если оператор A в теореме 1 заменяется на оператор $A_0(x, t, D)$, а T на некоторый малый параметр $\tau_4 > 0$. Это утверждение легко вытекает из теоремы о неподвижной точке в силу непрерывности старших

коэффициентов. Рассмотрим матрицы $\tilde{B}_\varepsilon(t)$, B ; строки которых с номерами от $(k-1)h+1$ до kh , ($k = 1, 2, \dots, s$) занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами:

$$\begin{aligned} & \int_G b_1(x, t) \varphi_{k\varepsilon} dx, \dots, \int_G b_{r_0}(x, t) \varphi_{k\varepsilon} dx, \\ & - \int_G A_{r_0+1} u_\varepsilon(x, t) \varphi_{k\varepsilon} dx, \dots, - \int_G A_r u_\varepsilon(x, t) \varphi_{k\varepsilon} dx. \\ & b_1(x_k, t), \dots, b_{r_0}(x_k, t), -A_{r_0+1} u_0(x_k, 0), \dots, -A_r u_0(x_k, 0). \end{aligned}$$

Имеем, что $|\det B| \geq \delta_0 > 0$. Как и выше надо показать, что найдутся постоянные $\tau_5 \leq \tau_4$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что $|\det B_\varepsilon(t)| \geq \delta_0/3 > 0$ для всех $t \in [0, \tau_5]$ и всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. В силу непрерывности функций $\{b_j\}$ имеем, что

$$\left\| \int_G b_j(x, t) \varphi_{k\varepsilon} dx - b_j(x_j, t) \right\|_{C([0, \tau_4])} \rightarrow 0, \quad (3.128)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, для любого $\delta_0 > 0$ найдутся $\tau > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$\left\| \int_G b_j(x, t) \varphi_{k\varepsilon} dx - b_j(x_j, 0) \right\|_{C([0, \tau_4])} < \delta_0, \quad (3.129)$$

для всех $t \in [0, \tau]$ и $\varepsilon < \varepsilon_0$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} & \int_G A_k u_\varepsilon(x, t) \varphi_{k\varepsilon} dx - A_k(x_j, 0) u_0(x_j) = \\ & \int_G A_k(x, t) u_\varepsilon(x, t) \varphi_{k\varepsilon} - A_k(x_j, 0) u_\varepsilon(x_j, 0) \varphi_{k\varepsilon} dx = I. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Последний интеграл может быть переписан в виде

$$\begin{aligned} I &= \int_G (A_k(x, t) u_\varepsilon(x, t) - A_k(x_j, t) u_\varepsilon(x_j, t)) \varphi_{k\varepsilon} dx + \\ & \int_G (A_k(x_j, t) u_\varepsilon(x_j, t) - A_k(x_j, 0) u_\varepsilon(x_j, t)) \varphi_{k\varepsilon} dx + \\ & \int_G (A_k(x_j, 0) u_\varepsilon(x_j, t) - A_k(x_j, 0) u_\varepsilon(x_j, 0)) \varphi_{k\varepsilon} dx = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Мы имеем, что $u \in L_p(0, T; W_p^{2m+1}(G_\delta))$, $u_t \in L_p(0, T; W_p^1(G_\delta))$. Как следствие теоремы 1.8.3 в [1], $u \in C([0, T]; W_p^{2m+1-2m/p}(G_{\delta_1}))$ и значит в силу теорем вложения $u \in C([0, T]; C^\beta(\overline{G_{\delta_1}}))$, $\beta = 2m+1 - (2m+n)/p$. В силу условий на коэффициенты операторов A_i имеем, что $A_i u \in ([0, T]; C^{1-(2m+n)/p}(\overline{G_{\delta_1}}))$.

В силу оценки (3.121) имеем следующую оценку для I_1 :

$$\begin{aligned} & \left| \int_G (A_k(x, t) u_\varepsilon(x, t) - A_k(x_j, t) u_\varepsilon(x_j, t)) \varphi_{k\varepsilon} dx \right| \leq \\ & c \varepsilon^\alpha \|A_k(x, t) u_\varepsilon(x, t)\|_{C^\alpha(\overline{B_{\delta_1}(x_j)})} \leq \\ & c \|A_k(x, t) u_\varepsilon(x, t)\|_{W_p^1(B_{\delta_1}(x_j))} \varepsilon^\alpha \leq c_1 \varepsilon^\alpha, \quad t \in [0, \tau_4]. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Фиксируем $\delta_0 > 0$ и найдем τ_6 такое, что $\|a_\alpha^j(x, t) - a_\alpha^j(x, 0)\|_{C([0, \tau_6]; L_\infty(G_0))} \leq \delta_0$ для всех $|\alpha| \leq 2m$ и $j = r_0 + 1, \dots, r$. Тогда как легко увидеть из доказательства оценки (3.85), найдется τ_7 такое, что

$$\sup_{t \in (0, \tau_7)} I_2(t) \leq c_1 \delta_0 (\|\nabla u_\varepsilon\|_{W_p^{1, 2m}(Q_{\delta_1}^\tau)} + \|u_\varepsilon\|_{L_p(Q_{\delta_1}^\tau)}) \|u_{\varepsilon t}\|_{L_p(0, \tau; L_p(G))}^{1-\theta} \leq c_3 \delta_0, \quad (3.132)$$

для всех $\tau \leq \tau_7$. где при получении последнего неравенства использовалось (3.121). В силу оценок (3.85) и (3.121) найдется τ_8 такое, что при $\tau \leq \tau_8$ ($v = u_\varepsilon(x_j, t) - u_\varepsilon(x_j, 0)$), имеем

$$\sup_{t \in (0, \tau)} I_3(t) \leq c (\|\nabla v\|_{W_p^{1, 2m}(Q_{\delta_1}^\tau)} + \|v_t\|_{L_p(Q_{\delta_1}^\tau)}) \|v_t\|_{L_p(0, \tau; L_p(G))}^{1-\theta} \tau^{(1-\theta)/q} \leq c_2 \tau^{(1-\theta)/q}, \quad (3.133)$$

где постоянная c_2 не зависит от ε и $\tau \leq \tau_8$. Из (3.131)–(3.133), (3.129) вытекает, что найдется $\tau_5, \varepsilon_0 > 0$ такие, что при $\tau \leq \tau_5$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ выполнено $|\det B_\varepsilon(t)| \geq \delta_0/3 > 0$ для всех $t \in [0, \tau_5]$ и всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Таким образом определитель матрицы $\tilde{B}_\varepsilon(t)$ равномерно по $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $t \in [0, \tau_5]$ отделен от 0. Это обстоятельство позволяет сослаться на оценку устойчивости из теоремы где одно из решений есть функция $u_1 = \omega_\varepsilon$, а второе $u_2 \equiv 0$. Роль вектор-функции $\vec{q}^1$ играет вектор-функция $\vec{a}^\varepsilon = (a_1^\varepsilon, \dots, a_r^\varepsilon)$, а роль вектор-функции q^2 вектор-функция равная нулю. Эта оценка имеет вид ($\delta_1 > 0$ – фиксированное число)

$$\|\omega_\varepsilon\|_{W_p^{1, 2m}(Q_{\gamma_1})} + \|\nabla \omega_\varepsilon\|_{W_p^{1, 2m}(Q_{\delta_1}^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^r \|a_j^\varepsilon\|_{C([0, \gamma_1])} \leq c_1 \left(\sum_{j=1}^s |r_{j\varepsilon}| + \sum_{j=1}^s \left\| \int_G (u(x, t) - u(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx \right\|_{C^1([0, \gamma_1])} \right), \quad (3.134)$$

где $\gamma_1 \leq \tau_5$ – фиксированное число, не зависящее от параметра $\varepsilon > 0$. Правая часть здесь стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, оценим, например, наиболее сложное выражение

$$\left\| \int_G (u_t(x, t) - u_t(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx \right\|_{C([0, \gamma_1])}.$$

Из (3.123) имеем, что

$$u_t = -A_{r+1}u - \sum_{i=r_0+1}^r q_i A_i u + \sum_{i=0}^{r_0} b_i q_i.$$

Оценим, например,

$$\begin{aligned} \left| \int_G (q_i A_i u(x, t) - q_i A_i u(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx \right| &\leq \\ M \varepsilon^\beta \|A_i u(x, t)\|_{C^\beta(\overline{G_{\delta_1}})} &\leq \\ M_1 \varepsilon^\beta \|A_i u(x, t)\|_{C([0, T]; C^\beta(\overline{G_{\delta_1}}))}, \quad \beta = 1 - (n + 2m)/p. \end{aligned}$$

Таким образом, правая часть действительно стремится к нулю. Покажем нужную оценку. Как уже было показано

$$\left| \int_G (q_i A_i u(x, t) - q_i A_i u(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx \right| \leq c \varepsilon^\beta,$$

где постоянная c не зависит от ε . Аналогично,

$$\begin{aligned} \left| \int_G (q_i b_i(x, t) - q_i b_i(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx \right| &\leq c \varepsilon^\alpha \|b_i\|_{C([0, T]; C^\alpha(\overline{G_{\delta_1}}))}, \\ \left| \int_G (f(x, t) - f(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx \right| &\leq c \varepsilon^\alpha \|f\|_{C([0, T]; C^\alpha(\overline{G_{\delta_1}}))}. \end{aligned}$$

Из этих неравенств и вытекает требуемое. □

ГЛАВА 4

Описание алгоритма численного решения обратной задачи для моделей тепломассопереноса

4.1 Алгоритм численного решения задачи

В этой главе приводятся способы построения численных алгоритмов решения обратных задач вида (1.15)-(1.17). Во всех описаниях ниже рассматривается простейший случай - случай одного уравнения второго порядка и рассматриваем линейную обратную задачу об определении правой части. Алгоритм записанный для системы уравнений или в нелинейном случае принципиально ничем не отличается: любой из них основывается на способе построения приближённого решения в теоремах существования предыдущих глав. Кроме того, используется теорема о сходимости (см., например, теорему 11). Считается, что условия этой теоремы на данные задачи выполнены.

Описание задачи в случае краевых условий Неймана. В случае остальных краевых задач изменения незначительны. Уравнение

$$u_t - \operatorname{div}(c(x, t) \nabla u) + b(x, t) \nabla u + a(x, t) u = f, \\ f = \sum_{i=1}^{r_0} f_i(t, x) q_i(t) + f_0, \quad b(x, t) = (b_1(x, t), b_2(x, t))^T, \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^T, \quad (4.1)$$

рассматривается в области $Q = G \times (0, T)$, $x = (x_1, x_2) \in G \subset \mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$. Начально-краевые условия:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial G \times (0, T)} = g, \quad (4.2)$$

где n – единичная внешняя нормаль к $\Gamma = \partial G$. Функции q_i определяются на основе дополнительных измерений вида

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (4.3)$$

В теории тепломассопереноса [32] функция u - концентрация переносимого вещества, b - вектор скорости течения, a - коэффициент определяющий скорость осаждения в результате химических реакций, c - коэффициент диффузии, правая часть f - плотность функции источников.

При построении численного алгоритма обратной задачи (4.1)-(4.3), приходится находить старшие частные производные приближённых решений, что не очень удобно, поэтому условие (4.3) (см. Теорему 11) заменяется, условием вида

$$\int_G \varphi_{i\varepsilon}(x)u(x,t)dx = \psi_i(t), \quad (4.4)$$

где функции $\varphi_{i\varepsilon}$ обладают свойствами, приведёнными перед теоремой 11. Точнее считается, что они неотрицательны, имеют носитель, лежащий в области G , стягивающийся к соответствующей точке x_i при $\varepsilon \rightarrow 0$ и интеграл по G от каждой из этих функций равен 1. Решение задачи (2.1)-(2.3), где $\varphi_i(x) = \varphi_{i\varepsilon}(x)$, с этими данными и есть приближённое решение задачи (4.1). Для удобства вместо функций $\psi_{i\varepsilon}(t)$ рассматриваются сами функции $\psi_i(t)$, поскольку их разность имеет малый порядок (порядка ε). Таким образом, приближённое решение есть функция $u(x,t)$ - решение задачи (2.1)-(2.3), где $\varphi_i(x) = \varphi_{i\varepsilon}(x)$, а уравнение (1) имеет вид

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div}(c(x,t)\nabla u) + b(x,t)\nabla u + a(x,t)u &= f_c, \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ f &= \sum_{i=1}^{r_0} f_i(t,x)q_i(t) + f_0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $c(x,t)$ - некоторая достаточно гладкая положительная функция. Функции $\varphi_{i\varepsilon}(x)$ были построены в параграфе 2.5, далее сохраняются все основные обозначения этого параграфа.

Условия теоремы 11 в применении к задаче (4.1) (т.е. условия (1.18), (1.2)-(1.6), (1.20), (1.21), (2.33)-(2.34)):

$$b_j \in L_\infty(0,T, L_p(G)), \quad j = 1, 2, \dots, r_0 = s; \quad (4.6)$$

$$f_0 \in L_p(Q), \quad u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \quad g(x,t) \in W_p^{1-1/2p, 2-1/p}(S), \quad (4.7)$$

$$g(x,0) = \frac{\partial u_0}{\partial n}|_{\partial G}, \quad (4.8)$$

$$b(t,x) \in L_\infty(Q), \quad (|\alpha| < 2m), \quad c \in L_\infty(0,T; W_\infty^1(G)) \cap C(\overline{Q}), \quad (4.9)$$

$$\psi_j \in W_p^1(0,T), \quad \psi_j(0) = u_0(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, s = r_0, \quad (4.10)$$

$$\nabla f_0 \in L_p(Q_0), \quad \nabla b_j \in L_\infty(0,T, L_p(G_0)), \quad j = 1, 2, \dots, r_0. \quad (4.11)$$

Определим матрицу $B(t)$ размера $r \times r$, строки, которой занимают вектора $b_1(x_k, t), \dots, b_{r_0}(x_k, t)$. Требуется, чтобы существовала постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det B(t)| \geq \delta_0, \text{ для п.в. } t \in [0, T]. \quad (4.12)$$

Интегрируя уравнение (4.1) по G с весом $\varphi_j(x)$. Получаем, используя данные задачи, что

$$\begin{aligned} \psi_{jt} + \int_G c \nabla u \cdot \nabla \varphi_j dx + \int_G (b \nabla u + au) \varphi_j dx - \int_\Gamma c(x, t) g(t, x) \varphi_j d\Gamma = \\ \int_G f_0 \varphi_j dx + \sum_{i=1}^r (f_i, \varphi_j) q_i(t). \end{aligned}$$

В силу условий $|\det B| \geq \delta_0$ для п.в. $t \in [0, T]$. В силу определения матрицы B вектор q выражается следующим образом ($\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_r)$).

$$\vec{q} = B^{-1} \begin{bmatrix} \psi_{1t} + (c \nabla u, \nabla \varphi_1) + (b \nabla u + au, \varphi_1) - \int_\Gamma g \varphi_1 d\Gamma - (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ \psi_{rt} + (c \nabla u, \nabla \varphi_r) + (b \nabla u + au, \varphi_r) - \int_\Gamma g \varphi_r d\Gamma - (f, \varphi_{r_0}). \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Функция в правой части (4.13) есть некоторый оператор $R(\vec{q})$, сопоставляющий вектор-функции $\vec{q}$ правую часть (4.13), где u решение задачи (2.1)-(2.3). Тогда на уравнение (4.13) можно смотреть, как на уравнение для нахождения функции $\vec{q}$: $\vec{q} = R(\vec{q})$. Как было показано, оператор $R(\vec{q})$ при малых t является сжимающим и значит справедлива теорема о неподвижной точке. Более того, можно показать, что метод последовательных приближений сходится к решению и на произвольном промежутке времени $[0, T]$. Именно это уравнение и будет использоваться при построении численного алгоритма ниже.

4.2 Описание алгоритма

Алгоритм является итерационным и основан на методе конечных элементов (МКЭ). Пусть на k -ом шаге построено приближение $\vec{q}^k = (q_1^k, \dots, q_r^k)$ вектор-функции $\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$, $\vec{q}^0 = 0$. Используется метод конечных элементов (МКЭ). Задаём триангуляцию области G , узлы триангуляционной сетки $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$ и соответствующие базисные кусочно-линейные функции

$\{\varphi_i(x)\}$. Без ограничения общности считаем, что точки замеров $x_1, x_2, \dots, x_r$ являются узлами сетки. Тогда найдутся номера j_i ($i = 1, 2, \dots, r$) такие, что $x_i = \tilde{x}_{j_i}$ ($i = 1, 2, \dots, r$). Выберем в качестве функций $\varphi_{i\varepsilon}$ функции $\frac{1}{V_i}\varphi_{j_i}$, где $V_i = \int_G \varphi_{j_i} dx$. Такие функции удовлетворяют всем условиям (в качестве параметра ε можно брать наибольший диаметр треугольника сетки). Приближённое решение (4.1) ищем в виде $u_k = \sum_{i=1}^m C_i(t)\varphi_i(x)$. Вектор-функция $\vec{C}(t) = (C_1(t), C_2(t), \dots, C_m(t))$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$M\vec{C}_t + K\vec{C} = F_0 + G + \sum_{i=1}^r F_i q_i^k, \quad (4.14)$$

где M и K – матрицы с элементами $M_{ji} = \int_G \varphi_i \varphi_j dx$ и $K_{ji} = \int_G (c \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j + b \nabla \varphi_i \varphi_j + a \varphi_i \varphi_j) dx$, F_0 , G , F_i вектора с координатами $\int_G f \varphi_j dx$, $\int_\Gamma g \varphi_j dx$ и $\int_G f_i \varphi_j dx$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, соответственно. Пусть $\vec{U} = (u_k(\tilde{x}_1), u_k(\tilde{x}_2), \dots, u_k(\tilde{x}_m))$, соответственно, $\vec{U}(0) = ((u_0(\tilde{x}_1), u_0(\tilde{x}_2), \dots, u_0(\tilde{x}_m)))$. Чтобы решить систему (4.14), используется метод конечных разностей (МКР). Заменяем (4.14) на конечно-разностное уравнение:

$$M \frac{\vec{C}_i - \vec{C}_{i-1}}{\Delta t} + K\vec{C}_i = \tilde{F}_i, \quad \vec{C}_0 = \vec{U}|_{t=0}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \Delta t = T/N, \quad (4.15)$$

где Δt – шаг по времени и $\tilde{F}_i$ – значение правой части в (4.14) в точке $i\Delta t$. Таким образом, кусочно-постоянное приближение решения $\vec{C}(t)$ системы (4.14) есть кусочно-постоянная функция, равная вектору $\vec{C}_i$ на множестве $((i-1)\Delta t, i\Delta t]$. В соответствии с равенством (4.13) (мы подставляем в правую часть (4.13) функции $\varphi_{i\varepsilon}$ и используем их определение), для нахождения следующей итерации $\vec{q}^{k+1}$ используем равенство

$$\vec{q}^{k+1} = B^{-1}\tilde{\psi} + B^{-1} \begin{bmatrix} (c \nabla u_k, \nabla \varphi_{j_1}) + (b \nabla u_k, \varphi_{j_1}) + (a u_k, \varphi_{j_1}) \\ \vdots \\ (c \nabla u_k, \nabla \varphi_{j_r}) + (b \nabla u_k, \varphi_{j_r}) + (a u_k, \varphi_{j_r}) \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$\tilde{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_{1t} V_1 - \int_\Gamma g \varphi_{j_1} d\Gamma - (f, \varphi_{j_1}) \\ \vdots \\ \psi_{rt} V_1 - \int_\Gamma g \varphi_{j_r} d\Gamma - (f, \varphi_{j_r}) \end{bmatrix},$$

где $(f, \varphi_{j_i}) = (f_0, \varphi_{j_i}) + \sum_{j=1}^r q_j^k(f_j, \varphi_{j_i}), i = (1, 2, \dots, r),$

$$B = \begin{bmatrix} (f_1, \varphi_1) & \cdots & (f_r, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_1, \varphi_r) & \cdots & (f_r, \varphi_r) \end{bmatrix}.$$

Отметим, что поскольку x_i – внутренние точки области G , а носители функций φ_{j_i} стягиваются к точкам x_i при измельчении сетки, то без ограничения общности можно считать, что слагаемые $\int_{\Gamma} g \varphi_{j_i} d\Gamma$ в (4.16) равны нулю. При численной реализации (см. ниже) функции $C_i(t)$, входящие в определение функции u_k заменяются их кусочно-постоянными приближениями.

4.2.1 Реализация алгоритма

Перед тем как приступить к реализации полученного алгоритма необходимо выбрать среду разработки. Рассмотрим основные критерии отбора

- символьные вычисления;
- наличие инструментов для решения задач описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных;
- организация интерфейса пользователя, помимо основного окна программы;
- построение самостоятельного графического windows-приложения, работающей без основной программы;
- простота разработки новых алгоритмов (наличие документации, открытость исходного кода, примеры)
- наличие лицензии (стоимость если отсутствует).

В ходе поиска среды разработки были проанализированы следующие программные продукты: Matlab 2013b, Wolfram Mathematica, Finite Element Computation Solver (FeniCS), Free Finite Element Method ++ (FreeFEM++). В соответствии с критериями выбора была составлена таблица 4.1

Рассмотрев представленные среды для разработки было принято решение использовать среду инженерных и научных расчётов Matlab 2013b. Matlab является как высокоуровневым языком, так и интерактивной средой для программирования, численных расчётов и визуализации результатов. С помощью Matlab можно

Таблица 4.1 — Критерии выбора среды разработки

Среда разработки	1	2	3	4	+	5
Matlab	+	+	+	+	+	+
Mathematica	+	+	+	+	+	\$ 100 (student)
FeniCS	-	+	-	+	+	Free(GNU LGPL)
FreeFEM++	-	-	+	+	+	Free(GNU GPL)

анализировать данные, разрабатывать алгоритмы, создавать модели и приложения. Matlab в своем составе имеет специальный набор инструментов предназначенный для решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных в двумерных областях, при помощи линейных треугольных элементов Partial Differential Equation (PDE) ToolBox. Безусловно, накладываемое ограничение на класс задач и тип конечных элементов не позволяет PDE ToolBox конкурировать с известными CAD/CAE программными продуктами, создаваемыми для решения сложных задач механики сплошной среды. Однако, с методической точки зрения PDE ToolBox обладает рядом несомненных достоинств, основное из которых заключается в открытости кода реализованных в нём алгоритмов для всех этапов решения задач методом конечных элементов. Кроме того, овладение средствами PDE ToolBox не требует больших временных затрат и позволяет практически сразу проводить исследования, касающиеся различных аспектов применения метода конечных элементов, привлекая также средства Matlab и его расширений. Открытость кода способствует глубокому познанию алгоритмов метода конечных элементов. Кроме того, имеется возможность задания эллиптических, параболических и гиперболических уравнений и систем, решения задач на собственные значения и задач, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями.

PDE ToolBox содержит более 150 функций с открытым кодом, из которых около 50 подробно описано в справочной системе. Так же позволяет задавать область при помощи примитивов и операций над множествами, выбирать опи-

сывающее изучаемый процесс дифференциальное уравнение (или систему уравнений), задавать граничные и начальные условия, производить триангуляцию области и её измельчение, решать получающуюся конечноэлементную систему и визуализировать решение.

После переноса теоретических результатов в среду Matlab, полученные matlab-функции представляют собой алгоритм решения обратных задач для уравнений тепломассопереноса. Программная реализация алгоритма состоит из 3 частей:

1. Инициализация массива описывающего геометрию области и граничной матрицы.

В этом пункте, по заданным пользователем типу геометрии (эллипс или прямоугольник), параметрам геометрии (для эллипса радиус по горизонтали и по вертикали, для прямоугольника сторона по горизонтали и по вертикали) и по координатам точек замера, при помощи функции `decsd` создаём матрицу декомпозиционной геометрии, содержащую информацию о граничных участках. Блок схема определения матрицы декомпозиционной геометрии представлена на рисунке (4.1). Используя декомпозиционную геометрию области и условия на границе задаётся граничная матрица. Блок схема определения матрицы граничных условий представлена на рисунке (4.2).

2. Реализация итерационного расчёта методом конечных элементов.

Для реализации МКЭ используется библиотека Matlab - Partial Differential Equation Toolbox. Блок схемы представлены на рисунках (4.3) и (4.4). Здесь на первой итерации генерируется триангуляционная сетка Делоне для ранее заданной декомпозиционной геометрии используя функцию `initmesh`, если пользователем было задано количество разбиений сетки - сетка разбивается нужное количество раз используя функцию `refinemesh`. Обозначим через $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$ узлы триангуляционной сетки, которые строятся таким образом, что все точки замеров $\{x_i\}$ являются узлами сетки. Далее определяем индексы этих точек, скажем $j_1, j_2, \dots, j_r$. При помощи функции `assemb` собираем граничный вектор правой части G , используя функцию `assema` и `assemban` находим матрицу масс M , вектор правой части F_0 и матрицу жесткости K . Далее при помощи функции `assema` находим вектора правой части $F_j, j = 1, 2, \dots, r$.

3. Реализация метода конечных разностей.

Из уравнения (4.15) получаем

$$\vec{C}_i = (M + \Delta t \cdot K)^{-1} \cdot (\Delta t \cdot \tilde{F}_i + M \cdot \vec{C}_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где вектор $\vec{C}_0$ совпадает с начальным вектором $U|_{t=0}$ и $\vec{C}_i$ - значение кусочно-постоянного приближения вектора $\vec{C}(t)$ на $((i-1)\Delta t, i\Delta t]$.

Также на каждой итерации добавлялось возмущение функции ψ_{jt} случайными погрешностями в соответствии с формулой

$$\tilde{\psi}_j(t) = \psi_{jt} + \delta(2\sigma_n - 1).$$

Положим $\vec{\psi}(t) = (V_1\tilde{\psi}_1(t), \dots, V_r\tilde{\psi}_r(t))$. Здесь σ_n - случайная функция, нормально распределённая на интервале $[0, 1]$, а величина δ задаёт уровень погрешности. Таким образом, (4.16) заменяется на следующее равенство:

$$\vec{q}_i^{k+1} = B^{-1}(i\Delta t) \cdot (\vec{\psi}(i\Delta t) + K \cdot \vec{C}_i - F0(i\Delta t)), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где $F0$ - вектор с координатами $((f_0, \varphi_{j_1}), \dots, (f_0, \varphi_{j_r}))$ и $\vec{q}_i^{k+1}$ - значение кусочно-постоянного приближения вектора $\vec{q}^{k+1}(t)$ на множестве $((i-1)\Delta t, i\Delta t]$.

Далее проверяется истинность следующего неравенства $\max_i |\vec{q}_i^{k+1} - \vec{q}_i^k| < \varepsilon$, где ε - погрешность задаваемая пользователем, $i = 1, 2, \dots, r$. Если неравенство истинно или число k превысит некоторую наперед заданную пользователем величину I , то произойдет выход из программы.

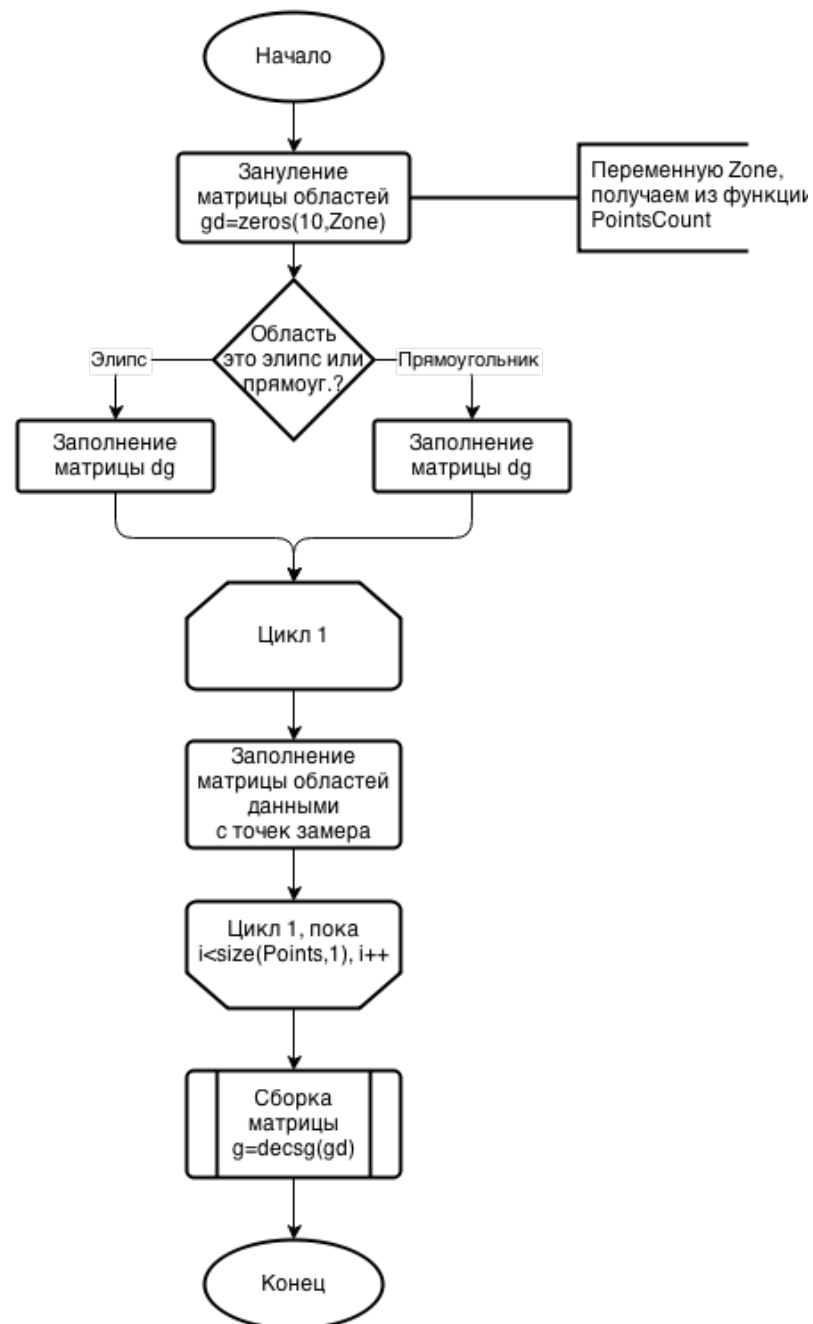


Рисунок 4.1 — Блок схема определения матрицы декомпозиционной геометрии.

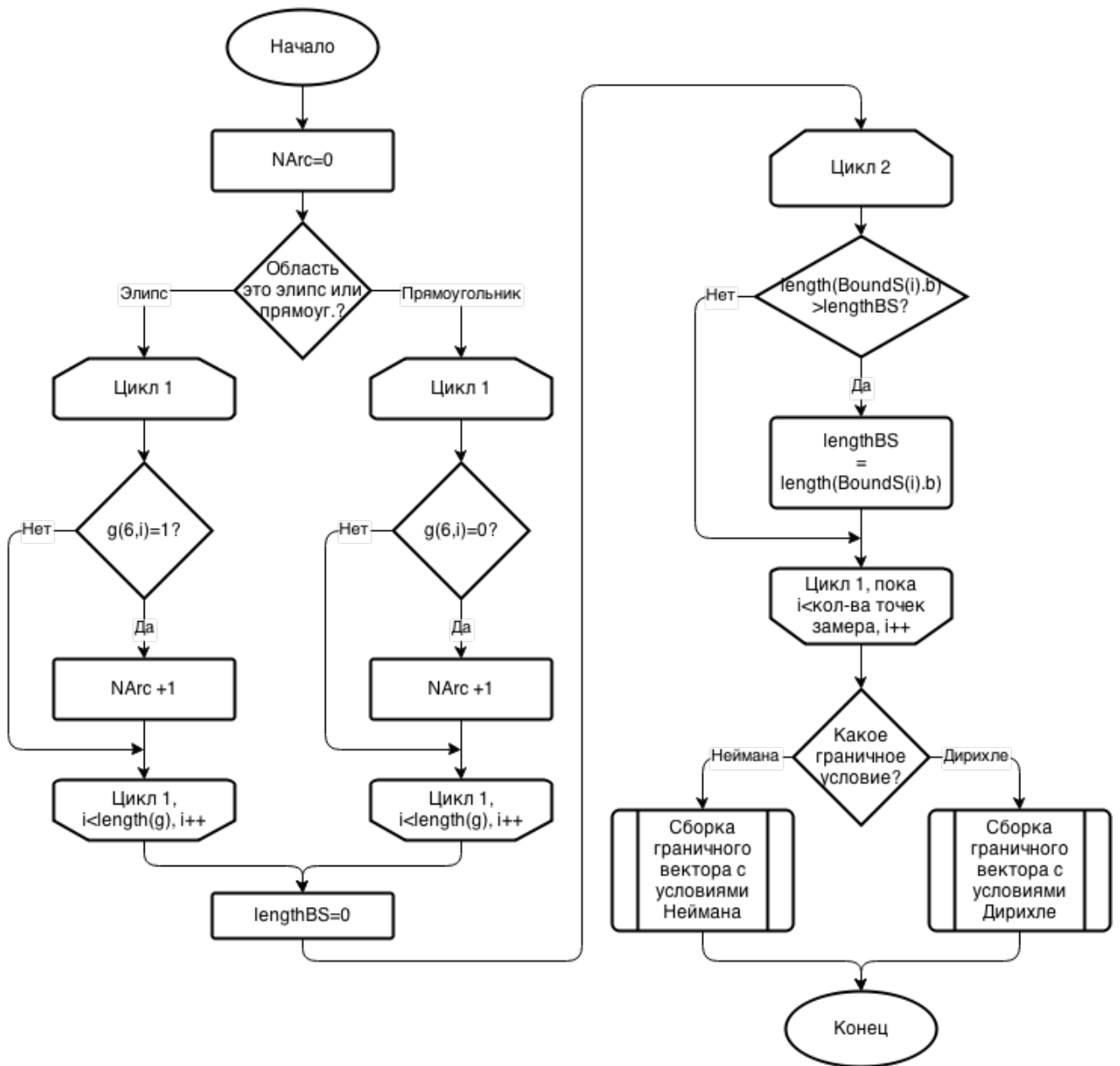


Рисунок 4.2 — Блок схема определения матрицы граничных условий.

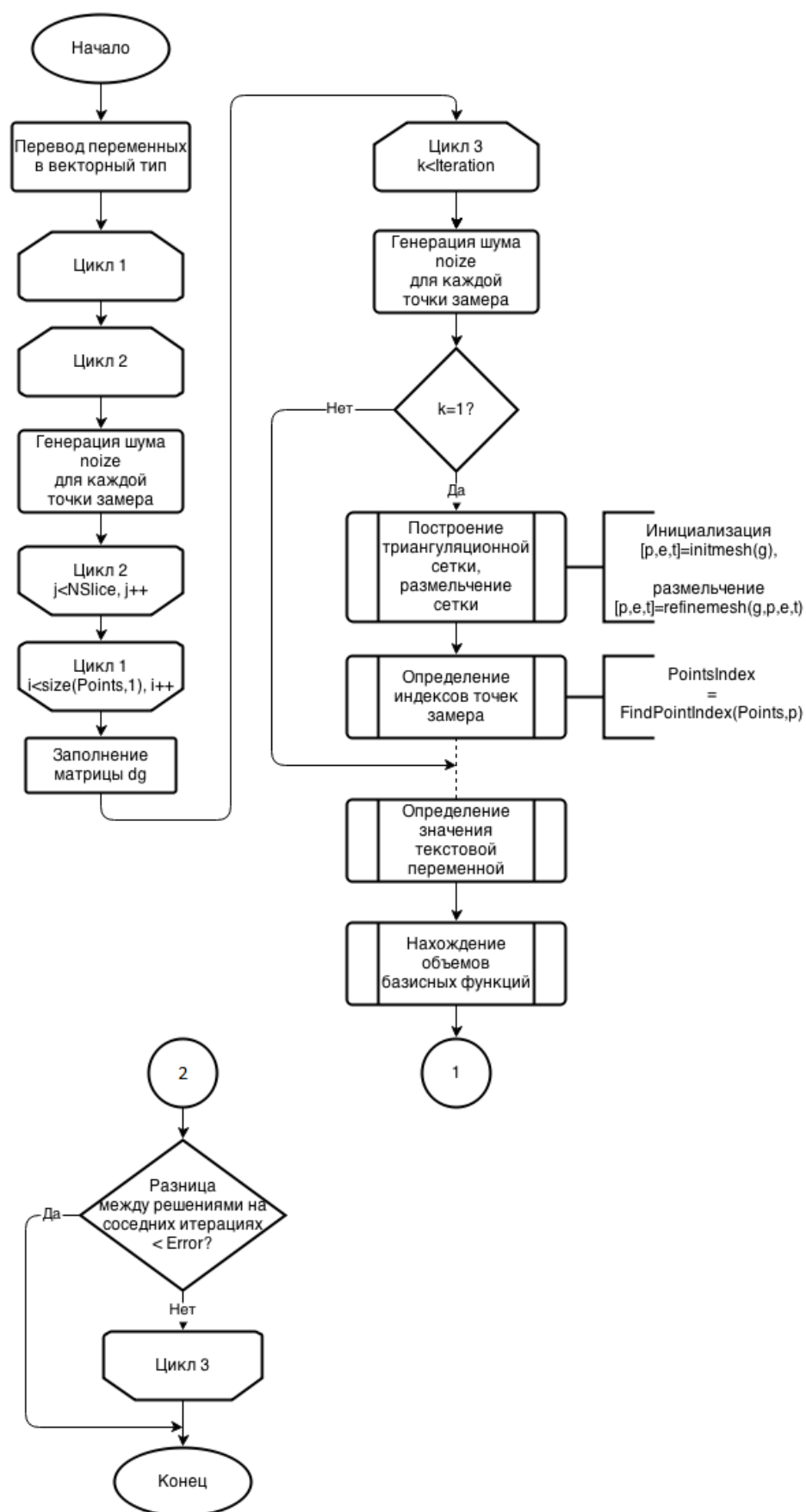


Рисунок 4.3 — Блок схема поиска решения u и коэффициентов q_i .

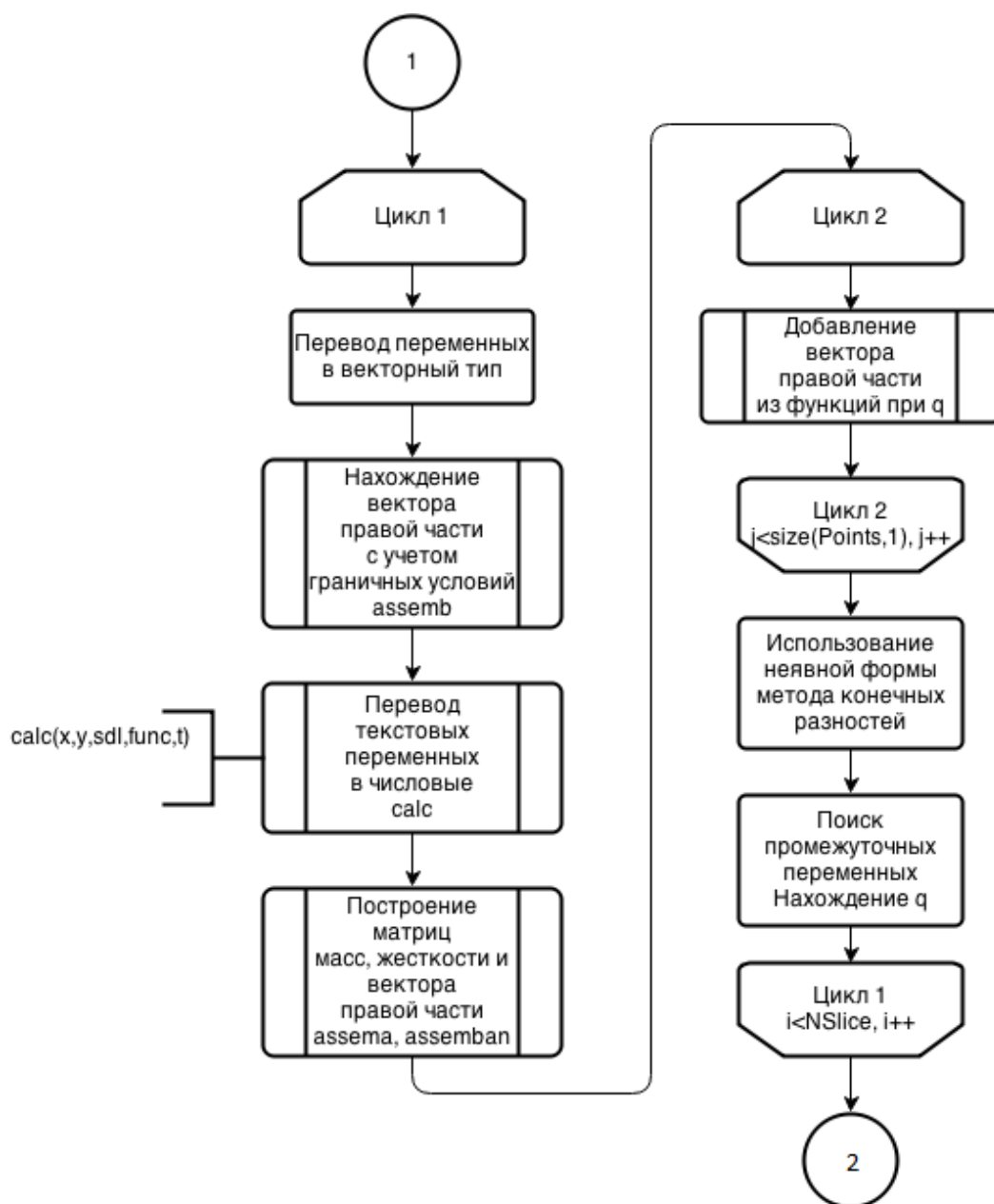


Рисунок 4.4 — Дополнение блок схемы поиска решения.

ГЛАВА 5

Описание программного комплекса и результаты вычислительных экспериментов

В этой главе приводится описание разработанного программного комплекса и результаты работы комплекса в виде вычислительных экспериментов. Программный комплекс основан на алгоритме описанном в предыдущей главе.

5.1 Описание программы

5.1.1 Обоснование и выбор программных средств

Перед написанием программы необходимо определиться с целевой платформой будущего приложения: desktop, web. Web-приложение по сравнению с desktop-приложением обладает рядом преимуществ

- для работы web-приложения требуется минимальная аппаратная платформа;
- web-приложение не требует установки на компьютер. Для полноценной работы нужен только браузер и доступ в интернет;
- web-приложение не требует специальной настройки и администрирования;
- обновление web-приложения происходит автоматически;
- web-приложение обеспечивает высокую мобильность, можно использовать везде, где есть доступ в интернет.

К недостаткам можно отнести

- сильная зависимость от доступа к сети интернет;
- трудности реализации некоторых задач.

Так как проводятся много достаточно тяжёлых математических вычислений, необходимо разбить приложение на серверную часть, клиентскую часть и базу данных. Такой подход позволяет решать сложные задачи на серверной части, используя как клиента ЭВМ со слабой аппаратной частью. Серверная часть отвечает за решение задачи, клиентская часть за взаимодействие с пользователем через графический пользовательский интерфейс, база данных отвечает за хранение

ние данных о задачах, решениях задач, пользователях и данных об изменениях и ошибках web-приложения.

Наименование программы: Программа численного решения обратных задач для математических моделей тепломассопереноса. (Клиентская часть)

Назначение программы: Программа предназначена для визуализации результатов численного определения вместе с решением правой части специального вида и коэффициентов в параболических уравнениях и системах.

Программа обеспечивает выполнение следующих функций:

- Регистрацию новых пользователей.
- Управление учётными данными пользователей.
- Просмотр ошибок системы.
- Просмотр изменений системы
- Просмотр решений, которые производил пользователь.
- Передача данных для вычисления решения на сервер.
- Прием данных с сервера.
- Визуализация данных решения U и коэффициентов Q .

Наименование программы: Программа численного решения обратных задач для математических моделей тепломассопереноса. (Серверная часть)

Назначение программы: Программа предназначена для численного определения вместе с решением правой части специального вида и коэффициентов в параболических уравнениях и системах.

Программа обеспечивает выполнение следующих функций:

- Прием данных от клиентской части.
- Нахождение решения U параболического уравнения.
- Нахождение коэффициентов Q .
- Формирование *.obj и *.mtl файлов содержащих геометрические параметры выводимых на клиентской части трехмерных моделей решений.
- Формирование *.txt файла содержащего настройки порядка отображения файлов *.obj.
- Занесение результатов вычислений в базу-данных.
- Передача данных клиенту.

Было принято решение разрабатывать web-приложение на платформе .Net Framework — это технология, которая поддерживает создание и выполнение но-

вого поколения web-приложений. Общая схема работы web-приложения представлена на рисунке (5.1).

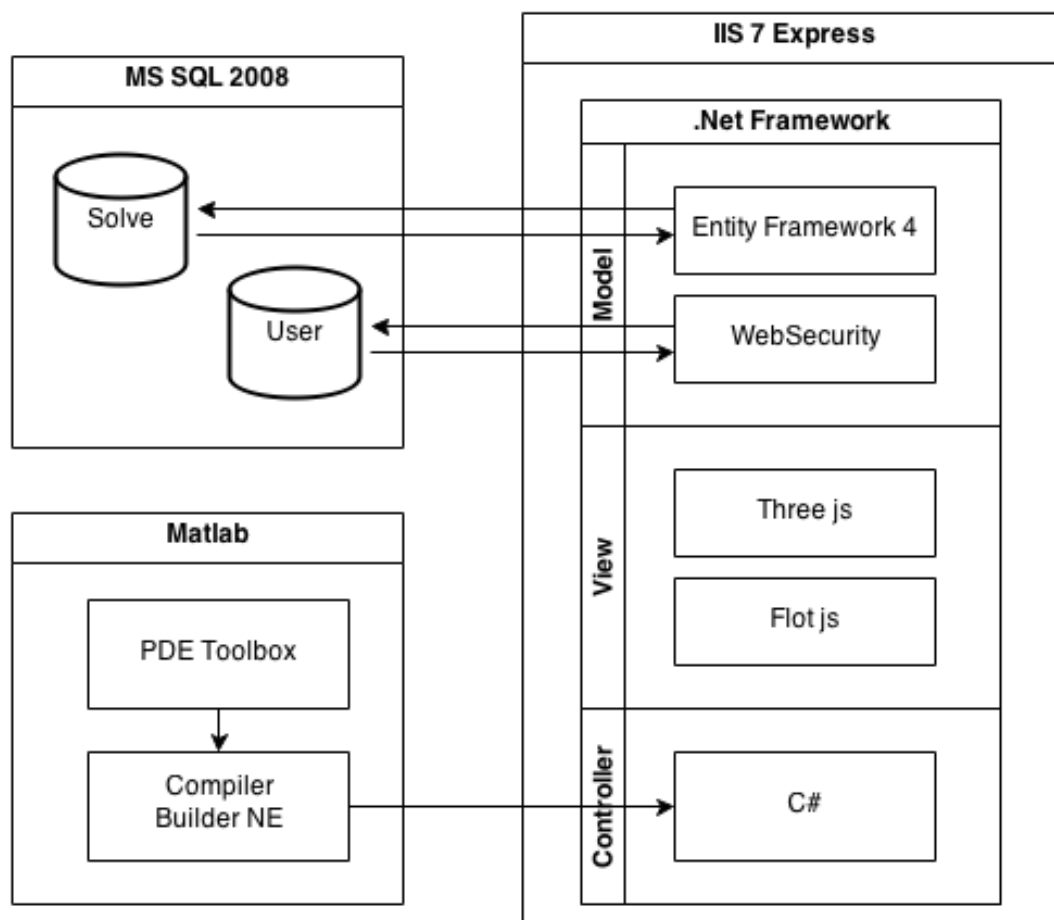


Рисунок 5.1 — Схема работы программы.

Для дальнейшего использования функций полученных в среде Matlab в web-приложении .Net Framework используется Matlab Compiler – это специальный инструмент, позволяющий создавать независимые приложения в среде Matlab. К функциональным достоинствам Matlab Compiler относится

- обеспечение преобразования программного Matlab-кода, графики и интерфейса в независимые приложения, не требующие для исполнения присутствия платформы Matlab;
- обеспечение эквивалентного исполнения Matlab-кода вне среды Matlab при помощи упаковки всех необходимых функций и генерации исполняемого файла;
- возможность максимально просто создавать независимые приложения (.exe), компоненты и библиотеки (.dll), значительно сокращая время раз-

работки приложений на языке Matlab по сравнению с классическими языками программирования C/C++, Delphi, Java;

В частности используется Matlab Builder NE - это пакет, расширяющий возможности Matlab Compiler средствами генерации независимых .NET компонентов и COM объектов. Matlab Builder NE обеспечивает преобразование функций Matlab в независимые компоненты, не требующие для исполнения присутствия платформы Matlab.

5.1.2 Разработка web-приложения

Для упрощения разработки web-приложения использовалась платформа для создания сайтов и web-приложений с использованием шаблона MVC (model - view - controller) – ASP.NET MVC4.

Шаблон MVC, лежащий в основе этой платформы, подразумевает взаимодействие трёх компонентов: контроллера (controller), модели (model) и представления (view). Общую схему взаимодействия упрощённо можно представить следующим образом:



Рисунок 5.2 — Общая схема взаимодействия в MVC.

Контроллер (controller) представляет класс, с которого собственно и начинается работа приложения. Этот класс обеспечивает связь между моделью и представлением. Получая вводимые пользователем данные, контроллер исходя из внутренней логики при необходимости обращается к модели и генерирует соответствующее представление.

Представление (view) - это собственно визуальная часть или пользовательский интерфейс приложения - например, html-страница, через которую пользователь, зашедший на сайт, взаимодействует с web-приложением.

Модель (model) представляет набор классов, описывающих логику используемых данных.

Разделение ответственности. В MVC приложение состоит из трёх частей: контроллера, представления и модели, каждая из которых выполняет свои специфичные функции. В итоге приложение будет легче поддерживать модифицировать в будущем.

В силу разделения ответственности приложения MVC обладают лучшей тестируемостью. Можно тестировать отдельные компоненты независимо друг от друга.

Для визуализации полученных решений используется JavaScript библиотеки. Для вывода трехмерного графика искомой функции u используется легковесная кроссбраузерная JavaScript библиотека three.js, используемая для создания и отображения анимированной компьютерной 3D графики при разработке web-приложений. Three.js скрипты имеют возможность использоваться совместно с элементами HTML5 CANVAS, SVG или WebGL. Библиотека Three.js работает во всех браузерах, которые поддерживают технологию WebGL; также может работать с «чистым» интерфейсом элемента CANVAS, благодаря чему работает и на многих мобильных устройствах. Three.js распространяется под лицензией MIT license. Для визуализации двумерных графиков функций $q_i(t)$ будем использовать JavaScript библиотеку flot.js, предназначенную для рисования графиков. С её помощью можно легко и быстро создавать красивые динамические графики, которые будут корректно работать в любом браузере независимо от того, какая ОС установлена у пользователя. Блок схема работы web-приложения представлена на рисунке (5.3).

Для публикации полученного web-приложения используется Internet Information Services 7.0 (IIS). В основе IIS 7.0 лежит полностью модульный web-сервер, включающий более 40 компонентов. Эти компоненты создаются на основе нового слоя расширяемости, что позволяет разработчикам расширять или замещать практически любую функцию сервера в машинном коде или с помощью Microsoft® .NET Framework. IIS 7.0 предлагает расширяемость компонен-

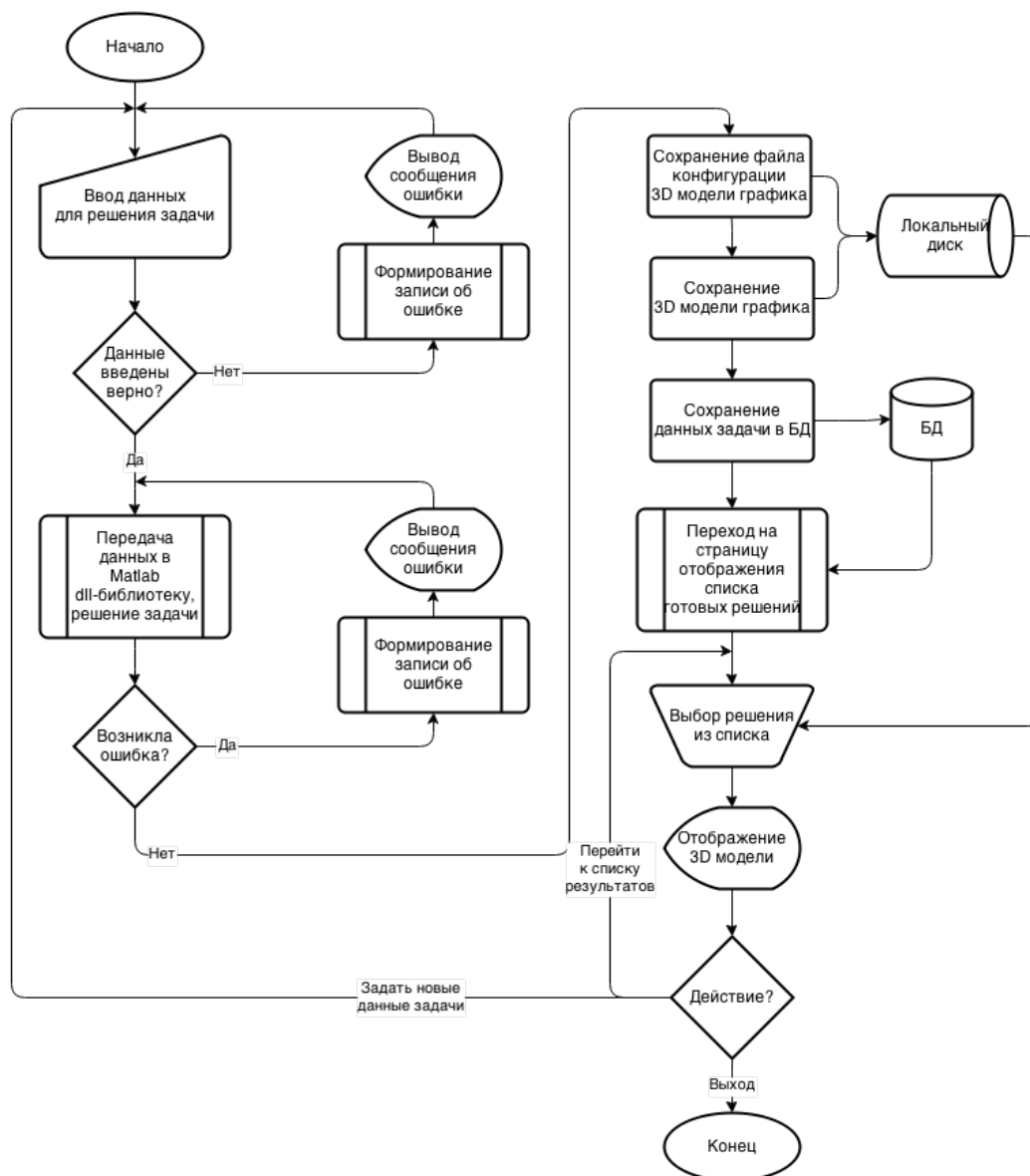


Рисунок 5.3 — Блок схема работы веб-приложения.

тов этапа выполнения, управления и рабочих компонентов, облегчая создание комплексных решений в соответствии с конкретными потребностями. Диагностические компоненты делают процедуры развертывания, администрирования и устранения неполадок сервера значительно проще и удобнее.

5.2 Разработка базы данных

При разработке программы для доступа к данным использовалась объектно-ориентированная технология доступа к данным, object-relational mapping (ORM) решение для .NET Framework от Microsoft Entity Framework (EF) с подходом

создания базы данных Code First. Entity Framework предоставляет возможность взаимодействия с объектами как посредством LINQ в виде LINQ to Entities, так и с использованием Entity SQL. Для облегчения построения web-решений используется как ADO.NET Data Services, так и связка из Windows Communication Foundation и Windows Presentation Foundation, позволяющая строить многоуровневые приложения, реализуя один из шаблонов проектирования MVC, MVP или MVVM. Это устраняет необходимость в написании большей части кода для доступа к данным, который обычно требуется разработчикам.

Исходя из рисунка (5.4), имеется три подхода к работе с данными в Entity Framework: Database First, Model First, и Code First.

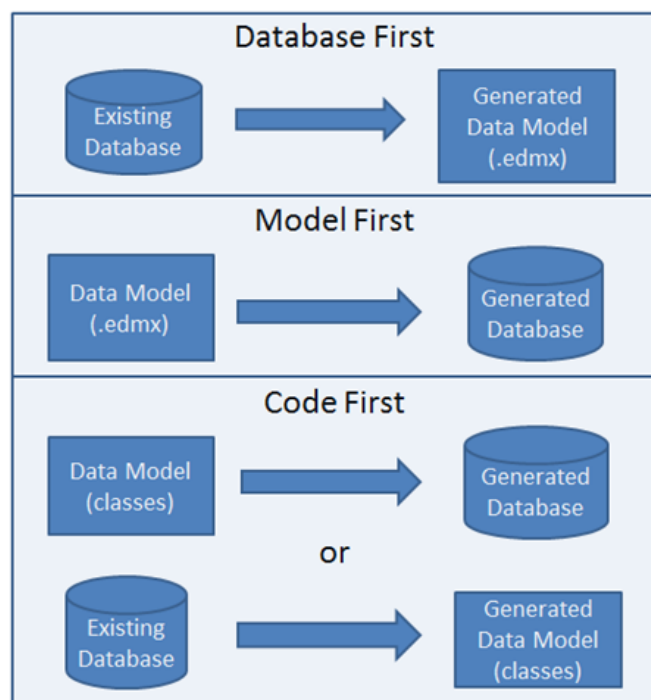


Рисунок 5.4 — Схема подходов Entity Framework.

Database First В случае уже имеющейся базы данных Entity Framework может автоматически создать модель данных, состоящую из классов и свойств, соответствующих объектам базы данных (таким, как таблицы и столбцы). Информация о структуре базы (store schema), модель данных (conceptual model) и маппинг их друг на друга содержится в XML в файле .edmx. Visual Studio предоставляет графический дизайнер Entity Framework, с помощью которого можно просматривать и редактировать .edmx. Части Getting Started With the Entity Framework и Continuing With the Entity Framework в материалах о Web Forms используют подход Database First.

Model First Если базы нет, вы можете начать с создания модели данных, используя дизайнер Entity Framework Visual Studio. После окончания работ над моделью дизайнер сгенерирует DDL (data definition language)-код для создания базы. В этом подходе для хранения информации о модели и маппингах также используется .edmx. What's New in the Entity Framework 4 включает небольшой пример разработки с использованием данного подхода.

Code First Code-First – новая возможность, стоящая в одном ряду с Model-First и Database-First. Можно сначала написать код, описывающий классы-модели, а потом фреймворк автоматически создаст БД по такому коду. Виды отношений будут распознаны – достаточно определить просто ссылки на объекты для 1:1, ICollection для отношения 1:n, и взаимные ICollection для m:n. В этом случае промежуточная таблица также создастся автоматически. Для обеспечения «ленивой» загрузки хватит ключевого слова virtual в определении свойства.

5.2.1 Описание MS SQL 2008 R2 Express

Для хранения данных используется база данных Microsoft SQL Server 2008 R2 – это бесплатный, обладающий развитыми функциональными возможностями выпуск SQL Server, который идеально подходит для обучения, разработки и наращивания функциональности приложений для настольных компьютеров, web-приложений и небольших серверных приложений. Из достоинств можно выделить сокращение усилий на разработку за счёт использования имеющихся знаний ADO.NET Entity Framework, а так же тесная интеграция с Visual Studio.

Схема базы данных о данных задачи и решениях представлена на рисунке (5.5). Описание таблиц базы данных представлены в приложении Б.

5.3 Результаты вычислительных экспериментов

В этом параграфе проанализированы результаты вычислительных экспериментов для двух групп входных данных задачи, полученных в результате решения модельных обратных задач в рамках эксперимента на ЭВМ. Характеристики испытуемой ЭВМ:

Процессор: Intel(R) Core(TM) i7-3517U CPU @ 1.90GHz 2.40GHz;

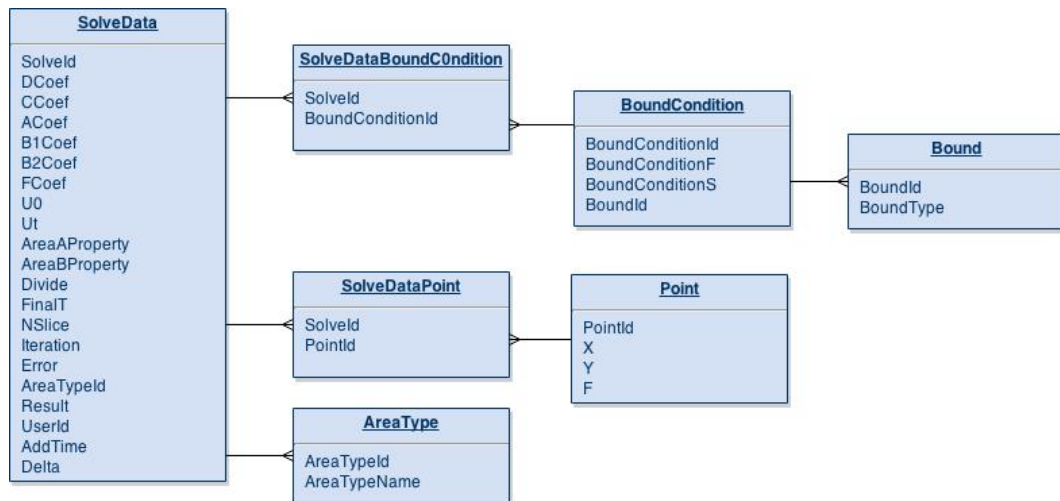


Рисунок 5.5 — Схема базы данных решений

ОЗУ: 4,00 ГБ;

Тип системы: 64-разрядная операционная система Windows 7 Ultimate.

В результате расчётов определялось приближённое значение решения $(u, q_1, q_2, \dots, r_0)$ задачи (4.1)-(4.3) в узлах сетки в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_N$. Чтобы не загромождать изложение, ниже приводятся результаты вычислений только функций $q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, r_0$).

Зададим решение и начальные условия для модельной задачи

$$u = (x^2 + y^2) \cdot (1 + t),$$

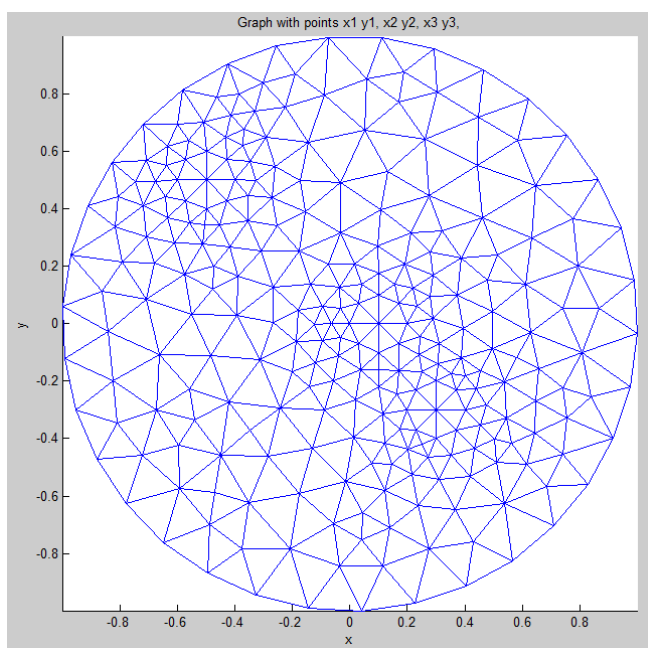
$$u|_{t=0} = x^2 + y^2, \quad u_t = x^2 + y^2.$$

Перейдем к обсуждению результатов решения модельных обратных задач по восстановлению зависимости плотности источника от времени в окружности единичного радиуса с центром в точке $(0, 0)$. Будем считать, что $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = y$ и дополнительная информация задаётся в трёх точках наблюдения: $(0.3, -0.3)$; $(0.1, 0)$; $(-0.5, 0.5)$. Для численного решения задачи рассматриваются две сетки для описанной области с количеством узлов $N_1 = 263$ и $N_2 = 1015$ (рисунок (5.6)).

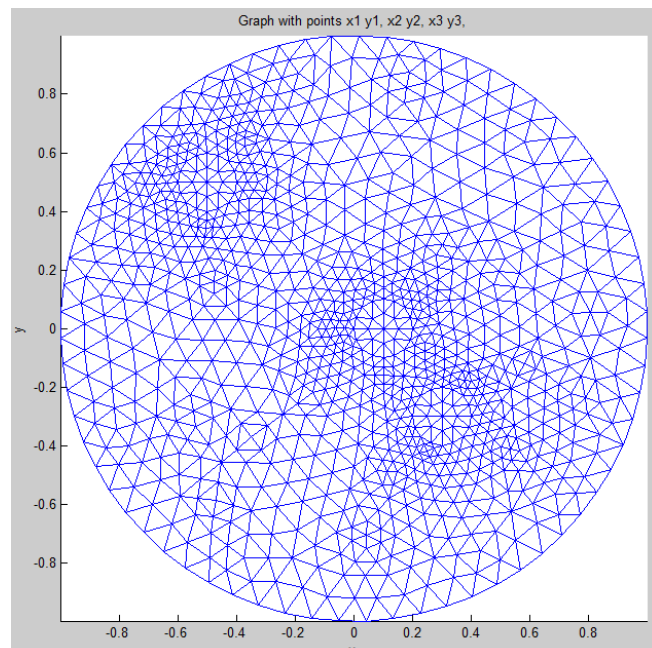
Все проводимые вычислительные эксперименты разбиваются на две группы в зависимости от искоемых коэффициентов q_i , граничных условий, коэффициентов уравнения a , b , c , d и правой части f . Входные данные для первой группы представлены ниже:

искомые коэффициенты q_i : $q_1 = 1$, $q_2 = t + 2$, $q_3 = t^2 + 4$;

граничные условия Неймана: $\frac{\partial u}{\partial n} = 2 \cdot (t + 1)$;



а)



б)

Рисунок 5.6 — Сетки: а) $N_1 = 263$; б) $N_2 = 1015$.

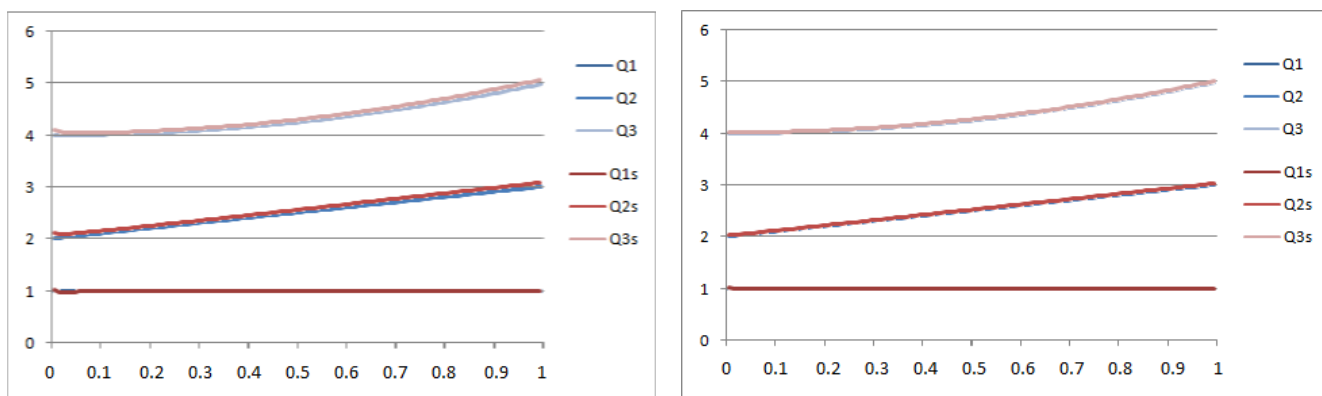
коэффициенты уравнения: $d = 1, c = 1, b_1 = 1, b_2 = 1, a = 1$;

правая часть: $f = (x^2 + y^2) \cdot (t + 1) - 4t + 2x \cdot (t + 1) + 2y \cdot (t + 1) + x^2 + y^2 - 5 - x \cdot (t + 2) - y \cdot (t^2 + 4)$.

Результаты вычислительных экспериментов для первой группы. Сначала приведем сравнение результатов вычислений коэффициентов q_i для двух сеток без зашумления данных, $\delta = 0$ и $\varepsilon = 10^{-5}$ (погрешность, задаваемая пользователем). Обозначим через ι количество полных итераций работы алгоритма и через τ время затраченное на вычисление в секундах. Пусть алгоритм остановился на k -й итерации. В качестве ещё одной погрешности работы алгоритма определим величину $\varepsilon_0 = \max_i |\vec{q}_i^k - \vec{q}(i\Delta t)|$, где $i = 1, 2, \dots, N$. Рассмотрим промежуток $[0, T]$, $T = 1$, положим $\Delta t = T/N$ - шаг по времени, $N = 100$.

На рисунках (5.7.a) и (5.7.b) - приведены графики функций $q_i(t)$ (синие) и графики их приближения (красные). Как можно видеть, они практически сливаются. Далее параметры ε и δ изменяются, чтобы описать зависимость ошибки решения ε_0 от уровня погрешности данных δ и параметра ε . Результаты экспериментов представлены на рисунке 5.3.

На рисунке (5.8) видно, что вне зависимости от уровня вводимого возмущения δ , результаты вычислений q_i повторяют искомые значения рисунок (5.8.a),



а)

б)

Рисунок 5.7 — Сравнение результатов вычислений для сеток:

а) Сетка N_1 : $\tau = 24.18$, $\iota = 16$, $\varepsilon_0 = 0.109$;

б) Сетка N_2 : $\tau = 510.01$, $\iota = 16$, $\varepsilon_0 = 0.027$.

(5.8.b) или располагаются рядом с ними (5.8.c), (5.8.d). По рисункам видно, что использование сетки N_2 приводит к меньшей погрешности вычислений.

Результаты вычислительных экспериментов для второй группы данных:

искомые коэффициенты q_i : $q_1 = t$, $q_2 = 2t^2$, $q_3 = 3t^3$;

граничные условия Неймана: $\frac{\partial u}{\partial n} = 2$;

коэффициенты уравнения: $d = 1$, $c = \frac{1}{1+t}$, $b_1 = \frac{x}{2(1+t)}$, $b_2 = \frac{y}{2(1+t)}$, $a = \frac{1}{1+t}$;

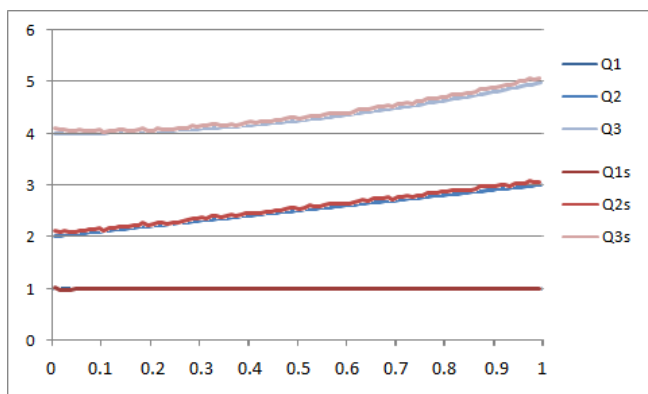
правая часть: $f = 3 \cdot (x^2 + y^2) - 4 - t - 2x \cdot t^2 + 3y \cdot t^3$.

Так же как и для первой группы параметры ε и δ изменяются.

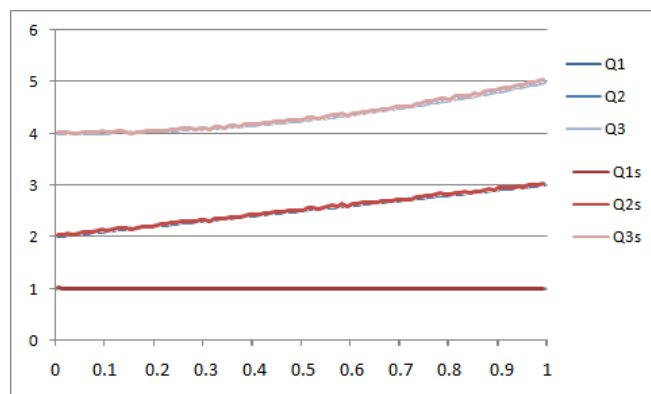
Для двух экспериментов шаг по времени был уменьшен в 10 раз ($\Delta t = 0.001$).

Как видно из результатов экспериментов в связи с изменением данных время выполнения τ для второй группы уменьшилось. Так же видно, что при уменьшении шага по времени в 10-раз, время затраченное на просчёт увеличивается в 10-раз, а погрешность вычислений не уменьшается.

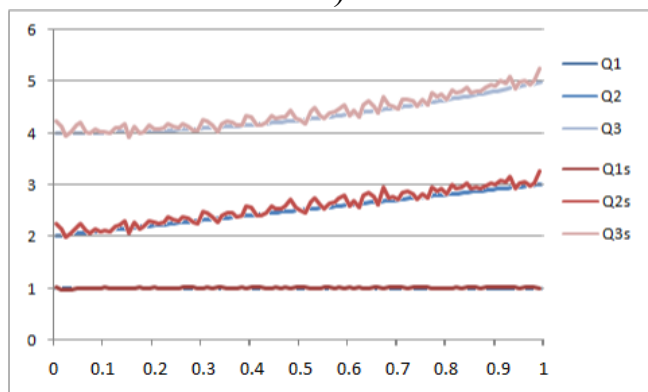
Подводя итоги мы видно, что эксперименты с использованием сетки N_2 показывают лучшую точность, чем сетки N_1 , но выполнение программы с использованием сетки N_2 занимает больше времени. Необходимо принять во внимание тот факт, что число узлов сетки N_2 в ≈ 3.86 больше N_1 , а время выполнения программы с сеткой N_2 больше в среднем в ≈ 20 раз, чем с сеткой N_1 . Увеличение переменной ε приводит к уменьшению времени вычислений τ и количества итераций ι , а результаты вычислений становится менее схожи с искомыми. Уве-



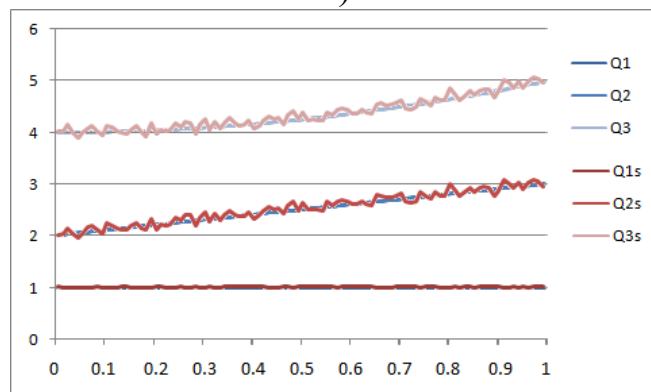
а)



б)



в)



г)

Рисунок 5.8 — Результаты вычислений для первой группы данных.

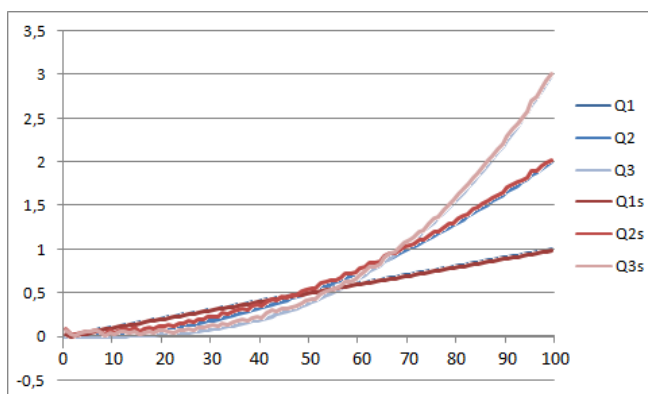
а) Сетка N_1 , $\varepsilon = 10^{-4}$, $\delta = 0.002$, $\tau = 23.29$, $\iota = 15$, $\varepsilon_0 = 0.112$;

б) Сетка N_2 , $\varepsilon = 10^{-4}$, $\delta = 0.002$, $\tau = 477.46$, $\iota = 14$, $\varepsilon_0 = 0.05$;

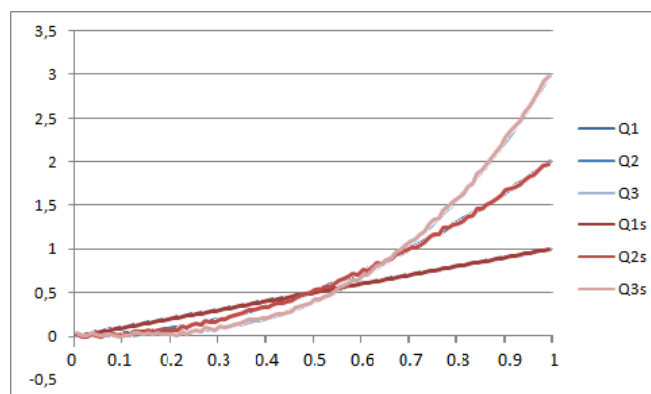
в) Сетка N_1 , $\varepsilon = 10^{-5}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 24.59$, $\iota = 16$, $\varepsilon_0 = 0.257$;

г) Сетка N_2 , $\varepsilon = 10^{-5}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 530.44$, $\iota = 16$, $\varepsilon_0 = 0.209$.

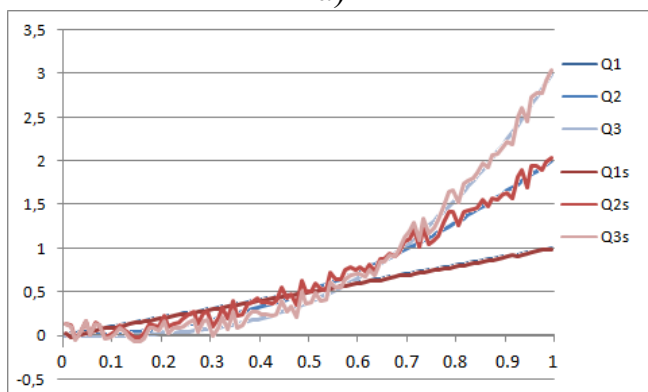
личение зашумлённости данных δ в 5 раз приводит к увеличению выходной погрешности между искомым решением и найденным в ≈ 5 раз.



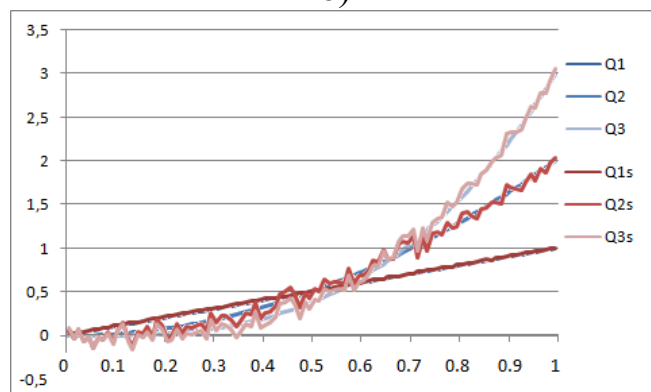
а)



б)



в)



г)

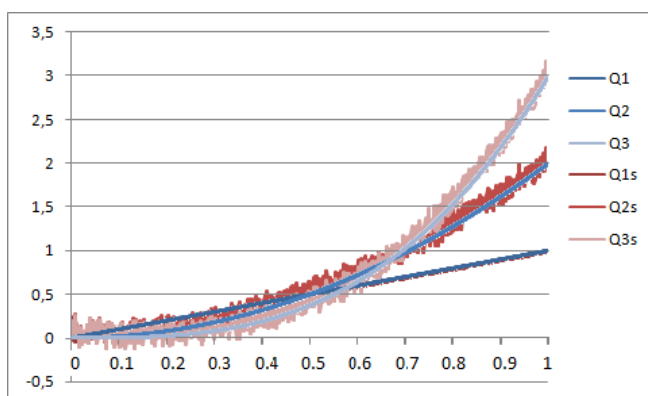
Рисунок 5.9 — Результаты вычислений для первой группы данных.

а) Сетка N_1 , $\varepsilon = 10^{-4}$, $\delta = 0.002$, $\tau = 14.22$, $\iota = 9$, $\varepsilon_0 = 0.078$;

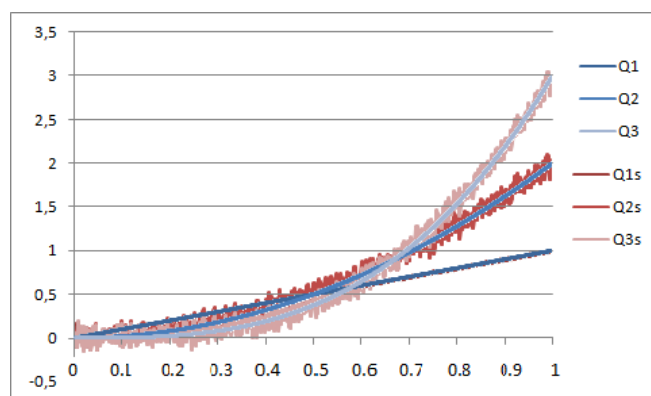
б) Сетка N_2 , $\varepsilon = 10^{-4}$, $\delta = 0.002$, $\tau = 292.7$, $\iota = 9$, $\varepsilon_0 = 0.032$;

в) Сетка N_1 , $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 11.8$, $\iota = 7$, $\varepsilon_0 = 0.172$;

г) Сетка N_2 , $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 245.66$, $\iota = 7$, $\varepsilon_0 = 0.177$.



а)



б)

Рисунок 5.10 — Результаты вычислений для первой группы данных.

а) Сетка N_1 , $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 118.19$, $\iota = 7$, $\varepsilon_0 = 0.27$;

б) Сетка N_2 , $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 2546.07$, $\iota = 7$, $\varepsilon_0 = 0.192$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был исследован ряд обратных задач для математических моделей тепломассопереноса. На основе исследования был разработан и программно реализован численный метод решения соответствующих обратных задач математической физики. Основные результаты можно описать следующим образом.

- Исследованы вопросы корректности нового класса обратных задач с интегральными условиями переопределения.
- Показано, что при подходящем выборе весовых функций решения обратных задач с точечными условиями переопределения можно приблизить решениями обратных задач с интегральными условиями переопределения и установлен порядок сходимости от параметру.
- Разработан эффективный численный метод и алгоритм поиска приближённых решений с помощью методов конечных элементов и конечных разностей, получены соответствующие оценки погрешности решений, которые позволили судить о степени надежности полученных результатов.
- Приведены результаты численных экспериментов, которые показали, что полученный алгоритм сходится к искомому решению и требует немного вычислительных мощностей.
- Был создан комплекс программ решения обратных задач для уравнений тепломассопереноса.

Важной характеристикой разработанной системы является высокая скорость расчёта. Полученная программа имеет свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014619058, 2014619058 и 2014619058. Применение современных средств разработки веб-приложения и концепции объектно-ориентированного программирования позволило реализовать гибкую, открытую и легко сопровождаемую систему.

К перспективам дальнейшей модернизации алгоритма можно отнести уменьшение скорости расчётов за счёт использования CUDA ядер видео карт фирмы NVIDIA или аналогичных многоядерных вычислений.

СПИСОК РИСУНКОВ

1	Рассматриваемый сосуд Ω	10
4.1	Блок схема определения матрицы декомпозиционной геометрии. ...	89
4.2	Блок схема определения матрицы граничных условий.....	90
4.3	Блок схема поиска решения u и коэффициентов q_i	91
4.4	Дополнение блок схемы поиска решения.	92
5.1	Схема работы программы.	95
5.2	Общая схема взаимодействия в MVC.	96
5.3	Блок схема работы веб-приложения.	98
5.4	Схема подходов Entity Framework.....	99
5.5	Схема базы данных решений.....	101
5.6	Сетки: а) $N_1 = 263$; б) $N_2 = 1015$	102
5.7	Сравнение результатов вычислений для сеток: а) Сетка N_1 : $\tau = 24.18$, $\iota = 16$, $\varepsilon_0 = 0.109$; б) Сетка N_2 : $\tau = 510.01$, $\iota = 16$, $\varepsilon_0 = 0.027$.	103
5.8	Результаты вычислений для первой группы данных. а) Сетка N_1 , $\varepsilon = 10^{-4}$, $\delta = 0.002$, $\tau = 23.29$, $\iota = 15$, $\varepsilon_0 = 0.112$; б) Сетка N_2 , $\varepsilon = 10^{-4}$, $\delta = 0.002$, $\tau = 477.46$, $\iota = 14$, $\varepsilon_0 = 0.05$; в) Сетка N_1 , $\varepsilon = 10^{-5}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 24.59$, $\iota = 16$, $\varepsilon_0 = 0.257$; г) Сетка N_2 , $\varepsilon = 10^{-5}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 530.44$, $\iota = 16$, $\varepsilon_0 = 0.209$	104
5.9	Результаты вычислений для первой группы данных. а) Сетка N_1 , $\varepsilon = 10^{-4}$, $\delta = 0.002$, $\tau = 14.22$, $\iota = 9$, $\varepsilon_0 = 0.078$; б) Сетка N_2 , $\varepsilon = 10^{-4}$, $\delta = 0.002$, $\tau = 292.7$, $\iota = 9$, $\varepsilon_0 = 0.032$; в) Сетка N_1 , $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 11.8$, $\iota = 7$, $\varepsilon_0 = 0.172$; г) Сетка N_2 , $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 245.66$, $\iota = 7$, $\varepsilon_0 = 0.177$	105
5.10	Результаты вычислений для первой группы данных. а) Сетка N_1 , $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 118.19$, $\iota = 7$, $\varepsilon_0 = 0.27$; б) Сетка N_2 , $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 2546.07$, $\iota = 7$, $\varepsilon_0 = 0.192$	105
Б.1	Свидетельство № 2014619058. Программа численного решения обратных задач для математических моделей тепломассопереноса.(Клиентская часть).....	124

Б.2	Свидетельство № 2014619479. Программа численного решения обратных задач для математических моделей тепломассопереноса.(Серверная часть)	125
Б.3	Свидетельство № 2015620208. База данных для программы численного решения обратных задач для математических моделей тепломассопереноса.....	126

СПИСОК ТАБЛИЦ

4.1	Критерии выбора среды разработки.....	86
A.1	Поля и типы данных таблицы SolveData.....	119
A.2	Поля и типы данных таблицы SolveDataPoint.....	121
A.3	Поля и типы данных таблицы Point	121
A.4	Поля и типы данных таблицы SolveDataBoundCondition	121
A.5	Поля и типы данных таблицы BoundCondition	122
A.6	Поля и типы данных таблицы Bound.....	122
A.7	Поля и типы данных таблицы AreaType	123

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
2. Полежаев В. И., Бунэ А. В., Вerezуб А. Н. Математическое моделирование конвективного тепломассопереноса на основе уравнений Навье-Стокса. М.: Наука, 1987.
3. Bejan B. Convection Heat Transfer. New York: John Wiley and Sons, Inc., 2004.
4. Shigesada N., Kawasaki K., Teramoto E. Spacial segregation of interacting species // J. theor. Biology. 1979. Vol. 79. P. 83–99.
5. Penrose O., Fire P. C. Thermodynamically consistent models of phase-field type for kinetics of phase transitions // Physica D. 1990. Vol. 43. P. 44–62.
6. Sprekels J., Zheng S. Global smooth solutions to a thermodynamically consistent model of phase-field type in higher space dimensions // J. Math. Anal. Appl. 1993. Vol. 176. P. 200–223.
7. Clement P., van Duijn C. J., Li S. On a nonlinear elliptic-parabolic pde systems in a two dimensional ground water flow problem // SIAM J. Appl. Math. 1992. Vol. 23. P. 836–851.
8. Cohen D. S., Cox R. W. A mathematical model for stress-driven diffusion in polymers // J. Polymer Sci., Part B: Polymer Physics. 1989. Vol. 27. P. 589–602.
9. Cohen D. S., White A. B. Jr. Sharp fronts due to diffusion and stress at the glass transition in polymers // J. Polymer Sci., Part B: Polymer Physics. 1989. Vol. 27. P. 1731–1747.
10. Cohen D. S., White A. B. Jr. Sharp fronts due to diffusion and viscoelastic relaxation in polymers // SIAM J. Appl. Math. 1991. Vol. 51. P. 472–483.
11. Pousar I., Micka K., Kimla A. Electrochemical Engineering. Amsterdam: Elsevier, 1986.
12. Newman J. Engineering design of electrochemical systems // Indust. Engineering Chemistry. 1968. Vol. 60. P. 12–27.
13. Amann . Linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems. Teubner, Stuttgart, Leipzig. Texte zur Mathematic. // Function spaces, differential

- operators, and nonlinear analysis. 1993. Vol. 133. P. 9–126.
14. Kabanikhin S. I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications. Boston/Berlin: Walter De Gruyter GmbH Co. KG, 2012.
 15. Kirsch A. An introduction to the mathematical theory of inverse problems. New York: Springer Science Business Media, 2011.
 16. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
 17. Bakushinsky A. B., Kokurin M. Yu. Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems. The Netherlands. Dordrecht: Springer, 2005.
 18. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, 2007.
 19. Beilina L., Klibanov M. V. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems. New York: Springer Science+Business Media, 2012.
 20. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics. New-York: Marcel Dekker, Inc. 1999.
 21. Klibanov M. Carleman estimates for the regularization of ill-posed Cauchy problems. 2014. P. 9–126.
 22. Chung F. J. A partial data result for the magnetic Schrödinger inverse problem // Analysis and PDE. 2014. Vol. 7, No. 1. P. 117–157.
 23. Ames K. A., Straughan B. Non-standard and improperly posed problems. London: Academic Press, 1997.
 24. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
 25. Ramm A. G. Inverse Problems. Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering. Boston: Springer Science, Business Media, Inc., 2005.
 26. Камынин В. Л. Обратная задача определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении на плоскости // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 2. С. 207–216.
 27. Belov Yu. Ya. Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.

28. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type // Math. Studies. Monograph Series. 2003. Vol. 10.
29. Белов Ю. Я., Коршун К. В. Об одной обратной задаче для уравнения типа Бюргерса // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, № 3. С. 28–40.
30. Белов Ю. Я. О задаче идентификации функции источника в системе уравнений составного типа // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2011. Т. 4, № 4. С. 445–457.
31. Фроленков И. В., Романенко Г. В. О представлении решения одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения с начальными данными в виде произведения // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2012. Т. 5, № 1. С. 122–131.
32. Алексеев Г. В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Научный мир, 2010.
33. Алифанов О. М., Артюхов Е. А., Ненароком А. В. Обратные задачи сложного теплообмена. М.: Янус-К, 2009.
34. Alifanov O. M. Inverse heat transfer problems. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.
35. Ozisik M. N., Orlando H. A. B. Inverse heat transfer problems. New-York: Taylor & Francis, 2000.
36. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989.
37. Choulli M., Yamamoto M. Conditional stability in determining a heat source // J. of Inv. and Ill-Posed Problems. 2004. Т. 12, No. 3. С. 233–243.
38. Iskenderov A. D., Akhundov A. Y. Inverse problem for a linear system of a parabolic equations // Doklady Mathematics. 2009. Vol. 79, No. 1. P. 73–75.
39. Badia A. E., Ha-Duong T., Hamdi A. Identification of a point source in a linear advection–dispersion–reaction equation: application to a pollution source problem // Inverse Problems. 2005. Vol. 21. P. 1–17.
40. Yang C. Y. Solving the two-dimensional inverse heat source problem through the linear least-squares error method // Int. J. Heat Mass Transfer. 1998. Vol. 41, No. 2. P. 393–398.
41. Панасенко А. Е., Старченко А. В. Численное решение некоторых обратных задач с различными типами источников атмосферного загрязнения // Томск:

- Вестник ТГУ. 2008. Т. 2. С. 47–55.
42. Cannon J. R. Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data // SIAM J. Numer. Anal. 1968. Т. 5. С. 275–286.
 43. Engl H. W., Scherzer O., Yamamoto M. Uniqueness of forcing terms in linear partial differential equations with overspecified boundary data // Inverse Problems. 1994. Т. 10. С. 1253–1276.
 44. Yamamoto M. Conditional stability in determination of force terms of heat equations in a rectangle // Math.Comput. Modelling. 1993. Т. 18. С. 79–88.
 45. Yamamoto M. Conditional stability in determination of densities of heat sources in a bounded domain // International Series of Numerical Mathematicsvol. 1994. Т. 18. С. 359–370.
 46. Hettlich F., Rundell W. Identification of a discontinuous source in the heat equation // Inverse Problems. 2001. Т. 17. С. 1465–1482.
 47. DuChateau P., Rundell W. Unicity in an inverse problem for an unknown reaction term in a reaction-diffusion-equation // J. Diff. Eqns. 1985. Т. 59. С. 155–164.
 48. Cannon J. R., DuChateau P. Structural identification of an unknown source term in a heat equation // Inverse Problems. 1998. Т. 14. С. 535–551.
 49. Romanov V. G. An inverse problem for an equation of parabolic type // Matematicheskie zametki. 1976. Vol. 19, No. 4. P. 595–600.
 50. Shidfar A., Kavakoli T. An inverse heat conduction problem // South asian bulletin of mathematics. 2002. Vol. 26. P. 503–507.
 51. Борухов В. Т., Вабищевич П. Н. Численное решение обратной задачи восстановления источника в параболическом уравнении // Матем. моделирование. 1998. Т. 10, № 11. С. 93–100.
 52. Afinigenova O. A., Belov Y. Y., Frolenkov I. V. Stabilization of the solution to the identification problem of the source function for one-dimensional parabolic equation // Doklady Mathematics. 2009. Vol. 79, No. 1. P. 70–72.
 53. Фроленков И. В., Кригер Е. Н. О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении // Журнал Сибирского Федерального Университета. Математика и Физика. 2010. Т. 3, № 4. С. 556–564.
 54. Frolenkov I. V., Kriger E. N. An identification problem of coefficient in the special form at source function for multi-dimentional parabolic equation with

- Cauchy data // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2013. Vol. 6, No. 2. P. 186–199.
55. Ismailov M. I., Kanca F. Inverse problem of finding the time-dependent coefficient of heat equation from integral overdetermination condition data // Inverse Problems In Science and Engineering. 2012. Vol. 20. P. 463–476.
56. Ismailov M. I., Kanca F. An inverse coefficient problem for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and overdetermination conditions // Mathematical methods in the applied sciences. 2011. Vol. 34, No. 6. P. 692–702.
57. An inverse time-dependent source problem for the heat equation / A. Hazanee, M. I. Ismailov, D. Lesnic et al. // Applied numerical mathematics. 2013. Vol. 69. P. 13–333.
58. Kuliev M. A. A multidimensional inverse boundary value problem for a linear hyperbolic equation in a bounded domain // Partial differential equations. 2002. Vol. 38, No. 1. P. 98–101.
59. Иванчов Н.И., Пабыривска Н.В. Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43, № 2. С. 406–413.
60. Ivanchov M. I. Inverse problem of simultaneous determination of two coefficients in a parabolic equation // Ukrainian Math. J. 2000. Vol. 52. P. 379–387.
61. Кожанов А. И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени // Ж. Вычисл. Матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. С. 2168–2184.
62. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, № 4. С. 693–716.
63. Баранов С. Н., Белов Ю. Я. О задаче идентификации нескольких коэффициентов многомерного параболического уравнения в случае неоднородных условий переопределения // Дальневосточный математический журнал. 2004. Т. 5, № 1. С. 30–40.
64. A mathematical model of pattern formation by swimming microorganisms / M. Levandowsky, W. Childress, S. Hunter et al. // J. Protozoology. 1975. Vol. 22. P. 296–309.
65. Capatina A., Stavre R. A control problem in biconvective flow // J. Math. Kyoto Univ. 1997. Vol. 37. P. 585–595.

66. Алексеев Г. В., Калинина Е. А. Идентификация младшего коэффициента для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции // Сиб. жур. индустриальной математики. 2007. Т. 10. С. 3–16.
67. Alekseev G. V. Coefficient Inverse Extremum Problems for Stationary Heat and Mass Transfer Equations // Comp. Math. and Math. Phys. 2007. Vol. 47. P. 1007–1028.
68. Babeshko O. M., Evdokimova O. V., Evdokimov S. M. On taking into account the types of sources and settling zones of pollutants // Dokl. Math. 2000. Vol. 61. P. 283–285.
69. Калинина Е. А. Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии // Дальневосточный матем. жур. 2004. Т. 5. С. 89–99.
70. Обратная задача восстановления плотности источника для уравнения конвекции-диффузии / Ю. А. Криксин, С. Н. Плющев, Е. А. Самарская [и др.] // Матем. моделирование. 1995. Т. 7. С. 95–108.
71. Камынин В. Л., Саролди М. Нелинейная обратная задача для параболического уравнения высокого порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38, № 10. С. 1683–1691.
72. Kerimov N. B., Ismailov M. I. Direct and inverse problems for the heat equation with a dynamic type boundary condition. 2013. P. 1–13.
73. Jing L., Youjun X. An inverse coefficient problem with nonlinear parabolic equation // J. Appl. Math. Comput. 2010. Vol. 34. P. 195–206.
74. Kamynin V. L., Franchini E. An inverse problem for a higher-order parabolic equation // Mathematical Notes. 1998. Vol. 64, No. 5. P. 680–691.
75. Kerimov N. B., Ismailov M. I. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012. Vol. 396. P. 546–554.
76. Vasin I. A., Kamynin V. L. On the asymptotic behavior of solutions to inverse problems for parabolic equations // Siberian Mathematical Journal. 1997. Vol. 38. P. 647–662.
77. Tryanin A. P. Determination of heat-transfer coefficients at the inlet into a porous body and inside it by solving the inverse problem // Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal. 1987. Vol. 52. P. 469–475.

78. Dehghan M., Shakeri F. Method of lines solutions of the parabolic inverse problem with an overspecification at a points // Numer Algor. 2009. Vol. 50. P. 417–437.
79. Dehghan M. Numerical computation of a control function in a partial differential equation // Numer. Algor. 2004. Vol. 147. P. 397–408.
80. Pyatkov S. G., Samkov M. L. On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations // Sib. Adv. in Math. 2012. Vol. 22. P. 287–302.
81. Pyatkov S. G. On some classes of inverse problems for parabolic equations // J. Inv. Ill-Posed problems. 2011. Vol. 18. P. 917–934.
82. Кабанихин С. И. Обратная задача теплопереноса. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
83. Пятков С. Г., Сафонов Е. И. Определение функции источников в математических моделях тепломассопереноса // Материалы 52-ой Международной научной студенческой конференции МНСК-2014. Математика. 11 - 18 апреля 2014 г. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т. 2014. С. 97.
84. Пятков С. Г., Сафонов Е. И. Численное моделирование в задачах тепломассопереноса // Тезисы докладов VII международной конференции по математическому моделированию. 30 июня - 4 июля 2014 г. Якутск: ООО "Компания "Дани-Алмас". 2014. С. 162.
85. Пятков С. Г., Сафонов Е. И. Численный метод определения функции источников в параболических уравнениях и системах // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского: материалы международной научной конференции «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций – 2014». 29 сент. - 1 окт. 2014 г. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 2014. Т. 49. С. 272.
86. Сафонов Е. И. Определение функции источников в математических моделях тепломассопереноса // Алгоритмический анализ неустойчивых задач = Algorithmic Analysis of Unstable Problems: тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти В.К. Иванова, Челябинск, 10 - 14 нояб. 2014 г. Юж.-Урал. гос. ун-т (нац. исслед. ун-т); Ин-т математики и механики им Н. Н. Красовского УрО РАН; Урал. федер. ун-т им. первого Президента России Б. Н. Ельцина. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. 2014. С. 141.

87. Пятков С. Г., Сафонов Е. И. О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2014. Т. 7. С. 61–74.
88. Пятков С. Г., Сафонов Е. И. О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений // Сибирские электронные математические известия. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. 2014. Т. 11. С. 777–799.
89. Пятков С. Г., Сафонов Е. И. Об определении функции источника в математических моделях конвекции–диффузии // Математические заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 2. С. 117–130.
90. Pyatkov S. G., Safonov E. I. Some inverse problems for convection-diffusion equations // Bulletin of the south ural state university. Series: «Mathematical modelling, programming & computer software». 2014. Vol. 7, No. 4. P. 36–50.
91. Пятков С. Г., Сафонов Е. И. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014619479. Программа численного решения обратных задач для математических моделей тепломассопереноса. (Серверная часть). Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 17 сентября 2014 г.
92. Пятков С. Г., Сафонов Е. И. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014619058. Программа численного решения обратных задач для математических моделей тепломассопереноса. (Клиентская часть). Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 08 сентября 2014 г.
93. Пятков С. Г., Сафонов Е. И. Свидетельство о государственной регистрации базы данных № 2015620208. База данных для программы численного решения обратных задач для математических моделей тепломассопереноса. Дата государственной регистрации в Реестре баз данных 06 февраля 2015 г.
94. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
95. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
96. Pyatkov S. G., Tsybikov B. N. On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations // J. Evol. Equat. 2011. Vol. 11. P. 155–186.

97. Amann H. Operator-valued Foutier multipliers, vector-valued Besov spaces and applications // Mathem. Nachr. 1997. Vol. 186. P. 5–56.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ОПИСАНИЕ ТАБЛИЦ БАЗЫ ДАННЫХ

Таблица базы данных SolveData содержит в себе информацию обо всех входных и выходных данных для решений пользователей программы численного решения обратных задач для математических моделей тепломассопереноса. Поля и типы данных таблицы базы данных SolveData представлены в таблице (А.1).

Таблица А.1 — Поля и типы данных таблицы SolveData.

Название поля таблицы	Тип данных	Описание поля таблицы базы данных
SolveId (ключевое поле)	int	Уникальный идентификатор полученного решения
DCoef	nvarchar(63)	Коэффициент при производной u_t
CCoef	nvarchar(63)	Коэффициент при $div(\nabla u)$
ACoef	nvarchar(63)	Коэффициент при младшем члене u
B1Coef	nvarchar(63)	Коэффициент при производной u_x
B1Coef	nvarchar(63)	Коэффициент при производной u_y
FCoef	nvarchar(127)	Правая часть уравнения
U_0	nvarchar(127)	Значение функции u в момент времени $t = 0$
U_t	nvarchar(127)	Значение первой производной по времени функции u
AreaTypeId	int	Тип области, 0 – прямоугольник, 1 – эллипс
AreaAProperty	nvarchar(MAX)	В зависимости от типа области либо длина горизонтальной стороны прямоугольника, либо радиус эллипса по горизонтали

Продолжение таблицы А.1.

Название поля таблицы	Тип данных	Описание поля таблицы базы данных
AreaBProperty	nvarchar(MAX)	В зависимости от типа области либо длина вертикальной стороны прямоугольника, либо радиус эллипса по вертикали
Divide	int	Количество разбиений сетки
FinalT	nvarchar(MAX)	Конечный момент времени
NSlice	int	Количество срезов по времени
Iteration	int	Количество итераций, при достижении которого произойдет завершение подсчёта
Error	nvarchar(MAX)	Допустимый уровень разности значений между массивами на двух соседних итерациях
Result	nvarchar(MAX)	Путь к файлу, где хранится файл содержащий трёхмерную модель
UserId	int	Идентификатор пользователя получившего решение
AddTime	datetime	Дата добавления решения
Delta	nvarchar(MAX)	Вводимое возмущение во входные данные

Таблица базы данных SolveDataPoint содержит в себе идентификаторы решения и соответствующие этому решению идентификаторы точек. Поля и типы данных таблицы базы данных SolveDataPoint представлены в таблице (А.2).

Таблица базы данных Point содержит в себе информацию о точках замера, их координатах и функциях в них. Поля и типы данных таблицы базы данных Point представлены в таблице (А.3).

Таблица базы данных SolveDataBoundCondition содержит в себе идентификаторы решения и соответствующие этому решению идентификаторы граничных

Таблица A.2 — Поля и типы данных таблицы SolveDataPoint

Название поля таблицы	Тип данных	Описание поля таблицы базы данных
SolveId	int	Идентификатор решения
PointId	int	Идентификатор точки замера

Таблица A.3 — Поля и типы данных таблицы Point

Название поля таблицы	Тип данных	Описание поля таблицы базы данных
PointId (ключевое поле)	int	Уникальный идентификатор точки замера
X	nvarchar(63)	Координата точки замера по x
Y	nvarchar(63)	Координата точки замера по y
F	nvarchar(63)	Функция в точке замера

условий. Поля и типы данных таблицы базы данных SolveDataBoundCondition представлены в таблице (A.4).

Таблица A.4 — Поля и типы данных таблицы
SolveDataBoundCondition

Название поля таблицы	Тип данных	Описание поля таблицы базы данных
SolveId	int	Идентификатор решения
BoundConditionId	int	Идентификатор граничного условия

Таблица базы данных BoundCondition содержит в себе информацию о граничных условиях для задачи. Поля и типы данных таблицы базы данных BoundCondition представлены в таблице (A.5).

Таблица базы данных Bound содержит в себе информацию о типах граничных условий для задачи. Поля и типы данных таблицы базы данных Bound представлены в таблице (A.6).

Таблица A.5 — Поля и типы данных таблицы BoundCondition

Название поля таблицы	Тип данных	Описание поля таблицы базы данных
BoundConditionId (ключевое поле)	int	Уникальный идентификатор граничного условия
BoundConditionF	nvarchar(31)	Первый показатель для граничного условия
BoundConditionS	nvarchar(31)	Второй показатель для граничного условия
BoundId	int	Идентификатор типа граничного условия

Таблица A.6 — Поля и типы данных таблицы Bound

Название поля таблицы	Тип данных	Описание поля таблицы базы данных
BoundId (ключевое поле)	int	Уникальный идентификатор типа граничного условия
BoundType	nvarchar(31)	Тип граничного условия, N – граничное условие Неймана, D – граничное условие Дирихле

Таблица базы данных AreaType содержит в себе информацию о типе области для задачи. Поля и типы данных таблицы базы данных AreaType представлены в таблице (A.7).

Таблица A.7 — Поля и типы данных таблицы AreaType

Название поля таблицы	Тип данных	Описание поля таблицы базы данных
AreaTypeId (ключевое поле)	int	Уникальный идентификатор типа области
AreaTypeName	nvarchar(31)	Название типа области

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

СВИДЕТЕЛЬСТВА О ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММ ДЛЯ ЭВМ



Рисунок Б.1 — Свидетельство № 2014619058. Программа численного решения обратных задач для математических моделей тепломассопереноса.(Клиентская часть)

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2014619479

Программа численного решения обратных задач для
математических моделей тепломассопереноса. (Серверная
часть)

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего профессионального
образования «Югорский государственный университет» (RU)*

Авторы: *Нятков Сергей Григорьевич (RU),
Сафонов Егор Иванович (RU)*

Заявка № 2014617046

Дата поступления 21 июля 2014 г.

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ 17 сентября 2014 г.

Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности



Л.Л. Кирий

Рисунок Б.2 — Свидетельство № 2014619479. Программа численного решения обратных задач для математических моделей тепломассопереноса.(Серверная часть)

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации базы данных

№ 2015620208

База данных для программы численного решения обратных задач для математических моделей тепломассопереноса

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Югорский государственный университет» (RU)*

Авторы: *Пятков Сергей Григорьевич (RU),
Сафонов Егор Иванович (RU)*



Заявка № 2014621248

Дата поступления 25 сентября 2014 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре баз данных 06 февраля 2015 г.

Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий

Рисунок Б.3 — Свидетельство № 2015620208. База данных для программы численного решения обратных задач для математических моделей тепломассопереноса.