

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого"

На правах рукописи



КОНДЮКОВ АЛЕКСЕЙ ОЛЕГОВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ
НЕСЖИМАЕМЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ В
МАГНИТНОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ**

05.13.18 — МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Сукачева Тамара Геннадьевна

Великий Новгород – 2017

Содержание

Обозначения и соглашения	4
Введение	6
1 Полулинейные математические модели соболевского типа	24
1.1 Элементы функционального анализа в исследовании математических моделей	24
1.2 Задача Коши для полулинейного уравнения соболевского типа .	51
2 Математические модели движения несжимаемых вязкоупругих жидкостей в магнитном поле Земли	56
2.1 Обобщенная модель несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта в магнитном поле Земли	56
2.2 Модель несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка в магнитном поле Земли	64
2.3 Модель несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта нулевого порядка в магнитном поле Земли	72
3 Численное моделирование течения вязкоупругой электропроводной жидкости в магнитном поле Земли	80
3.1 Алгоритм численного исследования течения вязкоупругой электропроводной жидкости в магнитном поле Земли	80
3.2 Описание программы численного решения	88
3.3 Вычислительный эксперимент для математической модели течения вязкоупругой электропроводной жидкости в магнитном поле Земли	92

Заключение	98
Список литературы	100
Приложение	114

Обозначения и соглашения

1. Обозначим заглавными буквами готического алфавита множества, используемые в работе. Для множеств с общепринятыми названиями будем использовать следующие обозначения:

$\mathbb{N}$ – натуральные числа,

$\mathbb{R}$ – действительные числа,

$\mathbb{R}_+ = \{ r \in \mathbb{R} : r > 0 \}$,

$\mathbb{C}$ – комплексные числа.

Для пространств используются обозначения:

$W_p^l(\Omega)$ – соболевские пространства,

$C^{l+\mu}(\Omega)$ – гельдеровские пространства, где Ω – область в $\mathbb{R}^n$,

Обозначим строчными буквами латинского алфавита элементы множеств, в ряде случаев будем использовать строчные буквы греческого алфавита.

2. Обозначим рукописными заглавными буквами латинского алфавита следующие множества операторов:

$\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ – линейные непрерывные операторы, действующие из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{F}$;

$Cl(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ – линейные замкнутые операторы, плотно определенные в $\mathcal{U}$ и действующие в $\mathcal{F}$;

$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ – операторы, имеющие непрерывные производные Фреше произвольного порядка, определенные на $\mathcal{U}$ и действующие в $\mathcal{F}$. Вместо $\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{U})$, $Cl(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ и $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ будем использовать $\mathcal{L}(\mathcal{U})$, $Cl(\mathcal{U})$ и $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ соответственно.

Для обозначения элементов этих множеств будем использовать заглавные буквы латинского алфавита .

Кроме того, используются следующие обозначения:

$\text{dom } A$ – область определения оператора A ,

$\text{im } A$ – образ оператора A ,

$\ker A$ – ядро оператора A ,

$\text{coim } A$ – дополнение к ядру оператора A ,

$\rho(A)$ – резольвентное множество оператора A ,

$\sigma(A)$ – спектр оператора A .

3. Обозначим "нулевой" оператор как O (или цифрой 0), а единичный оператор как I , их области определения поясняются в ходе изложения.

4. Обозначим ■ конец доказательства.

Введение

Актуальность исследования

Математические модели движения несжимаемых вязкоупругих жидкостей в магнитном поле Земли представляет интерес с точки зрения многих научных дисциплин. Такие модели встречаются, в таких областях как магнитогидродинамика и геофизика. Полноценное экспериментальное исследование в этих областях требует значительных затрат, а очень часто и вовсе невозможно. Поэтому большую практическую значимость имеет разработка и реализация численных методов нахождения приближенных решений начально-краевых задач для таких моделей в виде комплексов программ.

Большой класс моделей математической физики основывается на неклассических уравнениях в частных уравнениях, не являющихся разрешенными относительно производной по времени. Нелинейная структура и вырожденность таких моделей вызывает определенные трудности при их изучении и решении соответствующих задач. Поэтому интерес к подобного рода моделям постоянно возрастает.

Диссертационная работа посвящена исследованию одного класса нелинейных математических моделей, основанных на уравнениях, не являющихся разрешенными относительно производной по времени, а именно, моделей движения несжимаемых вязкоупругих жидкостей различных порядков в магнитном поле Земли.

Обобщенная модель несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта в магнитном поле Земли.

Система

$$\begin{aligned}
 (1 - \varkappa \nabla^2) v_t &= \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla) v + \sum_{m=1}^M \sum_{q=0}^{n_{m-1}} A_{m,q} \nabla^2 w_{m,q} - \\
 &\quad - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \times v + \frac{1}{\rho\mu} (\nabla \times b) \times b, \\
 \frac{\partial w_{m,0}}{\partial t} &= v + \alpha_m w_{m,0}, \quad \alpha_m \in \mathbb{R}_-, \quad m = \overline{1, M}, \\
 \frac{\partial w_{m,q}}{\partial t} &= q w_{m,p-1} + \alpha_m w_{m,q}, \quad q = \overline{1, n_m - 1}, \quad \alpha_m < 0, \quad A_{m,q} > 0 \\
 \nabla \cdot v &= 0, \quad \nabla \cdot b = 0, \quad b_t = \delta \nabla^2 b + \nabla \times (v \times b),
 \end{aligned} \tag{0.0.1}$$

моделирует поток несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта высшего порядка K ($K = n_1 + \dots + n_M$) [40] в магнитном поле Земли. Отметим, что вектор-функция $v = (v_1(x, t), v_2(x, t), \dots, v_n(x, t))$ характеризуют скорость жидкости, вектор-функция $b = (b_1(x, t), b_2(x, t), \dots, b_n(x, t))$ — магнитную индукцию, а вектор-функция $p = p(x, t)$ — давление. Поясним используемые в модели параметры: ρ — плотность, Ω — угловая скорость, ν — коэффициент вязкости, δ — магнитная вязкость, μ — магнитная проницаемость, $\varkappa$ — коэффициент упругости. Кроме того, параметры $A_{m,q}$ определяют время ретардации (запаздывания) давления.

Подчеркнем, что ранее в [80] была рассмотрена система уравнений, которая моделирует поток несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта, при коэффициенте упругости равном нулю. В данной работе изучается более общая система, предполагающая различные значения коэффициента $\varkappa$.

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы (0.0.1)

$$\begin{aligned}
v(x, 0) &= v_0(x), \quad w_{m,q}(x, 0) = w_{m,q}^0(x), \\
b(x, 0) &= b_0(x), \quad \forall x \in D, \\
v(x, t) &= 0, \quad w_{m,q}(x, t) = 0, \\
b(x, t) &= 0, \quad \forall (x, t) \in \partial D \times \mathbb{R}_+, \\
m &= \overline{1, M}, \quad q = \overline{0, n_{m-1}}.
\end{aligned} \tag{0.0.2}$$

Здесь область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$, ограничена, имеет бесконечно гладкую границу.

Модель несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка.

При моделировании потока несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка K в магнитном поле Земли используется следующая система уравнений

$$\begin{aligned}
(1 - \varkappa \nabla^2) v_t &= \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla) v + \sum_{l=1}^K \beta_l \nabla^2 w_l - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \times v + \frac{1}{\rho \mu} (\nabla \times b) \times b, \\
\frac{\partial w_l}{\partial t} &= v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \quad \beta_l \in \mathbb{R}_+, \quad l = \overline{1, K}, \\
\nabla \cdot v &= 0, \quad \nabla \cdot b = 0, \quad b_t = \delta \nabla^2 b + \nabla \times (v \times b).
\end{aligned} \tag{0.0.3}$$

Здесь параметры β_l , $l = \overline{1, K}$ – определяют время ретардации давления [40].

Для этой системы рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{aligned}
v(x, 0) &= v_0(x), \quad b(x, 0) = b_0(x), \quad w_l(x, 0) = w_{l0}(x) \quad x \in D, \\
v(x, t) &= 0, \quad b(x, t) = 0, \quad w_l(x, t) = 0 \quad (x, t) \in \partial D \times \mathbb{R}_+, \quad l = \overline{1, K}
\end{aligned} \tag{0.0.4}$$

в предположении, что $\mu = 1$ и $\rho = 1$. Здесь область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$, ограничена, имеет бесконечно гладкую границу.

Модель несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта нулевого порядка в магнитном поле Земли.

При моделировании потока несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта в магнитном поле Земли используется следующая система уравнений

$$\begin{aligned} (1 - \kappa \nabla^2) v_t &= \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla) v - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \times v + \frac{1}{\rho\mu} (\nabla \times b) \times b, \\ \nabla \cdot v &= 0, \quad \nabla \cdot b = 0, \quad b_t = \delta \nabla^2 b + \nabla \times (v \times b) \end{aligned} \quad (0.0.5)$$

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы (0.0.5)

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= v_0(x), \quad b(x, 0) = b_0(x), \quad x \in D, \\ v(x, t) &= 0, \quad b(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial D \times \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (0.0.6)$$

Здесь область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$, ограничена, имеет бесконечно гладкую границу.

Отметим, что изучение математических моделей сред Кельвина-Фойгта было начато А.П. Осколковым, он обобщил систему уравнений Навье-Стокса и для нее доказал теоремы об однозначной разрешимости соответствующих начально-краевых задач.

Будем рассматривать приведенные начально-краевые задачи в рамках задачи Коши

$$u(0) = u_0 \quad (0.0.7)$$

для полулинейного автономного операторно-дифференциального уравнения

$$L\dot{u} = Mu + F(u). \quad (0.0.8)$$

Здесь оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, т.е. является линейным и ограниченным, причем $\ker L \neq \{0\}$; оператор $M : \operatorname{dom} M \rightarrow \mathcal{F}$ является линейным, замкнутым и плотно определенным в $\mathcal{U}$, т.е. $M \in Cl(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, $\mathcal{U}_M = \{u \in \operatorname{dom} M : \|u\| =$

$\|Mu\|_{\mathcal{F}} + \|u\|_{\mathcal{U}}\}$, а оператор $F \in C^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$, где $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ – банаховы пространства.

Уравнение (0.0.8) исследователи называют "уравнением соболевского типа" [10, 30, 41, 47, 85, 87, 96]. Такой термин появился в честь математика С.Л. Соболева, который при моделировании малых колебаний вращающейся жидкости [67] получил и исследовал уравнение

$$\Delta u_{tt} + \omega^2 u_{zz} = 0.$$

Целью работы является исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей в магнитном поле Земли на основе теории полулинейных уравнений соболевского типа с последующей реализацией алгоритмов численного решения в виде комплекса программ.

Для достижения данной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Изучить математические модели несжимаемых вязкоупругих жидкостей в магнитном поле Земли с помощью теории полулинейных уравнений соболевского типа. Получить описание фазового пространства, достаточные условия существования и единственности квазистационарных полутраекторий исследуемых моделей.
2. Разработать алгоритм метода численного решения начальной задачи для модели описывающей течение несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта нулевого порядка в магнитном поле Земли.
3. Реализовать в виде программ для ЭВМ алгоритм разработанного метода и провести вычислительные эксперименты.

Научная новизна

В области математического моделирования:

Впервые исследованы математические модели, возникающие в геофизике и магнитогидродинамике, на основе теории полулинейных уравнений соболевского типа. Создана теоретическая основа для численного исследования изучаемых моделей: доказаны теоремы об однозначной разрешимости, построены и изучены фазовые пространства.

В области численных методов:

На основе конечно-разностных методов впервые разработан алгоритм численного метода, позволяющий находить приближенные решения начально-краевой задачи для изучаемых полулинейных моделей математической физики.

В области комплексов программ:

Разработанный численный метод реализован в виде программы для нахождения приближенного решения задачи Коши для полулинейной математической модели, позволяющий проводить вычислительные эксперименты для модельных и реальных задач

Историография вопроса

Впервые уравнения, не являющиеся разрешенными относительно производной по времени, были отмечены в 1885 г. А. Пуанкаре [92]. Позже, при исследовании ряда проблем гидродинамики, такие уравнения изучались С.В. Озееном, У. Буссинеском, Ф. К. Ж. Одквистом, С. Г. Россби и другими исследователями. Несмотря на многочисленные работы, системное изучение начальных задач для уравнений

$$Li = Mu, \tag{0.0.9}$$

началось в 40-х годах прошлого столетия в работах С.Л. Соболева. Одна-

ко работой, ставшей отправной точкой нового направления, считают статью 1954 года [67]. В ней было представлено уравнение, моделирующее колебания гравитирующей жидкости, и для него были получены результаты по разрешимости задачи Коши. В дальнейшем это направление развили последователи и ученики С. Л. Соболева – С. А. Гальперн [12], Р. А. Александрян [1], Т. И. Зеленьяк [21], А. Г. Костюченко и Г. И. Эскин [30]. В русле этого направления проводились исследования В.Н. Враговым [9], А.И. Кожановым [27, 28] и С.Г. Пятковым [17] и другими.

Отметим работу М.И. Вишика [8], в которой им рассмотрена задача Коши для уравнения (0.0.9), кроме того им разработаны численные методы ее решения. Независимо от него уравнения в частных производных, приводимых к виду (0.0.9) изучались Р. Е. Шоуолтером [95, 94]. Рядом ученых, например И.Г. Петровским [44] и Ж.-Л. Лионсом [34], отмечалось необходимость и важность развития общей теории уравнений вида (0.0.8), (0.0.9) Изучение полулинейных уравнений вида (0.0.8) с различными вырождениями оператора L началось Н.А. Сидоровым и было продолжено его учениками [65, 66]. Кроме того, в этой научной школе были рассмотрены приложения абстрактных результатов.

Изучение разрешимости задачи Коши в абстрактном виде (0.0.9) было начато С.Г. Крейном [31] и его учениками. Ими впервые было отмечено, что такая задача не разрешима при произвольных начальных значениях из $\mathcal{U}$. К этому направлению можно отнести работы И.В. Мельниковой и ее учеников [38, 91].

Отметим, что название "уравнения соболевского типа" для уравнений вида (0.0.8), а также приводимых к нему, в настоящее время стало общеупо-

требуемым [30, 41, 48, 89, 95, 97].

К абстрактной задаче (0.0.7), (0.0.8) редуцируются и начальные задачи для моделей движения вязкоупругих жидкостей. К ним относят такие жидкости, "которые способны к релаксации напряжений при деформировании или проявляют феномен задержанного развития деформации после снятия напряжений"[43]. Тип жидкости определяется по связи тензоров напряжения σ и деформации D . Реологическое соотношение между σ и D имеет вид

$$(1 + \sum_{l=1}^L \lambda_l \frac{\partial^l}{\partial t^l})\sigma = 2\nu(1 + \sum_{m=1}^M \kappa_m \nu^{-1} \frac{\partial^m}{\partial t^m})D - pE,$$

где $\{\lambda_l\}$ $l = 1, \dots, L$ – времена релаксации, а $\{\kappa_m\}$ $m = 1, \dots, M$ – запаздывания, p – давление жидкости.

Отметим, что жидкости Максвелла ($L = 1, M = 0$), Кельвина-Фойгта ($L = 0, M = 1$), Олдройта ($L = M = 1$) относятся к простейшими. Однако, различия между ними существенны, так после прекращения движения в жидкости Максвелла напряжение убывает как $\exp(-t\lambda_1^{-1})$, в жидкости Кельвина-Фойгта скорость деформации, если напряжение снимается, уменьшается как $\exp(-t\kappa_1^{-1})$, а экспоненциальное запаздывание деформаций и релаксирование напряжений наблюдается в жидкости Олдройта.

Если реологическое соотношение подставить в уравнения движения несжимаемой жидкости

$$u_t + (u \cdot \nabla)u = \nabla \sigma + f, \nabla \cdot u = 0$$

то получится система, обобщающая систему уравнений Навье-Стокса.

А.П. Осколковым [40] было проведено исследование разрешимости начально-краевой задачи в цилиндре $\Omega \times (0, T)$ в пространствах Гельдера

и Соболева

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega, u(x, t) = 0, (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T)$$

для уравнения

$$(\lambda - \nabla^2)u_t = \nu \nabla^2 u - \nabla p + f, \nabla \cdot u = 0,$$

ν – положительный параметр, $\lambda > -\lambda_1$ (λ_1 – наименьшее собственное число спектральной задачи $-\nabla^2 v + \nabla p = \lambda v, \nabla \cdot v = 0, v = 0$ на $\partial\Omega$). Им и его учениками [23] построена теория глобальной разрешимости начально-краевых задач для жидкостей Олдройта (в случае $n = 2$) и Кельвина-Фойгта (в случае $n = 3$) на отрезке $[0, \infty]$. Эти исследования легли в основу теории аттракторов и динамических систем.

Для исследования моделей динамики течения жидкостей Кельвина-Фойгта А.П. Осколков предложил применить метод фазового пространства [48, 59]. Полученные этим методом результаты впервые были представлены в [70], [69].

Р.Е. Шоултером в [94] изучались уравнения вида (0.0.8), (0.0.9), в которых оператор L самосопряжен и определен в полугильбертовом пространстве.

Метод построения последовательностей приближенных решений был предложен Г.Е. Демиденко и С.В. Успенским [15]. Ими были изучены различные задачи для уравнения вида

$$L_0(D_s)D_t^l x + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_s)D_t^k x = f(s, t),$$

где $L_0(D_s)$ – квазиэллиптический оператор.

Неотъемлемой составляющей в исследованиях (полу)линейных математических моделей соболевского типа является теория (полу)групп опера-

торов. Она использовалась А. Фавини и А. Яги [86] и при исследовании дифференциальных включений $x_t \in A(x)$, где $A(x)$ – линейный многозначный оператор. В случае (L, σ) –ограниченного оператора M , если бесконечность является устранимой особой точкой, оно сводится к линейному уравнению соболевского типа (0.0.9).

Необходимо отметить результаты, представленные в монографии Н.А. Сидорова, Б.В. Логинова, А.В. Синицина и М.А. Фалалеева[93], она посвящена разработке приложений метода Ляпунова-Шмидта к полулинейным уравнениям соболевского типа и их обобщениям. Ими была доказана однозначная разрешимость задачи Коши для уравнения (0.0.8) в классе непрерывных функций в случае сильно измеримой и интегрируемой по Бохнеру правой частью.

Применение положений теории полугрупп операторов позволило И.В. Мельниковой и А.И. Филенкову[91] получить критерий равномерной корректности типа Хилле-Иосиды и условие, при которых исходное пространство расщепляется в прямую сумму ядра и образа полугруппы.

Краевая нелокальная задача для (0.0.9) в гильбертовом пространстве при самосопряженных (или диссипативных) операторах L, M исследовалась И.Е. Егоровым, С.Г. Пятковым и С.В. Поповым в [17]. Они доказали существование сильного решения этой задачи и показали его гладкость при дополнительных условиях.

Псевдопараболические уравнения (0.0.8) с равномерно непрерывным по Липшицу оператором Вольтерры с условием Коши были исследованы Х. Гаевским, К. Греггером, К. Захариасом [11] на основе метода Галеркина.

Глобальная и локальная разрешимость различных задач для неklas-

сических уравнений математической физики изучалась А.Г. Свешниковым, А.Б. Альшиным, М.О. Корпусовым, Ю. Д. Плетнером [45].

Алгебро-дифференциальным системам вида (0.0.8) с прямоугольной или вырожденной при всех $t \in [0, T]$ матрицей $L(t)$, являющимся конечно-мерным аналогом уравнений соболевского типа, посвящена монография Ю.Е. Бояринцева, В.Ф. Чистякова [4].

Подчеркнем, что отмеченных монографиях внимание объяснению принципиальной неразрешимости задачи (0.0.7), (0.0.8) при произвольных начальных значениях. Впервые это обстоятельство было отмечено в [84, 90], затем Г.А. Свиридюк и Т.Г. Сукачева [48, 59] предложили объяснение этого факта, применяя разработанный ими метод фазового пространства. Данный метод был использован в качестве основного в исследованиях Т.А. Бокаревой [2], Л.Л. Дудко [16], А.В. Келлер [25], В.Е. Федорова [76], А.А. Ефремова [18], Г.А. Кузнецова [32]. Их результаты стали основой как выхода монографии Г.А. Свиридюка и В.Е. Федорова [97], так и разработки прикладных исследований, в том числе и численных [5], [6]. Кроме того исследования математических моделей различных объектов и процессов на основе метода фазового пространства проведены в докторских диссертациях Т.Г. Сукачевой [69], А.В. Келлер [26], С.А. Загребинной [19], А.А. Замышляевой [20], Н.А. Манаковой [35].

В докторской диссертации В.Е. Федорова [77] теория вырожденных (полу)групп операторов изучена в случае локально выпуклых пространств [79, 75, 78].

Фазовые пространства (полу)линейных уравнений соболевского типа начали изучаться Г.А. Свиридюком [54] в 1986 году. В [62] для уравнения

Осколкова

$$(1 - \chi \nabla^2) \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \nabla^4 \psi - \frac{\partial(\psi, \nabla \psi)}{\partial x_1, x_2} + g.$$

построено фазовое пространство и доказана его простота.

М.М. Якуповым [82] была исследована модель плоскопараллельной термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости, описываемой гибридом уравнений Осколкова и теплопроводности в приближении Обербека–Буссинеска. Работы [58] и [60, 61] развили результаты [62].

В настоящее время теория относительно p –секториальных (σ –ограниченных) операторов и соответствующих им полугрупп (групп) операторов с ядрами активно используется в исследовании математических моделей в различных предметных областях.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертационного исследования носят как теоретический, так и практический характер. В рамках теоретической значимости впервые проведено описание фазового пространства начальной задачи для различных моделей (нулевого, ненулевого и высшего порядков) динамики несжимаемых вязкоупругих жидкостей в магнитном поле Земли. Диссертационная работа вносит вклад в теорию нелинейных уравнений соболевского типа. Получены необходимые и достаточные условия существования единственного решения для задач Коши–Дирихле для исследуемых моделей.

В рамках практической значимости построен численный метод решения начально-краевой задачи вязкоупругой электропроводной жидкости в магнитном поле Земли. Разработанный алгоритм численного метода реализован в виде программы, с помощью которой были проведены вычислительные эксперименты. В основной программе предусмотрены блоки ввода исходных

данных, расчета необходимых параметров процесса и вывода результатов расчета, как в виде таблиц, так и в виде графических отображений. Результаты, полученные при исследовании данных математических моделей, могут быть полезны в геофизике и магнитогидродинамике.

Методы исследования

В диссертационной работе проведены исследования для математических моделей, описывающих движение несжимаемых вязкоупругих жидкостей в магнитном поле Земли. В первую очередь исследуется вопрос существования и единственности задачи Коши-Дирихле для математических моделей (0.0.1), (0.0.2); (0.0.3), (0.0.4); (0.0.5), (0.0.6). Данные модели редуцируются к задаче Коши (0.0.7) для полулинейного уравнения соболевского типа (0.0.8). Для рассмотрения вопроса разрешимости математических моделей существенную роль играет выбор функциональных пространств, в которых решается конкретная задача.

В качестве основных методов исследования использованы: "метод фазового пространства методы теорий относительно p -секториальных операторов, аналитических полугрупп операторов, дифференцируемых банаховых многообразий, а также другие методы (не)линейного функционального анализа. Суть "метода фазового пространства" состоит в редукции автономного уравнения (0.0.8) к невырожденному уравнению $\dot{u} = B(u)$ на некотором многообразии, которое вложено в $\mathcal{U}$ и представляет собой фазовое пространство исходного уравнения.

Поскольку диссертация кроме исследования разрешимости задачи Коши-Дирихле содержит алгоритмы численных методов решения, здесь необходимо упомянуть метод Рунге-Кутты, а также конечно-разностный метод, позволяющий применить алгоритмы к требуемым задачам.

Краткое изложение содержания диссертации

Диссертационная работа, кроме введения, заключения, приложения и списка литературы, содержит три главы. Список литературы включает 112

наименований работ, как отечественных, так и зарубежных авторов, составляющих информационную базу диссертации.

Во введении определяется цель исследования, обосновывается актуальность темы диссертации, теоретическая и практическая значимость, приводится историография и методология по направлению исследования.

Первая глава состоит из двух параграфов. Она посвящена исследованию полулинейных математических моделей соболевского типа и носит вспомогательный характер. Первый параграф содержит вспомогательные сведения, с опорой на которые получены основные результаты работы. Приводятся некоторые определения, теоремы и леммы функционального анализа, основные элементы из теории замкнутых относительно σ -ограниченных и относительно p -секториальных операторов. Во втором параграфе приводятся результаты о разрешимости полулинейного уравнения соболевского типа с условием Коши. Вводятся понятия решения для уравнения соболевского типа, квазистационарной полутраектории, фазового пространства. Приводятся теоремы, устанавливающие необходимые и достаточные условия существования единственного решения, которое является квазистационарной полутраекторией.

Вторая глава посвящена исследованию математических моделей движения несжимаемых жидкостей в магнитном поле Земли и состоит из трех параграфов. В первом параграфе рассматривается обобщенная модель несжимаемой вязкоупругой жидкости в магнитном поле Земли. Устанавливается локальная однозначная разрешимость начально-краевой задачи с помощью редукции к полулинейному автономному уравнению соболевского типа с условием Коши. Во втором параграфе рассматривается модель несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка в магнитном поле Земли.

Описано фазовое пространство задачи Коши-Дирихле. Доказывается теорема существования и единственного решения указанной задачи, являющегося квазистационарной полутраекторией. В третьем параграфе рассматривается модель несжимаемой вязкоупругой жидкости нулевого порядка в магнитном поле Земли. С помощью теории полулинейных уравнений соболевского типа доказывается теорема существования и единственности решения. Рассматривается задача Коши-Дирихле как конкретная интерпретация для абстрактной задачи Коши для полулинейного автономного уравнения соболевского типа.

Третья глава состоит из четырех параграфов и посвящена численному исследованию течения вязкоупругой электропроводной жидкости в магнитном поле Земли. В первом параграфе проводится редукция модели Кельвина – Фойгта нулевого порядка к задаче Коши для системы ОДУ. Второй параграф посвящен описанию алгоритма программы для численного исследования математической модели течения вязкоупругой электропроводной жидкости в магнитном поле Земли. Третий параграф посвящен описанию программы численного решения. Описывается функциональное назначение и логическая структура программы. В четвертом параграфе приведены результаты вычислительного эксперимента.

В заключении представлены выводы по результатам исследований и обосновывается соответствие диссертационной работы паспорту специальности 05.13.18.

Аппробация работы

Результаты апробированы на конференциях: на международной конференции «Математика и информационные технологии в нефтегазовом ком-

плексе», посвященная дню рождения великого русского математика академика П.Л. Чебышева. (Сургут, 2014, 2016), на IV Международной школе-семинаре «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». (Иркутск, 2014), на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам.(Суздаль, 2014), на XV Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике. (Сочи. Дагомыс. 2014, 2015), на Международном симпозиуме «Вырожденные полугруппы и пропагаторы уравнений соболевского типа» (СимВП -2014). (Челябинск, 2014), на всероссийской конференции с международным участием “Алгоритмический анализ неустойчивых задач” , посвященной памяти В.К. Иванова. (Челябинск, 2014), на всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова (Ижевск, 2015), на XVI Всероссийском Симпозиуме по прикладной и промышленной математике, летняя сессия, (Челябинск,2015), на III всероссийской научно-практической конференции "Южно-Уральская молодежная школа по математическому моделированию"(Челябинск, 2016), на XXIX международной научной конференции "Математические методы в технике и технологиях"(Санкт-Петербург, 2016), результаты докладывались и обсуждались на семинаре профессора Е.Ю. Панова в Новгородском государственном университете имени Ярослава Мудрого. Также результаты докладывались на областном семинаре Г.А. Свиридюка "Уравнения соболевского типа"в Южно-Уральском государственном университете (национальном исследовательском университете) в г. Челябинске.

Работа поддержана Министерством Образования и Науки Российской Федерации (государственное задание 1.857.2014/К).

Благодарности

Автор считает приятным долгом выразить благодарность своему научному руководителю, Тамаре Геннадьевне Сукачевой, за участие и неоценимую помощь в подготовке работы; Георгию Анатольевичу Свиридюку за предоставленную возможность прикоснуться к науке; своей семье за поддержку, терпение и время.

1. Полулинейные математические модели соболевского типа

1.1. Элементы функционального анализа в исследовании математических моделей

Замкнутые относительно σ -ограниченные операторы

Рассмотрим банаховы пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$. Пусть оператор $L : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$ линейный и непрерывный, а оператор $M : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$ линейный, замкнутый и плотно определенный в $\mathcal{U}$.

Множество $\rho^L(M) = \{ \mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U}) \}$ назовем L -резольвентным множеством, а множество $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ L -спектром оператора M .

Заметим, что если $L = I$, пространство $\mathcal{F} = \mathcal{U}$, L -резольвентное множество и L -спектр оператора M будут соответственно резольвентным множеством и спектром оператора M .

Лемма 1.1.1. *Множество $\rho^L(M)$ открыто.*

Следствие 1.1.1. *Множество $\sigma^L(M)$ замкнуто.*

Определение 1.1.1. L -резольвентой оператора M называется оператор-функция $(\mu L - M)^{-1}$. Правой (левой) L -резольвентой оператора M называется оператор-функция $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ ($L_\mu^L(M) = L (\mu L - M)^{-1}$).

Операторы $R_\mu^L(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $L_\mu^L(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ по построению.

Пусть точка $\mu \in \rho^L(M)$. Тогда из тривиальных тождеств

$$\begin{aligned} (\lambda L - M)(\mu L - M)^{-1} &= I + (\lambda - \mu) L_\mu^L(M), \\ (\mu L - M)^{-1}(\lambda L - M) &= I + (\lambda - \mu) R_\mu^L(M), \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

(а далее будет полезен и частный случай при $\lambda = 0$)

$$\begin{aligned} M(\mu L - M)^{-1} &= \mu L_\mu^L(M) - I, \\ (\mu L - M)^{-1}M &= \mu R_\mu^L(M) - I, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

следует резольвентное тождество, аналогичное *тождеству Гильберта*

$$(\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu L - M)^{-1} L (\lambda L - M)^{-1}. \quad (1.1.3)$$

Из 1.1.3 нетрудно получить *правое*

$$R_\lambda^L(M) - R_\mu^L(M) = (\mu - \lambda) R_\mu^L(M) R_\lambda^L(M) \quad (1.1.4)$$

и *левое*

$$L_\lambda^L(M) - L_\mu^L(M) = (\mu - \lambda) L_\mu^L(M) L_\lambda^L(M) \quad (1.1.5)$$

L-резольвентные тождества.

Замечание 1.1.1. Из (1.1.4) и (1.1.5) непосредственно следует, что правые и левые *L-резольвенты* оператора *M* коммутируют.

Теорема 1.1.1. Все *L-резольвенты* оператора *M* аналитичны на множестве $\rho^L(M)$.

Замечание 1.1.2. В случае $L = I$, $\mathcal{U} = \mathcal{F}$ операторы $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L(M)$, $L_\mu^L(M)$ совпадают с $R_\mu(M)$, где $R_\mu(M)$ — резольвента оператора *M*. Таким образом теорема 1.1.1 обобщает известный результат об аналитичности резольвенты замкнутого оператора.

Определение 1.1.2. Если $\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M))$, то оператор M будем называть спектрально ограниченным относительно оператора L (или (L, σ) -ограниченным).

В случае, когда $L = I$, а оператор $M \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, то по теореме об ограниченности спектра ограниченного оператора, оператор M будет (L, σ) -ограничен. Но также следует заметить, что понятие относительной σ -ограниченности охватывает более широкий класс операторов.

Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Рассмотрим контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$, а также операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\mu}^L(M) d\mu. \quad (1.1.6)$$

Лемма 1.1.2. Если оператор M (L, σ) -ограничен, тогда операторы $P : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ и $Q : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ — проекторы.

Проекторы (1.1.6) расщепляют пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ следующим образом: $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$; $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$, где

$$\mathcal{U}^0 = \ker P; \quad \mathcal{U}^1 = \operatorname{im} P; \quad \mathcal{F}^0 = \ker Q; \quad \mathcal{F}^1 = \operatorname{im} Q.$$

Пусть L_k — сужение L на $\mathcal{U}^k$, а M_k — сужение M на $\operatorname{dom} M \cap \mathcal{U}^k$, где $k = 0, 1$.

Теорема 1.1.2. Пусть оператор M (L, σ) -ограниченный. Тогда

- (i) $L_k : \mathcal{U}^k \rightarrow \mathcal{F}^k$, $M_k : (\operatorname{dom} M \cap \mathcal{U}^k) \rightarrow \mathcal{F}^k$, $k = 0, 1$;
- (ii) существует линейный непрерывный оператор $M_0^{-1} : \mathcal{F}^0 \rightarrow \mathcal{U}^0$;
- (iii) существует линейный непрерывный оператор $L_1^{-1} : \mathcal{F}^1 \rightarrow \mathcal{U}^1$;
- (iv) оператор $M_1 : \mathcal{U}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ также линеен и непрерывен.

Из теоремы 1.1.2 следует, что пары $(\mathcal{U}^k, \mathcal{F}^k)$, $k = 0, 1$ подпространств можно называть парами инвариантных пространств операторов L и M .

условия теоремы 1.1.2 справедливы, то существуют операторы

$$R = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0) \text{ и } S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1).$$

Теорема 1.1.3. *В случае, когда оператор M (L, σ) -ограничен, $\sigma(R) = \{0\}$, а $\sigma(S) = \sigma^L(M)$.*

Следствие 1.1.2. *Если оператор M (L, σ) -ограничен, тогда L -резольвенту оператора M в области $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > a\}$ можно разложить в ряд Лорана*

$$(\mu L - M)^{-1} = - \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k R^k M_0^{-1}(I - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q.$$

Определение 1.1.3. *Точка ∞ называется устранимой особой точкой, при $R \equiv O$; полюсом порядка p , при $R^p \neq O$, $R^{p+1} \equiv O$; существенно особой точкой, при $R^q \neq O$ для $\forall q \in \mathbb{N}$.*

Далее случаи устранимой особой точки и полюса порядка p будем объединять в случай "несущественно особой точки".

Собственным вектором оператора L называется вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$. *Цепочкой M -присоединенных* векторов собственного вектора φ_0 называется упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset \mathcal{U}$, если

$$L\varphi_{q+1} = M\varphi_q, \quad q = 0, 1, \dots, \quad \varphi_q \notin \ker L \setminus \{0\}.$$

Цепочка может быть как конечной, так и бесконечной. В случае, когда будет существовать такой M -присоединенный вектор φ_p , что или $\varphi_p \notin \text{dom } M$,

или $M\varphi_p \notin \text{im } L$ цепочка обязательно будет конечной. Если $\varphi_0 \in \ker M$, то цепочка будет состоять из нулей. А если либо $\varphi_0 \notin \text{dom } M$, либо $M\varphi_0 \notin \text{im } L$, тогда собственный вектор φ_0 не будет иметь M -присоединенных векторов.

Длиной цепочки будем называть ее мощность. В частности цепочка может иметь бесконечную длину.

M -корневой линеал — это линейная оболочка всех собственных и M -присоединенных векторов оператора L . M -корневое пространство оператора L — это замкнутый M -корневой линеал.

Замечание 1.1.3. При $M^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$ очевидна аналогия с общепринятой терминологией [13, 14].

Лемма 1.1.3. Если φ_p — M -присоединенный вектор собственного вектора φ_0 , а точка $\mu \in \rho^L(M)$, то справедливо равенство

$$-R_\mu^L(M)\varphi_p = \varphi_{p-1} + \mu\varphi_{p-2} + \cdots + \mu^{p-1}\varphi_0 .$$

Теорема 1.1.4. Пусть оператор M (L, σ) -ограниченный, и пусть точка ∞

(i) является существенно особой точкой L -резольвенты оператора M . Тогда M -корневой линеал оператора L содержится в пространстве $\mathcal{U}^0$;

(ii) является полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$ L -резольвенты оператора M . Тогда M -корневое пространство оператора L совпадает с пространством $\mathcal{U}^0$, а длина любой цепочки M -присоединенных векторов любого собственного вектора оператора L превысит p ;

(iii) является устранимой особой точкой L -резольвенты оператора M . Тогда $\ker L = \mathcal{U}^0$, $\text{im } L = \mathcal{F}^1$, и любой собственный вектор оператора

L не будет иметь ни одного M -присоединенного вектора.

Теорема 1.1.5. Если оператор M (L, σ) -ограничен, и

$$(i) \operatorname{dom} M = \mathcal{U}, \text{ тогда } M[\mathcal{U}^0] = \mathcal{F}^0;$$

(ii) $\mathcal{U}^2 = \mathcal{U} \ominus \mathcal{U}^0$ — некоторое алгебраическое и топологическое дополнение к $\mathcal{U}^0$, тогда $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus L[\mathcal{U}^2]$.

Лемма 1.1.4. Пусть точки $\lambda, \mu \in \rho^L(M)$. Тогда

$$(i) \operatorname{im} R_\lambda^L(M) = \operatorname{im} R_\mu^L(M), \quad \operatorname{im} L_\lambda^L(M) = \operatorname{im} L_\mu^L(M); \quad (1.1.7)$$

$$(ii) \ker R_\lambda^L(M) = \ker L, \quad \ker L_\lambda^L(M) = \{M\varphi : \varphi \in \operatorname{dom} M \cap \ker L\}. \quad (1.1.8)$$

Замечание 1.1.4. Пусть $\{\varphi_0^1, \varphi_0^2, \dots, \varphi_0^k\}$ — набор линейно независимых собственных векторов оператора L . Пусть $\{\varphi_1^l, \varphi_2^l, \dots, \varphi_{p_k}^l\}$ — цепочка M -присоединенных векторов собственного вектора φ_0^l , $l = 1, 2, \dots, k$. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда множество

$$\{\varphi_0^1, \varphi_1^1, \dots, \varphi_{p_1}^1; \varphi_0^2, \varphi_1^2, \dots, \varphi_{p_2}^2; \dots; \varphi_0^k, \varphi_1^k, \dots, \varphi_{p_k}^k\}$$

состоит из линейно независимых векторов. Покажем это. Если предположить противное, то будут существовать константы a_q^l , $l = 1, 2, \dots, k$, $q = 0, 1, \dots, p$, для которых

$$\sum_{l=1}^k \sum_{q=0}^{p_k} |a_q^l| > 0, \quad \sum_{l=1}^k \sum_{q=0}^{p_k} a_q^l \varphi_q^l = 0.$$

Тогда

$$0 = R^{p_k} \left(\sum_{l=1}^k \sum_{q=0}^{p_k} a_q^l \varphi_q^l \right) = \sum_{l=1}^k a_{p_k}^l \varphi_0^l = 0.$$

Отсюда $a_{p_k}^l = 0$, $l = 1, 2, \dots, k$. Значит,

$$0 = R^{p_{k-1}} \left(\sum_{l=1}^k \sum_{q=0}^{p_{k-1}} a_q^l \varphi_q^l \right) = \sum_{l=1}^k a_{p_{k-1}}^l \varphi_0^l = 0,$$

т.е. $a_{p_{k-1}}^l = 0$, $l = 1, 2, \dots, k$. Продолжая эту процедуру, мы получим противоречие. Отсюда также следует, что собственный вектор φ_0 , а также все его M -присоединенные векторы, входящие в какую-нибудь одну цепочку, будут линейно независимыми.

По теореме 1.1.4 (iii) образ $\text{im } L$ и ядро $\ker L$ оператора L можно дополнить в пространствах $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ соответственно. Такие операторы предложено называть [3] *бирасщепляющими*.

Теорема 1.1.6. Пусть оператор $M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ σ -ограничен, а оператор L бирасщепляющий, тогда любой собственный вектор оператора L имеет конечную цепочку M -присоединенных векторов.

Замечание 1.1.5. Теорема 1.1.6 обобщает и уточняет лемму 30.1 из [7].

Аналитические группы разрешающих операторов с ядрами

Пусть пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ банаховы, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$. Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда уравнение (0.0.9) редуцируется эквивалентным ему уравнениям

$$R^L \alpha(M) \dot{u} = (\alpha L - M)^{-1} M u, \quad (1.1.9)$$

$$L^L \alpha(M) \dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1} f, \quad (1.1.10)$$

где $\alpha \in \rho^L(M)$. Учитывая, что операторы $(\alpha L - M)^{-1} M = (\alpha L - M)^{-1} \alpha L - I$ и $M(\alpha L - M)^{-1} = \alpha L(\alpha L - M)^{-1} - I$ непрерывные, а уравнения (1.1.9) и

(1.1.10) задаются на пространствах $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ соответственно, мы можем рассматривать их как конкретные интерпретации уравнения

$$A\dot{v} = Bv. \quad (1.1.11)$$

Здесь операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, а $\mathcal{V}$ — банахово пространство.

Решение уравнения (1.1.11) — это вектор-функция $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{V})$, которая удовлетворяет этому уравнению.

Определение 1.1.4. *Разрешающей группой уравнения (1.1.11) называется отображение $V^\bullet \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathcal{V}))$, если*

$$(i) V^s V^t = V^{s+t}, \quad \forall s, t \in \mathbb{R};$$

(ii) для любого $v_0 \in \mathcal{V}$ вектор-функция $v(t) = V^t v_0$ является решением уравнения (1.1.11).

Будем отождествлять группу с ее графиком $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$. Группа $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$ называется *аналитической*, если она имеет аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость, причем сохраняются свойства (i) и (ii) определения 1.1.4.

Теорема 1.1.7. *В случае, когда оператор M (L, σ) -ограничен, существуют аналитические разрешающие группы уравнений (1.1.9) и (1.1.10).*

Легко проверить, что отображение

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.1.12)$$

это аналитическая разрешающая группа уравнения (1.1.9), а

$$F^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.1.13)$$

аналитическая разрешающая группа уравнения (1.1.10).

Замечание 1.1.6. *Единицы разрешающих групп $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ и $\{F^t : t \in \mathbb{R}\}$ — это проекторы P и Q соответственно. Следовательно*

$$U^t = U^t P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\mu L_1 - M_1)^{-1} L_1 P e^{\mu t} d\mu = \exp(tS)P,$$

где оператор $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$ в силу теоремы (1.1.2). Аналогично,

$$F^t = F^t Q = \exp(tT)Q,$$

где $T = M_1 L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1)$.

Определение 1.1.5. *Ядром аналитической группы $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$ называется множество*

$$\ker V^\bullet = \{v \in \mathcal{V} : V^t v = 0 \quad \exists t \in \mathbb{R}\},$$

а множество

$$\operatorname{im} V^\bullet = \{v \in \mathcal{V} : v = V^0 v\}$$

называется ее образом.

Легко показать, что $\ker V^\bullet = \ker V^t$, $\operatorname{im} V^\bullet = \operatorname{im} V^t \quad \forall t \in \mathbb{R}$, поэтому определение (1.1.5) корректно.

Ввиду замечания (1.1.6) справедливо

Следствие 1.1.3. *В условиях теоремы (1.1.7)*

$$\ker U^\bullet = \mathcal{U}^0, \quad \operatorname{im} U^\bullet = \mathcal{U}^1; \quad \ker F^\bullet = \mathcal{F}^0, \quad \operatorname{im} F^\bullet = \mathcal{F}^1.$$

Снова рассмотрим уравнение (1.1.11).

Определение 1.1.6. *фазовое пространство уравнения (1.1.11) — это множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$, удовлетворяющее условиям:*

(i) *каждое решение $v = v(t)$ уравнения (1.1.11) содержится в $\mathcal{B}$, то есть*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad v(t) \in \mathcal{B};$$

(ii) *для любого $v_0 \in \mathcal{B}$ существует единственное решение $v \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{V})$ задачи Коши $v(0) = v_0$ для уравнения (1.1.11).*

Замечание 1.1.7. *Если фазовое пространство существует, то оно единственно.*

Замечание 1.1.8. *В случае существования оператора $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, фазовым пространством уравнения (1.1.11) является пространство $\mathcal{V}$.*

Теорема 1.1.8. *Пусть оператор M (L, σ) -ограниченный, кроме того ∞ — устранимая особая точка или полюс порядка $p \in \mathbb{N}$ L -резольвенты оператора M , тогда фазовое пространство уравнения (1.1.9) (уравнения (1.1.10)) и образ разрешающей группы (1.1.12) (разрешающей группы (1.1.13)) совпадают.*

Замечание 1.1.9. *В случае, когда оператор M (L, σ) -ограничен, а его L -резольвента в точке ∞ имеет полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, мы будем говорить, что оператор M (L, p) -ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.*

Замечание 1.1.10. *В.Е. Федоров [76] показал, что теорема (1.1.8) справедлива также в случае существенно особой точки, при выполнении дополнительных условий на решения уравнений (1.1.9), (1.1.10) и на нормы операторов R^q , $q \in \mathbb{N}$.*

Условия существования фазовых пространств

В приложениях не всегда бывает удобным нахождение L -спектра оператора M , а также исследование характера бесконечно удаленной точки. Поэтому приведем условия на операторы L и M , необходимые и достаточные для того, чтобы фазовые пространства существовали. Для простоты изложения, рассмотрим случай $M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$.

Сформулируем необходимые условия (L, σ) -ограниченности оператора M , когда ∞ — несущественная особая точка L -резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M .

(A1) Длина любой цепочки M -присоединенных векторов любого собственного вектора оператора L не превышает $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

(A2) M -корневое подпространство $\mathcal{U}^0$ оператора L — дополняемое подпространство пространства $\mathcal{U}$.

Пусть $\mathcal{U}^2 = \mathcal{U} \ominus \mathcal{U}^0$ некоторое алгебраическое и топологическое дополнение к $\mathcal{U}^0$. Положим $M[\mathcal{U}^0] = \mathcal{F}^0$, $L[\mathcal{U}^2] = \mathcal{F}^2$.

(A3) $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^2$.

Пусть M_0 — сужение оператора M на $\mathcal{U}^0$.

(A4) Существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$.

Пусть L_0 — сужение оператора L на $\mathcal{U}^0$. Оператор $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$ по построению. Положим $R = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$.

Лемма 1.1.5. Пусть условия (A1) — (A4) выполнены. Тогда оператор R нильпотентен, причем степень его нильпотентности не превосходит p .

Пусть $L_2 (M_2)$ — сужение оператора $L (M)$ на подпространство $\mathcal{U}^2$, а $P_2 (Q_2)$ — проектор вдоль $\mathcal{U}^0 (\mathcal{F}^0)$ на $\mathcal{U}^2 (\mathcal{F}^2)$. По теореме Банаха существует оператор $L_2^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2; \mathcal{U}^2)$. Рассмотрим оператор T — сужение

оператора $M_0^{-1}(I - Q_2)M$ на $\mathcal{U}^2$, и оператор S_2 — сужение оператора $L_2^{-1}Q_2M$ на $\mathcal{U}^2$. Нетрудно показать, что $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^2; \mathcal{U}^0)$, а $S_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^2)$. Введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{U}^1 = \{ u \in \mathcal{U} : u = (I - G)u^2, u^2 \in \mathcal{U}^2 \}.$$

Здесь оператор

$$G = \sum_{q=0}^p R^q T S_2^q \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^2; \mathcal{U}^0). \quad (1.1.14)$$

Лемма 1.1.6. *Если выполнены условия (A1) — (A4), то $\mathcal{U}^1$ — подпространство в $\mathcal{U}$, дополнительное к $\mathcal{U}^0$.*

Пусть $\mathcal{F}^1 = L[\mathcal{U}^1]$.

Лемма 1.1.7. *Если выполнены условия (A1) — (A4), то $\mathcal{F}^1$ — подпространство в $\mathcal{F}$, дополнительное к $\mathcal{F}^0$.*

Пусть $L_1(M_1)$ — сужение оператора $L(M)$ на $\mathcal{U}^1$. Очевидно, оператор $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{F}^1)$, а по теореме Банаха оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$ существует.

Лемма 1.1.8. *Если выполнены условия (A1) — (A4), то оператор $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{F}^1)$.*

Пусть S — сужение оператора $L_1^{-1}M_1P$ на $\mathcal{U}^1$. Оператор $S \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$, а значит,

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho(S)),$$

где $\rho(S)$ — резольвентное множество оператора S .

Теорема 1.1.9. *Если выполнены условия (A1) — (A4), то оператор M (L, p) -ограничен.*

Пусть $P_2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^2 (Q_2 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^2)$ — проектор вдоль $\mathcal{U}^0(\mathcal{F}^0)$. Тогда уравнение (0.9) редуцируется к системе

$$R\dot{u}^0 = u^0 + Tu^2, \quad \dot{u}^2 = S_2u^2, \quad (1.1.15)$$

где R , T и S_2 — сужения операторов $M_0^{-1}(I - Q_2)L$, $M_0^{-1}(I - Q_2)M$ и $L_2^{-1}Q_2M$ на подпространства $\mathcal{U}^0$, $\mathcal{U}^2$ и $\mathcal{U}^2$ соответственно, а L_2 — сужение оператора L на подпространство $\mathcal{U}^2$ (по теореме Банаха операторы $L_2^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2; \mathcal{U}^2)$ существуют). Следует отметить, что операторы $R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^2; \mathcal{U}^0)$, $S_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^2)$ по построению, причем оператор R нильпотентен, со степенью нильпотентности, не более p из условия (A1).

Теорема 1.1.10. *Если выполнены условия (A1) — (A4), то*

- (i) *множество $\mathcal{U}^1$ — фазовое пространство уравнения (0.5);*
- (ii) *множество $\mathcal{U}^1$ — подпространство в $\mathcal{U}$ топлогично изоморфно подпространству $\mathcal{U}^2$, кроме того $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$;*
- (iii) *$(\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}^2) \iff (T \equiv O)$.*

Замечание 1.1.11. *Произвольный выбор подпространства $\mathcal{U}^2$ несуществен, поскольку фазовое пространство единственно.*

Замечание 1.1.12. *Теоремы 1.1.9, 1.1.2 и 1.1.4 устанавливают необходимость и достаточность условий (A1) — (A4) для (L, σ) -ограниченности оператора $M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, когда ∞ — несущественная особая точка L -резольвенты оператора M .*

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1.1.1. Случай, когда оператор L бирастепляющий.

Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ — бирастепляющий, а $M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$. Рассмотрим условие

(B1) Длина любой цепочки M -присоединенных векторов у любого собственного вектора оператора L равна $p \in \mathbb{N}$.

Через $\text{coim } L = \mathcal{U} \ominus \ker L$ обозначим некоторое алгебраическое и топологическое дополнение к ядру $\ker L$. Кроме того, $\tilde{L}$ — сужение оператора L на $\text{coim } L$. По теореме Банаха существует оператор $\tilde{L}^{-1} \in \mathcal{L}(\text{im } L; \text{coim } L)$. Пусть выполнено (B1). Тогда существуют линеалы

$$\mathcal{U}^{0q} = \tilde{L}^{-1} M[\mathcal{U}^{0q-1}], \quad \mathcal{U}^{00} = \ker L, \quad q = 1, 2, \dots, p.$$

Нетрудно показать, что $M[\mathcal{U}^{0p}] \cap \text{im } L = \{0\}$.

Также введем в рассмотрение условие

$$(B2) \quad M[\mathcal{U}^{0p}] \oplus \text{im } L = \mathcal{F}.$$

Пусть справедливы условия (B1) и (B2). Обозначим $P_0(Q_p)$ — проектор вдоль $\text{coim } L(\text{im } L)$ на $\mathcal{U}^{00}(\mathcal{F}^{0p})$, где $\mathcal{F}^{0p} = M[\mathcal{U}^{0p}]$. Пусть $Q^p = I - Q_p$. Рассмотрим оператор $A = \tilde{L}^{-1} Q^p M$. Следует заметить, что

$$A[\mathcal{U}^{0q}] = \mathcal{U}^{0q+1}, \quad q = 0, 1, \dots, p, \quad A[\mathcal{U}^{0p}] = \{0\}.$$

Таким образом,

$$A^q[\mathcal{U}^{0r}] = \begin{cases} \{0\}, & q + r > p, \\ \mathcal{U}^{0q+r}, & q + r \leq p. \end{cases} \quad (1.1.16)$$

Рассмотрим оператор $D = Q_p M A^p : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}^{0p}$. По построению $D[\mathcal{U}^{00}] = \mathcal{F}^{0p}$ и $D \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^{00}; \mathcal{F}^{0p})$. Также, $\ker D \cap \mathcal{U}^{00} = \{0\}$, поскольку иначе вектор

$$\varphi_0 \in \ker D \cap \mathcal{U}^{00} \setminus \{0\} \subset \ker L \setminus \{0\}$$

имел бы цепочку бесконечной длины $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, 0, \dots\}$, $\varphi_q = A\varphi_{q-1}$, $q = 1, 2, \dots, p$ M -присоединенных векторов. По теореме Банаха существует оператор $\tilde{D}^{-1} : M[\mathcal{U}^{0p}] \rightarrow \mathcal{U}^{00}$.

Построим операторы

$$P_q = A^q \tilde{D}^{-1} Q_p M A^{p-q}, \quad q = 1, 2, \dots, p. \quad (1.1.17)$$

Лемма 1.1.9. Пусть условия (B1) и (B2) выполнены. Тогда операторы $P_q : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^{0q}$ из (1.1.17) — проекторы, кроме того

$$P_q[\mathcal{U}^{0r}] = \{0\}, \quad q, r = 0, 1, \dots, p, \quad q \neq r.$$

Пусть

$$\mathcal{U}^0 = \bigoplus_{q=0}^p \mathcal{U}^{0q},$$

Лемма 1.1.10. Пусть выполнены условия (B1) и (B2). Тогда $\mathcal{U}^0$ — M -корневой линейал оператора L , причем выполнено условие (A2).

Пусть $\mathcal{F}^{0q} = M[\mathcal{U}^{0q}]$, $q = 0, 1, \dots, p$ и построим оператор $B = M\tilde{L}^{-1}Q^p$.

По построению $B[\mathcal{F}^{0q}] = \mathcal{F}^{0q+1}$, $q = 0, 1, \dots, p-1$, $B[\mathcal{F}^{0p}] = \{0\}$.

Поэтому

$$B^q[\mathcal{F}^{0r}] = \begin{cases} \{0\}, & q+r > p, \\ \mathcal{F}^{0q+r}, & q+r \leq p. \end{cases} \quad (1.1.18)$$

Из (1.1.18) по аналогии с леммой 1.1.9 можно показать, что операторы

$$Q_q = B^q M \tilde{D}^{-1} Q_p B^{p-q}, \quad q = 0, 1, \dots, p-1 \quad (1.1.19)$$

проекторы, причем

$$\text{im } Q_q = \mathcal{F}^{0q}, \quad Q_q Q_r = Q_r Q_q = O, \quad q, r = 0, 1, \dots, p, \quad q \neq r.$$

Поэтому подпространство

$$\mathcal{F}^0 = \bigoplus_{q=0}^p \mathcal{F}^{0q} = \bigoplus_{q=0}^p M[\mathcal{U}^{0q}] = M[\mathcal{U}^0]$$

дополняемо в $\mathcal{F}$.

Кроме того, по условию (B1) $\ker M \cap \mathcal{U}^0 = \{0\}$, значит, по теореме Банаха существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$, где M_0 — сужение оператора M на $\mathcal{U}^0$. Итак, мы доказали лемму

Лемма 1.1.11. *Пусть выполняются условия (B1) и (B2), тогда справедливо (A4).*

Лемма 1.1.12. *Пусть выполняются условия (B1) и (B2), тогда справедливо (A3).*

Теорема 1.1.11. *Пусть операторы L, M линейны и непрерывны, причем оператор L — бирасщепляющий. Пусть также выполнены условия (B1) и (B2). Тогда оператор M (L, p) -ограниченный.*

1.1.2. Случай фредгольмова оператора L . Оператор L называется *фредгольмовым*, если его индекс $\text{ind } L = 0$.

Теорема 1.1.12. *Пусть оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ — фредгольмов, а оператор $M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$. Тогда следующие утверждения будут эквивалентными.*

- (i) Оператор M (L, p) -ограничен;
- (ii) выполнено условие (A1).

1.1.3. Случай конечномерных пространств, $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{F}$. Не теряя общности, отождествим операторы L и M с некоторыми квадратными матрицами.

Теорема 1.1.13. *Пусть $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{F}$. и существует точка $\alpha \in \mathbb{C}$ такая, что $\det(\alpha L - M) \neq 0$. Тогда оператор M (L, p) -ограничен.*

Относительно p -секториальные операторы

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, а оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, оператор $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$.

Допустим, что L -резольвентное множество $\rho^L(M)$ оператора M не пустое, кроме того точки $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in \rho^L(M)$ (также они могут совпадать). Помимо правой $R_\mu^L(M)$ и левой $L_\mu^L(M)$ L -резольвент оператора M рассмотрим *правую*

$$R_{(\mu,p)}^L(M) = \prod_{q=0}^p R_{\mu_q}^L(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$$

и *левую*

$$L_{(\mu,p)}^L(M) = \prod_{q=0}^p L_{\mu_q}^L(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$$

(L, p) -резольвенты оператора M , $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p)$.

Рассмотрим также еще одно понятие. Пусть $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ — цепочка M -присоединенных векторов вектора $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$. Порядковый номер q вектора $\varphi_q \in \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ назовем *высотой* M -присоединенного вектора φ_q .

Лемма 1.1.13. Пусть точки $\lambda_q, \mu_q \in \rho^L(M)$, $q = 0, 1, \dots, p$. Тогда

$$(i) \operatorname{im} R_{(\lambda,p)}^L(M) = \operatorname{im} R_{(\mu,p)}^L(M), \quad \operatorname{im} L_{(\lambda,p)}^L(M) = \operatorname{im} L_{(\mu,p)}^L(M);$$

(ii) $\ker R_{(\mu,p)}^L(M)$ — это линейная оболочка множества собственных и всех ненулевых M -присоединенных векторов с высотой не превышающей числа p , оператора M ;

$$(iii) \ker L_{(\mu,p)}^L(M) = \{M\varphi : \varphi \in \operatorname{dom} M \cap \ker R_{(\lambda,p)}^L(M)\}.$$

Определение 1.1.7. Оператор M (L, p) -секториальным, если существуют числа $a \in \mathbb{R}$ и $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ такие, что сектор

$$S_{\Theta,a}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \mu \neq a\} \subset \rho^L(M),$$

причем

$$\max\{ \| R_{(\mu,p)}^L(M) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_L)} , \| L_{(\mu,p)}^L(M) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})} \} \leq \frac{\text{const}}{\prod_{q=0}^p |\mu_q - a|}$$

для любых $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in S_{\Theta,a}^L(M)$.

Замечание 1.1.13. Пусть существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$, а оператор $L^{-1}M : \text{dom } M \rightarrow \mathcal{U}$ (или, что то же самое, оператор $ML^{-1} : L[\text{dom } M] \rightarrow \mathcal{U}$) секториален. Тогда оператор M (L, p) -секториален с любым числом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Действительно, пусть оператор $L^{-1}M$ секториален, тогда для всех $\mu_k \in S_{\Theta,a}^L(L^{-1}M)$ $k = 0, 1, \dots, p$

$$\|(\mu_k I - L^{-1}M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \leq \frac{\text{const}}{|\mu_k - a|}.$$

Так как $\|L^{-1}\| = \|L\|^{-1}$, то

$$\begin{aligned} \|(\mu_k I - L^{-1}M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \cdot \|L^{-1}\| \cdot \|L\| &= \|(\mu_k L - M)^{-1}L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} = \\ &= \|R_{\mu_k}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \leq \frac{\text{const}}{|\mu_k - a|}, \\ \|L\| \cdot \|(\mu_k I - L^{-1}M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \cdot \|L^{-1}\| &= \|L(\mu_k L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})} = \\ &= \|L_{\mu_k}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})} \leq \frac{\text{const}}{|\mu_k - a|}, \end{aligned}$$

отсюда и будет следовать второе условие определения 1.1.7.

Аналогичный результат получится для случая, когда оператор $L \equiv I$.

Замечание 1.1.14. Не нарушая общности, рассмотрим случай, когда $a = 0$ в определении 1.1.7. В самом деле, если найти разрешающую полугруппу $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ при $a = 0$, тогда полугруппа $\{e^{at}U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ является разрешающей при $a \neq 0$. Поэтому примем $S_{0,\theta}^L(M) = S_{\theta}^L(M)$ и в определении секториального оператора совершим аналогичные преобразования.

Замечание 1.1.15. В случае, когда оператор M (L, σ) -ограничен, а ∞ — несущественная особая точка L -резольвенты оператора M (пусть, например, ∞ является полюсом порядка p). Тогда оператор M (L, p) -секториален. В самом деле, по следствию 1.1.2 имеем

$$R_{\mu}^L(M) = - \sum_{q=0}^p \mu^q R^{q+1}(I - P) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} P, \quad (1.1.20)$$

$$L_{\mu}^L(M) = - \sum_{q=0}^p \mu^q R_1^{q+1}(I - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S_1^{k-1} Q, \quad (1.1.21)$$

где $R_1 = L_0 M_0^{-1}$, а $S_1 = M_1 L_1^{-1}$. Так как $R_1 = M_0 R M_0^{-1}$ и $R_1^{p+1} = M_0 R^{p+1} M_0^{-1}$, то оператор R_1 — нильпотентен степени не выше p . И тогда

$$R_{(\mu,p)}^L(M) = \prod_{n=0}^p R_{\mu_n}^L(M) = \prod_{n=0}^p \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_n^{-k} S^{k-1} \right) P = \prod_{n=0}^p \frac{1}{\mu_n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu_n^{-k} S^k \right) P.$$

Отсюда следует, что

$$\|R_{(\mu,p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \leq \prod_{n=0}^p \|R_{\mu_n}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \leq \frac{\text{const}}{\prod_{n=0}^p |\mu_n|}.$$

Аналогичным образом можно оценить правую и левую $L_{(\mu,p)}^L(M)$ (L, p) -резольвенты оператора M . Следовательно, оператор M (L, p) -секториален.

Замечание 1.1.16. В том случае, когда $p = 0$ (L, p) -секториальный оператор M называется L -секториальным [46, 57, 63, 64].

Теорема 1.1.14. Пусть оператор M (L, p) -секториальный. Тогда

- (i) $\ker R_{(\mu,p)}^L(M) \cap \text{im } R_{(\mu,p)}^L(M) = \{0\}$;
- (ii) $\ker L_{(\mu,p)}^L(M) \cap \text{im } L_{(\mu,p)}^L(M) = \{0\}$.

Теорема 1.1.15. Пусть оператор M (L, p) -секториальный. Тогда

$$\|(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})} \leq \text{const}(1 + |\mu|)^p$$

для любого $\mu \in S_{\Theta, a}^L(M)$.

Аналитические полугруппы разрешающих операторов с ядрами

Рассмотрим эквивалентные уравнения соболевского типа (0.9) уравнений

$$R^L \alpha(M) \dot{u} = (\alpha L - M)^{-1} M u, \quad (1.1.22)$$

$$L^L \alpha(M) \dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1} f, \quad (1.1.23)$$

где $\alpha \in \rho^L(M)$. Эти уравнения рассмотрим как разновидности уравнения

$$A \dot{v} = B v. \quad (1.1.24)$$

Здесь операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, а $\mathcal{V}$ — банахово пространство. Вектор-функцию $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{V})$, которая удовлетворяет уравнению (1.1.24) будем называть *решением* этого уравнения.

Определение 1.1.8. *Отображение $V^\bullet \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{V}))$ назовем разрешающей полугруппой уравнения (1.1.24), если выполнены условия*

$$(i) V^s V^t = V^{s+t}, \quad \forall s \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+;$$

(ii) для любого $v_0 \in \mathcal{V}$ решением уравнения (1.1.24) является вектор-функция $v(t) = V^t v_0$.

Теперь отождествим полугруппу с ее графиком $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$. Если полугруппа имеет аналитическое продолжение в некоторый сектор, содержащий луч $\mathbb{R}_+$, то будем называть ее *аналитической*; а если

$$\|V^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq \text{const} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

то равномерно ограниченной.

Замечание 1.1.17. Отметим, что для разрешающей полугруппы уравнения (1.1.24) не очевидно существование единицы, в то время как в общепринятом определении полугруппы это не так [22, 24, 81]

Теорема 1.1.16. Пусть оператор $M(L, p)$ -секториальный, тогда существует разрешающая полугруппа уравнения (1.1.22) (уравнения (1.1.23)), обладающая свойством аналитичности и равномерной ограниченности.

Пусть контур $\Gamma \subset S_\theta^L(M)$ такой, что $|\arg \mu| \rightarrow \theta$ при $|\mu| \rightarrow +\infty$, $\mu \in \Gamma$.

Легко видеть, что отображения

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (1.1.25)$$

$$F^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (1.1.26)$$

будут аналитическими и равномерно ограниченными разрешающими полугруппами уравнения (1.1.22), (1.1.23).

Замечание 1.1.18. Если оператор M (L, σ) -ограниченный, а кроме того, ∞ — несущественная особая точка L -резольвенты оператора M , то полугруппы (1.1.25) и (1.1.26) можно продолжить до групп (1.1.23) и (1.1.24) соответственно.

Замечание 1.1.19. Пусть оператор M $(L, 0)$ -секториален, и существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$. Тогда операторы $S = L^{-1}M : \text{dom } M \rightarrow \mathcal{U}$ и

$T = M L^{-1} : L[\operatorname{dom} M] \rightarrow \mathcal{F}$ секториальны, а $U^t = \exp(tS)$ и $F^t = \exp(tT)$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$. В самом деле, так как в этом случае

$$R_\mu(S) = (\mu I - L^{-1}M)^{-1} L^{-1}L = R_\mu^L(M) ,$$

$$R_\mu(T) = L L^{-1}(\mu I - M L^{-1})^{-1} = L_\mu^L(M) ,$$

то секториальность операторов S и T будет следовать из определения 1.1.7. Итак,

$$\exp(tS) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\mu(S) e^{\mu t} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu = U^t$$

при $t \in \mathbb{R}_+$, а при $t = 0$ это равенство получится "по непрерывности". Аналогичным образом можно установить равенство $F^t = \exp(tT)$.

Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда по построению разрешающих полугрупп $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ и $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ мы получим, что каждый оператор этих полугрупп имеет ядро $\ker U^t \supset \ker R_\mu^L(M)$ и $\ker F^t \supset \ker L_\mu^L(M)$.

Определение 1.1.9. Пусть $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ — аналитическая разрешающая полугруппа уравнения (1.1.11). Множество

$$\ker V^\bullet = \{\varphi \in \mathcal{V} : V^t \varphi = 0 \quad \exists t \in \mathbb{R}_+ \},$$

назовем ядром, а множество

$$\operatorname{im} V^\bullet = \{v \in \mathcal{V} : \lim_{t \rightarrow 0+} V^t v = v \}$$

— образом этой полугруппы.

Замечание 1.1.20. Поскольку полугруппа $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ аналитична, то $\ker V^\bullet = \ker V^t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$. В самом деле, допустим, что $s > t$. Тогда $\ker V^t \subset \ker V^s$. Теперь зафиксируем $s > 0$ такое, что $V^t \varphi = 0 \quad \forall t > s$.

Тогда $V^s \varphi = 0$ по теореме единственности аналитической функции. Таким образом, определение $\ker V^\bullet$ корректно.

Замечание 1.1.21. Нетрудно показать справедливость соотношений $\operatorname{im} V^t \subset \operatorname{im} V^s \subset \operatorname{im} V^\bullet \quad \forall t > s$.

Обозначим как $\mathcal{U}^1(\mathcal{F}^1)$ замыкание образа $\operatorname{im} R_{(\mu,p)}^L(M)(\operatorname{im} L_{(\mu,p)}^L(M))$ в норме пространства $\mathcal{U}(\mathcal{F})$.

Теорема 1.1.17. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда $\operatorname{im} U^\bullet = \mathcal{U}^1$ и $\operatorname{im} F^\bullet = \mathcal{F}^1$.

Теперь рассмотрим ядра полугрупп.

Теорема 1.1.18. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда $\ker U^\bullet = \ker R_{(\mu,p)}^L(M)$ и $\ker F^\bullet = \ker L_{(\mu,p)}^L(M)$.

Пусть $\mathcal{U}^0 = \ker R_{(\mu,p)}^L(M)$, $\mathcal{F}^0 = \ker L_{(\mu,p)}^L(M)$ и пусть $L_k(M_k)$ — сужение оператора $L(M)$ на $\mathcal{U}^k$ ($\mathcal{U}^k \cap \operatorname{dom} M$), $k = 0, 1$.

Теорема 1.1.19. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда

- (i) операторы $L_0 : \mathcal{U}^0 \rightarrow \mathcal{F}^0$, $M_0 : \mathcal{U}^0 \cap \operatorname{dom} M \rightarrow \mathcal{F}^0$;
- (ii) оператор $L_1 : \mathcal{U}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$;
- (iii) существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$.

По теореме 1.1.19 операторы $R = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$ и $\tilde{R} = L_0 M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0)$.

Следствие 1.1.4. В условиях теоремы 1.1.19 операторы R и $\tilde{R}$ нильпотентны, причем их степень нильпотентности не превышает p .

Следствие 1.1.5. В условиях теоремы 1.1.19 $\mathcal{U}^0 \cap \mathcal{U}^1 = \{0\}$ и $\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{F}^1 = \{0\}$.

Рассмотрим фазовые пространства уравнений (1.1.22) и (1.1.23).

Изучим задачу Коши

$$v(0) = v_0 \quad (1.1.27)$$

для уравнения (1.1.24). Решение $v = v(t)$ уравнения (1.1.24) назовем *решением задачи* (1.1.24), (1.1.27), если $\lim_{t \rightarrow 0+} v(t) = v_0$.

Условие (1.1.27) для уравнений (1.1.22), (1.1.23) будет иметь вид соответственно

$$u(0) = u_0, \quad (1.1.28)$$

$$f(0) = f_0. \quad (1.1.29)$$

Определение 1.1.10. *Фазовым пространством уравнения (1.1.24) называется множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$, если выполнены условия*

(i) любое решение $v = v(t)$ этого уравнения содержится в $\mathcal{B}$, то есть $v = v(t) \in \mathcal{B} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) для любого $v_0 \in \mathcal{B}$ существует единственное решение задачи (1.1.24), (1.1.27).

Теорема 1.1.20. *Пусть оператор $M(L, p)$ -секториален. Тогда фазовое пространство уравнения (1.1.22) ((1.1.23)) совпадет с образом $\operatorname{im} U^\bullet (\operatorname{im} F^\bullet)$.*

Замечание 1.1.22. *Если будет существовать оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, а оператор $A^{-1}B$ (или BA^{-1}) будет секториальным, то фазовым пространством уравнения (1.1.24) будет являться все пространство $\mathcal{V}$.*

Единицы разрешающих полугрупп и существование обратного оператора

В замечании 1.1.17 мы отметили, что у полугрупп $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ (1.1.25) и $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ (1.1.26) существование единиц не предполагается

как данность. Приведем условия, которые являются достаточными для существования единиц этих полугрупп.

Определение 1.1.11. Пусть $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ — полугруппа, определенная на банаховом пространстве $\mathcal{V}$. Оператор $V^0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ назовем единицей этой полугруппы, если

$$V^0 = s\text{--}\lim_{t \rightarrow 0+} V^t.$$

Здесь и далее через $s\text{--}\lim$ мы будем обозначать предел в сильной (точечной) топологии пространства $\mathcal{L}(\mathcal{V})$.

Замечание 1.1.23. Легко проверить, что единица V^0 полугруппы $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ — проектор на пространстве $\mathcal{V}$, кроме того $\ker V^0 = \ker V^\bullet$ и $\text{im } V^0 = \text{im } V^\bullet$.

Определение 1.1.12. Оператор M называется сильно (L, p) -секториальным справа (слева), если он (L, p) -секториален и при всех $\lambda, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_q \in S_{a, \Theta}^L(M)$

$$\|R_{(\mu, p)}^L(M)(\lambda L - M)^{-1} M u\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod_{q=0}^p |\mu_q|} \quad \forall u \in \text{dom } M,$$

где $\text{const} = \text{const}(u)$

(существует плотный в $\mathcal{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ такой, что

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L_{(\mu, p)}^L(M) f\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod_{q=0}^p |\mu_q|} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}},$$

где $\text{const} = \text{const}(f)$).

Замечание 1.1.24. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, а ∞ — несущая особая точка L -резольвенты оператора M , тогда оператор M сильно (L, p) -секториален справа и слева. Это можно получить из (1.1.20) и (1.1.21), причем в качестве линеала $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ можно взять все пространство $\mathcal{F}$.

Теорема 1.1.21. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален справа (слева). Тогда существует единица полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ ($\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$).

Следствие 1.1.6. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален справа и слева. Тогда

- (i) $LPu = QLu \quad \forall u \in \mathcal{U};$
- (ii) $MPu = QMu \quad \forall u \in \text{dom } M.$

Пусть $L_1 (M_1)$ — сужение оператора $L (M)$ на $\mathcal{U}^1 (\text{dom } M \cap \mathcal{U}^1)$.

Из следствия 1.1.6 сразу же вытекает

Следствие 1.1.7. В условиях следствия 1.1.6 оператор $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{F}^1)$, а оператор $M_1 : \mathcal{U}^1 \cap \text{dom } M \rightarrow \mathcal{F}^1$.

Замечание 1.1.25. Из следствия 1.1.6 (ii) получим, что проектор P "не портит" элементов $u \in \text{dom } M$, то есть $Pu \in \text{dom } M$, если $u \in \text{dom } M$. Следовательно, множество $\mathcal{U}^k \cap \text{dom } M$ плотно в $\mathcal{U}^k$, $k = 0, 1$. Значит по теореме 1.1.19 (iii) и следствия 1.1.7 оператор $M_k : \text{dom } M \cap \mathcal{U}^k \rightarrow \mathcal{F}^k$ $k = 0, 1$ линейный замкнутый и плотно определенный, а оператор M_0 будет еще и биективным.

Теорема 1.1.19 доказывает существование оператора $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{F})$.

Теперь изучим вопрос существования обратного оператора $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U}^1)$.

Для этого предположим (L, p) -секториальность оператора M и построим оператор

$$R^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где контур $\Gamma \subset S_{a, \Theta}^L(M)$ такой же, как в (1.1.25) и (1.1.26).

Лемма 1.1.14. *Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда семейство $\{R^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ аналитично продолжимо в сектор $\{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \Theta - \frac{\pi}{2}\}$ и $R^{s+t} = U^s R^t = R^s F^t \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+$.*

Лемма 1.1.15. *Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален справа и слева. Тогда $\operatorname{im} R^t \subset \mathcal{U}^1$ и $\ker R^t \supset \mathcal{F}^0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$.*

Определение 1.1.13. *Сильно (L, p) -секториальный оператор — это оператор, который сильно (L, p) -секториален слева, а также при любых $\lambda, \mu_q \in S_{\Theta}^L(M)$, $q = 0, 1, \dots, p$*

$$\|(\lambda L - M)^{-1} L_{(\mu, p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{U})} \leq \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod_{q=0}^p |\mu_q|}.$$

Замечание 1.1.26. *Для сильно (L, p) -секториального оператора M справедлива сильная (L, p) -секториальность справа.*

Замечание 1.1.27. *Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, и пусть ∞ является несущественно особой точкой L -резольвенты оператора M . Тогда, легко показать, что из разложений (1.2.1) и (1.2.2), оператор M сильно (L, p) -секториален.*

Замечание 1.1.28. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$, то оператор M сильно L -секториален (то есть $p = 0$) точно тогда, когда секториален оператор $L^{-1}M$ (или ML^{-1}).

Лемма 1.1.16. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален. Тогда

$$\|R^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})} \leq \text{const} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Теорема 1.1.22. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален. Тогда существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$.

1.2. Задача Коши для полулинейного уравнения соболевского типа

Пусть пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ банаховы, оператор $L : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$, линейный и непрерывный; а оператор $M : \text{dom } M \rightarrow \mathcal{F}$ линейный, замкнутый и плотно определенный в пространстве $\mathcal{U}$. Пусть $\mathcal{U}_M = \{u \in \text{dom } M : \|u\| = \|Mu\|_{\mathcal{F}} + \|u\|_{\mathcal{U}}\}$. Пусть оператор $F \in C^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$.

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1.2.1}$$

для полулинейного автономного уравнения соболевского типа

$$L \dot{u} = M u + F(u). \tag{1.2.2}$$

Определение 1.2.1. Вектор-функцию $u \in C^\infty((0, T); \mathcal{U}_M)$, такую, что она удовлетворяет уравнению (1.2.2), а также $u(t) \rightarrow u_0$ при $t \rightarrow 0+$ будем называть локальным решением (или просто — решением) задачи (1.2.1), (1.2.2).

Рассмотрим L -резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathcal{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})\}$ и L -спектр $\sigma^L(M) = \mathcal{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M .

Определение 1.2.2. Пусть пространство $\mathcal{U}$ расщепляется в прямую сумму подпространств $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus \mathcal{U}_1$ так, чтобы $\ker L \subset \mathcal{U}_0$.

Решение $u = v + w$, где $v(t) \in \mathcal{U}_0$, а $w(t) \in \mathcal{U}_1$ для любого $t \in (0, T)$, уравнения (1.2.2) будем называть квазистационарной полутраекторией, если $L\dot{v} \equiv 0$.

Известно [59, 48, 90], что решение задачи (1.2.1), (1.2.2) существует не для всех $u_0 \in \mathcal{U}_M$. Поэтому рассмотрим определение.

Определение 1.2.3. Множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_M$ называется фазовым пространством уравнения (1.2.2), если для любой точки $u_0 \in \mathcal{B}$ существует единственное решение задачи (1.2.1), (1.2.2), причем $u(t) \in \mathcal{B}$.

Поскольку оператор M сильно (L, p) – секториальный, то пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ будут расщепляться в прямые суммы $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$, где $\mathcal{U}^0$ и $\mathcal{F}^0$ – ядра, а $\mathcal{U}^1$ и $\mathcal{F}^1$ – образы аналитических разрешающих полугрупп U^t и F^t линейного однородного уравнения $L\dot{u} = Mu$.

Эти полугруппы будут иметь вид:

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad F^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu.$$

Где $\Gamma \subset \rho^L(M)$ – это такой контур, что $\arg \mu \rightarrow \pm\theta$ при $|\mu| \rightarrow +\infty$, $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathcal{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})\}$ – L -резольвентное множество оператора M . $R_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ ($L_{\mu}^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$) правая (левая) L -резольвента оператора M .

Воспользуемся результатами [50, 97] и редуцируем задачу (1.2.1), (1.2.2) к эквивалентной системе, которую будем называть *нормальной формой* задачи (1.2.1), (1.2.2)

$$\begin{aligned} R\dot{u}^0 &= u^0 + G(u) & u^0(0) &= u_0^0, \\ \dot{u}^1 &= Su^1 + H(u) & u^1(0) &= u_0^1. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Здесь $u^k \in \mathcal{U}^k$, $k = 0, 1$, $u = u^0 + u^1$, операторы $R = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$, $G = M_0^{-1}(I - Q)F$, $H = L_1^{-1}QF$ ($(Q \in \mathcal{L}(F)(\equiv \mathcal{L}(F; F))$ — проектор, расщепляющий пространство $\mathcal{F}$ необходимым нам образом). Изучим такие квазистационарные полутраектории уравнения (1.2.2), для которых $R\dot{u}^0 \equiv 0$. Будем предполагать, что оператор R — бирасщепляющий [3], т.е. его ядро $\ker R$ и образ $\operatorname{im} R$ дополняемы в пространстве $\mathcal{U}$. Пусть $\mathcal{U}^{00} = \ker R$, через $\mathcal{U}^{01} = \mathcal{U}^0 \ominus \mathcal{U}^{00}$ обозначим дополнение к подпространству $\mathcal{U}^{00}$. В этом случае первое уравнение (1.2.3) будет иметь вид

$$R\dot{u}^{01} = u^{00} + u^{01} + G(u), \quad (1.2.4)$$

где $u = u^{00} + u^{01} + u^1$.

Теорема 1.2.1. *Пусть оператор M сильно (L, p) — секториален, а оператор R — бирасщепляющий. Пусть существует квазистационарная полутраектория (1.2.2). Тогда она удовлетворяет соотношениям*

$$0 = u^{00} + u^{01} + G(u), \quad u^{01} = \text{const}. \quad (1.2.5)$$

Рассмотрим теперь достаточные условия. Поскольку при условии сильной (L, p) -секториальности оператора M оператор S секториален, следовательно, он порождает на $\mathcal{U}^1$ аналитическую полугруппу, которую будем обо-

значать как $\{U_1^t : t \geq 0\}$. Поскольку фактически оператор U_1^t — это сужение оператора U^t на $\mathcal{U}^1$. Из того, что $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ будет следовать существование проектора $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, соответствующего данному расщеплению. Но $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M)$, а значит, $\mathcal{U}_M$ расщепится в прямую сумму $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_M^0 \oplus \mathcal{U}_M^1$ так, что вложение $\mathcal{U}_M^k \subset \mathcal{U}^k$, $k = 0, 1$, плотное и непрерывное [50].

Теорема 1.2.2. Пусть оператор M будет сильно (L, p) -секториальным, оператор R — бирасщепляющим, оператор $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$. И пусть

(A1) в некоторой окрестности $\mathcal{O}_{u_0} \subset \mathcal{U}_M$ точки u_0 выполняется

$$0 = u_0^{01} + (I - P_R)(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1)); \quad (1.2.6)$$

(A2) проектор $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, и оператор $I + P_R G'_{u_0} : \mathcal{U}_M^{00} \rightarrow \mathcal{U}_M^{00}$ — топологический изоморфизм ($\mathcal{U}_M^{00} = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}^{00}$);

(A3) для аналитической полугруппы $\{U_1^t : t \geq 0\}$ выполняется

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{U}_M^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \quad (1.2.7)$$

Тогда будет существовать единственное решение задачи (1.2.1), (1.2.2), которое является квазистационарной полутраекторией уравнения (1.2.2).

Замечание 1.2.1. Следует отметить, что второе соотношение в (1.2.5) пояснит смысл термина "квазистационарные полутраектории." Здесь имеются ввиду такие полутраектории, которые "стационарны по некоторым переменным". В динамическом случае понятия квазистационарной полутраектории и квазистационарной траектории совпадут [51].

Замечание 1.2.2. Из условия (A1) теоремы 1.2.2 вытекает, что окрестность $\mathcal{O}_{u_0}$ — часть фазового пространства уравнения (1.2.2).

Замечание 1.2.3. Условие (1.2.7) для обычных аналитических полугрупп, которые имеют оценку $\|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{U}_M^1)} < t^{-1}\text{const}$, не выполняется. Пусть $\mathcal{U}_\alpha^1 = [\mathcal{U}^1; \mathcal{U}_M^1]_\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$ — некоторое интерполяционное пространство, построенное по оператору S . В теореме 1.2.2 помимо условия " $F \in C^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{F})$ " примем также, что " $H \in C^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{U}_\alpha^1)$ ", а вместо соотношения (1.2.7) возьмем

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{U}_\alpha^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \quad (1.2.8)$$

Тогда утверждение теоремы 1.2.2 не изменится. С обсуждением этого вопроса можно ознакомиться в [36, глава 9].

Пусть $\mathcal{U}_k$ и $\mathcal{F}_k$ — банаховы пространства, операторы $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_k, \mathcal{F}_k)$, а операторы $B_k : \text{dom } B_k \rightarrow \mathcal{F}$ линейны и замкнуты с областями определений $\text{dom } B_k$ плотными в $\mathcal{U}_k$, $k = 1, 2$. Рассмотрим пространства $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ и операторы $L = A_1 \otimes A_2$, $M = B_1 \otimes B_2$. По построению оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M : \text{dom } M \rightarrow \mathcal{F}$ линейен, замкнут и плотно определен, $\text{dom } M = \text{dom } B_1 \times \text{dom } B_2$.

Теорема 1.2.3. Если операторы B_k сильно (A_k, p_k) -секториальны, $k = 1, 2$; То оператор M сильно (L, p) -секториален, $p = \max(p_1, p_2)$.

2. Математические модели движения несжимаемых вязкопругих жидкостей в магнитном поле Земли

2.1. Обобщенная модель несжимаемой вязкопругой жидкости Кельвина-Фойгта в магнитном поле Земли

Система

$$\begin{aligned}
 (1 - \varkappa \nabla^2) v_t &= \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla) v + \sum_{m=1}^M \sum_{q=0}^{n_m-1} A_{m,q} \nabla^2 w_{m,q} - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \times v + \\
 &\quad + \frac{1}{\rho\mu} (\nabla \times b) \times b, \\
 \frac{\partial w_{m,0}}{\partial t} &= v + \alpha_m w_{m,0}, \quad \alpha_m \in \mathbb{R}_-, \quad m = \overline{1, M}, \\
 \frac{\partial w_{m,q}}{\partial t} &= q w_{m,p-1} + \alpha_m w_{m,q}, \quad q = \overline{1, n_m - 1}, \quad \alpha_m < 0, \quad A_{m,q} > 0 \\
 \nabla \cdot v &= 0, \quad \nabla \cdot b = 0, \quad b_t = \delta \nabla^2 b + \nabla \times (v \times b),
 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

моделирует поток вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина-Фойгта высшего порядка K ($K = n_1 + \dots + n_M$) [40] в магнитном поле Земли. Здесь вектор-функция $v = (v_1(x, t), v_2(x, t), \dots, v_n(x, t))$ характеризует скорость жидкости, вектор-функция $b = (b_1(x, t), b_2(x, t), \dots, b_n(x, t))$ – магнитную индукцию, $p = p(x, t)$ – давление, $\varkappa$ – коэффициент упругости, ν – коэффициент вязкости, Ω – угловую скорость, δ – магнитную вязкость, μ – магнитную проницаемость, ρ – плотность, параметры $A_{m,q}$ определяют время ретардации давления.

Заметим, что указанная система является обобщением системы, приведенной в [80, 88] при $K = 0$ и $\varkappa = 0$.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для системы (2.1.1)

$$\begin{aligned}
v(x, 0) &= v_0(x), \quad w_{m,q}(x, 0) = w_{m,q}^0(x), \\
b(x, 0) &= b_0(x), \quad \forall x \in D, \\
v(x, t) &= 0, \quad w_{m,q}(x, t) = 0, \\
b(x, t) &= 0, \quad \forall (x, t) \in \partial D \times \mathbb{R}_+, \\
m &= \overline{1, M}, \quad q = \overline{0, n_{m-1}}
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Здесь область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$, – ограниченная с границей ∂D класса C^∞ .

Представим систему (2.1.1) в виде

$$\begin{aligned}
(1 - \varkappa \nabla^2) v_t &= \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla) v + \sum_{m=1}^M \sum_{q=0}^{n_{m-1}} A_{m,q} \nabla^2 w_{m,q} - \bar{p} - 2\Omega \times v + (\nabla \times b) \times b, \\
\frac{\partial w_{m,0}}{\partial t} &= v + \alpha_m w_{m,0}, \quad \alpha_m \in \mathbb{R}_-, \quad m = \overline{1, M}, \\
\frac{\partial w_{m,q}}{\partial t} &= q w_{m,p-1} + \alpha_m w_{m,q}, \quad q = \overline{1, n_m - 1}, \\
\nabla(\nabla \cdot v) &= 0, \quad \nabla(\nabla \cdot b) = 0, \quad b_t = \delta \nabla^2 b + \nabla \times (v \times b),
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Данный параграф посвящен локальной однозначной разрешимости задачи (2.1.3), (2.1.2). Она исследуется в рамках задачи Коши (1.2.1) для абстрактного уравнения соболевского типа (1.2.2).

Проведем редукцию задачи (2.1.3), (2.1.2) к задаче (1.2.1), (1.2.2). Для этого введем, следуя [37], пространства $\mathbf{H}_\sigma^2$, $\mathbf{H}_\pi^2$, $\mathbf{H}_\sigma$ и $\mathbf{H}_\pi$, где $\mathbf{H}_\sigma^2$ и $\mathbf{H}_\sigma$ являются подпространствами соленоидальных функций пространств $(W_2^2(D))^n \cap (\overset{\circ}{W}_2^1(D))^n$ и $(L_2(D))^n$. Обозначим через $\mathbf{H}_\pi^2$ и $\mathbf{H}_\pi$ их ортогональные дополнения (в $(L_2(D))^n$), а Σ будет обозначать проектор на $\mathbf{H}_\sigma$, более того его сужение на подпространство $(W_2^2(D))^n \cap (\overset{\circ}{W}_2^1(D))^n$ будет обозначено тем же символом. Положим $\Pi = I - \Sigma$. Определим линейный ограниченный оператор $A = \nabla^2 E_n : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbf{H}_\sigma \oplus \mathbf{H}_\pi$, где E_n – единичная матрица порядка n . Спектр $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ этого оператора конечнократен, сгущается лишь

на $-\infty$. Формулой $B_v : v \rightarrow \nabla(\nabla \cdot v)(B_b : b \rightarrow \nabla(\nabla \cdot b))$ зададим линейный непрерывный сюръективный оператор $B_v(B_b) : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbf{H}_\pi$ с ядром $\ker B_v = B_b = \mathbf{H}_\sigma^2$. Введем в рассмотрение пространства $\mathcal{U}_{10} = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \mathbf{H}_p$, $\mathcal{F}_{10} = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p$, где $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$; $\mathcal{U}_{1i} = \mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}^1 = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2$, и $\mathcal{F}_{1i} = \mathbf{L}_2 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi$, $i = \overline{1, k}$. Будем использовать при этом естественный изоморфизм прямой суммы и декартова произведения банаховых пространств. Тогда пространства $\mathcal{U}_1 = \oplus_{l=0}^k \mathcal{U}_{1l}$, $\mathcal{F}_1 = \oplus_{l=0}^k \mathcal{F}_{1l}$. Операторы A_1 и $B_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{F}_1$ определены формулами $A_1 = \text{diag} [\hat{A}_1, E_k]$, где

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} \check{A}_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \check{A}_1 = \begin{pmatrix} \Sigma(I - \lambda A)\Sigma & \Sigma A(I - \lambda A)\Pi \\ \Pi(I - \lambda A)\Sigma & \Pi A(I - \lambda A)\Pi \end{pmatrix}.$$

Оператор $B_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{F}_1$ положим равным $\widetilde{M}$ (см. формулу (14) в [72])

Замечание 2.1.1. В данной модели пространства $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{F}_1$ определяются аналогично пространствам $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ в модели [72], при этом A_1 совпадает с L в [72].

Замечание 2.1.2. Введем обозначение A_σ для сужения оператора ΣA на пространстве $\mathbf{H}_\sigma^2$. Спектр $\sigma(A_\sigma)$, на основании теоремы Солонникова–Воровича–Юдовича, является вещественным, дискретным, конечнократным и сгущающимся к $-\infty$.

Теорема 2.1.1. *i) Операторы A_1 , B_1 принадлежат $\mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)$ и если $\kappa^{-1} \notin \sigma(A)$, то оператор A_1 бирасщепляющий, $\ker A_1 = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_k$, $\text{im } A_1 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\} \times \mathcal{F}_{11} \times \mathcal{F}_{12} \times \dots \times \mathcal{F}_{1k}$.*
ii) Если $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, то оператор B_1 $(A_1, 1)$ -ограничен.

Доказательство. Утверждение теоремы 2.1.1 является прямым следствием результатов [71] ■

Положим, далее, $\mathcal{U}_2 = \mathcal{F}_2 = L_2(D)$, равенством $B_2 = \delta \nabla^2 : \text{dom } B_2 \rightarrow \mathcal{F}_2$ определим линейный замкнутый плотно определенный оператор B_2 , $\text{dom } B_2 = W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(D)$.

Положим $A_2 \equiv I$.

Теорема 2.1.2. *Оператор B_2 сильно A_2 -секториален.*

Доказательство. Утверждение теоремы 2.1.2 следует из секториальности оператора B_2 [80] ■

Положим $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Вектор u пространства $\mathcal{U}$ имеет вид $u = \text{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \dots, w_k, u_b)$, где $\text{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \dots, w_k) \in \mathcal{U}_1$, а $u_b \in \mathcal{U}_2$, $u_b = (b_\sigma, b_\pi)$, $b_\sigma \in \mathbf{H}_\sigma^2$, $b_\pi \in \mathbf{H}_\pi^2$. Аналогичный вид имеет вектор $f \in \mathcal{F}$. Операторы L и M определим равенствами $L = A_1 \otimes A_2$ и $M = B_1 \otimes B_2$. Оператор L принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M : \text{dom } M \rightarrow \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен, $\text{dom } M = \mathcal{U}_1 \times \text{dom } B_2$.

Теорема 2.1.3. *Пусть $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A)$, тогда оператор M сильно $(L, 1)$ -секториален.*

Доказательство. По теореме 2.1.1 и замечанию 1.6.6 из работы [73], оператор B_1 является сильно $(A_1, 1)$ -секториальным. Следовательно, а также в силу теорем 1.2.3 и 2.1.2, утверждение теоремы 2.1.3 справедливо. ■

Построим нелинейный оператор F . В нашем случае он представим в виде $F = F_1 \otimes F_2$, где

$$F_1 = F_1(u_\sigma, u_\pi, b) = \text{col}(-\Sigma(((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - 2\Omega \times (u_\sigma + u_\pi) + (\nabla \times b) \times b), -\Pi(((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - 2\Omega \times (u_\sigma + u_\pi) + (\nabla \times b) \times b), \underbrace{0, \dots, 0}_{k+1}),$$

$$F_2 = F_2(u_\sigma, u_\pi, b) = \nabla \times ((u_\sigma + u_\pi) \times b).$$

В нашем случае $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_1 \times \text{dom } B_2$.

Теорема 2.1.4. *Оператор $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$.*

Доказательство. Утверждение теоремы 2.1.4 следует из того, что при любых $u \in \mathcal{U}_M$ оператор F'_u принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$. Аналогичным образом можно установить, что вторая производная Фреше F''_u оператора F является непрерывным билинейным оператором из $\mathcal{U}_M \times \mathcal{U}_M$ в $\mathcal{F}$, а $F'''_u \equiv O$ (аналогично работе [37]). ■

Итак, задача (2.1.3), (2.1.2) редуцирована к задаче (1.2.1), (1.2.2). В дальнейшем мы их отождествляем. Проверим условия теорем 1.2.1 и 1.2.2.

Следуя теореме 2.1.1 и результатам пункта 3.1. работы [37] можно утверждать существование аналитической полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ разрешающей уравнение (1.2.2). Эта полугруппа в данном случае естественным образом задается следующим образом $U^t = V^t \times W^t$. Здесь $V^t(W^t)$ является сужением оператора U^t на $\mathcal{U}_1(\mathcal{U}_2)$. Учитывая, что оператор B_2 секториален, получим $W^t = \exp(tB_2)$, следовательно, ядро данной полугруппы $\mathcal{W}^0 = \{0\}$, а образ $\mathcal{W}^1 = \mathcal{U}_2$.

Рассмотрим полугруппу $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$. Следуя теоремам 2.1.1 и 2.1.3 и результатам пункта 3.1. работы [37], данную полугруппу можно продолжить до группы $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$. Ядро этой группы представимо в виде $\mathcal{V}^0 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$. Здесь $\mathcal{U}_1^{00} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \{0\} \times \dots \times \{0\} (= \ker A_1$ в силу теоремы 2.1.1), причем $\mathcal{U}_1^{01} = \Sigma A_{\pi}^{-1} A_{\pi\pi}^{-1} [\mathbf{H}_{\pi}^2] \times \mathbf{H}_{\pi}^2 \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{K+1}$.

Кроме того, $A_{\varkappa} = I - \varkappa A$, а $A_{\varkappa\pi}$ является сужением $\Pi A_{\varkappa}^{-1}$ на пространство $\mathbf{H}_{\pi}$. Учитывая, что $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_{\sigma})$, оператор $A_{\varkappa\pi} : \mathbf{H}_{\pi} \rightarrow \mathbf{H}_{\pi}^2$ является тоplineйным изоморфизмом. Далее образ $\mathcal{V}^1$ будем обозначать $\mathcal{U}_1^1$. Так как оператор B_1 является сильно $(A_1, 1)$ -секториальным, пространство $\mathcal{U}_1$ представимо в виде прямой суммы подпространств $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01} \oplus \mathcal{U}_1^1$.

Перейдем к построению оператора R (см. (1.2.3), (1.2.4)). В нашем случае $R = B_{10}^{-1} A_{10} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$, где $A_{10}(B_{10})$ – сужение оператора $A_1(B_1)$ на $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$. (Существование оператора B_{10}^{-1} справедливо в силу теоремы 2.1.3 и соответствующих результатов из [37]). По построению $\ker R = \mathcal{U}_1^{00}$, а в работе [55] показано, что $\operatorname{im} R = \mathcal{U}_1^{01}$. Следовательно, оператор R является бирасщепляющим. Проектор в пространстве $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$ вдоль $\mathcal{U}_1^{01}$ на $\mathcal{U}_1^{00}$ обозначим как P_R . По построению $\mathcal{U}_M$ проектор P_R принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, где $\mathcal{U}_M^0 = \mathcal{U}_M \cap (\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}) (\equiv \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$. Таким образом, верна

Лемма 2.1.1. *Пусть $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_{\sigma})$. Тогда оператор R бирасщепляющий, причем $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$.*

Рассмотрим проекторы

$$P_k = \operatorname{diag} [\hat{P}_k, 0], \quad Q_k = \operatorname{diag} [\hat{Q}_k, 0], \quad k = 0, 1.$$

(используя результаты работы [37], учитывая, что ядро $\mathcal{W}^0 = \{0\}$, получим $I - P = (P_0 + P_1) \times O$, $Q = (I - Q_0 - Q_1) \times I$, $P : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^1$, $Q : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^1$.)

Тогда, действуя проектором $I - P$ на уравнение (1.2.2), получаем уравнения

$$\begin{aligned} \Pi(\nu A(u_{\sigma} + u_{\pi}) - ((u_{\sigma} + u_{\pi}) \cdot \nabla)(u_{\sigma} + u_{\pi}) + \sum_{m=1}^M \sum_{q=0}^{n_{m-1}} A_{m,q} \nabla^2 w_{m,q} - u_p - \\ - 2\Omega \times (u_{\sigma} + u_{\pi}) + (\nabla \times b) \times b) = 0, \\ Bu_{\pi} = 0, \quad Bb_{\pi} = 0. \end{aligned}$$

(2.1.4)

Отсюда, в силу свойств оператора B и по теореме 1.2.1 получаем необходимое условие квазистационарности полутраектории $u_\pi \equiv 0$, $b_\pi \equiv 0$, т.е. все решения (если они существуют) нашей задачи с необходимостью должны лежать в плоскости $\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{U}_M : u_\pi = 0, b_\pi = 0\}$.

В силу того, что $\Pi u_p = u_p$, из первого уравнения (2.1.4) получаем соотношение (1.2.5), т.е., применительно к нашему случаю,

$$u_p = \Pi(\nu A u_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla) u_\sigma + \sum_{m=1}^M \sum_{q=0}^{n_{m-1}} A_{m,q} \nabla^2 w_{m,q} - 2\Omega \times u_\sigma + (\nabla \times b_\sigma) \times b_\sigma). \quad (2.1.5)$$

Из тождества $P_0 \equiv P_R$ следует, что второе и третье уравнения в (2.1.4) есть в нашем случае соотношение (1.2.6). Таким образом, верна

Лемма 2.1.2. *При выполнении условий леммы 2.1.1 каждое решение (2.1.1), (2.1.2) потраекторно принадлежит множеству*

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathcal{U}_M : u_\pi = 0, b_\pi = 0, \\ u_p = \Pi(\nu A_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla) u_\sigma + \sum_{m=1}^M \sum_{q=0}^{n_{m-1}} A_{m,q} \nabla^2 w_{m,q} - 2\Omega \times u_\sigma + (\nabla \times b_\sigma) \times b_\sigma)\}.$$

Замечание 2.1.3. *Из соотношения (2.1.5) вытекает условие A_2) теоремы 1.2.2 для любой точки $u_0^0 \in \mathcal{U}_M^{00} (\equiv \mathcal{U}_1^{00} \times \{0\})$. Поэтому, аналогично [37] получаем, что множество $\mathfrak{M}$ является простым банаховым многообразием, $\mathcal{C}^\infty$ -диффеоморфное подпространству $\mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$, является возможным фазовым пространством задачи (2.1.1), (2.1.2) ((2.1.3), (2.1.2)).*

Перейдем к проверке условий (1.2.7), (1.2.8). Построим пространство $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_1 \times \overset{\circ}{W}_2^1(D)$. Данное пространство, очевидно, интерполяционное пространством для пары $[\mathcal{U}, \mathcal{U}_M]_\alpha$, причем $\alpha = 1/2$. Как отмечалось ранее, полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ может быть продолжена до группы $\{V_1^t : t \in \mathbb{R}\}$

на $\mathcal{U}_1^1$, где V_1^t – сужение оператора V^t на $\mathcal{U}_1^1$. В силу того что $\mathcal{U}_M^1 = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}_1^1$ по построению, оператор B_1 является непрерывным в силу теоремы 2.1.1, а полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ равномерно ограничена, получим неравенство

$$\int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1; \mathcal{U}_M^1)} dt \leq \text{const} \times \|B_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)} \int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1)} dt < \infty, \quad \tau \in \mathbb{R}_+. \quad (2.1.6)$$

Согласно неравенству Соболева [36], для полугруппы $\{W^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ справедлива оценка

$$\int_0^\tau \|W^t\|_{\mathcal{L}(\text{dom } B_2; \dot{W}_2^1(D))} dt < \infty. \quad (2.1.7)$$

Положим $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$. Здесь $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$. В силу (2.1.6) и (2.1.7) справедлива

Лемма 2.1.3. *При выполнении условий леммы 2.1.1 имеет место (1.2.7).*

Теперь, учитывая условие (1.2.8), найдем оператор H . Оператор H естественно представим в виде $H = H_1 \otimes H_2$, где $H_1 = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)F_1$, а $H_2 \equiv F_2$ (A_{11} – сужение оператора A_1 на $\mathcal{U}_1^1$). Для оператора H справедливо утверждение, аналогичное теореме 2.1.4 для оператора F , т.е. $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{U}_\alpha^1)$, где $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$.

Следовательно, все условия теоремы 1.2.2 выполнены и имеет место

Теорема 2.1.5. *Пусть $\kappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. Тогда для любых u_0 , таких, что $u_0 \in \mathfrak{M}$, при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственная квазистационарная полутраектория $u = (u_\sigma, 0, u_p, u_b)$, являющаяся решением задачи (2.1.1), (2.1.2), причем $u(t) \in \mathfrak{M}$ при всех $t \in (0, T)$.*

2.2. Модель несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка в магнитном поле Земли

Система

$$\begin{aligned}
 (1 - \varkappa \nabla^2) v_t &= \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla) v + \sum_{l=1}^K \beta_l \nabla^2 w_l - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \times v + \frac{1}{\rho \mu} (\nabla \times b) \times b, \\
 \frac{\partial w_l}{\partial t} &= v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \quad \beta_l \in \mathbb{R}_+, \quad l = \overline{1, K}, \\
 \nabla \cdot v &= 0, \quad \nabla \cdot b = 0, \quad b_t = \delta \nabla^2 b + \nabla \times (v \times b)
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

моделирует поток вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка K [40] в магнитном поле Земли. Здесь вектор-функция $v = (v_1(x, t), v_2(x, t), \dots, v_n(x, t))$ характеризует скорость жидкости, вектор-функция $b = (b_1(x, t), b_2(x, t), \dots, b_n(x, t))$ – магнитную индукцию, $\varkappa$ – коэффициент упругости, ν – коэффициент вязкости, ρ – плотность, $p = p(x, t)$ – давление, Ω – угловую скорость, μ – магнитную проницаемость, δ – магнитную вязкость, параметры β_l , $l = \overline{1, K}$ – определяют время ретардации (запаздывания) давления.

Поставим начально-краевую задачу для системы (2.2.1)

$$\begin{aligned}
 v(x, 0) &= v_0(x), \quad b(x, 0) = b_0(x), \quad w_l(x, 0) = w_{l0}(x) \quad x \in D, \\
 v(x, t) &= 0, \quad b(x, t) = 0, \quad w_l(x, t) = 0 \quad (x, t) \in \partial D \times \mathbb{R}_+, \quad l = \overline{1, K}.
 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Будет предполагать, что $\mu = 1$ и $\rho = 1$. Здесь область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$, – ограниченная с границей ∂D класса C^∞ .

Данный параграф посвящен установлению локальной однозначной разрешимости задачи (2.2.1), (2.2.2) как конкретной интерпретации задачи (1.2.1), (1.2.2) с использованием методов теории уравнений соболевского типа.

Проведем редукцию задачи (2.2.1), (2.2.2) к задаче (1.2.1), (1.2.2). Для этого перейдем от системы (2.2.1) к системе

$$\begin{aligned}
 (1 - \varkappa \nabla^2) v_t &= \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla) v + \sum_{l=1}^K \beta_l \nabla^2 w_l - \bar{p} - 2\Omega \times v + (\nabla \times b) \times b, \\
 \frac{\partial w_l}{\partial t} &= v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \quad \beta_l \in \mathbb{R}_+, \quad l = \overline{1, K}, \\
 \nabla(\nabla \cdot v) &= 0, \quad \nabla(\nabla \cdot b) = 0, \quad b_t = \delta \nabla^2 b + \nabla \times (v \times b).
 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Следуя [68, 69], введем пространства $\mathbf{H}_\sigma^2, \mathbf{H}_\pi^2, \mathbf{H}_\sigma$ и $\mathbf{H}_\pi$. Здесь $\mathbf{H}_\sigma^2$ и $\mathbf{H}_\sigma$ – подпространства соленоидальных функций в пространствах $(W_2^2(D))^n \cap (\overset{\circ}{W}_2^1(D))^n$ и $(L_2(D))^n$ соответственно, их ортогональные (в смысле $(L_2(D))^n$) дополнения – $\mathbf{H}_\pi^2$ и $\mathbf{H}_\pi$. Обозначим через Σ ортопроектор на $\mathbf{H}_\sigma$, причем сужение данного ортопроектора на пространство $(W_2^2(D))^n \cap (\overset{\circ}{W}_2^1(D))^n$ также будем обозначать через Σ . Положим $\Pi = I - \Sigma$.

Зададим линейный непрерывный оператор равенством $A = \nabla^2 E_n : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbf{H}_\sigma \oplus \mathbf{H}_\pi$, где E_n – единичная матрица n -порядка. Спектр этого оператора $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ дискретен, конечнократен и сгущается лишь на $-\infty$. Формулой $B_v : v \rightarrow \nabla(\nabla \cdot v)$ ($B_b : b \rightarrow \nabla(\nabla \cdot b)$) зададим линейный непрерывный сюръективный оператор $B_v(B_b) : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbf{H}_\pi$ с ядром $\ker B_v = B_b = \mathbf{H}_\sigma^2$. Введем в рассмотрение пространства $\mathcal{U}_{10} = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \mathbf{H}_p$, $\mathcal{F}_{10} = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p$, где $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$; $\mathcal{U}_{1i} = \mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}^1 = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2$, и $\mathcal{F}_{1i} = \mathbf{L}_2 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi$, $i = \overline{1, K}$. Будем использовать при этом естественный изоморфизм прямой суммы и декартова произведения банаховых пространств. Тогда пространства $\mathcal{U}_1 = \oplus_{l=0}^K \mathcal{U}_{1l}$, $\mathcal{F}_1 = \oplus_{l=0}^K \mathcal{F}_{1l}$. Операторы A_1 и B_1 определены формулами $A_1 = \text{diag}[\hat{A}_1, E_k]$, где

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} \check{A}_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \check{A}_1 = \begin{pmatrix} \Sigma(I - \lambda A)\Sigma & \Sigma A(I - \lambda A)\Pi \\ \Pi(I - \lambda A)\Sigma & \Pi A(I - \lambda A)\Pi \end{pmatrix};$$

$$B_1 = (B_1^{ij})_{i,j=1}^2, \text{ где}$$

$$B_1^{11} = \begin{pmatrix} \nu \Sigma A & \nu \Sigma A & O \\ \nu \Pi A & \nu \Pi A & -I \\ O & B & O \end{pmatrix}, \quad B_1^{12} = \begin{pmatrix} \beta_1 \Sigma A & \dots & \beta_K \Sigma A \\ \beta_1 \Pi A & \dots & \beta_K \Pi A \\ O & \dots & O \end{pmatrix},$$

В матрице B_1^{11} $B = \nabla(\nabla \cdot v) - \nabla(\nabla \cdot b) = B_v - B_b$. Матрица B_1^{21} содержит K строк вида (I, I, O) , $B_1^{22} = \text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_K]$.

Замечание 2.2.1. Для обозначения сужения оператора ΣA на $\mathbf{H}_\sigma^2$ будем использовать A_σ . Спектр $\sigma(A_\sigma)$, на основании теоремы Солонникова–Воровича–Юдовича, является вещественным, дискретным, конечнократным и сгущающимся к $-\infty$.

Теорема 2.2.1. *i) Операторы A_1, B_1 принадлежат $\mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)$ и если $\kappa^{-1} \notin \sigma(A)$, то оператор A_1 бирацщепляющий, $\ker A_1 = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_K$, $\text{im } A_1 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\} \times \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \dots \times \mathcal{F}_K$.*

ii) Если $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, то оператор B_1 $(A_1, 1)$ -ограничен.

Доказательство. Утверждение теоремы 2.2.1 является прямым следствием соответствующих результатов [37] ■

Замечание 2.2.2. Понятие (L, p) -ограниченного оператора можно найти, например, в работе [9, с.26].

Далее положим $\mathcal{U}_2 = \mathcal{F}_2 = L_2(D)$ и равенством $B_2 = \delta \nabla^2 : \text{dom } B_2 \rightarrow \mathcal{F}_2$ определим линейный замкнутый и плотно определенный оператор B_2 , $\text{dom } B_2 = W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(D)$.

Положим $A_2 \equiv I$.

Теорема 2.2.2. *Оператор B_2 сильно A_2 -секториален.*

Доказательство. Утверждение теоремы 2.2.2 следует из секториальности оператора B_2 [80] ■

Положим $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Вектор u пространства $\mathcal{U}$ имеет вид $u = (u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \dots, w_K, u_b)$, где $(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \dots, w_K) \in \mathcal{U}_1$, а $u_b \in \mathcal{U}_2$, $u_b = (b_\sigma, b_\pi)$, $b_\sigma \in \mathbf{H}_\sigma^2$, $b_\pi \in \mathbf{H}_\pi^2$. Аналогичный вид имеет вектор $f \in \mathcal{F}$. Операторы L и M определим равенствами $L = A_1 \otimes A_2$ и $M = B_1 \otimes B_2$. Оператор L принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M : \text{dom } M \rightarrow \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен, $\text{dom } M = \mathcal{U}_1 \times \text{dom } B_2$.

Теорема 2.2.3. *Пусть $\kappa^{-1} \notin \sigma(A)$, тогда оператор M сильно $(L, 1)$ -секториален.*

Доказательство. Из теоремы 2.2.1 и результатов пункта 3.1. работы [37] следует, что оператор B_1 сильно $(A_1, 1)$ -секториален. В силу этого и теорем 1.2.3 и 2.2.2 справедливо утверждение теоремы 2.2.3 ■

Перейдем к построению нелинейного оператора F . Представим его в виде

$$F = F_1 \otimes F_2,$$

где

$$F_1 = F_1(u_\sigma, u_\pi, b) = (-\Sigma((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - 2\Omega \times (u_\sigma + u_\pi) + (\nabla \times b) \times b),$$

$$-\Pi(((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - 2\Omega \times (u_\sigma + u_\pi) + (\nabla \times b) \times b), \underbrace{0, \dots, 0}_{K+1}),$$

$$F_2 = F_2(u_\sigma, u_\pi, b) = \nabla \times ((u_\sigma + u_\pi) \times b).$$

В нашем случае $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_1 \times \text{dom } B_2$ (в силу непрерывности оператора B_1).

Теорема 2.2.4. *Оператор F принадлежит $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$.*

Доказательство. Утверждение теоремы 2.2.4 вытекает из того, что при любых $u \in \mathcal{U}_M$ оператор F'_u принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$, вторая производная Фреше F''_u оператора F является непрерывным билинейным оператором из $\mathcal{U}_M \times \mathcal{U}_M$ в $\mathcal{F}$, а $F'''_u \equiv O$ (аналогично [59, 48]). ■

Итак, задача (2.2.1), (2.2.2) редуцирована к задаче (1.2.1), (1.2.2). В дальнейшем мы их отождествляем. Проверим условия теорем 1.2.1 и 1.2.2.

По теореме 2.2.1 и в соответствии с результатами пункта 3.1. работы [37] можно построить аналитическую полугруппу $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, разрешающую уравнение 1.2.2. Для данного случая эта полугруппа может быть представлена в виде $U^t = V^t \times W^t$. Здесь $V^t(W^t)$ является сужением U^t на подпространство $\mathcal{U}_1(\mathcal{U}_2)$. Поскольку оператор B_2 является секториальным, то $W^t = \exp(tB_2)$. Тогда ядро полугруппы $\mathcal{W}^0 = \{0\}$, а образ $\mathcal{W}^1 = \mathcal{U}_2$.

Рассмотрим полугруппу $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$. Следуя теоремам 2.2.1 и 2.2.3 и результатам пункта 3.1. работы [37] данная полугруппа может быть продолжена до группы $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$. Ее ядро $\mathcal{V}^0 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$, где $\mathcal{U}_1^{00} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \{0\} \times \dots \times \{0\} (= \ker A_1 \text{ в силу теоремы 2.2.1})$, а $\mathcal{U}_1^{01} = \Sigma A_{\varkappa}^{-1} A_{\varkappa\pi}^{-1} [\mathbf{H}_\pi^2] \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{K+1}$. Здесь $A_{\varkappa} = I - \varkappa A$, $A_{\varkappa\pi}$ – сужение оператора $\Pi A_{\varkappa}^{-1}$ на $\mathbf{H}_\pi$. Т.к. $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, то, как известно, оператор $A_{\varkappa\pi} : \mathbf{H}_\pi \rightarrow \mathbf{H}_\pi^2$ является топлайнным изоморфизмом. С помощью $\mathcal{U}_1^1$

далее обозначим образ $\mathcal{V}^1$. Так как оператор B_1 сильно $(A_1, 1)$ -секториален, то имеет место разложение $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01} \oplus \mathcal{U}_1^1$.

Перейдем к построению оператора R (см. (1.2.3), (1.2.4)). В нашем случае $R = B_{10}^{-1}A_{10} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$, здесь $A_{10}(B_{10})$ – сужение оператора $A_1(B_1)$ на $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$. (Существование оператора B_{10}^{-1} справедливо в силу теоремы 2.2.3 и соответствующих результатов из [37]). По построению $\ker R = \mathcal{U}_1^{00}$, а в работе [55] показано, что $\operatorname{im} R = \mathcal{U}_1^{01}$. Следовательно, оператор R является бирасщепляющим. Будем обозначать через P_R проектор пространства $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$ на $\mathcal{U}_1^{00}$ вдоль $\mathcal{U}_1^{01}$. В силу конструкции пространства $\mathcal{U}_M$ проектор P_R принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, где $\mathcal{U}_M^0 = \mathcal{U}_M \cap (\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}) (\equiv \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$. Итак, справедлива

Лемма 2.2.1. *Пусть $\kappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. Тогда оператор R бирасщепляющий, причем $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$.*

Рассмотрим проекторы

$$P_k = \operatorname{diag} [\hat{P}_k, 0], \quad Q_k = \operatorname{diag} [\hat{Q}_k, 0], \quad k = 0, 1.$$

(Согласно результату [37], так как ядро $\mathcal{W}^0 = \{0\}$, получим, что $I - P = (P_0 + P_1) \times O$, $Q = (I - Q_0 - Q_1) \times I$, $P : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^1$, $Q : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^1$.) Тогда, действуя проектором $I - P$ на уравнение (1.2.2), получаем уравнения

$$\begin{aligned} \Pi(\nu A(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) + \sum_{l=1}^K \beta_l \nabla^2 w_l - u_p - \\ - 2\Omega \times (u_\sigma + u_\pi) + (\nabla \times b) \times b) = 0, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

$$Bu_\pi = 0, \quad Bb_\pi = 0.$$

Отсюда в силу свойств оператора B и по теореме 1.2.1 получаем необходимое условие квазистационарности полутраектории $u_\pi \equiv 0$, $b_\pi \equiv 0$, т.е. все решения (если они существуют) нашей задачи с необходимостью должны лежать в плоскости $\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{U}_M : u_\pi = 0, b_\pi = 0\}$.

В силу того что $\Pi u_p = u_p$, из первого уравнения (2.2.4) получаем соотношение (1.2.5), т.е. в нашем случае

$$u_p = \Pi(\nu A u_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla) u_\sigma + \sum_{l=1}^K \beta_l \nabla^2 w_l - 2\Omega \times u_\sigma + (\nabla \times b_\sigma) \times b_\sigma). \quad (2.2.5)$$

Из тождества $P_0 \equiv P_R$ следует, что второе и третье уравнения в (2.2.4) есть соотношение (1.2.6) применительно к нашему случаю. Следовательно, справедлива

Лемма 2.2.2. *При выполнении условий леммы 2.2.1 каждое решение задачи (2.2.1), (2.2.2) потросторно принадлежит множеству*

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathcal{U}_M : u_\pi = 0, b_\pi = 0, \\ u_p = \Pi(\nu A_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla) u_\sigma + \sum_{l=1}^K \beta_l \nabla^2 w_l - 2\Omega \times u_\sigma + (\nabla \times b_\sigma) \times b_\sigma)\}.$$

Замечание 2.2.3. *Из соотношения (2.2.5) вытекает условие A_2) теоремы 1.2.2 для любой точки $u_0^0 \in \mathcal{U}_M^{00} (\equiv \mathcal{U}_1^{00} \times \{0\})$. Поэтому аналогично [37] можно заключить, что множество $\mathfrak{M}$ – простое банахово многообразие, C^∞ -диффеоморфное подпространству $\mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$, является возможным фазовым пространством задачи (2.2.1), (2.2.2) ((2.2.3), (2.2.2)).*

Проверим условия (1.2.7), (1.2.8). Построим пространство $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_1 \times \overset{\circ}{W}_2^1(D)$. Данное пространство, очевидно, интерполяционное пространством для пары $[\mathcal{U}, \mathcal{U}_M]_\alpha$, причем $\alpha = 1/2$. Как замечалось ранее, полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ может быть продолжена до группы $\{V_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ на $\mathcal{U}_1^1$, где V_1^t – сужение оператора V^t на $\mathcal{U}_1^1$. В силу того что $\mathcal{U}_M^1 = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}_1^1$ по построению, оператор B_1 непрерывен в силу теоремы 2.2.1 и полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ равномерно

ограничена, получим неравенство

$$\int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1; \mathcal{U}_M^1)} dt \leq \text{const} \times \|B_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)} \int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1)} dt < \infty, \quad \tau \in \mathbb{R}_+. \quad (2.2.6)$$

Согласно неравенству Соболева [36], для полугруппы $\{W^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ справедлива оценка

$$\int_0^\tau \|W^t\|_{\mathcal{L}(\text{dom } B_2; \overset{\circ}{W}_2^1(D))} dt < \infty. \quad (2.2.7)$$

Положим $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$. Здесь $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$. Из неравенств (2.2.6) и (2.2.7) следует

Лемма 2.2.3. *При выполнении условий леммы 2.2.1 справедливо соотношение (1.2.7).*

Теперь, учитывая условие (1.2.8), найдем оператор H . Оператор H естественно представим в виде $H = H_1 \otimes H_2$, где $H_1 = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)F_1$, а $H_2 \equiv F_2$ (A_{11} – сужение оператора A_1 на $\mathcal{U}_1^1$). Для оператора H верно утверждение, аналогичное теореме (2.2.4) для оператора F , т.е. $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{U}_\alpha^1)$, где $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$.

Таким образом, все условия теоремы 1.2.2 выполнены. Справедлива

Теорема 2.2.5. *Пусть $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. При каждом $u_0 \in \mathfrak{M}$, и некотором $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственная квазистационарная полутраектория $u = (u_\sigma, 0, u_p, u_b)$, являющаяся решением задачи (2.2.1), (2.2.2), причем $u(t) \in \mathfrak{M}$ при $t \in (0, T)$.*

2.3. Модель несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта нулевого порядка в магнитном поле Земли

Система

$$\begin{aligned} (1 - \varkappa \nabla^2) v_t &= \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla) v - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \times v + \frac{1}{\rho\mu} (\nabla \times b) \times b, \\ \nabla \cdot v &= 0, \quad \nabla \cdot b = 0, \quad b_t = \delta \nabla^2 b + \nabla \times (v \times b). \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

моделирует поток вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина-Фойгта [40] в магнитном поле Земли. Здесь вектор-функция $v = (v_1(x, t), v_2(x, t), \dots, v_n(x, t))$ характеризует скорость жидкости, вектор-функция $b = (b_1(x, t), b_2(x, t), \dots, b_n(x, t))$ – магнитную индукцию жидкости, $\varkappa$ – коэффициент упругости, ν – коэффициент вязкости, ρ – плотность, $p = p(x, t)$ – давление, Ω – угловую скорость, μ – магнитную проницаемость, δ – магнитную вязкость.

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы (2.3.1)

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= v_0(x), \quad b(x, 0) = b_0(x), \quad x \in D, \\ v(x, t) &= 0, \quad b(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial D \times \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Здесь область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$, – ограниченная с границей ∂D класса C^∞ .

Задача (2.3.1), (2.3.2) продолжает исследования моделей сред Кельвина-Фойгта, начатых в работах [42, 40], в которых было проведено обобщение системы уравнений Навье-Стокса [33, 74], доказаны теоремы существования и единственности решения для соответствующих начально-краевых задач. При $\varkappa = 0$ задача (2.3.1), (2.3.2) изучалась в [83]. В случае $\varkappa \neq 0$ она рассматривается с помощью редукции к абстрактной задаче (1.2.1), (1.2.2).

Будем редуцировать задачу (2.3.1), (2.3.2) к задаче (1.2.1), (1.2.2). Для

этого перейдем от системы (2.3.1) к системе

$$\begin{aligned} (1 - \kappa \nabla^2) v_t &= \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla) v - \bar{p} - 2\Omega \times v + (\nabla \times b) \times b, \\ \nabla(\nabla \cdot v) &= 0, \quad \nabla(\nabla \cdot b) = 0, \\ b_t &= \delta \nabla^2 b + \nabla \times (v \times b). \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Рассмотрим разрешимость задачи (2.3.3), (2.3.2). Следуя [68, 69], введем пространства $\mathbf{H}_\sigma^2, \mathbf{H}_\pi^2, \mathbf{H}_\sigma$ и $\mathbf{H}_\pi$. Здесь $\mathbf{H}_\sigma^2$ и $\mathbf{H}_\sigma$ – подпространства соленоидальных функций в пространствах $(W_2^2(D))^n \cap (\mathring{W}_2^1(D))^n$ и $(L_2(D))^n$ соответственно. Их ортогональные (в смысле $(L_2(D))^n$) дополнения – $\mathbf{H}_\pi^2$ и $\mathbf{H}_\pi$. Через Σ обозначим ортопроектор на $\mathbf{H}_\sigma$. Сужение этого ортопроектора на пространство $(W_2^2(D))^n \cap (\mathring{W}_2^1(D))^n$ также обозначим через Σ . Положим $\Pi = I - \Sigma$.

Зададим линейный непрерывный оператор следующим равенством: $A = \nabla^2 E_n : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbf{H}_\sigma \oplus \mathbf{H}_\pi$, где E_n – единичная матрица n -го порядка. Спектр $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ этого оператора дискретен, конечнократен и сгущается лишь на $-\infty$. Формулой $B_v : v \rightarrow \nabla(\nabla \cdot v)$ ($B_b : b \rightarrow \nabla(\nabla \cdot b)$) зададим линейный непрерывный сюръективный оператор $B_v(B_b) : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbf{H}_\pi$ с ядром $\ker B_v = B_b = \mathbf{H}_\sigma^2$. Введем в рассмотрение пространства $\mathcal{U}_1 = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \mathbf{H}_p$, $\mathcal{F}_1 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p$, где $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$. Будем использовать при этом естественный изоморфизм прямой суммы и декартова произведения банаховых пространств. Операторы A_1 и B_1 определены равенствами

$$A_1 = \begin{pmatrix} \Sigma(I - \kappa A) & 0 & 0 \\ \Pi(I - \kappa A) & \Pi(I - \kappa A) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} \nu \Sigma A & 0 & 0 \\ \nu \Pi A & \nu \Pi A & -I \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $B = \nabla(\nabla \cdot v) - \nabla(\nabla \cdot b) = B_v - B_b$.

Замечание 2.3.1. Для сужения оператора ΣA на $\mathbf{H}_\sigma^2$ будем использовать обозначение A_σ . Спектр $\sigma(A_\sigma)$, на основе теоремы Солонникова–Воровича–

Юдовича, является вещественным, дискретным, конечнократным и сгущающимся к $-\infty$.

Теорема 2.3.1. *i) Операторы A_1, B_1 принадлежат $\mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)$ и если $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A)$, то оператор A_1 бирасщепляющий, $\ker A_1 = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p$, $\operatorname{im} A_1 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\}$.*

ii) Если $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, то оператор B_1 $(A_1, 1)$ -ограничен.

Доказательство. Утверждение теоремы 2.3.1 является прямым следствием результатов п. 2.6 [69]. ■

Пусть, далее $\mathcal{U}_2 = \mathcal{F}_2 = L_2(D)$ и равенством $B_2 = \delta \nabla^2 : \operatorname{dom} B_2 \rightarrow \mathcal{F}_2$ определим замкнутый линейный плотно определенный оператор B_2 , $\operatorname{dom} B_2 = W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(D)$.

Положим $A_2 \equiv I$.

Теорема 2.3.2. *Оператор B_2 сильно A_2 -секториален.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует, очевидно, из секториальности оператора B_2 [80]. ■

Положим $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Вектор u пространства $\mathcal{U}$ имеет вид $u = \operatorname{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p, u_b)$, где $\operatorname{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p) \in \mathcal{U}_1$, а $u_b \in \mathcal{U}_2$, $u_b = (b_\sigma, b_\pi)$, $b_\sigma \in \mathbf{H}_\sigma^2$, $b_\pi \in \mathbf{H}_\pi^2$. Аналогичный вид имеет вектор $f \in \mathcal{F}$. Операторы L и M определим равенствами $L = A_1 \otimes A_2$ и $M = B_1 \otimes B_2$. Оператор L принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M : \operatorname{dom} M \rightarrow \mathcal{F}$ является линейным, замкнутым и плотноопределенным, $\operatorname{dom} M = \mathcal{U}_1 \times \operatorname{dom} B_2$.

Теорема 2.3.3. *Пусть $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A)$, тогда оператор M сильно $(L, 1)$ -секториален.*

Доказательство. Следуя теореме 2.3.2 и замечанию 1.6.6 в работе [69], оператор B_1 – сильно($A_1, 1$)-секториален. В следствие этого, а также теорем 1.2.3 и 2.3.2 утверждение теоремы 2.3.3 справедливо. ■

Построим нелинейный оператор F . Представим его в виде

$$F = F_1 \otimes F_2,$$

где

$$\begin{aligned} F_1 = F_1(u_\sigma, u_\pi, b) &= \text{col}(-\Sigma(((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - 2\Omega \times (u_\sigma + u_\pi) + (\nabla \times b) \times b), \\ &\quad -\Pi(((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - 2\Omega \times (u_\sigma + u_\pi) + (\nabla \times b) \times b), 0), \\ F_2 = F_2(u_\sigma, u_\pi, b) &= \nabla \times ((u_\sigma + u_\pi) \times b). \end{aligned}$$

В нашем случае $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_1 \times \text{dom } B_2$ (в силу непрерывности оператора B_1).

Теорема 2.3.4. *Оператор F принадлежит $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$.*

Доказательство. Утверждение теоремы 2.3.4 следует из того факта, что при любых $u \in \mathcal{U}_M$ оператор F'_u принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$. Аналогично можно заключить, что вторая производная Фреше F''_u оператора F является непрерывным билинейным оператором из $\mathcal{U}_M \times \mathcal{U}_M$ в $\mathcal{F}$, а $F'''_u \equiv O$ (аналогично работам [59, 48]). ■

Итак, задача (2.3.1), (2.3.2) редуцирована к задаче (1.2.1), (1.2.2). В дальнейшем мы их отождествляем. Проверим условия теорем 1.2.1 и 1.2.2.

Из теорем 1.2.1 и 1.5.1 [69] следует существование аналитической полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, разрешающей уравнение (1.2.2). В данном случае эту полугруппу будем представлять в виде $U^t = V^t \times W^t$, где $V^t(W^t)$ – сужение оператора U^t на $\mathcal{U}_1(\mathcal{U}_2)$. Из того, что оператор B_2 секториален, следует, что

$W^t = \exp(tB_2)$, откуда имеем, что ядро этой полугруппы $\mathcal{W}^\circ = \{0\}$, а образ $\mathcal{W}^1 = \mathcal{U}_2$.

Рассмотрим, далее, полугруппу $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$. Следуя теоремам 2.3.1 и 2.3.3 и замечанию 1.5.2 из [69] данная полугруппа может быть продолжена до группы $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$. Ее ядро $\mathcal{V}^0 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$, где $\mathcal{U}_1^{00} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p (= \ker A_1 \text{ в силу теоремы 2.3.1, а } \mathcal{U}_1^{01} = \Sigma A_{\kappa}^{-1} A_{\kappa\pi}^{-1} [\mathbf{H}_{\pi}^2] \times \mathbf{H}_{\pi}^2 \times \{0\}$. Здесь $A_{\kappa} = I - \kappa A$, $A_{\kappa\pi}$ – сужение оператора ΠA_{κ}^{-1} на $\mathbf{H}_{\pi}$. Как известно, в случае, когда $\kappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_{\sigma})$, оператор $A_{\kappa\pi} : \mathbf{H}_{\pi} \rightarrow \mathbf{H}_{\pi}^2$ будет топ линейным изоморфизмом [69]. Обозначим через $\mathcal{U}_1^1$ образ $\mathcal{V}^1$. Тогда, в силу того, что оператор B_1 – сильно $(A_1, 1)$ -секториален, пространство $\mathcal{U}_1$ будет разлагаться в прямую сумму подпространств $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01} \oplus \mathcal{U}_1^1$.

Перейдем к построению оператора R (см. (1.2.3), (1.2.4)). Имеем, $R = B_{10}^{-1} A_{10} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$, где $A_{10}(B_{10})$ – сужение оператора $A_1(B_1)$ на $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$. (Существование оператора B_{10}^{-1} имеет место в силу теоремы 1.2.3 и результатов из [69]). По построению $\ker R = \mathcal{U}_1^{00}$, а в работе [55] показано, что $\text{im } R = \mathcal{U}_1^{01}$. Следовательно, оператор R является бирасщепляющим. Пусть P_R – проектор пространства $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$ на $\mathcal{U}_1^{00}$ вдоль $\mathcal{U}_1^{01}$. В силу конструкции пространства $\mathcal{U}_M$ проектор P_R принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, где $\mathcal{U}_M^0 = \mathcal{U}_M \cap (\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}) (\equiv \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$. Таким образом, справедлива

Лемма 2.3.1. *Пусть $\kappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_{\sigma})$. Тогда оператор R бирасщепляющий, причем $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$.*

Рассмотрим проекторы

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & P_1^{12} & 0 \\ 0 & \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $P_1^{12} = \Sigma A_{\pi}^{-1} A_{\pi}^{-1}$. В силу того что $\mathcal{W}^0 = \{0\}$, имеем $I - P = (P_0 \oplus P_1) \otimes O$. Тогда, действуя проектором $I - P$ на уравнение (1.2.2), получаем уравнения

$$\begin{aligned} \Pi(\nu A(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - u_p - 2\Omega \times (u_\sigma + u_\pi) + (\nabla \times b) \times b) &= 0, \\ Bu_\pi &= 0, \quad Bb_\pi = 0. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Отсюда, из свойств оператора B , а также следуя теореме 1.2.1 получаем необходимое условие квазистационарности полутраектории $u_\pi \equiv 0, b_\pi \equiv 0$, что означает, что все решения (если они существуют) нашей задачи с необходимостью должны лежать в плоскости $\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{U}_M : u_\pi = 0, b_\pi = 0\}$.

В силу того что $\Pi u_p = u_p$, из первого уравнения (2.3.4) получаем соотношение (1.2.5), т.е. применительно к нашему случаю

$$u_p = \Pi(\nu A u_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla) u_\sigma - 2\Omega \times u_\sigma + (\nabla \times b_\sigma) \times b_\sigma). \quad (2.3.5)$$

Из тождества $P_0 \equiv P_R$ следует, что в нашем случае второе и третье уравнения в (2.3.4) есть соотношение (1.2.6). То есть, имеет место

Лемма 2.3.2. *При выполнении условий леммы 2.3.1 всякое решение задачи (2.3.1), (2.3.2) потраекторно принадлежит множеству*

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathcal{U}_M : u_\pi = 0, b_\pi = 0, u_p = \Pi(\nu A_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla) u_\sigma - 2\Omega \times u_\sigma + (\nabla \times b_\sigma) \times b_\sigma)\}.$$

Замечание 2.3.2. *Из соотношения (2.3.5) вытекает условие A_2) теоремы 1.2.2 для любой точки $u_0^0 \in \mathcal{U}_M^{00} (\equiv \mathcal{U}_1^{00} \times \{0\})$. Поэтому аналогично п. 3.2 из [69] следует, что $\mathfrak{M}$ является простым банаховым многообразием, $\mathcal{C}^\infty$ -диффеоморфным подпространству $\mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$. В дальнейшем будет показано, что именно оно будет фазовым пространством задачи (2.3.1), (2.3.2) ((2.3.3), (2.3.2)).*

Проверим условия (1.2.7), (1.2.8). Построим пространство $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_1 \times \mathring{W}_2^1(D)$. Очевидно, что это пространство будет интерполяционным для пары $[\mathcal{U}, \mathcal{U}_M]_\alpha$, причем $\alpha = 1/2$. Как было замечено ранее, полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ может быть продолжена до группы $\{V_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ на $\mathcal{U}_1^1$, где V_1^t – сужение оператора V^t на $\mathcal{U}_1^1$. Так как $\mathcal{U}_M^1 = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}_1^1$ по построению, оператор B_1 в силу теоремы 2.3.1 непрерывный, а полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ равномерно ограничена, получим неравенство

$$\int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1; \mathcal{U}_M^1)} dt \leq \text{const} \times \|B_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)} \int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1)} dt < \infty, \quad \tau \in \mathbb{R}_+. \quad (2.3.6)$$

Согласно неравенству Соболева [36], для полугруппы $\{W^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ справедлива оценка

$$\int_0^\tau \|W^t\|_{\mathcal{L}(\text{dom } B_2; \mathring{W}_2^1(D))} dt < \infty. \quad (2.3.7)$$

Пусть $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$. Здесь $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$. На основании неравенств (2.3.6) и (2.3.7) справедлива

Лемма 2.3.3. *При выполнении условий леммы 2.3.1 выполнено (2.3.7).*

Теперь, учитывая условие (1.2.8), найдем оператор H . Для этого построим проектор $Q : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^1$. Согласно результатам работы [55], $Q = (I - Q_0 - Q_1) \times I$, где

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_0^{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Q_1^{13} \\ 0 & 0 & Q_1^{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при этом $Q_1^{13} = \Sigma A A_\pi^{-1} A_{\pi\pi}^{-1} B_\pi^{-1}$, $Q_1^{23} = \Pi A A_\pi^{-1} A_{\pi\pi}^{-1} B_\pi^{-1}$, $Q_0^{23} = -Q_1^{23}$, а оператор B_π – сужение оператора B на H_π^2 , причем в силу теоремы Банаха об

обратном операторе оператор $B_\pi : H_\pi^2 \rightarrow H_\pi$ – тоplineйный изоморфизм. Таким образом, оператор $H = H_1 \otimes H_2$, где $H_1 = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)F_1$, а $H_2 \equiv F_2$ (A_{11} – сужение оператора A_1 на $\mathcal{U}_1^1$). Для оператора H справедливо утверждение, аналогичное теореме 2.3.4 для оператора F , т.е. $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{U}_\alpha^1)$, где $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$.

Следовательно, все условия теоремы 1.2.2 выполняются. Итак, верна

Теорема 2.3.5. *Пусть $\kappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. Тогда при каждом $u_0 \in \mathfrak{M}$, и некотором $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственная квазистационарная полутраектория $u = (u_\sigma, 0, u_p, u_b)$, являющаяся решением задачи (2.3.1), (2.3.2), причем $u(t) \in \mathfrak{M}$ при $t \in (0, T)$.*

3. Численное моделирование течения вязкоупругой электропроводной жидкости в магнитном поле Земли

3.1. Алгоритм численного исследования течения вязкоупругой электропроводной жидкости в магнитном поле Земли

Рассмотрим процесс осесимметричного течения несжимаемой электропроводной вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта в цилиндре конечной длины в магнитном поле Земли. Начально-краевая задача, описывающая данный процесс, имеет вид:

$$(1 - \chi\Delta)v_t = \nu\Delta v - (v \cdot \nabla)v - \frac{1}{\rho}\nabla p - 2\Omega \times v + \frac{1}{\rho\mu}(\nabla \times b) \times b, \quad (3.1.1)$$

$$\nabla v = 0, \quad \nabla b = 0, \quad b_t = \delta\Delta b + \nabla \times (v \times b),$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad b(x, 0) = b_0(x), \quad x \in D, \quad (3.1.2)$$

$$v(x, t) = 0, \quad b(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial D \times R_+. \quad (3.1.3)$$

Здесь v – скорость жидкости, b – индукция магнитного поля, p – гидродинамическое давление, χ – коэффициент упругости жидкости, Ω – угловая скорость вращения жидкости, δ – магнитная вязкость жидкости μ – магнитная проницаемость жидкости, ρ – плотность жидкости, $\Omega = \frac{1}{2}\nabla \times v$ – угловая скорость вращения жидкости, $D \in R^2$ – цилиндр с достаточно гладкой границей ∂D . В параграфе 2.3 с помощью теории полулинейных уравнений соболевского типа доказана теорема существования и единственности решения указанной задачи. Для того, чтобы удовлетворить второму уравнению (3.1.1), положим

$$v = \nabla \times \psi. \quad (3.1.4)$$

При этом $\nabla v = \nabla \cdot (\nabla \times \psi) \equiv 0$ [29]. Подставляя (3.1.4) в (3.1.1), найдем

$$(1 - \chi \Delta) \nabla \times \psi_t = \nu \Delta (\nabla \times \psi) - \left((\nabla \times \psi) \cdot \nabla \right) \nabla \times \psi - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \times \nabla \times \psi + \frac{1}{\rho \mu} (\nabla \times b) \times b. \quad (3.1.5)$$

Здесь $2\Omega = \nabla \times (\nabla \times \psi) = \nabla(\nabla \cdot \psi) - \Delta \psi$ [29]. Возьмем от уравнения (3.1.5) операцию *rot*. С учетом $\nabla \times \nabla p \equiv 0$ [29], получим

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[(1 - \chi \Delta) \nabla \times \psi_t \right] &= \nu \nabla \times \left[\Delta (\nabla \times \psi) \right] - \\ &- \nabla \times \left[\left((\nabla \times \psi) \cdot \nabla \right) \nabla \times \psi + 2\Omega \times \nabla \times \psi - \frac{1}{\rho \mu} (\nabla \times b) \times b \right]. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Используя правила действия с оператором ∇ [29], запишем

$$\nabla \times \nabla \times \psi = \nabla(\nabla \cdot \psi) - \Delta \psi.$$

Тогда

$$\nabla \times \Delta (\nabla \times \psi) = \nabla \times \Delta (\nabla \times \psi) = \nabla \left[\Delta (\nabla \cdot \psi) \right] - \Delta^2 \psi,$$

и уравнение (3.1.6) примет вид

$$\begin{aligned} &\nabla(\nabla \cdot \psi_t) - \Delta \psi_t - \chi \left[\nabla \left(\Delta (\nabla \cdot \psi_t) \right) - \Delta^2 \psi_t \right] = \\ &= \nu \left[\nabla \left(\Delta (\nabla \cdot \psi) \right) - \Delta^2 \psi \right] - \nabla \times \left[\left((\nabla \times \psi) \cdot \nabla \right) \nabla \times \psi + \right. \\ &\quad \left. + \left(\nabla \times (\nabla \times \psi) \right) \times \nabla \times \psi - \frac{1}{\rho \mu} (\nabla \times b) \times b \right]. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Поскольку $\nabla b = 0$, то вектор b можно представлять в виде

$$b = \nabla \times A. \quad (3.1.8)$$

Вектор-функция A называется *векторным потенциалом* магнитного поля. С учетом выше сказанного запишем эквивалентную (3.1.1)-(3.1.3) следующую

начально – краевую задачу

$$\begin{aligned}\frac{\partial B(\psi)}{\partial t} &= C(\psi, A), \\ \frac{\partial G(A)}{\partial t} &= M(\psi, A),\end{aligned}\tag{3.1.9}$$

$$v = \nabla \times \psi, \quad b = \nabla \times A.$$

$$\nabla \times \psi(x, 0) = v_0(x), \quad \nabla \times A(x, 0) = b_0(x), \quad x \in D, \tag{3.1.10}$$

$$\nabla \times \psi(x, t) = 0, \quad \nabla \times A(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial D \times R_+. \tag{3.1.11}$$

Здесь векторно – дифференциальные выражения, входящие в систему (3.1.9), имеют вид:

$$\begin{aligned}B(\psi) &\equiv \nabla(\nabla \cdot \psi) - \Delta \psi - \chi \left[\nabla \left(\Delta(\nabla \cdot \psi) \right) - \Delta^2 \psi \right], \\ C(\psi, A) &\equiv \nu \left[\nabla \left(\Delta(\nabla \cdot \psi) \right) - \Delta^2 \psi \right] - \\ &- \nabla \times \left[\left((\nabla \times \psi) \cdot \nabla \right) \nabla \times \psi + \left(\nabla \times (\nabla \times \psi) \right) \times \nabla \times \psi \right] + \\ &+ \frac{1}{\rho \mu} \nabla \times \left[\left(\nabla(\nabla \cdot A) - \Delta A \right) \times (\nabla \times A) \right],\end{aligned}\tag{3.1.12}$$

$$\begin{aligned}G(A) &\equiv \nabla \times A, \\ M(\psi, A) &\equiv \nabla \times \left[(\nabla \times \psi) \times (\nabla \times A) \right].\end{aligned}\tag{3.1.13}$$

Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с центром O на одной из боковой поверхности цилиндра D и ось Oz совместим с осью цилиндра. В дальнейшем, в силу осесимметричности течения жидкости, надо учитывать, что $\frac{\partial f}{\partial \varphi} \equiv 0$, где f любая функция, входящая в решение задачи.

Запишем векторно – дифференциальные операторы, входящие в систему дифференциальных уравнений (3.1.9), в цилиндрической системе координат

$$\nabla \times \psi = -\frac{\partial \psi_\varphi}{\partial z} i_r + \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \right) i_\varphi + \left(\frac{\partial \psi_\varphi}{\partial r} + \frac{\psi_r}{r} \right) i_z.$$

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \psi) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\psi_r)}{\partial r} + \frac{\partial\psi_z}{\partial z}\right)i_r + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\psi_r)}{\partial r} + \frac{\partial\psi_z}{\partial z}\right)i_z = \\ &= \left(\frac{\partial^2\psi_r}{\partial r^2} - \frac{\psi_r}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi_z}{\partial z\partial r}\right)i_r + \left(\frac{\partial^2\psi_r}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial z} + \frac{\partial^2\psi_z}{\partial z^2}\right)i_z.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla[\Delta(\nabla \cdot \psi)] &= \left(\frac{\partial}{\partial r}i_r + \frac{\partial}{\partial z}i_z\right)\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \frac{\psi_r}{r} + \frac{\partial\psi_z}{\partial z}\right)\right] = \\ &= \left(\frac{\partial^4\psi_r}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3\psi_r}{\partial r^3} - \frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial r^2} + \frac{3}{r^3}\frac{\partial\psi_r}{\partial r} - \frac{3\psi_r}{r^4} + \frac{\partial^4\psi_z}{\partial r^3\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial^3\psi_z}{\partial r^2\partial z} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial r\partial z} + \frac{\partial^4\psi_r}{\partial r^2\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^3\psi_r}{\partial r\partial z^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^4\psi_r}{\partial r\partial z^3}\right)i_r + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^4\psi_r}{\partial r^3\partial z} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3\psi_r}{\partial r^2\partial z} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial\psi_r}{\partial z} + \frac{\partial^4\psi_z}{\partial r^2\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^3\psi_z}{\partial r\partial z^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^4\psi_r}{\partial r\partial z^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^3\psi_r}{\partial r^3} + \frac{\partial^4\psi_z}{\partial z^4}\right)i_z.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\Delta\psi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) = \\ &= \frac{\partial^4\psi}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial r} + 2\frac{\partial^4\psi}{\partial r^2\partial z^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3\psi}{\partial r\partial z^2} + \frac{\partial^4\psi}{\partial z^4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times [((\nabla \times \psi) \cdot \nabla)\nabla \times \psi] &= \left[\left(\frac{\partial^2\psi_r}{\partial z\partial r} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2}\right)\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial^3\psi_r}{\partial z^2\partial r} - \frac{\partial^3\psi_z}{\partial z\partial r^2}\right)\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial z} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial z\partial r}\right) - \left(\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r} + \frac{\psi_\varphi}{r}\right)\left(\frac{\partial^3\psi_r}{\partial z^3} - \frac{\partial^3\psi_z}{\partial z^2\partial r}\right)\right]i_r + \\ &\quad + \left[-\left(\frac{\partial^3\psi_\varphi}{\partial z\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r} + \frac{\psi_\varphi}{r}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^3\psi_\varphi}{\partial r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r} + \frac{2\psi_\varphi}{r^3}\right)\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial z} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r} - \frac{\psi_\varphi}{r^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r} - \frac{\psi_\varphi}{r^2}\right)\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z\partial r} - \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r} + \frac{\psi_\varphi}{r}\right)\frac{\partial^3\psi_\varphi}{\partial z^3} + \frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z^2}\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z\partial r} + \frac{\partial\psi_\varphi}{\partial z}\frac{\partial^3\psi_\varphi}{\partial z^2\partial r}\Big]i_\varphi + \\
& \quad + \left[\left(\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r} + \frac{\psi_\varphi}{r}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial z\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2} - \frac{\partial^2\psi_r}{\partial z\partial r}\right) + \right. \\
& \quad + \left(\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r} - \frac{\psi_\varphi}{r^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial z\partial r}\right) + \left(\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r} + \frac{\psi_\varphi}{r}\right)\left(\frac{\partial^3\psi_r}{\partial z^2\partial r} - \frac{\partial^3\psi_z}{\partial z\partial r^2}\right) + \\
& \quad \left. + \left(\frac{\partial^3\psi_z}{\partial r^3} - \frac{\partial^3\psi_r}{\partial z\partial r^2}\right)\frac{\psi_\varphi}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2} - \frac{\partial^2\psi_r}{\partial z\partial r}\right)\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z\partial r}\right]i_z. \\
& \quad \nabla \times \left[\left(\nabla \times (\nabla \times \psi)\right) \times \nabla \times \psi\right] = \\
& \quad = \left[\left(\frac{\partial^3\psi_r}{\partial z^2\partial r} - \frac{\partial^3\psi_z}{\partial z\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial z\partial r}\right)\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial z} + \right. \\
& \quad + \left(\frac{\partial^2\psi_r}{\partial z\partial r} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial r}\right)\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^3\psi_r}{\partial z^3} - \frac{\partial^3\psi_z}{\partial z^2\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r} + \frac{\psi_\varphi}{r}\right) - \\
& \quad \left. - \left(\frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial z\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial z}\right)\right]i_r + \\
& \quad + \left[\left(\frac{\partial^3\psi_r}{\partial z^2\partial r} - \frac{\partial^3\psi_z}{\partial z\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial z\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi_z}{\partial r} - \frac{\partial\psi_r}{\partial z}\right) - \right. \\
& \quad - \left(\frac{\partial^3\psi_\varphi}{\partial z^3} + \frac{\partial^3\psi_\varphi}{\partial z\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r} + \frac{\psi_\varphi}{r}\right) + \\
& \quad + \left(\frac{\partial^3\psi_\varphi}{\partial z^2\partial r} + \frac{\partial^3\psi_\varphi}{\partial r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r} + \frac{2\psi_\varphi}{r^3}\right)\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial z} - \\
& \quad - \left(\frac{\partial^2\psi_r}{\partial r\partial z} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial z\partial r}\right) - \\
& \quad - \left(\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r} - \frac{\psi_\varphi}{r^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial z}\right) + \\
& \quad + \left(\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r} - \frac{\psi_\varphi}{r^2}\right)\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z\partial r} + \left(\frac{\partial^3\psi_r}{\partial z^2\partial r} - \frac{\partial^3\psi_z}{\partial z\partial r^2}\right)\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial r}\right) + \\
& \quad + \left(\frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial z\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_r}{\partial z\partial r} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2}\right)\Big]i_\varphi + \left[\left(\frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2} - \frac{\partial^2\psi_r}{\partial z\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial r}\right)\frac{\partial\psi_\varphi^n}{\partial z} + \right. \\
& \quad + \left(\frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial z\partial r}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r} + \frac{\psi_\varphi}{r^2}\right) + \\
& \quad + \left(\frac{\partial^3\psi_z}{\partial r^3} - \frac{\partial^3\psi_r}{\partial z\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial z\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi_r}{\partial z} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi_z}{\partial r}\right)\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial z} + \\
& \quad + \left(\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r} - \frac{\psi_\varphi}{r^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_z}{\partial z\partial r} - \frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2} - \frac{\partial^2\psi_r}{\partial z\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial r}\right)\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z\partial r} +
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial^3\psi_r}{\partial z^2\partial r}-\frac{\partial^3\psi_z}{\partial z^2\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r}+\frac{\psi_\varphi}{r}\right)\Big]i_z.$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[\left(\nabla(\nabla \cdot A) - \Delta A \right) \times (\nabla \times A) \right] = & \left[\left(\frac{\partial^3 A_r}{\partial z^2 \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial r} - \right. \right. \\ & - \frac{\partial^3 A_z}{\partial z \partial r^2} \Big) \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} \right) \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \\ & + \left(\frac{\partial^3 A_z}{\partial z^2 \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial^3 A_r}{\partial z^3} \right) \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial r} - \frac{A_r}{r^2} - \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \Big] i_r - \\ & - \left[\left(\frac{\partial^3 A_\varphi}{\partial z \partial r^2} + \frac{\partial^3 A_\varphi}{\partial z^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z \partial r} \right) \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \right) + \right. \\ & + \left(\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial^3 A_r}{\partial z^2 \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial r} - \frac{\partial^3 A_z}{\partial z \partial r^2} \right) \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial r} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial^3 A_z}{\partial z \partial r^2} - \frac{\partial^3 A_r}{\partial z^2 \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2A_r}{r^3} \right) \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial r} - \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} - \frac{A_r}{r^2} \right) \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial z \partial r} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} \right) - \left(\frac{\partial^3 A_\varphi}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 A_\varphi}{\partial z^2 \partial r} + \right. \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \Big) \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} - \left(\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z \partial r} \Big] i_\varphi - \\ & - \left[\left(\frac{\partial^3 A_r}{\partial z \partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial z \partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial^3 A_z}{\partial r^3} \right) \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + \right. \\ & + \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} \right) \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z \partial r} + \\ & + \left(\frac{\partial^3 A_z}{\partial z \partial r^2} - \frac{\partial^3 A_r}{\partial z^2 \partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2A_r}{r^3} \right) \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial r} - \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} - \frac{A_r}{r^2} \right) \left(\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r^2} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} \right) \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial r}-\frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2}-\frac{A_r}{r^2}\right)\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}+\frac{A_\varphi}{r}\right)\Big]i_z.$$

$$\nabla \times \psi = -\frac{\partial \psi_\phi}{\partial z}i_r + \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r}\right)i_\varphi + \left(\frac{\partial \psi_\varphi}{\partial r} + \frac{\psi_\varphi}{r}\right)i_z.$$

$$\begin{aligned} & \nabla \times \left[(\nabla \times \psi) \times (\nabla \times A) \right] = \\ & = \left[\left(\frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + \left(\frac{\partial \psi_\varphi}{\partial r} + \frac{\psi_\varphi}{r} \right) \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} - \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial z} - \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \right) \frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial z^2} \right] i_r + \\ & + \left[\left(\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z \partial r} \right) \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \right) + \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) - \left(\frac{\partial \psi_\varphi}{\partial r} + \frac{\psi_\varphi}{r} \right) \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial r} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial z \partial r} + \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial z \partial r} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} \right) \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial z} - \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial z \partial r} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial r^2} \right) \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} - \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z \partial r} \right] i_\varphi - \\ & - \left[\left(\frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial r} - \frac{\psi_\varphi}{r^2} \right) \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + \left(\frac{\partial \psi_\varphi}{\partial r} + \frac{\psi_\varphi}{r} \right) \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z \partial r} - \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \right) \frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial z \partial r} - \left(\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r^2} \right) \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial z} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_\varphi}{\partial r} + \frac{\psi_\varphi}{r} \right) \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \right) \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial z} \right] i_z. \end{aligned}$$

Используя процесс дискретизации, систему дифференциальных уравнений в частных производных (3.1.9) конечно – разностным методом преобразуем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по времени. Для этого на области исследования D в сечении $\varphi = \varphi_0$, рассмотрим множество точек $D_{h_r, h_z} = \{(r_i, \varphi_0, z_k)\}$, $D_{h_r, h_z} \in D$, $i = \overline{1, N_r}$, $k = \overline{1, N_z}$, где h_r , h_z определяют равномерные шаги сетки дискретизации по соответствующим

осям цилиндрической системы координат. Обозначим через r_0 радиус цилиндра, а через z_0 его длину. Тогда конечно – разностный аналог начально – краевой задачи (3.1.9) – (3.1.11) запишем в виде:

$$\frac{d\widehat{Y}(\psi_{ik}(t), A_{ik}(t))}{dt} = \widehat{F}(\psi_{ik}(t), A_{ik}(t)), \quad (3.1.14)$$

$$\begin{aligned} v_{ik}(t) &= \widehat{G}(\psi_{ik}(t)), \quad b_{ik}(t) = \widehat{G}(A_{ik}(t)), \\ \widehat{G}(\psi_{ik}(0)) &= v_0(r_i, z_k), \\ \widehat{G}(A_{ik}(0)) &= b_0(r_i, z_k), \quad (r_i, \varphi_0, z_k) \in D, \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

$$\widehat{G}(\psi_{ik}(t)) = 0, \quad \widehat{G}(A_{ik}(t)) = 0, \quad (r_i, \varphi_0, z_k, t) \in \partial D \times R_+ \quad (3.1.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \widehat{Y}(\psi_{ik}(t), A_{ik}(t)) &= \begin{pmatrix} \widehat{B}(\psi_{ik}(t)) \\ \widehat{G}(\psi_{ik}(t), A_{ik}(t)) \end{pmatrix}, \\ \widehat{F}(\psi_{ik}(t), A_{ik}(t)) &= \begin{pmatrix} \widehat{C}(\psi_{ik}(t), A_{ik}(t)) \\ \widehat{M}(\psi_{ik}(t), A_{ik}(t)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$\psi_{ik}(t) = \psi(r_i, z_k, t)$, $A_{ik}(t) = A(r_i, z_k, t)$, $\widehat{B}(\psi_{ik}(t))$, $\widehat{C}(\psi_{ik}(t), A_{ik}(t))$, $\widehat{G}(A_{ik}(t))$, $\widehat{M}(\psi_{ik}(t), A_{ik}(t))$ являются конечно – разностными аналогами выражений $B(\psi)$, $C(\psi, A)$, $G(A)$, $M(\psi, A)$ соответственно.

Для получения сеточных выражений $\widehat{B}(\psi_{ik}(t))$, $\widehat{C}(\psi_{ik}(t), A_{ik}(t))$, $\widehat{G}(A_{ik}(t))$, $\widehat{M}(\psi_{ik}(t), A_{ik}(t))$ надо аппроксимировать производные до четвертого порядка. Для этого в математической среде Maple написана программа, позволяющая находить коэффициенты в алгебраических формулах аппроксимации производных необходимого порядка, используя заданное количество узловых точек и определяющая порядок точности их аппроксимации.

Для численного решения задачи Коши (3.1.14) – (3.1.16) используются алгоритмы, основанные на явных одношаговых формулах типа Рунге – Кутты [39].

Алгоритм численного решения задачи (3.1.1) – (3.1.3) сводится к следующим этапам.

Этап 1. Вводя вектор-функции ψ и A соотношениями (3.1.4), (3.1.8), с помощью векторно дифференциальной операции *rot* исключить гидродинамическое давление жидкости p из системы дифференциальных уравнений в частных производных (3.1.1). В результате прийти к начально-краевой задаче (3.1.9) – (3.1.11).

Этап 2. Используя процесс дискретизации конечно-разностным методом, преобразовать систему дифференциальных уравнений в частных производных (3.1.9) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений по времени (3.1.14). Провести дискретизацию граничных условий (3.1.10), (3.1.11). В результате получить задачу Коши (3.1.14) – (3.1.16) для алгебро-дифференциальной системы (3.1.14).

Этап 3. Получить приближенное решение задачи Коши (3.1.14) – (3.1.16), используя явные одношаговые формулы типа Рунге – Кутты.

3.2. Описание программы численного решения

Данный метод был реализован в среде математического пакета Maple. Написанная программа находит приближенное решение задачи Коши – Дирихле, моделирующей течение вязкоупругой электропроводной жидкости в магнитном поле. Позволяет численно исследовать изучаемый процесс при изменении различных значений параметров задачи в широком диапазоне.

Обобщенная схема алгоритма программы приведена на рис. 3.2.1.

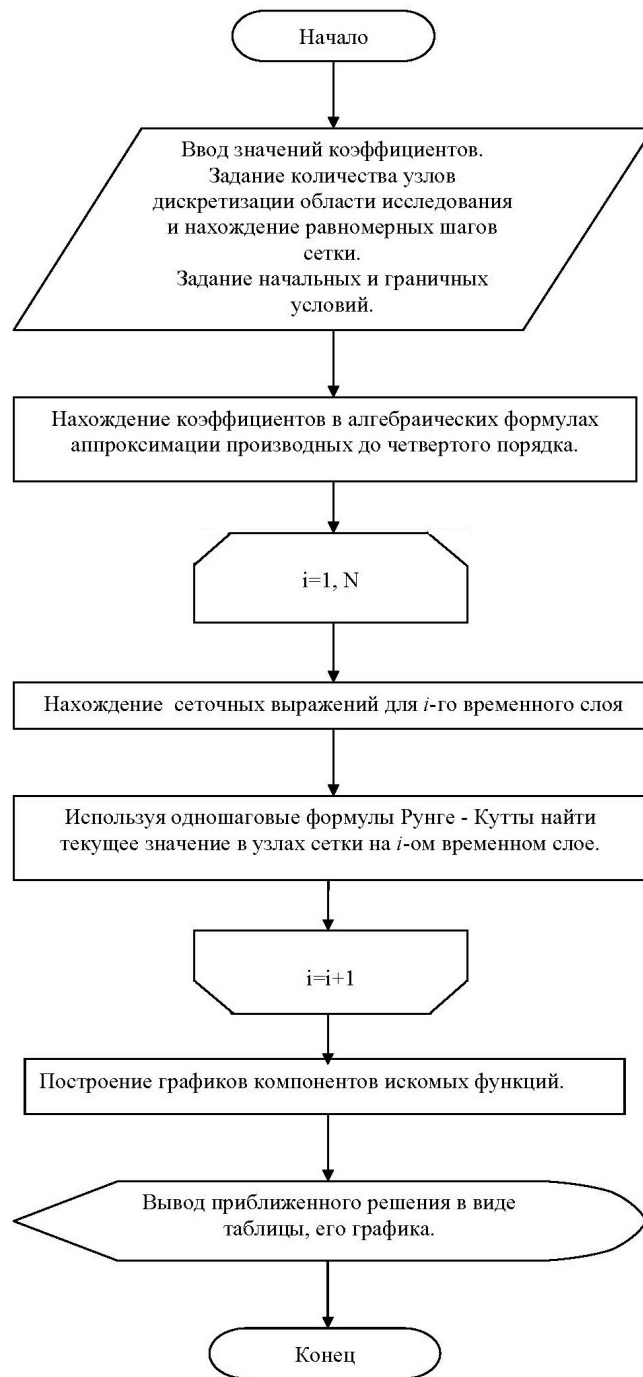


Рис. 3.2.1. Обобщенная схема алгоритма программы.

Опишем алгоритм, подробнее.

Шаг 1. Вводятся значения коэффициентов χ , ν , ρ , μ , δ . Задаются количество узлов дискретизации N_r , N_z области исследования D и находятся

равномерные шаги сетки h_r, h_z по осям Or, Oz . Задаются начальные $v_0(r, z)$, $b_0(r, z)$ и граничные условия.

Шаг 2. Нахождение коэффициентов в алгебраических формулах аппроксимации производных до четвертого порядка.

Шаг 3. На шаги 4 и 5 выполняются в цикле по i от первого до последнего временного слоя.

Шаг 4. Нахождение сеточные выражения $\widehat{B}(\psi_{ik}(t))$, $\widehat{C}(\psi_{ik}(t), A_{ik}(t))$, $\widehat{G}(A_{ik}(t))$, $\widehat{M}(\psi_{ik}(t), A_{ik}(t))$ и матрицы столбцы $\widehat{Y}(\psi_{ik}(t), A_{ik}(t))$, $\widehat{F}(\psi_{ik}(t), A_{ik}(t))$.

Шаг 5. Используя одношаговые формулы Рунге – Кутты, нахождение приближенное решение задачи (3.1.14) – (3.1.16). Для формул типа Рунге – Кутты коэффициенты вычисляются по формуле

$$k_i = hf \left(t_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \right),$$

где α_i, β_{ij} взяты из статьи [39].

Шаг 6. Решение, полученное в узлах сетки для каждой из компонент искомых функций, записывается в таблицы. По таблицам строятся графики каждой компоненты.

Шаг 7. Вывод на экран дисплея найденное приближенное решение задачи (3.1.1) – (3.1.3) в виде таблиц и графиков.

Программа «Численное моделирование течения вязкоупругой электропроводной жидкости в магнитном поле» предназначена для нахождения приближенного решения задачи Коши-Дирихле, моделирующей осесимметричное течение несжимаемой электропроводной вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта в цилиндре конечной длины в магнитном поле Земли. Программа написана на языке математического пакета Maple.

Функциональное назначение

Программа «Численное моделирование течения вязкоупругой электропроводной жидкости в магнитном поле» предназначена для численного исследования процесса осесимметричного течения несжимаемой электропроводной вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта в цилиндре конечной длины в магнитном поле Земли. Пакет программ позволяет найти приближенное решение задачи Коши-Дирихле, моделирующей исследуемый процесс, при изменении различных значений параметров задачи в широком диапазоне. В основной программе предусмотрены блоки ввода исходных данных, расчета необходимых параметров процесса и вывода результатов расчета, как в виде таблиц, так и в виде графических изображений.

Логическая структура программы

Опишем логическую структуру программы. В начале программы запускается математический пакет Maple, в нем открываются исполняющие файлы (расширение *.mws) и запускаются на выполнение. Непосредственное изменение значений параметров, используемых в процессе численного исследования модели, в листинге главной программы перед ее запуском.

Порядок работы с пакетом программ:

1. Открытие главной программы в среде Maple.
2. Ввод данных.
3. Запуск на выполнение

Результатом работы пакета программ является табличное и графическое представление решения исследуемой задачи.

3.3. Вычислительный эксперимент для математической модели течения вязкоупругой электропроводной жидкости в магнитном поле Земли

Используя пакет программ, написанный в среде Maple для исследования численного решения задачи нахождения скорости течения электропроводной жидкости и индуцированного магнитного поля проведены многочисленные вычислительные эксперименты. В таблицах 1 – 6 приведены результаты приближенного решения начально – краевой задачи (3.1.1) – (3.1.3) при следующих значениях параметров задачи $\chi = 2,7 \text{ м/с}^2$, $\nu = 0,00328 \text{ м}^2/\text{с}$, $\mu = 1$ $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\delta = 0,1$, $r_0 = 0,1 \text{ м}$, $z_0 = 0,2 \text{ м}$. На рисунках 1 – 6, соответствующие графики компонент решения.

Вектор – функции $v_0(r, z)$ и $b_0(r, z)$ в начальных условиях (3.1.2) задавались в виде $v_0 = \omega_0 r i_r$, $b_0 = b_{r_0} i_r$, где $\omega_0 = 0,25 \text{ 1/с}$, $b_{r_0} = 0,00005 \text{ Тл}$. Начальные условия для вектор – функций ψ , A задавались в виде $\psi(r, z, 0) = 0,25\omega_0 r(2z i_r - r i_z)$, $A(r, z, 0) = -b_{r_0} z i_\varphi$.

Граничные и начальные условия для вектор – функций ψ и A имели следующий вид:

$$\psi(r, z, t) = 0, \quad A(r, z, t) = 0, \quad (x, r, t) \in \partial D \times R_+.$$

Проведенные вычислительные эксперименты показали вычислительную устойчивость разработанного алгоритма численного решения начально – краевой задачи (3.1.1) – (3.1.3).

Таблица 1: Радиальная составляющая индукции магнитного поля $b_r = b_r(r, z, t_*)$

$r \setminus z$	0,00	0,03	0,07	0,10	0,13	0,17	0,20
0,00	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,0
0,02	0,00005	0,000037	0,000029	0,000025	0,000023	0,000019	0,0
0,03	0,00005	0,000032	0,000021	0,000016	0,000013	0,000009	0,0
0,05	0,00005	0,000027	0,000016	0,000011	0,000008	0,000005	0,0
0,07	0,00005	0,000021	0,000010	0,000006	0,000004	0,000002	0,0
0,08	0,00005	0,000012	0,000005	0,000002	0,000002	0,000001	0,0
0,10	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Таблица 2: Трансверсальная составляющая индукции магнитного поля $b_\varphi = b_\varphi(r, z, t_*)$

$r \setminus z$	0,00	0,03	0,07	0,10	0,13	0,17	0,20
0,00	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,02	0,0	0,0000000311	0,0000000326	0,0000000277	0,0000000240	0,0000000155	0,0
0,03	0,0	0,0000000182	0,0000000250	0,0000000190	0,0000000188	0,0000000071	0,0
0,05	0,0	0,0000000012	0,0000000084	0,0000000091	0,0000000087	0,0000000009	0,0
0,07	0,0	-0,0000000102	-0,0000000024	0,0000000023	0,0000000021	-0,0000000005	0,0
0,08	0,0	-0,0000000099	-0,0000000035	0,0000000001	0,0000000003	-0,0000000001	0,0
0,10	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Таблица 3: Осевая составляющая индукции магнитного поля $b_z = b_z(r, z, t_*)$

$r \setminus z$	0,00	0,03	0,07	0,10	0,13	0,17	0,20
0,00	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,02	0,0	0,0000000002	0,0000000001	-0,0000000001	0,0000000001	-0,0000000005	0,0
0,03	0,0	0,0000000003	0,0000000000	-0,0000000001	0,0000000000	-0,0000000004	0,0
0,05	0,0	0,0000000001	0,0000000000	-0,0000000000	-0,0000000001	0,0000000001	0,0
0,07	0,0	-0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	-0,0000000001	-0,0000000000	0,0
0,08	0,0	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	-0,0000000000	0,0000000001	0,0
0,10	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Таблица 4: Радиальная составляющая скорости течения жидкости $v_r = v_r(r, z, t_*)$

$r \setminus z$	0,00	0,03	0,07	0,10	0,13	0,17	0,20
0,00	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,02	0,0	0,0000341	-0,0000256	0,0000124	0,0000001	-0,0000962	0,0
0,03	0,0	-0,0000037	-0,0000432	0,0000455	-0,0000146	-0,0001775	0,0
0,05	0,0	-0,0000161	0,0000006	0,0000085	-0,0000220	-0,0000312	0,0
0,07	0,0	0,0000118	-0,0000059	0,0000047	-0,0000094	-0,0000427	0,0
0,08	0,0	0,0000240	-0,0000408	0,0000321	0,0000068	-0,0001432	0,0
0,10	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Таблица 5: Трансверсальной составляющая скорости течения жидкости $v_\varphi = v_\varphi(r, z, t_*)$

$r \setminus z$	0,00	0,03	0,07	0,10	0,13	0,17	0,20
0,00	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,02	0,0	0,0043346	0,0042290	0,0068445	0,0041265	0,0005924	0,0
0,03	0,0	0,0099041	0,0106864	0,0104223	0,0102435	0,0065793	0,0
0,05	0,0	0,0114041	0,0134179	0,0103383	0,0133596	0,0052806	0,0
0,07	0,0	0,0096802	0,0111023	0,0096645	0,0133596	0,0006218	0,0
0,08	0,0	0,0031571	0,0056702	0,0046582	0,0055238	-0,0031322	0,0
0,10	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Таблица 6: Осевая составляющая скорости течения жидкости $v_z = v_z(r, z, t_*)$

$r \setminus z$	0,00	0,03	0,07	0,10	0,13	0,17	0,20
0,00	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,02	0,0	-0,0001187	0,0000329	0,0000453	-0,0001281	0,0003038	0,0
0,03	0,0	-0,0000107	0,0000144	-0,0000142	0,00001039	0,00002863	0,0
0,05	0,0	0,0000437	-0,0000159	-0,0000163	0,0000447	-0,0000628	0,0
0,07	0,0	-0,0000280	-0,0000010	0,0000251	-0,0000527	0,0000675	0,0
0,08	0,0	-0,0000248	0,0000096	0,0000095	-0,0000252	0,0000022	0,0
0,10	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

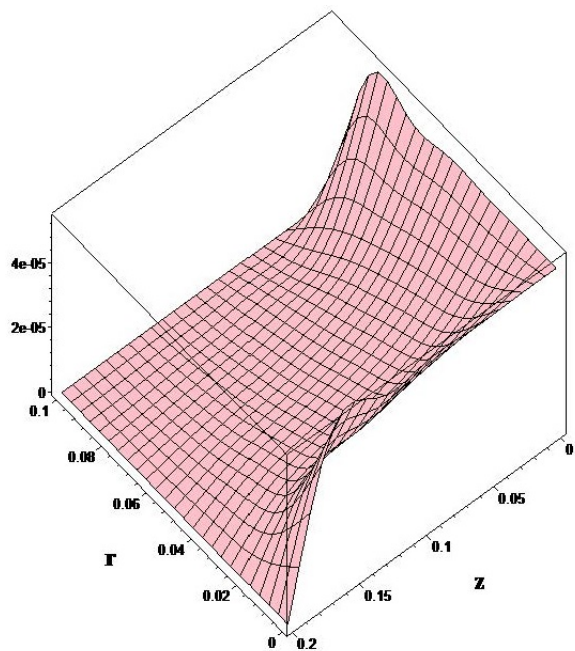


Рис. 1. График поверхности радиальной составляющей индукции магнитного поля

$$b_r = b_r(r, z, t_*) \text{ (Тл) в момент времени } t_* = 3 \text{ с.}$$

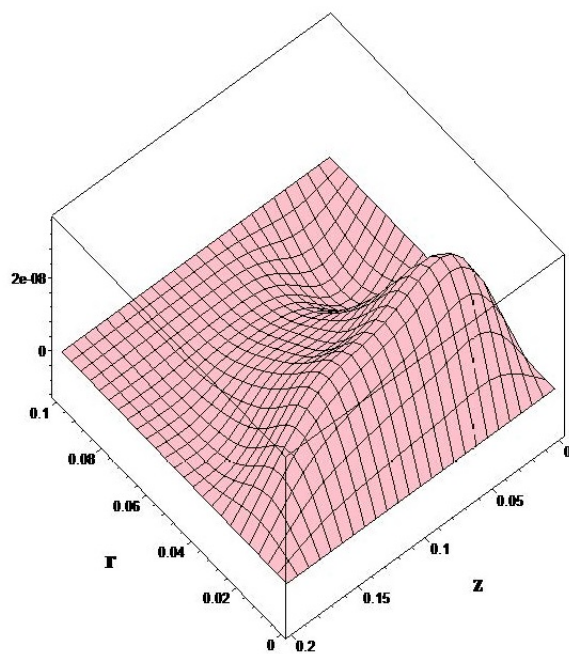


Рис. 2. График поверхности трансверсальной составляющей индукции магнитного поля

$$b_\varphi = b_\varphi(r, z, t_*) \text{ (Тл) в момент времени } t_* = 3 \text{ с.}$$

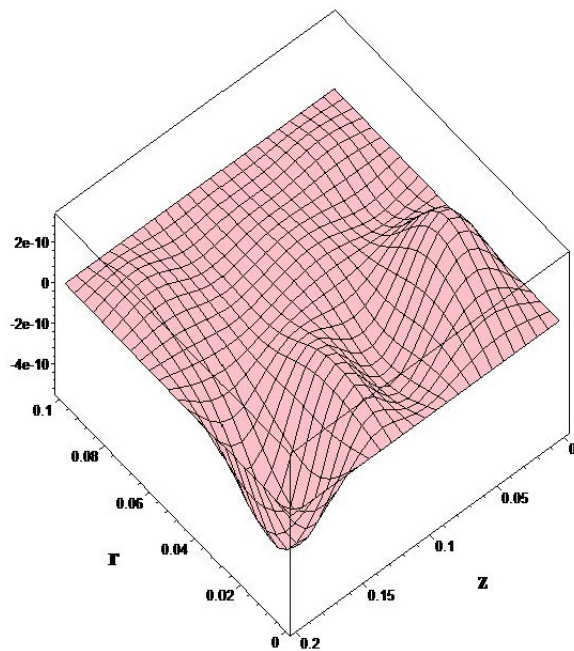


Рис. 3. График поверхности осевой составляющей индукции магнитного поля

$$b_z = b_z(r, z, t_*) \text{ (Тл) в момент времени } t_* = 3 \text{ с.}$$

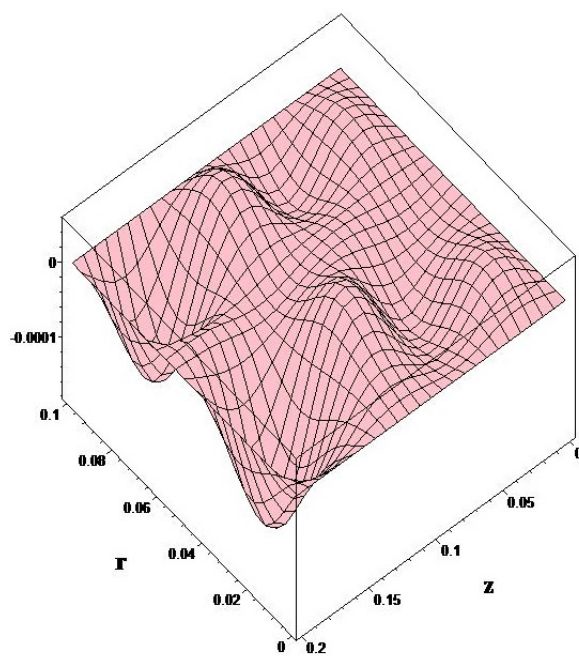


Рис. 4. График поверхности радиальной составляющей скорости течения жидкости

$$v_r = v_r(r, z, t_*) \text{ (м/с) в момент времени } t_* = 3 \text{ с.}$$

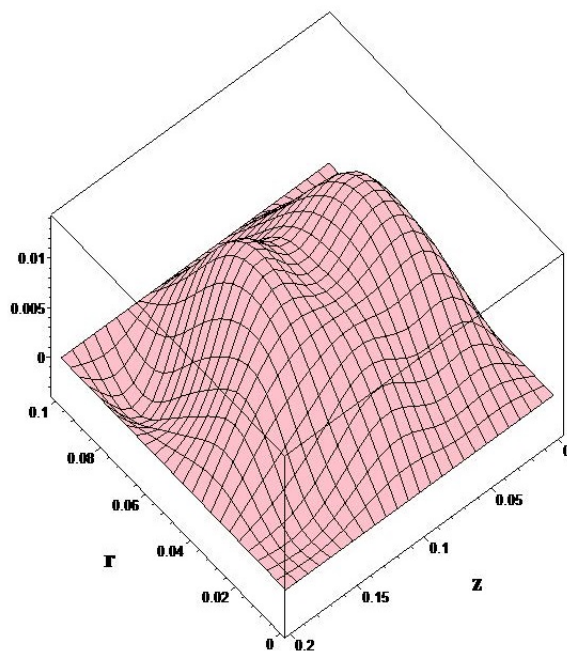


Рис. 5. График поверхности трансверсальной составляющей скорости течения жидкости

$$v_\varphi = v_\varphi(r, z, t_*) \text{ (м/с) в момент времени } t_* = 3 \text{ с.}$$

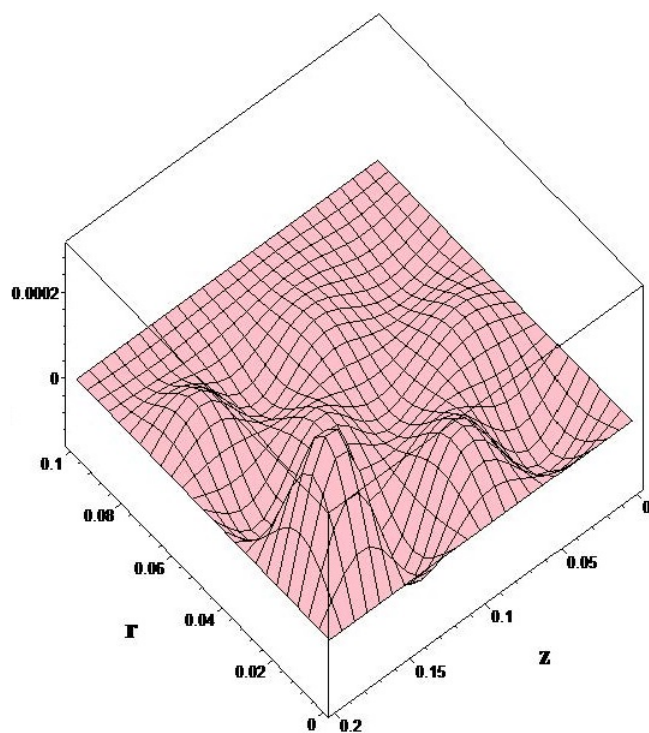


Рис. 6. График поверхности осевой составляющей скорости течения жидкости

$$v_z = v_z(r, z, t_*) \text{ (м/с) в момент времени } t_* = 3 \text{ с.}$$

Заключение

Полученные результаты позволяют говорить о соответствии диссертационной работы паспорту специальности 05.13.18. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». На основе метода фазового пространства в данной работе проведено исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей Кельвина-Фойгта в магнитном поле Земли различных порядков.

В диссертации получены следующие основные результаты, выносимые на защиту:

В рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п.2 паспорта специальности) получены:

– Достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для обобщенной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта ненулевого порядка в магнитном поле Земли, получено описание фазового пространства;

– Достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка Кельвина – Фойгта в магнитном поле Земли, получено описание фазового пространства;

– Достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости нулевого порядка Кельвина – Фойгта в магнитном поле Земли, получено описание фазового пространства;

В рамках разработки, обоснования и тестирования эффективных вы-

числительных методов с применением современных компьютерных технологий получен:

– Алгоритм численного решения начально-краевой задачи для системы, моделирующей динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта нулевого порядка в магнитном поле Земли;

В рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента получена:

– Программа, реализующая алгоритм численного моделирования течения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта нулевого порядка в магнитном поле Земли.

Таким образом, в работе решены все поставленные выше задачи и достигнута цель исследования.

Рекомендации по использованию научных выводов. Дальнейшее развитие представленных в диссертации результатов может быть связано с распространением разработанного алгоритма численного метода на случай жидкости Кельвина – Фойгта более высокого порядка, на случай не осесимметричного течения жидкости или на более общей области. Разработанные алгоритмы могут применяться для проведения исследований (вычислительных экспериментов) в соответствующих предметных областях. С теоретической точки зрения, исследования могут быть продолжены и для других эволюционных гидродинамических моделей, а также с обобщением полученных результатов на неавтономный случай и на стохастические модели магнито- и гидродинамики.

Список литературы

- [1] Александрян, Р.А. Спектральные свойства операторов порожденных системами дифференциальных уравнений типа Соболева / Р.А. Александрян // Труды Московского математического общества. – 1960. – Т. 9. – С. 455-505.
- [2] Бокарева, Т.А. Исследование фазовых пространств уравнений типа Соболева с относительно секториальными операторами: дис. ... канд. физ.-мат. наук. / Т.А. Бокарева; РГПУ им. А.И.Герцена. – СПб, 1993. – 107 с.
- [3] Борисович, Ю.Г. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере–Шаудера / Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, Ю.И. Сапронов // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32. № 4. С. 3–54.
- [4] Бояринцев, Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы: методы решения и исследования / Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
- [5] Брычев, С.В. Исследование математической модели экономики коммунального хозяйства малых городов: дис. ... канд. физ.-мат. наук / С.В. Брычев; ЧелГУ. – Челябинск, 2002. – 124 с.
- [6] Бурлачко, И.В. Исследование оптимального управления системами леонтьевского типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук / С.В. Бурлачко; ЧелГУ. – Челябинск, 2005. – 122 с.
- [7] Вайнберг М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М.Вайнберг, В.А.Треногин. – М.: Наука, 1969. – 527 с.

- [8] Вишик, М. И. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения /М.И. Вишик// Матем. сб. – 1956. –Т. 39 (81). – Вып. 1. – С. 51-148.
- [9] Врагов, В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В.Н. Врагов. – Новосибирск: Новосибирский госуниверситет, 1983. – 84 с.
- [10] Габов, С.А. Об одном дифференциальном уравнении типа уравнения Соболева/ С.А, Габов, В.А. Шевцов// ДАН СССР. - 1984. - Т. 286, № 1. – С. 14-17.
- [11] Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Греггер, К. Захариас. – М.:Мир, 1978.-336 с.
- [12] Гальперн, С.А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными / С. А. Гальперн // Труды Московского математического общества. – 1960. – Т. 9. – С. 401-423.
- [13] Гохберг И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
- [14] Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория. / Н. Данфорд , Дж.Т.М.Шварц. – ИЛ, 1962. – 726 с.
- [15] Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной/ Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 438 с.
- [16] Дудко, Л.Л. Исследование полугрупп операторов с ядрами: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / Л.Л. Дудко. – Новгород, 1996. – 88 с.

- [17] Егоров, И.Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов. - Новосибирск: Наука, 2000. – 336 с.
- [18] Ефремов, А.А. Исследование оптимального управления линейными уравнениями типа Соболева: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / А.А. Ефремов; ЧелГУ. – Челябинск. – 1996. – 102.
- [19] Загребина, С.А. Исследование многоточечных начально-конечных задач для неклассических моделей математической физики : дис. . . . докт. физ.-мат. наук / С. А. Загребина. – Челябинск, 2013. – 228 с.
- [20] Замышляева, А.А. Исследование линейных математических моделей соболевского типа высокого порядка: дис. . . . докт. физ. - мат. наук / А.А. Замышляева. – Челябинск, 2013. – 276 с.
- [21] Зеленьяк, Т.И. Избранные вопросы качественной теории с частными производными / Т. И. Зеленьяк. – Новосибирск: НГУ, 1970. – 164 с.
- [22] Иосида К. Функциональный анализ / К.Иосида . – М.: Мир, 1967. – 524 с.
- [23] Каразеева, Н.А. Об аттракторах и динамических системах, порождаемых начально-краевыми задачами для уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей / Н.А. Каразеева, А.А. Котсилис, А.П. Осколков// Препринт ЛОМИ им. В.А. Стеклова. – Л., 1988. – 58 с.
- [24] Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т.Като. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
- [25] Келлер, А.В. Исследование ограниченных решений линейных уравнений типа Соболева: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. – Челябинск, 1997. – 115 с.

- [26] Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа: дис. ... д-ра физ. - мат. наук / А.В. Келлер; ЮУрГУ. – Челябинск, 2011. – 249 с.
- [27] Кожанов, А.И. Краевая задача для одного класса уравнений третьего порядка / А.И. Кожанов// ДАН СССР. – 1979. – Т. 249, № 3. – С. 536-539.
- [28] Кожанов, А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка / А.И. Кожанов. – Новосибирск: НГУ, 1990. – 132 с.
- [29] Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) – М.: Наука, 1978. – 831 с.
- [30] Костюченко, А.Г. Задача Коши для уравнения типа Соболева-Гальперна/ А.Г. Костюченко, Г.И. Эскин// Тр. Моск. матем. об-ва. – 1961. – Т. 9. – С. 401-423.
- [31] Крейн, С.Г. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн, К.И. Чернышов// Препринт ин-та математики СО АН СССР. – Новосибирск. – 1979. – 18 с.
- [32] Кузнецов, Г.А. Исследование относительно спектральных свойств линейных операторов: дис. ... канд. физ.-мат. наук/ Г.А.Кузнецов; ЧелГУ. – Челябинск, 1999. – 105 с.
- [33] Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. - М.: Наука, 1961. – 288.
- [34] Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. - М.: Мир, 1972. – 587 с.

- [35] Манакова, Н.А. Аналитическое и численное исследования оптимального управления в полулинейных моделях гидродинамики и упругости: дис. ... докт. физ. - мат. наук / Н.А. Манакова. – Челябинск, 2015. – 255 с.
- [36] Марсден, Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения/ Дж. Марсден, М. М. Мак-Кракен. – М.: Мир, 1980. – 368 с.
- [37] Матвеева, О.П., Сукачева Т.Г. Математические модели вязкоупругих несжимаемых жидкостей ненулевого порядка/ О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 101 с.
- [38] Мельникова, И.В. Корректность вырожденной задачи Коши в банаховом пространстве/ И.В. Мельникова, М.А. Альшанский // ДАН. – 1994. – Т. 336, № 1. – С. 17-20.
- [39] Новиков, Е.А. Контроль устойчивости метода Фельберга седьмого порядка точности / Е.А. Новиков, Ю.В. Шорников// Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, 4. – С. 65–72.
- [40] Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и Олдройта/ А.П. Осколков // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
- [41] Осколков, А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева/ А.П. Осколков// Записки научн. семин. ЛОМИ. – 1991.-Т. 198. – С. 31-48.
- [42] Осколков А.П. Об одной квазилинейной параболической системе с малым параметром, аппроксимирующей систему Навье–Стокса/ А.П. Осколков // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1971. Т. 21. С. 79–103.

- [43] Осколков, А.П. Об уравнениях движения линейных вязкоупругих жидкостей и уравнениях фильтрации жидкостей с запаздыванием / А.П. Осколков, М. М. Ахматов, А. А. Котсиолис // Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР. – 1987. – Т. 163. – С. 132-136.
- [44] Петровский, И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными/ И.Г. Петровский. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
- [45] Свешников, Г.А. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.
- [46] Свиридюк, Г.А. Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева / Г.А.Свиридюк, В.Е.Федоров // Сиб. матем. журн. – 1995. – Т.36, № 5. – С.1130 – 1145.
- [47] Свиридюк Г.А. Задача Коши для линейного сингулярного операторного уравнения типа Соболева /Г.А. Свиридюк// Дифференц. уравнения. – 1987.–Т. 23, № 12.–С. 2168-2171.
- [48] Свиридюк, Г.А., Сукачева Т.Г.Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31. № 5. С. 109–119.
- [49] Свиридюк, Г.А. Исследование полулинейных уравнений типа Соболева в банаховых пространствах: дис. ... докт. физ.-матем. наук / Г.А.Свиридюк; ЧелГУ. – Челябинск, 1993. – 213 с.
- [50] Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи матем. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47-74.

- [51] Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А.Свиридюк // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т.57, № 3. – С.192 – 207.
- [52] Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения соболевского типа / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров. – Челябинск: ЧелГУ. – 2003. – 179 с.
- [53] Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывные полугруппы разрешающих операторов с ядрами / Г.А.Свиридюк// Докл. РАН. – 1994. – Т.337, № 5.– С.581 – 584.
- [54] Свиридюк, Г.А. Многообразие решений одного сингулярного псевдопараболического уравнения / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР. – 1986. – Т. 289. – № 6. – С. 1315-1318.
- [55] Свиридюк, Г.А.Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. вузов. Математика. 1994. № 1. С. 62–70.
- [56] Свиридюк, Г.А. О единицах аналитических полугрупп ператоров с ядрами / Г.А.Свиридюк, В.Е.Федоров // Сиб. матем. журн. – 1999. – Т.40, № 3. – С.604 – 616.
- [57] Свиридюк Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальными операторами / Г.А.Свиридюк // Докл. РАН. – 1993. – Т.329, № 3. – С.274 – 277.
- [58] Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71, № 2. – С. 292-297.

- [59] Свиридюк, Г.А., Сукачева Т.Г. Фазовые пространства одного класса операторных уравнений / Г.А.Свиридюк // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 2. С. 250–258.
- [60] Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши-Дирихле для одного неклассического уравнения / Г.А. Свиридюк, А.В. Анкудинов // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 11. – С. 1556-1561.
- [61] Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши-Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Мананкова // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 9. – С. 36-41.
- [62] Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова / Г.А. Свиридюк, М.М. Якупов // Дифференц. уравн. – 1996. – Т. 32, № 11. – С. 1538-1543.
- [63] Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А.Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т.6, № 5. – С.216 – 237.
- [64] Свиридюк, Г.А. Число Деборы и один класс полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А.Свиридюк, Т.А.Бокарева // ДАН. – 1991. – Т.319, № 5. – С.1082 – 1086.
- [65] Сидоров, Н. А. О применении некоторых результатов теории ветвлений при решении дифференциальных уравнений с вырождением / Н.А. Сидоров, О.А. Романов // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 9. – С. 1516-1526.
- [66] Сидоров, Н. А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н.А. Сидоров, М. В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 4. – С. 726-728.

- [67] Соболев, С.Л. Об одной новой задаче математической физики/С.Л. Соболев// Изв. АН СССР, сер. матем. – 1954. – Т. 18. – С. 3-50.
- [68] Сукачева, Т.Г. Задача термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка/ Т.Г. Сукачева, О.П. Матвеева // Изв. вузов. Математика. 2001. № 11 (474). С. 46–53.
- [69] Сукачева, Т.Г. Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Великий Новгород, 2004.
- [70] Сукачева, Т.Г. Исследование фазовых пространств полулинейных сингулярных уравнений динамического типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук/ Т.Г. Сукачева; НГПИ. – Новгород. – 1990. – 112 с.
- [71] Сукачева, Т.Г. Об одной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка/Т.Г. Сукачева/ Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 4. – С. 552 – 557.
- [72] Сукачева, Т.Г. О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка/ Т.Г. Сукачева/ Изв. вузов. Матем., 1998. № 3 (430). – С. 47–54.
- [73] Сукачева, Т.Г. Расширенные фазовые пространства моделей Осколкова. Теория неавтономных уравнений соболевского типа и ее приложения/Т.Г. Сукачева/ – LAP, 2011.
- [74] Темам, Р. Уравнение Навье–Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам М., 1981.
- [75] Федоров, В.Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах/ В.Е. Федоров // Матем. сборник. – 2004. – Т. 195, № 8. – С. 131-160.

- [76] Федоров, В.Е. Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений типа Соболева: дис. ... канд. физ.-мат наук / В.Е. Федоров; ЧелГУ. – Челябинск, 1996. – 116 с.
- [77] Федоров, В.Е. Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений соболевского типа в банаховых и локально выпуклых пространствах: дис. ... д-ра физ. - мат. наук / В.Е. Федоров. – Челябинск, 2005. – 271.
- [78] Федоров, В.Е. Обобщение теоремы Хилле-Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Сиб. мат. жур. – 2005. – Т. 46, № 2. – С. 426-428.
- [79] Федоров, В.Е. Сильно голоморфные группы линейных уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Дифференц. уравнения. – 2004. - Т. 40, № 5. – С. 702-712.
- [80] Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри – М: Мир, 1985.
- [81] Хилле, Е. Функциональный анализ и полугруппы / Е.Хилле, Р.С.Филлипс . – М.: ИЛ, 1962. – 829 с.
- [82] Якупов, М.М. Фазовые пространства некоторых задач гидродинамики: дис. ... канд. физ. - мат. наук / М.М. Якупов. – Челябинск, 1999. – 83 с.
- [83] Chen, F. On the differential system governing fluids in magnetic field with data in L^p / F. Chen , P. Wang, C. Qu // Internat. J. Math. & Math. Sci. 1998. V. 21. № 2. С. 299–306.
- [84] Coleman, B.D. Instability, uniqueness and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xxt}$ on a strip / B.D. Coleman, R.J. Duffin, V.J. Mizel // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1965. – V. 19. – P. 100-116.

- [85] Demidenko, G.V. L_p —theory of boundary value problems for Sobolev type equations/G.V. Demidenko// Part. Diff. Eq. Banach center publ. - Warszawa. – V. 27. – 1991.- P. 101-109.
- [86] Favini A. Degenerate differential equations in Banach spaces/ A. Favini, A. Yagi. - New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1998. – 336 p.
- [87] Favini A. Sobolev type equations/A. Favini// Part. Diff. Eq. Banach center publ. - Warszawa. – V. 27. – 1991.- P. 101-109.
- [88] Hide R. On planetary atmospheres and interiors/R.Hide – Mathematical Problems in the Geophysical Sciences, 1, W.H.Raid, ed. Am. Math. Soc., Providence R.I., 1971.
- [89] Lightbourne, J.H.A. Partial functional equations of Sobolev type /J.H.A. Lightbourne// J. Math. Anal. Appl. – 1983. – V. 93, № 2. – P. 328-337.
- [90] Levine, H.A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Du_t = -Au + F(u)$ / H.A. Levine // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1973. – V. 51, № 5. – P. 371-386.
- [91] Melnikova, I.V. Abstract Cauchy problems: three approaches| I.V. Melnikova, A. Filinkov. – CRC; Boca Raton; FL: Chapman and Hall, 2001. – 236 p.
- [92] Poincare, H. Sur l'équilibre d'une masse fluid anime d'un mouvement de rotation / H. Poincare // Acta Mathematica. – 1885. – V. 7. – P. 259-380.
- [93] Sidorov, N. Lyapunov-Shmidt methods in nonlinear analysis and applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [94] Showalter, R.E. Hilbert space methods for partial differential equations / R. E. Showalter. – London; San Francisco; Melbourne: Pitman, 1977. – 219 p.

- [95] Showalter, R.E. Partial differential equations of Sobolev-Galpern type / R. E. Showalter // Pacific J. Math. – 1963. – V. 31, № 3. – P. 787-794.
- [96] Showalter, R.E. The Sobolev type equations. I (II)/R.E. Showalter// Appl. Anal.–1975.–V.5, №1. – P. 15-22(№2.–P. 81–89).
- [97] Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht: VSP, 2003. – 228 p.
- [98] Сукачева, Т.Г. Фазовое пространство одной задачи магнитогидродинамики / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // Дифференциальные уравнения. - 2015. - Т. 51, № 4. - С. 495-501.
- [99] Сукачева, Т.Г. Фазовое пространство начально- краевой задачи для системы Осколкова ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики, -2015, - Т. 55, № 5, - С. 823-829.
- [100] Kadchenko, S.I. Numerical study of a flow of viscoelastic fluid of Kelvin-Voigt having zero order in a magnetic field / S.I. Kadchenko, A.O. Kondyukov // Jurnal of Computational and Engineering Mathematics. - 2016, V. 3, № 2. - P. 40-47.
- [101] Кондюков, А.О. Обобщенная модель несжимаемой вязкоупругой жидкости в магнитном поле Земли / А.О. Кондюков // Вестник Южно-Уральского университета серия: Математика. Механика. Физика. - 2016. - Т. 8, № 3. - С. 13-21.
- [102] Kondyukov, A.O. Computational Experiment for a Class of Mathematical Models of Magnetohydrodynamics / A.O. Kondyukov, T.G. Sukacheva, S.I. Kadchenko, L.S. Ryazanova // Вестник ЮУрГУ. Серия: Мат. моделирование и программирование. - 2017. - Т. 10, № 1. - С. 149-155.

- [103] Сукачева, Т.Г. Об одной модели магнитогидродинамики / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // Международная конференция "Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе посвященная дню рождения великого русского математика академика П.Л. Чебышева. Сургут (14-18 мая 2014 г.): тезисы докладов - Сургут, 2014, - С. 69-70.
- [104] Сукачева, Т.Г. Фазовое пространство одной модели магнитогидродинамики / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // IV Международная школа-семинар "Нелинейный анализ и экстремальные задачи". Иркутск, 22 - 28 июня 2014 г. - С. 30.
- [105] Сукачева, Т.Г. Квазистационарные полутраектории в одной модели магнитогидродинамики / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль. 4-9 июля 2014 г. - С. 91-92.
- [106] Сукачева, Т.Г. Об одной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости в магнитном поле Земли / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // XV всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике. Сочи. Дагомыс. 28 сентября - 5 октября 2014 г. - С. 395-397.
- [107] Сукачева, Т.Г. О фазовом пространстве модели магнитогидродинамики ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // Теория управления и математическое моделирование: Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова (Ижевск, Россия, 9 - 11 июня 2015 г.). - Ижевск: 2015, - С. 305-307.
- [108] Сукачева, Т.Г. Об одной модели магнитогидродинамики ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // XVI всероссийский симпозиум

по прикладной и промышленной математике, летняя сессия, Челябинск, 21-27 июня 2015, - С. 75.

- [109] Кондюков, А.О. Об одной обобщенной модели магнитогидродинамики / А.О. Кондюков // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ - 29: сб. трудов XXIX Междунар. науч. конф.: в 12 т., Саратов. гос. техн. ун-т; Санкт-Петербург: СПбГТИ(ТУ), СПбПУ, СПИИРАН; Самара: Самарск. гос. техн. ун-т, 2016, Т.1. - С. 14-15.
- [110] Кондюков, А.О. Квазистационарные полутраектории для обобщенной модели магнитогидродинамики / А.О. Кондюков // Международная конференция "Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе посвященная дню рождения великого русского математика академика П.Л. Чебышева. Сургут (16-20 мая 2016 г.): тезисы докладов - Сургут, 2016, - С. 47-48.
- [111] Кондюков, А.О. Об одной вырожденной модели магнитогидродинамики ненулевого порядка / А.О. Кондюков // Южно-Уральская молодежная школа по математическому моделированию: сборник трудов III всероссийской научно-практической конференции. / (Челябинск, 28-29 апреля 2016 г.): Издательский центр ЮУрГУ (Челябинск), 2016, - С. 83-90.
- [112] Численное моделирование течения вязкоупругой электропроводной жидкости в магнитном поле: Свидетельство № 2016619268 / Кондюков А.О., Кадченко С. И., Какушкин С. Н. (RU); правообладатель: ФГБОУ ВО "Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого". - 2016613974, заявл. 21.04.2016, зарегистр. 17.08.2-16, реестр программ для ЭВМ.

Приложение

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2016619268

**Численное моделирование течения вязкоупругой
электропроводной жидкости в магнитном поле**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Новгородский
государственный университет имени Ярослава Мудрого» (RU)*

Авторы: *Кондюков Алексей Олегович (RU), Кадченко Сергей
Иванович (RU), Какушкин Сергей Николаевич (RU)*

Заявка № **2016613974**
Дата поступления **21 апреля 2016 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **17 августа 2016 г.**



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев Г.П. Ивлиев