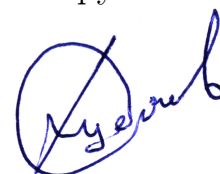


Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Худяков Юрий Владимирович

**Численно-аналитические методы и алгоритмы
исследования математических моделей
оптимальных динамических измерений с учетом помех**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор технических наук,
профессор А.Л. Шестаков

Челябинск – 2018

Содержание

Обозначения и соглашения	4
Введение	5
1 Основы теории оптимальных динамических измерений	26
1.1 Относительно p -ограниченные операторы	26
1.2 Относительно p -регулярные матрицы	29
1.3 Задача Шоултера–Сидорова для уравнений соболевского и систем леонтьевского типа	31
1.4 Задача оптимального управления для систем леонтьевского типа	35
1.5 Математическая модель измерительной системы	40
1.6 Модель оптимальных динамических измерений с инерционностью	43
1.7 Балансовая модель предприятия	46
Выводы по главе	49
2 Математическое моделирование оптимального динамического измерения при детерминированных помехах	50
2.1 Обобщенная математическая модель измерительной системы	50
2.2 Адекватность математической модели оптимального динамического измерения	55
2.3 Математическая модель оптимального динамического измерения с инерционностью и помехами на выходе измерительного устройства	59
2.4 Математическая модель оптимального динамического измерения с инерционностью и помехами в цепях измерительного устройства	62

2.5	Моделирование потребительского потока на основе балансовой модели предприятия и динамических измерений продаж	65
	Выводы по главе	72
3	Численные методы и алгоритм программы нахождения оптимального динамического измерения при детерминированных помехах	73
3.1	Численный метод нахождения оптимального динамического измерения при наличии помех на выходе измерительного устройства	73
3.2	Численный метод нахождения оптимального динамического измерения при наличии резонансов в цепях измерительного устройства	80
3.3	Сходимость численных методов	83
3.4	Описание программного комплекса	89
3.5	Результаты вычислительных экспериментов	94
	Выводы по главе	103
	Заключение	104
	Список литературы	108
	Приложение. Свидетельство о регистрации программы решения задачи оптимального измерения с резонансами	125

Обозначения и соглашения

1. Множества обозначаются заглавными буквами готического алфавита. Множества с устоявшимися названиями будем обозначать общепринятыми обозначениями:

\mathbb{N} — множество натуральных чисел;

\mathbb{N}_0 — множество, состоящее из натуральных чисел и нуля;

\mathbb{R} — множество действительных чисел и т.д.

2. Операторы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, например:

$L : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ — оператор, действующий из пространства \mathfrak{U} в пространство \mathfrak{F} , $\text{dom } L$ — область определения, $\text{im } L$ — образ, а $\text{ker } L$ — ядро оператора L .

$L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ — линейный непрерывный оператор L , $\text{dom } L = \mathfrak{U}$,

$L \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ — линейный, замкнутый и плотно определенный оператор L , т.е. $\overline{\text{dom } L} = \mathfrak{U}$.

3. \mathbb{I} и \mathbb{O} — «единичный», и «нулевой» операторы соответственно.

4. $\rho(L)$ и $\sigma(L)$ — резольвентное множество и спектр оператора L соответственно, причем $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ или $L \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U})$.

5. Строчные буквы латинского или греческого алфавитов используются для обозначения элементов множеств.

6. Контур ориентирован «против часовой стрелки» и ограничивают при этом область, лежащую «слева».

9. В рамках диссертации принята тернарная нумерация определений, утверждений и формул.

10. ДИ — динамические измерения.

11. СЛТ — система леонтьевского типа.

12. ИУ — измерительное устройство.

Введение

Актуальность темы исследования

В различных областях научной и практической деятельности усиливаются требования к качеству измерений исследуемых процессов на основе наблюдений (в метрологии [90], энергетике [22], геофизике [36] и др.). Неотъемлемой составляющей при решении таких задач является использование математических моделей, имеющих высокую степень адекватности на всех этапах работы с ними. Вместе с тем возрастает сложность объектов моделирования – систем и процессов, растет зависимость качества технических и экономических решений от учтенности внешних воздействий. В теории динамических измерений (ДИ) высокая стоимость натуральных измерений актуализирует теоретические и прикладные исследования. Диссертационная работа посвящена решению задачи восстановления динамически искаженных сигналов на основе развития методов математического моделирования оптимального динамического измерения, позволяющего учитывать не только инерционность измерительного устройства (ИУ), но и помех различной природы с последующей разработкой численных методов и комплексов программ.

В теории динамических измерений выделяют три основные задачи — одну прямую и две обратные [18]. Прямая задача есть определение отклика ИУ с известными динамическими свойствами на заданное входящее воздействие. Первая обратная задача заключается в определении динамических свойств ИУ по известным испытательному воздействию и отклику ИУ на него. Вторая обратная задача состоит в восстановлении входного воздействия по известным динамическим свойствам ИУ и его отклику на искомое воздействие. При этом используется два подхода: 1) определение динамических характеристик, значимых при выборе средств измерений и определение влияния оценки погрешности измерений на искажение сигнала [17], [21], [40], [113], решение ряда задач управления динамическими системами [105]; 2) мо-

делирование структуры ИУ, использование разных режимов ее изучения [3], [27], [70] для достижения близости значений наблюдаемых сигналов модели датчика и реального ИУ, что позволяет определять входящий сигнал модели датчика, наиболее точно отражающий входящий сигнала ИУ. В данной диссертации исследуется вторая обратная задача ДИ.

В ходе первых десятков лет своего развития теория ДИ использовала в качестве основных математических методов при исследовании задач восстановления динамически искаженных сигналов теорию обратных задач. Например, задачи идентификации входов динамических систем исследованы С.А. Аникиным [1], [2] с использованием методов регуляризации с оценкой их погрешности. При этом рассматриваются модели с невырожденной матрицей при производной в системе дифференциальных связей, что существенно сужает круг рассматриваемых задач. В данной работе предлагается общий подход, при котором используемые методы решения могут быть применены как в случае невырожденности, так и вырожденности матрицы при производной. Кроме того, на конкретных примерах обосновывается существование измерительных систем, описываемых дифференциально-алгебраическими системами с постоянными коэффициентами или системами леонтьевского типа (СЛТ). Подчеркнем, что в данной работе при решении обратной задачи ДИ используется прямая математическая задача.

В работе А.В. Ильина, С.К. Коровина и В.В. Фомичева [26] рассматриваются вопросы погрешности измерения выхода системы, устойчивость работы алгоритмов при наличии параметрических возмущений или неточности в работе элементов системы, решаются вопросы робастного обращения динамических систем. При этом используемые методы исследования связаны с приведением динамических систем к определенному каноническому виду. Одним из начальных этапов является определение точек спектра матриц системы, а это сложная математическая задача, требующая дополнительного математического анализа или условий. В данной диссертации методы решения не требуют нахождения точек спектра матриц, что существенно

облегчает алгоритм решения задач ДИ.

Многие подходы исследования задач ДИ базируются на методах теории автоматического управления [94]. Следует отметить структурные отличия систем автоматического управления от измерительных систем: 1) входной сигнал первичного преобразователя (датчика) недоступен для непосредственного измерения или для его коррекции; 2) отсутствие возможности охвата ИУ обратными связями. В связи с чем прямое заимствование методов теории автоматического управления невозможно в измерительных системах (примером может служить модальное управление, при котором нужный характер переходных процессов достигается за счет обеспечения необходимого расположения на комплексной плоскости корней характеристического полинома). При этом идея модального управления может быть реализуема при создании в измерительной системе специфических структур корректирующих устройств. Здесь необходимо отметить результаты челябинской научной школы по ДИ [94], в которой исследуется ИУ с модальным управлением динамическими характеристиками на основе модели датчика, предложенная профессором А.Л. Шестаковым [90] и исследуемая его учениками [70], [91]. Разработанные методы позволили определять измеряемый сигнал по наблюдаемому (применение скользящего режима, адаптация параметров измерительной системы и т.д.) [3].

Совместные междисциплинарные исследования А.Л. Шестакова и Г.А. Свиридюка позволили предложить новый оригинальный подход к восстановлению динамически искаженных сигналов [92]. В качестве модели ИУ рассматривается СЛТ с начальным условием Шоуолтера–Сидорова, а для достижения близости значений виртуальных наблюдений и наблюдений реального датчика применены методы теории оптимального управления. В результате определяемое виртуальное измерение – входящий сигнал модели является решением математической задачи оптимального управления, а получаемое при этом оптимальное динамическое измерение наиболее точно отражает входящий сигнала датчика. Новый подход, спустя несколько лет,

получил название теории оптимальных динамических измерений.

Численное исследование задач оптимального динамического измерения с разработкой алгоритмов программ проведено в работах Е.И. Назаровой и А.В. Келлер [34]. В них рассмотрены модели оптимальных динамических измерений, учитывающие только инерционность ИУ.

При изучении динамических процессов, измерений их параметров, безусловно, необходимо учитывать не только собственные динамические свойства объектов (к которым и относится инерционность ИУ), но и параметры внешних возмущений, помех при измерении и наблюдении, например [77], [24]. В данной диссертационной работе развиваются методы теории оптимальных динамических измерений для обеспечения учета помех различной природы.

Создателями теории оптимальных динамических измерений – А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридюком – была предложена математическая модель учитывающая и резонансы, возникающие в цепях ИУ [119]. Однако, она содержала неточность, которая в рамках данного диссертационного исследования устранена. Кроме того, в работе рассмотрены различные математические модели оптимальных динамических измерений с детерминированными помехами, возникающих на выходе ИУ. Для численного исследования этих моделей потребовались разработка нового метода и алгоритма программы для проведения вычислительных экспериментов.

Отметим, что методы теории динамических измерений находят свое применение в решении не только инженерных, но и экономических задач. Кроме того, также используются методы теории автоматического управления как при построении, так и анализе динамических моделей экономики производства [83]. Подчеркнем, что при этом исследуются не обратная задача, а прямая – определение выхода по известному входу экономической системы. В [53] предложена математическая модель восстановления воронки покупательского поведения: по задаваемым плановым финансовым показателям (на основе наблюдаемого платежеспособного спроса) определяется поток по-

тенциальных покупателей, который требуется привлечь в экономическую систему. Однако, эта модель не учитывает возможные сезонные колебания спроса. В данном диссертационном исследовании предложена модель, купирующая этот недостаток.

Учитывая все вышесказанное, актуальным является разработка численных методов и алгоритмов программ для исследования математических моделей оптимальных динамических измерений с учетом детерминированных помех.

Постановка задачи

Пусть L и A – квадратные матрицы порядка n (при моделировании может быть получен случай, когда $\det L = 0$), матрица $A - (L, p)$ -регулярна [8], $u : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$, система уравнений

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu + G\varsigma, \\ y = Cx + D\eta \end{cases} \quad (0.1)$$

описывает ИУ, где $x(t)$ – вектор-функция его состояния, $\dot{x}(t)$ – вектор-функция скорости изменения состояния соответственно; $y(t)$ – вектор-функция наблюдений; L – матрица взаимовлияния скоростей состояния ИУ, A – матрица состояний ИУ; B – матрица, характеризующая влияние и взаимосвязи измерения на состояние ИУ; и G – матрицы, характеризующая влияние и взаимосвязи помех в цепях ИУ на состояние ИУ; C – матрица, характеризующая связь между состоянием ИУ и наблюдением; и D – матрица, характеризующая влияние и взаимосвязи помех на выходе ИУ; $u(t)$ – вектор-функция измерения; $\eta(t)$ – вектор-функция помех на выходе ИУ; $\varsigma(t)$ – вектор-функция помех в цепях ИУ.

Начальное условие Шоултера–Сидорова [63]

$$\left[(\alpha L - A)^{-1} L \right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0 \quad (0.2)$$

при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(A)$ отражает начальное состояние ИУ.

Уже отмечалось, что одной из основных задач теории динамических измерений является восстановление измеряемого сигнала $u = u(t)$ по наблю-

даемому $y = y(t)$ [17], [21], [27]. Эффективность применяемых при этом методов основывается на достижении близости значений сигналов на выходе реального датчика и его виртуальной модели, так как в этом случае значения на входе будут также незначительно различаться. Именно в этой идее заключается использование и, в конечном итоге, определение вида функционала штрафа в моделях оптимального динамического измерения. Рассматривая задачу на промежутке $[0, \tau]$ введем в рассмотрение *пространство состояний* $\chi = \{x \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n)\}$, *пространство измерений* $\mathfrak{U} = \{u \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n)\}$ и *пространство наблюдений* $\mathfrak{Y} = C[\chi]$.

Вид функционала обусловлен, прежде всего, постановкой задачи динамического измерения, типом информации, позволяющей моделировать детерминированные помехи. Так, при наличии детерминированных помех на выходе ИУ функционал штрафа имеет вид

$$J(u) = \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \left\| S y^{(q)}(u, t) - S y_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt \quad (0.3)$$

При наличии детерминированных помех на входе и выходе ИУ функционал штрафа имеет вид

$$J(u) = \alpha \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \left\| S(x^{(q)}(u, \varsigma, t)) - \left(S y_0^{(q)}(t) - S \bar{y}_0^{(q)}(t) \right) \right\|^2 dt + \\ + \beta \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \langle F_q(u + \varsigma)^{(q)}(t), (u + \varsigma)^{(q)}(t) \rangle dt, \quad (0.4)$$

где $y_0(t) = \text{col}(y_{01}(t), y_{02}(t), \dots, y_{0r}(t))$ – наблюдения, получаемые в ходе натурного эксперимента, $S y_0(t)$ – те наблюдения, по которым проводится восстановления динамически искаженного сигнала; $y(t)$ – виртуальные наблюдения, получаемые в ходе математического моделирования процесса восстановления динамически искаженных сигналов, $S y(t)$ – те виртуальные наблюдения, по которым восстанавливается динамически искаженные измерения

при моделировании процесса; $\bar{y}_0(t)$ – наблюдения, получаемые в ходе натурного эксперимента при нулевых значениях измеряемых сигналов, $S\bar{y}(t)$ – те наблюдения (при нулевых значениях измеряемых сигналов), по которым проводится восстановление сигнала. Коэффициенты $\alpha \in (0, 1]$, $\beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha + \beta = 1$, F_q – симметричные неотрицательно определенные матрицы порядка n , $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидовы норма и скалярное произведение в \mathbb{R}^n .

Отметим, что \mathfrak{Y} изоморфно некоторому подпространству в χ , хотя не всегда $\mathfrak{Y} = \chi$. Определим в \mathfrak{U} множество допустимых измерений \mathfrak{U}_∂ , являющееся компактным выпуклым подмножеством. В качестве \mathfrak{U}_∂ примем

$$\mathfrak{U}_\partial = \{u \in \mathfrak{U} : \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \|u^{(q)}(t)\|^2 dt \leq d\}, \quad (0.5)$$

где $d = \text{const}$.

Поставим задачу оптимального динамического измерения с учетом детерминированных помех и инерционности ИУ: найти вектор-функцию измерения $v \in \mathfrak{U}_\partial$, минимизирующую значение функционала штрафа (0.3) (или (0.4)), т.е.

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u), \quad (0.6)$$

при этом $x(v) \in \chi$ удовлетворяет системе (0.1) почти всюду на $(0, \tau)$ и при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(M)$ – условию Шоултера–Сидорова (0.2)

Задачи оптимального динамического измерения с учетом детерминированных помех при различной априорной информации позволяют строить различные математические модели задачи восстановления динамически искаженного сигнала [126]. В данной диссертационной работе исследуются три такие модели.

Степень разработанности темы исследования

Данная диссертация базируется на нескольких направлениях научных исследований: теории динамических измерений, теории уравнений соболевского и систем леонтьевского типов, теории оптимального управления, численных методов решения задач оптимального управления для СЛТ. Степень

разработанности темы исследования неразрывно связана с названными научными направлениями.

Несмотря на то, что первая работа в области динамических измерений была написана в 1909 году А.Н. Крыловым [38], становление теории ДИ как специального раздела метрологии началось в России в конце 70-х годов прошлого века. Методы восстановления динамически искаженного сигнала на основе регуляризации А.Н. Тихонова [74] приводили к использованию обратного преобразования Фурье, именно такие подходы представлены в работах Г.И. Василенко [12], Г.Н. Солопченко [72], О.В. Гулинского [19]. Методы восстановления динамически искаженного сигнала на основе численного решения интегрального уравнения свертки рассмотрены в работах А.Ф. Верляня, В.С. Сизикова [13]. Судя по публикациям, за рубежом исследования в этой области не велись в то время.

В конце 80-х годов прошлого века А. Л. Шестаковым [90] для изучения второй обратной задачи ДИ в качестве динамической модели ИУ была предложена следующая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (0.7)$$

где $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$ и $\dot{x} = \text{col}(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ соответственно, начальное состояние обычно принимается нулевым $x(0) = \text{col}(0, \dots, 0)$; $u = \text{col}(u_1, \dots, u_m)$ и $y = \text{col}(y_1, \dots, y_l)$ – вектор-функции измерения и наблюдения; матрицы A , B , C характеризуют ИУ.

В рамках данного диссертационного исследования показано, что сложные измерительные системы представимы в виде модели леонтьевского типа [138]. В работах [34], [35], [52] система (0.7) исследовалась как СЛТ

$$L\dot{z} = Mz + Du, \quad (0.8)$$

с учетом того, что она представляет собой конечномерный аналог уравнения

соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + f, \quad (0.9)$$

где $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$, $M \in Cl(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$, f – некоторая вектор-функция, а \mathfrak{X} и \mathfrak{F} – банаховы пространства [124]. Это позволило заложить в основу исследования и математической модели ИУ, и задачи оптимального динамического измерения методы теории вырожденных (полу)групп, разработанной Г. А. Свиридюком [124] и развиваемой его учениками [29], [32], [39], [78], [47], [64]. В настоящее время работы по исследованию уравнения (0.8) проводятся и в нашей стране [20], [58], [67], [68], [69], [79], [110], [116], [117], и за ее пределами [100], [101], [103], [104], [106], [107], [111], [112]. Прежде всего это связано с наличием большого числа приложений [28], [73], [31], [122], [34].

Данная работа стала одним из результатов интеграции методов научных школ А.Л. Шестакова и Г. А. Свиридюка, ими впервые была сформулирована вторая обратная задача ДИ как задача оптимального управления решениями СЛТ [93]. Безусловно, успешные результаты исследования задач оптимального управления в Челябинской школе уравнений соболевского типа позволили начать исследования задач ДИ. В статьях Г.А. Свиридюка и А.А. Ефремова [23], [60] была впервые поставлена и исследована задача оптимального управления решениями уравнения (0.9) с начальным условием Коши

$$x(0) = x_0. \quad (0.10)$$

Дальнейшее развитие данное направление исследований получило в работах Н.А. Манаковой [47], [48], М.В. Плехановой [80]. В.Е. Федоров и О.А. Рузакова рассмотрели вопросы управляемости решениями уравнений соболевского типа [56]. В [55] доказано существование единственного решения в гильбертовых пространствах задач стартового, жесткого, стартового жесткого управления для уравнений соболевского типа с начальным условием Шоултера – Сидорова (0.2).

Развитие математических методов позволило начать и численные исследования [76], [109], [113], [123], в том числе и во многих направлениях при-

кладных задач [28], [57]. Численные исследования задачи Коши для СЛТ типа были проведены в работах Г.А. Свиридюка и С.В. Брычева [8], [61], а затем численные исследования задачи оптимального управления для СЛТ с начальным условием (0.10) – в работах Г.А. Свиридюка и И.В. Бурлачко [11], [62]. Однако использование начального условия Коши требовало выполнения условия согласования начальных данных, что затрудняло применение результатов на практике. Успешные результаты исследований уравнений соболевского типа, а затем и СЛТ с начальным условием Шоуолтера позволили сделать еще один шаг и в развитии численных методов, так как позволили снять необходимость проверки согласования начальных данных.

Отметим, что начальное условие

$$L(x(0) - x_0) = 0, \quad (0.11)$$

для уравнения (0.9) было введено, а затем изучена задача (0.9), (0.11) Р.Е. Шоуолтером [120], [121] и Н.А. Сидоровым [65], [66] независимо друг от друга. Именно поэтому начальную задачу (0.9), (0.11) стало принятым называть *задачей Шоуолтера – Сидорова* [59], [63].

Отметим результаты исследований иркутской математической школы, представители которой развивают методы решения начальных задач для вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, например, работы Ю.Е. Бояринцева [5], В.Ф. Чистякова [86], М.В. Булатова [9], [10], А.А. Щегловой [98]. В монографии Ю.Е. Бояринцева и В.Ф. Чистякова [6] изучаются алгебро-дифференциальные системы вида (0.9) с вырожденной матрицей $L(t)$ при всех $t \in [0, T]$. В работах В.Ф. Чистякова [85], [87], [88], посвященных исследованию решений задачи

$$L(t)\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (0.12)$$

отмечено, что она имеет решения не для любого начального вектора x_0 . Для исследования задачи (0.12) вводится понятие допустимого начального условия x_0 и критерий «ранг-степень», который заключается в том, что степень ненулевого многочлена $\det(\lambda L - A)$ равна рангу матрицы L . Использование

критерия позволило доказать теоремы о существовании и единственности решения задачи (0.12) в предположении, что индекс пучка матриц не превышает двух.

В Воронежской научной школе в рамках исследования задач оптимального управления линейными системами вида (0.9) в гильбертовом пространстве Г.А. Куриной получены достаточные условия существования ограниченного обратного оператора для линейного оператора при производной [42]. Обратимость исследуемого оператора используется для доказательства однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи, возникающей из условий оптимальности управления.

Дескрипторная система

$$L\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

при условии

$$\text{rank}L < n,$$

где n – порядок квадратных матриц L, A, B , изучена Р.С. Müller [114], [115]. Исследована задача оптимального управления с функционалом штрафа вида

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & Z \\ Z^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt \rightarrow \min_u$$

где

$$R > 0, \begin{bmatrix} Q & Z \\ Z^T & R \end{bmatrix} \geq 0.$$

Для приведенной задачи предложен алгоритм решения, который базируется на сведении пучка $(sE - A)$ к канонической форме Кронекера–Вейерштрасса.

Задачи оптимального управления для распределенных систем, описываемых некорректными краевыми задачами, исследованы Ж.-Л. Лионсом [46] и А.В. Фурсиковым [81]. При этом для установления разрешимости задачи используются свойства функционала штрафа.

Первые численные исследования моделей межотраслевого баланса как систем леонтьевского типа проведены в работах Г.А. Свиридюка, С.В. Брычева и И.В. Бурлачко [8], [61]. В [11], [62] проведено численное исследование одной задачи оптимального управления для СЛТ с начальным условием (0.10). Подчеркнем, что в названных работах исследовались динамические балансовые модели, исследование которых, начавшись более 40 лет назад [15], по-прежнему активно ведется [37], [49], [75], [96], [97].

Несколько лет назад численные методы решения класса задач оптимального управления с начальным условием Шоултера–Сидорова были разработаны в работах А.В. Келлер [30], [33], причем важным результатом стало доказательство сходимости приближенных решений к точному [32]. Для численного исследования задач оптимального динамического измерения алгоритм был модифицирован Е.И. Назаровой, и поиск оптимального динамического измерения осуществлялся в виде

$$u^\ell(t) = col \left(\sum_{j=0}^{\ell} \mathbf{a}_{1j} t^j, \sum_{j=0}^{\ell} \mathbf{a}_{2j} t^j, \dots, \sum_{j=0}^{\ell} \mathbf{a}_{nj} t^j \right). \quad (0.13)$$

Представление (0.13) позволяет через коэффициенты \mathbf{a}_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, \ell}$ выразить $x(t)$, а значит, и функционал штрафа задачи оптимального динамического измерения. После чего возможно применить алгоритм поиска минимума функции нескольких переменных относительно \mathbf{a}_{ij} при нахождении наименьшего значения функционала качества [34]. Вместе с тем, данные алгоритмы требовали значительного машинного времени, вопросы эффективного использования которого рассматриваются многими исследователями [43]. Отметим также, что в различных алгоритмах используются идеи метода покоординатного спуска [33], [34], [44].

Отметим, что в теории автоматического управления также рассматривались квадратичные функционалы, содержащие ошибку наблюдения и ее производную, и активно исследовались, возникающие в связи с этим, вопросы устойчивости. Одной из первых работ, в которых рассматривался критерий суммарной квадратичной погрешности, является статья А.А. Харкевича [82].

В ней описываются методы оценки искажений, вносимых линейными системами. В 50-е годы интегральные критерии квадратичной погрешности стали использоваться для: 1) поиска оптимальных параметров системы, моделирующей динамику системы, 2) решения задачи синтеза регулятора. Здесь следует отметить работы Х. Боде, К. Шеннона [4], В.В. Солодовникова [71], Д. Ньютона, Л. Гулда, Д. Кайзера [54], Ш. Чанга [84], К. Мерриема [51], А.Брайсона, Хо Ю-Ши [7]. В основе путей решения лежат переход в частотную область, использование спектров возмущающих воздействий и формул для квадрата отклонений, позволивших свести задачу поиска наилучшего оператора к задаче поиска функции, доставляющей экстремум среднеквадратичному функционалу.

Функционалы штрафа, используемые в различных моделях оптимальных динамических измерений в рамках данного исследования, построены на необходимости достижения близости реальных наблюдений и виртуальных наблюдений, а также близости скоростей их изменения. Кроме того, функция состояния $x(t)$ выражается через функцию измерения, что позволяет определить минимум функционала штрафа (0.3) ((0.4)) [93] относительно коэффициентов полиномов в (0.13) как минимум функции нескольких переменных.

Целью диссертационного исследования является численное исследование класса математических моделей оптимального динамического измерения с детерминированными помехами с разработкой численных алгоритмов и их реализацией в виде программного комплекса.

Для достижения данной цели необходимо реализовать следующие задачи:

1. Разработать методику представления математической модели сложной измерительной системы в виде системы леонтьевского типа.

2. Провести аналитическое исследование ряда математических моделей оптимального динамического измерения, позволяющее рассмотреть различные случаи детерминированных помех в технических и экономических задачах динамических измерений.

3. Разработать численный метод решения задачи оптимального динамического измерения с учетом инерционности ИУ и детерминированных помех.

4. Реализовать предложенный численный метод в виде программного комплекса с использованием алгоритма распараллеливания.

5. Провести вычислительные эксперименты для подтверждения эффективности предложенных методов и алгоритмов.

Научная новизна результатов

В области математического моделирования: В диссертационной работе впервые: предложена методика представления математической модели сложной измерительной системы, содержащей несколько измерительных устройств, в виде системы леонтьевского типа, позволяющей учитывать связи между устройствами в виде алгебраических уравнений; проведено исследование математической модели оптимального измерения с инерционностью и резонансными помехами на выходе ИУ, математической модели оптимального динамического измерения с инерционностью и детерминированными помехами при известной форме измеряемой величины, математической модели оптимального динамического измерения с инерционностью и резонансными помехами на выходе и в цепях ИУ, потребительского потока на основе балансовой модели предприятия и оптимальных динамических измерений продаж. Исследована разрешимость задач оптимальных измерений в рамках исследования указанных математических моделей. Показано значение множества допустимых измерений в математической модели оптимального динамического измерения.

В области численных методов: Модифицированы численные методы решения задач оптимального управления для систем леонтьевского типа: приближенное оптимальное измерение находится в виде тригонометрических полиномов, в связи с этим переработаны все процедуры численного метода; введено новое условие критерия останова алгоритма, связанное со множеством допустимых измерений, при этом допускается использование ограни-

чений множества допустимых измерений на различных временных промежутках в пределах основного интервала измерений. Показана сходимость модифицированного численного метода решения задачи оптимального измерения с учетом инерционности и резонансов в цепях ИУ.

В области комплексов программ: разработан программный комплекс, позволяющий: проводить вычислительные эксперименты как на модельных так и реальных данных; использованы методы параллельных вычислений в процедуре поиска оптимального измерения.

Теоретическая и практическая значимость работы

Значимость диссертационного исследования обусловлена решением актуальных задач динамических измерений с применением современного математического аппарата. Полученные результаты развивают теории оптимальных динамических измерений, уравнений соболевского типа, оптимального управления и межотраслевого баланса. Разработанные численные методы позволяют применять распараллеливание вычислений, что создает основу для дальнейшего развития моделирования в технике и экономике на основе решения задач динамического измерения. Результаты исследования значимы в рамках решения проблем восстановления динамически искаженных сигналов. Показано, что при моделировании сложных измерительных систем, может быть получена дескрипторная система с постоянными коэффициентами – система леонтьевского типа. Это позволяет расширить применимость разработанных методов как при конструировании различных сложных датчиков и измерительных систем, так и при их калибровке и корректировке. Представленные результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют об адекватности проведенного математического моделирования и эффективности выбранного численного метода решения задач оптимального измерения с учетом инерционности и помех различной природы, что создает основу для дальнейшего развития численных исследований моделей

динамических систем. Предложенный алгоритм позволил повысить эффективность программы по количеству затрачиваемого на поиск решения машинного времени по сравнению с ранее используемыми, при этом показана сходимость приближенных решений к точному.

Методология и методы исследования

В работе используются следующие методы исследования: моделирование с использованием системного подхода, математический или абстрактно-логический, эмпирический с использованием проектного подхода и вычислительных экспериментов.

В работе используются методы теории динамических измерений, теорий вырожденных (полу)групп и оптимального управления для уравнений соболевского типа и систем леонтьевского типа, численные методы решения задач жесткого и оптимального управления для систем леонтьевского типа, методы покоординатного спуска с памятью, методы распараллеливания вычислений.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты данного диссертационного исследования:

- в рамках *развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей* качественно исследован класс математических моделей оптимального динамического измерения, позволяющий рассмотреть различные случаи детерминированных помех в технических и экономических задачах динамических измерений; разработан метод математического моделирования сложных измерительных систем с приведением примера такого устройства, реализующего итерационный принцип в динамических измерениях; проведено исследование значимости множества допустимых измерений в процессе решения задач динамических измерений;
- в рамках *разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных тех-*

нологий разработан численный метод решения задач оптимального измерения с учетом инерционности ИУ и помех различной природы, показана сходимость получаемых приближенных решений к точному; предложена схема распараллеливания основной вычислительной процедуры;

– в рамках *реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента* разработан программный комплекс, написанный на языке программирования С++; проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие эффективность предложенных алгоритмов и адекватность проведенного моделирования.

Степень достоверности результатов

Достоверность научных результатов и выводов обеспечены корректным использованием методов математического моделирования, согласованием результатов вычислительных экспериментов с модельными примерами; объемом апробации и представления этапов работы на научных конференциях и семинарах. Результаты и выводы не противоречат ранее полученным результатам других авторов. Все результаты, выносимые на защиту, опубликованы.

Апробация результатов

Результаты диссертации были представлены на Международной научно-практической конференции «Измерения: состояние, перспективы развития» (Челябинск, 2012), Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений» (Новосибирск, 2013), Международной летней математической школе памяти В.А. Плотникова (Одесса, Украина, 2013), Международной конференции «Полугруппы операторов: теория и приложения» (Бедлево, Польша, 2013), XII Всероссийском совещании по проблемам управления (Москва, 2014), Национальном научном симпозиуме с международным участием «Метрология и метрологическое обеспечение» (Созополь, Болгария, 2014).

Результаты докладывались на семинарах «Уравнения соболевского типа» профессора Г.А. Свиридюка в Южно-Уральском государственном университете (г. Челябинск), на семинаре под руководством профессора С.И. Кадченко в Магнитогорском государственном техническом университете им. Г.И. Носова (г. Магнитогорск).

Краткое содержание диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, содержащего 138 наименований, и приложения.

Во **введении** представлена постановка задачи исследования, определяются цель и задачи работы, обосновывается актуальность, теоретическая и практическая значимость проведенного исследования, определяются методы исследования и новизна полученных результатов, дана характеристика степени разработанности проблемы и степени достоверности результатов, представлена апробация результатов.

Первая глава состоит из семи параграфов и содержит определения и формулировки теорем, которые используются при получении основных результатов диссертации. Первый параграф содержит определения и теоремы об относительно p -ограниченных операторах. Во втором параграфе содержатся сведения об относительно p -регулярных матрицах. В третьем параграфе определяется вид точного решения задачи Шоултера–Сидорова для уравнений соболевского типа, рассматривается задача Шоултера–Сидорова для систем леонтьевского типа и приводится понятие ее приближенного решения. Поскольку по виду функционала качества задача оптимального динамического измерения с учетом инерционности ИУ и помех относится или к задаче оптимального управления, или жесткого управления, то в четвертом параграфе приводятся постановка задачи и теорема о существовании единственного решения задачи оптимального управления для системы леонтьевского типа, описывается основная идея ее численного решения. В пятом параграфе представлена математическая модель ИУ, используемая в

исследованиях задач ДИ инженерами и математиками. В шестом параграфе кратко представлены результаты численного исследования модели оптимального измерения с учетом только инерционности ИУ. Седьмой параграф посвящен динамической балансовой модели предприятия, которая является неотъемлемой частью моделирования потребительского потока на основе данных динамики продаж продукции предприятия. Отметим, что результаты, представленные в первой главе не выносятся на защиту. В конце главы приводятся выводы.

Вторая глава состоит из пяти параграфов и содержит результаты математического моделирования оптимальных динамических измерений. В первом параграфе строится обобщенная математическая модель измерительной системы, показывается, что при моделировании сложных измерительных систем может быть получена система леонтьевского типа. Во втором параграфе рассматриваются вопросы адекватности математической модели оптимального динамического измерения, обсуждаются общие подходы к построению математической модели оптимального динамического измерения. В третьем параграфе представлена математическая модель оптимального динамического измерения с учетом инерционности ИУ и резонансов на выходе ИУ. При этом полагается возможны два случая: 1) известны частоты и амплитуды резонансных помех; 2) известна «форма сигнала», т.е. известен вид функции, зависящей от времени, описывающей сигнал. В четвертом параграфе представлена математическая модель оптимального динамического измерения с учетом инерционности ИУ и наличия резонансных помех и на выходе и в цепях ИУ, причем допускается смешивание полезного сигнала и резонансов. Также как и предыдущем параграфе предполагается, что частоты резонансных помех известны. В пятом параграфе представлен подход к моделированию потребительского потока на основе балансовой модели предприятия и динамических измерений продаж. Обсуждаются возможности использования модели оптимальных динамических измерений в решении маркетинговых задач предприятия. Отметим, что результаты, представленные

ные во второй главе являются новыми и выносятся на защиту. В конце главы приводятся выводы.

Третья глава состоит из пяти параграфов и содержит результаты численного исследования изучаемых математических моделей и представляет разработанные для этого компьютерные программы. В первом параграфе описан численный метод решения задачи оптимального динамического измерения с учетом инерционности ИУ и резонансов, возникающих как на выходе ИУ. Этот метод позволяет численно исследовать математические модели, описанные в п. 2.3. Во втором параграфе описан численный метод решения задачи оптимального измерения с учетом инерционности ИУ и резонансов, возникающих как на выходе ИУ, так и в его цепях. Этот метод позволяет численно исследовать математические модели, описанные в пп. 2.4 и 2.5. Во третьем параграфе доказаны результаты о сходимости приближенных решений, получаемых на основе разработанного численного метода, к точному. Показаны сильная выпуклость функционала качества на множестве допустимых измерений, сходимость по норме приближенных решений рассматриваемой задачи оптимального динамического измерения. В четвертом параграфе приведено описание программного комплекса, реализующего алгоритм численного решения задачи оптимального динамического измерения с учетом резонансов, приведены и описаны основные блок-схемы алгоритма. Представлена процедура распараллеливания этапа поиска оптимального динамического измерения. В пятом параграфе приводятся результаты вычислительных экспериментов. Отметим, что результаты, представленные в третьей главе являются новыми и выносятся на защиту. В конце главы приводятся выводы.

В **заключении** представлены итоги выполненного исследования, соответствие полученных результатов паспорту специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.

В **приложении** представлено свидетельство о регистрации программы

«OptMsrR Programm», реализующей алгоритм численного решения задачи оптимального измерения с учетом инерционности ИУ и резонансов.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 14 работ [125] – [138], в т.ч. 2 статьи в издании, индексируемом в Scopus и WoS [129], [130], 4 статьи в ведущих российских рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ [125] – [128], свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ [131]. Список работ приводится в конце списка литературы. В совместных с научным руководителем работах научному руководителю принадлежит постановка задачи, в диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором и не затрагивают интересы соавторов.

Благодарности

Автор выражает искреннюю и глубокую благодарность своему научному руководителю Александру Леонидовичу Шестакову за постановку задачи и консультации; профессорам Георгию Анатольевичу Свиридюку и Алевтине Викторовне Келлер за ценные советы по построению модели; коллективам кафедр уравнений математической физики, математического и компьютерного моделирования, прикладной математики и программирования ЮУрГУ за плодотворные обсуждения и конструктивную критику в ходе работы над диссертацией. Особую благодарность выражаю моей семье за понимание и поддержку.

1 Основы теории оптимальных динамических измерений

1.1 Относительно p -ограниченные операторы

Все результаты данного параграфа являются вспомогательными, на защиту не выносятся, кратко излагаются на основании следующих источников [64], [78], [124].

Пусть \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} — банаховы пространства, а операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ и $A \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. Множества $\rho^L(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})\}$ и $\sigma^L(A) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(A)$ будем называть соответственно L -резольвентным множеством и L -спектром оператора A . L -резольвентное множество $\rho^L(A)$ оператора A открыто (может быть пустым), а L -спектр $\sigma^L(A)$ замкнут. Например, если $\ker L \cap \ker A \neq \{0\}$, то $\rho^L(A) = \emptyset$.

В предположении $\rho^L(A) \neq \emptyset$ будем рассматривать оператор-функцию комплексного переменного $(\mu L - A)^{-1}$; $R_\mu^L(A) = (\mu L - A)^{-1}L$, $L_\mu^L(A) = L(\mu L - A)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(A)$, которые будем называть соответственно L -резольвентой, правой и левой L -резольвентами оператора A .

Теорема 1.1.1 L -резольвента, правая и левая L -резольвенты оператора A голоморфны в $\rho^L(A)$.

Определение 1.1.1 Оператор A называется спектрально ограниченным относительно оператора L (или, коротко, (L, σ) -ограниченным), если

$$\exists r > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > r) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(A)).$$

Возьмем (L, σ) -ограниченный оператор A , выберем в комплексной плоскости \mathbb{C} замкнутый контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = h > r\}$. Тогда имеют смысл следующие интегралы от голоморфных оператор-функций по замкнутому

контур

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(A) d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_{\mu}^L(A) d\mu. \quad (1.1.1)$$

Лемма 1.1.1 Пусть оператор A (L, σ) -ограничен. Тогда операторы $P : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$, $Q : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Y}$ проекторы.

Положим $\mathfrak{X}^0 = \ker P$, $\mathfrak{Y}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{X}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{Y}^1 = \operatorname{im} Q$. Итак, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$. Через L_k (A_k) обозначим сужение оператора L (A) на \mathfrak{X}^k ($\operatorname{dom} A_k = \operatorname{dom} A \cap \mathfrak{X}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 1.1.2 (Теорема Свиридюка о расщеплении) Пусть оператор A (L, σ) -ограничен. Тогда

- (i) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^k; \mathfrak{Y}^k)$, $k = 0, 1$;
- (ii) $A_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}^0; \mathfrak{Y}^0)$, $A_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1; \mathfrak{Y}^1)$;
- (iii) существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1)$, $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0; \mathfrak{X}^0)$.

При условии (L, σ) -ограниченности оператора A согласно теореме 1.1.2 существуют операторы $H = A_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^0)$ и $S = L_1^{-1} A_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1)$, используя которые можно разложить L -резольвенту оператора A в кольце $|\mu| > a$ в ряд Лорана

$$(\mu L - A)^{-1} = - \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k A_0^{-1} (I - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q.$$

При этом бесконечность является

- (i) *устранимой особой точкой*, если $H = \mathbb{O}$;
- (ii) *полюсом* порядка $p \in \mathbb{N}$, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} = \mathbb{O}$;
- (iii) *существенно особой точкой*, если $\forall p \in \mathbb{N} H^p \neq \mathbb{O}$.

Бесконечность будем называть *полюсом порядка* $p \in \mathbb{N}_0$, если она является *устранимой особой точкой* ($p = 0$) или *полюсом порядка* $p \in \mathbb{N}$.

Определение 1.1.2 Пусть ∞ — полюс порядка $p \in \mathbb{N}_0$ для L -резольвенты оператора A , тогда (L, σ) -ограниченный оператор A назовем (L, p) -ограниченным.

Следствие 1.1.1 Пусть A — (L, p) -ограниченный оператор, $(p \in \mathbb{N}_0)$. Тогда

$$P = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\mu R_\mu^L(A))^{p+1}, \quad Q = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\mu L_\mu^L(A))^{p+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\mu R_\mu^L(A))^{p+1} &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\mu(\mu L - A)^{-1}L(P + (\mathbb{I} - P)))^{p+1} = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left(\left((\mathbb{I} - \frac{1}{\mu}L_1^{-1}A_1)^{-1} \right)^{p+1} P + (\mu(\mu H - \mathbb{I})^{-1}H)^{p+1} (\mathbb{I} - P) \right) = \\ &P + \mathbb{O}(\mathbb{I} - P) = P. \end{aligned}$$

Доказательство утверждения для оператора Q аналогично. •

Пусть $\ker L \neq \{0\}$. Вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ будем называть *собственным вектором* оператора L . Упорядоченное множество векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ называется *цепочкой A -присоединенных векторов* собственного вектора φ_0 , если

$$L\varphi_{q+1} = A\varphi_q, \quad q = 0, 1, \dots, \quad \varphi_l \notin \ker L, \quad l = 1, 2, \dots$$

Цепочка конечна, если существует такой A -присоединенный вектор φ_p , что либо $\varphi_p \notin \operatorname{dom} A$, либо $A\varphi_p \notin \operatorname{im} L$. В частности, собственный вектор φ_0 не имеет A -присоединенных векторов, если либо $\varphi_0 \notin \operatorname{dom} A$, либо $A\varphi_0 \notin \operatorname{im} L$. Мощность конечной цепочки называется ее *длиной*. Когда цепочка бесконечна, то у цепочки бесконечная длина. Линейную оболочку всех собственных и A -присоединенных векторов оператора L назовем *A -корневым линеалом оператора L* . Замкнутый A -корневой линеал оператора L назовем *A -корневым пространством*.

Напомним, что оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ называется *фредгольмовым*, если $\dim \ker L = \operatorname{codim} \operatorname{im} L < \infty$

Теорема 1.1.3 Пусть оператор L фредгольмов. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) оператор A (L, p) -ограничен ($p \in \mathbb{N}_0$);
- (ii) длина любой цепочки A -присоединенных векторов оператора L не превышает p , и существует по крайней мере одна цепочка длины p .

1.2 Относительно p -регулярные матрицы

Все результаты данного параграфа являются вспомогательными, на защиту не выносятся, кратко излагаются на основании следующих источников [32], [124].

Пусть $L = (l_{ij})$ и $A = (m_{ij})$ – матрицы размера $n \times n$.

Пучком матриц является множество $\mu L - A = \{\mu L - A : \mu \in \mathbb{C}\}$. *Регулярным* назовем такой пучок $\mu L - A$, что $\exists \lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda L - A) \neq 0$. В противном случае пучок будем называть *сингулярным*.

Определение 1.2.1 Матрица A называется *L -регулярной*, если $\exists \alpha \in \mathbb{C} : \det(\alpha L - A) \neq 0$.

Условия регулярности пучка матриц и L -регулярности матрицы A эквивалентны.

Если матрица A L -регулярна, то существует p , равное нулю, если в точке ∞ L -резольвента $(\mu L - A)^{-1}$ матрицы A имеет устранимую особую точку; и, равное порядку полюса в точке ∞ матриц-функции $(\mu L - A)^{-1}$ в противном случае. Учитывая это, в дальнейшем L -регулярную матрицу A будем называть *(L, p) -регулярной*, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Теорема 1.2.1 Пусть пучок $\mu L - A$ регулярен, тогда существуют невырожденные матрицы M и B порядка n такие, что $\forall \mu \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$M(\mu L - A)B = \{N_{n_1}, N_{n_2}, \dots, N_{n_k}, \mu \mathbb{I}_l - S_l\}. \quad (1.2.1)$$

Здесь справа – квазидиагональная матрица; $N_m = \mu H_m - \mathbb{I}_m$, H_m – матрица порядка m , в которой элементы первой наддиагонали равны единице, а остальные элементы равны нулю; S_l – квадратная матрица порядка l ; сумма $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ равна размерности A -корневого пространства оператора L .

Из (1.2.1) следует, что

$$MLB = \{H_{n_1}, H_{n_2}, \dots, H_{n_k}, \mathbb{I}_l\}, \quad (1.2.2)$$

$$MAB = \{\mathbb{I}_{n_1}, \mathbb{I}_{n_2}, \dots, \mathbb{I}_{n_k}, S_l\}. \quad (1.2.3)$$

Замечание 1.2.1 Обозначим через P_l матрицу $n \times n$, в правом нижнем углу которой расположена единичная матрица порядка l , а остальные элементы – нули, матрицы

$$P' = BP_lB^{-1}, \quad Q' = MP_lM^{-1}$$

являются проекторами.

Покажем, что $P' = P$ и $Q' = Q$, здесь для P и Q опеределены формулами (1.1.1).

Приведем рассуждения для $P' = P$, учитывая, что $Q' = Q$ показывается аналогично.

$$B^{-1}PB = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} B^{-1}(\mu L - A)^{-1}M^{-1}d\mu MLB,$$

откуда в силу (1.2.1) и (1.2.2) получаем

$$\begin{aligned} B^{-1}PB &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \{N_{n_1}^{-1}, N_{n_2}^{-1}, \dots, N_{n_k}^{-1}, (\mu\mathbb{I}_l - S_l)^{-1}\}d\mu \times \\ &\quad \times \{H_{n_1}, H_{n_2}, \dots, H_{n_k}, \mathbb{I}_l\} = P_l, \end{aligned}$$

поскольку

$$\int_{\Gamma} N_m^{-1}d\mu = \int_{\Gamma} (\mu H_m - \mathbb{I}_l)^{-1}d\mu, \quad m = n_1, n_2, \dots, n_k,$$

и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\mu\mathbb{I}_l - S_l)^{-1}d\mu = \mathbb{I}_l.$$

Пусть матрица A (L, p) -регулярна, тогда существует не более s точек $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s\} \subset \mathbb{C}$, $s \leq n$ таких, что $\det(\mu_k L - A) = 0$, $k = 1, 2, \dots, s$. Множество $\sigma^L(A) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s\}$ называется L -спектром матрицы A .

Замечание 1.2.2 Если $\det L \neq 0$, то L -спектр матрицы A , спектр матрицы $L^{-1}A$ и спектр матрицы AL^{-1} совпадают.

Пусть матрица A (L, p) -регулярна. В формулах (1.1.1) выберем контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r\}$, где $r > \max\{|\mu_1|, |\mu_2|, \dots, |\mu_s|\}$ и построим матрицы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - A)^{-1} L d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L (\mu L - A)^{-1} d\mu.$$

Лемма 1.2.1 Пусть матрица A (L, p) -регулярна, тогда

- (i) $P^2 = P$, $Q^2 = Q$;
- (ii) $LP = QL$, $AP = QA$.

Используя утверждение леммы 1.2.1 доказывается справедливость следующего утверждения

Теорема 1.2.2 [92]. Пусть матрица A (L, p) -регулярна. Тогда $\exists L_1^{-1}$ и $\exists A_0^{-1}$ такие, что $L_1^{-1}L = P$, $LL_1^{-1} = Q$, $A_0^{-1}A = \mathbb{I}_n - P$, $AA_0^{-1} = \mathbb{I}_n - Q$.

1.3 Задача Шоултера–Сидорова для уравнений соболевского и систем леонтьевского типа

Все результаты данного параграфа являются вспомогательными, на защиту не выносятся, кратко излагаются на основании следующих источников [30], [63], [124].

Представим условие Шоултера – Сидорова

$$[R_{\alpha}^L(A)]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0 \tag{1.3.1}$$

для уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Ax + f, \tag{1.3.2}$$

где $\alpha \in \rho^L(A)$, оператор A (L, p) -ограничен, вектор-функция $f \in C^{\infty}((a, b), \mathfrak{F})$.

Теорема 1.3.1 Пусть оператор A (L, p) -ограничен, p – порядок полюса в точке ∞ L -резольвенты оператора A . Тогда при любых $f \in C^{\infty}((a, b), \mathfrak{F})$

и $x_0 \in \text{dom } A_1 \dot{+} \mathfrak{X}^0$ существует единственное решение $x \in C^\infty((a, b), \mathfrak{X})$ задачи (1.3.1), (1.3.2), имеющее вид

$$x(t) = - \sum_{k=0}^p H^k A_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) f^{(k)}(t) + X^t x_0 + \int_0^t R^{t-s} Q f(s) ds,$$

где оператор $R^t = X^t L_1^{-1}$ определен формулой (1.1.6), $H = A_0^{-1} L_0$.

В конечномерном случае L и A – квадратные матрицы порядка n , матрица A (L, p) -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ – порядок полюса в точке ∞ L -резольвенты матрицы A , $\det A \neq 0$, $\det L = 0$. Аналогично задаче (1.3.1), (1.3.2) поставим задачу Шоултера – Сидорова

$$[R_\alpha^L(A)]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0 \quad (1.3.3)$$

для системы леонтьевского типа

$$L\dot{x} = Ax + f, \quad (1.3.4)$$

где $\alpha \in \rho^L(A)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, вектор-функция $f : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R_\alpha^L(A) = (\alpha L - A)^{-1} L$ – правая L резольвента матрицы A .

Системы вида (1.3.4) при условии $\det L = 0$ в различных научных школах называются по-разному, так в [6], [87] их называют алгебро-дифференциальными, в [109], [111], [118] – дифференциально-алгебраическими, в [5], [67] – вырожденными системами обыкновенных дифференциальных уравнений, в [41] – дескрипторными. В Челябинской научной школе системы вида (1.3.4) было предложено называть *системами леонтьевского типа* [61], полагая под ними для краткости дескрипторные системы с постоянными коэффициентами, кроме того, считая, что такого рода систему в приложении впервые получил В. Леонтьев [45]. Позже аналогичные системы возникли в задачах энергетики [22], метрологии [90], [17], геофизики [36] и др. Вместе с тем, название начинает употребляться и другими исследователями, примером этого могут служить работы [41], [16], [50] и др.

Решение $x = x(t)$ системы (1.3.4) будет и *решением задачи* (1.3.3), (1.3.4), если оно удовлетворяет условию (1.3.3).

Подчеркнем, что принятое условие $\det A \neq 0$ не снижает общности, т.к. при $\det A = 0$, учитывая, что матрица A является (L, p) -регулярной, можно выполнить замену $x = e^{\lambda t} z$ в (1.3.4), где $\lambda \in \rho^L(A)$, что позволит рассмотреть уравнение

$$L\dot{z} = (A - \lambda L)z + e^{-\lambda t} f,$$

которое имеет тот же вид, что и (1.3.4), но уже $\det(A - \lambda L) \neq 0$.

В силу того, что A невырожденная матрица, следовательно существует A^{-1} , и на основании теоремы 1.2.2 справедливо тождество

$$H^k A_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) = H^k A^{-1}(\mathbb{I} - Q) = (A^{-1}(\mathbb{I} - Q)L)^k A^{-1}(\mathbb{I} - Q)$$

справедливо, здесь матрица H – нильпотентна степени p .

В конечномерном случае (L, p) -ограниченный оператор является (L, p) -регулярной матрицей. В силу этого справедливы теоремы.

Теорема 1.3.2 Пусть матрица A (L, p) -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det A \neq 0$, вектор-функция $f : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда при любом $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение задачи (1.3.3), (1.3.4), имеющее вид

$$\begin{aligned} x(t) = & - \sum_{q=0}^p (A^{-1}(\mathbb{I} - Q)L)^q A^{-1}(\mathbb{I} - Q) f^{(q)}(t) + \\ & + X^t x_0 + \int_0^t R^{t-s} Q f(s) ds, \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

где

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L(\mu L - A)^{-1} d\mu, \quad X^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - A)^{-1} L e^{\mu t} d\mu,$$

$$R^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - A)^{-1} e^{\mu t} d\mu.$$

Теорема 1.3.3 Пусть матрица A (L, p) -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ – порядок полюса L -резольвенты матрицы A в точке ∞ , $\det A \neq 0$. Тогда

$$X^t = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(L - \frac{t}{k} A \right)^{-1} L \right]^k, \quad Q = \lim_{k \rightarrow \infty} [kL_k^L(A)]^{p+1}, \quad (1.3.6)$$

$$R^t = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(L - \frac{t}{k} A \right)^{-1} L \right]^{k-1} \left(L - \frac{t}{k(p+1)} A \right)^{-1}.$$

Зафиксируем $\tau \in \mathbb{R}_+$, $t \in [0, \tau]$, $k \in \mathbb{N}$ и положим

$$X_k^t = \left[\left(L - \frac{t}{k} A \right)^{-1} L \right]^k, \quad Q_k = [kL_k^L(A)]^{p+1}, \quad (1.3.7)$$

$$R_k^t = \left[\left(L - \frac{t}{k} A \right)^{-1} L \right]^{k-1} \left(L - \frac{t}{k} A \right)^{-1}.$$

Выберем вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$, вектор-функцию

$$f \in C^{p+1}((0, \tau), \mathbb{R}^n) \cap C^p([0, \tau], \mathbb{R}^n)$$

. Вектор-функцию

$$x_k(f, t) = - \sum_{q=0}^p H^q A^{-1} (\mathbb{I} - Q_k) f^{(q)}(t) + X_k^t x_0 + \int_0^t R_k^{t-s} Q_k f(s) ds,$$

назовем *приближенным решением задачи* (1.3.3), (1.3.4) при $k > K$, где

$$K = \max\{k_1, k_2\} :$$

$$k_1 > \frac{1}{|\alpha_{n-p}|} \sum_{i=0}^{n-p} |\alpha_i| + 1, \quad (1.3.8)$$

$$k_2 > \begin{cases} \frac{1}{|\alpha_{n-p}| p^p} \sum_{i=0}^{n-p} |\alpha_i| (p+1)^{n-i} + 1, & \text{при } |t| \leq 1, \\ \frac{1}{|\alpha_{n-p}| |t|^{n-p} p^p} \sum_{i=0}^{n-p} |\alpha_i| (p+1)^{n-i} |t|^i + 1, & \text{при } |t| > 1, \end{cases}$$

$\alpha_i = (-1)^{n-i} \sum_{r=1}^{C_n^{n-i}} \Delta_{n-i}^r$ – коэффициенты полинома $\det(\mu L - A)$ степени $(n-p)$, $i = \overline{0, n}$, Δ_{n-i}^r – определители, получаемые из определителя матрицы

L путем замены $(n - i)$ столбцов соответствующими столбцами матрицы A , r – порядковый номер определителя, $(n - p) \leq \text{rank} L$.

Теорема 1.3.4 Пусть матрица A (L, p) -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ – порядок полюса L -резольвенты матрицы A в точке ∞ . Тогда существует константа $C = C(L, A, T) \in \mathbb{R}_+$ такая, что $\|x(t) - x_k(t)\| \leq \frac{C}{k}$ при всех $t \in [0, \tau]$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $f \in C^{p+1}((0, \tau), \mathbb{R}^n) \cap C^p([0, \tau], \mathbb{R}^n)$.

Доказательство теоремы приведено в [124].

Теорема 1.3.5 Пусть матрица A (L, p) -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det A \neq 0$, вектор-функция $f : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение задачи (1.3.3), (1.3.4)

$$\begin{aligned} x(t) = x(f, t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(f, t) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[- \sum_{q=0}^p (A^{-1}(\mathbb{I} - Q_k)L)^q A^{-1}(\mathbb{I} - Q_k)f^{(q)}(t) + \right. \\ &\quad \left. + X_k^t x_0 + \int_0^t R_k^{t-s} Q_k f(s) ds \right], \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

где X_k^t , Q_k и R_k^t заданы формулами (1.3.7).

1.4 Задача оптимального управления для систем леонтьевского типа

Все результаты данного параграфа являются вспомогательными, на защиту не выносятся, кратко излагаются на основании [32].

Пусть пространства \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{U} – гильбертовы, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, $A \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ и $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{Y})$; оператор A (L, p) -ограничен.

Зафиксировав $\tau \in \mathbb{R}_+$, введем в рассмотрение пространства состояний

$$H^1(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2((0, \tau), \mathfrak{X}) : \dot{x} \in L_2((0, \tau), \mathfrak{X})\},$$

и управлений

$$H^{p+1}(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2((0, \tau), \mathfrak{U}) : u^{(p+1)} \in L_2((0, \tau), \mathfrak{U})\},$$

которые являются гильбертовыми в силу гильбертовости \mathfrak{U} и \mathfrak{X} соответственно. Выделим множество допустимых управлений \mathfrak{U}_∂ , являющееся в пространстве $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ компактным и выпуклым подмножеством.

Рассмотрим задачу оптимального управления: требуется найти такую пару $(v, x(v)) \in \mathfrak{U}_\partial \times H^1(\mathfrak{X})$ удовлетворяющую почти всюду на $(0, \tau)$ СЛТ

$$L\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t) + Bu(t), \quad (1.4.1)$$

при условии Шоултера–Сидорова

$$[R_\alpha^L(A)]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0, \quad (1.4.2)$$

что

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u), \quad (1.4.3)$$

$$\begin{aligned} J(u) = & \alpha \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\| Cx^{(q)}(f + Bu, t) - Cx_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt + \\ & + (1 - \alpha) \sum_{q=0}^\theta \int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \right\rangle dt. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Здесь N_q – симметричные положительно определенные матрицы, $q = 0, 1, \dots, \theta$, $\theta = \overline{0, p+1}$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в \mathbb{R}^n , $x_0 \in \text{dom } a$ – заданный вектор, $f \in H^{p+1}(\mathfrak{Q})$ – заданная функция, функционал штрафа $J(u)$ выпуклый на линейном нормированном пространстве \mathfrak{U} , полунепрерывный снизу относительно слабой сходимости в \mathfrak{U} .

В результате решения задачи оптимального управления определяется управляющее воздействие, при котором разность между имеющимися и планируемыми значениями наблюдений, разность между их производными, и величины, необходимые для достижения поставленной цели, управляющих воздействий минимальны.

Определение 1.4.1 Вектор-функция $v \in \mathfrak{U}_\partial$ такая, что выполняется (1.4.3), называется *оптимальным управлением* для (1.4.1) при начальном условии (1.4.2).

Определение 1.4.2 Множеством *допустимых значений* задачи (1.4.1)–(1.4.4) назовем множество \mathfrak{M} таких пар $(u, x(u)) \in \mathfrak{U}_\partial \times H^1(\mathfrak{X})$, которые удовлетворяют (1.4.1), (1.4.2).

Определение 1.4.3 *Решением задачи оптимального управления* назовем пару $(v, x(v)) \in \mathfrak{M}$ такую, что v – точка минимума функционала штрафа (1.4.4), а $x(v)$ удовлетворяет (1.4.1), (1.4.2).

В [80] доказана теорема о существовании единственного решения задачи оптимального управления (1.4.1) – (1.4.4), причем решение задачи (1.4.1), (1.4.2) имеет вид

$$x(f + Bu, t) = (M_0 + M_1)(f + Bu)(t) + X^t x_0, \quad (1.4.5)$$

где

$$M_0 : f + Bu \rightarrow - \sum_{k=0}^p H^k A^{-1} (\mathbb{I} - Q)(f + Bu)^{(k)}(t),$$

$$M_1 : f + Bu \rightarrow \int_0^t R^{t-s} Q(f + Bu)(s) ds.$$

Адаптируя эти результаты к СЛТ в предположении о (L, p) -регулярности матрицы A , приведем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 1.4.1 Пусть матрица A (L, p) -регулярна, $p \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, причем $\det A \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in H^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ существует единственное решение $(v, x(v)) \in \mathfrak{U}_\partial \times \mathfrak{X}$ задачи (1.4.1) – (1.4.4), где v – точка минимума функционала штрафа (1.4.4), а $x(v)$ определяется формулой

$$x(v) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k(v, t) =$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[- \sum_{q=0}^p (A^{-1}(I - Q_k)L)^q A^{-1}(I - Q_k)(f + Bv)^{(q)}(t) + X_k^t x_0 + \int_0^\tau R_k^{t-s} Q_k(f(s) + Bv(s)) ds \right]. \quad (1.4.6)$$

Здесь

$$Q_k = (kL_k^L(A))^{p+1}, \quad X_k^t = \left((L - \frac{t}{k}A)^{-1}L \right)^k, \\ R_k^t = \left((L - \frac{t}{k}A)^{-1}L \right)^{k-1} \left(L - \frac{t}{k}A \right)^{-1}.$$

Изложим идею доказательства этого утверждения. Подставим в функционал (1.4.4) вектор-функцию

$$x(u, t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k(u, t),$$

где $x_k(u, t)$ определяется (1.4.6) с точностью до буквенных обозначений. Используя замкнутость и выпуклость множества \mathfrak{U}_∂ получим $\exists! v \in \mathfrak{U}_\partial$, при котором $J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u)$.

В [32] представлен алгоритм численного решения задачи (1.4.1)–(1.4.4), приближенное решение ищется в виде

$$u^\ell = \text{col} \left(\sum_{j=0}^{\ell} \mathbf{a}_{1j} t^j, \sum_{j=0}^{\ell} \mathbf{a}_{2j} t^j, \dots, \sum_{j=0}^{\ell} \mathbf{a}_{nj} t^j \right). \quad (1.4.7)$$

Заметим, что если $\mathfrak{U} = \mathbb{R}^n$, то $\mathfrak{U} = \bigoplus_{m=1}^n \mathfrak{U}_m$, где $\forall m = \overline{1, n}$ \mathfrak{U}_m – гильбертовы пространства. После подстановки (1.4.7) в функционал штрафа, получим

$$J_k(u^\ell) = \int_0^\tau \|Cx_k(u^\ell, t) - Cx_0(t)\|^2 dt + \int_0^\tau \|Cx'_k(u^\ell, t) - Cx'_0(t)\|^2 dt + \\ + \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^\tau \langle N_q(u^\ell)^{(q)}(t), (u^\ell)^{(q)}(t) \rangle dt.$$

Затем определяется его минимум

$$J(v_k^\ell) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J_k(u^\ell)$$

и соответствующие этому минимуму коэффициенты \mathbf{a}_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, \ell}$, и таким образом, приближенное значение оптимального управления v_k^ℓ . Затем находится приближенное значение $x_k^\ell = x_k(v_k^\ell, t)$ вида

$$\begin{aligned} x_k(v_k^\ell, t) = & - \sum_{q=0}^p (A^{-1}(\mathbb{I} - Q_k) L)^q A^{-1}(\mathbb{I} - Q_k) (f + Bv_k^\ell)^{(q)}(t) + \\ & + X_k^t x_0 + \frac{\tau}{2} \sum_{j=0}^m R_k^{\frac{\tau}{2} - \frac{\tau}{2} s_j} Q_k (f + Bv_k^\ell) \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2} s_j \right) \omega_j, \end{aligned}$$

где s_j и ω_j – узлы и веса квадратурной формулы Гаусса соответственно, $s_j \in [-1, 1]$, $j = \overline{0, m}$, $m + 1$ – количество узлов, X_k^t , Q_k и R_k^t соответствуют (1.4.5), k – вычисляемое по (1.4.6) значение, начиная с которого можно приближенно вычислять проекторы, чтобы не оказаться вблизи точек L -спектра оператора A .

В [32] предложен алгоритм нахождения приближенного решения задачи оптимального управления, который сводится к семи этапам. Отметим, что первые пять относятся к предварительным вычислительным процедурам, основным этапом является шестой, завершающим – седьмой.

Этап 1. Нахождение значения $\det A$ с проверкой на отличие его значения от нуля с задаваемой точностью вычислений ϵ , например, $\epsilon = 10^{-30}$. В случае $\det A < \epsilon$ необходимо провести замену $z = e^{\lambda t} x$ и продолжить нахождение решения.

Этап 2. Нахождение значения $q = \text{degdet}(\mu L - A)$, а затем $p = n - q$ – порядка полюса.

Этап 3. Нахождение значения K , начиная с которого можно вычислять приближенные решения, используя при этом формулы (1.3.8)

Этап 4. Проведение расчета весов ω_j и узлов s_j квадратурной формулы Гаусса для проведения численного интегрирования по заданным η и $[0, \tau]$.

Этап 5. Вычисление $x_k(0, t)$ и $J_k(0)$ в заданных точках $\vartheta_j \in [0, \tau]$.

Этап 6. Осуществление процедуры нахождения коэффициентов \mathbf{a}_{ij}^* методом, использующим идеи многошагового покоординатного спуска с памятью, в результате – вычисление минимума функционала $J(\tilde{v}_k^\ell)$ и точки его минимума

$$\tilde{v}_k^\ell = \text{col} \left(\sum_{j=0}^{\ell} \mathbf{a}_{1j}^* t^j, \dots, \sum_{j=0}^{\ell} \mathbf{a}_{nj}^* t^j \right).$$

Этап 7. Вычисление значения \tilde{x}_k^ℓ .

1.5 Математическая модель измерительной системы

Результаты данного параграфа приводятся в кратком изложении результатов, приведенных в [52], [94], и на защиту не выносятся.

Рассмотрим математическую модель ИУ (преобразователя), используемую при решении задач ДИ (рис. 1.1).

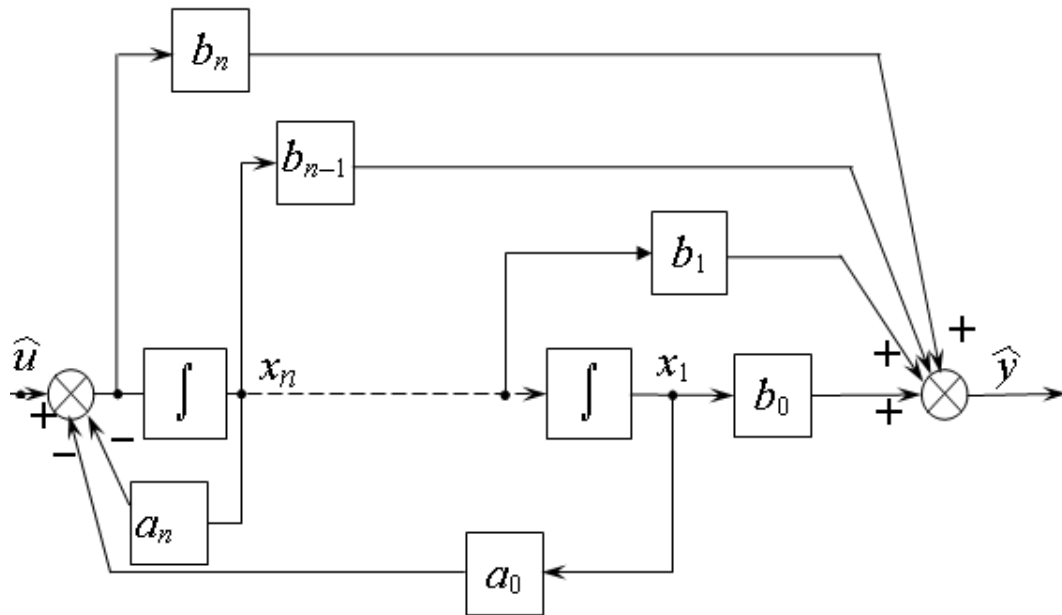


Рис. 1.1: Аналоговая модель датчика

Подчеркнем, что ИУ может быть описано системой дифференциальных

уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots, \\ \dot{x}_n = \frac{1}{a_n} \hat{u} - \frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_{n-1}, \\ y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_{n-1} x_n + b_n x_n, \end{cases} \quad (1.5.1)$$

Это динамическая модель ИУ с модальным управлением динамическими характеристиками, т.е. управлением, при котором достигается необходимый характер переходных процессов за счет обеспечения требуемого расположения корней характеристического полинома на комплексной плоскости [90]. Модель датчика для случая, когда $m = n$ (значения m и n могут быть и различны) представима системой вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1.5.2)$$

где $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$ и $\dot{x} = \text{col}(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ; $u = u(t)$ и $y = y(t)$ – функции измерения и наблюдения соответственно; матрицы ИУ A , B , C размерности соответственно $[n \times n]$, $[n \times 1]$, $[1 \times n]$ имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots; \\ \frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}, \quad (1.5.3)$$

$$C = \left(b_0 - \frac{a_0}{a_n} b_n \quad b_1 - \frac{a_1}{a_n} b_n \quad \dots \quad b_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} b_n \right).$$

В общем случае ($m \neq n$) размерности матриц A , B и C соответственно $[n \times n]$, $[n \times m]$ и $[l \times n]$, вектор-функции $u = \text{col}(u_1, \dots, u_m)$, $y = \text{col}(y_1, \dots, y_l)$.

Модель (1.5.2) применима для измерения импульсов, длящихся несколько микро- или наносекунд, т.к. адекватно моделирует инерционность ИУ, которая сглаживает вершину измеряемого входного сигнала.

А.Л. Шестаков и Г.А. Свиридюк в 2010 году предложили применить теорию уравнений соболевского типа и вырожденных (полу)групп операторов для изучения модели (1.5.2) [92]. В отмеченной работе эта идея и ряд первых результатов впервые были представлены для обсуждения как математиками, так и инженерами.

В работах А.В. Келлер и Е.И. Назаровой [34, 35] система (1.5.2) записывалась в виде системы леонтьевского типа

$$L\dot{z} = Mz + Du, \quad (1.5.4)$$

с условиями Шоуолтера–Сидорова

$$[(\alpha L - M)^{-1}L]^{p+1} (z(0) - z_0) = 0, \quad (1.5.5)$$

где L, M, D – матрицы $h \times h, h = n + l$, причем

$$L = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}_l \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ C & -\mathbb{I}_l \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} B & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \quad (1.5.6)$$

и $z = \text{col}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_l)$, $\dot{z} = \text{col}(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_l)$,
 $u = \text{col}(u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0)$, $u : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^h$, $\alpha \in \rho^L(M)$, $t \in [0, \tau]$, $\tau \in \mathbb{R}_+$.

Однако, А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридюком в [93], изначально предполагался при построении модели измерительного устройства наиболее общий случай:

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1.5.7)$$

где $\det L = 0$. Однако, наличие такого ИУ обосновано не было.

1.6 Модель оптимальных динамических измерений с инерционностью

Задача оптимального динамического измерения связана с решением второй обратной задачей теории ДИ: необходимо по результатам наблюдаемого выхода ИУ восстановить его вход. Входящие пикообразные сигналы не удастся измерить точно, так как динамические характеристики систем обработки и передачи сигналов не являются идеальными, а само ИУ имеет механическую инерционность.

Идея применения методов теории оптимального управления к решению задачи восстановления динамически искаженных сигналов, принадлежит А.Л. Шестакову и Г.А. Свиридюку [93], развитие этой идеи в рамках численных исследований принадлежит Е.И. Назаровой и А.В. Келлер [95], алгоритм численного метода решения задачи оптимального динамического измерения представлен в [52]. Результаты данного параграфа приводятся в кратком изложении названных работ и на защиту не выносятся.

Пусть L, A – матрицы $n \times n$, причем, предполагается возможным случай $\det L = 0$, кроме того $A - (L, p)$ -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ – порядок полюса L -резольвенты матрицы A в точке ∞ , $u : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим систему леонтьевского типа

$$L\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1.6.1)$$

здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ, наблюдения; L и A характеризуют взаимовлияние скоростей состояния и состояния ИУ соответственно, связь между состоянием системы и наблюдением; $u = (u_1, \dots, u_n)$ – вектор-функция измерений; n – число параметров состояний системы; B – квадратная матрица порядка n , характеризующая взаимовлияние параметров измерения.

При фиксированном $\tau \in \mathbb{R}_+$ будем рассматривать *пространство состояний* ИУ $\chi = \{x \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n)\}$, *пространство из-*

мерений $\mathfrak{U} = \{u \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n)\}$ и пространство наблюдений $\mathfrak{Y} = C[\chi]$.

Выделим в \mathfrak{U} множество допустимых измерений – компактное и выпуклое подмножество \mathfrak{U}_θ , в качестве которого рассматриваются такие $u \in \mathfrak{U}$, что

$$\sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \|u^{(q)}(t)\|^2 dt \leq d$$

где $d = const$, $\theta = 0, 1, \dots, p + 1$. Поставим задачу оптимального динамического измерения с учетом инерционности, являющуюся самой простой математической моделью задачи восстановления динамически искаженного сигнала.

Необходимо найти такую вектор-функцию $v \in \mathfrak{U}_\theta$, при которой значение функционала штрафа

$$J(u) = \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \|Cx^{(q)}(u, t) - y_0^{(q)}(t)\|^2 dt, \quad (1.6.2)$$

минимизируется, т.е.

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\theta} J(u), \quad (1.6.3)$$

при этом почти всюду на $(0, \tau)$ вектор-функция $x(v) \in \chi$ удовлетворяет системе (1.6.1) и при $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(M)$ – условию Шоултера – Сидорова

$$((\alpha L - A)^{-1}L)^{p+1} (x(0) - x_0) = 0, \quad (1.6.4),$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма пространства \mathbb{R}^n , $y_0(t) = (y_{01}(t), \dots, y_{0n}(t))$ – вектор-функция, построенная по наблюдаемым значениям сигнала, полученным на реальном ИУ.

Минимизация функционала качества (1.6.2) позволяет достигать как близости вектор-функций наблюдаемых значений сигнала и вектор-функций соответствующим виртуальным наблюдениям (получаем при расчете по математической модели), так и близости первых производных этих функций. Еще раз отметим, что именно эти требования позволяют утверждать о достижении близости входящих измеряемых сигналов модели и датчика. Этот

подход к решению задачи ДИ по восстановлению динамически искаженных сигналов позволяет исключить необходимость изменения структуры измерительных устройств и математических моделей ИУ для этого.

Задача получила название *задачи оптимального динамического измерения*, т.к. при нахождении минимума функционала штрафа определяется методами оптимального управления, а поиск осуществляется на множестве допустимых измерений, которое формируется по имеющейся информации о входном сигнале. Важным является и тот факт, что такого рода задачи возникают не только в различных приложениях техники, но и в экономике, например, при решении задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа [53].

Определение 1.6.1 Вектор-функция $u \in \mathfrak{U}_\partial$ такая, что выполняется $J(u) < +\infty$, называется *допустимым измерением* задачи (1.6.1)–(1.6.4) при условии, что $x(u) \in \chi$ удовлетворяет (1.6.1) и (1.6.4).

Функционал (1.6.2) по построению является непрерывным и сильно выпуклым на \mathfrak{U}_∂ , тогда существует единственная точка минимума функционала на \mathfrak{U}_∂ .

Определение 1.6.2 Вектор-функция $v \in \mathfrak{U}_\partial$ такая, что выполняется (1.6.3), называется *оптимальным динамическим измерением (решением задачи оптимального динамического измерения)* (1.6.1)–(1.6.4), если $x(v) \in \chi$ удовлетворяет (1.6.1) и (1.6.4).

Задача (1.6.1)–(1.6.4) является одним из приложений задачи оптимального управления (1.4.1) – (1.4.4) при $\alpha = 1$ или задачей жесткого управления, в силу чего из п. 1.4 справедлива следующая теорема.

Теорема 1.6.1 Пусть матрица A (L, p) -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, $\det A \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathfrak{Y}$ существует единственное оптимальное динамическое измерение $v \in \mathfrak{U}_\partial$ задачи (1.6.1)–(1.6.4), как

решение задачи оптимального управления, при этом $x(v)$ удовлетворяет СЛТ (1.6.1), условию (1.6.4) и имеет вид

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(v, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(v, t) = \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[- \sum_{q=0}^p \left(A^{-1} \left(\mathbb{I} - (kL_k^L(A))^{p+1} \right) L \right)^q M^{-1} \left(\mathbb{I} - (kL_k^L(A))^{p+1} \right) (Bv)^{(q)}(t) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(L - \frac{t}{k} A \right)^{-1} L \right)^k x_0 + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \left(\left(L - \frac{t-s}{k} A \right)^{-1} L \right)^{k-1} \left(L - \frac{t-s}{k} A \right)^{-1} (kL_k^L(A))^{p+1} (Bv)(s) ds \right]. \quad (1.6.6)
\end{aligned}$$

Для нахождения численного решения задачи (1.6.1)–(1.6.4), которое существует в силу теоремы 1.6.1, допустимое измерение $u \in \mathfrak{U}_\partial$ представляется вектор-функцией многочленов степени $\ell > p$

$$u^\ell = \text{col} \left(\sum_{j=0}^{\ell} \mathbf{a}_{1j} t^j, \sum_{j=0}^{\ell} \mathbf{a}_{2j} t^j, \dots, \sum_{j=0}^{\ell} \mathbf{a}_{nj} t^j \right). \quad (1.6.7)$$

Приближенное решение задачи оптимального измерения обозначим v_k^ℓ , где v_k^ℓ – точка минимума функционала качества $J_k(u^\ell)$ на $\mathfrak{U}_\partial \cap \mathfrak{U}_\partial^\ell$, где $\mathfrak{U}_\partial^\ell$ – последовательность выпуклых компактов, монотонно исчерпывающих \mathfrak{U}_∂

$$J_k(u^\ell) = \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\| Cx_k^{(q)}(u^\ell, t) - y_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt \quad (1.6.8)$$

причем $x_k^\ell = x_k(v_k^\ell, t)$ удовлетворяет условиям (1.6.1), (1.6.4). Численный алгоритм решения задачи оптимального динамического измерения аналогичен алгоритму, изложенному в п. 1.4.

1.7 Балансовая модель предприятия

В данном разделе приводятся вспомогательные сведения о вырожденной динамической балансовой модели предприятия, на защиту не выносятся. Да-

ется краткое изложение результатов исследований А.В. Келлер [32], Т.А. Виногадовой [96] и Е.И. Назаровой [52].

Представим динамическую балансовую модель предприятия

$$x(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}\dot{x}(t) + g(t). \quad (1.7.1)$$

Здесь элемент \bar{a}_{ij} матрицы прямых затрат \bar{A} означает количество продукции i -ого вида деятельности предприятия, необходимой для производства единицы продукции и/или услуги j -ого вида деятельности предприятия, $i, j = 1, 2, \dots, n$. В отличие от статической балансовой модели при расчете коэффициентов в динамической модели учитываются и затраты на капитальный ремонт основных производственных фондов, возмещение их выбытия.

Элемент \bar{b}_{ij} матрицы \bar{B} представляет удельные капитальные вложения $i, j = 1, 2, \dots, n$ в основные производственные фонды, машины, запасы первичных и промежуточных материалов, которые производятся в рамках вида деятельности i , а используются видом деятельности j для производства. В любой динамической балансовой модели предприятия, матрица \bar{B} будет содержать строки, все элементы которых равны нулю, таким образом, условие $\det \bar{B} = 0$ в данном случае естественно. Действительно, не все виды деятельности являются производительными, а блага запасаемыми. Элемент $g_i(t)$ вектор-функции $g(t)$ представляет количество конечного продукта i -ого вида деятельности или спрос на его продукцию. Элемент $x_i(t)$ вектор-функции $x(t)$ представляет количество валового выпуска продукции i -ой отрасли. Система (1.7.1) по сути распределяет общую стоимость валового выпуска продукции на внутреннее потребление $\bar{A}x$, развитие основных производственных фондов $\bar{B}\dot{x}$ и на внешнее потребление $g(t)$.

Несложно провести редукцию системы (1.7.1) к СЛТ

$$L\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad (1.7.2)$$

где матрица $A = I - \bar{A}$, $L = \bar{B}$, вектор-функция $y(t) = -g(t)$, $y : [0; \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}_+$.

Отметим, что в силу экономического смысла вектор-функций $x_j(t)$ и $g_j(t)$, необходимо добавить условия

$$x(t) \geq 0, \quad f(t) \leq 0, \quad t \in [0, \tau]. \quad (1.7.3)$$

Однако, в ряде случаев условий (1.7.3) может оказаться недостаточно (обычно в силу специфики предприятий). В таких случаях целесообразно использовать следующие условия

$$x_i(v, t) \geq w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.7.4)$$

$$f(t) \leq 0, \quad (1.7.5)$$

где w_i – минимальные значения валового выпуска, необходимые для деятельности предприятия.

Таким образом, динамическая балансовая модель для предприятия в общем случае такова. Пусть L и A – матрицы размера $n \times n$, $\det L = 0$, A – (L, p) -регулярна, будем искать решение СЛТ (1.7.2) с условиями (1.7.4), (1.7.5) и Шоултера–Сидорова

$$[R_\mu^L(A)]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0. \quad (1.7.6)$$

В вырожденной динамической балансовой модели в качестве видов деятельности предполагается включать четыре вида структурных элементов: производственные (П) (подразделения основных видов деятельности: цеха, участки и т.д.); обслуживающие (О) (подразделения вспомогательных видов деятельности: бухгалтерия, склад и т.д.); движение собственного капитала (ДСК), на котором будут отражаться операции по движению собственного капитала компании и распределения чистой прибыли; внешние (домашние хозяйства (ДХ) и корпоративные потребители (КП)). В работах [96], [97] разработаны методика и алгоритм построения вырожденной динамической балансовой модели для предприятия.

Приведем пример модели леонтьевского типа для небольшого предприятия, взятый из [32]. В рамках его деятельности выделено 11 видов деятельности: первые пять из них относятся к производственным видам; шестой, седьмой и восьмой виды деятельности относятся к обслуживающим;

девятый вид деятельности – к распределению чистой прибыли; десятый – к домашним хозяйствам, а одиннадцатый – к корпоративным потребителям.

$$L = \begin{pmatrix} 0,49 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17,14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 66,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9,09 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0,96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,38 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,08 & 0 & 0,95 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,04 & 0 & 0 & 0,93 & 0 & 0 & 0 & -0,01 & 0 & 0 & 0 \\ -0,05 & 0 & 0 & 0 & 0,86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,02 & -0,02 & -0,03 & -0,33 & -0,11 & -0,03 & -0,01 & -0,03 & 0,95 & -0,02 & -0,01 \\ -0,19 & -0,03 & -0,06 & -0,13 & -0,11 & -0,33 & -0,25 & -0,66 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,07 & -0,96 & -0,1 & -0,1 & -0,5 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \text{col}(500, 398, 103,5, 500, 50, 300, 900, 309, 0, 0, 0),$$

$$X_0 = \text{col}(52, 600, 313,5, 90, 87,5, 300, 1200, 309, 110, 880, 2167,5).$$

Выводы по главе

Представлены результаты исследований, ставших основой математической теории оптимальных динамических измерений. Они дают минимально необходимый объем сведений для качественного изложения результатов данной работы и позволяют в дальнейшем, после ознакомления с основными результатами данного исследования, оценить их новизну.

2 Математическое моделирование оптимального динамического измерения при детерминированных помехах

2.1 Обобщенная математическая модель измерительной системы

В данном параграфе впервые предлагается обобщенная математическая модель сложной измерительной системы, представляющая собой математическую модель леонтьевского типа. При построении модели использованы идеи моделирования сложных систем, как дескрипторных систем, теории автоматического управления [41], [99], [108] и схема итерационного измерительного устройства, предложенная А.Л. Шестаковым в [89]

Рассмотрим обобщенную математическую модель сложной измерительной системы, включающую в себя измерительные преобразователи, моделируемые подсистемами

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = A_{Mi}z_i(t) + B_{Mi}u_{Mi}(t) + G_{Mi}\varsigma_{Mi}(t), \\ y_{Mi}(t) = C_{Mi}z_i(t) + D_{Mi}\eta_{Mi}(t), \end{cases} \quad (2.1.1)$$

где $z_i(t)$, $u_{Mi}(t)$, $y_{Mi}(t)$ – состояние i -го измерительного преобразователя (ИП), состояние входов и выходов соответственно i -го ИП, $\varsigma_{Mi}(t)$ – помехи в цепях i -го ИП, $\eta_{Mi}(t)$ – помехи (например, резонансы), на выходе i -го ИП, $i = 1, 2, \dots, m$.

Введем обозначения

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \dots \\ z_m(t) \end{bmatrix}, \quad u_M(t) = \begin{bmatrix} u_{M1}(t) \\ u_{M2}(t) \\ \dots \\ u_{Mm}(t) \end{bmatrix}, \quad y_M(t) = \begin{bmatrix} y_{M1}(t) \\ y_{M2}(t) \\ \dots \\ y_{Mm}(t) \end{bmatrix},$$

$$A_M = \text{diag}(A_{M1}, A_{M2}, \dots, A_{Mm}), \quad B_M = \text{diag}(B_{M1}, B_{M2}, \dots, B_{Mm}), \\ C_M = \text{diag}(C_{M1}, C_{M2}, \dots, C_{Mm}), \quad D_M = \text{diag}(D_{M1}, D_{M2}, \dots, D_{Mm}),$$

$$G_M = \text{diag}(G_{M1}, G_{M2}, \dots, G_{Mm}), \sigma_M = \text{col}(\varsigma_{Mm}, \eta_{Mm}).$$

Модель комплекса m измерительных преобразователей представима системой

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A_M z(t) + B_M u_M(t) + G_M \sigma_M(t), \\ y_M(t) = C_M z(t) + D_M \sigma_M(t). \end{cases} \quad (2.1.2)$$

В сложных измерительных системах предполагается наличие линейных связей, которые в общем случае задаются следующим образом

$$\begin{cases} u_M(t) = S_{11}y_M(t) + S_{12}u(t) + S_{13}u_M(t) + S_{14}\sigma_M(t), \\ y(t) = S_{21}y_M(t) + S_{23}u_M(t) + S_{24}\sigma_M(t), \end{cases} \quad (2.1.3)$$

где $y(t)$ – моделируемое наблюдение; S_{ij} , $j = 1, 2, 3, 4$ – это матрицы соответствующих линейных связей, а $u(t)$ – моделируемый измеряемый сигнал.

Далее запишем

$$x(t) = \text{col}(z(t), u_M(t), y_M(t)),$$

тогда (2.1.2) и (2.1.3) (с учетом (2.1.4)) могут быть записаны в форме системы леонтьевского типа

$$\begin{cases} L\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + G\sigma(t) \\ y(t) = Cx(t) + D\sigma(t), \end{cases} \quad (2.1.5)$$

где

$$L = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_M & B_M & 0 \\ C_M & 0 & -I \\ 0 & S_{13} - I & S_{11} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{12} & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} G_M & 0 & 0 \\ 0 & D_M & 0 \\ 0 & 0 & S_{14} \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad S_{23} \quad S_{21}], \quad D = [0 \quad 0 \quad S_{24}].$$

Отметим, что в п. 1.5. представлена математическая модель измерительного преобразователя, которая представляет собой систему вида (1.5.1).

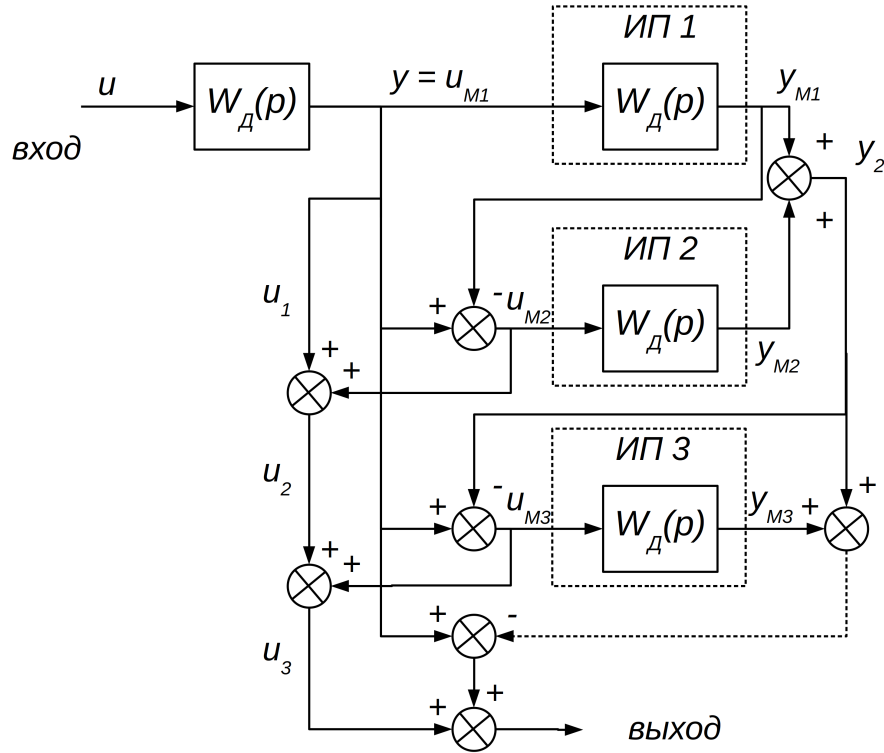
В качестве примера рассмотрим модель сложной измерительной системы, использующей итерационный принцип для восстановления динамически искаженного сигнала, что позволяет достигать высокой динамической точности при динамических измерениях [89]. Математическая модель итерационной измерительной системы представима системой

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{M1} = u_1 \\ \dot{z}_{M1} = A_{M1}z_{M1} + B_{M1}u_{M1} \\ y_{M1} = C_{M1}z_{M1} + D_{M1}\sigma_{M1} \\ u_{M2} = u_1 - y_{M1} \\ \dot{z}_{M2} = A_{M2}z_{M2} + B_{M2}u_{M2} \\ y_{M2} = C_{M2}z_{M2} + D_{M2}\sigma_{M2} \\ u_{M3} = u_1 - y_{M2} \\ \dot{z}_{M3} = A_{M3}z_{M3} + B_{M3}u_{M3} \\ y_{M3} = C_{M3}z_{M3} + D_{M3}\sigma_{M3} \\ u_{M4} = u_1 - y_{M3} \\ \dots \\ \dot{z}_m = A_{Mm}z_{Mm} + B_{Mm}u_{Mm} \\ y_{Mm} = C_{Mm}z_{Mm} + D_{Mm}\sigma_{Mm} \\ u_{Mm} = u_1 - y_{Mm} \\ y = u_{M1} + u_{M2} + u_{M3} + \dots + u_{Mm} + u_1 - y_{M1} - y_{M2} - y_{M3} - \dots - y_{Mm} \end{array} \right. \quad (2.1.6)$$

Вид системы (2.1.6) отражает идею коррекции динамической погрешности при итерационном принципе, который состоит в последовательном использовании произвольного числа измерительных преобразователей, выход системы представляет собой сумму наблюдаемого сигнала и моделируемых итерационными звеньями погрешностей.

Структурная схема итерационной измерительной системы представлена

на рисунке 2.1 для случая $m = 3$.



$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu + G\sigma, \\ y = Cx \end{cases}$$

Рис. 2.1: Структурная схема итерационной измерительной системы

Математическая модель каждого из измерительных преобразователей представляется системой

$$\begin{cases} \dot{z}_{Mi} = A_{Mi}z_{Mi} + B_{Mi}u_{Mi} \\ y_{Mi} = C_{Mi}z_{Mi} + D_{Mi}\sigma_{Mi} \end{cases} \quad (2.1.7)$$

а вход произвольного измерительного преобразователя $u_{Mi+1} = u_{M1} - y_{Mi}$, $i = 2, 3, \dots, m$ является погрешностью выявленной предыдущей итерацией. В ряде случаев для матриц могут выполняться условия $A_{M1} = A_{M2} = \dots = A_{Mm}$, $B_{M1} = B_{M2} = \dots = B_{Mm}$, $C_{M1} = C_{M2} = \dots = C_{Mm}$.

Математическую модель сложной измерительной системы, которая представлена схемой на рисунке 2.1, запишем в виде матричного уравнения для

случая $m = 2$ (для краткости)

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{z}_{M1} \\ \dot{z}_{M2} \\ \dot{u}_{M1} \\ \dot{u}_{M2} \\ \dot{y}_{M1} \\ \dot{y}_{M2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{M1} & 0 & B_{M1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{M2} & 0 & B_{M2} & 0 & 0 \\ C_{M1} & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & C_{M2} & 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & -I & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{M1} \\ z_{M2} \\ u_{M1} \\ u_{M2} \\ y_{M1} \\ y_{M2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \\ I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ D_{M1} & 0 \\ 0 & D_{M2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{M1} \\ \sigma_{M2} \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \cdot I & I & -I & -I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{M1} \\ z_{M2} \\ u_{M1} \\ u_{M2} \\ y_{M1} \\ y_{M2} \end{pmatrix}$$

Таким образом, обобщенная математическая модель измерительной системы представима в виде системы (2.1.5), объединяющей несколько подсистем, каждая из которых представляет собой модель одного измерительного преобразователя. Дифференциальные уравнения в системе отражают совокупность динамических элементов системы (подсистем), а алгебраические уравнения – связи между динамическими элементами. Такой подход позволяет: 1) моделировать сложные измерительные системы с различными видами соединений между измерительными преобразователями, рассматривая различные виды обратных связей; 2) решать не только задачи восста-

новления динамически искаженных сигналов, но и задачи восстановления состояний системы.

2.2 Адекватность математической модели оптимального динамического измерения

Рассуждения об адекватности любой математической модели неразрывно связаны с исследуемым с ее помощью объектом или процессом. В данном параграфе рассмотрим вопросы построения математической модели оптимального динамического измерения и ее адекватности с учетом физического понимания измеряемого процесса и технических сведений об объекте или среде, в котором он протекает.

При динамических измерениях реального процесса искажения измеряемой величины возникают в силу ряда причин: 1) воздействие среды и (или) объекта, в рамках которых он протекает; 2) инерционностью ИУ; 3) влияние помех, возникающих на входе ИУ; 4) влияние помех, возникающих на выходе ИУ; 5) оснащение объекта измерительными преобразователями, которые воздействуют на изучаемый процесс; 6) ограничения средств измерения по динамическим характеристикам.

При построении математической модели оптимального динамического измерения необходимо выделить основные причины искажений, а остальные, считая второстепенными, не учитывать.

Заметим, что при построении полной математической модели, включающей в себя объект и среду, в рамках которых протекает измеряемый процесс, модель первичного измерительного преобразователя вместе с сопутствующими приспособлениями, архитектуру ИУ преобразующую измеряемую величину в наблюдаемый сигнал, естественным образом представляется возможным получение модели леонтьевского типа. Это обусловлено тем, что на стыке сред «измеряемая величина» – «среда измерения» – «измерительный преобразователь» возникают алгебраически соотношения. Однако их включение в математическую модель ИУ приводит к вырожденности системы,

что означает невозможность применения классических методов ее исследования. Более того, зачастую именно динамические измерения и проводятся для описания изучаемых процессов.

На рисунке 2.2 представлена схема, отражающая структурные связи элементов математической модели оптимального измерения и моделируемых процессов и объектов.

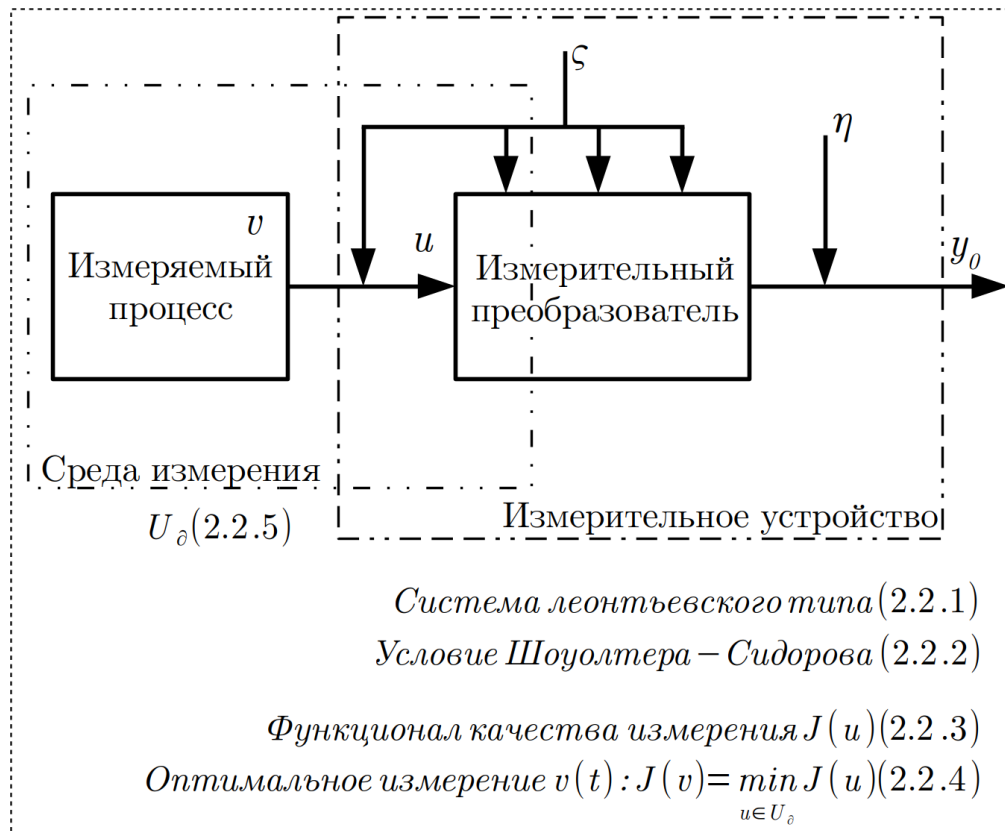


Рис. 2.2: Структурная схема математической модели оптимального измерения

В предположении, что L и A – матрицы размера $n \times n$, $A - (L, p)$ -регулярна, и возможен случай сложного ИУ, т.е. $\det L = 0$), $u : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$, ИУ описывает система

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu + Gz, \\ y = Cx + D\eta, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

где $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ соответственно; $y(t)$ – вектор-функция наблюдений; L и A – матрицы,

характеризующие ИУ; C – матрица формирует связь между состоянием ИУ и наблюдением; u – вектор-функция измерения $u(t)$ (см. рис. 2.2); $\varsigma(t)$ – вектор-функция помех в цепях измерительного устройства; $\eta(t)$ – вектор-функция помех на выходе измерительного устройства; G, D – прямоугольные матрицы связывающие вектор-функции помех с системой.

Вторым структурным элементом модели является начальное условие Шоултера–Сидорова [63]

$$\left[(\alpha L - A)^{-1} L \right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0, \quad (2.2.2)$$

которое при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(A)$ отражает начальное состояние ИУ. По сути (2.2.1) и (2.2.2) представляют собой математическую модель ИУ, что и отражено на рисунке 2.2.

Основной идеей математической модели оптимального динамического измерения является применение методов теории оптимального управления, в связи с чем строится функционал штрафа, являющийся оценкой близости наблюдаемых значений на выходе ИУ $y_0(t)$ и значений «виртуального наблюдения» $y(t)$, рассчитываемого с помощью математической модели ИУ. Тогда значения $u(t)$ «виртуального измерения» на входе математической модели ИУ и значения $v(t)$ «виртуального оптимального измерения» будут мало различаться. Именно эта ключевая идея находит свое отражение в функционале штрафа, общий вид которого представим как

$$J(u) = \beta J_1(y(u, \varsigma, \eta, t) - y_0(t)) + (1 - \beta) J_2(u, \varsigma) \quad (2.2.3)$$

и поиске вектор-функции $v \in \mathfrak{U}_\partial$, минимизирующей значение функционала (2.2.3)

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u), \quad (2.2.4)$$

Неотъемлемой частью модели оптимального динамического измерения является множество допустимых измерений \mathfrak{U}_∂ , которое по сути является компактным выпуклым подмножеством в пространстве наблюдений \mathfrak{U} . Мно-

жество допустимых измерений содержит такие $u(t)$, что

$$\sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \|u^{(q)}(t)\|^2 dt \leq d, \quad (2.2.5)$$

здесь θ может принимать целые значения от 0 до $p + 1$.

Интегральный вид множества допустимых измерений (интеграл по времени от квадрата измеряемого процесса есть энергия, выделяющаяся в ходе этого процесса на временном промежутке $[0, \tau]$) позволяет использовать априорную информацию о характере измеряемого процесса во времени. Эта информация может быть получена на основании данных лабораторных испытаний, физической модели и значений ее параметров и т.д. Более того, эта информация может позволить дополнительно выделить временные промежутки $[0, \tau_1]$, $[0, \tau_2]$, ..., $[0, \tau]$, отражающие ряд этапов процесса, и на каждом из этих промежутков дать оценку множества допустимых измерений d_1, d_2, \dots, d соответственно.

Заметим, что чем точнее оценки d_1, d_2, \dots, d , тем значимее использование множества допустимых измерений в качестве меры адекватности математической модели оптимального измерения на различных этапах измеряемого процесса.

В качестве меры адекватности математической модели может быть принята разность

$$d - d^* = d - \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \|v^{(q)}(t)\|^2 dt,$$

где v – решение задачи оптимального динамического измерения.

Этот же подход предлагается использовать в численном алгоритме для определения критерия останова алгоритма, а выделение множеств допустимых измерений на различных этапах – для более эффективного нахождения приближенного решения.

Приведем пример для камер сгорания: при сопоставлении скорости и объема доставки топливной смеси в камеру, ожидаемой расчетной энергии и

скорости горения могут быть выделены временные интервалы, определяющие этапы процесса сгорания, которые позволят оценивать величину выделяемой на этих интервалах энергии. При этом могут быть использованы данные лабораторных испытаний, данные физических моделей процесса и др. В процессе сгорания условно выделим две фазы – переходный процесс или начало горения; рабочий режим горения смеси в камере сгорания. Переходный процесс начинается в момент зажигания, при этом воспламеняется как рабочая смесь содержащаяся до начала процесса, так и поступающая в ходе этой фазы. Рабочий режим горения начинается с момента, когда объем сгораемой рабочей смеси становится постоянным во времени (давление в камере также становится постоянным во времени). Имея информацию об этих фазах, может быть проведено уточнение множества допустимых измерений, что позволит дополнительно повышать точность виртуальных динамических измерений.

2.3 Математическая модель оптимального динамического измерения с инерционностью и помехами на выходе измерительного устройства

Одной из важнейших задач теории динамических измерений является восстановление входного сигнала, искаженного детерминированными помехами, т.е. помехами, которые не изменяются от эксперимента к эксперименту. К детерминированным будем относить помехи, вызванные

- резонансами в ИУ, что приводит например, к «размыванию» пикообразных входных сигналов. Отметим, что в этом случае будем считать известными частоты и амплитуды резонансных помех;
- воздействиями резонансных помех при известной форме полезного сигнала.

В данном параграфе рассмотрим моделирование оптимального динамического измерения в предположении о воздействии детерминированных помех

только на выходе ИУ (или наблюдаемых на выходе ИУ).

Представим все структурные элементы этой модели – систему леонтьевского типа, начальное условие Шоултера–Сидорова, функционал качества измерения, критерий оптимальности измерений и множество допустимых измерений.

Зафиксировав $\tau \in \mathbb{R}_+$ будем рассматривать *пространство состояний* ИУ $\chi = \{x \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n)\}$, *пространство измерений* $\mathfrak{U} = \{u \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n)\}$ и *пространство наблюдений* $\mathfrak{Y} = C[\chi]$.

Пусть L и A – матрицы $n \times n$, матрица $A - (L, p)$ -регулярна, и возможно $\det L = 0$), $u : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$, система

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + D\eta, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

описывает ИУ при наличии резонансных помех на выходе ИУ. Здесь $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ соответственно; $y(t)$ – вектор-функция наблюдений; L и A – матрицы, характеризующие ИУ; C и D – матрицы, характеризующая связь между состоянием ИУ и наблюдением; $u(t)$ – вектор-функция измерения; $\eta(t)$ – вектор-функция помех на выходе ИУ.

Начальное условие Шоултера–Сидорова

$$\left[(\alpha L - A)^{-1} L \right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0 \quad (2.3.2)$$

при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(A)$ отражает начальное состояние измерительного устройства.

Функционал штрафа представим в виде

$$J(u) = \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\| S y^{(q)}(u, t) - S y_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt, \quad (2.3.3)$$

где $y_0(t) = \text{col}(y_{01}(t), y_{02}(t), \dots, y_{0r}(t))$ – наблюдения, получаемые в ходе натурального эксперимента, $S y_0(t)$ – те наблюдения, по которым проводится вос-

становление динамически искаженного сигнала; $y(t)$ – виртуальные наблюдения, получаемые в ходе математического моделирования процесса восстановления динамически искаженных сигналов, $Sy(t)$ – те виртуальные наблюдения, по которым восстанавливается динамически искаженные измерения при моделировании процесса; $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидовы норма и скалярное произведение в \mathbb{R}^n .

Минимизация функционала штрафа приводит к нахождению виртуального оптимального динамического измерения, т.е. измерения соответствующего наименьшему расхождению как значений реального наблюдения и виртуальных наблюдений, так и их производных. Виртуальное оптимальное динамическое измерение (восстановленный сигнал) здесь – точка минимума $v(t)$ функционала штрафа (2.3.3)

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u) \quad (2.3.4)$$

на замкнутом и выпуклом множестве \mathfrak{U}_∂ – множестве допустимых измерений

$$\mathfrak{U}_\partial = \left\{ u \in \mathfrak{U} : \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \left\| u^{(q)}(t) \right\|^2 dt \leq d \right\}, \quad (2.3.5)$$

которое аккумулирует априорную информацию об искомом оптимальном измерении v . Здесь $d = const$, $\theta = 0, 1, \dots, p + 1$.

Задача (2.3.1)–(2.3.5) является конкретным случаем задачи оптимального управления (1.4.1) – (1.4.4) при $\alpha = 1$ или задачей жесткого управления, поэтому на основании результатов п. 1.4 справедлив следующий результат.

Теорема 2.3.1 Пусть матрица A (L, p) -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, $\det A \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathfrak{Y}$ существует единственное решение $(x(v), v) \in \chi \times \mathfrak{U}_\partial$ задачи (2.3.1)–(2.3.5), причем $v(t)$ является оптимальным динамическим измерением, $x(v)$ – решением задачи (2.3.1), (2.3.2) и имеет вид

$$x(t) = x(v, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(v, t) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[- \sum_{q=0}^p \left(A^{-1} \left(\mathbb{I} - (kL_k^L(A))^{p+1} \right) L \right)^q A^{-1} \left(\mathbb{I} - (kL_k^L(A))^{p+1} \right) (Bv)^{(q)}(t) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(L - \frac{t}{k} A \right)^{-1} L \right)^k x_0 + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \left(\left(L - \frac{t-s}{k} A \right)^{-1} L \right)^{k-1} \left(L - \frac{t-s}{k} A \right)^{-1} (kL_k^L(A))^{p+1} (Bv)(s) ds \right].
\end{aligned}$$

Заметим, что функция $y_0(t)$ наблюдений, получаемых в ходе натурального эксперимента, в зависимости от принимаемых условий, определяется различными способами на основании дискретных данных $Y_0(\tau_j)$, $\tau_j \in [0, \tau]$. В предположении, что известны частоты резонансных помех, функцию $y_0(t)$ будем искать как результат численной интерполяции рядом Котельникова.

В предположении, что известна только форма наблюдаемого сигнала, функцию $y_0(t)$ получим, используя один из методов аппроксимации.

2.4 Математическая модель оптимального динамического измерения с инерционностью и помехами в цепях измерительного устройства

В данном параграфе рассмотрим моделирование оптимального динамического измерения в предположении о воздействии детерминированных помех – резонансов – как в цепях измерительного устройства (ИУ), так и на выходе ИУ. Отметим, что будем считать известными частоты резонансных помех.

Представим все структурные элементы этой модели – систему леонтьевского типа, начальное условие Шоуолтера–Сидорова, функционал штрафа, критерий оптимальности измерений и множество допустимых измерений.

Пусть L и A – матрицы $n \times n$, матрица $A - (L, p)$ -регулярна, и возможно $\det L = 0$), $u : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$, система

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu + G\varsigma, \\ y = Cx + D\eta, \end{cases} \quad (2.4.1)$$

описывает ИУ, где $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ соответственно; $y(t)$ – вектор-функция наблюдений; L и A – матрицы, характеризующие ИУ; B – матрица, характеризующая влияние и взаимосвязи измерения на состояние ИУ; и G – матрицы, характеризующая влияние и взаимосвязи помех в цепях ИУ на состояние ИУ; C – матрица, характеризующая связь между состоянием ИУ и наблюдением; и D – матрица, характеризующая влияние и взаимосвязи помех на выходе ИУ; $u(t)$ – вектор-функция измерения; $\eta(t)$ – вектор-функция помех на выходе ИУ; $\varsigma(t)$ – вектор-функция помех в цепях ИУ.

Начальное условие условию Шоултера–Сидорова

$$\left[(\alpha L - A)^{-1} L \right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0 \quad (2.4.2)$$

при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(A)$ отражает начальное состояние ИУ.

Зафиксировав $\tau \in \mathbb{R}_+$ рассмотрим *пространство состояний* ИУ

$$\chi = \{x \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n)\},$$

пространство измерений

$$\mathfrak{U} = \left\{ u \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) \right\}$$

и *пространство наблюдений* $\mathfrak{Y} = C[\chi]$.

Функционал штрафа имеет вид

$$\begin{aligned} J(u) = & \alpha \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\| S \left(Cx^{(q)}(u, t) \right) - \left(Sy_0^{(q)}(t) - S\bar{y}_0^{(q)}(t) \right) \right\|^2 dt + \\ & + \beta \sum_{q=0}^\theta \int_0^\tau \langle F_q(u + \varsigma)^{(q)}(t), (u + \varsigma)^{(q)}(t) \rangle dt, \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

где $y_0(t) = \text{col}(y_{01}(t), y_{02}(t), \dots, y_{0r}(t))$ – наблюдения, получаемые в ходе натурального эксперимента, $Sy_0(t)$ – те наблюдения, по которым проводится восстановление динамически искаженного сигнала; $y(t) = Cx(t) + D\eta(t)$ – виртуальные наблюдения, получаемые в ходе математического моделирования процесса восстановления динамически искаженных сигналов, $Sy(t)$ –

те виртуальные наблюдения, по которым восстанавливаются динамически искаженные измерения при моделировании процесса; $\bar{y}_0(t)$ – наблюдения, получаемые в ходе натурального эксперимента при нулевых значениях полезных измеряемых сигналов, $S\bar{y}(t)$ – те наблюдения (при нулевых значениях полезных измеряемых сигналов), по которым проводится восстановление динамически искаженного сигнала, F_k – симметричные неотрицательно определенные матрицы порядка n , $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидовы норма и скалярное произведение в \mathbb{R}^n .

Минимизация функционала штрафа приводит к нахождению виртуального оптимального динамического измерения, при котором: 1) достигается наименьшее расхождение значений как реального и виртуального наблюдений, так и их производных, 2) нивелируется воздействие резонанса. Таким образом, второе слагаемое играет роль резонансных фильтров. Отметим, что $\alpha \in (0, 1]$ и $\beta \in \mathbb{R}_+$ – весовые коэффициенты двух целей функционала штрафа ($\alpha + \beta = 1$), вариация которых позволит проводить анализ взаимосвязи точности восстанавливаемых измерений и нивелирования резонанса. Заметим также, что $\theta = 0, 1, \dots, p+1$ и определяется смыслом функционала штрафа, причем в большинстве приложений θ не больше 2.

Виртуальное оптимальное динамическое измерение (восстановленный сигнал) здесь – точка минимума $v(t)$ функционала штрафа (2.4.3)

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\theta} J(u) \quad (2.4.4)$$

на замкнутом и выпуклом множестве \mathfrak{U}_θ – множестве допустимых измерений

$$\mathfrak{U}_\theta = \left\{ u \in \mathfrak{U} : \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \left\| u^{(q)}(t) \right\|^2 dt \leq d \right\}, \quad (2.4.5)$$

которое аккумулирует априорную информацию об искомом оптимальном измерении v . Здесь $d = const$, $\theta = 0, 1, \dots, p+1$.

Задача (2.4.1)–(2.4.5) является конкретным случаем задачи оптимального управления (1.4.1) – (1.4.4), поэтому на основании результатов п. 1.4 справедлив следующий результат.

Теорема 2.4.1 Пусть матрица A (L, p) -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, $\det A \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathfrak{Y}$ существует единственное решение $(x(v), v) \in \chi \times \mathfrak{U}_\partial$ задачи (2.4.1)–(2.4.5), причем $v(t)$ является оптимальным динамическим измерением, а $x(v)$ – решением задачи (2.4.1), (2.4.2) и имеет вид

$$\begin{aligned}
 x(t) = x(v, t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(v, t) = \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[- \sum_{q=0}^p \left(A^{-1} \left(\mathbb{I} - (kL_k^L(A))^{p+1} \right) L \right)^q A^{-1} \left(\mathbb{I} - (kL_k^L(A))^{p+1} \right) (Bv + G\zeta)^{(q)}(t) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\left(L - \frac{t}{k} A \right)^{-1} L \right)^k x_0 + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^t \left(\left(L - \frac{t-s}{k} A \right)^{-1} L \right)^{k-1} \left(L - \frac{t-s}{k} A \right)^{-1} (kL_k^L(A))^{p+1} (Bv + G\zeta)(s) ds \right].
 \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

2.5 Моделирование потребительского потока на основе балансовой модели предприятия и динамических измерений продаж

В данном параграфе предлагается подход к моделированию потребительского потока на основе балансовой модели предприятия, динамических измерений продаж и маркетинговой модели потребительского потока «воронка продаж» [25]. Отметим, что при этом использованы идеи, представленные в работах Е.И. Назаровой [52], М. Бончеком, К. Франсе [102] и развитые автором в [133].

«Воронка продаж» – известный в маркетинге термин (от англ. «purchase funnel») отражающий путь, который среднестатистический потребитель товара или услуги проходит от привлечения его внимания к предложению до момента покупки. В современной ситуации, когда предложение товаров зачастую превышает спрос, всё сложнее привлекать клиентов напрямую, поэтому применение и грамотный анализ воронки продаж позволит действовать



Рис. 2.3: Воронка продаж для предприятия В2С



Рис. 2.4: Воронка продаж для предприятия В2В

на потенциальных потребителей как в случае компаний В2С (рис. 2.3), так и в случае В2В (рис. 2.4).

Концепция «воронки приобретения», описывающая психологию клиента, была предложена американским адвокатом Элиасом Льюисом в 1898 году, а в 30-е годы XX столетия была совмещена с известной концепцией торговли – AIDA: внимание (attention); интерес (interest); желание (desire); действие (action).

В [102] подчеркивается, что на основании опросов ведущих маркетологов компаний Google, Intuit, Sephora, SAP, Twitter и Visa, на современных рынках процесс покупки больше не является линейным. Потенциальные покупа-

тели теперь не входят в верхнюю части воронки, они входят в нее на любом этапе. Кроме того, они часто перепрыгивают этапы, пребывая на каждом этапе непредсказуемое время, или перемещаются вперед и назад между этапами. Эта точка зрения означает, что потоки потенциальных покупателей, рассматриваемые на входе в производственно-экономическую систему предприятия, формируются благодаря работе различных структур предприятия.

Кроме того, используется показатель эффективности того или иного этапа воронки продаж, называемый конверсией воронки продаж. Конверсия — это отношение потенциально возможных действий к реально совершенным. При этом оценивается стоимость 1 усл. ед. контакта – клик, ссылка на сайт, звонок, презентация, условия договора и т.д. На рис. 2.5 приведен пример конверсии воронки продаж и стоимостного анализа для туристической фирмы.



Рис. 2.5: Воронка продаж на примере туристического бизнеса

Включение воронки продаж в производственно-экономическую систему предприятия позволяет определить следующие 5 ключевых моментов: на каких этапах продаж происходит наибольший отток возможных клиентов; на каких группах потребительской аудитории следует сосредоточить основные усилия; каким будет значение конверсии при совмещении различных параметров; какие звенья (процессы) в цепи продаж лишние; какова общая эффективность бизнеса?

Итак, рассмотрим моделирование потребительского потока на основе балансовой модели предприятия, динамических измерений продаж и маркетинговой модели потребительского потока «воронка продаж». Пусть L и A – квадратные матрицы порядка n , $\det L = 0$, система

$$L\dot{x} = Ax + Bu + G\zeta \quad (2.5.1)$$

является аналогом балансовой модели В. Леонтьева в стоимостной форме. Здесь u – вектор-функция, определяющая поток потенциальных покупателей в стоимостном выражении, Bu – вектор-функция, моделирующая «воронку продаж» и в итоге определяющая конечный спрос в стоимостной форме; $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$ и $\dot{x} = \text{col}(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ – вектор-функции валового выпуска продукции и его прироста; L – матрица удельных капитальных затрат, $A = \mathbb{I} - \bar{A}$, где \bar{A} – матрица удельных прямых затрат; ζ – вектор-функция, отражающая сезонные колебания или проявление иных экономических циклов в поведении суммарного потенциального покупателя. Система

$$y = Cx + D\eta \quad (2.5.2)$$

отражает выход экономической системы – проданную продукцию, или полученную в результате продаж продукции прибыль, $D\eta$ – проявление влияния экономических циклов (например, сезонности) в поведении реальных покупателей. Заметим, что $u(t) = p \cdot s(t)$, где p – средний объем разовой покупки одним покупателем в стоимостном выражении, s – количество потенциальных покупателей. Система (2.5.1), (2.5.2) с начальным условием Шоултера–Сидорова

$$\left((\mu L - A)^{-1} L \right)^{p+1} (x(0) - x_0) = 0, \quad (2.5.3)$$

моделирует процессы в производственно-экономической системе предприятия. Начальное условие (2.5.3) при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(A)$ отражает начальное состояние производственно-экономической системы предприятия.

В соответствии с рассуждениями п.1.6, введем условия

$$x_i(t) \geq w_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.5.4)$$

$$(Bu)_i \leq 0. \quad (2.5.5)$$

В качестве видов деятельности предприятия выделим четыре вида структурных элементов: производственные (П) (h_1 подразделений основных видов деятельности: цеха, участки и т.д.); обслуживающие (О) ($h_2 - h_1 + 1$ подразделений вспомогательных видов деятельности: бухгалтерия, склад и т.д.); $h_3 - h_2 + 1$ подразделений, связанных с движением собственного капитала (ДСК), на котором будут отражаться операции по движению собственного капитала компании и распределения чистой прибыли; внешние (домашние хозяйства (ДХ) и корпоративные потребители (КП)). На основании этого элементы вектор-функции измерения покупательского спроса также могут быть условно сгруппированы:

- $u_i, i = \overline{1, h_1}$ измеряют потребительский поток существующих покупателей;

- $u_i, i = \overline{h_1 + 1, h_2}$ измеряют потребительский поток потенциальных покупателей на различных стадиях воронки продаж, обращающихся через обслуживающие службы для получения информации с намерением покупки;

- $u_i, i = \overline{h_2 + 1, h_3}$ измеряют потребительский поток потенциальных покупателей, обращающихся через "подразделения ДСК" (например, акционеры, финансовые структуры) или формирующих потоки потенциальных покупателей;

- $u_i, i = \overline{h_3 + 1, n}$ измеряют потребительский поток потенциальных покупателей, обращающихся по рекомендации сотрудников (через ДХ) или партнеров (через КП) с намерением покупки.

Экономический смысл элементов b_{ij} заключается в следующем: они отражают долю перенаправления потребительского потока потенциальных покупателей в направление деятельности (отрасль) i из направления деятельности (отрасли) j :

- $b_{ij}, i = \overline{1, h_1}, j = \overline{1, h_1}$ - доля существующих покупателей, совершающих повторные покупки продукта, производимого i -м подразделением;

- $b_{ij}, i = \overline{1, h_1}, j = \overline{h_1 + 1, h_2}$ - коэффициент перехода потенциальных

покупателей, обращающихся через обслуживающую службу j , в существующие покупатели продукта, производимого i -м подразделением;

– b_{ij} , $i = \overline{1, h_1}$, $j = \overline{h_2 + 1, h_3}$ – коэффициент перехода потенциальных покупателей, обращающихся через подразделение ДСК j , в существующие покупатели продукта, производимого i -м подразделением;

– b_{ij} , $i = \overline{1, h_1}$, $j = \overline{h_3 + 1, n}$ – коэффициент перехода потенциальных покупателей, обращающихся на основании личных рекомендаций работников предприятия или его партнеров, в существующие покупатели продукта, производимого i -м подразделением;

– $b_{ij} = 0$, $i = \overline{h_1 + 1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

Функционал штрафа представим в виде

$$J(u) = \alpha \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \left\| Sy^{(q)}(u, t) - Sy_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt + \\ + \beta \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \langle F_q(u + \varsigma)^{(q)}(t), (u + \varsigma)^{(q)}(t) \rangle dt, \quad (2.5.6)$$

где $y_0(t) = col(y_{01}(t), y_{02}(t), \dots, y_{0r}(t))$ – функция планируемых продаж, $Sy_0(t)$ – функция плановых значений показателя, например прибыли, определяемых по планам продаж; $y(t)$ – функция продаж, моделируемых на основе балансовой модели, F_k – матрицы порядка n , показывающие стоимость привлечения потенциального покупателя в j -м структурном подразделении, $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидовы норма и скалярное произведение в \mathbb{R}^n .

Минимизация функционала качества позволяет находить такой поток потенциальных покупателей, при котором: 1) достигается наименьшее расхождение как моделируемых и планируемых значений продаж (или показателей, определяемых на их основе), так и их производных, 2) наименьшая стоимость привлечения потенциальных покупателей, необходимых для достижения плановых показателей. Отметим, что $\alpha \in (0, 1]$ и $\beta \in \mathbb{R}_+$ – весовые коэффициенты целей функционала штрафа ($\alpha + \beta = 1$). Заметим также, что $\theta = 0, 1, \dots, p + 1$ и определяется смыслом функционала штрафа, но в

данном приложении $\theta = 0$.

Оптимальное измерение (восстановление) покупательского потока здесь – точка минимума $v(t)$ функционала штрафа (2.5.6)

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\theta} J(u) \quad (2.5.7)$$

на замкнутом и выпуклом множестве \mathfrak{U}_θ – множестве допустимых измерений

$$\mathfrak{U}_\theta = \{u \in \mathfrak{U} : \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \|u^{(q)}(t)\|^2 dt \leq d\}, \quad (2.5.8)$$

которое аккумулирует априорную информацию об искомом оптимальном потоке покупателей v . Здесь $d = \text{const}$, $\theta = 0, 1, \dots, p + 1$.

Задача (2.5.1)–(2.5.8) по виду функционала качества является задачей оптимального управления (1.4.1) – (1.4.4), поэтому из п. 1.4 следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 2.5.1 Пусть матрица A (L, p) -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, $\det A \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathfrak{Y}$ существует единственное решение $(x(v), v) \in \chi \times \mathfrak{U}_\theta$ задачи (2.5.1)–(2.5.8), причем $v(t)$ является оптимальным измерением покупательского потока, а $x(v)$ – решением задачи (2.5.1), (2.5.3) и имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) = x(v, t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(v, t) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[- \sum_{q=0}^p \left(A^{-1} \left(\mathbb{I} - (kL_k^L(A))^{p+1} \right) L \right)^q A^{-1} \left(\mathbb{I} - (kL_k^L(A))^{p+1} \right) (Bv + G\zeta)^{(q)}(t) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(L - \frac{t}{k} A \right)^{-1} L \right)^k x_0 + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \left(\left(L - \frac{t-s}{k} A \right)^{-1} L \right)^{k-1} \left(L - \frac{t-s}{k} A \right)^{-1} (kL_k^L(A))^{p+1} (Bv + G\zeta)(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Выводы по главе

В данной главе представлены новые результаты математического моделирования задач оптимального измерения. Применяв подходы моделирования дескрипторных систем, разработана обобщенная математическая модель измерительного устройства, показано, что сложные измерительные устройства моделируются системой леонтьевского типа. Предложен подход к оценке адекватности математической модели оптимального динамического измерения, для этого предложено использовать множество допустимых измерений. Разработана математическая модель оптимального динамического измерения с инерционностью и помехами на выходе измерительного устройства. Показана справедливость теоремы о существовании единственного решения этой задачи оптимального динамического измерения. Введены корректировки в математическую модель оптимального динамического измерения с инерционностью и помехами в цепях измерительного устройства, предложенную А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридюком. Показана справедливость теоремы о существовании единственного решения данной задачи оптимального динамического измерения. Представлено приложение теории оптимальных измерений в экономике – при решении маркетинговых задач. Предложен подход к моделированию потребительского потока на основе балансовой модели предприятия, динамических измерений и воронки продаж. Показана справедливость теоремы о существовании единственного решения задачи оптимального динамического измерения потребительского потока.

3 Численные методы и алгоритм программы нахождения оптимального динамического измерения при детерминированных помехах

3.1 Численный метод нахождения оптимального динамического измерения при наличии помех на выходе измерительного устройства

Рассмотрим случай детерминированных помех на выходе измерительного устройства, вызванных резонансами в ИУ, считая известными частоты резонансных помех.

Пусть матрица $A(L, p)$ -регулярна, $p \in \mathbb{N}_0$. Пространство \mathfrak{U} является сепарабельным по построению. На основании этого свойства найдется последовательность $\{\mathfrak{U}^\ell\}$ конечномерных подпространств $\mathfrak{U}^\ell \subset \mathfrak{U}$, которая будет монотонно исчерпывать \mathfrak{U} , т.е. $\overline{\mathfrak{U}^\ell} \subset \mathfrak{U}^{\ell+1}$ и $\bigcup_{\ell=1}^{\infty} \mathfrak{U}^\ell$ плотно в \mathfrak{U} . Это, в свою очередь, позволяет для нахождения приближенного решения $u(t)$ задачи (2.3.1) – (2.3.5) использовать представление

$$u^\ell = \begin{pmatrix} u_1^\ell \\ u_2^\ell \\ \dots \\ u_n^\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{a}_{1j} \sin \varpi_j t \\ \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{a}_{2j} \sin \varpi_j t \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{a}_{nj} \sin \varpi_j t \end{pmatrix}. \quad (3.1.1)$$

Множество допустимых виртуальных измерений \mathfrak{U}_∂ принято в данном исследовании считать компактным и выпуклым, на основании этого существует последовательность выпуклых компактов $\{\mathfrak{U}_\partial^\ell\}$, $\mathfrak{U}_\partial^\ell \subset \mathfrak{U}^\ell$, монотонно исчерпывающая \mathfrak{U}_∂ .

Заметим, что построение выпуклого компакта во множестве векторов $\{a\}$, изоморфного $\mathfrak{U}_\partial^\ell$, возможно, для удобства рассуждений будем обозначать его тем же символом $\mathfrak{U}_\partial^\ell$.

Для обозначения приближенного решения задачи оптимального динамического измерения (2.3.1) – (2.3.5) допустимо использование символа v_k^ℓ , если необходимо найти только виртуальное оптимальное динамическое измерение, или пару (v_k^ℓ, x_k^ℓ) , если необходимо, помимо виртуального оптимального динамического измерения, иметь информацию о состоянии ИУ. В рамках данного исследования будем использовать первый вариант обозначения, т.е. v_k^ℓ

Итак, представление (3.1.1) подставим в $x_k(u, t)$, получим

$$x_k(u^\ell, t) = - \sum_{q=0}^p (A^{-1}(\mathbb{I} - Q_k)L)^q A^{-1}(\mathbb{I} - Q_k)(Bu^\ell)^{(q)}(t) + X_k^t x_0 + \int_0^t R_k^{t-s} Q_k (Bu^\ell(s)) ds. \quad (3.1.2)$$

Тогда $y_k(u^\ell, t) = Cx_k(u^\ell, t) + D\eta$, а функционал штрафа для нахождения приближенного решения примет вид

$$J_k(u^\ell) = \frac{\tau}{2} \sum_{q=0}^1 \sum_{j=1}^{2q} \left\| Sy_k^{(q)}(u^\ell, \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j) - Sy_0^{(q)}(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j) \right\|^2 \omega_j. \quad (3.1.3)$$

При этом v_k^ℓ – точка минимума этого функционала (3.1.3), т.е.

$$J_k(v_k^\ell) = \min_{u^\ell \in \mathcal{U}_0^\ell} J_k(u^\ell), \quad (3.1.4)$$

Найдя v_k^ℓ и подставив вместо u^ℓ в (3.1.3) получим x_k^ℓ , т.е. $x_k^\ell = x_k(v_k^\ell, t)$.

В случае рассмотрения помехи, как суммы резонансов известных частот, η представима в виде

$$\eta = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{M_1} \mathbf{a}_{\omega_{1j}} \sin \omega_{1j}t \\ \sum_{j=1}^{M_2} \mathbf{a}_{\omega_{2j}} \sin \omega_{2j}t \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{M_m} \mathbf{a}_{\omega_{mj}} \sin \omega_{mj}t \end{pmatrix} \quad (3.1.5)$$

Представим алгоритм поиска приближенного решения рассматриваемой задачи.

Шаг 1. Вводятся начальные данные:

- n – число параметров состояний системы;
- $\varrho + 1$ – количество узлов квадратурной формулы Гаусса;
- элементы матриц L , A , B , C и D ;
- ℓ – параметр представления (3.1.1);
- Y_0 – матрица значений наблюдений $y_0(t_i)$, как результат натурального эксперимента при наличии полезного сигнала в системе, размерности $[m \times 1]$;
- d – ограничение множества допустимых измерений $\mathfrak{U}_d^\ell (d_1, d_2, \dots, d -$ ограничения множеств допустимых измерений на интервалах $[0, \tau_1], [0, \tau_2], \dots, [0, \tau]$ соответственно при наличии информации о физических параметрах модели процесса);
- τ – время, в течение которого измеряется сигнал;
- ε – точность, определяемая для критерия останова алгоритма;
- ε_1 – машинный ноль;
- h_{min}, h_{max} – минимальный и максимальный шаги изменения процедуры оптимизации;
- δ – коэффициент изменения шага оптимизации;
- $\omega_{1j}, \omega_{2j}, \dots, \omega_{mj}$ – резонансные частоты, где j изменяется в соответствии с (3.1.7);
- $\mathbf{a}_{\omega_{ij}}$ – амплитуды резонансов
- $\varpi_j, \varpi_{2j}, \dots, \varpi_\ell$ – частоты, используя которые описываются входящие сигналы
- вид функционала качества.

Шаг 2. Расчет $\det A$ для проверки условия $\det A > \varepsilon_1$. При его выполнении – переход к следующему шагу, иначе – осуществляется замена $x = e^{\lambda t} z$, и затем следует переход к шагу 3.

Шаг 3. По значениям наблюдений Y_0 определяется интерполяционный

ряд Котельникова на интервале $[0, \tau]$. Этот ряд имеет вид

$$y_0(t) = \sum_{j=0}^N y(j\Delta t) \frac{\sin(\frac{\pi}{\Delta t}(t - j\Delta t))}{\frac{\pi}{\Delta t}(t - j\Delta t)}, \quad (3.1.8)$$

где Δt – интервал дискретизации, $N + 1$ – количество наблюдений.

Шаг 4. Для численного интегрирования проводится расчет параметров квадратурной формулы Гаусса – весов и узлов.

Шаг 5. По построенной функции $y_0(t)$ рассчитываются массивы значений наблюдения и скорости изменения наблюдения в узлах квадратурной формулы Гаусса: $y_0(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j)$, $y'_0(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j)$.

Шаг 6. Определяется значение p – порядка полюса в точке ∞ L -резольвенты матрицы A и значение K , определяемой по формулам (1.3.8). Вычисляются значения X_k^t и Q_k по формулам (1.3.7)

Шаг 7. В качестве начального значения процедуры оптимизации принимаются $u_0^\ell = \text{col}(0, \dots, 0)$, т.е. $\mathbf{a}_{ij} = 0$, затем находятся по-элементно значения вектор-функции состояний ИУ в каждой из $\rho + 1$ точек, а затем вычисляется значение функционала штрафа $J_k(u_0^\ell)$.

Шаг 8. Осуществление процедуры поиска минимального значения функционала качества (3.1.6). Введем следующие обозначения:

- ρ – номер итерации в рамках процедуры данного шага, $\rho = 0, 1, \dots$;
- $(\widehat{\mathbf{a}}_{ij}^\rho)$ – коэффициенты u^ℓ , образующие массив $n \times (\ell + 1)$, принимаемые для расчета функционала штрафа на итерации ρ , причем $\widehat{\mathbf{a}}_{ij}^0 = 0$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, \ell}$;
- $J_k(\widehat{\mathbf{a}}_{ij}^\rho)$ – приближенное значение функционала штрафа, соответствующее итерации ρ .

Искомые коэффициенты $\widehat{\mathbf{a}}_{ij}^\rho$ соответствуют виду (3.1.1)

Этап 1. Начальные данные: h_{max} и h_{min} определяют интервал значений коэффициентов $(\widehat{\mathbf{a}}_{ij}^\rho)$; r – коэффициент изменения шага оптимизации; матрица $\Lambda = (\mathbf{a}_{ij})$ размерности $n \times (\ell + 1)$, далее Массив.

Этап 2. Вычисляется значение функционала при заданных значениях \mathbf{a}_{ij} . В качестве начального промежуточного шага оптимизации берется h_{max} .

Этап 3. Для любого значения ρ некоторые элементы Массива Λ не являются расчетными, для его элементов определяется коэффициент $\widehat{\mathbf{a}}_{IJ}^\rho$ подлежащий изменению.

Обозначим $\mathbf{a}_{ij} = \widehat{\mathbf{a}}_{IJ}^{\rho-1}$, $J = J_k(\widehat{\mathbf{a}}_{IJ}^{\rho-1})$. Последовательно, начиная с первого расчетного элемента массива до последнего элемента, реализуется следующая процедура. Для простоты записи в качестве первого расчетного элемента примем \mathbf{a}_{10} , при этом остальные элементы массива остаются неизменными:

1) $\mathbf{a}_{10}^{(1+)} = \mathbf{a}_{10} + h_{max}$ и $\mathbf{a}_{10}^{(1-)} = \mathbf{a}_{10} - h_{max}$. Для полученных обоих значений вычисляются значения $J_{10}^{(1+)}$ и $J_{10}^{(1-)}$ соответственно.

2) Если $J_{10}^{(1+)} > J$ и $J_{10}^{(1-)} > J$, то \mathbf{a}_{10} не изменяется и осуществляется переход к \mathbf{a}_{11} .

3) Если $J_{10}^{(1+)} < J$ и (или) $J_{10}^{(1-)} < J$, то из них определяется меньшее, тогда $J_{10}^{(1s)} = J_{10}^{(1+)}$ ($J_{10}^{(1s)} = J_{10}^{(1-)}$), $\mathbf{a}_{10}^{(1s)} = \mathbf{a}_{10}^{(1+)}$ ($\mathbf{a}_{10}^{(1s)} = \mathbf{a}_{10}^{(1-)}$). После чего пересчитывается значение $\mathbf{a}_{10}^{(1s)}$: $\mathbf{a}_{10}^{(2+)} = \mathbf{a}_{10}^{(1s)} + h_{max} \cdot r$ и $\mathbf{a}_{10}^{(2-)} = \mathbf{a}_{10}^{(1s)} - h_{max} \cdot r$. Если $J_{10}^{(2+)} > J_{10}^{(1s)}$ и $J_{10}^{(2-)} > J_{10}^{(1s)}$, то $\widehat{\mathbf{a}}_{10} = \mathbf{a}_{10}^{(1s)}$ и $J = J_{10}^{(1s)}$ и осуществляется переход к \mathbf{a}_{11} .

4) Если $J_{10}^{(2+)} < J_{10}^{(1s)}$ и (или) $J_{10}^{(2-)} < J_{10}^{(1s)}$, то из них определяется меньшее, тогда $J_{10}^{(2s)} = J_{10}^{(2+)}$ ($J_{10}^{(2s)} = J_{10}^{(2-)}$), а $\mathbf{a}_{10}^{(2s)} = \mathbf{a}_{10}^{(2+)}$ ($\mathbf{a}_{10}^{(2s)} = \mathbf{a}_{10}^{(2-)}$). После чего пересчитывается значение $\mathbf{a}_{10}^{(2s)}$ и т.д. при изменении значений $\mathbf{a}_{10}^{(h+)} = \mathbf{a}_{10}^{(h-1,s)} + h_{max} \cdot r^{h-1}$ и $\mathbf{a}_{10}^{(h-)} = \mathbf{a}_{10}^{(h-1,s)} - h_{max} \cdot r^{h-1}$ до тех пор, пока или $h_{max} \cdot r^{h-1} < h_{min}$, или не выполнится условие принадлежности множеству допустимых измерений, или произойдет переход к следующему элементу.

Далее изменению подлежит элемент Массива \mathbf{a}_{11} при первоначальном значении всех остальных элементов. Так, если изменение элемента \mathbf{a}_{10} имело место, то в ходе данной реализации процедуры расчета, для элемента \mathbf{a}_{11} это не учитывается. Однако к расчету функционала штрафа принимается уменьшенное (если это произошло) значение J . Процедура изменения элемента \mathbf{a}_{11} аналогична процедуре изменения \mathbf{a}_{10} . Так происходит осуществление процедуры изменения значений элемента по всем элементам Массива.

Затем определяется при каком значении $\widehat{\mathbf{a}}_{ij}$ элемента Массива получено значение J после цикла по всем ее элементам. Обозначим этот элемент $\widehat{\mathbf{a}}_{i*j*}$, именно он и подлежит изменению в Массиве, остальные элементы Массива Λ остаются неизменными.

Приняв изменения в Массиве одного элемента $\widehat{\mathbf{a}}_{i*j*}$, именно этот, измененный Массив и используется в основном расчете.

Подчеркнем, что при осуществлении процедуры изменения элементов Массива фиксируется значение Δ_{i*j*} шага при котором достигается наименьшее значение функционала штрафа. И при следующей итерации изменение элементов начинается не с h_{max} , а с Δ_{i*j*} , что значительно увеличивает скорость вычислений. В этом и заключается идея численных алгоритмов с памятью.

Этап 4. Этапы со второго по третий определяют одну итерацию и повторяются до тех пор, пока не выполнится условие (условия)

$$d - \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \left\| u_k^{\ell(q)} \left(\widehat{\mathbf{a}}_{ij}^{\rho}, t \right) \right\|^2 dt < \varepsilon$$

$$\left(d_i - \sum_{q=0}^{\theta} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left\| u_k^{\ell(q)} \left(\widehat{\mathbf{a}}_{ij}^{\rho}, t \right) \right\|^2 dt < \varepsilon \right).$$

Шаг 9. Определяются коэффициенты в представлении допустимого динамического измерения, при которых функционал штрафа принимает наименьшее значение

$$\mathbf{a}_{ij}^* = \widehat{\mathbf{a}}_{ij}^{\rho}, i = \overline{1, n}, j = \overline{0, l}$$

затем вычисляются приближенное значение оптимального виртуального измерения \tilde{v}_k^{ℓ} и значение функционала качества J_k

$$J_k(\tilde{v}_k^{\ell}) = J_k(\widehat{\mathbf{a}}_{ij}^{\rho}).$$

При рассмотрении случая отсутствия информации о помехах, но при известной форме полезного сигнала общий алгоритм численного метода остается тем же. Поэтому далее представим лишь возникающие в этом случае отличия.

На Шаге 1 вместо резонансных частот $\omega_{1j}, \omega_{2j}, \dots, \omega_{mj}$ вводится функция полезного сигнала $u_j = u(\mathbf{a}_{ij})$, определяющая вид полезного сигнала, где \mathbf{a}_{ij} – параметры функции, Например, известно, что функция полезного сигнала u_1 имеет вид $u_1 = \mathbf{a}_{01} + \mathbf{a}_{11} \cdot (t + \mathbf{a}_{21})^2 \cdot e^{\mathbf{a}_{e1}t^2}$.

Матрица D принимается равной нулю.

На Шаге 3 по значениям наблюдений Y_0 определяется аппроксимирующая функция $y_0(t)$. При этом будем использовать метод аппроксимации функции полиномами Чебышева. Для этого интервал $[0, \tau]$, где заданы значения τ_i , $i = 0, 1, \dots, n$, необходимо перевести в интервал $[-1, 1]$ с помощью линейного преобразования:

$$z = 2\frac{x}{\tau} - 1.$$

Затем в качестве базисных функций будем использовать ортогональные полиномы Чебышева $T_n(z) = \cos(n \cdot \arccos(z))$, $z \in [-1, 1]$, где $T_{k+1}(z) = 2zT_k(z) - T_{k-1}(z)$, $T_0(z) = 1$, $T_1(z) = z$. При этом аппроксимирующая функция примет вид: $y_0(t) = c_0T_0(z) + c_1T_1(z) + \dots + c_qT_q(z)$, Коэффициенты c_i определяются решением системы нормальных уравнений $Rc = b$, где элементы матрицы R и вектора свободных членов b имеют вид:

$$r_{kj} = \sum_{i=0}^n T_k(z_i)T_j(z_i), \quad b_k = \sum_{i=0}^n y_0(t_i)T_k(z_i), \quad k, j = \overline{0, q}.$$

На Шаге 8 при реализации процедуры поиска минимального значения функционала штрафа (3.1.6) вводятся следующие обозначения:

ρ – номер итерации в рамках процедуры данного шага, $\rho = 0, 1, \dots$;
 $(\widehat{\mathbf{a}}_{ij}^\rho)$ – коэффициенты функции, введенной на первом шаге, принимаемые для расчета функционала качества на итерации ρ , причем $\widehat{\mathbf{a}}_{ij}^0 = 0$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, \ell}$.

3.2 Численный метод нахождения оптимального динамического измерения при наличии резонансов в цепях измерительного устройства

Пусть матрица A (L, p) -регулярна, $p \in \mathbb{N}_0$. Пространство \mathfrak{U} является сепарабельным по построению. На основании этого свойства найдется последовательность $\{\mathfrak{U}^\ell\}$ конечномерных подпространств $\mathfrak{U}^\ell \subset \mathfrak{U}$, которая будет монотонно исчерпывать \mathfrak{U} , т.е. $\overline{\mathfrak{U}^\ell} \subset \mathfrak{U}^{\ell+1}$ и $\cup_{\ell=1}^{\infty} \mathfrak{U}^\ell$ плотно в \mathfrak{U} . Это, в свою очередь, позволяет для нахождения приближенного решения $u(t)$ задачи (2.4.1) – (2.4.5) использовать представление

$$u^\ell = \begin{pmatrix} u_1^\ell \\ u_2^\ell \\ \dots \\ u_n^\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{a}_{1j} \sin \varpi_j t \\ \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{a}_{2j} \sin \varpi_j t \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{a}_{nj} \sin \varpi_j t \end{pmatrix}, \quad (3.2.1)$$

где $\ell \in \mathbb{N}$ Помехи в цепях ИУ будем представлять в виде

$$\varsigma = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N_1} \mathbf{a}_{\phi_{1j}} \sin \phi_{1j} t \\ \sum_{j=1}^{N_2} \mathbf{a}_{\phi_{2j}} \sin \phi_{2j} t \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{a}_{\phi_{nj}} \sin \phi_{nj} t, \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Множество допустимых виртуальных измерений \mathfrak{U}_∂ принято в данном исследовании считать компактным и выпуклым, на основании этого существует последовательность выпуклых компактов $\{\mathfrak{U}_\partial^\ell\}$, $\mathfrak{U}_\partial^\ell \subset \mathfrak{U}^\ell$, монотонно исчерпывающая \mathfrak{U}_∂ .

Для обозначение приближенное решение задачи оптимального динамического измерения (2.3.1) – (2.3.5) допустимо использование символа \tilde{v}_k^ℓ ,

если необходимо найти только виртуальное оптимальное динамическое измерение, или парой $(\tilde{v}_k^\ell, \tilde{x}_k^\ell)$, если необходимо, помимо виртуального оптимального измерения, иметь информацию о состоянии ИУ. В рамках данного исследования будем использовать первый вариант обозначения, т.е. \tilde{v}_k^ℓ

Итак, представления (3.2.1), (3.2.2) подставим в (2.4.3), тогда функционал штрафа для нахождения приближенных решений примет вид

$$J_k(w^\ell) = \alpha \frac{\tau}{2} \sum_{q=0}^1 \sum_{j=1}^{2\eta} \left\| S \left(Cx_k^{(q)}(w^\ell, \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j) \right) - \left(Sy_0^{(q)}(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j) - S\bar{y}_0^{(q)}(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j) \right) \right\|^2 \omega_j +$$

$$+ \beta \frac{\tau}{2} \sum_{q=0}^{\theta} \sum_{j=1}^{2\eta} \langle F_q(w^\ell)^{(q)}(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j), (w^\ell)^{(q)}(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j) \rangle \omega_j, \quad (3.2.3)$$

причем $w^\ell = Du^\ell + B\zeta$, а $x_k(w^\ell, t)$ имеет вид

$$x_k(w^\ell, t) = - \sum_{q=0}^p (A^{-1}(I - Q_k)L)^q A^{-1}(I - Q_k)(u^\ell)^{(q)}(t) +$$

$$+ X_k^t x_0 + \int_0^t R_k^{t-s} Q_k w^\ell(s) ds. \quad (3.2.4)$$

и \tilde{v}_k^ℓ – точка минимума этого функционала, т.е.

$$J(\tilde{v}_k^\ell) = \min_{u^\ell \in \mathfrak{U}_\delta^\ell} J_k(w^\ell), \quad (3.2.5)$$

Найдя \tilde{v}_k^ℓ и подставив вместо u^ℓ в (3.2.4) получим \tilde{x}_k^ℓ .

Основные шаги алгоритма поиска приближенного решения рассматриваемой математической модели, остаются аналогичны представленному в п. 3.1, поэтому далее остановимся только на отличиях

Шаг 1. Вводятся начальные данные.

Вводятся все те же исходные данные и дополнительно значения частот резонансов в цепях ИУ – $\phi_{1j}, \phi_{1j}, \dots, \phi_{1j}$. Функционал штрафа задается в соответствии с данной задачей.

Шаг 2. Проверяется условие $\det A > \varepsilon_1$ (без изменений).

Шаг 3. По значениям наблюдений Y_0 определяется интерполяционный ряд Котельникова на интервале $[0, \tau]$ (без изменений).

По значениям наблюдений \bar{Y}_0 определяется интерполяционный ряд Котельникова на интервале $[0, \tau]$.

Шаг 4. Рассчитываются значения весов и узлов квадратурной формулы Гаусса (без изменений).

Шаг 5. По построенной функции $y_0(t)$ рассчитываются массивы значений наблюдения и скорости изменения наблюдения в узлах квадратурной формулы Гаусса (без изменений). Кроме того, аналогичная операция проводится для $\bar{y}_0(t)$.

Шаг 6. Определяется значение p – порядка полюса в точке ∞ L -резольвенты матрицы A и значение K , начиная с которого находится численное решение задачи. Вычисляются значения X_k^t и Q_k (без изменений).

Шаг 7. Взяв в качестве начального значения $w_0^\ell = \text{col}(0, \dots, 0)$, находятся по элементно значения вектор-функции состояний ИУ, а затем вычисляется соответствующее им значение функционала $J_k(w_0^\ell)$ (без изменений).

Шаг 8. Реализуется процедура оптимизации (без изменений).

Шаг 9. Определяются коэффициенты тригонометрических вектор-функций в представлении допустимого динамического измерения, при которых функционал штрафа принимает наименьшее значение (без изменений).

В результате решения задачи оптимального динамического измерения резонансные помехи будут вырезаны, т.е. $\alpha_{\phi_{1j}} < \varepsilon_1$, что в конечном итоге означает, что полученное \tilde{v}_k^ℓ представляет собой искомое виртуальное оптимальное динамическое измерение.

При рассмотрении задачи моделирования потребительского потока на основе балансовой модели предприятия и динамических измерений продаж представленный численный алгоритм также имеет небольшую модификацию. Представим ее на основе алгоритма, представленного в п.3.1.

Шаг 1. Задаются данные задачи.

Вводятся все те же исходные данные и дополнительно значения перио-

дов сезонных колебаний или иных экономических циклов в поведении суммарного потенциального покупателя – $\phi_{1j}, \phi_{1j}, \dots, \phi_{1j}$. Функционал качества задается в соответствии с математической моделью, т.е. вида (2.5.6).

Шаг 2. Проверяется условие $\det A > \varepsilon_1$ (без изменений).

Шаг 3. Задается плановое значение функции продаж $y_0(t)$. Задается минимально необходимое количество объема продукции или услуг i -го вида деятельности w_i из (2.5.4) и условия (2.5.5)

Шаг 4. Рассчитываются значения весов и узлов квадратурной формулы Гаусса (без изменений).

Шаг 5. По заданной функции $y_0(t)$ рассчитывается массив значений наблюдения и скорости изменения наблюдения в узлах квадратурной формулы Гаусса (без изменений).

Шаг 6. Определяется значение p – порядка полюса в точке ∞ L -резольвенты матрицы A и значение K , начиная с которого находится численное решение задачи. Вычисляются значения X_k^t и Q_k (без изменений).

Шаг 7. Взяв в качестве начального значения $u_0^\ell = \text{col}(0, \dots, 0)$, находят по элементно значения вектор-функции состояний ИУ, а затем вычисляется соответствующее им значение функционала $J_k(u_0^\ell)$ (без изменений).

Шаг 8. Реализуется процедура оптимизации (без изменений).

Шаг 9. Определяются коэффициенты тригонометрических вектор-функций в представлении допустимого динамического измерения, при которых функционал штрафа принимает наименьшее значение (без изменений).

3.3 Сходимость численных методов

Сходимость численного метода, представленного в п. 3.1 следует из доказанного аналогичного результата в [52].

Покажем сходимость численного метода, представленного в п. 3.2. Доказательство будем вести в соответствии с предложенным доказательством сходимости задачи оптимального управления для СЛТ в [32].

Обозначим приближенное решение v_k^ℓ , а v – точное решение задачи оптимальных динамических измерений (2.4.1) – (2.4.5), $J_k(v_k^\ell) = J(x_k^\ell, v_k^\ell)$

Необходимо доказать, что последовательность $\{v_k^\ell\}$ сходится к v при $k \rightarrow +\infty$, $l \rightarrow +\infty$ так, что $J(v_k^\ell) \rightarrow J(v)$. Для этого сначала необходимо показать, что $v_k^\ell \rightarrow v^\ell$ и $J(v_k^\ell) \rightarrow J(v^\ell)$ при $k \rightarrow +\infty$, а затем, что $v^\ell \rightarrow v$ и $J(v^\ell) \rightarrow J(v)$ при $l \rightarrow +\infty$,

Определение 3.3.1 Функция $J(\cdot)$ называется сильно выпуклой на выпуклом множестве $\mathfrak{U} \in \mathbb{R}^n$, если $\forall w_1, w_2 \in \mathfrak{U}$, $\forall \lambda \in [0, 1]$ и для некоторого числа $q > 0$ выполняется неравенство

$$J(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2) \leq \lambda J(w_1) + (1 - \lambda)J(w_2) - \lambda(1 - \lambda)q\|w_1 - w_2\|^2.$$

Лемма 3.3.1 Пусть \mathfrak{U}_∂ – компактное и выпуклое множество, матрица A (L, p) -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det A \neq 0$. Тогда функционал (2.4.3) является сильно выпуклой функцией на \mathfrak{U}_∂ .

Доказательство.

Запишем $J(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2)$ для (2.4.3) и проведем тождественные преобразования

$$\begin{aligned} & J(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2) = \\ & = \alpha \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\| SCx^{(q)}(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2, t) - \left(Sy_0^{(q)}(t) - S\bar{y}_0^{(q)}(t) \right) \right\|^2 dt + \\ & + \beta \sum_{q=0}^\theta \int_0^\tau \left\langle F_q(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2)^{(q)}(t), (\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2)^{(q)}(t) \right\rangle dt = \\ & = \alpha \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\| \lambda \left(SCx^{(q)}(w_1, t) - \left(Sy_0^{(q)}(t) - S\bar{y}_0^{(q)}(t) \right) \right) + \right. \\ & \left. + (1 - \lambda) \left(SCx^{(q)}(w_2, t) - \left(Sy_0^{(q)}(t) - S\bar{y}_0^{(q)}(t) \right) \right) \right\|^2 dt + \\ & + \beta \lambda^2 \sum_{q=0}^\theta \int_0^\tau \left\langle F_q w_1^{(q)}(t), w_1^{(q)}(t) \right\rangle dt + 2\beta \lambda(1 - \lambda) \sum_{q=0}^\theta \int_0^\tau \left\langle F_q w_1^{(q)}(t), w_2^{(q)}(t) \right\rangle dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\beta(1-\lambda)^2 \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \langle N_q w_2^{(q)}(t), w_2^{(q)}(t) \rangle dt = \\
& = \alpha \lambda \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \left\| SCx^{(q)}(w_1, t) - \left(Sy_0^{(q)}(t) - S\bar{y}_0^{(q)}(t) \right) \right\|^2 dt + \\
& +\alpha(\lambda^2 - \lambda) \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \left\| SCx^{(q)}(w_1, t) - \left(Sy_0^{(q)}(t) - S\bar{y}_0^{(q)}(t) \right) \right\|^2 dt + \\
& +\alpha(1-\lambda) \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \left\| SCx^{(q)}(w_2, t) - \left(Sy_0^{(q)}(t) - S\bar{y}_0^{(q)}(t) \right) \right\|^2 dt + \\
& +\alpha((1-\lambda)^2 - (1-\lambda)) \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \left\| SCx^{(q)}(w_2, t) - \left(Sy_0^{(q)}(t) - S\bar{y}_0^{(q)}(t) \right) \right\|^2 dt + \\
& +2\alpha\lambda(1-\lambda) \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \left\langle SCx^{(q)}(w_1, t) - \left(Sy_0^{(q)}(t) - S\bar{y}_0^{(q)}(t) \right), SCx^{(q)}(w_2, t) - \right. \\
& \quad \left. - \left(Sy_0^{(q)}(t) - S\bar{y}_0^{(q)}(t) \right) \right\rangle dt + \beta\lambda \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \langle F_q w_1^{(q)}(t), w_1^{(q)}(t) \rangle dt + \\
& +\beta(\lambda^2 - \lambda) \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \langle F_q w_1^{(q)}(t), w_1^{(q)}(t) \rangle dt + \beta(1-\lambda) \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \langle F_q w_2^{(q)}(t), w_2^{(q)}(t) \rangle dt + \\
& \quad +\beta((1-\lambda)^2 - (1-\lambda)) \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \langle F_q w_2^{(q)}(t), w_2^{(q)}(t) \rangle dt + \\
& +2\beta\lambda(1-\lambda) \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \langle N_q w_1^{(q)}(t), w_2^{(q)}(t) \rangle dt = \lambda J(w_1) + (1-\lambda) J(w_2) + \\
& +(\lambda^2 - \lambda) \left[\alpha \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \left\| SCx^{(q)}(w_1, t) - \left(Sy_0^{(q)}(t) - S\bar{y}_0^{(q)}(t) \right) \right\|^2 dt + \right. \\
& \quad \left. +\alpha \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \left\| SCx^{(q)}(w_2, t) - \left(Sy_0^{(q)}(t) - S\bar{y}_0^{(q)}(t) \right) \right\|^2 dt - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\alpha \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\langle SCx^{(q)}(w_1, t) - \left(Sy_0^{(q)}(t) - S\bar{y}_0^{(q)}(t) \right), \right. \\
& \quad \left. SCx^{(q)}(w_2, t) - \left(Sy_0^{(q)}(t) - S\bar{y}_0^{(q)}(t) \right) \right\rangle dt + \\
& + \beta \sum_{q=0}^\theta \int_0^\tau \left\langle F_q w_1^{(q)}(t), w_1^{(q)}(t) \right\rangle dt + \beta \sum_{q=0}^\theta \int_0^\tau \left\langle F_q w_2^{(q)}(t), w_2^{(q)}(t) \right\rangle dt - \\
& \quad \left. - 2\beta \sum_{q=0}^\theta \int_0^\tau \left\langle F_q w_1^{(q)}(t), w_2^{(q)}(t) \right\rangle dt \right] = \\
& = \lambda J(w_1) + (1-\lambda)J(w_2) - \lambda(1-\lambda) \left[\alpha \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\| SCx^{(q)}(w_1, t) - SCx^{(q)}(w_2, t) \right\|^2 dt + \right. \\
& \quad \left. + \beta \sum_{q=0}^\theta \int_0^\tau \left\langle F_q(w_1^{(q)}(t) - w_2^{(q)}(t), w_1^{(q)}(t) - w_2^{(q)}(t)) \right\rangle dt \right].
\end{aligned}$$

Все слагаемые выражения в квадратных скобках неотрицательны, поэтому

$$J(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) \leq \lambda J(w_1) + (1-\lambda)J(w_2) - \lambda(1-\lambda) \int_0^\tau \left\| SCx(w_1 - w_2, t) \right\|^2 dt.$$

В силу непрерывности $x(u, t)$ на \mathfrak{U}_∂ , то по теореме Вейерштрасса, $x(u, t)$ будет ограничена на \mathfrak{U}_∂ , а значит

$$J(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) \leq \lambda J(w_1) + (1-\lambda)J(w_2) - \lambda(1-\lambda)T \|w_1 - w_2\|^2.$$

Теорема доказана. •

Определение 3.3.2 Минимизирующей последовательностью для $J(\cdot)$ на множестве \mathfrak{U} называется последовательность $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$, для которой существует $\lim_{k \rightarrow +\infty} J(u_k)$, равный $J_* = \inf_{u \in \mathfrak{U}} J(u)$.

Пусть \mathfrak{U}_* – множество всех точек минимума. Из определения точной нижней грани следует, что минимизирующая последовательность всегда существует, т.е. если $\mathfrak{U} \neq \emptyset$, то всегда существует минимизирующая последовательность, сходящаяся к элементу \mathfrak{U}_* .

Теорема 3.3.1¹ Пусть функция $J(\cdot)$ сильно выпукла и полунепрерывна снизу на выпуклом замкнутом множестве $\mathfrak{U} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для любого $v \in \mathfrak{U}$ лебегово множество

$$\Lambda_{J(v)} \equiv \{u \in \mathfrak{U} : J(u) \leq J(v)\}$$

выпукло, замкнуто и ограничено. $J_* = \inf_{u \in \mathfrak{U}} \{J(u)\} > -\infty$, множество точек минимума $\mathfrak{U}_* = \{u \in \mathfrak{U} : J(u) = J_*\}$ состоит из единственной точки u_* , причем любая минимизирующая последовательность $\{u_k\}$ сходится к u_* по норме \mathbb{R}^n и выполняется неравенство

$$q\|u_k - u_*\|^2 \leq J(u_k) - J(u_*), \quad k = 1, 2, \dots$$

Лемма 3.3.2 Пусть выполняются условия леммы 3.3.1. Зафиксируем $\ell \in \mathbb{N}$, тогда последовательность $(x_k^\ell, v_k^\ell) \rightarrow (x^\ell, v^\ell)$ при $k \rightarrow +\infty$, где $(x_k^\ell, \tilde{v}_k^\ell)$ – точка минимума функционала J_k , при этом

$$J_k(v_k^\ell) = J(x_k^\ell, \tilde{v}_k^\ell) \rightarrow J(x^\ell, v^\ell) = J(v^\ell)$$

при $k \rightarrow +\infty$ и $J(v^\ell) = J(x^\ell, v^\ell) = \inf_{w^\ell \in \mathfrak{U}_\vartheta^\ell} J(x^\ell, w^\ell) = \inf_{w^\ell \in \mathfrak{U}_\vartheta^\ell} J(w^\ell)$.

Доказательство. Пара $(x_k^\ell, \tilde{v}_k^\ell)$ является приближенным решением задачи (2.4.1) – (2.4.5) и удовлетворяет уравнению

$$L\dot{x}_k^\ell = Ax_k^\ell + \tilde{v}_k^\ell.$$

Преобразуем его к виду

$$L\dot{x}_k^\ell - Ax_k^\ell = \tilde{v}_k^\ell. \quad (3.3.1)$$

В силу теоремы 2.4.1 $x^\ell(t) = x(v^\ell, (t)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k(v^\ell, t)$. В силу непрерывности и линейности операторов L, A получим, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (L\dot{x}_k^\ell - Ax_k^\ell) = L\dot{x}^\ell - Ax^\ell.$$

¹Теорема приведена из учебного пособия А.И. Чуличкова Экстремальные задачи: конспект лекций – Изд-во МГУ, 1996

Переходя к пределу в (3.3.1), в силу непрерывности операторов, получим, что существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{v}_k^\ell = v^\ell.$$

Так как последовательность $(x_k^\ell, \tilde{v}_k^\ell)$ доставляет минимум функционалу J_k на множестве $\mathfrak{U}_\partial^\ell$, то $J(x_k^\ell, \tilde{v}_k^\ell) \leq J(\tilde{x}_k^\ell, w_k^\ell)$ для любого $w_k^\ell \in \mathfrak{U}_\partial^\ell$, тогда устремив k к $+\infty$, получим $J(v^\ell) = J(x^\ell, v^\ell) \leq J(\tilde{x}^\ell, w^\ell) = J(w^\ell)$ для любого $w^\ell \in \mathfrak{U}_\partial^\ell$.

Лемма 3.3.3 Пусть выполняются условия леммы 3.3.1. Тогда последовательность $\{v^\ell\}$ является минимизирующей для J , сходится к v по норме \mathbb{R}^n , при этом $J(v^\ell) \rightarrow J(v)$ и выполняется неравенство

$$q\|v^\ell - v\|^2 \leq J(v^\ell) - J(v).$$

Доказательство. Так как \mathfrak{U}_∂ – выпукло и компактно, то существует последовательность $\{\mathfrak{U}_\partial^\ell\}$ выпуклых компактов $\mathfrak{U}_\partial^\ell \subset \mathfrak{U}_\partial$, монотонно исчерпывающих \mathfrak{U}_∂ , т.е.

$$\overline{\mathfrak{U}_\partial^\ell} \in \mathfrak{U}^{\ell+1}, \quad \overline{\bigcup_{\ell=1}^{\infty} \mathfrak{U}_\partial^\ell} = \mathfrak{U}_\partial.$$

Откуда следует, что $J(v^{\ell+1}) \leq J(v^\ell)$, а значит, для последовательности $\{v^\ell\} \subset \mathfrak{U}_\partial$, в силу теоремы Вейерштрасса, существует предел

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} J(v^\ell) = J_* = \inf_{u^\ell \in \mathfrak{U}_\partial} J(u) = J(v).$$

Таким образом, последовательность $\{v^\ell\}$ является минимизирующей.

Поскольку функционал (2.4.3) является сильно выпуклым и ограниченным на выпуклом и замкнутом множестве и последовательность $\{v^\ell\}$ минимизирующая, то по теореме о сильно выпуклой и полунепрерывной снизу функции на выпуклом замкнутом множестве последовательность $\{v^\ell\}$ сходится к v по норме \mathbb{R}^n так, что выполняется неравенство

$$q\|v^\ell - v\|^2 \leq J(v^\ell) - J(v). \quad \bullet$$

Так как множество \mathfrak{U}_∂ является слабо компактным, а по следствию из теоремы Мазура, функционал (2.4.3) определен и ограничен на слабокомпактном множестве, то $v \in \mathfrak{U}_\partial$.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 3.3.2 Пусть матрица A (L, p) -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det A \neq 0$, $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$ – компактном и выпуклом множестве. Тогда

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} J_k(v_k^\ell) = J(v) \quad \text{и} \quad \lim_{l \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k^\ell = J(v).$$

3.4 Описание программного комплекса

Для численного решения задачи оптимального измерения с учетом детерминированных помех написан программный комплекс на языке объектно-ориентированного программирования C++. Данный программный комплекс реализуется на IBM PC и предназначен для решения четырех задач оптимального динамического измерения, как задач жесткого или оптимального управления для системы леонтьевского типа. Общая часть комплекса зарегистрирована как программа «OptMsrR Programm». Комплекс предлагается к использованию при:

- восстановлении динамически искаженных сигналов с детерминированными помехами на выходе ИУ с известными резонансными частотами ($\Upsilon = 2$);
- восстановлении динамически искаженных сигналов с детерминированными помехами на выходе ИУ с неизвестными резонансными частотами, но известной форме входного сигнала ($\Upsilon = 1$);
- восстановлении динамически искаженных сигналов с детерминированными помехами на входе и выходе ИУ с известными резонансными частотами ($\Upsilon = 3$);
- моделировании потребительского потока на основе балансовой модели предприятия и динамических измерений продаж ($\Upsilon = 4$).

Особенностью программы является возможность использования математических моделей как простых (система обыкновенных дифференциальных уравнений), так и сложных ИУ (СЛТ). Основные этапы алгоритма программы представлены на Рис. 3.1.

Программа обеспечивает выполнение следующих функций:

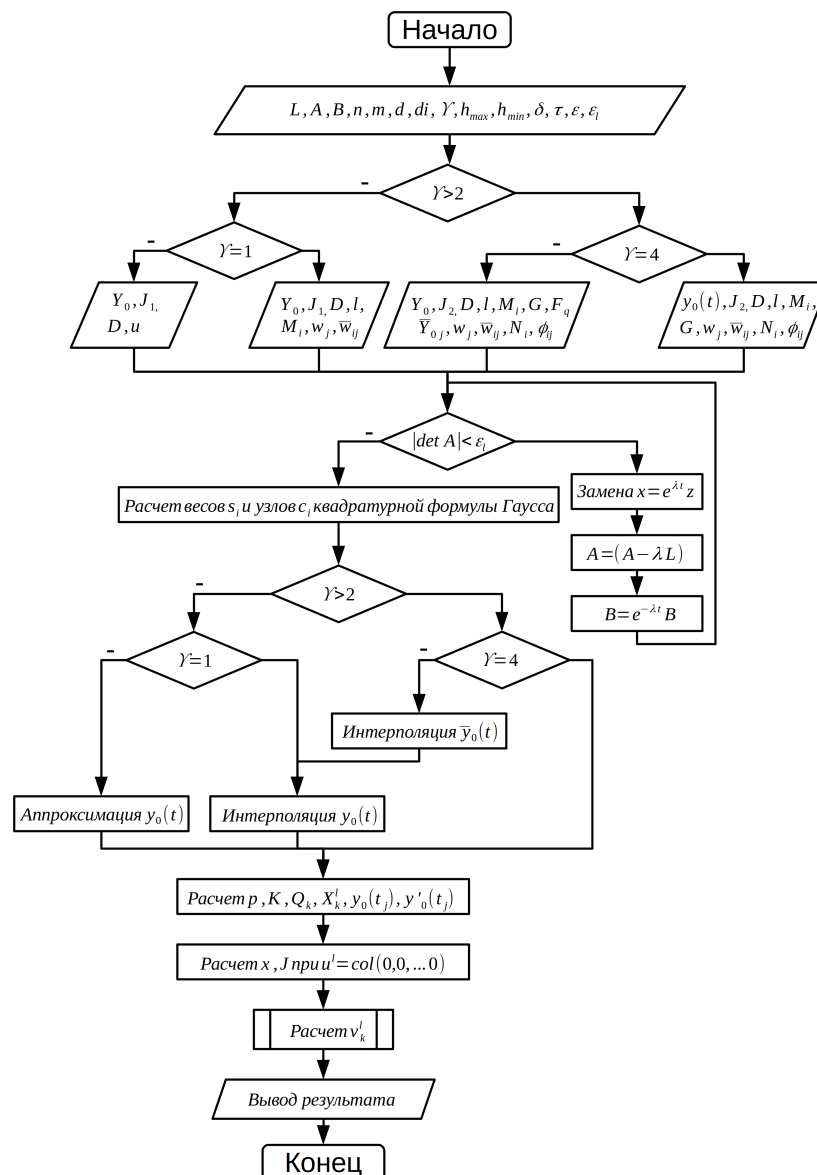


Рис. 3.1: Блок-схема программного комплекса с основными процедурами алгоритма

- ввод матриц, характеризующих ИУ (СЛТ);
- ввод параметров процедур расчета, вида функционала штрафа;
- ввод значений наблюдения, как результатов натурального эксперимента;
- ввод условий, связанных с множеством допустимых измерений;
- расчет узлов и весов квадратурной формулы Гаусса для обеспечения приближенного вычисления интегралов;
- операции над матрицами (необходимые в рамках алгоритма), процедуры интегрирования и дифференцирования;

- реализация процедур интерполяции и аппроксимации;
- реализация процедуры оптимизации функционала, определяющей коэффициенты тригонометрических вектор-функции измерения;
- расчет приближенных значений виртуальных наблюдений; функционала штрафа; динамических измерений в задаваемых значениях аргумента.

Основной процедурой является процедура поиска минимального значения функционала, представим ее блок-схемой (рис. 3.2).

Этапы алгоритма процедуры поиска наименьшего значения функционала штрафа, в результате которой определяется приближенное значение оптимального динамического измерения v_k^l , представлены в п. 3.1, поэтому приводится только блок-схема. Поясним используемые в ней обозначения.

- \mathbf{a} – массив коэффициентов тригонометрических многочленов представления допустимого динамического измерения, используется в начале циклов;
- \mathfrak{A} – массив, аналогичный \mathbf{a} , создаваемый для промежуточных расчетов внутри циклов;
- \mathfrak{A}'_{ij} – массив, аналогичный \mathbf{a} , при значении элементов которого в цикле достигается минимум функционала при изменении коэффициента с индексами (i, j) ;
- $J(\mathfrak{A}), J(\mathbf{a})$ – значения функционала штрафа при коэффициентах соответствующих массивов \mathfrak{A} и \mathbf{a} ;
- h_{max}, h_{min}, Δ – максимальный, минимальный и промежуточные шаги оптимизации соответственно;
- см. зн. - логическое выражение «смена знака».

Подчеркнем, что именно для этой процедуры предложено распараллеливание вычислений, представленное на схеме Рис. 3.3.

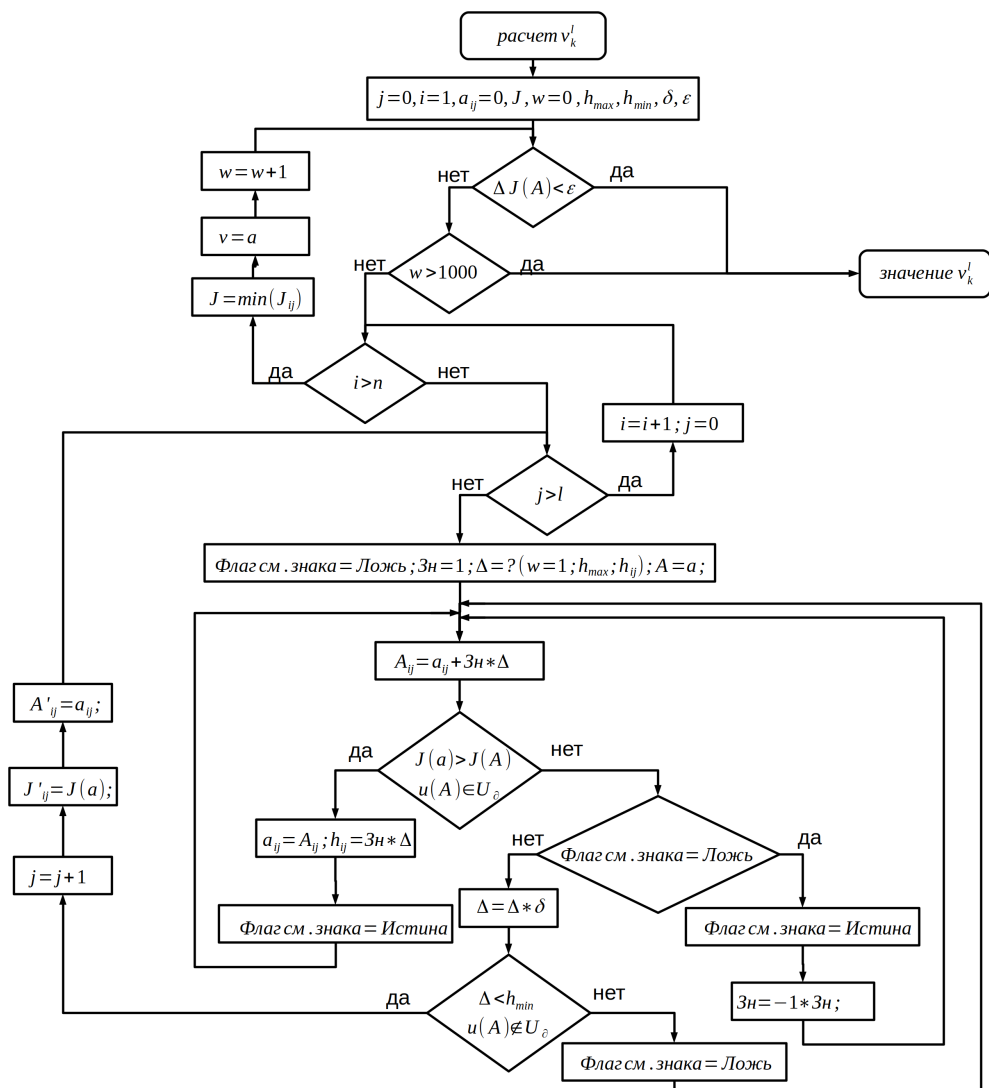


Рис.3.2 Блок-схема процедуры оптимизации

При этом используется централизованная схема распределения вычислений с архитектурой типа "звезда". Вычисление каждого элемента Массива реализуют отдельные процессоры, выбор элемента, при изменении которого достигается меньшее значение функционала качества, также осуществляет отдельный процессор.

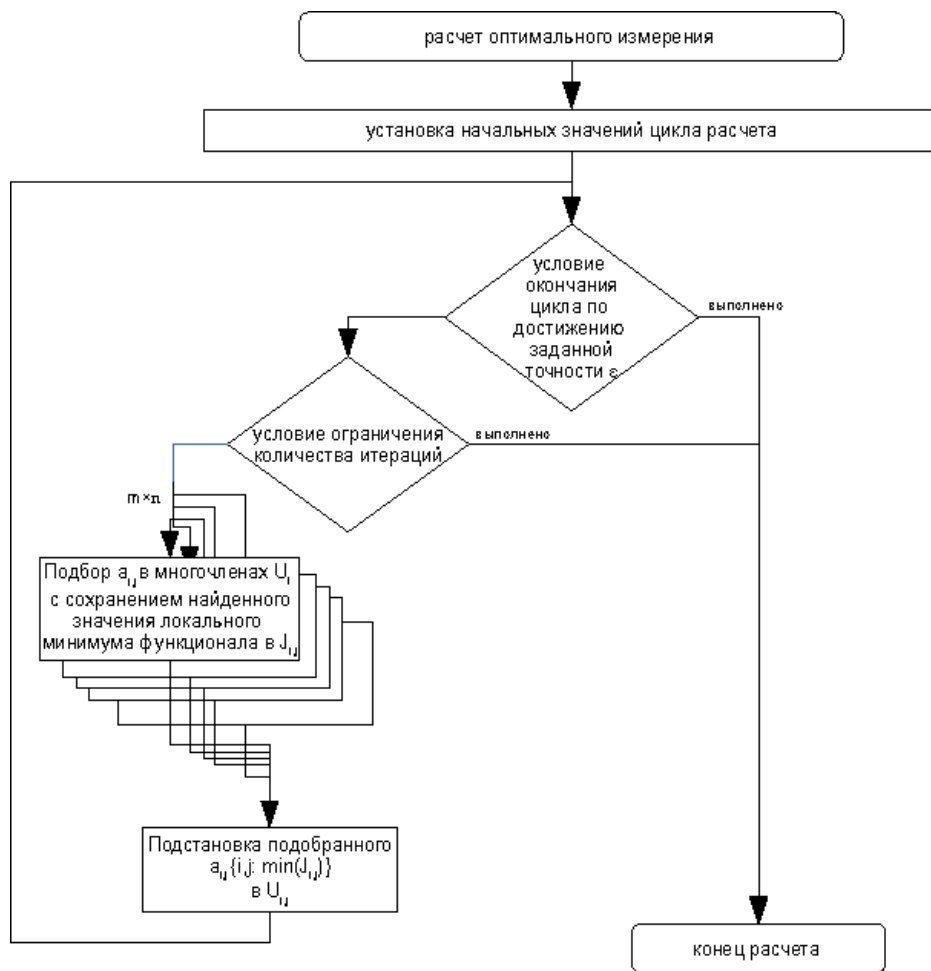


Рис.3.3. Схема распараллеливания вычислений в процедуре оптимизации

Отметим, что в данном алгоритме, как и в ранее используемых в теории оптимальных динамических измерений, заложены идеи метода многошагового покоординатного спуска с памятью при поиске коэффициентов тригонометрических полиномов u^l . Однако распараллеливание позволяет значительно усовершенствовать алгоритм численного решения не только повышением скорости вычислений, но и изменением процедуры оптимизации. В данной работе предлагается, найдя возможные изменения всех элементов Массива коэффициентов полиномов u^l и соответствующие им значения функционала качества, а затем определив его наименьшее значение, изменить только один, соответствующий этому наименьшему значению, элемент Массива.

Идеи данного подхода распараллеливания алгоритма численного реше-

ния задачи оптимального измерения с учетом резонансов могут быть применимы и к алгоритмам решения класса задач оптимального управления – оптимального, жесткого, стартового, стартового жесткого – для систем леонтьевского типа.

3.5 Результаты вычислительных экспериментов

Для проведения вычислительных экспериментов составим математическую модель измерительного устройства, заданного передаточной функцией

$$W_g(p) = \frac{1}{(T_1^2 p^2 + 2\xi_1 T_1 p + 1)(T_2^2 p^2 + 2\xi_2 T_2 p + 1)(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}$$

при известных ее параметрах $T_1 = 0,01c$, $\xi_1 = 0,6$, $T_2 = 0,002c$, $\xi_2 = 0,2$, $T_3 = 0,0005c$, $T_4 = 0,0001c$.

На рис 3.4 приведена амплитудно-частотная характеристика передаточной функции.

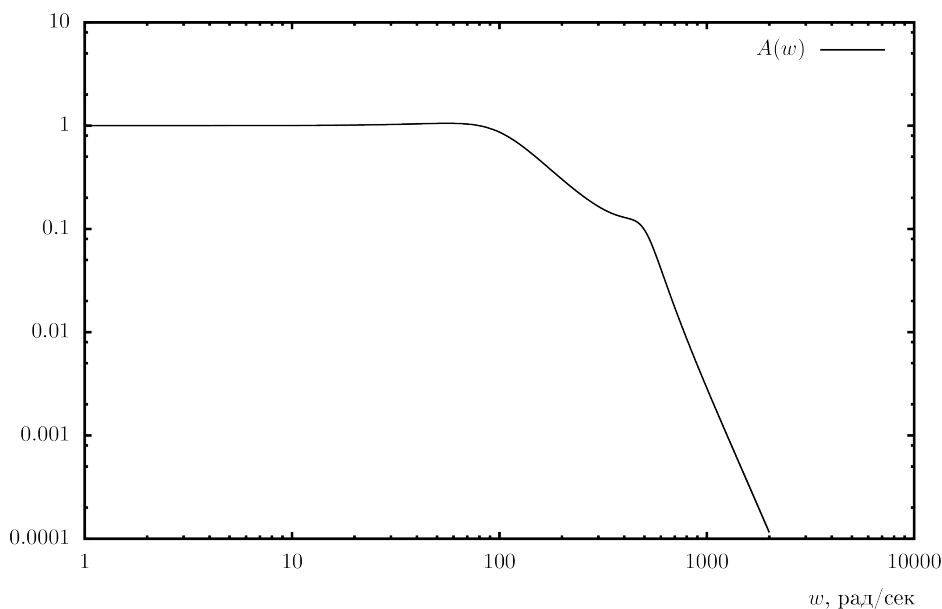


Рис.3.4. Амплитудно-частотная характеристика передаточной функции

На рисунке 3.5 приведена фазо-амплитудная характеристика передаточной функции.

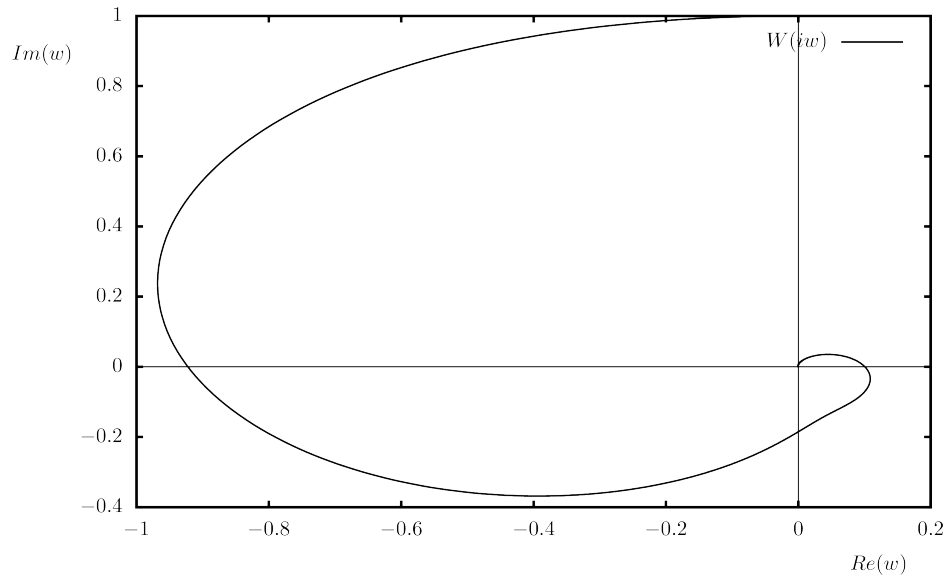


Рис.3.5. Фазо-амплитудная характеристика передаточной функции

Модель измерительного устройства с учетом возможных помех имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -x_1 - 0,9881x_2 + u + \tilde{\eta}, \\ \dot{x}_2 = 10000x_1 - 119x_2, \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_3 - 0,999204x_4, \\ \dot{x}_4 = 250000x_3 - 119x_4, \\ \dot{x}_5 = 2000x_4 - 2000x_5, \\ \dot{x}_6 = 10000x_5 - 10000x_6, \\ y = x_6 + \eta, \end{array} \right. \quad (3.5.1)$$

где $x = col(x_1(t), \dots, x_6(t))$ и $\dot{x} = col(\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_6(t))$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния измерительного устройства соответственно, $x_0 = col(0, \dots, 0)$, $u(t)$, $y(t)$ – вектор-функции измеряемого и наблюдаемого сигналов измерительного устройства.

Для простоты матрицы B , C , S , F примем единичными. Заметим, что на рисунках, приведенных далее в примерах, графики функций $\bar{y}_0(t)$, $y_0(t)$ совпадают с точками массивов наблюдений \bar{Y}_0 , Y_0 соответственно, так как количество точек составляет 500, что не позволяет на графике изобразить их совместно.

Пример 1. Рассмотрим случай, когда резонансная помеха действует только на выходе ИУ. Известна ее частота $\omega = 5000$ и амплитуда, таким образом, $\eta = 0,03 \sin 5000t$. На рисунке 3.6. представлены функция наблюдения $y_0(t)$, полученная на основе результатов реальных наблюдений, и найденное, в результате вычислительного эксперимента, оптимальное динамическое измерение v_k^ℓ .

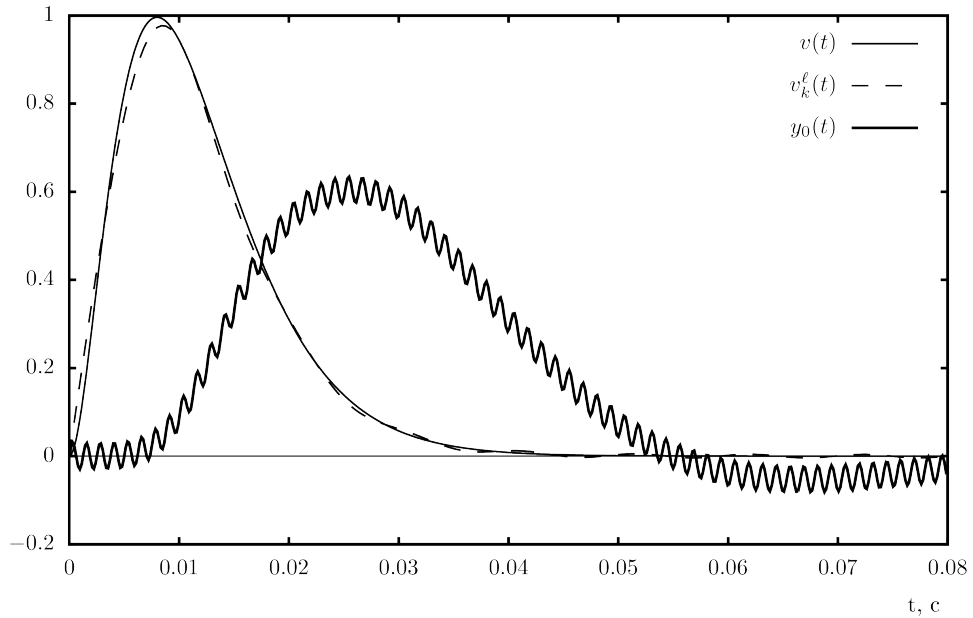


Рис.3.6. Результаты вычислительного эксперимента для случая действия резонанса на выходе ИУ при известной резонансной частоте

В результате вычислительного эксперимента, найдена амплитуда резонансной помехи. Получено приближенное решение задачи оптимального динамического измерения (ОДИ)

$$\begin{aligned}
 v_k^\ell = & 0,156386711672626 \sin(2\pi \cdot 6,25t) + 0,247407484951549 \sin(2\pi \cdot 12,5t) + \\
 & + 0,258215058876576 \sin(2\pi \cdot 18,75t) + 0,217172530953783 \sin(2\pi \cdot 25t) + \\
 & + 0,159416960961203 \sin(2\pi \cdot 31,25t) + 0,106420289628521 \sin(2\pi \cdot 37,5t) + \\
 & + 0,0657668934971499 \sin(2\pi \cdot 43,75t) + 0,0374662930570334 \sin(2\pi \cdot 50t) + \\
 & + 0,0189026694461611 \sin(2\pi \cdot 56,25t) + 0,00722447810984459 \sin(2\pi \cdot 62,5t) + \\
 & + 0,000141998282577822 \sin(2\pi \cdot 68,75t) - 0,00397622330210702 \sin(2\pi \cdot 75t) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -0,00622392263810763 \sin(2\pi \cdot 81, 25t) - 0,00731276449005634 \sin(2\pi \cdot 87, 5t) - \\
& -0,00769624688641762 \sin(2\pi \cdot 93, 75t) - 0,00766147606400266 \sin(2\pi \cdot 100t) - \\
& -0,0073875884086711 \sin(2\pi \cdot 106, 25t) - 0,00698658726010777 \sin(2\pi \cdot 112, 5t) - \\
& -0,00652670863981444 \sin(2\pi \cdot 118, 75t) - 0,00604985771367458 \sin(2\pi \cdot 125t) - \\
& -0,00558016109398793 \sin(2\pi \cdot 131, 25t) - 0,00513175948284598 \sin(2\pi \cdot 137, 5t) - \\
& -0,0047114664538241 \sin(2\pi \cdot 143, 75t) - 0,00432264179436352 \sin(2\pi \cdot 150t) - \\
& -0,00396554753897888 \sin(2\pi \cdot 156, 25t) - 0,00363959261079678 \sin(2\pi \cdot 162, 5t) - \\
& -0,00334280694898749 \sin(2\pi \cdot 168, 75t) - 0,00307337823849602 \sin(2\pi \cdot 175t) - \\
& -0,00282880861797621 \sin(2\pi \cdot 181, 25t) - 0,00260712169018823 \sin(2\pi \cdot 187, 5t) - \\
& -0,0024059271302477 \sin(2\pi \cdot 193, 75t) - 0,00222345803520028 \sin(2\pi \cdot 200t).
\end{aligned}$$

Сравним точное решения задачи оптимального динамического измерения $v(t)$ (которое в силу модельного примера известно) и приближенное решение $v_k^\ell(t)$ (рис. 3.7).

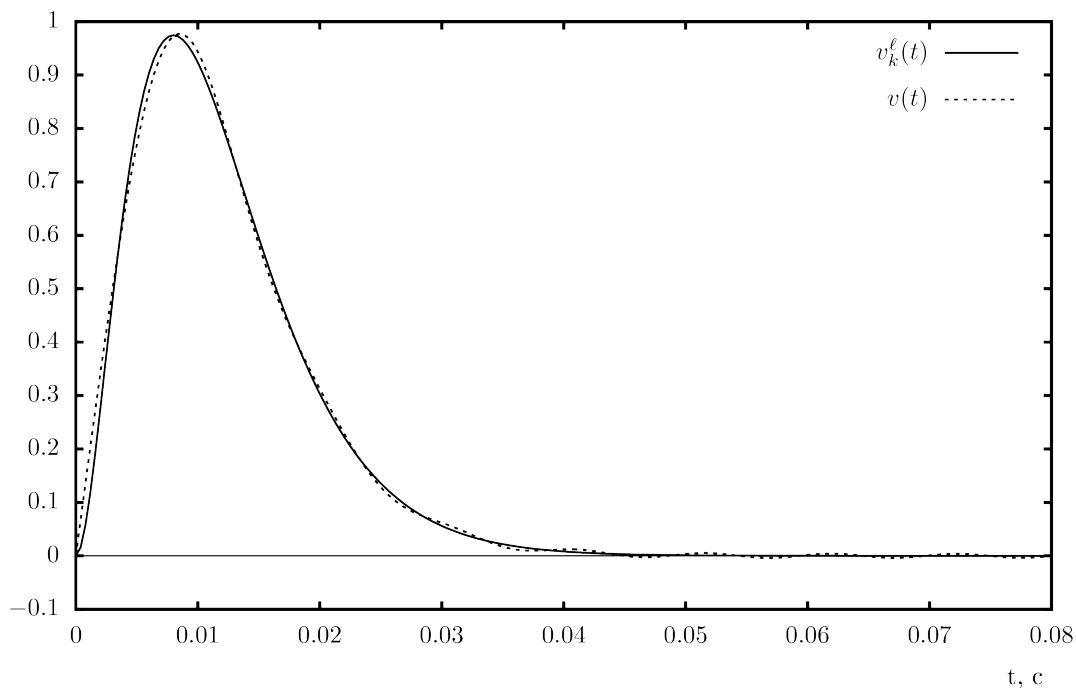


Рис.3.7. Приближенное и точное решение задачи ОДИ Примера 1.

Очевидно, что приближенное решение, несмотря на небольшое количество слагаемых в представлении тригонометрическим полиномом, весьма точно. На рисунке 3.8. представим график разности точного и приближенного решения.

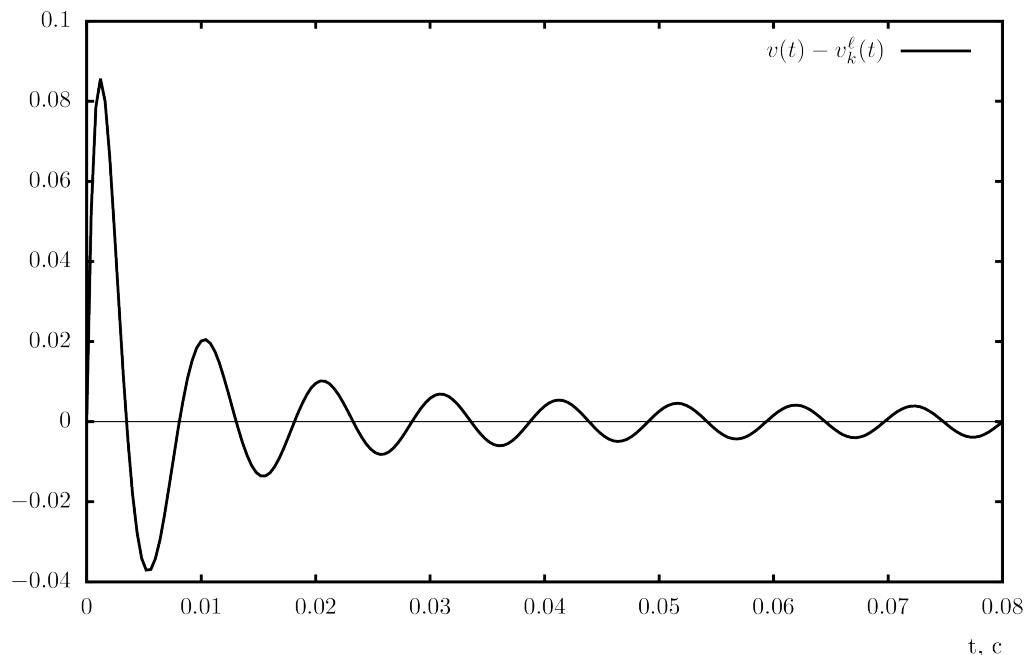


Рис.3.8. Разность приближенного и точного решения задачи ОДИ Примера 1.

Отметим, что $\max|v_k^l(t) - v(t)| = 0.831234$. Если увеличить количество слагаемых до 150 в тригонометрическом полиноме, то погрешность уменьшится до 0,0001, однако и скорость расчета серьезно снизится.

Пример 2. Рассмотрим случай, когда резонансные помехи действуют как на выходе ИУ, так и в его цепях. Известны их частоты $\omega = 5000$ и $\phi = 500$, таким образом, $\eta = a_\omega \sin 5000t$ и $\zeta = a_\phi \sin 500t$. На рисунке 3.9. представлены: наблюдения $\bar{y}_0(t)$, получаемые в ходе натурального эксперимента при нулевых значениях измеряемого сигнала, и наблюдения $y_0(t)$, получаемые в ходе натурального эксперимента при ненулевых значениях измеряемого сигнала, найденное в результате вычислительного эксперимента оптимальное измерение v_k^l .

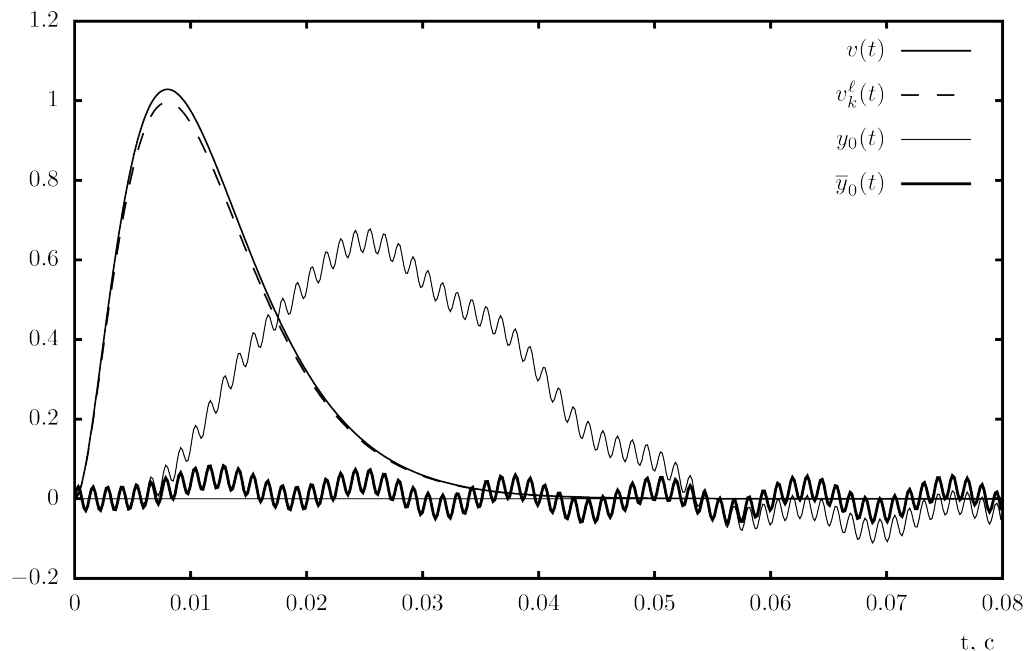


Рис.3.9. Результаты вычислительного эксперимента для случая действия резонансов на выходе и на входе ИУ при известных резонансных частотах

Пример 3. Рассмотрим случай, когда резонансные помехи действуют как на выходе ИУ, так и в его цепях. При этом их частоты не известны, однако известно, что сигнал имеет форму функции $u(t) = a_1 t^2 e^{-a_2 t} + a_3$.

На рисунке 3.10. представлены: наблюдения Y_0 , получаемые в ходе натурального эксперимента, аппроксимирующая наблюдения функция $y_0(t)$, найденное в результате вычислительного эксперимента приближенное оптимальное измерение $v_k^l(t)$ и точное оптимальное измерение $v(t)$.

В результате вычислительного эксперимента, получено приближенное решение задачи оптимального динамического измерения

$$v_k^l = 115002,332t^2 e^{-250,24t}.$$

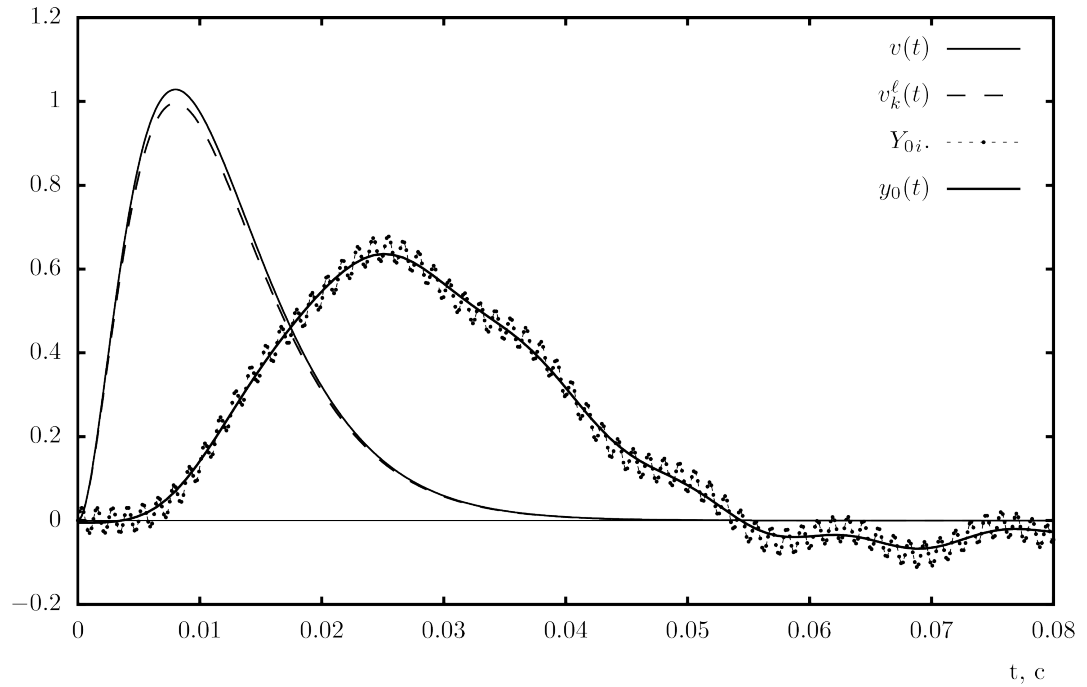


Рис.3.10 Результаты вычислительного эксперимента для случая действия резонансов на выходе ИУ при неизвестной резонансной частоте и известной форме измеряемого сигнала

Пример 4. Рассмотрим модельный пример уточнения множества допустимых измерений. Так при рассмотрении Примера 1 во временном промежутке $[0, \tau]$, с учетом полученного значения $p = 0$, первоначально было задано множество допустимых измерений

$$\sum_{q=0}^1 \int_0^{0,08} \left\| u_k^{\ell(q)} \left(\widehat{a}_{ij}^{\rho}, t \right) \right\|^2 dt < d = 211, 6097.$$

Затем были выделены три промежутка $[0, \tau_1]$, $[\tau_1, \tau_2]$ и $[\tau_2, \tau_3]$, где $\tau_1 = 0, 004$, $\tau_2 = 0, 014$ и $\tau_3 = 0, 04$, на которых дополнительно указаны ограничения для множеств допустимых измерений. Представим их:

$$\sum_{q=0}^1 \int_0^{0,004} \left\| u_k^{\ell(q)} \left(\widehat{a}_{ij}^{\rho}, t \right) \right\|^2 dt < d_1 = 123, 0066,$$

$$\sum_{q=0}^1 \int_{0,004}^{0,014} \left\| u_k^{\ell(q)} \left(\widehat{a}_{ij}^{\rho}, t \right) \right\|^2 dt < d_2 = 124, 6636,$$

$$\sum_{q=0}^1 \int_{0,014}^{0,4} \left\| u_k^{\ell(q)} \left(\widehat{a}_{ij}^{\rho}, t \right) \right\|^2 dt < d_3 = 38,9579.$$

В результате уточнения множества допустимых измерений получено иное решение, на рисунке 3.11 представлены графики полученных решений одной и той же задачи оптимального динамического измерения из Примера 1: $v_k^{\ell*}$ – с уточненным множеством допустимых измерений, v_k^{ℓ} – с множеством допустимых измерений, заданным первоначально.

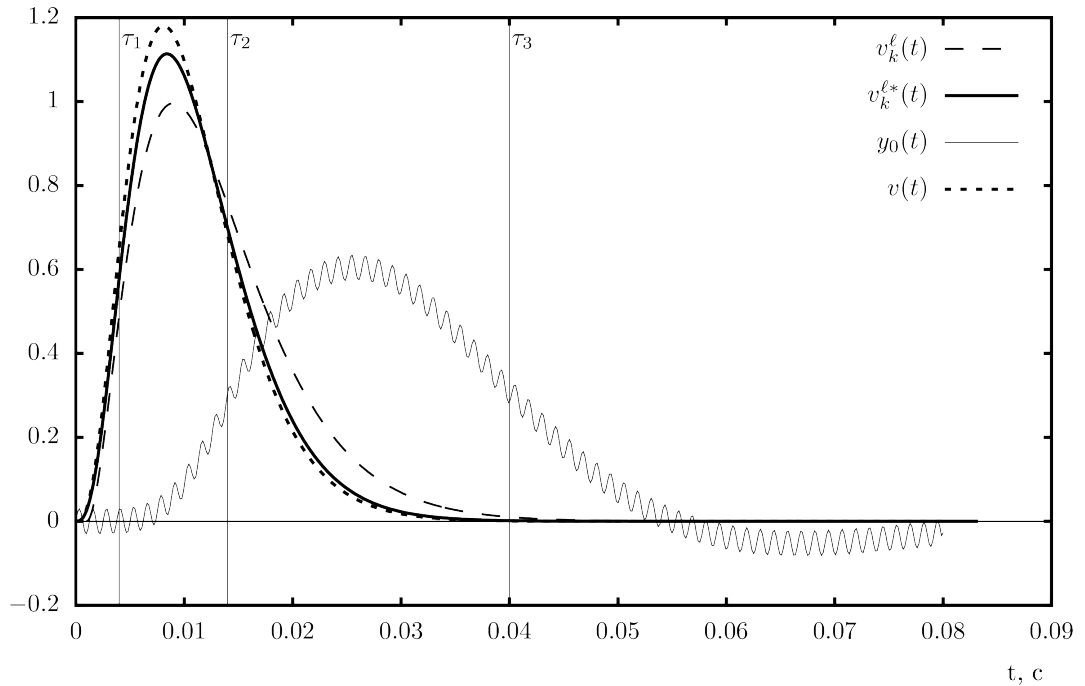


Рис.3.11 Результаты вычислительного эксперимента при уточнении множества допустимых измерений

Отметим, что при уточненном решении $v_k^{\ell*}$ увеличилось значение $d^* = 286,6283$ за счет, прежде всего, увеличения значений производных. Если мы сравним значения

$$\int_0^{0,08} \left\| u_k^{\ell} \left(\widehat{a}_{ij}^{\rho}, t \right) \right\|^2 dt = \delta,$$

то значительных расхождений нет, так, без уточнения множества допустимых измерений $\delta = 0,001015680$, а при уточненном множестве допустимых

измерений $\delta^* = 0,01039833$. Приближенное решение задачи оптимального динамического измерения при уточненном множестве допустимых измерений имеет вид:

$$\begin{aligned}
 v_k^{\ell*} = & 0,133946822595132 \sin(2\pi \cdot 6,25t) + 0,227106835731783 \sin(2\pi \cdot 12,5t) + \\
 & + 0,260308519624985 \sin(2\pi \cdot 18,75t) + 0,240676528880669 \sin(2\pi \cdot 25t) + \\
 & + 0,190163561862987 \sin(2\pi \cdot 31,25t) + 0,131037350098669 \sin(2\pi \cdot 37,5t) + \\
 & + 0,0779306975310919 \sin(2\pi \cdot 43,75t) + 0,0370821746285821 \sin(2\pi \cdot 50t) + \\
 & + 0,00903851547967552 \sin(2\pi \cdot 56,25t) - 0,0083565680358572 \sin(2\pi \cdot 62,5t) - \\
 & - 0,0179590971351134 \sin(2\pi \cdot 68,75t) - 0,0223438228938383 \sin(2\pi \cdot 75t) - \\
 & - 0,0234841874170562 \sin(2\pi \cdot 81,25t) - 0,0227560650768984 \sin(2\pi \cdot 87,5t) - \\
 & - 0,0210574137313625 \sin(2\pi \cdot 93,75t) - 0,0189433454169347 \sin(2\pi \cdot 100t) - \\
 & - 0,0167390007829702 \sin(2\pi \cdot 106,25t) - 0,0146224962412895 \sin(2\pi \cdot 112,5t) - \\
 & - 0,0126816149042001 \sin(2\pi \cdot 118,75t) - 0,0109507751280247 \sin(2\pi \cdot 125t) - \\
 & - 0,00943430829036674 \sin(2\pi \cdot 131,25t) - 0,00812069903659914 \sin(2\pi \cdot 137,5t) - \\
 & - 0,00699104125599831 \sin(2\pi \cdot 143,75t) - 0,00602389649627148 \sin(2\pi \cdot 150t) - \\
 & - 0,005197951166799 \sin(2\pi \cdot 156,25t) - 0,00449336725212877 \sin(2\pi \cdot 162,5t) - \\
 & - 0,00389236652034175 \sin(2\pi \cdot 168,75t) - 0,00337939039194787 \sin(2\pi \cdot 175t) - \\
 & - 0,00294102762136243 \sin(2\pi \cdot 181,25t) - 0,00256583498378781 \sin(2\pi \cdot 187,5t) - \\
 & - 0,00224411078915205 \sin(2\pi \cdot 193,75t) - 0,00196766549856338 \sin(2\pi \cdot 200t).
 \end{aligned}$$

Выводы по главе

В третьей главе представлены алгоритмы численных методов решения всех четырех моделей, рассмотренных во второй главе. Показаны сильная выпуклость функционала качества на множестве допустимых измерений, сходимость по норме приближенных решений рассматриваемой задачи оптимального динамического измерения. Представлено описание программного комплекса, реализующего алгоритм численного решения задач оптимального динамического измерения с учетом детерминированных помех, приведена и описана блок-схема основного алгоритма программного комплекса – поиска наименьшего значения функционала и приближенного значения виртуального измерения. Представлена процедура распараллеливания этапа поиска оптимального динамического измерения. Проведены вычислительные эксперименты на модельных примерах, результаты которых по трем моделям оптимального динамического измерения показали высокую вычислительную эффективность.

Заключение

Итоги выполненного исследования

В диссертационной работе проведено численное исследование класса математических моделей оптимального динамического измерения с детерминированными помехами различной природы.

Во Введении диссертационной работы были поставлены ее цель и задачи. Приведем итоги их реализации.

1. В работе предложена методика представления математической модели сложной измерительной системы, содержащей несколько измерительных устройств, в виде системы леонтьевского типа, позволяющей учитывать связи между устройствами в виде алгебраических уравнений. Приведен пример сложной измерительной системы с итерационным принципом восстановления сигнала.

2. Предложена математическая модель оптимального динамического измерения с инерционностью и детерминированными по частоте помехами на выходе измерительного устройства. При этом функционал штрафа отражает разности как виртуального (моделируемого) и реального наблюдений, так и их производных, что позволяет нивелировать воздействие помех на выходе измерительного устройства и, при минимизации функционала, найти приближенное виртуальное измерение близкое искомому. При этом рассмотрены два случая. В одном из них известны частоты помех, а в другом при наблюдении помех – форма восстанавливаемого сигнала при неизвестных частотах помех.

3. Предложена математическая модель оптимального динамического измерения с учетом инерционности, детерминированных помех в цепях и на выходе измерительного устройства. Функционал штрафа этой модели отражает сопоставление виртуального и реальных наблюдений и нивелирование воздействия помех как в цепях, так и на выходе измерительного устройства. Минимизация функционала штрафа позволяет, достигая меньшего расхож-

дения между виртуальным и реальными наблюдениями и уменьшая воздействие помех, обеспечивать наименьшее отличие приближенного оптимального измерения от искомого. Для этой модели оптимального динамического измерения показана ее применимость в решении экономических задач.

4. Для всех математических моделей оптимальных динамических измерений проведено качественное исследование. Показана справедливость теорем о существовании единственного решения задач оптимального динамического измерения.

5. Разработан численный метод решения задачи оптимального динамического измерения с учетом инерционности ИУ и помех различной природы. При этом пояснены его модификации для каждой из исследуемых математических моделей оптимального динамического измерения. Отличительной особенностью этого алгоритма является поиск приближенного решения в виде тригонометрических полиномов, а не степенных как в аналогичных исследованиях. Внесены изменения в основные процедуры, позволившие снизить влияние самого серьезного недостатка ранее используемых методов – значительное время расчетов. Более того, эти решения позволили более эффективно использовать распараллеливание вычислений, процедура которых также для методов решения задачи оптимальных динамических измерений была предложена впервые.

6. Разработанный метод позволяет использовать априорную информацию и в результате получить более адекватную к условиям измерения математическую модель оптимального динамического измерения.

7. Разработан программный комплекс, реализующий все модификации численных алгоритмов. Получено свидетельство о регистрации программы.

8. Проведены вычислительные эксперименты, полученные результаты подтвердили эффективность предложенных методов и алгоритмов.

Таким образом, в работе решены все поставленные задачи и достигнута цель исследования.

Полученные результаты являются новыми и позволяют сделать вывод о

том, что диссертационная работа соответствует следующим областям исследования паспорта специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.
3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий
4. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Рекомендации

Результаты численно-аналитического исследования позволяют применять их при решении различных задач для:

- измерительных систем с различным числом сенсоров, работающих в динамическом режиме;
- испытательных комплексов для определения, например, сил тяги двигателей различного назначения;
- многокомпонентных сенсоров, измеряющих несколько параметров работы в динамическом режиме, например, давление и температуру.

Разработка новых программных систем с качественным интерфейсом пользователя (технического работника) для проведения вычислительных экспериментов, с адаптацией и интеграцией существующих программ позволит внедрить результаты в технологический и учебный процессы.

Перспективы дальнейшей разработки темы

Развитие теории оптимальных динамических измерений поставило вопросы, связанные с изучением случайных помех в рамках теории уравнений соболевского и леонтьевского типов. В качестве современных работ следует отметить работы Ю.Е Гликлиха [16] и Г.А. Свиридюка [125], посвященных изучению стохастических систем леонтьевского типа. Разработка численных

методов в рамках математических моделей оптимального динамического измерения с учетом детерминированных помех позволяют не только решать метрологические и экономические задачи, но и расширять возможности методов теории систем леонтьевского типа.

Отметим перспективы дальнейших исследований по теме диссертационной работы:

1. Моделирование оптимальных динамических измерений со случайными помехами, на основе стохастических уравнений леонтьевского типа и методов теории оптимального управления;
2. Моделирование нестационарных моделей оптимальных динамических измерений;
3. Совершенствование численных методов решения задач оптимальных измерений;
4. Использование для решения обратных задач динамических измерений различных методов оптимального управления.

Список литературы

- [1] *Аникин, С.А.* Методы регуляризации в задачах идентификации входов динамических систем: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / С.А. Аникин. – Екатеринбург, 2002. – 116 с.
- [2] *Аникин, С.А.* Идентификация входов квазилинейных систем / С.А. Аникин // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 11 – С. 12–30.
- [3] *Бизяев, М.Н.* Измерительный преобразователь в скользящем режиме с блочной структурой модели датчика / М.Н. Бизяев, А.Л. Шестаков // Информационно-управляющие и радиоэлектронные системы: Тем. сб. научн. тр. – Челябинск, 2003. – С. 9–15.
- [4] *Боде, Х.* Упрощенный вывод линейной теории сглаживания и предсказания по методу наименьших квадратов / Х. Боде., К. Шеннон – перевод с английского издания 1950 г. В книге: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике, И. Л., 1963, стр. 687–708.
- [5] *Бояринцев, Ю.Е.* Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука, 1988. – 257 с.
- [6] *Бояринцев, Ю.Е.* Алгебро-дифференциальные системы: методы решения и исследования / Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1998.– 224 с.
- [7] *Брайсон, А.* Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши – М.: Мир, 1972 (перевод с издания 1969 г.), 544 с.
- [8] *Брычев, С.В.* Исследование математической модели экономики коммунального хозяйства малых городов: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / С.В. Брычев. – Челябинск, 2002. – 124 с.

- [9] Булатов, М.В. Об одном классе разностных схем для численного решения дифференциально-алгебраических систем / М.В. Булатов // ЖВМиМФ. – 1998. – Т. 38, № 10. – С. 1641–1650.
- [10] Булатов, М.В. Об одном численном методе решения дифференциально-алгебраических уравнений / М.В. Булатов, В.Ф. Чистяков // ЖВМиМФ. – 2002. – Т. 42, № 4. – С. 459–470.
- [11] Бурлачко, И.В. Исследование оптимального управления системами уравнений леонтьевского типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук / И.В. Бурлачко. – Челябинск, 2005. – 122 с.
- [12] Василенко, Г.И. Теория восстановления сигналов. О редукции к идеальному прибору в физике и технике / Г.И. Василенко. — М.: Сов. радио. 1979. – 269 с.
- [13] Верлань, А.Ф. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. — Киев: Наукова думка, 1978. – 291 с.
- [14] Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
- [15] Гранберг, А.Г. Динамические модели народного хозяйства / А.Г. Гранберг. – М.: Экономика, 1985. – 239 с.
- [16] Гликлих, Ю.Е. Об одном подходе к изучению сингулярных стохастических уравнений леонтьевского типа с импульсными воздействиями / Ю.Е. Гликлих, Е.Ю. Машков // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2015.– Т. 39. № 11 (208). – С. 23-36.
- [17] Грановский, В.А. Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения / В.А. Грановский. – Л.: Энергоиздат. Ленингр. отделение, 1984. – 224 с.

- [18] *Грановский, В.А.* Динамические измерения: теория и метрологическое обеспечение вчера и сегодня / В.А. Грановский // Датчики и системы. – 2016. – № 3 (201). – С. 57–72.
- [19] *Гулинский О.В.* О численном решении некоторых некорректных задач теории управления / О.В. Гулинский / Автоматика и телемеханика.— 1976.—№8.—С.66–80.
- [20] *Демиденко, Г.В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский.– Новосибирск: Науч. кн., 1998. – 438 с.
- [21] *Деруссо, П.* Пространство состояний в теории управления / П. Деруссо, Р. Рой, Ч. Клоуз. – М.: Наука, 1970. – 620 с.
- [22] *Ефимов, В.Г.* Ультразвуковая система динамических измерений для исследования твердотопливных энергетических установок / В.Г. Ефимов, Ю.Н. Ложкова, А.Г. Митин // Ползуновский вестник. – Барнаул, 2011. – № 3/1. – С. 184–188.
- [23] *Ефремов, А. А.* Исследование оптимального управления линейными уравнениями типа Соболева: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.А. Ефремов. – Челябинск, 1996. – 102 с.
- [24] *Зарипов, О.О.* Регулярные алгоритмы устойчивого оценивания состояния динамических систем / О.О. Зарипов // Молодой ученый. – 2013. – № 8. – С. 90–93.
- [25] *Иванов, А.Г.* Маркетинг взаимоотношений и управление потенциалом покупателя на рынках В2В: Монография. /А.Г. Иванов, О.У. Юлдашева -- СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2004. -- 139 с.
- [26] *Ильин А.В.* Обращение управляемыми динамических систем / А.В. Ильин, С.К. Коровин, В.В. Фомичев // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. – 2006. – № 3 – С. 49–58.

- [27] *Иосифов, Д.Ю.* Динамические модели и алгоритмы восстановления сигналов измерительных систем с наблюдаемым вектором координат состояния: дис. ... канд. техн. наук / Д.Ю. Иосифов. – Челябинск, 2007. – 162 с.
- [28] *Кадченко, С.И.* Новый метод вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами / В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко, В. А. Садовничий // ДАН. – 2001. – Т. 381, № 3. – С. 320–324.
- [29] *Казак, В.О.* Исследование фазовых пространств одного класса полулинейных уравнений соболевского типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук / В.О. Казак. – Челябинск, 2005. – 99 с.
- [30] *Келлер, А.В.* Алгоритм численного решения задачи Шоуолтера–Сидорова для систем леонтьевского типа / А.В. Келлер // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2009. – № 26, Вып. 10. – С. 82–86.
- [31] *Келлер, А.В.* Динамическая балансовая модель как задача оптимального управления / А.В. Келлер // Труды Третьей межд. конф. «Мат. моделирование социальной и экономической динамики». – М., 2010. – С. 131–133.
- [32] *Келлер, А.В.* Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа: дис. ... д-ра. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. – Челябинск, 2011. – 251 с.
- [33] *Келлер, А.В.* Об алгоритме решения задач оптимального и жесткого управления / А.В. Келлер // Программные продукты и системы. – Тверь, 2011. – № 3. – С. 170–174.

- [34] *Келлер, А.В.* Задача оптимального измерения: численное решение, алгоритм программы / А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер.: Математика. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 74–82.
- [35] *Келлер, А.В.* Свойство регуляризуемости и численное решение задачи динамического измерения / А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Вестн. Юж-Урал. гос. ун-та. Сер. «Мат. моделирование и программирование». – 2010. – № 16(192), вып. 5. – С. 32–38.
- [36] *Кризский, В.Н.* Математическое моделирование и оптимизация обратных задач определения геоэлектрических параметров кусочно-однородных сред / В.Н. Кризский, И.А. Герасимов, М.Б. Заваруева // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, № 3. – С. 32–33.
- [37] *Кротов, В.Ф.* Основы теории оптимального управления / В.Ф. Кротов, Б.А. Лагоша, С.М. Лобанов и др. / под ред. В.Ф. Кротова. – М., 1990. – 430 с.
- [38] *Крылов А.Н.* Некоторые замечания о крешерах и индикаторах / А.Н. Крылов. – Известия Санкт-Петербургской Академии наук. – 1909.
- [39] *Кузнецов, Г.А.* Исследование относительно спектральных свойств линейных операторов: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Г.А. Кузнецов. – Челябинск, 1999. – 105 с.
- [40] *Кузовков, Н.Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства / Н.Т. Кузовков. – М.: Машиностроение, 1976. – 184 с.
- [41] *Курдюков, А.П.* Дескрипторные системы и задачи управления / А.П. Курдюков, А.А. Белов – М.: Физматлит, 2015.
- [42] *Курина, Г.А.* Асимптотический анализ матрично сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления / Г.А. Курина, Х.А. Овезов // Изв. вузов. Мат. – 1996. – № 12. – С. 63–74.

- [43] *Ларкин, Е.В.* Прогнозирование времени выполнения алгоритма / Е.В. Ларкин, А.Н. Ивутин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки -- 2013 – № 3. -- С. 301–315.
- [44] *Ларкин, Е.В.* Покоординатный поиск местоположения точечного источника сигнала / Е.В. Ларкин, А.А. Аршакян // Известия Тульского государственного университета. Технические науки -- 2015 -- № 9. -- С. 170–180.
- [45] *Леонтьев, В.В.* Межотраслевая экономика / В.В. Леонтьев. – М.: Экономика, 1997. – 315 с.
- [46] *Лионс, Ж.Л.* Управление сингулярными распределенными системами / Ж.Л. Лионс. – М.: Наука, 1987. – 456 с.
- [47] *Манакова, Н.А.* Исследование задач оптимального управления для неклассических уравнений математической физики: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / Н.А. Манакова. – Челябинск, 2005. – 124 с.
- [48] *Манакова, Н.А.* Оптимальное управление решениями задачи Шоултера–Сидорова для одного уравнения соболевского типа / Н.А. Манакова, Е.А. Богонос // Изв. ИГУ. Сер.: Математика. – Иркутск, 2010. – Т.3, № 1. – С.42–50
- [49] *Мараховский А.С.* Моделирование, анализ и синтез оптимальных динамических свойств и траекторий развития экономических систем / А.С. Мараховский – Ставрополь: Изд-во СГУ, 2008. – 216 с.
- [50] *Машков, Е.Ю.* Стохастические уравнения леонтьевского типа в терминах текущих скоростей решения II / Е.Ю. Машков, Ю.Е. Гликлик // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2016. – Т. 9, № 3. – С. 31-40.
- [51] *Меррием, К.* Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью / К. Меррием – М.: Мир, 1967, 549 с.

- [52] Назарова, Е.И. Численное исследование математической модели оптимального измерения: дис... канд. ф.-м. наук. / Е. И. Назарова. – Челябинск, 2012. – 116 с.
- [53] Назарова, Е.И. Модель оптимального измерения покупательского поведения с учетом инерционности экономической системы / Е.И. Назарова // Измерения: состояние, перспективы развития: тез.докл. междунар. науч.-практ. конф., г. Челябинск, 25-27 сент. 2012 г. В 2 т. – Челябинск, 2012. – Т. 1. – С. 179–181.
- [54] Ньютон, Д. Теория линейных следящих систем / Д. Ньютон, Л. Гулд, Д. Кайзер – М.: Физматгиз, 1961, 407 с.
- [55] Плеханова, М.В. Оптимальное управление распределенными системами, не разрешенными относительно производной по времени: дис... канд. ф.-м. наук. / М.В. Плеханова. – Челябинск, 2006. – 154 с.
- [56] Рузакова, О.А. Исследование управляемости линейных уравнений соболевского типа: дис... канд. ф.-м. наук. / О.А. Рузакова. – Екатеринбург, 2004. – 110 с.
- [57] Сапронов, Ю.И. Конечномерные редукции в экстремальных задачах / Ю.И. Сапронов // Успехи мат. наук. – 1996. – Т.51, № 1. – С. 101-132.
- [58] Свиридюк, Г.А. Многообразие решений одного класса эволюционных и динамических уравнений / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР. – 1989. – Т. 304, № 2. – С. 301–304.
- [59] Свиридюк, Г.А. Об одной задаче Showolter / Г.А. Свиридюк // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 2. – С. 338–339.
- [60] Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p -секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1912–1919.

- [61] *Свиридюк, Г.А.* Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, С.В. Брычев // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 8. – С. 46–52.
- [62] *Свиридюк, Г.А.* Алгоритм решения задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / Г.А. Свиридюк, И.В. Бурлачко // Журн. вычислит. мат. и мат. физики. – 2003. – Т. 43, № 11. – С. 1677–1683.
- [63] *Свиридюк, Г.А.* Задача Шоултера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Изв. ИГУ. Сер.: Математика. – Иркутск, 2010. – Т.3, № 1. – С.51–72.
- [64] *Свиридюк, Г.А.* Относительная σ -ограниченность линейных операторов / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева, Л. Л. Дудко // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 7. – С. 68–73.
- [65] *Сидоров, Н.А.* Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н.А. Сидоров // Мат. заметки. – 1984. – Т. 25, № 4. – С.569–578.
- [66] *Сидоров, Н.А.* Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 4. – С. 726–728.
- [67] *Скрипник В.П.* Вырожденные линейные системы / В.П. Скрипник // Изв. вузов. Математика. – 1982. – № 3. – С. 62–67.
- [68] *Соболев, С.Л.* Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1954. – Т. 18. – С. 3–50.
- [69] *Соболев С.Л.* Применение функционального анализа к математической физике / С.Л. Соболев. – Л.: Наука, 1961. – 255 с.

- [70] *Солдаткина, Е.В.* Алгоритмы адаптации параметров измерительной системы к минимуму оценки динамической погрешности: дис. . . . канд. техн. наук / Е.В. Солдаткина. – Челябинск, 2000. – 161 с.
- [71] *Солодовников, В.В.* Введение в статистическую динамику систем автоматического управления / В.В. Солодовников – М.,Л.: Гостехтеориздат, 1952, 367 с.
- [72] *Солопченко Г.Н.* Динамическая погрешность идентификации средств измерений / Г.Н. Солопченко // Метрология. -1975. -№1.
- [73] *Сукачева, Т.Г.* О разрешимости нестационарной задачи термомонконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости / Т.Г. Сукачева // Дифференц. уравнения.– 2000.– Т. 36,№8.– С.1106-1112.
- [74] *Тихонов А.Н.* Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин – М.: Наука, 1974.
- [75] *Торопцев Е.Л.* Моделирование процессов экономической динамики макросистем. Монография / Е.Л. Торопцев – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов, 2001. - 135 с.
- [76] *Трибель, Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
- [77] *Тучин, А.Г.* Определение параметров движения КА по результатам измерений при наличии шума в динамической системе / А.Г. Тучин. – М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2004. – 38 с.
- [78] *Федоров, В.Е.* Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений соболевского типа в банаховых и локально выпуклых пространствах: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук / В.Е. Федоров. – Челябинск, 2005. – 271 с.

- [79] *Федоров, В.Е.* О некоторых соотношениях в теории вырожденных полугрупп операторов / В.Е. Федоров // Вестн. ЮУрГУ. – 2008. – № 15(115). – С. 89–99.
- [80] *Федоров, В.Е.* Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений / В.Е. Федоров, М.В. Плеханова // Изв.РАН. Теория и системы управления. – 2004. –Т.9,№ 2. – С. 92–102.
- [81] *Фурсиков, А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков.– Новосибирск: Научная книга, 1999.– 350 с.
- [82] *Харкевич, А.А.* «О применении критерия квадратичной погрешности к оценке линейных искажений» / А.А. Харкевич // ЖТФ, 1937. – Т. 7, вып. 5, – С. 515–530,
- [83] *Царьков, В.А.* Использование методов теории автоматического управления при построении и анализе динамических моделей экономики производства / В.А. Царьков // Измерения. Контроль. Автоматизация. – 1984. –№ 4 – С. 66–78.
- [84] *Чанг, Ш.* Синтез оптимальных систем автоматического управления / Ш. Чанг – М.: Машиностроение, 1964, 440 с.
- [85] *Чистяков, В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1996. – 278 с.
- [86] *Чистяков, В.Ф.* О методах численного решения и исследования систем не типа Коши-Ковалевской / В.Ф. Чистяков, О.В. Бормотова // Журн. вычислит. мат. и мат. физики. – 2004. – Т. 44,№ 8. – С. 1380–1387.
- [87] *Чистяков, В.Ф.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова. – Новосибирск: Наука, 2003. – 320 с.

- [88] *Чистяков, В.Ф.* О понятии индекса сингулярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений / В.Ф. Чистяков // Дифференциальные уравнения и численные методы. – Новосибирск, 1986. – С. 123–128.
- [89] *Шестаков, А.Л.* Измерительный преобразователь динамических параметров с итерационным принципом восстановления сигнала / А.Л. Шестаков // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 1992. – № 10. – С. 23.
- [90] *Шестаков, А.Л.* Динамическая точность измерительного преобразователя с корректирующим устройством в виде модели датчика / А.Л. Шестаков // Метрология. – 1987. – № 2. – С. 26–34.
- [91] *Шестаков, А.Л.* Нейросетевая динамическая модель измерительной системы с фильтрацией восстанавливаемого сигнала / А.Л. Шестаков, А.С. Волосников // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Комп. технологии, управление, радиоэлектроника». – 2006. – № 14(69), вып 4 – С. 21–26.
- [92] *Шестаков, А.Л.* Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Мат. моделирование и программирование». – 2010. – № 16(192), вып. 5. – С. 116–120.
- [93] *Шестаков, А.Л.* Оптимальное измерение динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Мат. моделирование и программирование». – 2011. – № 17(234), вып. 8. – С. 70–75.
- [94] *Шестаков, А.Л.* Методы теории автоматического управления в динамических измерениях / А.Л. Шестаков. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ. – 2013.

- [95] *Шестаков, А.Л.* Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.
- [96] *Шишкина, Т.А.* Методика построения статической и динамических балансовых моделей на уровне предприятия / Т.А. Шишкина, А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия Экономика и менеджмент. – 2013. – № 3. – С. 6-12.
- [97] *Шишкина, Т.А.* Использование бухгалтерской отчетности как основы для построения динамической балансовой модели для предприятия / Т.А. Шишкина, А.В. Келлер // Современная экономика: проблемы и решения. – 2014. – № 9 (57). – С. 8-19.
- [98] *Щеглова А.А.* К вопросу об обобщенном решении алгебро-дифференциальных систем / А. А. Щеглова // Сиб. мат. ж. – 2002. – 43, № 4. – С. 964–973.
- [99] *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical systems / Athanasios C. Antoulas/ – SIAM. – 2005.
- [100] *Berger M.S.* Folds and cups in Banach spaces, with applications to nonlinear partial differential equations. I /M.S. Berger, P.T. Church, J. G. Timorian // Indiana Univ. Math. J. – 1985. – V. 34, № 1. – P. 1–19.
- [101] *Berger M.S.* Folds and cups in Banach spaces, with applications to nonlinear partial differential equations. II /M.S. Berger, P.T. Church, J.G. Timorian // AMS. – 1988. – V. 307, № 1. – P. 227–244.
- [102] *Bonchek M.* Marketing Can No Longer Rely on the Funnel /M. Bonchek, C. France // Harvard Business Review (HBR). – 2014. – <https://hbr.org/2014/05/marketing-can-no-longer-rely-on-the-funnel>
- [103] *Cahn I.W.* Free energy of a nonuniform system. 1. Interfacial free energy /I.W. Cahn, I.E. Hillard // J. Chem. Physics. – 1958. – V. 28. – P. 258–267.

- [104] *Favini A.* Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – N. Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1999. – 236 pp.
- [105] *Fernandes, B.R.* Control of multivariable non-linear systems by the sliding mode method / B.R. Fernandes, K. J. Hedrick // International Journal of Control. – 1987. – Vol. 46, № 3 – P. 1019–1040.
- [106] *Fokin M.V.* Existence of singular spectrum and asymptotic behavior of solution in Sobolev’s problem. I / M.V. Fokin // Sib. Adv. in Math. – 1994. – V. 4, № 1. – P. 18–51.
- [107] *Fokin M.V.* Existence of singular spectrum and asymptotic behavior of solution in Sobolev’s problem. II / M.V. Fokin // Sib. Adv. in Math. – 1994. – V. 4, № 2. – P. 16–53.
- [108] *Guang-Ren Duan.* Analysis and Design of Descriptor Linear Systems / Duan Guang-Ren. – Springer Science+Business Media, LLC. – 2010.
- [109] *Hairer E.* The numerical solution of differential–algebraic systems by Runge–Kutta methods / E. Hairer, C. Lubich, M. Roche // Rep CH-1211.– Dept. de Mathemat., Universite de Geneve, Switzerland, 1989. –152 pp.
- [110] *Kozhanov A. I.* Composite Type Equations and Inverse Problems / A. I. Kozhanov.–Utrecht: VSP, 1999.– 171 p.
- [111] *Lamour, R.* How Floquet–theory applies to differential–algebraic equations / R. Lamour, R. März, R. Winkler. – Berlin: Institut für Mathemaatik der Humboldt Universität zu Berlin, 1996.– (Prepr.№ 96-15).
- [112] *Lightbourne, J.H.A.* Partial functional equations of Sobolev type / J.H.A. Lightbourne // J. Math. Anal. Appl.– 1983.– V. 93, № 2.– P. 328–337.
- [113] *Litvinov, G.L.* Error auto-correction in rational approximation / G.L. Litvinov // Interval Computations. – 1992. –№ 4(6). – P. 14–18.
- [114] *Müller P.C.* Linear control design of linear descriptor systems / P.C. Muller // 14th Triennial world congress, Beijing, P.R. China, 1999.

- [115] *Müller, P.C.* Stability and optimal control of nonlinear descriptor systems: A survey / P.C. Muller // Appl. Math, and Corp. Sci. – 1998. – Vol. 8, № 2. – P. 269–286.
- [116] *Melnikova I.V.* The Cauchy problem. Three approaches Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics / I.V. Melnikova, A.L. Filinkov. – London; N.Y.; Washington, 2001. – 240 p.
- [117] *Pyatkov, S.G.* Operator theory. Nonclassical problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht, Boston, Tokyo: VSP, 2002.
- [118] *Rheinboldt W.C.* Differential–algebraic systems an differential equation on manifolds / W.C. Rheinboldt // Math. Comp. – 1984. – Vol.43, № 168. – P. 473–482.
- [119] *Shestakov A.L.* The theory of optimal measurements / A.L. Shestakov, A.V. Keller, G.A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – V. 1, № 1. – P. 3–16.
- [120] *Showalter, R.E.* Partial differential equations of Sobolev-Galpern type / R.E. Showalter // Pacific J. Math. – 1963. – V. 31, № 3. – P. 787–794.
- [121] *Showalter, R.E.* Hilbert space methods for partial differential equations / R.E. Showalter. – Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1977. – 152 pp.
- [122] *Sidorov, N.* Lyapunov-Shmidt methods in nonlinear analysis and applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 pp.
- [123] *Silverman, L.M.* Optimal approximation of linear systems / L.M. Silverman, M. Bettayeb // JACC, San Francisco. – 1980.
- [124] *Sviridyuk, G.A.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht - Boston - Tokyo - Köln: VSP, 2003. – 216 pp.

Публикации автора по теме диссертации

- [125] *Шестаков, А.Л.* Динамические измерения в пространствах «шумов» / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Ю.В. Худяков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2013. – Т. 13, № 2. – С. 4–11.
- [126] *Худяков, Ю.В.* Алгоритм численного исследования модели Шестакова - Свиридюка измерительного устройства с инерционностью и резонансами / Ю.В. Худяков // Математические заметки ЯГУ. – 2013. –Т. 20, № 2. – С. 211 – 221.
- [127] *Худяков, Ю.В.* Распараллеливание алгоритма решения задачи оптимального измерения с учетом резонансов / Ю.В. Худяков // Вестник ЮУрГУ. Серия: математическое моделирование и программирование. – 2013. –Т. 6, № 4. – С. 122 – 127
- [128] *Худяков, Ю.В.* On adequacy of the mathematical model of the optimal dynamic measurement / Khudyakov Yu.V. // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2017. – Т. 4, № 2. – С. 14-25.
- [129] *Shestakov A.L.* The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, A.V. Keller, Y.V.Khudyakov // Book series: Springer Proceedings in Mathematics conference: Semigroups of Operators: Theory and Applications. 2015. – P. 183 - 195.
- [130] *Shestakov A.L.* Dynamic Measurements in the View of the Group Operators Theory / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, Y.V.Khudyakov // Book series: Springer Proceedings in Mathematics conference: Semigroups of Operators: Theory and Applications. 2015. – P. 273 - 286
- [131] *Келлер, А.В.* Программа вычисления решения задачи оптимального измерения с резонансами (OptMsrR Programm): свидетельство 2013619053 / Келлер А.В., Худяков Ю.В. (RU); правообладатель ГОУ

- ВПО «Южно-Уральский государственный университет». – 2013618862; заявл. 31.07.2013; зарегистр. 24.09.2013, Реестр программ для ЭВМ.
- [132] *Худяков, Ю.В.* Об измерении белого шума в модели Шестакова–Свиридюка / Ю.В. Худяков // Измерения: состояние, перспективы развития: тез. докл. междунар. науч.-практ. конф., г. Челябинск, 25-27 сент. 2012 г. В 2 т. – Челябинск, 2012. – Т. 1. – С. 240–241.
- [133] *Худяков, Ю.В.* Об общем подходе к оптимальному измерению в технических и экономических приложениях / Ю.В. Худяков // Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова.: тезисы докладов., г. Одесса, 15-22 июня 2013 г. – Одесса, 2013, – С. 97.
- [134] *Худяков, Ю.В.* Модели Шестакова–Свиридюка с резонансом / Ю.В. Худяков // Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений: Тезисы докладов. г. Новосибирск, 18-24 августа 2013 г., – Новосибирск, 2013. – С. 285.
- [135] *Сагадеева М.А.* Об оптимальном измерении для модели измерительного устройства с учетом детерминированного мультипликативного воздействия / М.А. Сагадеева, Ю.В. Худяков // Труды XII всероссийского совещания по проблемам управления Россия, Москва, ИПУ РАН, 16-19 июня 2014 г., – Москва, 2014. – С. 2240–2245
- [136] *Шестаков А.Л.* Оптимальные измерения детерминированных и стохастических сигналов / А..Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Ю.В. Худяков // Труды XII всероссийского совещания по проблемам управления Россия, Москва, ИПУ РАН, 16-19 июня 2014 г., – Москва, 2014. – С. 1231–1242
- [137] *Худяков, Ю.В.* Численный анализ математической модели Шестакова–Свиридюка с инерционностью и резонансами / Ю.В. Худяков // Метрология и метрологическое обеспечение: Сборник докладов 23-

Национального научного симпозиума с международным участием, г. Созополь. Болгария, 9-13 сентября 2014 г. – София, 2014. – С. 107–110.

- [138] *Khudyakov, Y.V.* On Mathematical modeling of the Measurement Transducers / Y.V. Khudyakov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. –Vol. 3, № 3. – P. 68–73.

Приложение. Свидетельство о регистрации программы решения задачи оптимального измерения с резонансами

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2013619053

Программа вычисления решения задачи оптимального измерения с резонансами (OptMsrR PROGRAMM)

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ» (НИУ)) (RU)*

Авторы: *Келлер Алевтина Викторовна (RU), Худяков Юрий Владимирович (RU)*

Заявка № 2013616862

Дата поступления 31 июля 2013 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 24 сентября 2013 г.

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов

