

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. М. АКМУЛЛЫ»

УДК 51-74

На правах рукописи



Исхаков Алмаз Раилевич

**МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБРАБОТКИ И  
АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ В МОДИФИЦИРОВАННЫХ  
ДЕСКРИПТИВНЫХ АЛГЕБРАХ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы  
программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
профессор Р.Ф. Маликов

Уфа - 2017

# Оглавление

<b>Введение.....</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Подходы, теории и технологии разработки систем обработки, анализа и распознавания изображений.....</b>	<b>16</b>
1.1    Разработка систем технического зрения в советский период.....	16
1.2    Разработки и исследования систем технического и компьютерного зрения в современной России.....	22
1.3    Алгебраический подход к обработке, анализу и распознаванию изображений.....	24
1.4    Дескриптивный подход И.Б. Гуревича и В.В. Яшиной к обработке, анализу и распознаванию изображений.....	27
Выводы по первой главе.....	31
<b>Глава 2. Методы математического моделирования обработки и анализа изображений в теории модифицированных дескриптивных алгебр изображений.....</b>	<b>34</b>
2.1    Основные объекты теории модифицированных дескриптивных алгебр изображений.....	34
2.2    Операции теории модифицированных дескриптивных алгебр изображений.....	43
2.2.1    Методы обработки изображений в теории модифицированных дескриптивных алгебр изображений.....	43
2.2.2    Методы анализа изображений в теории модифицированных дескриптивных алгебр изображений.....	61
2.3    Методы математического моделирования обработки и анализа изображений.....	80
Выводы по второй главе.....	84

<b>Глава 3. Модифицированные дескриптивные алгебры изображений...</b>	<b>86</b>
3.1 Модифицированные дескриптивные алгебры бинарных изображений.....	86
3.2 Модифицированные дескриптивные алгебры полутоновых и цветных изображений.....	100
3.3 Пространство обработки и анализа изображений.....	109
Выводы по третьей главе.....	118
<b>Глава 4. Математическое моделирование функций системы технического зрения для измерения площадей и количества объектов наблюдения.....</b>	<b>121</b>
4.1 Вычисление характеристик воронки пространства обработки и анализа изображений.....	121
4.2 Алгоритм разработки методов математического моделирования обработки и анализа изображений.....	124
4.3 Измерение количества объектов на изображении без учета их площади.....	127
4.4 Измерение площадей объектов с учетом их количества.....	132
4.5 Генетический алгоритм оптимизации нелинейной двухпараметрической целевой функции с линейными ограничениями.....	135
Выводы по четвертой главе.....	142
<b>Заключение.....</b>	<b>145</b>
<b>Словарь терминов.....</b>	<b>148</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>150</b>
<b>Приложение А. Свидетельство о регистрации программного комплекса.....</b>	<b>164</b>

## Введение

**Актуальность темы исследования.** Системой технического зрения называется программно-аппаратный комплекс для наблюдения и захвата изображений с последующей обработкой, анализом и распознаванием объектов наблюдения в широком диапазоне электромагнитных волн. С функциональной точки зрения, она выполняет определенный набор функций, заложенных в нее на аппаратном или программном уровне. В диссертационной работе принято допущение, что функциональная модель системы технического зрения определяет ее наиболее полным и однозначным образом.

Системы технического зрения находят использование, как в производственной, так и в непроизводственной сфере народного хозяйства России. Современный отечественный рынок систем технического зрения экспансионирован зарубежными производителями Mallenom Systems [1], OMRON [2] и т.п., или отечественными торговыми фирмами Спектрис Си-Ай-Эс [3], Promenergo Автоматика [4], Microsystemy, Промышленная автоматика [5] и т.п., которые просто реализовывают решения на зарубежной электронной базе. Отечественный рынок систем технического зрения в постсоветском пространстве отстал в своем развитии от зарубежных исследователей и производителей и сейчас повторно только набирает обороты в развитии. Несмотря на это в России существуют государственные учреждения, которые занимаются комплексными разработками в области машинного зрения для различных нужд, например, ФГУП «ГосНИИАС» [6] и научными исследованиями обработки, анализа, распознавания и понимания изображений, например, ВЦ им. А.А. Дородницына РАН [7], Институт космических исследований РАН [8], ИСОИ РАН [9] и т.п.

Среди зарубежных авторов по системам технического зрения в робототехнике и методам цифровой обработки изображений были проанализированы работы Б.К.П. Хорна [10], А. Пью [11], Р. Дуда и П. Харта [12], Д. Марра [13], Э.А. Патрика [14], У. Прэтта [15], Дж. Ту и Р. Гонсалеса [16], П. Форсайт и Ж. Понса [17], К. Фу [18], Т.С. Хуанга [20, 21], Л. Шапиро и Дж.

Стокмана [22]. В диссертационной работе учитывается зарубежный опыт по созданию систем технического зрения для роботов и применяются методы цифровой обработки изображений.

Системы технического зрения советского и постсоветского периода в большинстве случаев имели простую архитектуру и разрабатывались для различных задач производства и промышленности. Проблемами систем технического зрения в разное время занимались Сырямкин В.И., Якушенков Ю.Г., Титов В.С., Петров А.А и др [23]. Были решены проблемы: классификации систем технического зрения, создание общей концепции их построения, разрабатывались методы и алгоритмы обработки зрительной информации, решались проблемы создания типовых элементов и узлов, были получены расчетные формулы оценки и технологии проектирования систем технического зрения. Проводились также и перспективные исследования по таким направлениям, как корреляционные и акустические системы технического зрения [23]. Диссертационной работе используются: алгоритм обработки зрительной информации, которая соответствует функциональной модели современных систем технического зрения, основные принципы автоматического проектирования (содержательные модели сцены наблюдения, математические модели подсистем системы технического зрения, оптимизация моделей).

Традиции советских исследователей и разработчиков систем технического и улучшенного зрения продолжают сотрудники ФГУП «ГосНИИАС». Известны работы Визильтера Ю.В., Желтова С.Ю. Бондаренко А.В., Осоков М.В., Моржин А.В., Степанова А.А. по детектированию объектов на основании событий, обнаружение и идентификация объектов с использованием методов проективной морфологии. В диссертационной работе предполагается, что задача сегментации и локализации объектов на изображениях решена доступными методами, а объект интереса полностью содержится на начальных изображениях [24-26].

Были изучены научные работы сотрудников Института систем обработки изображений РАН Сойфера В.А., Сергеева В.В., Попова С.Б., Мясникова В.В., Глумова Н.И., Чернова В.М., Чернова А.В., Чичевой М.А., Бавриной А.Ю.,

Копенкова В.Н., Митекина В.А., Фидосеева В.А., Ильясовой Н.Ю., Куприянова А.В., Лыкова К.В. и Кузнецова А.В. [27-29]. В диссертационной работе учитывались научные достижения по проблеме параметрической идентификации систем обработки и анализа изображений, оценка параметров линейной спектральной смеси с полными ограничениями для анализа отсчетов гиперспектральных изображений, метод автоматического построения процедуры локальной нелинейной обработки изображений на основе иерархической регрессии.

Существуют известные работы, основанные на методах идентификации систем Гропа Д. [30], идентификации объектов управления Диленской А.Н. [31] и методов оптимального управления Черноруцкого И.Г. [32]. Решение прикладных проблем с помощью оптимизации можно найти в работах: оптимальное размещение элементов распределенной производственной структуры у Нефедова Д.Г. [33], алгоритмы и программные средства эволюционной обработки изображений у Белоусова А.А. [34], адаптивный видеодатчик с предварительной обработкой изображений у Табаси С.Х. [35], вычислительные устройства с параллельной и изменяемой архитектурой для задач обработки изображений у Аряшева С.Н. [36], методы синтеза и многомерных моделей и алгоритмов цифровой обработки изображений у Медведевой Е.В. [37], синтез и анализ алгоритмов обработки изображений групповых точечных объектов для ориентации летательных аппаратов у Чеснокова С.Е. [38].

Идеи автоматического проектирования и разработки систем технического зрения нашли развитие в работах известных российских ученых и исследователей Ларкина Е.В. и Ивтина А.Н. [39]. В работе ее авторами задача проектирования программных систем формулируется в виде задачи минимизации целевой функции, представляющей модель проектируемой программной системы, с ограничениями. Согласно этому исследованию: проектирование программной системы является частной задачей параметрической оптимизации систем, варьируемые параметры целевой функции могут иметь разную природу, целевая функция является скалярной функцией. В связи со сложностью оптимального

проектирования авторы данной работы утверждают, что будет целесообразным использовать метод целенаправленного выбора, который является разновидностью метода нисходящего проектирования. Этот метод предполагает декомпозицию системы на иерархические уровни и решению оптимизационной задачи на уровне подсистем. В диссертационной работе используются сформулированные Ларкином Е.В. и Ивутином А.Н. принцип оптимального проектирования программной части системы технического зрения [39].

В диссертационной работе предполагается, что система технического зрения решает задачи обработки и анализа изображений на программном уровне. Кроме того, программная система, решающая задачу подбора значений варьируемых параметров программного комплекса будет проявлять свойство адаптивности. В диссертационной работе адаптивность математической модели обработки и анализа изображений является еще одним принципом построения методов математического моделирования. Этот принцип основан на ключевой работе по адаптивным системам технического зрения Гридина В.Н., Титова В.С. и Труфанова М.И. [40].

Фундаментальные работы в области обработки, анализа и распознавания изображений также ведутся в отечественных школах. Одной из таких является школа академика Ю. И. Журавлева на базе Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Российской академии наук. В основу научных исследований положен алгебраический подход к задачам обработки, анализа и распознавания данных, в частности данных в виде изображений [41-48]. К формированию алгебраического подхода к обработке, анализу и распознаванию изображений привели работы: Математическая морфология (Г.Матерон (Matheron) [106], Ж.Серра (Serra) [107], 1970-е); Алгебра алгоритмов (Ю.И. Журавлев, 1970-е) [41-45, 48]; Теория образов (У.Гренандер (Grenander), 1970-е) [49-51]; Теория категорий в области распознавания образов (М.Павел (Pavel), 1970-е) [110, 111]; алгебра изображений (АИ) (Ж.Серра, С.Сternберг (Sternberg), 1980-е) [112-114]; Стандартная АИ (Г. Риттер (Ritter), 1990-е) [115-121]. В настоящее время он находится на стадии специализации, исследуются и изучаются специальные

алгебраические структуры, способные математически описать процессы решения задач в этой области. Последними разработками отечественного направления, руководимого И.Б. Гуревичем, являются дескриптивные алгебры изображений и дескриптивные алгебры изображений с одним кольцом (И.Б. Гуревич и В.В. Яшина) [122-139]. Дескриптивные алгебры изображений с одним кольцом представляют собой частный случай дескриптивных алгебр изображений [133-139]. Они используются для решения задач обработки, анализа и распознавания изображений в виде специализированных дескриптивных алгебр изображений. Понятие дескриптивной алгебры изображений не является базовым математическим объектом, и оно основано на универсальных алгебрах с операторным кольцом. Такое название было использовано в силу того, что эти алгебры позволяют обрабатывать не только сами изображения, но и их дескриптивные (описательные) модели, в том числе и преобразования над ними. Использование универсальных алгебр с операторным кольцом не запрещает рассмотрение других подобных математических объектов в роли потенциально возможного инструмента определения дескриптивных алгебр изображений. Вопросы разработки математических аппаратов и исследование их возможностей в этом аспекте остаются актуальными, которые направлены на развитие методологии дескриптивного подхода к обработке, анализу и пониманию изображений. Отличие дескриптивных алгебр изображений на основе универсальных алгебр с операторным кольцом от подхода, предлагаемого в диссертационной работе, состоит в переопределении и уточнении некоторых понятий, введенных И.Б. Гуревичем. Дескриптивные алгебры изображений с таким измененным математическим аппаратом в дальнейшем будут называться модифицированными дескриптивными алгебрами изображений [122-139].

Анализ научных работ и литературы по теме диссертационной работы позволил сформулировать следующие требования к планируемым результатам:

1. Функциональная модель системы технического зрения (компьютерного зрения) представляет совокупность выполняемых ею функций (методы

обработки и анализа изображений), каждая из которых последовательно решает задачи обработки и анализа (измерения признаков) изображений.

2. Для описания функций системы технического (компьютерного) зрения должен быть применен математический аппарат, позволяющий формально описать любой метод цифровой обработки изображений, теории распознавания образов или любой другой теории измерения, использующей математический аппарат.
3. Каждая функция системы технического (компьютерного) зрения должна быть представлена суперпозицией используемых методов (метод математического моделирования обработки и анализа изображений) цифровой обработки изображений, теории распознавания образов или методов любой другой теории измерения, использующей математический аппарат, с учетом порядка их применения.
4. Задача анализа (измерения признака) объекта интереса ставится как задача многопараметрической минимизации целевой функции с ограничениями, в составе которой должна содержаться функция системы технического (компьютерного зрения).
5. Целевая функция должна учитывать априорную и апостериорную информацию об измеряемом признаке.

**Объектами исследования** являются обработка и анализ изображений системами технического зрения в оптическом диапазоне.

**Предметом исследования** являются математические методы моделирования обработки и анализа изображений и численные методы оптимизации их параметров.

**Целью исследований** является разработка методов математического моделирования обработки и анализа изображений с оптимальными параметрами, а также программного комплекса комбинаторной оценки пространства обработки и анализа изображений для задачи вычисления площади и количества природных водоемов на размытых изображениях.

Для достижения цели необходимо решить следующие **задачи**.

1. Провести комплексные исследования математического аппарата дескриптивных алгебр изображений для случая универсальных алгебр и разработать алгоритм построения методов математического моделирования обработки и анализа изображений в нем.
2. Провести исследование пространства обработки и анализа изображений и его количественный анализ для выбора начальных изображений, разработать методы математического моделирования обработки и анализа изображений в этом пространстве.
3. Разработать эффективный численный метод оптимизации параметров для разработанных методов математического моделирования обработки и анализа изображений.
4. Провести вычислительные эксперименты по оптимизации методов математического моделирования обработки и анализа изображений для задач вычисления площади и количества природных водоемов на размытых изображениях.

**Методы исследования.** В исследованиях применялась теория дескриптивных алгебр изображений, методы цифровой обработки изображений, универсальные алгебры, комбинаторика, методы математического моделирования, теория оптимального управления, методы параметрической идентификации систем и численные методы оптимизации. Были проведены комплексные исследования математического аппарата дескриптивных алгебр изображений на случай универсальных алгебр, что позволило определить пространство обработки и анализа изображений, а также его воронку. Комбинаторный анализ структуры этого пространства привел к оценке вероятности выбора начальных изображений для разработки методов обработки и анализа изображений. Также был разработан программный комплекс, автоматизирующий комбинаторные вычисления. С использованием разработанных модифицированных дескриптивных алгебр изображений и методов цифровой обработки изображений были получены методы математического моделирования обработки и анализа изображений. Теория оптимального управления и параметрической идентификации систем

позволили сформулировать задачи параметрической оптимизации (параметрической идентификации) полученных методов. Численные методы оптимизации использовались на этапе проведения вычислительного эксперимента для получения оптимальных значений параметров методов математического моделирования обработки и анализа изображений.

**Достоверность и обоснованность полученных результатов** по теории модифицированных дескриптивных алгебр изображений обеспечивается строгой формализованностью вводимых теоретических конструкций и их непротиворечивостью теории дескриптивных алгебр изображений. Комбинаторная оценка пространства обработки и анализа изображений (оценка воронки пространства) получена анализом его структуры и синтезом комбинаторных оценок для составляющих подпространств. Разработанные методы математического моделирования участвуют в постановке задач параметрической оптимизации, как задачи многопараметрической минимизации целевой функции с ограничениями, что находится в рамках теории оптимального управления, параметрической идентификации систем и численной оптимизации. Численные методы стохастической минимизации (генетические алгоритмы) целевой функции позволяют получить результаты, вписывающиеся в комбинаторный прогноз и в заранее заданную точность.

**Научная новизна.** В области математического моделирования: разработан математический аппарат модифицированных дескриптивных алгебр изображений, представляющий специализацию дескриптивных алгебр изображений на случай универсальных алгебр; определено и исследовано пространство обработки и анализа изображений, а также проведена его комбинаторная оценка (оценка воронки пространства) с целью выбора начальных данных; разработан алгоритм построения методов математического моделирования обработки и анализа изображений в данном пространстве.

В области численных методов: разработан численный метод многопараметрической стохастической оптимизации (генетический алгоритм) параметров математической модели обработки и анализа изображений; задача

вычисления площади и количества природных водоемов на размытых изображениях решена, как задача минимизации многопараметрической целевой функции с ограничениями.

В области комплексов программ: разработан программный комплекс для MATLAB, позволяющий получить комбинаторную оценку воронки пространства обработки и анализа изображений.

### **Положения, выносимые на защиту.**

1. Теоретические конструкции модифицированных дескриптивных алгебр изображений: определение метода конвертирования изображений, определение методов обработки изображения (Т-ДАСПИ) и анализа изображений (Р-ДАСПИ), определение пространства обработки и анализа изображений (пространство состояний изображений, ПСИ), теорема о пространстве обработки и анализа изображений.
2. Формулы оценки пространства обработки и анализа изображений и комбинаторной оценки его воронки и программный комплекс (Приложение А).
3. Алгоритм разработки методов математического моделирования обработки и анализа изображений в системах технического зрения.
4. Численный алгоритм минимизации нелинейной двухпараметрической целевой функции с линейными ограничениями.
5. Решения задач вычисления площади и количества природных водоемов, как задач минимизации многопараметрической целевой функции с ограничениями

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Теоретическая значимость работы заключается в комплексном исследовании математического аппарата дескриптивных алгебр изображений на случай универсальных алгебр, что позволило создать теорию модифицированных дескриптивных алгебр изображений. Теория модифицированных дескриптивных алгебр изображений позволяет создавать математические методы моделирования обработки и анализа изображений в системах технического и компьютерного зрения. Задача измерения признаков объектов наблюдения на изображениях ставится как задача

многопараметрической минимизации целевой функции с ограничениями. Целевая функция определяется через разработанный метод математического моделирования обработки и анализа изображений. Оптимальные значения параметров метода моделирования гарантируют измерение искомого признака с заданной точностью при условии, что измеряемое изображение отобрано с учетом комбинаторной оценки воронки в пространстве обработки и анализа изображений.

Практическая значимость работы заключается в: разработке программного комплекса комбинаторной оценки воронки пространства, что позволяет получить вероятность успешного выбора начальных изображений; решена задача по вычислению площади и количества природных водоемов на размытых изображениях, как задача многопараметрической минимизации целевой функции с ограничениями. Разработанную методику измерения параметров объекта наблюдения можно распространять на любые детерминированные, вероятностные и структурные признаки с незначительными изменениями в разработанных алгоритмах.

Ограничения, полученных теоретических и практических результатов, следующие: изображения фиксируются только в оптическом диапазоне, хотя возможно распространение предлагаемой методики и на другие диапазоны; изображения в алгебрах представлены только в виде 3 матриц, которые естественным образом описывают полноцветные, полутоноевые и бинарные изображения, хотя самой теорией допускается расширение этих разновидностей; для проведения комбинаторной оценки воронки, как показывает опыт, нужно использовать Maple или MATLAB; построение метода математического моделирования обработки и анализа изображений остается прерогативой разработчика, хотя ее можно вполне сформулировать как задачу структурного синтеза; сложность формулировки целевой функции заключается в недостаточном исследовании метрик в пространстве признаков.

**Апробация работы.** Теоретические и практические результаты исследований по диссертационной работе были аprobированы на следующих

конференциях: Международная научно-практическая конференция «Инновации и современная наука» (Новосибирск, 2011), Международная научно-практическая конференция «Математика и информационные технологии в современном мире» (Новосибирск, 2011), Республиканская научно-практическая конференция «Информатизация образования: опыт проблемы и перспективы» (Уфа, 2011), IX Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы гуманитарных и естественных наук» (Москва, 2011), IV Международная научно-практическая конференция «Теория и практика современной науки» (Москва, 2011), XIII Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика-2011» (Москва, 2011), XIV Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика-2012» (Москва, 2012), XIII Национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием (Белгород, 2012), VI Всероссийская научно-техническая конференция «Робототехника и искусственный интеллект» (Железногорск, 2014 г.), Научно-техническая конференция «Техническое зрение в системах управления» (Москва, 2016 г.), VIII Всероссийская научно-техническая конференция «Робототехника и искусственный интеллект» (Железногорск, 2016 г.).

Материалы диссертационной работы также проходили обсуждение в научных семинарах: Института математики УНЦ РАН (Уфа, 2011 г.), математического факультета ЧелГУ (Челябинск, 2012 г.), Института систем обработки изображений РАН (Самара, 2012 г.), Башкирского отделения научного совета по методологии искусственного интеллекта РАН (Уфа, 2013 г.), Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН (Москва, 2013 г.), Стерлитамакского филиала БашГУ (Стерлитамак, 2015 г.), кафедры уравнений математической физики факультета математики, механики и компьютерных наук ЮУрГУ (Челябинск, 2015 г.), кафедры уравнений математической физики факультета математики, механики и компьютерных технологий в институте естественных и точных наук ЮУрГУ (Челябинск, 2016 г.).

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 18 работах, из них 4 статьи опубликованы в журналах из перечня ВАК

Минобрнауки РФ, из них 1 статья опубликована в международном рецензируемом журнале, включенном в научометрическую базу Web of Science, 1 статья опубликована в международном рецензируемом журнале, включенном в научометрические базы Scopus, Web of Science, EBSCO, Zentralblatt MATH, Ulrich's Periodicals Directory; 1 монография, изданная в организации, где выполнена диссертационная работа, 1 свидетельство о регистрации программных продуктов в Объединенном фонде электронных ресурсов «Наука и образование» Минобрнауки РФ. Из работ, выполненных в соавторстве, в диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав и двух приложений. Полный ее объем составляет 164 страницы машинописного текста, включая 22 рисунка, 9 таблиц, библиографию, содержащую 152 наименования, 1 приложение.

Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Маликову Рамилю Фаруковичу за ценные советы, рекомендации и постоянное внимание к работе.

# **Глава 1. Подходы, теории и технологии разработки систем обработки, анализа и распознавания изображений**

## **1.1 Разработка систем технического зрения в советский период**

Системы технического зрения советского и постсоветского периода в большинстве случаев имели простую архитектуру и разрабатывались для различных задач производства и промышленности [23]. Проблемами систем технического зрения в разное время занимались Сырямкин В.И., Якушенков Ю.Г., Титов В.С., Петров А.А и др. Были решены проблемы: классификации систем технического зрения, создание общей концепции их построения, разрабатывались методы и алгоритмы обработки зрительной информации, решались проблемы создания типовых элементов и узлов, были получены расчетные формулы оценки и технологии проектирования систем технического зрения. Проводились также и перспективные исследования по таким направлениям, как корреляционные и акустические системы технического зрения. Диссертационной работе используются: алгоритм обработки зрительной информации, которая соответствует функциональной модели современных систем технического зрения, основные принципы автоматического проектирования (содержательные модели сцены наблюдения, математические модели подсистем системы технического зрения, оптимизация моделей) [23].

К концу 90-х XX-го века сформировалась общая система взглядов, в дальнейшем, вытекшая в концепцию автоматизации проектирования автоматизированных систем обработки изображений (АСОИ), в частности, и систем технического зрения. Согласно этой концепции, совокупность этапов проектирования направлена на решение задачи создания СТЗ, функционирующих в заданной среде по разработанным алгоритмам в соответствие с рисунком 1.1 [23].

Начальным этапом проектирования является задание на разработку, которое представляет набор входных параметров, внешних ограничений и требования к выходным параметрам СТЗ. Следующим шагом является анализ входных и выходных параметров и внешних ограничений [23].

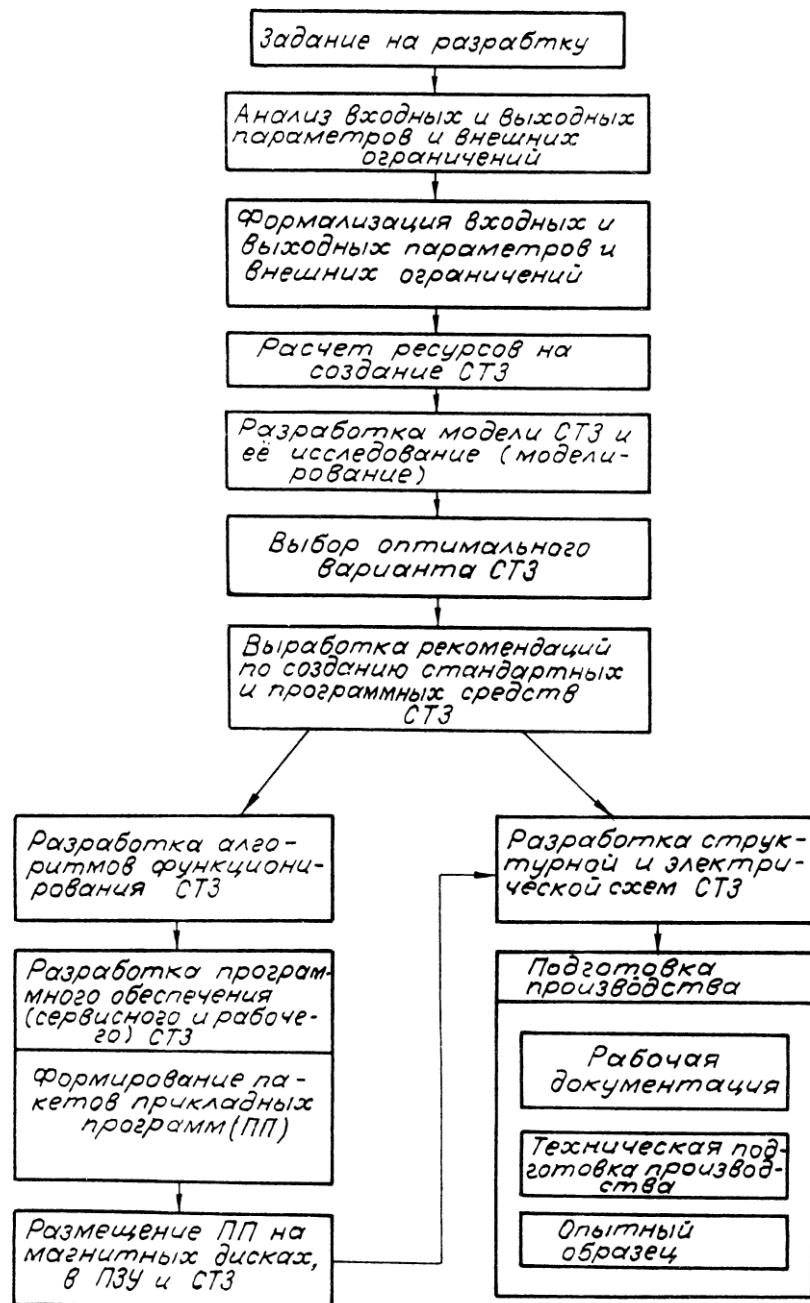


Рисунок 1.1 - Схема автоматического моделирования и проектирования СТЗ [23].

Для систем автоматизированного проектирования СТЗ (САПР СТЗ) обычно используются следующие входные параметры: 1) тип и количество датчиков изображений; 2) число градаций яркости и цветов изображения; 3) размер и количество считываемых кадров; 4) режим работы СТЗ; 5) точность считывания

видеоинформации; 6) быстродействие работы СТЗ; 7) объем памяти СТЗ; 8) характеристики используемой ЭВМ и мониторов; 9) стоимость блоком СТЗ; 10) габаритные размеры блоков СТЗ; 11) скорость движения рабочей сцены [23].

К внешним ограничениям относятся: 1) контрастность изображения; 2) запыленность рабочей сцены; 3) освещенность рабочей сцены; 4) температура. В качестве выходных параметров рассматриваются рекомендации по созданию аппаратных и программных средств СТЗ, алгоритмов функционирования и схем СТЗ. Следующим этапом проектирования является формализация входных и выходных параметров и внешних ограничений. В дальнейшем, используя методы сетевого планирования и логического ранжирования производится расчет ресурсов на создание СТЗ, например, затрат времени и средств [23].

На этапе создания модели СТЗ и ее исследования обычно разрабатываются: 1) содержательные модели; 2) математические модели подсистем СТЗ и все системы в целом (логические формулы, дифференциальные, интегральные, алгебраические уравнения, вероятностные описания случайных событий, величин, процессов и полей, критериев оптимальности, функционалов и т.п.); 3) методов и алгоритмов имитационного моделирования и проверки адекватности моделей. Этот этап предназначен для прогнозирования характеристик и оценивания возможных вариантов решений, проверки соответствия сформулированным требованиям, оптимизации параметров и т.д [23].

Затем производится выбор оптимального варианта СТЗ по критериям оптимальности на основе построенной модели СТЗ. Для этого обычно используют базы данных, содержащих описания известных типовых решений задач синтеза СТЗ, методы и алгоритмы обработки данных. После выбора оптимального варианта СТЗ (модели) осуществляется разработка структурной, функциональной и электрических схем СТЗ и алгоритмов функционирования и программного обеспечения СТЗ [23].

Таким образом, САПР СТЗ включает в себя следующие основные вопросы: 1) создание моделирующих установок (АСОИ), позволяющих моделировать различные алгоритмы анализа видеоинформации; 2) синтез и анализ

математических моделей СТЗ; 3) разработку технических программно-аппаратных средств проектирования [23]. Для повышения производительности работы АСОИ можно в настоящее время использовать высокопроизводительные системы, системы распределенных вычислений, технологии облачных вычислений, вплоть до ДНК-машин.

Структура АСОИ может иметь различную реализацию. Например, одним из первых АСОИ в СССР, ориентированных на проектирование СТЗ и отработку схем исполнительных механизмов, являлась моделирующая система, разработанная в ИК АН СССР в соответствии с рисунком 1.2 [23].

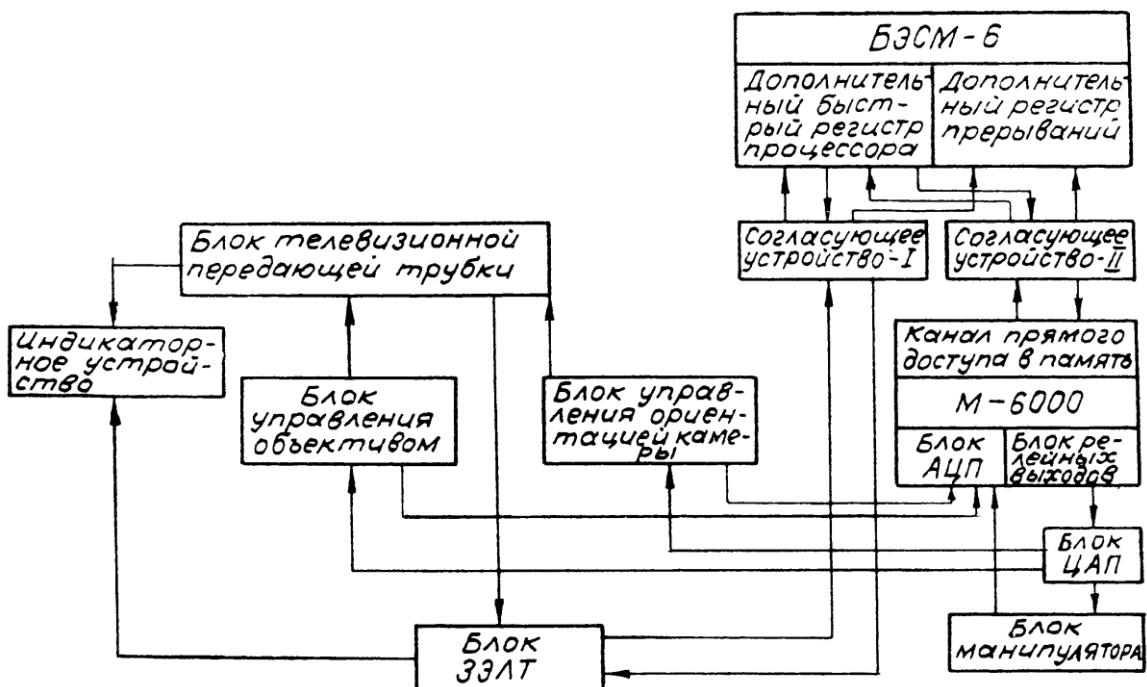


Рисунок 1.2 - Структурная схема АСОИ в СССР [23].

В данном случае, программы, входящие в состав проблемно-ориентированного математического обеспечения системы моделирования, содержали: 1) программы ввода-вывода в ЭВМ и предварительной обработки изображений; 2) подпрограммы описания объемных сцен, составленных из многогранников, по плоским изображениям сцены; 3) подпрограммы имитационного моделирования изображений объемной сцены [23].

Вариант АСОИ, в соответствии с рисунком 1.3, реализованный в стандарте КАМАК, позволял: 1) выбрать источники излучения, приемную оптическую систему, параметры приемника оптического излучения и электронного тракта

обработки сигнала оптической информации; 2) оценить эффективность методов получения преобразования и анализа изображений; 3) определить методические и инструментальные погрешности измерения параметров объекта; 4) оформить документально результаты моделирования и расчета СТЗ [23].

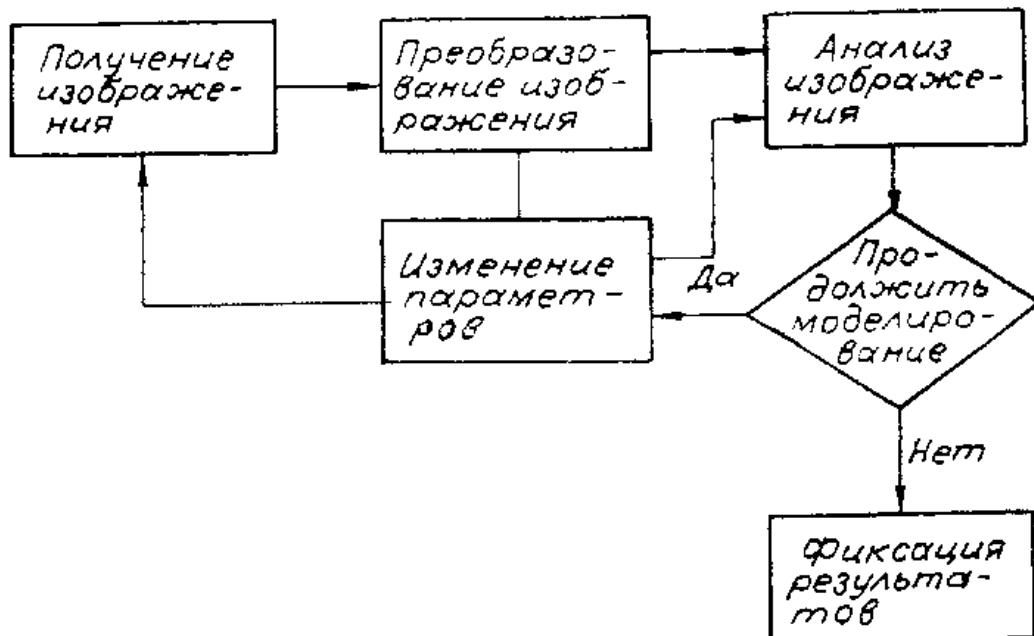


Рисунок 1.3 - Схема функционирования варианта АСОИ [23].

В АСОИ процесс математического моделирования состоит из следующих этапов: 1) формирование рабочей сцены с моделированием яркостного распределения, учитывающий закон линейного пространственного изменения освещенности; 2) моделирование оптической системы и оптического приемника излучения; 3) моделирование устройства получения цифрового изображения. Формирование рабочей сцены для СТЗ осуществляется путем выполнения последовательности операций задания графических образов объектов, где каждой модели задается коэффициент его отражения, равный от 0% до 100%. Процесс моделирование оптической системы и приемника оптического излучателя делится на: 1) получение изображения, определяющего освещенность чувствительного слоя приемника оптической информации; 2) моделирование искажений светопередачи оптической системы в зависимости от апертурного угла; 3) моделирование функции рассеивания оптической системы; 4) моделирование преобразования светового сигнала в электрический в приемнике излучения типа

ПЗС; 5) моделирование аддитивного непрерывного шума. Ясно, что в данном случае проводится моделирование физических процессов в СТЗ [23].

Математическая модель СТЗ обуславливается типом, техническим характеристиками и условиями эксплуатации СТЗ. При синтезе и анализе математической модели используются различные методы математического описания устройства, например методами теории автоматического управления. Другим примером метода математического моделирования является метод, ориентированный на математическое представление алгоритмов работы СТЗ. Суть этого метода заключается в том, что СТЗ представляется в виде совокупности функциональных блоков, описывающих работу зрительной системы. Данный метод был использован в системе МАРС. Математическая модель компонента в модельном методе представляет собой функциональное уравнение компонента относительно переменных и их производных на его выводах. При моделировании в системе МАРС осуществлялся переход от схемы устройства к его формализованному представлению в виде цепи. Математическая модель цепи получалась объединением математических моделей компонентов и узловых законов сохранения. Решением модели цепи являлась вектор вход-выходных координат компонентов цепи. Компоненты делились на 1 тип, используемые для отладки последовательности алгоритмов цифровой обработки, на 2 тип, для их оценки по точности и быстродействию [23].

Другим примером АСОИ являлась САПР, разработанный в Ленинградском механическом институте. Она тоже вписывается в данную концепцию автоматического моделирования и проектирования СТЗ [23].

Таким образом, уже в конце XX века сформировалась обобщенная отечественная теория автоматического моделирования и проектирования СТЗ. Основные положения этой теории выбраны и положены в основу системы гипотез, обуславливающих становление научных исследований диссертационной работы [23].

## 1.2 Разработки и исследования систем технического и компьютерного зрения в современной России

Традиции советских исследователей и разработчиков систем технического и улучшенного зрения продолжают сотрудники ФГУП «ГосНИИАС». Известны работы Визильтера Ю.В., Желтова С.Ю. Бондаренко А.В., Осоков М.В., Моржин А.В., Степанова А.А. по детектированию объектов на основании событий [24], обнаружение и идентификация объектов с использованием методов проективной морфологии [25, 26]. В диссертационной работе предполагается, что задача сегментации и локализации объектов на изображениях решена доступными методами, а объект интереса полностью содержится на начальных изображениях.

Были изучены научные работы сотрудников Института систем обработки изображений РАН Сойфера В.А., Сергеева В.В., Попова С.Б., Мясникова В.В., Глумова Н.И., Чернова В.М., Чернова А.В., Чичевой М.А., Бавриной А.Ю., Копенкова В.Н., Митекина В.А., Фидосеева В.А., Ильясовой Н.Ю., Куприянова А.В., Лыкова К.В. и Кузнецова А.В.. В диссертационной работе учитывались научные достижения по проблеме параметрической идентификации систем обработки и анализа изображений [27], оценка параметров линейной спектральной смеси с полными ограничениями для анализа отсчетов гиперспектральных изображений [28], метод автоматического построения процедуры локальной нелинейной обработки изображений на основе иерархической регрессии [29].

Существуют известные работы, основанные на методах идентификации систем Гропа Д. [30], идентификации объектов управления Диленской А.Н.[31] и методов оптимального управления Черноруцкого И.Г. [32]. Решение прикладных проблем с помощью оптимизации можно найти в работах: оптимальное размещение элементов распределенной производственной структуры у Нефедова Д.Г. [33], алгоритмы и программные средства эволюционной обработки изображений у Белоусова А.А. [34], адаптивный видеодатчик с предварительной обработкой изображений у Табаси С.Х. [35],

вычислительные устройства с параллельной и изменяемой архитектурой для задач обработки изображений у Аряшева С.Н. [36], методы синтеза и многомерных моделей и алгоритмов цифровой обработки изображений у Медведевой Е.В. [37], синтез и анализ алгоритмов обработки изображений групповых точечных объектов для ориентации летательных аппаратов у Чеснокова С.Е. [38].

Идеи автоматического проектирования и разработки систем технического зрения нашли развитие в работах известных российских ученых и исследователей Ларкина Е.В. и Ивутина А.Н. В работе [39] ее авторами задача проектирования программных систем формулируется в виде задачи минимизации целевой функции, представляющей модель проектируемой программной системы, с ограничениями. Согласно этому исследованию: проектирование программной системы является частной задачей параметрической оптимизации систем, варьируемые параметры целевой функции могут иметь разную природу, целевая функция является скалярной функцией. В связи со сложностью оптимального проектирования авторы данной работы утверждают, что будет целесообразным использовать метод целенаправленного выбора, который является разновидностью метода нисходящего проектирования. Этот метод предполагает декомпозицию системы на иерархические уровни и решению оптимизационной задачи на уровне подсистем. В диссертационной работе используются сформулированные Ларкином Е.В. и Ивутином А.Н. принцип оптимального проектирования программной части системы технического зрения.

В диссертационной работе предполагается, что система технического зрения решает задачи обработки и анализа изображений на программном уровне. Кроме того, программная система, решающая задачу подбора значений варьируемых параметров программного комплекса будет проявлять свойство адаптивности. В диссертационной работе адаптивность математической модели обработки и анализа изображений является еще одним принципом построения методов математического моделирования. Этот принцип основан на ключевой работе по адаптивным системам технического зрения Гридина В.Н., Титова В.С. и Труфанова М.И. [40].

### 1.3 Алгебраический подход к обработке, анализу и распознаванию изображений

Задачи, объединяемые под названием «распознавание образов» очень разнообразны. Не существует универсального подхода к их решению. Было предложено несколько теорий в работах [46, 49-51, 110, 111, 122].

Общепринятым методом стандартизации является построение и использование математических и имитационных моделей изучаемых объектов и процедур, используемых для их преобразования. Интерес к формальным описаниям и к формализации описаний процедур их преобразования возник в распознавании образов, в связи с необходимостью решения сложных задач распознавания и развитием структурных методов распознавания изображений. В дальнейшем развитие математической теории распознавания образов и распознавания изображений проходило по двум параллельным и взаимосвязанным направлениям: а) разработка, формализация, исследование и оптимизация методов представления исходной информации в задачах распознавания; б) разработка, формализация, исследование и оптимизация методов преобразования исходной информации, обеспечивающих собственно решение задач распознавания.

На начальном этапе развития распознавания образов в 1960-е годы преобладало дескриптивное направление. К работам по «дескриптивному» направлению можно отнести исследования А.Розенфельда (Rosenfeld) [140], Т.Эванса (Evans) [141, 142], Р.Нарасимхана (Narasimhan) [143-146], Р.Кирша (Kirsh) [147], А.Шоу (Shaw) [148, 149], Р. Барроу (Barrow), Ф.Эмблера (Ambler) и Р.Бэрстолла (Burstall) [150], С.Кейнеффа (Kaneff) [151], К.С.Фу (Fu)[18, 19].

В 1970-е годы академик Ю.И.Журавлев предложил «Алгебраический подход к задачам распознавания и классификации» [41-48], в котором определил методы формализации описания эвристических алгоритмов распознавания

образов, предложил универсальную структуру алгоритма распознавания и развел и обосновал алгебраические методы синтеза алгоритмов распознавания, обеспечивающих решение поставленной задачи.

В 1970-е годы У.Гренандер сформулировал «Теорию образов» [49-51], в которой рассмотрел методы представления и преобразования информации в задачах распознавания в терминах регулярных комбинаторных структур с использованием алгебраического и вероятностного аппаратов.

В эти же годы М.Павел [110, 111] предложил способ использования категорий в распознавании образов - формальные описания алгоритмов распознавания образов с помощью преобразований исходных данных, сохраняющих их принадлежность классу.

В рамках научной школы академика Ю.И.Журавлева существенные результаты в алгебраическом направлении были получены академиком В.Л. Матросовым [52-55], член-корреспондент РАН К.В.Рудаковым [56, 57], развел категорный подход к решению задачи распознавания образов, д.ф.-м.н. В.Д. Мазуров [58-61] предложил и обосновал метод комитетов.

Кроме базовых работ Ю.И.Журавлева по алгебре алгоритмов распознавания в отечественной школе распознавания были выполнены еще работы по алгебраическим методам анализа и оценивания информации, представленной в виде сигналов. К их числу относятся работы д.т.н. В.Г. Лабунца [62], д.ф.-м.н. Ю.П. Пытьева [63], д.т.н. И.Н. Синицына [64], д.т.н. Я.А. Фурмана [65], д.ф.-м.н. В.М. Чернова [66].

Переход от алгебры алгоритмов распознавания образов к алгебре алгоритмов распознавания изображений требует выбора: алгоритмов, используемых в качестве элементов алгебры; алгебраических представлений самих изображений, позволяющих формализовать задачу выбора признаков. В работе М.И.Шлезингера [67] по двумерным грамматикам, на основании представлений изображений двумерными грамматиками предложена единая формулировка задач обработки и распознавания изображений, которые ранее

представлялись различными. Исследована вычислительная сложность сформулированной задачи для общей постановки.

Идея создания некой единой теории, охватывающей различные подходы и операции, используемые в обработке изображений и сигналов формулируются в работах фон Неймана (Neumann), продолженные С.Ангером (Unger), М.Даффом (Duff), Г.Матероном (Matheron), Г.Риттером, Ж.Серра, С.Сternбергом и другими [106, 107, 112, 118, 119]. Например, идея построения унифицированного языка для понятий и операций, использующихся в обработке изображений, появилась впервые в работах С.Ангера [152]. Он предложил распараллеливать алгоритмы обработки и анализа изображений на компьютерах с клеточной архитектурой. Многие операции, реализуемые на машинах с клеточными архитектурами, можно представить через простые элементарные операции. Это послужило основой для построения формализма, обеспечивающего представление значительного числа алгоритмов обработки и анализа изображений. Наиболее успешным таким формализмом явилась математическая морфология и арифметика, определенная на окрестностях пикселов. Математическая морфология, развитая Г.Матероном [106] и Ж.Серра [107], стала отправной точкой новой математической волны в обработке и анализе изображений. Ж.Серра и С.Сternбергу [107] впервые удалось построить на основе математической морфологии целостную алгебраическую теорию обработки и анализа изображений, называемую алгеброй изображений (АИ). Окончательное оформление идея АИ получила в виде стандартной АИ Г.Риттера [118, 119].

ДАИ представляет собой новую АИ, обеспечивающую возможность оперировать как с основными моделями изображений, так и с основными моделями тех процедур преобразования, которые обеспечивают эффективный синтез и реализацию базовых процедур формального описания, обработки, анализа и распознавания изображений. ДАИ была введена И.Б.Гуревичем и развивается им и его учениками [122, 125].

## 1.4 Дескриптивный подход И.Б. Гуревича и В.В. Яшиной к обработке, анализу и распознаванию изображений

Алгебры, как частный случай алгебраических систем представляют собой упорядоченную пару основного множества и множества главных операций. Эти операции определяются с точностью до изоморфизма и обладают свойством замкнутости на основном множестве. К основному же множеству алгебры такого рода требования не выдвигаются. Последнее означает, что элементами алгебры могут быть и сами главные операции, и характеристики элементов. Выбор элементов основного множества алгебры обуславливается самой предметной областью. Такого рода алгебры являются специализированными и требуют отдельного изучения. «Алгебраизация» теории распознавания образов, а также в анализе и распознавании изображений является ярким примером применения алгебраического подхода к задачам этих предметных областей [122-139].

Разрабатываемый формальный аппарат для предметных областей должен обеспечивать унифицированное и компактное представление процедур обработки и анализа изображений. Элементами основного множества алгебры и главных операций могут быть [122-139]:

1. точки, множества, модели, преобразования морфизмы;
2. каждый объект является иерархической структурой, построенной с помощью некоторых преобразований из элементарных объектов;
3. каждое преобразование является иерархической структурой, построенной с помощью некоторых преобразований из набора базисных преобразований.

Аналогичны требования и к возможностям формальной системы [122-139]:

1. построение формальных конструкций, позволяющих использовать в обработке, анализе и распознавании изображений методы из различных областей математики и информатики;
2. построение точных и компактных описаний изображений, удобны с точки зрения интерпретации производимых действий и разработки новых методов;

3. описание преобразований над изображениями в виде компактных наборов простых преобразований в машинно-независимой и адаптированной к конкретным архитектурам форме;
4. создание специализированных подъязыков для описания изображений и преобразований над ними в отдельных классах задач распознавания и оценивания изображений;
5. повышение эффективности программной реализации;
6. выбор языков программирования, наиболее эффективных в работе с формальными конструкциями, описывающими известные алгоритмы обработки, анализа и распознавания изображений.

Как предполагается, разрабатываемая формальная система должна представлять специальный класс алгебр, в пределах которых возможно определять одни элементы основных множеств в виде комбинации других элементов [122-139].

Согласно мнению авторов подхода, такая формальная система обладает следующими основными преимуществами [122-139]:

1. построение унифицированных представлений для описания изображений;
2. эффективность перехода от входной информации в виде изображений к различным формальным моделям изображений;
3. естественность объединения алгебраического представления информации с разработанным и успешно применяемым алгебраическим аппаратом распознавания образов;
4. возможность использования методов математического моделирования, применяемых в тех прикладных областях, к которым относятся обрабатываемые изображения;
5. возможность использования описаний изображений в виде теоретико-групповых представлений;
6. естественность объединения методов структурного анализа изображений с аппаратом вероятностного анализа;
7. возможность формализованного описания для задач распараллеливания с учетом специфики конкретных вычислительных архитектур.

Дескриптивный подход к анализу и пониманию изображений (ДПАИ) предложен в качестве концептуальной и логической основы анализа и распознавания изображений. Его основу составляют [122-139]:

1. методы анализа и распознавания изображений;
2. методы, приведения изображений к виду, удобному для распознавания;
3. понятийную систему анализа и распознавания изображений;
4. характеристику пространства изображений, как совокупность типов предложений, возникающих в процессе их приведения к виду, удобному для распознавания;
5. классы дескриптивных моделей изображений;
6. постановки задачи анализа и распознавания изображений;
7. базовую модель процесса распознавания изображений.

Основными объектами и средствами ДПАИ являются: изображения, универсальный язык (ДАИ), модели двух типов (модели изображений и модели процедур решения задач распознавания изображений и их реализации в виде алгоритмических схем). Базовыми составляющими ДПАИ являются [122-139]:

1. концептуализация и формализация фаз, которые проходит изображение в процессе преобразования при решении задачи распознавания;
2. классификация и спецификация допустимых моделей изображений (ДМИ);
3. алгебраический язык для описания моделей изображений и процедур их построения и преобразования на языке ДАИ;
4. постановки задач анализа и распознавания изображений и модель процесса решения стандартной задачи распознавания изображений.

ДПАИ основывается на [122-139]:

1. дескриптивной модели задачи распознавания изображений;
2. специальных математических постановках задач анализа и распознавания изображений;
3. в приведении изображений к виду удобному для распознавания (ПВУР);
4. «алгебраизации» извлечения знаний из изображений;

5. в порождающем принципе и базисах преобразований и моделей (описание изображения строится как иерархическая структура, образованная более простыми объектами);
6. множественности моделей изображений (мультимодельных и многоаспектных представлениях изображений, позволяющих выбирать и изменять в процессе распознавания нужную степень подробности описания объекта распознавания);
7. во введении знаний в процессы извлечения знаний из изображений.

В настоящее время развитие математической теории идет по пути ее «алгебраизации» на основе алгебраического подхода к задачам распознавания и классификации по Ю.И. Журавлеву и его специализации на случай представления исходной информации в виде изображений – ДПАИ [122-139]. Основными инструментами ДПАИ являются ДАИ [122, 125], ДМИ [125-139] и мультимодельные и многоаспектные представления изображений на основе порождающих дескриптивных деревьев (ПДД) [127-130].

ДАИ выбраны в ДПАИ в качестве алгебраического языка для описания, сравнения и стандартизации алгоритмов анализа, обработки и распознавания изображений. Они позволяют объединять и стандартизировать процедуры построения и обработки моделей изображений и их преобразований. Задачи, объекты и преобразования, рассматриваемые при извлечении информации из изображений, задаются иерархическими структурами, поостренными путем применения операций ДАИ к множеству непроизводных задач, непроизводных элементов изображений и базисных преобразований. При таком подходе существует возможность варьировать методы решения подзадачи, используя операции анализа изображений в качестве элементов ДАИ, сохраняя в целом схему технологии извлечения информации из изображений. Место ДАИ среди основных алгебр в смысле Биркгоффа иллюстрируется на рисунке 1.4 [124-139].

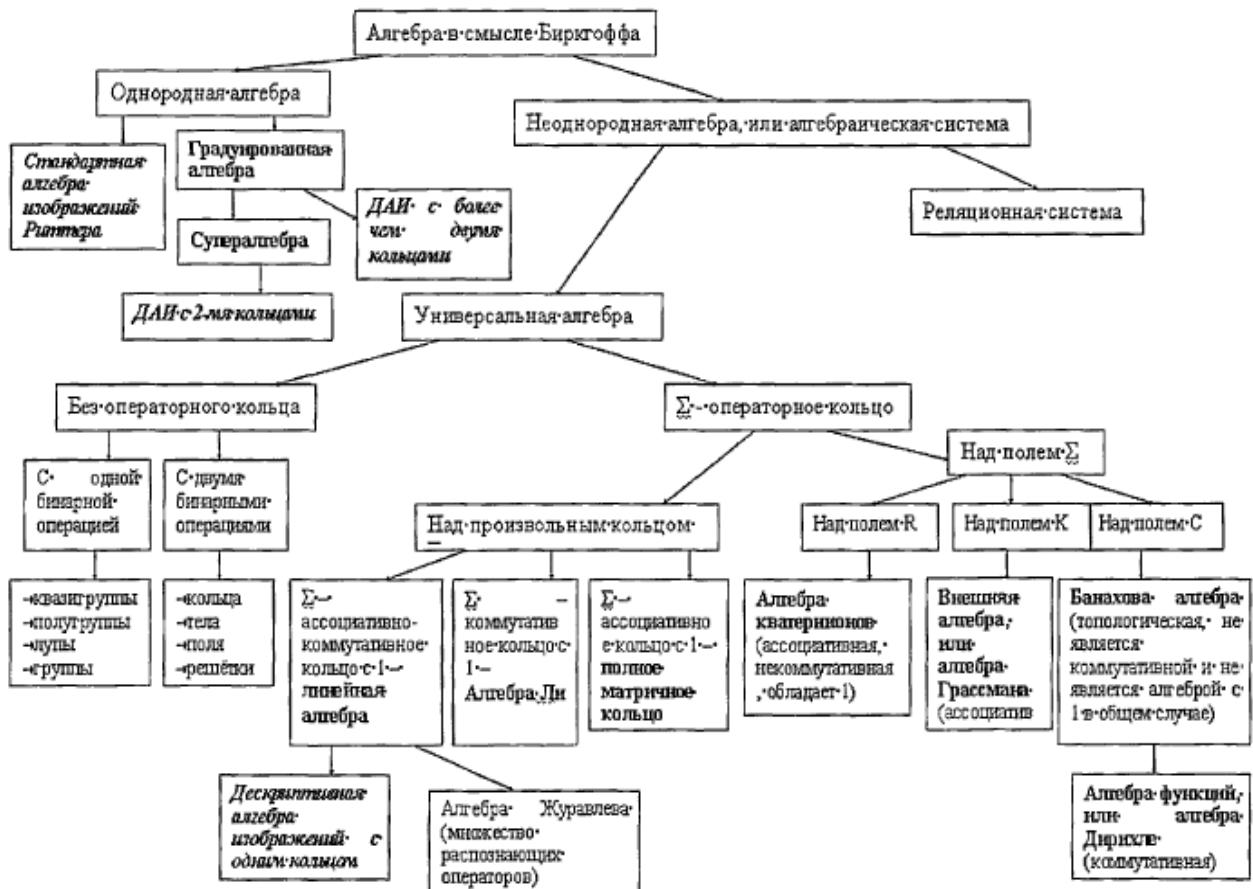


Рисунок 1.4 - Классификация алгебр в смысле Биркгоффа [124-139].

## Выводы по первой главе

В данной главе были рассмотрены классы направлений исследований по обработке, анализу и распознаванию изображений, а также смежная с ними область проектирования и разработки систем технического зрения. Проанализированные работы были выбраны с целью охватить все пространство исследований и разработок, и в тоже время, для целостного представления современного состояния. Как показывают основные тенденции, математическое моделирование процессов обработки информации в СТЗ в виде изображений недостаточно исследованы. Кроме того, концепция отечественного автоматического проектирования и моделирования СТЗ не получило широкой известности и дальнейшего развития. С целью продолжения исследований в

данном направлении была сформулирована система гипотез, которая заложена в основу исследований диссертационной работы.

Для математического моделирования процессов обработки и анализа изображений в системах технического зрения был подобран специализированный математический аппарат отечественной разработки. Основы этого математического аппарата были заложены академиком Ю.И. Журавлевым. В дальнейшем, благодаря, тяжелому академическому труду его учеников эта методология была доведена до прикладного уровня. В настоящее время математический аппарат дескриптивных алгебр изображений исследуется в ВЦ им. А.А. Дородницына РАН. Обладая достаточной гибкостью, она позволяет не только моделировать процессы обработки, анализа и распознавания изображений в любой программной среде, но, как показывают исследования диссертационной работы, моделировать данный процесс в СТЗ.

Анализ научных работ и литературы по теме диссертационной работы позволил сформулировать следующие требования к планируемым результатам:

1. Функциональная модель СТЗ (систем компьютерного зрения) представляет совокупность выполняемых ею функций (методы обработки и анализа изображений), каждая из которых последовательно решает задачи обработки и анализа (измерения признаков) изображений.
2. Для описания функций системы технического (компьютерного) зрения должен быть применен математический аппарат, позволяющий формально описать любой метод цифровой обработки изображений, теории распознавания образов или любой другой теории измерения, использующей математический аппарат.
3. Каждая функция системы технического (компьютерного) зрения должна быть представлена суперпозицией используемых методов (метод математического моделирования обработки и анализа изображений) цифровой обработки изображений, теории распознавания образов или методов любой другой теории измерения, использующей математический аппарат, с учетом порядка их применения.

4. Задача анализа (измерения признака) объекта интереса ставится как задача многопараметрической минимизации целевой функции с линейными ограничениями, в составе которой должна содержаться функция системы технического (компьютерного зрения).
5. Целевая функция должна учитывать априорную и апостериорную информацию об измеряемом признаком.

## **Глава 2. Методы математического моделирования обработки и анализа изображений в теории модифицированных дескриптивных алгебр изображений**

### **2.1 Основные объекты теории модифицированных дескриптивных алгебр изображений**

Вторая глава описывает разработку состава математического аппарата модифицированных дескриптивных алгебр изображений с учетом сформулированных в первой главе гипотез и поставленных задач для достижения основной цели. Разработка математического аппарата МДАИ направлено на модификацию математического аппарата ДПАИ [122-139]. В данной главе будут определены реализации изображений, множество исходных данных в виде совокупности из матрицы фигур на плоскости и семантической сети, описывающей сцену наблюдения, дескриптивные модели изображений. Не менее важной частью второй главы является уточнение понятия процедурных и параметрических преобразований для их использования в качестве главных операций МДАИ. В качестве вариантов процедурных преобразований были рассмотрены методы конвертирования изображений, методы улучшения зрительных характеристик, методы препарирования изображений, методы фильтрации, методы морфологических операций над изображениями. Параметрические преобразования были представлены классами методов для вычисления детерминированных, вероятностных и структурно-лингвистических признаков. На основании процедурных и параметрических преобразований в дальнейшем будут определены математические модели процесса обработки и анализа изображений соответственно. Эти математические модели представляются процедурными и параметрическими ДАСПИ [122-139].

Предлагаемые варианты формализации, выделенных в первой главе, элементов математического аппарата ДПАИ являются альтернативными и не претендуют на место уже существующих. Разрабатываемый математический аппарат создается как дополнение к ныне существующему аппарату ДАИ и ДАИ1К. Если ДАИ и ее специализация ДАИ1К основаны на универсальных алгебрах с операторным кольцом, то МДАИ используют в качестве базы универсальные алгебры без операторного кольца. В данной главе исследованию и модификации подвергаются основные объекты ДАИ (реализации изображений, семантическая и контекстная информация об изображении) и методы преобразования изображений (операция структуризации изображений, процедурные и параметрические преобразования, Т-представления и Р-представления). Порождающие преобразования и G-представления теряют свой смысл, как отдельный класс операций, и включаются в состав процедурных преобразований и Т-представлений соответственно [122-139]. Целью главы является корректная формулировка основных элементов разрабатываемого математического аппарата модифицированных дескриптивных алгебр изображений (МДАИ).

Дескриптивные алгебры изображений являются дальнейшим развитием алгебр изображений Г. Риттера [115-121]. И.Б. Гуревич в качестве дополнительных возможностей вводит понятие моделей и представлений [122-139]. Такой ход позволяет расширить возможности алгебры изображений, однако усложняет ее структуру и требует ввода сложных действий. Диссертационная работа направлена на исследование другого возможного варианта алгебраизации области обработки, анализа и распознавания изображений.

Пусть объектом наблюдения является совокупность объектов или процессов действительности, которую будем называть *сценой наблюдения* или просто *сценой*. Изображение сцены может быть задано в разных форматах, которые будут называться его реализациями. Таким образом, *изображение I* может быть задано в виде совокупности его *реализаций*  $\{I_{bin}, I_{gray}, I_{color}\}$ . Каждая реализация соответствует изображению в формате монохромном, полутоновом или цветном

(в полноцветном или палитровом) соответственно. Нужно четко себе представлять, что палитровое представление изображения всегда сводимо к полноцветному изображению. Под полноцветным изображением подразумевается изображение, представленное в RGB компонентах. В дальнейшем, все теоретические единицы будут определены в рамках модифицированных дескриптивных алгебр изображений. Сформулируем определение реализации изображения в МДАИ [125, 138].

*Определение 1:* Реализацией изображения  $I$  называется любой из видов матриц

$$1. \quad I_{bin} \stackrel{def}{=} \|x_{ij}\|, \quad (1)$$

где  $(\forall i, j)[x_{ij} \in \{0, 1\}]$  - пиксели двухцветного изображения.

$$2. \quad I_{gray} \stackrel{def}{=} \|x_{ij}\|, \quad (2)$$

где  $(\forall i, j)[x_{ij} \in \{0, \dots, 255\}]$  - пиксели полутонового изображения.

$$3. \quad I_{color} \stackrel{def}{=} \|x_{ij}\|, \quad (3)$$

где  $(\forall i, j)[(x_{ij} = \langle r, g, b \rangle_{ij} \vee x_{ij} = \langle r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \rangle) \wedge (r, g, b \in \{0, \dots, 255\})]$  - пиксели цветного изображения.

*Замечание 1:* Элемент матрицы  $x_{ij}$  есть обозначение пикселя изображения.

Матричное представление реализации изображения является удобным для описания операций, проводимых над изображениями. Кроме того, в некоторых случаях вместо обозначения элемента  $x_{ij}$  массива будет использовано эквивалентное обозначение  $x_{i,j}$ , которое также является моделью пикселя.

Любую реализацию изображения  $I_f$  можно также представить в форме тернарного отношения  $Q_f$ .

$$\text{Лемма 1: } (\forall I_f \in \{I_{bin}, I_{gray}, I_{color}\})(\exists! Q_f)[I_f \Leftrightarrow Q_f], \quad (4)$$

где

$$Q_f = \left\{ \begin{array}{l} < i, j, x_{ij} > | i, j \in \square, \\ (x_{ij} \in \{0,1\}) \vee (x_{ij} \in \{0, \dots, 255\}) \vee (x_{ij} = < r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} > | r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \in \{0, \dots, 255\}) \end{array} \right\}$$

тернарная запись изображения.

В дескриптивных алгебрах изображений исходное изображение задается не только множеством его реализаций, но и множеством контекстной и семантической информации  $\{B\}$ , связанной со способами получения и формирования изображения или отражающей какие-либо его специфические аспекты [122-139]. Под семантической и контекстной информацией  $\{B\}$  нужно понимать «способы получения и формирования изображений или отражение каких-либо его специфических аспектов» [125, 138]. Расшифровывая это утверждение можно сказать, что:

1. способы получения и формирования изображений связаны со сценой, для которой создается изображение, т.е. в этом пункте необходимо учитывать математическую модель камеры и природу источника освещения сцены (оптическое, ультрафиолетовое, инфракрасное и т.п.). Для обозначения контекстной составляющей используем  $C_I$  [23, 68, 69].
2. отражение каких-либо специфических аспектов предполагает использование информации о наблюдаемой сцене, его составе, о расположении составляющих ее элементов, т.е. в этот пункт нужно включить информацию не об устройстве фиксации и наблюдения, а о самой сцене. Для обозначения семантической составляющей используем  $Sm_I$  [70-72].

*Определение 2:* Семантической и контекстной информацией об изображении  $I$  называется множество  $\{B\} = \{C_I, Sm_I\}$ , где  $C_I$  - есть контекст (аспект) наблюдения за объектом сцены, а  $Sm_I$  - информационная модель об объекте в априори.

Таким образом, в МДАИ сцена считается заданной, если известны реализации изображений о сцене наблюдения и определена ее априорная информационная модель  $Sm_I$ . Задание информационной модели не является

необходимым условием. Совокупность этих данных о сцене наблюдения образует множество исходных данных в соответствии с рисунком 2.1 [122-139].

*Определение 3:* Множеством исходных данных в МДАИ называется

$$\{\mathfrak{I}_0(I)\} = \{\{I_{bin}, I_{gray}, I_{color}\}, \{C_I, Sm_I\}\}, \quad (5)$$

где  $I_{bin}$  - бинарное изображение;

$I_{gray}$  - полутоновое изображение;

$I_{color}$  - цветное изображение;

$C_I$  - контекстная информация об изображении;

$Sm_I$  - семантическая информация об изображении.

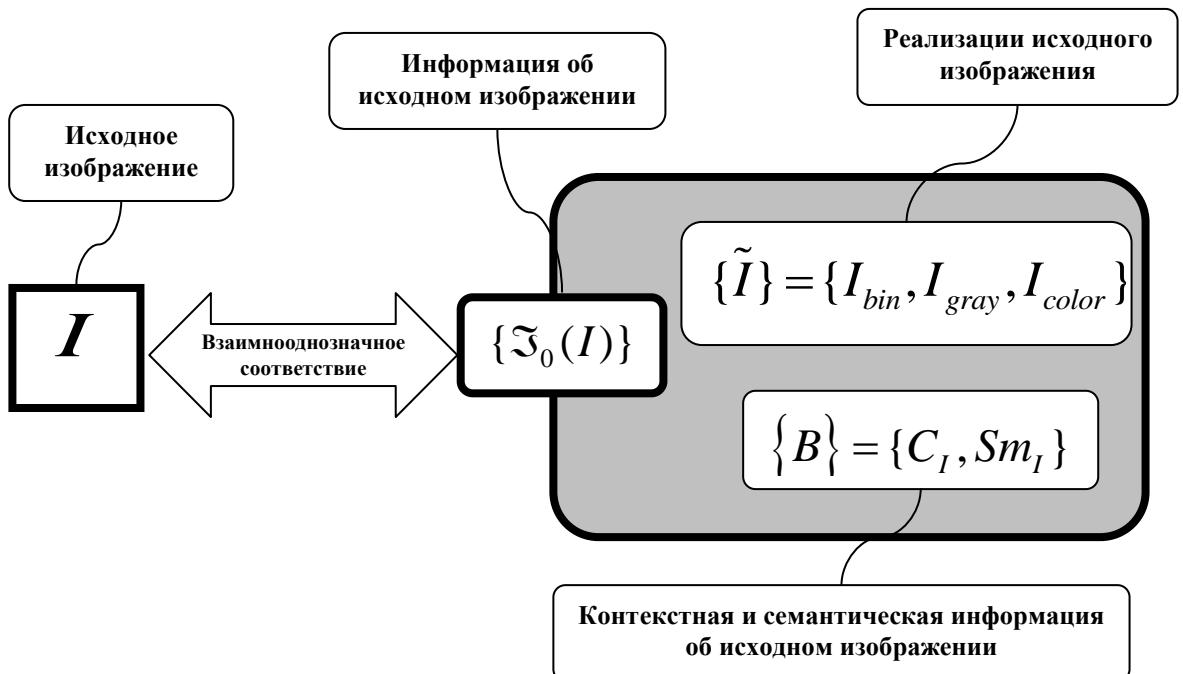


Рисунок 2.1 - Множество исходных данных в МДАИ.

Если информационная модель  $Sm_I$  предоставляет дополнительную информацию (априорная информация о сцене наблюдения) о пространственной структуре сцены наблюдения, то контекстную составляющую  $C_I$  можно использовать в качестве гипотезы, которая подлежит подтверждению или отказу. В случае подтверждения гипотезы получается апостериорная модель сцены наблюдения. Она и является единственным видом моделей изображений в МДАИ. Для формального определения  $C_I$  введем понятие фигуры  $\Phi$  в реализации  $I_f$ .

Это понятие предназначено для описания содержания любой реализации с некоторого аспекта наблюдения за сценой. В отличие от геометрии, в МДАИ понятие фигуры будет определено более широком смысле. Это обусловлено тем, что под фигурой нужно понимать не только геометрическое место точек на плоскости, но и любую совокупность признаков, которая позволяет однозначно решить задачу распознавания изображений согласно теории распознавания образов. Следовательно, под фигурой в МДАИ подразумевается конфигурация, являющаяся содержанием реализации в изображении сцены наблюдения.

В частности, если же фигура описывается геометрическим местом точек в  $I_{bin}$ , то верной будет ее следующая формулировка.

*Определение 4:* Фигурой  $\Phi$  в реализации  $I_{bin}$  называется тернарное отношение

$$\Phi(I_{bin}) = \left\{ \langle i, j, x_{ij} \rangle \mid x_{ij} \in I_{bin}, x_{ij} = 1 \right\}, \quad (6)$$

где  $x_{ij}$  - пиксели бинарного изображения  $I_{bin}$ .

Однако ее определение для реализации  $I_{gray}$  и  $I_{color}$  будут отличаться от определения 4.

*Лемма 2.*  $\Phi(I_f) \subseteq Q_f$ , (7)

где  $I_f$  - бинарное, полутоновое или цветное изображение (реализация);

$Q_f$  - тернарное представление изображения  $I_f$ .

*Замечание 2:* В анализе формы фигура  $\Phi$  структурно может быть разделена на части:

1. точки границы фигуры  $\Phi^O(I_{bin})$ ;
2. внутренние точки фигуры  $\Phi^\Theta(I_{bin})$ .

Поэтому фигуре  $\Phi$  в реализации  $I_f$  свойственно:

$$\Phi(I_f) = \Phi^O(I_f) \cup \Phi^\Theta(I_f), \quad \Phi^O(I_f) \cap \Phi^\Theta(I_f) = \emptyset, \quad (8)$$

где  $I_f$  - бинарное, полутоновое или цветное изображение (реализация).

Предположим, что некоторый наблюдаемый объект находится в пространстве, а его положение однозначно характеризуется углами Эйлера  $\theta, \varphi, \psi$

[68, 69]. Тогда, при изменении любого из них меняется и граница фигуры  $\Phi^O(I_f)$ . Это означает, что  $\Phi_{\theta,\varphi,\psi}^O(I_f) = \Phi^O(I_f; \theta, \varphi, \psi)$ . Следовательно, совокупность всех возможных описаний  $\Phi_{\theta,\varphi,\psi}^O(I_f)$  может быть рассмотрена в виде  $C_I$ . Но, как уже говорилось ранее, фигура есть образ, в смысле теории распознавания образов. Это означает, что в более широком понимании нужно пользоваться следующим определением фигуры.

*Определение 5:* Фигурой  $\Phi$  в реализации  $I_f$  называется множество

$$\Phi(I_f) = \left\{ p_i \mid i = \overline{1, n}, f \in \{\text{bin, gray, color}\} \right\}, \quad (9)$$

где  $p_i$  - признаки объекта сцены наблюдения в реализации  $I_f$ .

Каждая реализация  $I_f$  представляет только один из аспектов наблюдения за сценой. Следовательно, множество всех возможных фигур  $\Phi$ , характеризующих объект наблюдения, можно индексировать по углам Эйлера, т.е.  $\Phi_{\theta,\varphi,\psi}(I_f) = \Phi(I_f; \theta, \varphi, \psi) = \Phi_{\theta,\varphi,\psi}^f$ . Итак, на основании выше сделанных заключений можно сформулировать следующее определение дескриптивной модели изображений [125, 138].

*Определение 6:* Дескриптивной моделью изображений  $I_f$ , характеризующих сцену наблюдения, называется контекстная информация об изображении  $C_I(I_f) = \|\Phi_{\theta,\varphi,\psi}^f\|$ , зависящая от углов Эйлера объекта в пространстве.

Обычно для отражения иерархических связей между некоторыми элементами распространенным подходом является использование древовидных структур [70-72]. В таком случае корнем дерева является сцена, который состоит из узлов, представляющих структурные составляющие сцены. Узлы состоят из менее сложных узлов и листочков. Листочки дерева являются непроизводными или терминальными элементами, которые не подлежат дальнейшему делению. Между корнем, узлами и листочками могут существовать связи, которые тоже находят отражение в дереве. Обычно элементы дерева обозначаются метками (идентификаторы). Если же метки имеют осмысленные названия, то дерево представляет простейшую семантическую сеть, т.е. сеть несущую смысловую

нагрузку. Дерево – это математический объект, относящийся к графам и не имеющий циклов [70-72]. В семантической сети же циклы допустимы [73, 74]. Отсутствие циклов в дереве объясняется повторением ее некоторых элементов. В семантической сети повторение элементов считается не оптимальным подходом к ее организации, и поэтому повторяющиеся элементы по возможности исключаются. Семантическая сеть может в себе хранить не только данные, но и знания. Дальнейшим развитием семантической сети является фреймовая сеть, которая в отличие от семантической сети, является оптимальной по структуре информационной моделью. Именно семантическая и фреймовая сети позволяют использовать отношения между структурными элементами [73, 74]. Рассмотрим пример, на рисунке 2.2 приведена сцена.

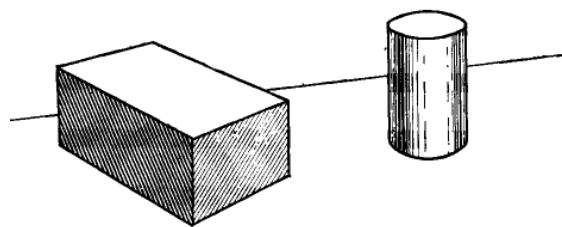


Рисунок 2.2 – Пример изображения исследуемой сцены [12].

Дерево, отражающее связи между структурными элементами сцены, приведено на рисунке 2.3.

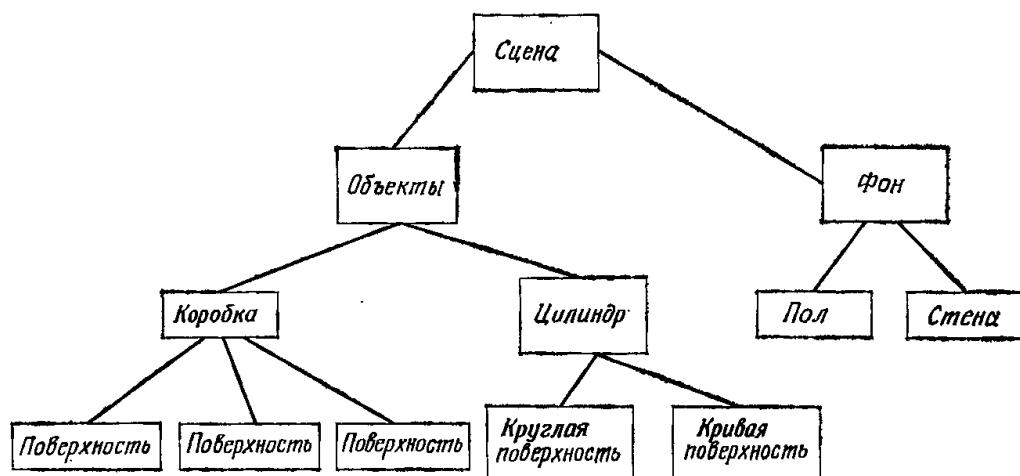


Рисунок 2.3 – Дерево объектов и их частей для сцены наблюдения [12].

Семантическая сеть, как видно на рисунке 2.4, сохраняет структурные составляющие (вершины графа) графа, но вводит еще и дополнительные отношения. За счет наличия направлений в этих отношениях и появляются циклы [70-74].

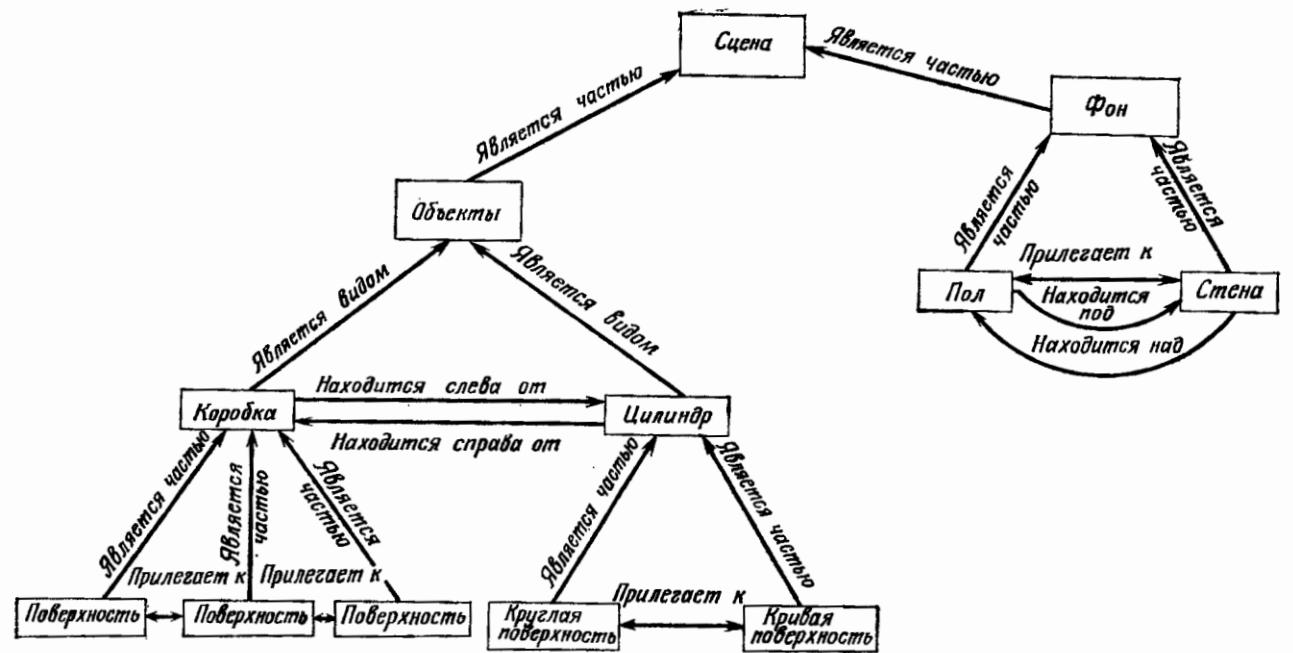


Рисунок 2.4 - Семантическая сеть для сцены наблюдения [12].

Вершины «сцена», «объекты», «фон», «коробка» и «цилиндр» являются производными структурными элементами. К числу непроизводных элементов можно отнести 3 однотипные вершины «поверхность», и вершины в одном экземпляре «круглая поверхность» и «кривая поверхность».

Ясно, что использование семантической сети [73, 74] в качестве структурного элемента  $Sm_i$  в семантической и контекстной информации об изображении позволяет внести в процедуру обработки и анализа изображений дополнительную информацию о сцене наблюдения до проведения обработки и анализа исходных данных. Следовательно, семантическая информация  $Sm_i$  о сцене наблюдения является ее информационной моделью в априори. Другим преимуществом данного вида информационных моделей является их графовая структура, что позволяет легко формализовать операцию выделения из графа важных составляющих элементов.

$$\text{Определение 7: } Sm_I = \langle V, \overline{U} \rangle, \quad (10)$$

где  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  - множество узлов, являющихся геометрическими объектами;  
 $\overline{U} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$  - множество пространственных отношений между элементами из  $\overline{U}$ .

## 2.2 Операции теории модифицированных дескриптивных алгебр изображений

### 2.2.1 Методы обработки изображений в теории модифицированных дескриптивных алгебр изображений

Преобразования изображений представляет единственный инструмент преобразования данных одного вида реализаций в другой или тот же самый. В ДАИ и ДАИ1К такие преобразования называются процедурными преобразованиями [125, 138].

*Определение 8:* Процедурным преобразованием реализации изображения  $I_f$  с параметром  $\overline{\mu}$  называется

$$O_T^{parameter} \left( ; \overline{\mu} \right) : I_f \rightarrow I_g, \quad (11)$$

где

$parameter \in \{X \rightarrow Y, improve, dissect, filter, morph, \dots\}, f, g \in \{bin, gray, color\}$  - класс процедурного преобразования;  
 $\overline{\mu}$  - параметр операции  $parameter$ .

В силу их различной природы, прежде всего, нужно определиться с принципом, согласно которому будет произведена их классификация. В качестве принципа классификации выберем разновидность изучаемых преобразований ДАИ: процедурное, параметрическое и порождающее [122-139]. Таким образом, большинство алгоритмов обработки изображений относятся к группе процедурных преобразований. Наибольший интерес среди процедурных

преобразований представляют такие методы обработки, которые позволяют для набора реализаций получить единственное изображение (таблица 2.1).

Таблица 2.1

## Виды процедурных преобразований в МДАИ

Название преобразования	Формализованное обозначение
Конвертирование изображения	$O_T^{X \rightarrow Y}(\cdot; \eta)$ или $O_T^{X \rightarrow Y}(\cdot; \bar{\eta})$ , (12) где $X \in \{color, gray, bin\}$ , $Y \in \{gray, bin\}$ и $X \neq Y$
Улучшение зрительных характеристик	$O_T^{improve}(\cdot; \eta)$ или $O_T^{improve}(\cdot; \bar{\eta})$ , (13) где $improve \in \{lincont, corrampl, transhist, \dots\}$
Препарирование изображения	$O_T^{dissect}(\cdot; \eta)$ или $O_T^{dissect}(\cdot; \bar{\eta})$ (14)
Фильтрация изображения	$O_T^{filter}(\cdot; \eta)$ или $O_T^{filter}(\cdot; \bar{\eta})$ , (15) где $filter \in \{linear, median, rang, \dots\}$
Морфологическая обработка изображения	$O_T^{morph}(\cdot; \ \mu\ )$ , (16) где $morph \in \{er, dl, \circ, \bullet, \dots\}$

Обычно в области обработки и анализа изображений такие действия называют сведением эквивалентных изображений к эталонному изображению или эталону. Например, имеется набор эквивалентных изображений одного и того же объекта с разных ракурсов. Посредством пространственных геометрических преобразований данные изображения переводим по отдельности в единственное конечное состояние. Это конечное состояние в виде изображения и будет представлять собой эталон. Однако в общем случае такое невозможно в силу использования при построении изображения (проекция наблюдаемой сцены на экран) проективных преобразований, которые необратимы.

Операция конвертации или конвертирования [75-84] позволяет изменять форму реализации. Современные инструментальные средства позволяют конвертировать:

1. полутонаовое изображение в бинарное изображение;
2. цветное изображение в полутонаовое изображение (или наоборот);

Техническая реализация этих операций конвертирования позволяет расширить выше приведенный список. Например, в среде Matlab допустимы такие операции конвертирования [85-87]:

1. полутонаового изображения в палитровое изображение с палитрой и с отсечением без палитры;
2. полноцветного или палитрового изображений в бинарное изображение отсечением по порогу;
3. палитрового изображения в полутонаовое изображение;
4. палитрового изображения в полноцветное изображение;
5. полноцветного изображения в полутонаовое изображение.

Группу II образуют операции конвертирования 3 и 5. Остальные операции, являются, за исключением операции конвертирования 2, являются внутренними для этой группы. Конвертирование по второму пункту является комплексной процедурой, которая протекает в два этапа [85-87]: на первом этапе полноцветные или палитровые изображения конвертируются в полутонаовое, которое на втором этапе переводится в бинарное изображение. В этом списке отсутствует операция конвертирования полутонаового изображения в бинарное, которое является достаточно простой процедурой, образующей группу I [85-87]. Формализуем, выше перечисленные операции конвертирования

1. пороговое конвертирование полутонаового изображения в бинарное изображение с порогом  $\eta_0$ :

$$O_T^{gray \rightarrow bin}(I_{gray}, \eta_0) = O_T^{gray \rightarrow bin}(\|x_{ij}\|, \eta_0) = \|y_{ij}\| = I_{bin}, \quad (17)$$

где  $y_{ij} = \begin{cases} 0, & x_{ij} < \eta_0 \\ 1, & x_{ij} \geq \eta_0 \end{cases}$  - функция конвертирования полутонаового

изображения  $I_{gray} = \|x_{ij}\|$ . Таким образом,  $O_T^{gray \rightarrow bin}(I_{gray}, \eta_0) = I_{bin}$  или

$$O_T^{gray \rightarrow bin}(\cdot, \eta_0) : I_{gray} \rightarrow I_{bin} \quad [75-84].$$

2. конвертирование полноцветного изображения в полутонаовое изображение:

$$O_T^{color \rightarrow gray}(I_{color}, *) = O_T^{color \rightarrow gray}(\|\langle r, g, b \rangle_{ij}\|, *) = \|y_{ij}\| = I_{gray}, \quad (18)$$

где  $y_{ij} = \left\lfloor \frac{r+g+b}{3} \right\rfloor$  или  $y_{ij} = \left\lceil \frac{r+g+b}{3} \right\rceil$  - функция конвертирования цветного

изображения  $I_{color} = \left\| \langle r, g, b \rangle_{ij} \right\|$ . Таким образом,  $O_T^{color \rightarrow gray}(I_{color}, *) = I_{gray}$  или

$O_T^{color \rightarrow gray}(\cdot, *): I_{color} \rightarrow I_{gray}$ . По умолчанию операция конвертирования в Matlab

использует наименьшее целое число, большее, чем  $\frac{r+g+b}{3}$  в форме десятичной дроби, хотя первый вариант математической операции также можно использовать [85-87];

3. Рассмотрим формализацию комплексной операции конвертирования из полноцветного изображения в бинарное изображение с отсечением по порогу  $\eta_0$ . Согласно [85-87] она записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 O_T^{color \rightarrow bin}(I_{color}, \eta_0) &= O_T^{gray \rightarrow bin}(O_T^{color \rightarrow gray}(I_{color}, *), \eta_0) = \times \\
 &\times = O_T^{gray \rightarrow bin}(O_T^{color \rightarrow gray}(\left\| \langle r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \rangle \right\|, *), \eta_0) = \times \\
 &\times = \left| I_{gray} = \left\| y_{ij} \right\| = \left\| \left( \left\lfloor \frac{r_{ij} + g_{ij} + b_{ij}}{3} \right\rfloor \right) \right\|, y_{ij} = \left\lfloor \frac{r_{ij} + g_{ij} + b_{ij}}{3} \right\rfloor \right\| = \times \\
 &\quad \left| I_{gray} = \left\| y_{ij} \right\| = \left\| \left( \left\lceil \frac{r + g + b}{3} \right\rceil \right)_{ij} \right\|, I_{bin} = \left\| z_{ij} \right\|, \right. \\
 &\quad \left. \times = O_T^{gray \rightarrow bin}\left( \left\| \left( \left\lfloor \frac{r_{ij} + g_{ij} + b_{ij}}{3} \right\rfloor \right)_{ij} \right\|, \eta_0 \right) = \left| z_{ij} = \begin{cases} 0, & \left( \left\lfloor \frac{r + g + b}{3} \right\rfloor \right)_{ij} < \eta_0 \\ 1, & \left( \left\lfloor \frac{r + g + b}{3} \right\rfloor \right)_{ij} \geq \eta_0 \end{cases} \right| \right. = \times \right. , \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\times = I_{bin}$$

где  $I_{bin}$ ,  $I_{gray}$  и  $I_{color}$  - бинарное, полутонаовое и цветное изображение;

$\langle r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \rangle$  - пиксели цветного изображения  $I_{color}$ ;

$y_{ij}$  - пиксели полутонаового изображения  $I_{gray}$ ;

$z_{ij}$  - пиксели бинарного изображения  $I_{bin}$ ;

$\eta_0$  - порог конвертирования.

Таким образом,  $O_T^{color \rightarrow bin}(I_{color}, \eta_0) = I_{bin}$  или  $O_T^{color \rightarrow bin}(\cdot, \eta_0): I_{color} \rightarrow I_{bin}$ .

Такая формализация операции конвертирования обладает рядом преимуществ [75-84]:

1. ясна природа операции конвертирования;
2. конструктивность определения операции;
3. прозрачность в применении операции;
4. совместимость с другими видами операциями.

Перечисленные черты свойственны не только операции конвертирования, но и любой другой операции согласно описываемому концептуальному подходу. Аналогичным образом проведем формализацию других операций над изображениями, которые также относятся к процедурным преобразованиям.

В качестве второй группы рассмотрим методы улучшения изображений в виде операций улучшения зрительных характеристик и препарирования [80].

1. Линейное повышение контраста можно формально записать, как процедурное отображение  $I_{gray}$  в  $I_{gray}$ . Первый способ заключается в решении системы уравнений:

$$\begin{cases} y_{ij}^{\min} = ax_{ij}^{\min} + b \\ y_{ij}^{\max} = ax_{ij}^{\max} + b \end{cases}, \quad (20)$$

результаты которого используются процедурным преобразованием:

$$O_T^{lincont_1}(I_{gray1}; \bar{\eta}) = O_T^{lincont_1}(\|x_{ij}\|; (a, b)) = \|y_{ij}\| = x \\ x = \left| y_{ij} = ax_{ij} + b, a = \frac{y_{ij}^{\max} - y_{ij}^{\min}}{x_{ij}^{\max} - x_{ij}^{\min}}, b = \frac{y_{ij}^{\min} x_{ij}^{\max} - y_{ij}^{\max} x_{ij}^{\min}}{x_{ij}^{\max} - x_{ij}^{\min}} \right| = I_{gray2} \quad (21)$$

где  $I_{gray1} = \|x_{ij}\|$  - входное полутоновое изображение;

$I_{gray2} = \|y_{ij}\|$  - выходное полутоновое изображение;

$x_{ij}^{\max}, x_{ij}^{\min}$  - пиксели изображения  $I_{gray1}$  с максимальным и минимальным значениями яркостей;

$y_{ij}^{\max}, y_{ij}^{\min}$  - пиксели изображения  $I_{gray2}$  с максимальным и минимальным значениями яркостей;

$(a, b)$  - параметры метода линейного повышения контраста.

Второй способ [75-84] является вероятностным подходом к природе реализации изображения и заключается в приведении математического ожидания  $\mu_x$  и дисперсии  $\sigma_x^2$  к стандартным величинам  $\mu_y$  и  $\sigma_y^2$  соответственно. Они должны быть предварительно оценены.

$$\begin{aligned} O_T^{lincont_2}(I_{gray}; \bar{\eta}) &= O_T^{lincont_2}(\|x_{ij}\|; (a, b)) = \|y_{ij}\| = \times \\ &\times = \left| y_{ij} = ax_{ij} + b, a = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, b = \mu_y - \mu_x \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \right| = I_{gray} \end{aligned} \quad (22)$$

2. Другой, не менее используемой, процедурой повышения контраста является приведение плотности распределения вероятностей яркости к некоторому «стандартному» виду. Этот процесс является нелинейным поэлементным преобразованием и строится по экспериментально полученной гистограмме исходного распределения вероятностей яркости. Частным случаем преобразования гистограмм является эквализация (выравнивание) гистограммы [80].

Пусть дана реализация изображения  $I_{gray} = \|x_{ij}\|$ , каждый элемент которого может быть рассмотрен в виде случайной величины  $X$ , т.е.  $X = x_{ij}$ . Пусть случайная величина  $X$  характеризуется плотностью распределения  $p_X(X)$ . Ясно,

что  $P_X(X) = \int_{-\infty}^X p_X(\xi) d\xi$ . Тогда  $P(X < X_0) = P_X(X_0)$  и  $P_X(X) = P_Y[Y(X)]$ . Допустим,

что требуется получить такое изображение, у которого все значения яркости в пределах заданного диапазона  $[Y_{min}; Y_{max}]$  равновероятны [75-84]:

$$p_Y(Y) = \frac{1}{Y_{max} - Y_{min}}, \quad (23)$$

где  $Y_{max} \leq Y \leq Y_{min}$ .

Тогда, интегральная функция распределения случайной величины  $Y$  будет являться линейной [75-84]:

$$P_Y(Y) = \frac{Y - Y_{min}}{Y_{max} - Y_{min}} \Leftrightarrow P_X(X) = \frac{Y(X) - Y_{min}}{Y_{max} - Y_{min}} \Leftrightarrow Y(X) = (Y_{max} - Y_{min})P_X(X) + Y_{min}, \quad (24)$$

где  $p_X(X)$  - плотность распределения случайной величины  $X$ ;

$p_Y(Y)$  - плотность распределения случайной величины  $Y$ ;

$P_X(X)$  - функция распределения случайной величины  $X$ ;

$P_Y(Y)$  - функция распределения случайной величины  $Y$ ;

$Y(X)$  - предполагаемая зависимость случайных величин;

$$Y_{\max} \leq Y \leq Y_{\min}.$$

Таким образом, можно сформулировать следующее процедурное преобразование улучшения зрительных характеристик «выравнивание гистограммы» [75-84]:

$$\begin{aligned} O_T^{\text{transhist}}(I_{\text{gray1}}; \bar{\eta}) &= O_T^{\text{transhist}}(\|x_{ij}\|; \bar{\eta}) = \times \\ \times &= \left| y_{ij}(x_{ij}) = (y_{ij}^{\max} - y_{ij}^{\min})P_{x_{ij}}(x_{ij}; \bar{\eta}) + y_{ij}^{\min}, P_{x_{ij}}(x_{ij}; \bar{\eta}) = \int_{-\infty}^{x_{ij}} p_{x_{ij}}(\xi; \bar{\eta}) d\xi \right| = \|y_{ij}\| = I_{\text{gray2}}, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $I_{\text{gray1}}$ ,  $I_{\text{gray2}}$  - входное и выходное изображения;

$\bar{\eta}$  - параметр функции выравнивания гистограммы  $O_T^{\text{transhist}}$ ;

$P_{x_{ij}}(x_{ij}; \bar{\eta})$  - функция распределения случайной величины  $x_{ij}$ ;

$$y_{ij}^{\min} \leq y_{ij} \leq y_{ij}^{\max}.$$

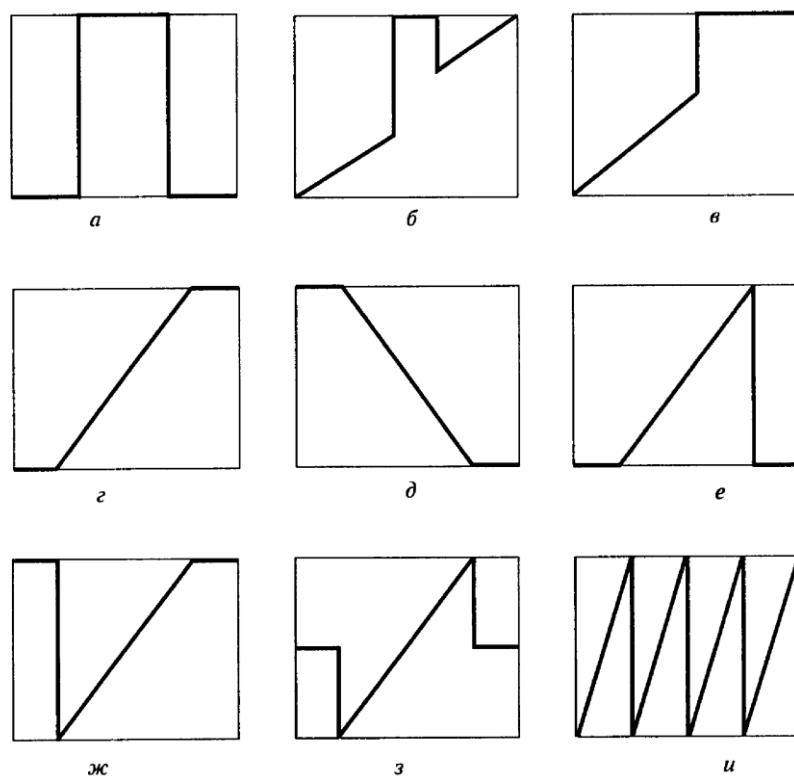


Рисунок 2.5 - Виды препарирования изображений [80].

Препарирование – есть обработка изображения с целью выделения (подчеркивания) на нем некоторых существенных деталей или особенностей и, соответственно, подавление несущественных [80].

Таблица 2.2

## Операции препарирования

Название и условное обозначение	Изображение	Формальное представление
Яркостной срез (lumincut)	Рисунок 2.5а	$y_{ij} = \begin{cases} 0, & x_{ij} < a \\ 255, & a \leq x_{ij} \leq b \\ 0, & x_{ij} > b \end{cases}$ (27)
Яркостный срез с сохранением фона (lumcutgrnd)	Рисунок 2.5б	$y_{ij} = \begin{cases} 255 \frac{x-a}{d-a}, & a \leq x_{ij} < b \\ 255, & b \leq x_{ij} \leq c \\ 255 \frac{x-a}{d-a}, & c < x_{ij} \leq d \end{cases}$ (28)
Неполная пороговая обработка (infullthresh)	Рисунок 2.5в	$y_{ij} = \begin{cases} 255 \frac{x_{ij}-a}{c-a}, & a \leq x_{ij} < b \\ 255, & b \leq x_{ij} \leq c \end{cases}$ (29)
Контрастное масштабированье (contrscale)	Рисунок 2.5г	$y_{ij} = \begin{cases} 0, & x_{ij} < a \\ 255 \frac{x_{ij}-a}{b-a}, & a \leq x_{ij} \leq b \\ 255, & x_{ij} > b \end{cases}$ (30)
Негативное контрастирование (negcontr)	Рисунок 2.5д	$y_{ij} = \begin{cases} 255, & x_{ij} < a \\ 255 \frac{b-x_{ij}}{b-a}, & a \leq x_{ij} \leq b \\ 0, & x_{ij} > b \end{cases}$ (31)
Подавление черным фоном (suprblack)	Рисунок 2.5е	$y_{ij} = \begin{cases} 0, & x_{ij} < a \\ 255 \frac{x_{ij}-a}{b-a}, & a \leq x_{ij} \leq b \\ 0, & x_{ij} > b \end{cases}$ (32)
Подавление белым фоном (suprwhite)	Рисунок 2.5ж	$y_{ij} = \begin{cases} 255, & x_{ij} < a \\ 255 \frac{x_{ij}-a}{b-a}, & a \leq x_{ij} \leq b \\ 255, & x_{ij} > b \end{cases}$ (33)

Продолжение таблицы 2.2

Операции препарирования

Название и условное обозначение	Изображение	Формальное представление
Подавление серым фоном (supprgray)	Рисунок 2.5з	$y_{ij} = \begin{cases} 127, & x_{ij} < a \\ 255 \frac{x_{ij} - a}{b - a}, & a \leq x_{ij} \leq b \\ 127, & x_{ij} > b \end{cases} \quad (34)$
Пилообразное контрастное масштабирование (sawsuppr)	Рисунок 2.5и	$y_{ij} = \begin{cases} 255 \frac{x_{ij} - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x_{ij} \leq a_2 \\ 255 \frac{x_{ij} - a_2}{a_3 - a_2}, & a_2 < x_{ij} \leq a_3 \\ \dots & \dots \\ 255 \frac{x_{ij} - a_{n-1}}{a_n - a_{n-1}}, & a_{n-1} < x_{ij} \leq a_n \end{cases} \quad (35)$

где  $I_{gray}^1 = \|x_{ij}\|$ ,  $I_{gray}^2 = \|y_{ij}\|$  - входное и выходное изображения;

$a, b, c, d, a_1, \dots, a_n$  - параметры методов препарирования  $O_T^{dissect}$ .

Ясно, что препарирование, с этой точки зрения, аналогично методу познания «абстрагирование» в смысле природы обрабатываемых данных. На рисунке 2.5 приведены графики различных видов препарирования, которые рассматриваются в виде процедурных преобразований. Пусть рассматриваемые процедурные преобразования являются отображениями  $I_{gray}^1 = \|x_{ij}\|$  в  $I_{gray}^2 = \|y_{ij}\|$ .

Рассмотрим формальные представления методов препарирования, направленных на преобразование яркостной характеристики исходных данных в терминах процедурных преобразований. Ясно, что все эти процедурные преобразования описывают отображение:

$$I_{gray}^2 = O_T^{dissect}(I_{gray}^1, (a, b)) \Leftrightarrow \|y_{ij}\| = O_T^{dissect}(\|x_{ij}\|, (a, b)), \quad (26)$$

где  $I_{gray}^1 = \|x_{ij}\|$ ,  $I_{gray}^2 = \|y_{ij}\|$  - входное и выходное изображения;

$(a, b)$  - параметры метода препарирования  $O_T^{dissect}$ .

В таблице 2. приведены формальные представления операций препарирования из рисунка 2.5 [80].

Такая форма записи позволяет записывать в унифицированной форме, применяемые в настоящее время методы препарирования изображений (таблица 2.2). Это не только связано с удобствами их записи, а является важным шагом по их интегрированию в методологию ДПАИ.

Пусть задана полутоновая реализация  $I_{gray}$  размера  $M \times N$ . Рассмотрим линейные и нелинейные пространственные фильтры [75-84] и маску размера  $m \times n$ , где  $m = 2 * a + 1, n = 2 * b + 1$  и  $a$  и  $b$  – суть неотрицательные целые числа. Отклик в точке  $(i; j)$  для реализации  $I_{gray}$  обозначим  $g(i, j)$ . В таком случае он будет определен как:

$$g(i, j) = \sum_{k=-a}^a \sum_{l=-b}^b w_{k,l} * x_{i+k, j+l}, \quad (i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1}), \quad (36)$$

где  $w_{k,l}$  - маска размера  $m \times n$ ,  $a = \frac{m-1}{2}, b = \frac{n-1}{2}$ . Ниже на рисунке 2.6 изображены фрагменты реализации  $I_{gray}$  для маски  $3 \times 3$ .

Таким образом, изменяя параметры  $m$  и  $n$  можно варьировать размер маски. Этот подход используется в сглаживающих пространственных фильтрах и пространственных фильтрах для повышения резкости [75-84].

$$\begin{bmatrix} x_{k-1,l-1} & x_{k-1,l} & x_{k-1,l+1} \\ x_{k,l-1} & x_{kl} & x_{k,l+1} \\ x_{k+1,l-1} & x_{k+1,l} & x_{k+1,l+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{-1,-1} & w_{-1,0} & w_{-1,1} \\ w_{0,-1} & w_{0,0} & w_{0,1} \\ w_{1,-1} & w_{1,0} & w_{1,1} \end{bmatrix}$$

Рисунок 2.6 – Фрагмент изображения (слева) и накладываемая маска (справа).

Ясно, что отклик  $g(i, j)$  используется для вычисления яркости в точке с координатами  $(i; j)$ . Если же отклик за область определений полутоновой реализации, то применяется техническая операция отсечения [75-84]. В таком случае уместно будет сказать, что отклик вычисляется с точностью до остатка, т.е.

$$g(i, j) = g(i, j) \bmod 256$$

Формализуем  $O_T^{filter}(I_{gray}, (n, m))$  для разных видов линейных и нелинейных фильтров [75-84]:

$$O_T^{filter}(I_{gray}, (n, m)) = O_T^{filter}(\|a_{ij}\|, (n, m)) = \|b_{ij}\|, \text{ где}$$

1. для общего случая фильтрации

$$b_{ij} = \left( \sum_{k=-a}^a \sum_{l=-b}^b w_{k,l} * a_{i+k, j+l} \right) \bmod 256 \quad (37)$$

2. для однородного усредняющего фильтра

$$b_{ij} = \left( \frac{\sum_{k=-a}^a \sum_{l=-b}^b w_{k,l}}{m * n} \right) \bmod 256 \quad (38)$$

3. для сглаживающего фильтра с взвешенным средним

$$b_{ij} = \left( \frac{\sum_{k=-a}^a \sum_{l=-b}^b w_{k,l} * a_{i+k, j+l}}{\sum_{k=-a}^a \sum_{l=-b}^b w_{k,l}} \right) \bmod 256 \quad (39)$$

4. для фильтров, основанных на порядковых статистиках (медианный)

$$b_{ij} = Sort(\{a_{i-\left[\frac{m}{2}\right], j-\left[\frac{n}{2}\right]}, \dots, a_{i+\left[\frac{m}{2}\right], j+\left[\frac{n}{2}\right]}\}), \quad (40)$$

где  $Sort$  - алгоритм сортировки по неубыванию

$$\text{где } a = \frac{m-1}{2}, b = \frac{n-1}{2}$$

Последнее означает, что  $O_T^{filter}(I_{gray}, (n, m)) = I_{gray}$ . Тогда формализованная запись  $O_T^{filter}(\cdot, (n, m)) : I_{gray} \rightarrow I_{gray}$  является общей математической моделью линейных и нелинейных пространственных фильтров.

Следующей разновидностью процедурных преобразований являются методы математической морфологии [75-84]. Математической основой для морфологических операций является теоретико-множественный подход. Для ясного понимания дальнейших действий определим основные и дополнительные теоретико-множественные операции (таблица 2.3) [75-86].

Таблица 2.3

## Теоретико-множественные операции в области обработки изображений

Название	Обозначение	Определение
Объединение множеств А и В	$A \cup B$	$A \cup B = \{x   (x \in A) \vee (x \in B)\}$
Пересечение множеств А и В	$A \cap B$	$A \cap B = \{x   (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
Разностью множеств А и В	$A \setminus B$	$A \setminus B = \{x   (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
Дополнением к множеству А	$\bar{A}$	$\bar{A} = \{x   (x \notin A) \wedge (x \in U)\}$ , где $U$ - универсальное множество (универсум)
Центральное отражение множества А	$A$	$A = \{x   (x = -y) \wedge (y \in A)\}$
Параллельный перенос (сдвиг) множества А	$(A)_z$	$(A)_z = \{x   (x = y + z) \wedge (y \in A)\}$

Кроме того, под элементами используемых множеств будем подразумевать пиксели, составляющих изображение, моделями которых будут реализации. Таким образом, элемент множества будет представлять пару координат пикселя изображения.

К стандартным морфологическим операциям относятся: дилатация, эрозия, размыкание, замыкание, преобразование «успех-неудача» и т.д. Как и в случае теории множеств одни морфологические операции легко определяются через базовые. К базовым операциям можно отнести дилатацию и эрозию [75, 78, 83, 85, 86].

Дилатацией множества А по множеству В называется множество  $A \oplus B$ , которое формально можно описать как

$$A \oplus B = \{x | (B)_x \cap A \neq \emptyset\} \quad (41)$$

В основе этого соотношения лежит получение центрального отражения множества В (центр В) относительно его начала координат и затем сдвиг полученного множества в точку х. При этом дилатация множества А по В – это множество всех таких смещений х, при которых множества В и А совпадают, по

меньшей мере, в одном элементе. Дилатацию можно определить так [75, 78, 83, 85, 86]

$$A \oplus B = \{x | [(B)_x \cap A] \subseteq A\} \quad (42)$$

При этом множество  $B$  называют структурообразующим множеством или примитивом дилатации в соответствии с рисунком 2.7.

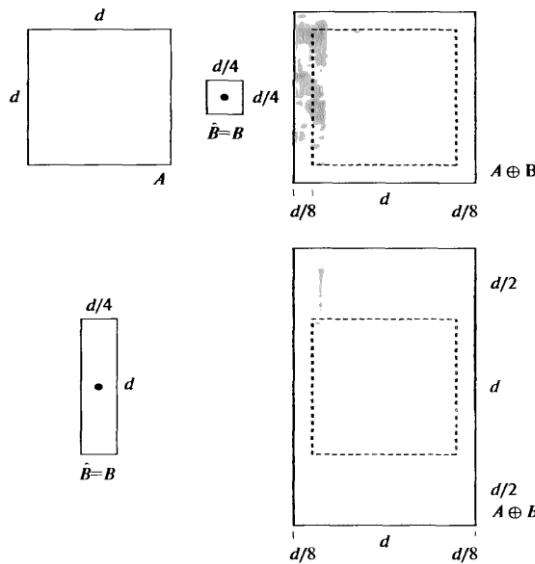


Рисунок 2.7 - Геометрическая интерпретация дилатации [75, 78, 83, 85, 86].

Операцию дилатации можно использовать для устранения разрывов в бинарных изображениях, размер которых, как показывает практика, может достигать двух пикселей. Такое действие устранения разрывов называется перекрытием разрывов и проводится по примитиву [75, 78, 83, 85, 86]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

На основании выше сказанного можно сказать, что дилатация, как операций процедурного преобразования в МДАИ может фигурировать [122-139].

*Определение 9* [75, 78, 83, 85, 86]: Процедурным преобразованием дилатации называется

$$O_T^{dl}(I_{bin}; \|\mu\|) = I_{bin} \oplus \|\mu\|, \quad (43)$$

где  $A = I_{bin}$ ,  $B = \|\mu\|$

Эрозией множеств А и В называется множество  $A \ominus B = \{x | (B)_x \subseteq A\}$ .

Эрозия множества А по множеству В – это множество всех таких точек x, при сдвиге в которые множество В целиком содержится в А. Геометрическая интерпретация эрозии приведена ниже на рисунке 2.8 [75, 78, 83, 85, 86].

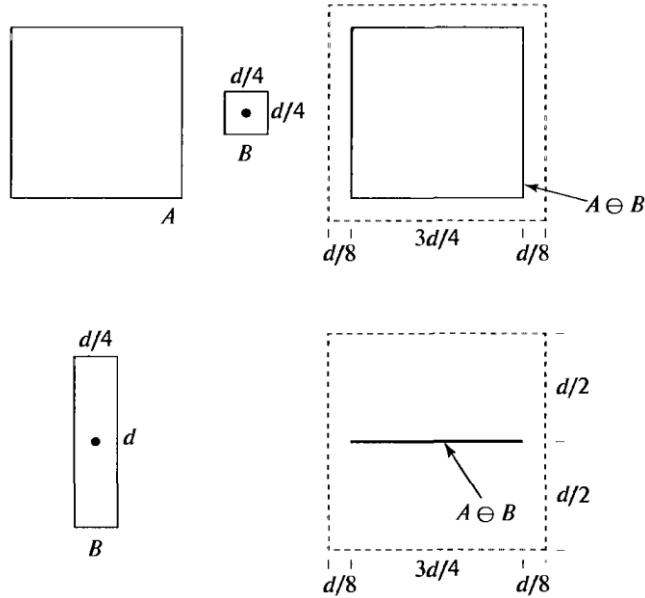


Рисунок 2.8 - Геометрическая интерпретация эрозии [75, 78, 83, 85, 86].

Эта операция также может быть формально определена в МДАИ [122-139].

*Определение 10* [75, 78, 83, 85, 86]: Процедурным преобразованием эрозии называется  $O_T^{er}(I_{bin}; \|\mu\|) = I_{bin} \ominus \|\mu\|$ , (44)

где  $A = I_{bin}$ ,  $B = \|\mu\|$ .

Ясно, что,

$$O_T^{dl}(\cdot; \|\mu\|) : I_{bin} \rightarrow I_{bin}$$

$$O_T^{er}(\cdot; \|\mu\|) : I_{bin} \rightarrow I_{bin}$$

*Теорема (о связи дилатации и эрозии в МДАИ)* [75, 78, 83, 85, 86]:

$$\overline{O_T^{er}(I_{bin}; \|\mu\|)} = O_T^{dl}(\square I_{bin}; \|\mu\|), \quad (45)$$

*Замечание:* Параметр  $\|\mu\|$  означает применение к матрице  $\|\mu\|$  теоретико-множественной операции «центральное отражение» [75, 78, 83, 85, 86]. Такое возможно, в силу того, что матрица является математическим объектом,

систематизированным в виде таблицы. Операция дополнения к матрице  $\square I_{bin}$  вычисляется через инвертирование матрицы  $I_{bin}$ .

*Замечание:* Как ранее отмечалось, параметр процедурного преобразования может быть скалярным или векторным [122-139]. Сейчас предстоит обобщить его до матричного случая. Такой шаг не является противоречащим предыдущим предположениям, ибо и скалярная величина, и вектор являются частными случаями матрицы. Поэтому, будет верным сказать, что параметром процедурного преобразования может быть двумерная матрица.

Более сложными, по сравнению с операциями дилатации и эрозии, являются морфологические операции замыкания и размыкания [75, 78, 83, 85, 86]. В общем случае размыкание сглаживает контуры объекта, обрывает узкие перешейки и ликвидирует выступы небольшой ширины. Замыкание также проявляет тенденцию к сглаживанию участков контуров, но, в отличие от размыкания, в общем случае «заливает» узкие разрывы и длинные углубления малой ширины, а также ликвидирует небольшие отверстия и заполняет промежутки контура.

Размыканием множества А по множеству (примитив) В называется множество  $A \circ B$ , определяемый равенством  $A \circ B = (A \square B) \oplus B$  [75, 78, 83, 85, 86]. Размыкание множества А по множеству или примитиву В строится как эрозия А по В, результат которой затем подвергается дилатации по тому же примитиву В.

*Определение 11* [75, 78, 83, 85, 86]: Процедурным преобразованием размыкания называется

$$O_T^\circ(I_{bin}; \|\mu\|) = O_T^{dl}(O_T^{er}(I_{bin}; \|\mu\|); \|\mu\|), \quad (46)$$

Процедурному преобразованию размыкания свойственно [75, 78, 83, 85, 86]:

$$1. \quad O_T^\circ(I_{bin}; \|\mu\|) \subset I_{bin} \quad (47)$$

$$2. \quad (I_{bin}' \subset I_{bin}'') \Rightarrow (O_T^\circ(I_{bin}'; \|\mu\|) \subset O_T^\circ(I_{bin}''; \|\mu\|)) \quad (48)$$

$$3. \quad O_T^\circ(O_T^\circ(I_{bin}; \|\mu\|); \|\mu\|) = O_T^\circ(I_{bin}; \|\mu\|) \quad (49)$$

Замыканием множества А по множеству (примитив) В называется множество  $A \bullet B$ , определяемый равенством  $A \bullet B = (A \oplus B) \square B$  [75, 78, 83, 85, 86]. Замыкание множества А по множеству или примитиву В строится как дилатация А по В, результат которой затем подвергается эрозии по тому же примитиву В.

*Определение 12* [75, 78, 83, 85, 86]: Процедурным преобразованием замыкания называется

$$O_T^\bullet(I_{bin};\|\mu\|) = O_T^{er}(O_T^{dl}(I_{bin};\|\mu\|);\|\mu\|), \quad (50)$$

Процедурному преобразованию замыкания свойственно [75, 78, 83, 85, 86]:

$$1. I_{bin} \subset O_T^\bullet(I_{bin};\|\mu\|) \quad (51)$$

$$2. (I'_{bin} \subset I''_{bin}) \Rightarrow (O_T^\bullet(I'_{bin};\|\mu\|) \subset O_T^\bullet(I''_{bin};\|\mu\|)) \quad (52)$$

$$3. O_T^\bullet(O_T^\bullet(I_{bin};\|\mu\|);\|\mu\|) = O_T^\bullet(I_{bin};\|\mu\|) \quad (53)$$

*Замечание:* Операции размыкания и замыкания являются двойственными операциями по отношению к теоретико-множественным операциям дополнения и центрального отражения.

*Теорема* [75, 78, 83, 85, 86]:  $\overline{O_T^\bullet(I_{bin};\|\mu\|)} = O_T^\circ(\square I_{bin};\|\mu\|), \quad (54)$

Как видно из описанных теоретических положений, теоретико-множественные операции, на базе которых создаются базовые морфологические операции, центральное отражение и сдвиг закладывают основу математической морфологии. Базовыми морфологическими операциями считаются дилатация и эрозия. К числу более крупных морфологических операций относят замыкание и размыкание, которые уже легко определяются через дилатацию и эрозию [74-86].

Ясно, что в качестве процедурных преобразований можно выбрать как теоретико-множественные операции центрального отражения и сдвига, так и базовые или составные морфологические операции [122-139]. Подчеркнем, что цель заключается в определении базовых процедурных преобразований и операций над ними. Однако, как требует того определение процедурного

преобразования из этого списка нужно будет исключить центральное отражение и сдвиг, в силу того, что аргументами этих операций являются не изображения, а их содержимое. Подобное исключение позволяет проголосовать в пользу базовых морфологических операций. Это означает, что роль основных процедурных преобразований могут играть базовые морфологические операции дилатации и эрозии. Так как согласно их определению, множество  $A$  может быть как содержимым некоторого бинарного изображения, так и представлять полностью само изображение, а множества  $B$  используется как некоторая маска для проведения этих операций, то в таком случае эти процедурные преобразования можно определить так.

Вернемся к базовым морфологическим операциям дилатации и эрозии. Изначально маски для них были определены в матричной форме. Исследуем вопрос о сложности маски. Предположим, что маску можно представить через базовые матрицы и некоторую операцию  $F \in \{+, *, or, and, xor, \dots\}$ .

*Утверждение (об эквивалентности логических и алгебраических операций):* Для процедурных преобразований бинарных реализаций на базе морфологических операций дилатации и эрозии выполняются следующие равенства:

$$O_T^{morph}(I_{bin}; (\|\mu_1\| or \|\mu_2\|)) = O_T^{morph}(I_{bin}; (\|\mu_1\| + \|\mu_2\|)) \quad (55)$$

$$O_T^{morph}(I_{bin}; (\|\mu_1\| and \|\mu_2\|)) = O_T^{morph}(I_{bin}; (\|\mu_1\| * \|\mu_2\|)), \quad (56)$$

где  $morph \in \{dl, er\}$ .

*Доказательство:* Эти равенства будут выполнены, если маски левых и правых частей равенства будут совпадать, т.е.

1.  $\|\mu_1\| or \|\mu_2\| = \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$
2.  $\|\mu_1\| and \|\mu_2\| = \|\mu_1\| * \|\mu_2\|$ , для любых  $i$  и  $j$

Итак, рассмотрим первое равенство. Для левой части этого равенства верно

$$\|\mu_1\| or \|\mu_2\| = \|\mu_1(i, j) \text{ or } \mu_2(i, j)\| = \|\mu^{or}\|,$$

где  $\mu^{or}(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & (\mu_1(i, j) = 0) \vee (\mu_2(i, j) = 0) \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases}$  (1)

Для правой части этого равенства верно

$$\|\mu_1\| + \|\mu_2\| = \|\mu_1(i, j) + \mu_2(i, j)\| = \|\mu^+\|,$$

где  $\mu^+(i, j) = \begin{cases} 0, & (\mu_1(i, j) = 0) \wedge (\mu_2(i, j) = 0) \\ \mu^*(i, j) \neq 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$  (2)

При определении операций, как в (1) и (2) верно неравенство  $\mu^{or}(i, j) \leq \mu^+(i, j)$ .

Это означает, что, если определить (2) как

$$\mu^+(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & (\mu_1(i, j) = 0) \wedge (\mu_2(i, j) = 0) \\ 1, & (\mu_1(i, j) > 0) \vee (\mu_2(i, j) > 0) \end{cases} \quad (3),$$

то будет выполняться равенство  $\mu^{or}(i, j) = \mu^+(i, j)$  для любых  $i$  и  $j$ .

Аналогично можно доказать второе равенство:  $\|\mu_1\| and \|\mu_2\| = \|\mu_1\|^* \|\mu_2\|$

Пусть

$$\mu^{and}(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & (\mu_1(i, j) = 0) \vee (\mu_2(i, j) = 0) \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (4)$$

и

$$\mu^*(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \sum_k \mu_1(i, k)^* \mu_2(k, j) = 0 \\ 1, & \sum_k \mu_1(i, k)^* \mu_2(k, j) > 0 \end{cases} \quad (5)$$

Равенство  $\mu^{and}(i, j) = \mu^*(i, j)$  нужно рассматривать для двух случаев, в силу сложности самих операций. Пусть, для первого случая  $\sum_k \mu_1(i, k)^* \mu_2(k, j) = 0$ ,

Тогда

$$\begin{aligned} \mu^*(i, j) &= \sum_k \mu_1(i, k)^* \mu_2(k, j) = \sum_{\substack{k=1, \\ i \neq j}}^n \mu_1(i, k)^* \mu_2(k, j) + \mu_1(i, j)^* \mu_2(i, j) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1(i, j)^* \mu_2(i, j) = 0 \\ \sum_{\substack{k=1, \\ i \neq j}}^n \mu_1(i, k)^* \mu_2(k, j) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu^{and}(i, j) = 0 \\ \sum_{\substack{k=1, \\ i \neq j}}^n \mu_1(i, k)^* \mu_2(k, j) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, так как  $\sum_k \mu_1(i, k)^* \mu_2(k, j) = 0$ , то  $\mu^{and}(i, j) = 0$  и  $\mu^*(i, j) = 0$ .

Если же  $\sum_k \mu_1(i, k) * \mu_2(k, j) > 0$ , то согласно (5)  $\mu^*(i, j) = 1$  и

$$\begin{aligned} \mu^*(i, j) &= \sum_k \mu_1(i, k) * \mu_2(k, j) = \sum_{\substack{k=1, \\ i \neq j}}^n \mu_1(i, k) * \mu_2(k, j) + \mu_1(i, j) * \mu_2(i, j) > 0 = \times \\ &\times = \sum_{\substack{k=1, \\ i \neq j}}^n \mu_1(i, k) * \mu_2(k, j) + \mu^{and}(i, j) > 0 \left( \begin{array}{l} I_{bin} = \|x_{ij}\|, x_{ij} \in \{0, 1\} \\ \sum_{\substack{k=1, \\ i \neq j}}^n \mu_1(i, k) * \mu_2(k, j) \geq 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \mu^{and}(i, j) > 0 \end{aligned}$$

$\mu^{and}(i, j) = 1$ , в силу того, что  $\max \mu^{and} = 1$ .

■

Однако вопрос о сведении вычислений со сложной маской для базовых операций дилатации и эрозии остается открытым, не говоря для более сложных морфологических операций, например, для замыкания и размыкания. Но, уже имея полученные результаты можно определить Т-представления [122-139], которые используют морфологические операции в роли процедурных преобразований. Стоит сразу заметить, что разложение сложной маски на простые с прикладной точки зрения особой ценности не имеет, но может быть использовано в других теоретических выкладках. Общая форма записи всех процедурных преобразований на базе морфологических операций имеет вид:

$$O_T^{morph}(\cdot, \bar{\eta}): I_{bin} \rightarrow I_{bin}$$

Процедурные преобразования хотя и занимают преобладающую часть методов обработки и анализа изображений, но не менее важными являются преобразования, позволяющие для изображений вычислять значения выбранных для них характеристик – параметрические преобразования [122-139].

## 2.2.2 Методы анализа изображений в теории модифицированных дескриптивных алгебр изображений

Параметрические преобразования, в отличие от процедурных преобразований, позволяют для заданного изображения вычислить значение

заранее выделенного параметра, характеризующего содержимое исходного изображения [122-139]. По-другому, параметрические преобразования являются вычислительными алгоритмами или формулами, которые позволяют для заданного изображения определять характеристики его фрагментов в виде числа, числовой последовательности (вектора), матрицы, функции или аналитической зависимости и т.п. [122-139].

Введем обозначения для параметрических представлений, как в случае с процедурными преобразованиями. По определению параметрические преобразования направлены на вычисление и определение значений признаков на изображениях или в их фрагментах, которые могут иметь содержательную интерпретацию [122-139]. Опираясь на работу [94, 95], в качестве принципа классификации выберем «природу» признаков или их «модальность». Это обуславливает разделение множества всех возможных признаков на: детерминированные, вероятностные, логические и структурные. Для каждого из этих случаев используется уникальные обозначения, которые приведены в таблице 2.4. Аналогично процедурным преобразованиям, параметрические используют в качестве значений входных аргументов реализации изображений [122-139]. В дальнейшем будут использованы бинарные или полутоновые реализации изображений [75-87, 91-98].

Таблица 2.4

#### Параметрические преобразования

Название параметрического преобразования	Обозначение
Вычисление детерминированного признака	$p = O_p^{\text{det} \text{erm}}(\cdot; \bar{\eta})$ , (57) где $p$ - числовая величина $\bar{\eta}$ - входной параметр
Вычисление вероятностного признака	$p = O_p^{\text{prob} \text{al}}(\cdot; \bar{\eta})$ , (58) где $p \in \{m_i, u_j, g_k, \varepsilon, \dots\}$ $\bar{\eta}$ - входной параметр
Вычисление логического признака	не определено
Вычисление структурного признака	$p_k = O_p^{\text{struct}}(\cdot; \bar{\eta})$ , (59) где $k \in \{\text{border}, \text{area}\}$ $\bar{\eta}$ - входной параметр

Отличие параметрических преобразований от процедурных состоит в том, что они отображают реализации изображений в признаки [122-139]. Следовательно, параметрические представления не являются замкнутыми отображениями на множестве реализаций изображений.

*Определение 13:* Параметрическим преобразованием реализации изображения  $I_f$  с параметром  $\nu$  называется отображение

$$O_P^{parameter}(\cdot; \bar{\eta}): I_f \rightarrow \nu, \quad (60)$$

где  $parameter \in M_p = \{determin, probabil, struct\}$  и  $f \in \{bin, gray, color\}$  (\*)

Элементы множества  $M_p$  являются обозначениями признаков соответственно: детерминированных, вероятностных, и структурных. Описанная классификация не отражает сути методов вычисления признаков вообще. Поэтому приведем дополнительные классификации, позволяющие рассмотреть разнообразие методов их вычисления с разных ракурсов:

1. по форме существования выделяются [94, 95]:

- количественные;
- качественные.

Классификация по данному принципу позволяет провести границу между числовыми и другого вида значений признаками (символьные, строчные и т.п.). Хотя необходимо подчеркнуть, что числовые значения обладают естественным порядком и некоторой «плотностью» взаимного расположения. Эти же характеристики можно ввести и в множество значений, созданное искусственным образом. Последние обычно называют качественными значениями.

2. по типу значений выделяются:

- целые;
- рациональные;
- действительные;
- комплексные;
- символные;

- сложные символические (строчные или последовательности символов).

Такая классификация основана на стандартной математической типизации чисел и также является важной в данной области.

3. по виду области определения выделяются [76, 77]:

- дискретные;
- непрерывные.

Деление на дискретные и непрерывные классы обуславливает выбор методов, используемых уже на стадии вычисления значений признаков, не говоря о других этапах разработок.

4. по сложности выделяются [16, 18, 19, 76, 77, 94, 95]:

- скалярные;
- векторные;
- матричные;
- тензорные.

Данная классификация считается самой интересной. Она же накладывает свой отпечаток не только на сложность данных, но и на разработку систем обработки. В данной классификации каждый следующий элемент является частным случаем предыдущего элемента в списке.

5. по модальности выделяются [10, 68, 69]:

- физические;
- геометрические;
- функциональные.
- топологические

Деление детерминированных признаков на классы по их модальности является наиболее важной. Такая классификация обусловлена четким делением разнообразия методов и устройств измерения значений признаков по ряду аспектов, описываемых предыдущими классификациями. Одни измерители позволяют работать в широком диапазоне значений, а другие – принимать значения только определенного вида. Используя некоторый метод можно оценить, достаточно простой структуры, признак, а другие – позволяют измерять

более сложные признаки. Некоторые методы и алгоритмы возвращают одного типа результаты, а другие – позволяют оценивать их в комплексе. И наконец, одни признаки имеют количественные значения, а для использования других достаточно измерить на качественном уровне. Множество детерминированных признаков является очень широким, а множество методов их измерения – не менее разнообразным [94, 95]. В дальнейшем методы измерения детерминированных признаков не рассматриваются и не подлежат формализации, в силу однотипности в структуре методов их вычисления. Для общности и целостности представления результатов данной работы используем символическое обозначение  $O_P^{\text{determ}}(\cdot; \eta)$  или  $O_P^{\text{determ}}(\cdot; \bar{\eta})$  для методов и алгоритмов измерения детерминированных признаков.

Детерминированные признаки представляют собой частный случай вероятностных признаков [76, 77, 94, 95]. Так как некоторая величина считается вероятностной, если она может принимать не одно значение, а целое множество, то в таком аспекте детерминированный признак является вероятностной величиной, только с одним единственным значением. В теории распознавания образов [94, 95] изначально предполагается совместное задание вероятностного признака с функцией распределения или плотностью распределения вероятностей ее значений. Под измерением вероятностного признака будем подразумевать процесс определения всех возможных значений с вероятностями их принятия. Однако в области компьютерного зрения [75-87] используются не только такие величины. К числу вероятностных признаков также относят параметры, характеризующие изображение или его фрагменты. Конечно же, они не являются «истинными» вероятностными величинами, но в силу введения понятия «двумерное случайное поле» их значения становятся случайными. Ниже представлены наиболее часто используемые величины такого вида, которые получили название «статистические величины» [75-87, 88-90].

К статистическим величинам относят характеристики, которые описывают изображение как некоторое двумерное случайное поле, свойства которого априори неизвестны [88-90]. Такого рода величины в теории распознавания

образов получили название «вероятностные признаки» [94-95]. Целью статистического анализа изображений является измерение (получение) оценок указанных характеристик. К их числу относят: начальный и центральный моменты (математическое ожидание (среднее), среднеквадратичное отклонение, коэффициенты асимметрии и эксцесса), энтропия, значения минимального и максимального элементов анализируемого поля и размах (диапазон уровней) [88-90].

Рассмотрим реализации изображения  $I$ . Большинство вероятностных методов представляют собой системы принятия решений, поэтому в класс вероятностных признаков вошли статистические признаки для реализации изображения  $I_f = \|x_{ij}^f\|$ , где  $f = bin$ . С учетом этих определений формализация вероятностных характеристик будет иметь вид [88-90]:

- начальные моменты  $k$ -го порядка -  $O_P^{probal}(I_f; m_k) = \frac{1}{n * m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{ij}^f)^k$ ,

Согласно этой формулировке получаем ее частные случаи:

1. начальный момент 1-го порядка или математическое ожидание (среднее)

$$m_1 = O_P^{probal}(I_f; \{(n, m), 1\}) = \frac{1}{n * m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} \quad (61)$$

2. начальный момент 2-го порядка или средний квадрат

$$m_2 = O_P^{probal}(I_f; \{(n, m), 2\}) = \frac{1}{n * m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{ij})^2 \quad (62)$$

3. начальный момент 3-го порядка

$$m_3 = O_P^{probal}(I_f; \{(n, m), 3\}) = \frac{1}{n * m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{ij})^3 \quad (63)$$

4. начальный момент 4-го порядка

$$m_4 = O_P^{probal}(I_f; \{(n, m), 4\}) = \frac{1}{n * m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{ij})^4 \quad (64)$$

- центральные моменты  $u_k = O_P^{probal}(I_f; (m_1, m_2, \dots, m_k))$

1. центральный момент 2-го порядка или дисперсия. Отсюда можно вычислить среднеквадратическое отклонение  $\sigma = \sqrt{u_2}$ ;

$$u_2 = m_2 - m_1^2 \quad (65)$$

2. центральный момент 3-го порядка

$$u_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^2 \quad (66)$$

3. центральный момент 4-го порядка

$$u_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4 \quad (67)$$

- коэффициент асимметрии  $g_1 = O_p^{probal}(I_f; (u_3, \sigma)) = \frac{u_3}{\sigma^3}$  (68)

- коэффициент эксцесса  $g_2 = O_p^{probal}(I_f; (u_4, \sigma)) = \frac{u_4}{\sigma^4} - 3$  (69)

- энтропия  $\varepsilon = O_p^{probal}(I_f; (p_1, p_2, \dots, p_n)) = -\sum_i p_i \log_2 p_i$ , (70)

где  $p_i = P(X = x_i)$

- избыточность или относительная энтропия  $\varepsilon_D = 1 - \frac{I}{I_0}$ , (71)

где  $I_0 = \log_2(h_{\max} - h_{\min} + 1)$  и  $h_{\max}, h_{\min}$  - максимальный и минимальный уровни поля (для бинарной реализации  $h = 2$ , для полутоновой реализации  $h = 256$ );

Возвращаясь к вероятностным признакам для общего случая, отметим, что они определены в работе [94-98] как признаки, случайные значения которых распределены по всем классам объектов. Признаки распознаваемых объектов следует рассматривать как вероятностные и в случае, если измерение их числовых значений производится с такими ошибками, что по результатам измерений невозможно с полной определенностью сказать, какое числовое значение данная величина приняла. Следовательно, детерминированные величины являются вероятностными признаками, у которых значение принимается с вероятностью, равной 1. В таком случае нет необходимости определять плотность распределения вероятностей значений. Для более общего случая же, когда используется вероятностный признак, он задается через плотность распределения вероятностей его значений с вполне определенными значениями [88-90, 94-98].

Согласно приведенным аргументам нет необходимости выделять класс логических признаков. Повторяясь, отметим, что под логическим признаком

понимается высказывание (элементарное или составное) [70-72] или интерпретация правильно построенной формулы (в более общем понимании), принимающая всего два значения – логическую истину или ложь. Эти значения принимаются с полной определенностью. К логическим признакам относятся, прежде всего, признаки, не имеющие количественного выражения. Они представляют собой суждения качественного характера на наличие или отсутствие некоторых свойств или некоторых элементов у распознаваемых объектов или явлений. Также логическим можно отнести признаки, у которых важна не величина признака, а лишь факт попадания или непопадания ее в заданный интервал. В пределах этих интервалов появление различных значений признаков у распознаваемых объектов предполагается равновероятным. На практике логические признаки подобного рода имеют место в таких ситуациях, когда либо ошибками измерений можно пренебречь, либо интервалы значений признаков выбраны, что ошибки измерений не оказывают влияния на достоверность принимаемых решений относительно попадания измеряемой величины в заданный интервал [94, 95].

В данной диссертационной работе класс логических признаков исключается из списка разновидностей признаков. Основанием для этого послужили следующие аргументы [99-101]:

1. объекты в объективной действительности можно разделить на: объекты, явления (природные или естественные, не поддающиеся контролю и управлению) и процессы (искусственные или естественные, поддающиеся контролю и управлению);
2. объекты из приведенной классификации характеризуются совокупностью признаков, которые поддаются измерению, в основном, на количественном уровне;
3. если количественный детерминированный признак принимает значения из непрерывного множества, то его можно свести к логическому признаку. Например, прибор характеризуется признаком, принимающим значения в диапазоне  $[a; b]$ . Тогда на основании этого признака можно

сформулировать другой признак «работоспособность». «Работоспособность» будет характеризовать функциональность прибора и принимать значение «логическая истина», если исходный признак принимает значение из отрезка  $[a; b]$ , и принимает значение «логическая ложь» в противном случае. Таким образом, отпадает необходимость в использовании логических признаков, как отдельную разновидность [72];

4. если множество значений количественного детерминированного признака представляет конечное дискретное множество, то его также можно свести к логическому признаку. Например, если признак  $\alpha$  принимать значения из множества  $\{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$ , то можно получить  $n$  разных однотипных признаков в формате:  $\alpha = \alpha_1, \alpha = \alpha_2, \dots \alpha = \alpha_n$ , каждый из которых может быть истинным или ложным, в зависимости наблюдается такое значение или нет [72];
5. вероятностные признаки сводятся к логическим признакам аналогично детерминированным [72, 94, 95];
6. если бы логические признаки существовали как отдельная разновидность, то для измерения логических признаков разных типов нужно было бы разрабатывать отдельные измерители, в отличие от предыдущих пунктов 3 и 4;
7. определение значения логического признак представляет собой простейшую систему принятия решений [72, 94, 95];

Структурные и логические признаки схожи в аспекте их формализованного представления. Логические признаки обычно представляются в форме правильно построенной формулы, записываемой через символные обозначения высказываний и логических операций [72]. Структурные же признаки являются геометрическими объектами [94, 95]. Но проведя аналогию между простейшими геометрическими объектами и символными обозначениями высказываний, а также установив взаимно однозначное соответствие логическими операциями и отношениями между геометрическими объектами, приходим к возможности записи сложного структурного объекта в форме предложения на естественном

языке. Таким образом, структурный метод распознавания связан с использованием аналогии между структурой объектов и синтаксисом естественного языка. В рамках этого подхода для решения задач распознавания используются различные лингвистические конструкции, образованные словарем признаков и грамматикой – правилами конструирования фраз, в совокупности описывающих классы и подлежащих распознаванию объект [94, 95]. Поэтому иногда используют термин «лингвистические методы». Данный подход позволяет решать задачи распознавания в рамках трех направлений [75-84, 94-98]:

1. синтаксически ориентированное распознавание, когда устанавливается синтаксис грамматики и разбор грамматики осуществляется в двух направлениях;
2. распознавание образов, представленных графами;
3. распознавание древовидных структур, при котором модифицируется определение грамматики, дополнительно определяется функция ранжирования.

Таким образом, распознавание с использованием структурных признаков является процессом, использующим другого вида модальность. В отличие от признаков предыдущих классов, здесь под измерением структурного признака нужно понимать идентификацию непроизводных элементов и связей между ними [76, 77, 94, 95]. Для более подробного анализа процесса измерения структурных признаков обратимся к работе [18, 19].

Согласно [18, 19] общего решения выбора непроизводных элементов не найдено. При их выборе нужно придерживаться следующих требований:

1. непроизводные элементы должны служить основными элементами образов и обеспечивать адекватное и сжатое описание сходных данных в терминах заданных структурных отношений;
2. поскольку структурная информация в непроизводных элементах не важна, и они считаются простыми и компактными образами, их выделение и распознавание должно легко осуществляться существующими несинтаксическими методами.

При выборе непроизводных элементов возможен конфликт между этими требованиями. Это означает всего лишь нахождение компромисса между двумя «полюсами»: чем сложнее непроизводный признак, тем проще будет описание образа, но сложнее будет решение идентификации самого признака. Кроме того, разные постановки задачи, даже при одних и тех же исходных данных, обуславливают выбор разных непроизводных элементов. Упрощение структурного признака обычно ведет к усложнению отношений между ними. Ясно, что измерение структурных признаков и отношений между ними представляет собой в общем случае некоторый алгоритм.

В работе [82] приведен алгоритм выделения (измерения) непроизводных признаков, который достаточно сложно формализовать:

1. над исходным изображением проводится предобработка: ликвидация шума, заполнение разрывов, отслеживание контуров;
2. выделяются простейшие фрагменты изображений;
3. фрагменты соединяются в сегменты прямолинейных и криволинейных отрезков;
4. сегменты подлежат описанию: сегменты прямолинейных отрезков описываются длиной и наклоном, а сегменты криволинейных отрезков – длиной и кривизной;
5. структурные отношения между различными сегментами (непроизводные элементы) записываются в таблицу соединений;
6. генерируется утверждение, описывающее образ, в терминах непроизводных объектов и отношений между ними.

Как видно каждый из пунктов приведенного алгоритма является сложной процедурой. Несмотря на эвристический характер, он обладает достоинствами: преодолевать вариации размера изображения и его ориентации, каждая следующая задача решается после полного решения предыдущей задачи, можно варьировать в выборе непроизводных элементов и т.д. Но большим недостатком этого подхода остается возможность появления «пространственного взрыва».

Работа [81] по сравнению предыдущей работой является продвинутой в этом отношении. В ней сделана попытка формализовать структурные признаки. В результате была получена формальная модель абстрактного описания английской скорописи. Непроизводными элементами в этой модели служат четыре различных сегмента линий, описываемых тройкой

$$\sigma_j = \left[ (x_{j1}, y_{j1}), (x_{j2}, y_{j2}), \theta_j \right],$$

где  $(x_j, y_j)$  - приблизительное положение концевых точек сегмента, а  $\theta_j$  - направление поворота от первой концевой точки ко второй. Величина  $\theta_j$  положительна, если поворот осуществляется по часовой стрелке, и отрицательна в противном случае. Используя принятое обозначение для структурных признаков (табл. 4) его можно было записать формализовано следующим образом:

$$\sigma_j = O_P^{struct}(I_f; \sigma_j) = Alg\left(I_f \downarrow; \left[ (x_{j1}, y_{j1}), (x_{j2}, y_{j2}), \theta_j \right] \uparrow\right), \quad (72)$$

где символ  $Alg$  будет использован для обозначения алгоритма вычисления второго параметра  $\left[ (x_{j1}, y_{j1}), (x_{j2}, y_{j2}), \theta_j \right]$ , при условии задания первого параметра  $I_f$ ,  $f \in \{bin, gray, color\}$ . Символы  $\downarrow$  и  $\uparrow$  указывают на входной или выходной аргументы соответственно. Таким образом, здесь под процедурой  $O_P^{struct}(\cdot; \sigma_j)$  нужно понимать алгоритм вычисления значений структурных признаков  $\sigma_j$ .

Согласно [18, 19] более общие методы выделения непроизводных элементов можно разделить на две группы. В первой из них делается упор на границы, а во второй – на области изображения. Далее рассмотрим методы первой группы и проведем их формализацию с учетом принятых символьных обозначений. В настоящее время основным методом, используемым в описании границ, является цепные коды Фримена [12, 18, 19, 82, 85]. Наиболее результативными в плане прикладного применения считаются работы [82, 85]. В них проделана значительная работа по формализации цепных кодов Фримена. Если Фурман использовал элементы функционального анализа, то в работах Гонсалеса идет

дальнейшее развитие метода цепного кодирования. Для полного систематизированного представления методов представления границ отметим, что все они являются методами сегментации границ. Параметрическое преобразование в ДАИ, измеряющее структурный признак должен возвратить в результате ее значение. Отметим, что значением структурного признака, вычисленного методом цепного кодирования Фримена [12, 18, 19, 82, 85], будет последовательность чисел, или вектор. Дабы не прийти к противоречию с ныне признанной теорией ДАИ отметим, что подобные методы, измеряющие значение выбранного структурного признака будут означены векторами или упорядоченной совокупностью чисел. Но наряду с цепными кодами Фримена существуют и другие, например [12, 18, 19, 82, 85]:

1. кодирование по трем признакам: длине текущего элементарного вектора, направлению поворота при переходе к следующему элементарному вектору и углу между соседними элементарными векторами;
2. кодирование текущего элементарного вектора трехразрядным двоичным кодом (метод Фримена);
3. Р-представление контура;
4. кодирование текущего элементарного вектора двумя его проекциями на оси координат (двухмерный код);
5. полигональное представление контура;
6. представление контура радиус-векторами, приведенными из центра тяжести фигуры;
7. представление контура в виде функции комплексного переменного;
8. представление элементарного вектора контура в плоскости квадратной сетки комплексными числами.

Ниже приведена текстовая формулировка алгоритма для бинарной реализации  $I_{bin}$  изображения  $I$ , использующего один из восьми способов кодирования:

1. наложить на изображение  $I$  равномерную сетку;
2. в качестве элементов границы выбрать те элементы реализации  $I_{bin}$ , более 50% площади которых находится в пределах рассматриваемой фигуры;

3. выбрать из числа элементов реализации  $I_{bin}$  те, которые не являются внутренними (внешние элементы фигуры);
4. применить один из 8 способов кодирования последовательности выбранных на 3 шаге элементов;

Результатом применения этого алгоритма будет последовательность кодов, описывающих граничные точки фигуры, изображенной на реализации  $I_{bin}$ .

Пусть дана бинарная реализация  $I_{bin}$  изображения  $I$ , т.е.  $I_{bin} = \|x_{ij}\|$ , где  $x_{ij} \in \{0,1\}$ . Степень детализации реализации  $I_{bin}$  изображения  $I$  выберем на уровне пикселей, т.е. каждый из элементов  $x_{ij}$  соответствует пикслю изображения  $I$ .

$$\begin{aligned}
 & \text{Alg}(I_{bin} \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow) \\
 & \left\langle I_{bin} \Rightarrow A = \left\{ \langle x_{ij}, \langle i, j \rangle \rangle \mid \left( I_{bin} = \|x_{ij}\| \right) \wedge (x=1) \right\}, \right. \\
 & \left. A \Rightarrow B^h = \left\{ \langle x_{kj}, \langle i, j \rangle \rangle \mid \left( \langle x_{kj}, \langle i, j \rangle \rangle \in A \right) \wedge \left[ (k = \min(i)) \vee (k = \max(i)) \right] \right\}, \right. \\
 & \left. A \Rightarrow B^v = \left\{ \langle x_{il}, \langle i, j \rangle \rangle \mid \left( \langle x_{il}, \langle i, j \rangle \rangle \in A \right) \wedge \left[ (l = \min(j)) \vee (l = \max(j)) \right] \right\}, \right. \\
 & \left( B^h \cup B^v \right) \Rightarrow B = \text{Im}(B^h \cup B^v), \\
 & B \Rightarrow \{q_1, \dots, q_m\}
 \end{aligned} \tag{73}$$

Эта формализованная запись представляет математическую модель процедуры вычисления структурных признаков  $\{q_1, \dots, q_m\}$  для бинарной реализации  $I_{bin}$ .

Алгоритм представляет собой параметрическое преобразование:

$$\{q_1, \dots, q_m\} = O_P^{struct}(I_{bin}; *) = \text{Alg}(I_{bin} \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow)$$

Алгоритм описывает кодирование границ фигуры, изображенной на бинарной реализации  $I_{bin}$ . Он состоит из четырех шагов, записанных на математическом языке с использованием терминов теоретико-множественного подхода. Первым шагом алгоритма является создание множества пикселей  $A$  фигуры на изображении  $I_{bin}$ , состоящей из черных точек. Вторые и третий шаги образуют этап выделения границ. Этап выявления граничных точек фигуры является двухпроходным – определяется множество граничных точек по

горизонтали  $B^h$  и множество граничных точек по вертикали  $B^v$ . Определения множеств  $B^h$  и  $B^v$  является дескриптивным, но не конструктивным. В таких случаях, не всегда можно восстановить алгоритм их создания. В работе [82] описывается аппарат дискретных цепей Маркова [82, 88-90], позволяющих решать задачи подобного рода. Однако, в силу простоты свойств, присущих элементам множеств  $B^h$  и  $B^v$  можно легко реконструировать алгоритм их генерации. Четвертый шаг состоит в образовании множества граничных пикселей  $B$ , представляющего область определения объединения бинарных отношений  $B^h$  и  $B^v$  [70, 71]. Преобразование множества  $B$  во множество кодов  $\{q_1, \dots, q_m\}$  описывает применение одного из восьми вариантов кодирования граничных точек фигуры. В результате можно получить последовательность кодов, описывающих пиксели границы. Выявление подобным образом контуров объектов в реализациях являются не единственными.

Другим не менее распространенным методом получения цепных кодов для границ является привлечение методов математической морфологии [12, 18, 19, 82, 85, 107, 109, 114-117] на первом шаге алгоритма. Согласно той же самой исследовательской работе граница  $\beta(A)$  множества  $A$  может быть вычислена путем выполнения сначала операции эрозии  $A$  по  $B$ , а затем получения разностного множества между  $A$  и результатом его эрозии:

$$\beta(A) = A \setminus (A \square B),$$

где  $B$  - подходящий примитив, а роль множества  $A$  выполняет бинарная реализация  $I_{bin}$ . Ниже приведена математическая модель этой процедуры, которая уже является параметрической:

$$\begin{aligned} & \text{Alg}(I_{bin} \downarrow, \|\mu\| \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow) \\ & \left\langle I_{bin} \Rightarrow I_{bin}' = I_{bin} \setminus (I_{bin} \square \|\mu\|), \right. \\ & \left. I_{bin}' \Rightarrow B = \left\{ \langle x_{ij}, \langle i, j \rangle \rangle \mid (I_{bin} = \|x_{ij}\|) \wedge (x_{ij} = 1) \right\}, \right. \quad (74) \\ & B \Rightarrow C = \text{Im}(B), \\ & C \Rightarrow \{q_1, \dots, q_m\} \end{aligned}$$

где  $A = I_{bin}$  - исходное изображение, а  $B = \|\mu\|$  - маска и параметр алгоритма.

В терминах параметрических преобразований [122-139] для структурных признаков оно имеет вид [18]:

$$\{q_1, \dots, q_m\} = O_P^{struct}(I_{bin}; \bar{\mu}) = \text{Alg}(I_{bin} \downarrow, \|\mu\| \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow)$$

В отличие от первой формы записи параметрического преобразования для вычисления структурного признака с использованием теоретико-множественного подхода, вторая форма является параметрическим алгоритмом с параметром  $\|\mu\|$ .

В зависимости от маски  $\|\mu\|$  на выходе параметрического преобразования будут сформированы различные последовательности цепных кодов  $\{q_1, \dots, q_m\}$ .

Эту же задачу можно решать с привлечением операторов, выполняющих дискретное дифференцирование [10, 76, 77, 85]. Модификацию второй формы можно получить при использовании процедурного преобразования с операцией фильтрации, где значением параметра является вектор параметров маски фильтра  $\bar{\eta}$ . Хотя и для предыдущего случая и рассматриваемой текущей ситуации требуется маска, они описываются разными формализмами. Это основано на том, что в случае с операцией математической морфологии [107-109, 114-117] используется постоянная маска, а ядро операции фильтрации и его апертура могут меняться. Следовательно, будет правильным в первом случае подавать на вход алгоритма маску, как значение параметра. А во-втором случае, в силу того, что апертура меняется, его ранги векторизовать и присвоить параметру алгоритма. Тогда в общем случае этот алгоритм с векторным параметром запишется так:

$$\begin{aligned} \text{Alg}(I_{bin} \downarrow, \bar{\eta} \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow) &= \text{Alg}(I_{bin} \downarrow, (n, m) \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow) \\ \langle I_{bin} \Rightarrow I'_{bin} = O_T^{filter}(I_{bin}, (n, m)), \\ I'_{bin} \Rightarrow B = \left\{ \langle x_{ij}, \langle i, j \rangle \rangle \mid \left( I_{bin} = \|x_{ij}\| \right) \wedge \left( x_{ij} = 1 \right) \right\}, \\ B \Rightarrow C = \text{Im}(B), \\ C \Rightarrow \{q_1, \dots, q_m\} \rangle \end{aligned}, \quad (75)$$

где  $\bar{\eta}$  - параметр алгоритма и параметры маски фильтра. В терминах параметрических преобразований для структурных признаков она имеет вид:

$$\{q_1, \dots, q_m\} = O_P^{struct}(I_{bin}; (n, m)) = Alg(I_{bin} \downarrow, \bar{\eta} \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow)$$

Если рассмотрим процедурные преобразования на базе операции фильтрации [75-87], то параметр  $\bar{\eta}$  может принимать векторное значение  $(n, m)$ , компоненты которого являются рангами матрицы-маски для линейных и нелинейных пространственных фильтров [75-87].

Более сложный случай описывает следующий алгоритм, когда он содержит в своей структуре два преобразования с параметрами  $(n, m)$  и  $\eta_0$ . Тогда параметрическое преобразование со значением параметра  $\bar{\eta} = \{(n, m), \eta_0\}$  над полутоновой реализацией изображения может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} Alg(I_{gray} \downarrow, \bar{\eta} \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow) &= \times \\ \times &= Alg(I_{gray} \downarrow, \{(n, m), \eta_0\} \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow) \\ \left\langle I_{gray} \Rightarrow I_{gray}' = O_T^{filter}(I_{gray}, (n, m)), \right. \\ \left. I_{gray}' \Rightarrow I_{bin} = O_T^{gray \rightarrow bin}(I_{gray}', \eta_0), \right. \\ I_{bin} \Rightarrow B &= \left\{ \left\langle x_{ij}, \langle i, j \rangle \right\rangle \mid \left( I_{bin} = \|x_{ij}\| \right) \wedge \left( x_{ij} = 1 \right) \right\}, \\ B \Rightarrow C &= Im(B), \\ C \Rightarrow \{q_1, \dots, q_m\} & \end{aligned} \tag{76}$$

Ее общая форма будет иметь вид:

$$\{q_1, \dots, q_m\} = O_P^{struct}(I_{gray}; \{(n, m), \eta_0\}) = Alg(I_{gray} \downarrow, \{(n, m), \eta_0\} \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow)$$

Отметим, что в данном параметрическом преобразовании использованы два процедурных преобразования: метод фильтрации полутоновой реализации  $I_{gray}$  с параметрами маски  $(n, m)$ , и метод пороговой конвертации полутоновой реализации  $I_{gray}$  в бинарную реализацию  $I_{bin}$  с параметром  $\eta_0$ .

Подобную операцию выделения пикселей границ и их цепного кодирования можно провести с использованием дискретных цепей Маркова [82].

Математический аппарат теории дискретных цепей Маркова является достаточно универсальным инструментом формализации и позволяет решать такие задачи как: подавление шумов, обнаружение пространственно-распределенных объектов, выделение подозрительных областей сцены по признаку наличия сгущений, селекции на плохости, фильтрация на базе двухпороговых алгоритмов, согласования, анизотропных пеленгационных алгоритмов, медианных и процентильных алгоритмов, сглаживания и т.д. [82]. Далее рассмотрим формализацию параметрического преобразования бинарной реализации в структурный признак, представленного цепными кодами с использованием дискретной цепи Маркова для задачи краевой фильтрации. То есть в алгоритме будет использована дискретная цепь Маркова, которая направлена на решение обнаружения граничных точек в бинарной реализации изображения. Он является частным представлением первой формы параметрического преобразования (параметрическое преобразование без параметров):

$$\begin{aligned} \{q_1, \dots, q_m\} &= O_P^{struct}(I_{bin}; \{s_0, \delta, \lambda\}) = \text{Alg}(I_{bin} \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow), \\ \text{Alg}(I_{bin} \downarrow; \{s_0, \delta, \lambda\} \uparrow) &= \text{Alg}(I_{bin} \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow) \\ &\quad \langle \dots \rangle \\ I_{bin} \Rightarrow \{q_1, \dots, q_m\} &= \langle S, X, Y, s_0, \delta, \lambda \rangle(I_{bin}) \\ &\quad \rangle \end{aligned} \tag{77}$$

где  $\{q_1, \dots, q_m\} = \langle S, X, Y, s_0, \delta, \lambda \rangle(I_{bin})$  - формализованное обозначение оператора дискретной цепи Маркова, действующего на бинарную реализацию изображения  $I_{bin}$ . Согласно [82] дискретная цепь Маркова является конечным автоматом с памятью. Роль математической модели этого автомата играет оператор  $\langle S, X, Y, s_0, \delta, \lambda \rangle$  [91-93], где  $S$  - конечное непустое множество состояний,  $X$  - конечное непустое множество входных сигналов (входной алфавит),  $Y$  - конечное непустое множество выходных сигналов (выходной алфавит),  $s_0 \in S$  - начальное состояние,  $\delta: S \times X \rightarrow S$  - функция переходов,  $\lambda: S \times X \rightarrow Y$  - функция выходов. Хотя такой алгоритм является одношаговым, дискретная цепь Маркова решает задачу формирования цепных кодов без дополнительных действий, которые

наблюдались в остальных вариантах и формах параметрического преобразования для структурных признаков. Аналогичным образом можно формализовать и другие подобные алгоритмы.

Согласно [76, 77] совокупность пикселей и последовательность цепных кодов являются промежуточными представлениями между пиксельным и семантическим уровнями изображения. Всего автор этой работы выделяет три уровня промежуточных представлений:

- контурные представления;
- представление на уровне непроизводных элементов;
- представление на уровне составных структурных элементов.

Для построения структурно-лингвистического описания содержания изображения необходимо последовательно пройти все этапы создания промежуточных представлений. Причем каждый следующий уровень строится на результатах предыдущего уровня. В нашем случае произведена формализация первых двух уровней. Измерение составных структурных признаков предполагает выявление отношений между непроизводными элементами на количественном или качественном уровнях. Представления на уровне непроизводных элементов являются не эффективными, что обусловлено наличием нерегулярностей в сегментах цепных кодов [18, 19]. Устранение этой проблемы в исходной последовательности кодов приводит к эффекту сглаживания. Для получения сглаженной цепной последовательности можно использовать трансформационные грамматики [18, 22, 81] или аппарат нечеткой математики [73, 74]. Трансформационная грамматика является одним из видов порождающих грамматик из теории формальных языков. Аппарат этой теории используется в основном при решении задач распознавания, которые не будут рассмотрены в данной работе. Отмету только то, что трансформационная грамматика позволяет не только решать задачу сглаживания, но создавать графовые модели по контурному представлению.

До сих пор рассматривалась тема выделения структурных признаков, основанных на границах. Вторым вариантом структурных признаков является

представления через замкнутые области. В этом направлении наиболее известными работами являются [18, 75-84, 94-98, 140]. Определение структурных признаков через области приведено в работе [18]. Процедура хотя и является линейной, представляет достаточно сложный алгоритм. В данной работе определение структурных признаков через области не формализуются.

### **2.3 Методы математического моделирования обработки и анализа изображений**

Дескриптивные алгебраические схемы представления изображений в МДАИ Представление изображения является процессом по созданию формальной схемы, предназначеннной для получения описания изображения сцены в терминах структурных элементов. К числу таких структурных элементов можно отнести поверхности, кривые, геометрические множества точек и т.п. В концептуальном алгебраическом подходе к анализу и обработке изображений И.Б. Гуревича используются три вида ДАСПИ [122-139]: процедурные (Т- ДАСПИ), параметрические (Р- ДАСПИ) и порождающие (G- ДАСПИ). Каждый из них предназначен для решения своей задачи. Т- ДАСПИ позволяют решать задачи обработки и преобразования изображений. Р- ДАСПИ позволяют вычислять характеристики и признаки для исходных данных, а G- ДАСПИ – решать задачи сегментации изображения. Введение порождающих преобразований и G- ДАСПИ в МДАИ теряет смысл. В дальнейшем, придерживаясь этой позиции, будут рассмотрены всего лишь два вида преобразований – процедурные и параметрические преобразования в соответствии с рисунком 2.9. Следовательно будут исследованы только два вида ДАСПИ – Т- и Р- ДАСПИ [122-139].

Т- ДАСПИ будут опираться на процедурные преобразования и операцию структуризации [122-139].

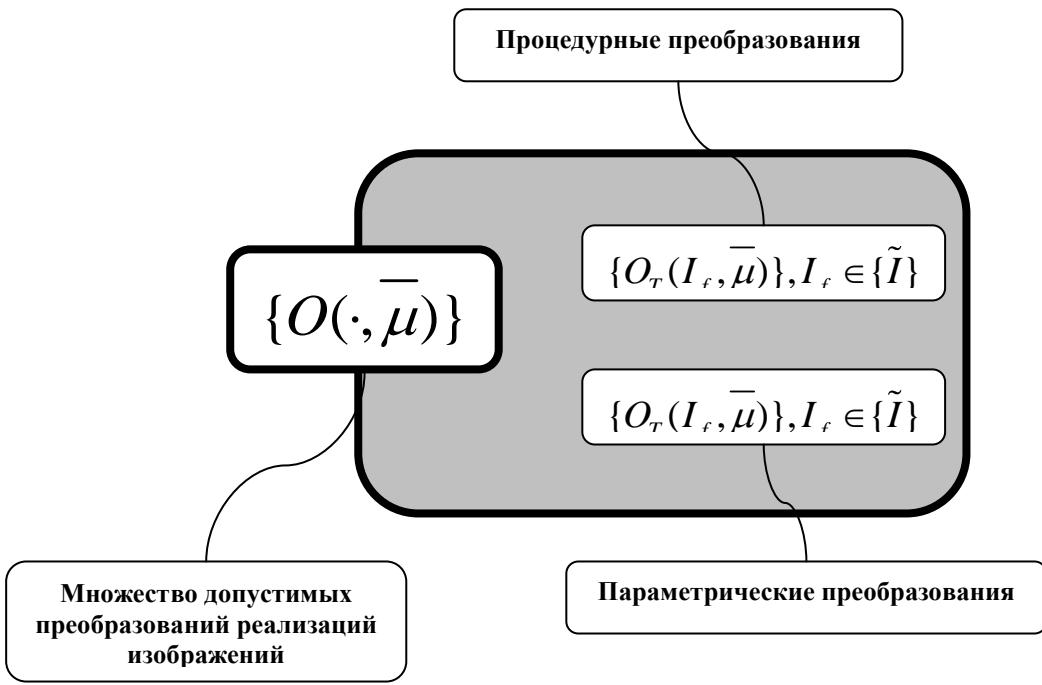


Рисунок 2.9 - Множество допустимых преобразований реализаций [122-139].

*Определение 14:* Т-ДАСПИ в МДАИ называется суперпозиция процедурных преобразований

$$\mathfrak{R}_T(\bar{\mu})(I_f) \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle O_{T,1}^k(\cdot, \mu_1), \dots, O_{T,n}^k(\cdot, \mu_n) \right\rangle(I_f) = O_{T,n}^k(\cdot, \mu_n) \left( \dots O_{T,2}^k(O_{T,1}^k(I_f, \mu_1)) \dots \right), \quad (78)$$

где  $f \in \{bin, gray, color\}$ ,  $k \in \{X \rightarrow Y, improve, filter, dissect, filter, morph, \dots\}$ ,  $\bar{\mu} = \langle \mu_1, \dots, \mu_n \rangle$ .

Множества всех корректных Т-ДАСПИ обозначают  $\{\mathfrak{R}_T(\bar{\mu})\}$  [122-139].

*Определение 15:* Реализацией Т- ДАСПИ  $\{\mathfrak{R}_T(\bar{\mu})\}$  изображения  $I$  называется применение ДАСПИ  $\mathfrak{R}_T(\bar{\mu})$  с выбранным значением  $\bar{\mu} = \bar{\mu}_0$  параметров преобразований, входящих в ДАСПИ к реализациям исходного изображения  $\{I_{bin}, I_{gray}, I_{color}\}$ .

Теория распознавания образов делит множество всех возможных признаков на: детерминированные, вероятностные, логические и структурные классы [94-98]. Ясно, что для правильного введения Р- ДАСПИ [122-139] необходимо предварительно найти взаимосвязь между этими классами. Из перечисленных классов признаков интуитивно можно выделить на роль главных вероятностные и

структурные признаки. Детерминированные признаки можно рассматривать как вероятностные, у которых функция распределения представлена единственным значением, вероятность которого равна 1 Логические же признаки, как ранее отмечалось, в данной работе не представляют отдельный независимый класс признаков, в силу своей природы. Становиться понятным в таком случае природа и структурных признаков. Хотя они и отличаются от вероятностных признаков, их вычисление можно назвать процессом работы системы принятия решений. Такой вывод имеет свою вескую причину – структурные признаки [94-98], по определению, есть элементарные геометрические объекты. Они в основном являются кривыми на плоскости или пространственными примитивами. В том и ином случае они есть геометрические места точек. Ранее было сказано, что любое геометрическое место точек на изображении соответствует конечному набору пикселей со своими яркостными характеристиками. Если же рассматривать бинарные изображения, то под структурным элементом в изображении понимается набор черных пикселей на белом фоне. Совокупность этих черных пикселей интерпретируется наблюдателем, как некоторый геометрический примитив, хотя результат этого процесса все же является субъективным. Таким образом, если определить структурные признаки как набор пикселей на изображении, каждый из которых может быть, либо белым (что соответствует фону), либо черным (что означает ее принадлежность структурному признаку), то совокупности пикселей структурного признака можно сопоставить совокупность высказываний [70-72]. Каждое высказывание из эквивалентной совокупности утверждает или отрицает принадлежность пикселя с координатами  $(i, j)$  структурному признаку в зависимости от значения этого пикселя  $x_{ij}$ , где  $I_{bin} = \|x_{ij}\|$ . Следовательно, наиболее общим среди перечисленных признаков является вероятностный признак, а остальные представляют его простые или сложные частные случаи. В таком случае, придерживаясь определения Т-ДАСПИ и параметрического преобразования можно сформулировать следующее определение Р-ДАСПИ [122-139].

*Определение 16:* Р-ДАСПИ в МДАИ называется композиция параметрических преобразований

$$\mathfrak{R}_P(\bar{\eta})(I_f) \stackrel{\text{def}}{=} \left[ \underset{j=1}{\overset{m}{\circ}} O_{P,j}^k(\cdot, \eta_j) \right] (I_f) = \underset{j=1}{\overset{m}{\circ}} O_{P,j}^k(I_f, \eta_j), \quad (79)$$

где  $f \in \{bin, gray, color\}$ ,  $k \in \{determin, probal, struct\}$ ,  $\bar{\eta} = \langle \eta_1, \dots, \eta_m \rangle$ .

Множества всех корректных Р-ДАСПИ обозначают  $\{\mathfrak{R}_P(\bar{\eta})\}$  [122-139].

*Определение 17:* Реализацией Р-ДАСПИ  $\mathfrak{R}_P(\bar{\eta})$  изображения  $I$  называется применение ДАСПИ  $\mathfrak{R}_P(\bar{\eta})$  с выбранным значением  $\bar{\eta} = \bar{\eta}_0$  параметров преобразований, входящих в представление к реализациям исходного изображения  $\{I_{bin}, I_{gray}, I_{color}\}$ .

Т-ДАСПИ и Р-ДАСПИ являются в МДАИ основным инструментом создания Т- и Р-моделей соответственно [122-139]. Они образуют множество всех корректно определенных ДАСПИ в соответствии с рисунком 2.10, которые используются на практике.

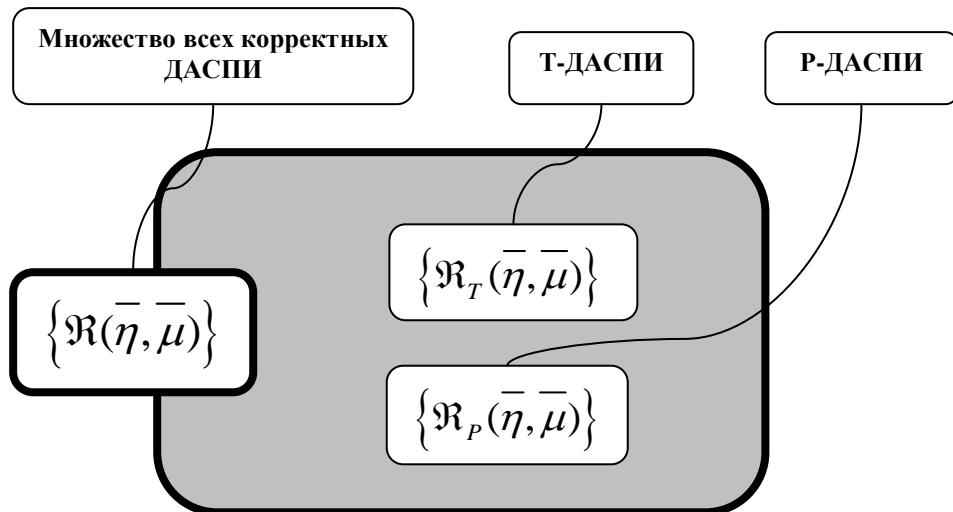


Рисунок 2.10 - Множество всех корректных ДАСПИ в МДАИ [122-139].

*Определение 18:* Множеством всех корректных ДАСПИ в МДАИ называется множество  $\{\mathfrak{R}(\bar{\eta}, \bar{\mu})\} = \{\mathfrak{R}_T(\bar{\eta}, \bar{\mu})\} \cup \{\mathfrak{R}_P(\bar{\eta}, \bar{\mu})\}$  (80).

## Выводы по второй главе

Материалы этой главы играют очень важную роль при создании математических моделей сложных процессов обработки и анализа изображений. Уточнение понятий ДАСПИ в ДАИ позволило выйти к моделям подсистем обработки и анализа изображений для систем технического зрения. Для решения задачи автоматизации моделирования систем технического зрения необходимо продолжить исследования самого пространства, где протекают эти процессы. Третья глава диссертационной работы направлена на исследование пространства обработки и анализа изображений.

Проведен детальный анализ процедуры модификации и развития математического аппарата ДАИ. Исследованы и проанализированы такие элементы математического аппарата, как реализации изображений, структурная и семантическая информация об изображении, процедурные преобразования и создаваемые с их использованием Т-ДАСПИ, параметрические преобразования и создаваемые с их использованием Р-ДАСПИ. Был осуществлен обоснованный отказ от порождающих преобразований и создаваемых на их основе Г-ДАСПИ. Основным принципом, используемым в этой главе, является конструктивизм определяемых элементов математического аппарата ДАИ. Как показали исследования, система формальных обозначений аппарата ДАИ в этом отношении является недостаточно развитым. Поэтому предлагается использование стандартных математических обозначений. Точнее говоря, формализации подлежат реализации изображений, контекстная и семантическая информация об изображении, операции преобразования и ДАСПИ. Изображения представлены реализациями в матричной форме, проведена классификация на бинарных, полутоновых и цветных типов. В качестве процедурных преобразований рассмотрены операции конвертирования изображений, фильтрации и операции математической морфологии. Методы этих преобразований представлены в стандартной математической форме. Во всех остальных случаях, сложные методы представлены в форме алгоритмов и в виде

продукционной системы. Антецеденты и консеквенты продукционных правил описываются либо в виде реализаций изображений, либо в виде алгебраических объектов с использованием теоретико-множественных обозначений. На базе процедурных преобразований определяются Т-ДАСПИ, как суперпозиция процедурных преобразований. Параметрические преобразования разделены на классы: детерминированные, вероятностные и структурные. Аналогично процедурным преобразованиям, в формализации параметрических преобразований участвуют либо математические выражения, отражающие суть этих методов, либо алгоритмы в виде продукционных систем. В работе также описаны Р-ДАСПИ, как композиция параметрических преобразований. Последовательность Т-ДАСПИ и Р-ДАСПИ образуют метод математического моделирования обработки и анализа изображений. Так как, обработка и анализ изображений производится любой функцией системы технического зрения, то их последовательное применение полностью моделируют эту функцию. В аппарате МДАИ отличие Р-ДАСПИ от Т-ДАСПИ заключается в отказе от их возможности создавать другую разновидность дескриптивных моделей. Исследуемые методы и алгоритмы обработки и анализа изображений закладывают основу математическому аппарату модифицированных дескриптивных алгебр изображений. Они являются ее основными структурными элементами и используются непосредственно в МДАИ при решении задач обработки и анализа изображений. В следующей главе будут рассмотрены МДАИ, как универсальные алгебраические структуры. Определенные и исследованные в данной главе преобразования и ДАСПИ будут использованы в роли главных операций этих алгебр. Наиболее важной задачей следующей главы является математическое описание единого пространства обработки и анализа изображений и формулы ее количественной оценки.

## Глава 3. Модифицированные дескриптивные алгебры изображений

### 3.1 Модифицированные дескриптивные алгебры бинарных изображений

Глава направлена на исследование математического пространства, где протекают процессы обработки изображений. В рамках дескриптивных алгебр изображений оно получило название фазовых пространств представлений [122-139]. В данной работе будет определен ее частный случай в форме совокупности трех подпространств. Число подпространств зависит от форм реализаций изображений и методов их обработки. Так как во второй главе изображения были представлены только в трех форматах – бинарном, полутоновом и цветном, то исследуемое пространство обработки изображений будет состоять из трех подпространств, которые связываются методами их взаимного конвертирования. В рамках такой модификации данное пространство получило название пространства состояний изображений, ибо структурно состоит из всех возможных вариаций элементов изображений, которые представляются конечными матрицами с постоянными в ходе решения задач рангами. Подпространства этого пространства состояний изображений будут описаны универсальными алгебрами без операторного кольца [102-105], называемые модифицированными дескриптивными алгебрами изображений.

*Определение 1* [122-139]: Модифицированной дескриптивной алгеброй изображений называется универсальная алгебра без операторного кольца, элементы основного множества которой являются реализациями изображений, а главные операции – допустимыми операциями над реализациями.

Ясно, что таким образом определенная алгебраическая структура является частным случаем дескриптивных алгебр изображений [122-139]. С другой стороны, такой подход к ее определению открывает новый аспект их исследования – рассмотрение МДАИ в форме пространства состояний моделей изображений. Под строением МДАИ подразумевается состав и связи между

элементами основного его множества. Возможности МДАИ заключаются в определении одних элементов основного множества через другие с использованием главных операций алгебраической структуры. Здесь рассматриваются МДАИ для бинарных и полутоновых реализаций. В качестве главных операций используются логические операции: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, стрелка Пирса, антиимпликация, эквивалентность, сумма Жегалкина, штрих Шеффера и т.д. [72]. Критерием отбора является их замкнутость на множестве {0,1} для бинарных реализаций и на множестве {0,...,255} для полутоновых реализаций. Для отобранных функций вводятся их матричные формы, которые связаны с обычными определениями этих функций. Эти функции являются бинарными операциями. Кроме них также рассматриваются унарные операции в лице морфологических и операций фильтрации [75-87]. Принцип формулировки и исследования МДАИ состоит в усложнении алгебраических структур за счет ввода дополнительных свойств и нахождения симметричных и нейтральных элементов относительно главных бинарных операций [102-105]. Таким образом, рассматриваются алгебры бинарных реализаций с главными логическими и морфологическими операциями. Далее формулируются и исследуются алгебры полутоновых реализаций с главными логическими операциями и операциями фильтрации. Проводится классификация МДАИ по типу применяемых главных операций. В дальнейшем МДАИ будут называться просто алгебрами реализаций.

Данная глава является ключевой во всей диссертационной работе, хотя и опирается на материалы второй главы. Формулируется гипотеза о том, что возможно объединение разнотипных алгебр в более сложный математический объект. Она основана на том факте, что в процессе преобразований изображения, с целью получения его в нужном качестве, изменяется только формат представления изображения, но не его размер. Это говорит о том, что преобразование изображения есть переход из одного его состояния в другое в пределах этой алгебры. Изменение же его формата переводит изображение в другую алгебру. Таким образом, объединив все нужные алгебры в единый

математический объект можно получить математическую модель среды преобразования изображения, которая в диссертационной работе получила название «пространство состояний изображения». В данной работе предполагается также исследование структуры пространства, которая аналогична пространству состояний изображения. Глава направлена на решение третьей и четвертой основных задач диссертационной работы.

Пусть задано множество всех возможных бинарных изображений, реализации которых обозначаются как  $I_{bin} = \{x_{ij}\}$ ,  $x_{ij} \in \{0,1\}$ . Для обозначения бинарных реализаций используем обозначение  $M_{bin}$ , т.е.  $M_{bin} = \{I_{bin}\}$ . Пусть это множество представляет собой основное множество разрабатываемой алгебры  $\mathfrak{R}_B^L$ . В качестве кандидатов на главные операции будем выбирать бинарные булевы функции «И» (обозначается  $\wedge$ ), «ИЛИ» (обозначается  $\vee$ ) и «исключающее ИЛИ» (обозначается  $\oplus$ ) [70-72]. Исходя из таблицы истинности этих логических функций, можно утверждать, что все они замкнуты на множестве  $\{0,1\}$ . Следовательно, они могут претендовать на роль главных операций алгебры. Однако эти булевые функции являются математическими функциями от логических аргументов. Поэтому возникает необходимость в определении булевых функций для матричных аргументов. Матричные булевые функции определим аналогично логическим функциям, сохранив их обозначения.

*Определение 2* [72]: Матричной конъюнкцией над бинарными реализациями  $I_{bin}^{\cdot} = \{x_{ij}^{\cdot}\}$ ,  $x_{ij}^{\cdot} \in \{0,1\}$  и  $I_{bin}^{\prime} = \{x_{ij}^{\prime}\}$ ,  $x_{ij}^{\prime} \in \{0,1\}$  называется логическая конъюнкция  $\wedge$  над соответствующими элементами этих реализаций, т.е.

$$I_{bin}^{\cdot} \wedge I_{bin}^{\prime} = \|x_{ij}^{\cdot}\| \wedge \|x_{ij}^{\prime}\| = \|x_{ij}^{\cdot} \wedge x_{ij}^{\prime}\| = \|x_{ij}\| = I_{bin} \quad (81)$$

*Определение 3* [72]: Матричной дизъюнкцией над бинарными реализациями  $I_{bin}^{\cdot} = \{x_{ij}^{\cdot}\}$ ,  $x_{ij}^{\cdot} \in \{0,1\}$  и  $I_{bin}^{\prime} = \{x_{ij}^{\prime}\}$ ,  $x_{ij}^{\prime} \in \{0,1\}$  называется логическая дизъюнкция  $\vee$  над соответствующими элементами этих реализаций, т.е.

$$I_{bin}^{\cdot} \vee I_{bin}^{\prime} = \|x_{ij}^{\cdot}\| \vee \|x_{ij}^{\prime}\| = \|x_{ij}^{\cdot} \vee x_{ij}^{\prime}\| = \|x_{ij}\| = I_{bin} \quad (82)$$

*Определение 4* [72]: Матричной исключающей дизъюнкцией над бинарными реализациями  $I_{bin}^{\prime} = \left\| x_{ij}^{\prime} \right\|, x_{ij}^{\prime} \in \{0,1\}$  и  $I_{bin}^{\prime\prime} = \left\| x_{ij}^{\prime\prime} \right\|, x_{ij}^{\prime\prime} \in \{0,1\}$  называется логическая исключающая дизъюнкция  $\oplus$  над соответствующими элементами этих реализаций, т.е.

$$I_{bin}^{\prime} \oplus I_{bin}^{\prime\prime} = \left\| x_{ij}^{\prime} \right\| \oplus \left\| x_{ij}^{\prime\prime} \right\| = \left\| x_{ij}^{\prime} + x_{ij}^{\prime\prime} \right\| = \left\| x_{ij} \right\| = I_{bin} \quad (83)$$

*Замечание:* Алгебры в своем составе имеют главные операции, которые могут быть самыми разнообразными. Используя принцип «область определения – множество значений» будем выделять:

- Арифметические операции класса A;
- Логические операции класса L [70-72];
- Морфологические операции класса M [75-87];
- Операции фильтрации класса F [75-87];

Алгебра, использующая в роли главной бинарной операции одну из этих операций, также будет отнесена к соответствующему классу. Допускается определение симбиоза двух и более классов. Такого рода классы могут быть соотнесены с более сложными видами алгебр, например кольцами, в которых используются уже две главные операции, необязательно одного класса [102-105].

*Утверждение 1* [102-105]: Система  $\mathfrak{R}_B^L = \langle M_{bin}, \{\wedge, \vee, \oplus\} \rangle$  является алгеброй класса L типа (2, 2, 2).

*Доказательство:* Доказательство этого утверждения основано на замкнутости ее главных операций на множестве  $\{0,1\}$ , согласно их определению.

■

*Определение 5* [102-105]: Алгебра  $\mathfrak{R}_B^L$  называется алгеброй бинарных реализаций (АБР).

*Утверждение 2* [102-105]: Алгебра  $\langle M_{bin}, \{\wedge\} \rangle$  является полугруппой и обозначается  $\hat{\mathfrak{Z}}_B$ .

*Доказательство:* Доказательство этого утверждения основано на свойстве ассоциативности булевой функции  $\wedge$ :

$$\begin{aligned} I_{bin}^{\cdot} \wedge (I_{bin}^{\cdot} \wedge I_{bin}^{\cdot}) &= \|x_{ij}^{\cdot}\| \wedge (\|x_{ij}^{\cdot}\| \wedge \|x_{ij}^{\cdot}\|) = \|x_{ij}^{\cdot} \wedge (x_{ij}^{\cdot} \wedge x_{ij}^{\cdot})\| = \|(\|x_{ij}^{\cdot} \wedge x_{ij}^{\cdot}\|) \wedge x_{ij}^{\cdot}\| = \times \\ \times &= (I_{bin}^{\cdot} \wedge I_{bin}^{\cdot}) \wedge I_{bin}^{\cdot} \end{aligned}$$

■

*Утверждение 3* [102-105]: Алгебра  $\langle M_{bin}, \{\vee\} \rangle$  является полугруппой и обозначается  $\mathfrak{J}_B^{\vee}$ .

*Доказательство:* Доказательство этого утверждения основано на свойстве ассоциативности булевой функции  $\vee$ :

$$\begin{aligned} I_{bin}^{\cdot} \vee (I_{bin}^{\cdot} \vee I_{bin}^{\cdot}) &= \|x_{ij}^{\cdot}\| \vee (\|x_{ij}^{\cdot}\| \vee \|x_{ij}^{\cdot}\|) = \|x_{ij}^{\cdot} \vee (x_{ij}^{\cdot} \vee x_{ij}^{\cdot})\| = \|(\|x_{ij}^{\cdot} \vee x_{ij}^{\cdot}\|) \vee x_{ij}^{\cdot}\| = \times \\ \times &= (I_{bin}^{\cdot} \vee I_{bin}^{\cdot}) \vee I_{bin}^{\cdot} \end{aligned}$$

■

*Утверждение 4* [102-105]: Алгебра  $\langle M_{bin}, \{\oplus\} \rangle$  является полугруппой и обозначается  $\mathfrak{J}_B^{\oplus}$ .

*Доказательство:* Доказательство этого утверждения основано на свойстве ассоциативности булевой функции  $\oplus$ :

$$\begin{aligned} I_{bin}^{\cdot} \oplus (I_{bin}^{\cdot} \oplus I_{bin}^{\cdot}) &= \|x_{ij}^{\cdot}\| \oplus (\|x_{ij}^{\cdot}\| \oplus \|x_{ij}^{\cdot}\|) = \|x_{ij}^{\cdot} + (x_{ij}^{\cdot} + x_{ij}^{\cdot})\| = \|(\|x_{ij}^{\cdot} + x_{ij}^{\cdot}\|) + x_{ij}^{\cdot}\| = \times \\ \times &= (I_{bin}^{\cdot} \oplus I_{bin}^{\cdot}) \oplus I_{bin}^{\cdot} \end{aligned}$$

■

Таким образом, АБР  $\mathfrak{R}_B^L$  представляет совокупность трех полугрупп:  $\mathfrak{J}_B^{\wedge}$ ,  $\mathfrak{J}_B^{\vee}$  и  $\mathfrak{J}_B^{\oplus}$ . Дальнейшая их конкретизация возможна в случае обнаружения для них нейтральных элементов относительно их главных ассоциативных бинарных операций. Обобщение таблиц истинности для булевых функций  $\wedge$ ,  $\vee$  и  $\oplus$  позволяет сформулировать следующие их свойства [70-72].

*Свойства булевой функции  $\wedge$*

1.  $x \wedge 0 = 0 \wedge x = 0$
2.  $x \wedge x = x$
3.  $x \wedge y = y \wedge x$  (84)
4.  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

*Свойства булевой функции  $\vee$*

1.  $x \vee 0 = 0 \vee x = x$
2.  $x \vee x = x$
3.  $x \vee y = y \vee x$  (85)
4.  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

*Свойства булевой функции  $\oplus$*

1.  $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$
2.  $x \oplus x = 0$
3.  $x \oplus y = y \oplus x$  (86)
4.  $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

На основании 1 и 4 свойства булевой функции  $\vee$  верным будет следующее утверждение.

*Утверждение 5 [102-105]: Алгебра  $M_B^\vee = \langle M_{bin}, \{\vee, O\} \rangle$  есть моноид.*

*Доказательство:* Согласно определению моноид – это полугруппа с нейтральным элементом относительно ее главной бинарной ассоциативной операции. Главная операция  $\vee$  по 4 свойству соответствующей булевой функции обладает свойством ассоциативности, ибо алгебра  $\mathfrak{I}_B^\vee = \langle M_{bin}, \{\vee\} \rangle$  является полугруппой.

Нулевая матрица в этой полугруппе является нейтральным элементом относительно главной операции  $\vee$ :

$$I_{bin} \vee O = \|x_{ij}\| \vee \|0\| = \|x_{ij} \vee 0\| = \|0 \vee x_{ij}\| = \|0\| \vee \|x_{ij}\| = O \vee I_{bin} = \|0\|$$

■

На основании 1 и 4 свойства булевой функции  $\oplus$  верным будет следующее утверждение.

*Утверждение 6 [102-105]: Алгебра  $M_B^\oplus = \langle M_{bin}, \{\oplus, O\} \rangle$  есть моноид.*

*Доказательство:* Согласно определению моноид – это полугруппа с нейтральным элементом относительно ее главной бинарной ассоциативной операции. Главная операция  $\oplus$  по 4 свойству соответствующей булевой функции обладает свойством ассоциативности, ибо алгебра  $\mathfrak{I}_B^\oplus = \langle M_{bin}, \{\oplus\} \rangle$  является полугруппой.

Нулевая матрица в этой полугруппе является нейтральным элементом относительно главной операции  $\oplus$ :

$$I_{bin} \oplus O = \|x_{ij}\| \oplus \|0\| = \|x_{ij} + 0\| = \|0 + x_{ij}\| = \|0\| \oplus \|x_{ij}\| = O \oplus I_{bin} = \|0\|$$

■

Ясно, что моноид  $M_B^\vee$  претендовать на роль группы не может, ибо 2 свойство соответствующей булевой функции отрицает существование симметричного справа элемента на множестве  $\{0,1\}$ . В отличие от него моноид  $M_B^\oplus$  является абелевой группой [102-105]. Согласно 2 свойству любой элемент является симметричным относительно операции  $\oplus$  самому себе. Следовательно, верным будет следующее утверждение.

*Утверждение 7* [102-105]: Алгебра  $\mathfrak{J}_B^\oplus = \langle M_{bin}, \{\oplus, f'\} \rangle$ , где

$(\forall x \in M_{bin}) [f'(x) = x]$  есть абелева группа типа  $(2,1)$ .

*Доказательство:* Ранее было доказано, что алгебра  $\mathfrak{J}_B^\oplus = \langle M_{bin}, \{\oplus\} \rangle$  есть полугруппа, а алгебра  $M_B^\oplus = \langle M_{bin}, \{\oplus, O\} \rangle$  - моноид. Следовательно, остается доказать, что для каждого элемента  $M_{bin}$  существует симметричный элемент. На самом деле, если  $I_{bin}, I_{bin}' \in M_{bin}$ , то

$$I_{bin} \oplus I_{bin}' = I_{bin} \oplus f'(I_{bin}') = f'(I_{bin}) \oplus I_{bin}' = I_{bin} \oplus I_{bin}' = \|x_{ij}\| \oplus \|x_{ij}'\| = \|x_{ij} + x_{ij}'\| = \|0\| = O$$

Любой абелевой группе присуща коммутативность относительно главной бинарной операции, что выполняется также и в этом случае:

$$I_{bin}' \oplus I_{bin}'' = \|x_{ij}'\| \oplus \|x_{ij}''\| = \|x_{ij}' + x_{ij}''\| = \|x_{ij}'' + x_{ij}'\| = I_{bin}'' \oplus I_{bin}'$$

Что и требовалось доказать.

■

Далее будем использовать более сложные булевые функции [72] в качестве главной бинарной операции разрабатываемых алгебр [102-105]. Общая таблица истинности приведена ниже на таблице 3.1.

Таблица 3.1

Булевы функции

Аргументы		Обозначения функций														
x	y	$f_x$	$f_y$	$x'$	$y'$	$\wedge$	$\vee$	$+$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\leftrightarrow$	$\rightarrow'$	$\leftarrow'$	$\downarrow$		
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0

В качестве главных операций АБР используем булевые функции  $f_x(x, y) = x$  и  $f_y(x, y) = y$  (или,  $xf_x y = x$  и  $xf_y y = y$  соответственно), которые определяются следующей таблицей истинности [72]:

x	y	$f_x(x, y)$	$f_y(x, y)$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Определим матричные формы для этих булевых функций.

*Определение 6* [72]: Функция

$$F_x(I_{bin}^{'}, I_{bin}^{''}) = I_{bin}^{' \cdot} F_x I_{bin}^{''} = \|x_{ij}\| F_x \|y_{ij}\| = \|x_{ij} f_x y_{ij}\| = \|x_{ij}\| \quad (87)$$

называется матричным  $f_x(x, y)$  и обозначается  $F_x(x, y)$  или  $F_x$ .

*Определение 7* [72]: Функция

$$F_y(I_{bin}^{'}, I_{bin}^{''}) = I_{bin}^{' \cdot} F_y I_{bin}^{''} = \|x_{ij}\| F_y \|y_{ij}\| = \|x_{ij} f_y y_{ij}\| = \|y_{ij}\| \quad (88)$$

называется матричным  $f_y(x, y)$  и обозначается  $F_y(x, y)$  или  $F_y$ .

Тогда верными для них будут следующие утверждения.

*Утверждение 8* [102-105]: Система  $\mathfrak{R}_B^L = \langle M_{bin}; \{F_x, F_y\} \rangle$ , где  $L = \{F_x, F_y\}$  есть алгебра типа  $(2, 2)$ , относящаяся к классу  $L$ .

*Доказательство:*

Основано на замкнутости булевых функций  $f_x$  и  $f_y$  на множестве {0,1}. На самом

$$\text{деле, } F_x(I'_{bin}, I''_{bin}) = I'_{bin} F_x I''_{bin} = \|x_{ij}\| F_x \|y_{ij}\| = \|x_{ij} f_x y_{ij}\| = \|x_{ij}\| = I''_{bin},$$

т.е.  $F_x : I'_{bin} \times I''_{bin} \rightarrow I''_{bin}$ . Следовательно,  $F_x$  замкнуто на множестве  $M_{bin}$ .

Аналогично, для булевой функции  $f_y$  на множестве {0,1}.

$$\text{На самом деле, } F_y(I'_{bin}, I''_{bin}) = I'_{bin} F_y I''_{bin} = \|x_{ij}\| F_y \|y_{ij}\| = \|x_{ij} f_y y_{ij}\| = \|y_{ij}\| = I''_{bin}, \text{ т.е.}$$

$$F_y : I'_{bin} \times I''_{bin} \rightarrow I''_{bin}. \text{ Следовательно, } F_y \text{ замкнуто на множестве } M_{bin}.$$

■

*Следствие 1* [102-105]: Система  $\mathfrak{R}_B^{F_x} = \langle M_{bin}; \{F_x\} \rangle$  есть алгебра типа (2),

относящаяся к классу  $L$ .

*Следствие 2* [102-105]: Система  $\mathfrak{R}_B^{F_y} = \langle M_{bin}; \{F_y\} \rangle$  есть алгебра типа (2),

относящаяся к классу  $L$ .

*Утверждение 9* [102-105]: Алгебра  $\mathfrak{R}_B^{F_x}$  есть полугруппа, которая обозначается

$$\mathfrak{I}_B^{F_x}.$$

*Доказательство:* По определению полугруппы для главной бинарной операции должно быть выполнено свойство ассоциативности.

На самом деле,

$$(I'_{bin} F_x I''_{bin}) F_x I'''_{bin} = I'_{bin} F_x I'''_{bin} = I'_{bin} \text{ и } I'_{bin} F_x (I''_{bin} F_x I'''_{bin}) = I'_{bin} F_x I''_{bin} = I'_{bin}.$$

Это означает, что  $(I'_{bin} F_x I''_{bin}) F_x I'''_{bin} = I'_{bin} F_x (I''_{bin} F_x I'''_{bin})$ .

■

*Утверждение 10* [102-105]: Алгебра  $\mathfrak{R}_B^{F_y}$  есть полугруппа, которая обозначается

$$\mathfrak{I}_B^{F_y}.$$

*Доказательство:* По определению полугруппы для главной бинарной операции должно быть выполнено свойство ассоциативности.

На самом деле,

$$(I'_{bin} F_y I''_{bin}) F_y I'''_{bin} = I''_{bin} F_y I'''_{bin} = I'''_{bin} \text{ и } I'_{bin} F_y (I''_{bin} F_y I'''_{bin}) = I'_{bin} F_y I''_{bin} = I'''_{bin}.$$

Это означает, что  $(I_{bin}^{\cdot} F_y I_{bin}^{\cdot}) F_y I_{bin}^{\cdot} = I_{bin}^{\cdot} F_y (I_{bin}^{\cdot} F_y I_{bin}^{\cdot})$ .

■

*Замечание:* Для дальнейшего развития полугрупп  $\mathfrak{R}_B^{F_x}$  и  $\mathfrak{R}_B^{F_y}$  необходимо выделить нейтральный элемент относительно главных бинарных операций  $F_x$  и  $F_y$ . Из определений ясно, что для функции  $f_x$  существует только правый нейтральный элемент, а для функции  $f_y$  - только левый нейтральный элемент. Следовательно, на основе матричных операций  $F_x$  и  $F_y$  нельзя построить моноиды, ибо в них должны существовать нейтральные и справа, и слева одинаковые элементы. Аналогично, на базе этих операций также нельзя построить группы, ибо будут отсутствовать и симметричные элементы [102-105].

Теперь в роли главных операций рассмотрим такие булевые функции, как:  $x^{\cdot}$ ,  $y^{\cdot}$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftarrow$ ,  $\rightarrow^{\cdot}$ ,  $\leftarrow^{\cdot}$ ,  $\downarrow$  и  $|$  [72]. Все они являются замкнутыми на множестве  $\{0,1\}$ . Следовательно, верным будет утверждение и следствие из него.

*Утверждение 11* [102-105]: Система  $\mathfrak{R}_B^L = \langle M_{bin}; \{x^{\cdot}, y^{\cdot}, \rightarrow, \leftarrow, \rightarrow^{\cdot}, \leftarrow^{\cdot}, \downarrow, |\}\rangle$ , где  $L = \{x^{\cdot}, y^{\cdot}, \rightarrow, \leftarrow, \rightarrow^{\cdot}, \leftarrow^{\cdot}, \downarrow, |\}$  есть алгебра типа  $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$ , относящаяся к классу  $L$ .

*Доказательство:* На самом деле, основываясь на таблицах истинности соответствующих им булевых функций можно однозначно утверждать, что эти матричные формы булевых функций замкнуты на множестве  $M_{bin}$ . Следовательно, определенная таким образом система  $\mathfrak{R}_B^L = \langle M_{bin}; \{x^{\cdot}, y^{\cdot}, \rightarrow, \leftarrow, \rightarrow^{\cdot}, \leftarrow^{\cdot}, \downarrow, |\}\rangle$  является алгеброй указанного порядка.

■

*Следствие* [102-105]: Системы

$$\mathfrak{R}_B^{x^{\cdot}} = \langle M_{bin}; \{x^{\cdot}\} \rangle, \quad \mathfrak{R}_B^{y^{\cdot}} = \langle M_{bin}; \{y^{\cdot}\} \rangle, \quad \mathfrak{R}_B^{\rightarrow} = \langle M_{bin}; \{\rightarrow\} \rangle, \quad \mathfrak{R}_B^{\leftarrow} = \langle M_{bin}; \{\leftarrow\} \rangle,$$

$$\mathfrak{R}_B^{\rightarrow^{\cdot}} = \langle M_{bin}; \{\rightarrow^{\cdot}\} \rangle, \quad \mathfrak{R}_B^{\leftarrow^{\cdot}} = \langle M_{bin}; \{\leftarrow^{\cdot}\} \rangle, \quad \mathfrak{R}_B^{\downarrow} = \langle M_{bin}; \{\downarrow\} \rangle, \quad \mathfrak{R}_B^{|} = \langle M_{bin}; \{| \} \rangle$$

являются алгебрами типа (2), относящиеся классу  $L$ .

*Замечание:* Указанные в следствии алгебры не могут претендовать в роль полугрупп, моноидов и групп в силу нарушения в них свойств ассоциативности [102-105].

Не рассмотренным из числа булевых функций остается эквивалентность  $\Leftrightarrow$ , которая является отрицанием булевой функции  $\oplus$ , называемой взаимоисключающим ИЛИ, сложением по модулю два или суммой Жегалкина. Особый интерес к этой функции обусловлен ее свойствами. Ниже приведена таблица истинности этой функции [72].

X	y	$\Leftrightarrow$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Исходя из этой таблицы, можно сформулировать ее свойства:

1.  $x \Leftrightarrow 1 = 1 \Leftrightarrow x = x$
2.  $x \Leftrightarrow x = 1$
3.  $x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$  (89)
4.  $x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z) = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z$

*Определение 8* [72]: Матричной эквивалентностью  $\Leftrightarrow$  над бинарными реализациями  $I_{bin}^{\cdot} = \|x_{ij}^{\cdot}\|$ ,  $x_{ij}^{\cdot} \in \{0,1\}$  и  $I_{bin}^{\cdot\cdot} = \|x_{ij}^{\cdot\cdot}\|$ ,  $x_{ij}^{\cdot\cdot} \in \{0,1\}$  называется логическая эквивалентность  $\Leftrightarrow$  над соответствующими элементами этих реализаций, т.е.

$$I_{bin}^{\cdot} \Leftrightarrow I_{bin}^{\cdot\cdot} = \|x_{ij}^{\cdot}\| \Leftrightarrow \|x_{ij}^{\cdot\cdot}\| = \|x_{ij}^{\cdot}\| \Leftrightarrow \|x_{ij}^{\cdot\cdot}\| = \|x_{ij}^{\cdot}\| = I_{bin} \quad (90)$$

*Утверждение 12* [102-105]: Система  $\mathfrak{R}_B^{\Leftrightarrow} = \langle M_{bin}, \{\Leftrightarrow\} \rangle$  является алгеброй типа (2), относящаяся к классу L.

*Доказательство:* Доказательство этого утверждения основано на замкнутости ее главной операций на множестве  $\{0,1\}$ , согласно определению:

$$I_{bin}^{\cdot} \Leftrightarrow I_{bin}^{\cdot\cdot} = \|x_{ij}^{\cdot}\| \Leftrightarrow \|x_{ij}^{\cdot\cdot}\| = \|x_{ij}^{\cdot}\| \Leftrightarrow \|x_{ij}^{\cdot\cdot}\| = \|x_{ij}^{\cdot}\| = I_{bin}$$

Следовательно,  $I_{bin} \Leftrightarrow I_{bin} = I_{bin}$ , что и требовалось доказать.

■

*Утверждение 13* [102-105]: Алгебра  $\mathfrak{R}_B^{\Leftrightarrow} = \langle M_{bin}, \{\Leftrightarrow\} \rangle$  является полугруппой и

обозначается  $\mathfrak{I}_B^{\oplus}$ , т.е.  $\mathfrak{R}_B^{\Leftrightarrow} = \mathfrak{I}_B^{\oplus}$

*Доказательство:* Доказательство этого утверждения основано на свойстве ассоциативности булевой функции  $\Leftrightarrow$ :

$$\begin{aligned} I_{bin} \Leftrightarrow (I_{bin} \Leftrightarrow I_{bin}) &= \|x_{ij}\| \Leftrightarrow (\|x_{ij}\| \Leftrightarrow \|x_{ij}\|) = \|x_{ij}\| \Leftrightarrow \|x_{ij} \Leftrightarrow x_{ij}\| = \times \\ \times &= \|x_{ij} \Leftrightarrow (x_{ij} \Leftrightarrow x_{ij})\| = \|(x_{ij} \Leftrightarrow x_{ij}) \Leftrightarrow x_{ij}\| = \|x_{ij} \Leftrightarrow x_{ij}\| \Leftrightarrow \|x_{ij}\| = \times \\ \times &= (\|x_{ij}\| \Leftrightarrow \|x_{ij}\|) \Leftrightarrow \|x_{ij}\| = (I_{bin} \Leftrightarrow I_{bin}) \Leftrightarrow I_{bin} \end{aligned}$$

■

На основании 1 и 4 свойства булевой функции  $\Leftrightarrow$  верным будет следующее утверждение.

*Утверждение 14* [102-105]: Алгебра  $\mathbf{M}_B^{\Leftrightarrow} = \langle M_{bin}, \{\Leftrightarrow, I\} \rangle$  есть моноид.

*Доказательство:* Согласно определению моноид – это полугруппа с нейтральным элементом  $I = \|1\|$  относительно ее главной бинарной ассоциативной операции. Главная операция  $\Leftrightarrow$  по 4 свойству соответствующей булевой функции обладает свойством ассоциативности, ибо алгебра  $\mathfrak{R}_B^{\Leftrightarrow} = \langle M_{bin}, \{\Leftrightarrow\} \rangle$  является полугруппой.

Матрица  $I = \|1\|$  в этой полугруппе является нейтральным элементом относительно главной операции  $\Leftrightarrow$ :

$$I_{bin} \Leftrightarrow I = \|x_{ij}\| \Leftrightarrow \|1\| = \|x_{ij} \Leftrightarrow 1\| = \|1 \Leftrightarrow x_{ij}\| = \|1\| \Leftrightarrow \|x_{ij}\| = I \Leftrightarrow I_{bin} = I_{bin}$$

■

Согласно 2 свойству любой элемент является симметричным относительно операции  $\Leftrightarrow$  самому себе. Следовательно, верным будет следующее утверждение.

*Утверждение 15* [102-105]: Алгебра  $\mathfrak{I}_B^{\leftrightarrow} = \langle M_{bin}, \{\leftrightarrow, f'\} \rangle$ , где  $(\forall x \in M_{bin}) [f'(x) = x]$  есть абелева группа типа (2,1).

*Доказательство:* Ранее было доказано, что алгебра  $\mathfrak{I}_B^{\leftrightarrow} = \langle M_{bin}, \{\leftrightarrow\} \rangle$  есть полугруппа, а алгебра  $M_B^{\leftrightarrow} = \langle M_{bin}, \{\leftrightarrow, I\} \rangle$  - моноид. Следовательно, остается доказать, что для каждого элемента  $M_{bin}$  существует симметричный элемент. На самом деле, если  $I_{bin}, I_{bin}' \in M_{bin}$ , то

$$I_{bin} \Leftrightarrow I_{bin}' = I_{bin} \Leftrightarrow f'(I_{bin}) = f'(I_{bin}') \Leftrightarrow I_{bin} = I_{bin}' \Leftrightarrow I_{bin} = \|x_{ij}\| \Leftrightarrow \|x_{ij}\| = \|x_{ij}'\| = \|x_{ij} \leftrightarrow x_{ij}'\| = \|1\| = I$$

Любой абелевой группе присуща коммутативность относительно главной бинарной операции, что выполняется также и в этом случае:

$$I_{bin}' \Leftrightarrow I_{bin}'' = \|x_{ij}\| \Leftrightarrow \|x_{ij}'\| = \|x_{ij} \leftrightarrow x_{ij}'\| = \|x_{ij}' \leftrightarrow x_{ij}\| = I_{bin}'' \Leftrightarrow I_{bin}'$$

Что и требовалось доказать.

■

Математическая морфология предоставляет для исследований интересные операции над объектами предметной области [107-109, 114-117]. Эти операции могут играть роль главных. Хотя в математической морфологии операции описаны как бинарные, в разделе «3.2.4 Преобразования изображений и их классификация» они были определены в виде унарных операций [75-87]:

$$O_T^{dl}(I_{bin}; \|\mu\|) = I_{bin} \oplus \|\mu\| = A \oplus B \quad (91)$$

$$O_T^{er}(I_{bin}; \|\mu\|) = I_{bin} \square \|\mu\| = A \square B \quad (92)$$

$$O_T^{\circ}(I_{bin}; \|\mu\|) = O_T^{dl}(O_T^{er}(I_{bin}; \|\mu\|); \|\mu\|) = (A \square B) \oplus B \quad (93)$$

$$O_T^{\bullet}(I_{bin}; \|\mu\|) = O_T^{el}(O_T^{dl}(I_{bin}; \|\mu\|); \|\mu\|) = (A \oplus B) \square B \quad (94)$$

где  $A = I_{bin}$ ,  $B = \|\mu\|$ .

Такой ход имеет простые аргументы:

- множества, являющиеся operandами бинарных морфологических операций не равнозначны – первый operand обычно рассматривается

как множество данных, а второй – как маска для преобразования первого операнда;

- при рассмотрении операций дилатации и эрозии в виде бинарных главных операций алгебры не выполняется, например, свойство коммутативности;
- унарная же форма представления базовых морфологических операций позволяет также определять другие морфологические операции через основные;
- возможна унификация с терминологией дескриптивных алгебр изображений.

Рассмотрим в роли главных операций морфологические операции:  $dl$ ,  $er$ ,  $\circ$  и  $\bullet$  [75-87]. Все они являются замкнутыми на множестве  $M_{bin} = \{I_{bin}\}$ . Это основано на определениях эрозии и дилатации, которые определены как множества точек после применения к исходным множествам теоретико-множественных операций. В итоге результат применения операций дилатации и эрозии также будет представлять собой бинарную реализацию, математической моделью которой является  $I_{bin}$ . Операции же замыкания и размыкания определяются через операции дилатации и эрозии. Поэтому они тоже будут замкнуты на множестве  $M_{bin}$ . Следовательно, верным будет утверждение и следствие из него.

*Утверждение 16* [102-105]: Система  $\mathfrak{R}_B^M = \langle M_{bin}; \{dl, er, \bullet, \circ\} \rangle$ , где  $M = \{dl, er, \bullet, \circ\}$  есть алгебра типа  $(2, 2, 2, 2)$ , относящаяся к классу  $M$ .

*Доказательство:* На самом деле, главные операции алгебры  $\mathfrak{R}_B^M$  замкнуты на множестве  $M_{bin}$ . Это следует из того, что дилатация и эрозия замкнуты на указанном множестве, а операции замыкания и размыкания определены через дилатацию и эрозию. Последнее означает также замкнутость замыкания и размыкания. Следовательно, определенная таким образом система  $\mathfrak{R}_B^M = \langle M_{bin}; \{dl, er, \bullet, \circ\} \rangle$  является алгеброй указанного порядка.



*Следствие [102-105]: Системы*

$$\mathfrak{R}_B^{dl} = \langle M_{bin}; \{dl\} \rangle, \quad \mathfrak{R}_B^{er} = \langle M_{bin}; \{er\} \rangle, \quad \mathfrak{R}_B^{\bullet} = \langle M_{bin}; \{\bullet\} \rangle, \quad \mathfrak{R}_B^{\circ} = \langle M_{bin}; \{\circ\} \rangle$$

являются алгебрами типа (2), относящимся классу  $M$ .

Для дальнейшего развития определенных ранее алгебр нужно выявить из числа рассмотренных главных операций такие, которым свойственна ассоциативность [102-105]. Ниже приведена общая форма записи свойства для морфологических операций [107-109, 114-117]:

$$O_T^{morph} \left( O_T^{morph} \left( I_{bin}; (\|\mu_1\|F\|\mu_2\|) \right); \|\mu_3\| \right) = O_T^{morph} \left( \|\mu_1\| O_T^{morph} \left( I_{bin}; (\|\mu_2\|F\|\mu_3\|) \right) \right), \quad (95)$$

где символ  $F$  обозначает операцию над масками для морфологических операций, и, следовательно, является некоторым варьируемым параметром. Для проверки или доказательства выполнения свойства ассоциативности предварительно ввести операцию  $F$ . В силу того, что ее операнды являются бинарными матрицами или бинарными реализациями, то верным будет  $F \in \{+, *, or, and, xor, \dots\}$ .

### 3.2 Модифицированные дескриптивные алгебры полутоновых и цветных изображений

Рассмотрим множество всех возможных полутоновых изображений, реализации которых обычно обозначаются как  $I_{gray} = \|x_{ij}\|$ ,  $x_{ij} \in [0, 255]$ . Для обозначения полутоновых реализаций используем символ  $M_{gray}$ , т.е.  $M_{gray} = \{I_{gray}\}$ . В дальнейшем в выражениях полутоновые реализации  $I_{gray}$  будем обозначать прописными латинскими буквами для их удобочитаемости. Рассмотрим множество полутоновых реализаций в качестве основного множества алгебры  $\mathfrak{R}_G^L$ , элементы которого будут являться элементами алгебры. В таком случае остается определить главные операции алгебры  $\mathfrak{R}_G^L$ . Главные операции алгебры определим аналогичным образом, как и в случае с алгеброй  $\mathfrak{R}_G^L$  [102-105]. Ясно, что на  $M_{gray}$  можно определить только одну замкнутую операцию –

матричную операцию  $XOR$ . Дизъюнкция и конъюнкция на множестве  $[0, 255]$  не являются замкнутыми [72].

Согласно таблице истинности  $XOR$  для нее свойственно [72]:

1.  $x \ XOR \ 0 = x$
  2.  $0 \ XOR \ x = x$
  3.  $x \ XOR \ y = y \ XOR \ x$
  4.  $x \ XOR \ (y \ XOR \ z) = (x \ XOR \ y) \ XOR \ z$
  5.  $x \ XOR \ x = 0$
- (96)

Исходя из 1 и 2 свойства этой операции, можно заключить, что наблюдается совпадение правого и левого нейтрального элемента в лице числа 0, которое является единственным в рассматриваемой области определения главной бинарной операции [102-105]. Однако элементы создаваемой алгебры представляют собой более общие случаи, нежели числа. Поэтому было бы правильным определить главную операцию  $XOR$  следующим образом:

*Определение 9* [70-72]: Матричной операцией  $XOR$  называется поэлементная операция  $XOR$ , т.е.

$$A \oplus B = \|a_{ij}\| \oplus \|b_{ij}\| = \|a_{ij} + b_{ij}\|, \quad (97)$$

где  $A = \|a_{ij}\|$ ,  $B = \|b_{ij}\|$ .

*Замечание:* определенная таким образом главная операция позволяет обрабатывать матричные операнды на уровне элементов матрицы, представляющих собой математическую форму реализаций изображений. Матричную операцию  $XOR$  обозначим  $\oplus$ . Матричная операция  $\oplus$  является также бинарной операцией. Согласно определению главных операций в алгебре могут быть использованы и другого ранга главные операции [102-105].

*Определение 10* [102-105]: Алгеброй полутоновых реализаций (АПР)  $\mathfrak{R}_G^L$  называется алгебра типа (2) с основным множеством  $M_{gray}$  и главной бинарной операцией  $\oplus$ , т.е.  $\mathfrak{R}_G^L = \langle M_{gray}, \{\oplus\} \rangle$ .

*Определение 11* [102-105]: Полугруппа  $\mathfrak{I}_P^\oplus$  называется полугруппой полутонаовых реализаций.

*Утверждение 17* [102-105]: Алгебра  $\mathfrak{R}_G^L = \langle M_{gray}, \{\oplus\} \rangle$  является полугруппой, которая обозначается  $\mathfrak{I}_P^\oplus$ , т.е.  $\mathfrak{R}_G^L \equiv \mathfrak{I}_P^\oplus$ .

*Доказательство:* По определению полугруппы, главная бинарная операция должна обладать свойством ассоциативности. Так как

$$\begin{aligned} A \oplus (B \oplus C) &= \|a_{ij}\| \oplus (\|b_{ij}\| \oplus \|c_{ij}\|) = \|a_{ij}\| \oplus \|b_{ij} + c_{ij}\| = \|a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})\| = \times \\ &\times = \|(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}\| = \|a_{ij} + b_{ij}\| \oplus \|c_{ij}\| = (\|a_{ij}\| \oplus \|b_{ij}\|) \oplus \|c_{ij}\| = (A \oplus B) \oplus C \end{aligned},$$

то утверждение доказано.

■

*Замечание:* ППР удобно использовать для создания изображений на основе двух первоначальных. Обычно одну из них называют маской, а другую начальным изображением. Использование главной бинарной операции  $\oplus$  позволяет преобразовать начальное изображение в другое изображение. К полученному изображению также можно применить  $\oplus$  с той же самой маской. Последовательное применения главной бинарной операции полугруппы с постоянной маской позволяет свести начальной изображение к некоторому конечному состоянию. Последовательность таких преобразований обычно является решением некоторой задачи. Таким образом, процесс решения задачи «преобразования начального изображения операцией  $\oplus$  с постоянной маской» легко можно записать в виде полугруппы  $\mathfrak{I}_P^\oplus$  [102-105].

*Утверждение 18* [102-105]: Алгебра  $M_G = \langle M_{gray}, \{\oplus, O\} \rangle$  есть моноид.

*Доказательство:*

Согласно определению монида должны быть выполнены следующие условия [102-105]:

1. главная бинарная операция  $\oplus$  должна обладать свойством ассоциативности;
2. элемент  $O$  является нейтральным элементом относительно операции  $\oplus$ .

Проведем проверку этих свойств:

$$\begin{aligned} A \oplus (B \oplus C) &= \|a_{ij}\| \oplus (\|b_{ij}\| \oplus \|c_{ij}\|) = \|a_{ij}\| \oplus \|b_{ij} + c_{ij}\| = \|a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})\| = \times \\ &\times = \|(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}\| = \|a_{ij} + b_{ij}\| \oplus \|c_{ij}\| = (\|a_{ij}\| \oplus \|b_{ij}\|) \oplus \|c_{ij}\| = (A \oplus B) \oplus C \end{aligned}$$

Далее покажем существование нейтрального элемента относительно этой главной бинарной операции, обладающей свойством ассоциативности.

На основании 5 свойства операции  $XOR$  ясно, что

$$A \oplus A = \|a_{ij}\| \oplus \|a_{ij}\| = \|a_{ij} + a_{ij}\| = \|0\| = O$$

где нулевая матрица  $O$  является нейтральным элементом относительно главной операции  $\oplus$ . Причем любая реализация является обратной к себе относительно этой же главной бинарной операции.

■

Введем в алгебру дополнительную унарную операцию  $f'$ . Под унарной операцией  $f'$  будем понимать матричное отображение [102-105]:

$$f' : M \rightarrow M$$

Такое отображение для каждого элемента  $M_{gray}$  ставить в соответствие тот же самый элемент. Это означает, что отображению  $f'$  является рефлексивным отображением.

*Утверждение 19* [102-105]: Алгебра  $\mathfrak{I}_G = \langle M_{gray}, \{\oplus, f'\} \rangle$  есть абелева группа типа  $(2, 1)$ .

*Доказательство:*

Ранее было доказано, что алгебра  $M_G = \langle M_{gray}, \{\oplus, O\} \rangle$  является моноидом. Это означает выполнение обладание свойством ассоциативности главной бинарной операции и существование нейтрального элемента относительно  $\oplus$ . Элемент называется нейтральным относительно некоторой операции, если он является левым и правым одновременно нейтральным элементом относительно этой же операции.

При доказательстве предыдущей теоремы было показано, что,

$$A \oplus A = \|a_{ij}\| \oplus \|a_{ij}\| = \|a_{ij} + a_{ij}\| = \|0\| = O,$$

Это означает, что

$$A \oplus A' = A \oplus f'(A) = A \oplus A = \|a_{ij}\| \oplus \|a_{ij}\| = \|a_{ij} + a_{ij}\| = \|0\| = O$$

Таким образом, алгебра  $\mathfrak{I}_G = \langle M_{gray}, \{\oplus, f'\} \rangle$ , по определению, является группой.

Покажем, что главная бинарная операция  $\oplus$  обладает свойством коммутативности.

$$A \oplus B = \|a_{ij}\| \oplus \|b_{ij}\| = \|a_{ij} + b_{ij}\| = \|b_{ij} + a_{ij}\| = \|b_{ij}\| \oplus \|a_{ij}\| = B \oplus A$$

Следовательно, алгебра  $\mathfrak{I}_G$  является абелевой группой.

■

*Следствие [102-105]: Абелева группа  $\mathfrak{I}_G$  есть группа конечного порядка.*

На самом деле, по определению, группа, основное множество которой содержит конечное число элементов, относится к числу групп с конечным порядком. В силу того, что любой элемент множества  $M_{gray}$  содержит конечное число элементов (всего 256 элементов имеется множестве  $[0,255]$ ), перестановка этих элементов также будет выражено конечным числом.

Согласно, законам комбинаторики [70, 71] для матрицы размера  $m \times n$  имеется  $256^{mn}$  разных состояний, если каждый элемент принимает свое значение из  $[0,255]$ . А этого число, хотя очень большое, но конечное. Так как основное множество алгебры  $M_{gray}$  содержит только однотипные элементы (матрицы одинаковой размерности), то их можно принимать как различные состояния единственной матрицы размера  $m \times n$ . Это означает, что алгебра  $\mathfrak{I}_G$  относится к числу групп с конечным порядком [102-105].

В приведенных теоретических положениях остается одно непонятным – где и как можно использовать сформулированные теоретические единицы. Для этого вспомним предназначение алгебры. Алгебра, по сути, это совокупность основного множества из однотипных элементов и множества главных операций над этими элементами, которые замкнуты на первом множестве [102-105]. При этом для главных операций, на верхнем уровне абстрагирования, выполняется всего лишь

требование замкнутости. Алгебра направлена на объединение предварительно выбранных элементов по законам, описанным в главных операциях. Главные операции могут быть записаны как в явной формализованной форме, так и могут быть приведены в неявной форме. Главные операции алгебры описывают, как одни элементы получать из других элементов, или как преобразовывать выделенные элементы [102-105]. Но применение главных операций необязательно приводит к требуемым элементам – могут появляться и другие элементы. Такие элементы, которые не запланированы, обычно относят к числу побочных элементов. В основном, если в качестве элементов основного множества алгебры брать реализации изображений, то содержание побочных элементов может не иметь никакого отношения к рассматриваемой предметной области и поставленной задаче. Хотя не исключено, что среди них могут появиться такие реализации, которые были не учтены на этапе отбора начальных данных. Такая алгебра аналогична алгебре высказываний из математической логики, которая также абстрагируется от содержимого этих высказываний [72].

Чем больше идет конкретизация алгебры, тем больше требований накладывается на главные операции. Основные прикладные операции в области обработки изображений не являются бинарными, а относятся к числу унарных [102-105]. Поэтому при создании алгебры для обработки и анализа приходится использовать более общие математические операции, например, алгебраические, логические и т.п. Ниже рассмотрим пример использования абелевой группы с главными операциями в виде логических операций для описания полутоновых реализаций.

Алгебра, основное множество которой состоит из реализаций, а множество главных операций – из процедурных преобразований позволяет исследовать процесс преобразования исходных изображений в конечные изображения [122-139]. По-другому этот процесс преобразования можно назвать решением поставленной задачи или процессом конструирования хода решения задачи. Согласно алгебраическому подходу [122-139] основное множество алгебры можно интерпретировать как все возможные состояния некоторого объекта

исследования, элементы которого могут сыграть роль их значений. Например, если возьмем в качестве начальных данных некоторое изображение, то процесс его фильтрации является процессом сведения начального изображения к целевому состоянию, в котором полностью или частично отсутствует ненужная информация. Для этого необходимо подобрать такой метод фильтрации с некоторым набором значений его параметров, при использовании которого в определенном порядке можно будет получить другие изображения. Эти изображения должны быть элементами основного множества алгебры. Но, к сожалению, ныне существующие методы фильтрации, формально, являются унарными операциями со скалярными, векторными или матричными параметрами.

В предыдущем параграфе рассматривалась полугруппа полутоночных реализаций  $\mathfrak{I}_P^\oplus$  [102-105]. ППР  $\mathfrak{I}_P^\oplus$  можно использовать в качестве модели процесса преобразования полутоночных реализаций. Но ППР по своему математическому строению является простой алгеброй. Ее главная операция является бинарной, т.е. ранг этой операции равен 2. Использование в качестве главной операции алгебры операции с рангом 1 также возможно. Такая алгебра будет примитивной и обычно такие алгебраические системы не изучаются в силу их тривиальности [102-105].

*Утверждение 20* [102-105]: Система  $\left\langle M_{gray}, \left\{ O_T^{filter}(\cdot; \bar{\mu}) \right\} \right\rangle$  является алгеброй типа

(1) и обозначается  $\mathfrak{R}_P^F$ , т.е.  $\mathfrak{R}_P^F = \left\langle M_{gray}, \left\{ O_T^{filter}(\cdot; \bar{\mu}) \right\} \right\rangle$

*Доказательство:* При изучении методов линейной и нелинейной пространственной фильтрации был получен результат:

$$O_T^{filter}(I_{gray}^{'}, (n, m)) = I_{gray}^{''}$$

Это означает, что операция  $O_T^{filter}$  замкнута на множестве  $M_{gray}$  и  $\text{rang}(O_T^{filter}) = 1$ .

Следовательно, по определению  $\mathfrak{R}_P^F$  есть алгебра типа (1).

■

*Замечание:* Как известно введение во множество главных операций дополнительных операций позволяет специализировать и конкретизировать алгебру. Введение дополнительных главных операций и конкретизация алгебры накладывает на нее ограничения в смысле уменьшения способов взаимного описания элементов. Подобные алгебраические системы находят большое применение на практике и считаются наиболее ценными. Аналогично ГПР АФПР можно применять для описания процесса фильтрации исходных полутоновых реализаций.

*Определение 12 [102-105]:* Алгебра  $\mathfrak{R}_P^F$  называется алгеброй фильтрации полутоновых реализаций (АФПР).

Рассмотренные выше алгебраические структуры представляют собой математические модели пространств обработки изображений. Так как каждая такая алгебра содержит в своем основном множестве только однотипные элементы, то невозможно с их помощью описать процессы преобразования разноформатных изображений. Это наталкивает на мысль их объединения в более сложный математический объект, который подобен пространству состояний объектов исследования.

Алгебры изображений и дескриптивные алгебры изображений имеют общие черты, которые заключаются в одинаковой природе основного множества алгебры и в однотипности главных операций [122-139]. Было бы правильным сказать, что ДАИ являются расширением алгебр изображений вообще. В первой главе были сформулированы основные достоинства ДАИ:

8. построение унифицированных представлений для описания изображений;
9. эффективность перехода от входной информации в виде изображений к различным формальным моделям изображений;
10. естественность объединения алгебраического представления информации с разработанным и успешно применяемым алгебраическим аппаратом распознавания образов;

11. возможность использования методов математического моделирования, применяемых в тех прикладных областях, к которым относятся обрабатываемые изображения;
12. возможность использования описаний изображений в виде теоретико-групповых представлений;
13. естественность объединения методов структурного анализа изображений с аппаратом вероятностного анализа;
14. возможность формализованного описания для задач распараллеливания с учетом специфики конкретных вычислительных архитектур.

В диссертационной работе упор делается на пункты 1, 3, 4, 6 и 7. Особо стоит отметить в этом списке альтернативный и более естественный вариант реализации пункта «эффективность перехода от входной информации в виде изображений к различным формальным моделям изображений». Под формальными моделями в дальнейшем нужно будет понимать идеализированные после применения операции структуризации к реализации изображений. Интересную задачу формирует 7 пункт – «возможность формализованного описания для задач распараллеливания с учетом специфики конкретных вычислительных архитектур». С учетом основных результатов диссертационной работы седьмой пункт можно сформулировать следующим образом: возможность распараллеливания процесса построения и поиска решения поставленных задач и их реализация на параллельных вычислительных машинах. Для более четкого понимания выбора мощных параллельных вычислительных систем для решения задач обработки, анализа и распознавания изображений, проведем подробный анализ и приведем аргументы, обуславливающие необходимость их использования.

Исходными данными для задач обработки, анализа и распознавания изображений являются дискретные цифровые изображения наблюдаемой сцены. В вычислительных системах они представляются в разных форматах и группируются в бинарные, полутоночные и цветные реализации изображений. Набор однотипных реализаций можно рассматривать в качестве элементов

основного множества некоторой алгебры [102-105]. В данном случае алгебра формирует единую среду оперирования над этими элементами. Роль операций играют главные операции алгебры, которые могут иметь различные ранги: нульместные, унарные, бинарные и т.д. Главные операции алгебры замкнуты на ее основном множестве, т.е. применение любой главной операции к элементам основного множества позволяет получить снова элементы из этого множества [102-105]. К числу таких операций можно отнести все возможные бинарные операции над реализациями.

В пункте «Преобразования изображений и их классификация» главы 2 использование разного типа математических операций предполагает деление алгебр на классы: А, L, F и M. В работах И.Б. Гуревича и его учеников [122-139], в основном исследованы алгебры класса А. В более ранних работах рассматриваются алгебры как класса А, так и классов L и M. Если для их обозначения в ранних исследованиях использовался термин «алгебра изображений» [107-109, 115-121], то в дальнейшем вводятся термины «дескриптивный подход к обработке, анализу и распознаванию изображений» и «дескриптивные алгебры изображений» [122-139]. Конечно же, введение нового термина должно иметь под собой жесткую основу. Приведенные в первой главе требования однозначно говорят в их пользу. Остается сделать одно только заключение, что алгебры изображений являются частным случаем дескриптивных алгебр изображений. Ранее было отмечено требование к выбору элементов основного множества подобных алгебр – «в качестве объектов могут использоваться точки, множества, модели, преобразования и морфизмы». В данной работе роль моделей в МДАИ играют геометрические места точек, что также обуславливает выбор специфичных операций их обработки.

### **3.3 Пространство обработки и анализа изображений**

Возвращаясь к главным операциям алгебр и их классификации, также приходим к заключению о том, что преобразования типа конвертации не могут

быть главными в пределах алгебры [102-105], содержащей однотипные реализации. Ибо, операция конвертирования по определению направлена на изменение типа ее аргумента. Это и означает, что она не может войти в список главных операций. Но так как она достаточно часто используется при решении задач обработки, анализа и распознавания изображений ее также нельзя исключать из списка формализуемых операций [75-87]. Для разрешения этой методологической проблемы остается единственный вариант – включение всех возможных реализаций изображений предметной области в основное множество алгебры. Однако это лишь усложняет разрабатываемую алгебру, увеличивая ее структурную неоднородность. Тогда становится понятным и место операции конвертирования. При таком раскладе эта операция начинает играть роль связующей операции между алгебрами. То есть, используя операцию конвертирования, возможен переход из одной разновидности алгебры в другую. Следовательно, постановка любой задачи обработки, анализа и распознавания изображений предполагает задание исходных данных во всех форматах изображений. Совокупность исходных изображений будет разделено на группы однотипных реализаций: бинарных, полутоновых и цветных. Наиболее важными среди них являются цветные изображения, что связано с возможностью получения из них остальных видов реализаций. Если реализация получена на аппаратном уровне, то ей будет присуща природа устройства фиксации изображения. Если же она получена посредством операции конвертирования, то данные будут отражать недостатки метода конвертации и природу устройства, фиксирующего цветные изображения. На выделенных группах возможно создание дескриптивных алгебр изображений за счет выбора замкнутых операций над реализациями в виде главных операций создаваемых алгебр [122-139]. Такие алгебры будут являться всего лишь подпространствами для некоторого единого пространства, где будет рассматриваться процесс решения задач обработки и анализа изображений. Таким образом, появляется аргумент в пользу введения нового термина «Пространство состояний изображений» (ПСИ). Это

пространство является пространством, где происходит обработка и анализ изображений [138].

Таким образом, вычислительный аппарат МДАИ демонстрирует достаточную гибкость в описании процессов обработки и анализа в едином математическом пространстве, называемым пространством состояний изображений (ПСИ). ПСИ состоит из МДАИ, представляющих универсальные алгебры на матрицах оцифрованных изображений. Аппарат МДАИ является разновидностью дескриптивных алгебр изображений (ДАИ) [122-139], исследуемых в ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, а ПСИ – это разновидность фазового пространства из ДПАИ [138].

Рассмотрим ПСИ, в котором протекают процессы обработки изображений (1):

$$GS_I = \langle \{I_f\}, \{O_T^{color \rightarrow gray}, O_T^{gray \rightarrow bin}\} \rangle, \quad f \in \{color, gray, bin\} \quad (98)$$

Элементами ПСИ являются все возможные изображения  $\{I_f\}$ , размеры которых одинаковы [138]. Кроме того, в ПСИ все элементы взаимосвязаны, так как оно является пространством состояний. Условно можно выделить следующие правила связей между элементами ПСИ: изменяется хотя бы один пиксель изображения (унарная операция); осуществляется преобразование всего изображения согласно определенному методу (унарная операция); результирующее изображение получается после применения бинарной операции двум начальным изображениям (поэлементные бинарные алгебраические операции). Все остальные операции могут быть легко сведены выше перечисленным за счет применения свойства ассоциативности, декомпозированы и представлены в виде композиции или суперпозиции базовых преобразований. Подчеркнем, что ПСИ структурно может быть разбито на взаимно не пересекающиеся подпространства (рисунок 3.1) согласно (2).

$$GS_I = \bigcup_{k=color}^{bin} G_k, \quad k \in \{color, gray, bin\}, \quad G_i \bigcap_{i \neq j} G_j = \emptyset \quad (99)$$

Связь подпространств  $G_k$  из (2) обеспечивают операции конвертирования

$\{O_T^{color \rightarrow gray}, O_T^{gray \rightarrow bin}\}$  из (1).

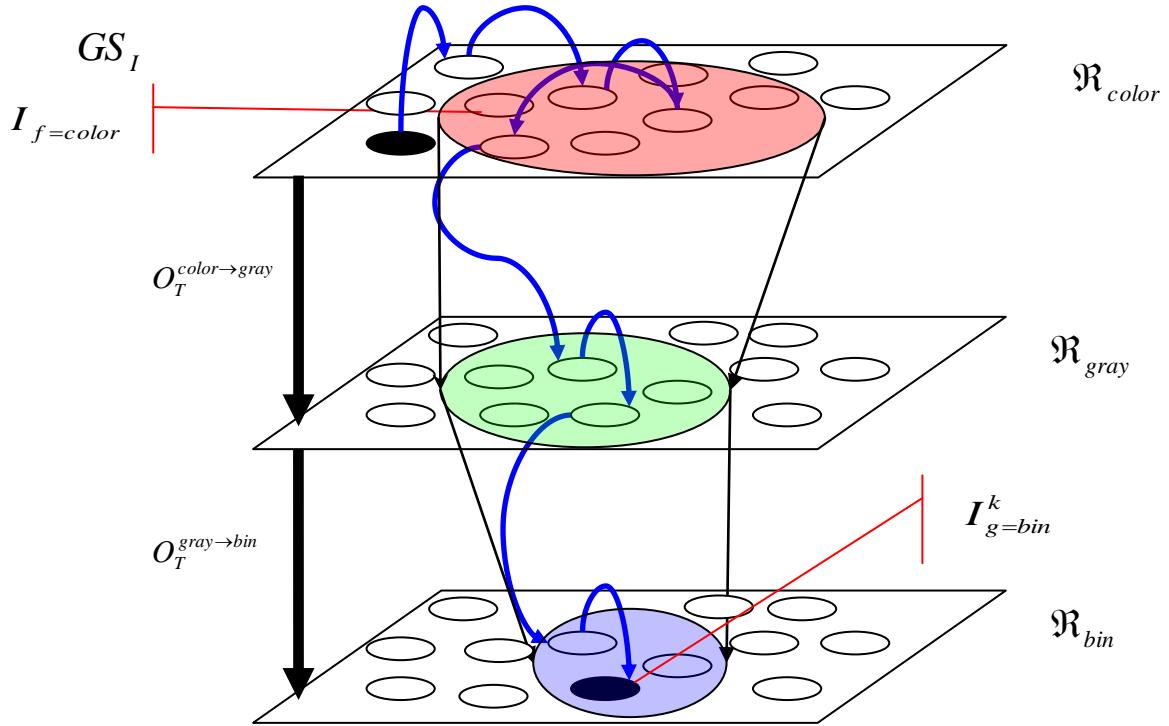


Рисунок 3.1 Структурно-графическое представление ПСИ.

Причем эти операции необратимы и, как следствие, переходы  $G_{bin} \rightarrow G_{gray}$  и  $G_{gray} \rightarrow G_{color}$  невозможны. Согласно результатам исследований из предыдущих глав диссертационной работы каждое из подпространств  $G_k$  является геометрическим представлением МДАИ  $R_k$ , представляющей с алгебраической точки зрения, универсальную алгебру конечномерных матриц (реализаций изображений, РИ) с операциями над ними (операции из выше перечисленного списка). Замкнутость операций над РИ гарантируют, что в результате их применения получиться преобразованная РИ той же алгебры.

Выше сказанное можно будет сформулировать в виде утверждения

*Утверждение 21* [102-105]: Упорядоченная совокупность  $GS_I = \langle M_{GS}, F_{GS} \rangle$  множества элементов

$$M_{GS} = M_{bin} \cup M_{gray} \cup M_{color} \quad (100)$$

и множества операций

$$F_{GS} = F_{bin} \cup F_{gray} \cup F_{color} \cup \{O_T^{color \rightarrow gray}, O_T^{gray \rightarrow bin}\} \quad (101)$$

является универсальной алгеброй.

*Доказательство:* На самом деле операция конвертирования одних реализаций в другие реализации не является замкнутой ни в одной из алгебр, образующих первое множество упорядоченной совокупности. Однако применение этой операции к реализациям изображений из алгебры цветных реализаций позволяет преобразовать их в полутонаовые реализации. А применение операции конвертирования к полутонаовым реализациям позволяет получить бинарные реализации. Эти преобразования возможны в силу определения операции конвертирования. Следовательно, упорядоченная совокупность  $\langle \{I_{bin}, I_{gray}, I_{color}\}, \{O_T^{X \rightarrow Y}\} \rangle$  является ПСИ по определению. ■

Согласно этому утверждению можно говорить о существовании универсальной алгебры, которая является алгебраическим представлением ПСИ. Для строгости теории введем следующее определение.

*Определение 13* [102-105, 138]: Универсальная алгебра  $GS_I = \langle M_{GS}, F_{GS} \rangle$  называется пространством состояний изображений, если выполнены условия:

1.  $M_{GS} \neq \emptyset$
  2.  $O_T^{color \rightarrow gray} \in F_{GS}$  или  $O_T^{gray \rightarrow bin} \in F_{GS}$
- (102)

*Замечание:* Важной задачей является оценка мощности основных множеств ДАИ, образующих ПСИ с главными бинарными операциями. Рассмотрим ДАИ  $\mathfrak{R}_B^g$ , где  $g$  есть бинарная операция логического или арифметического характера, являющаяся ее единственной главной операцией. Элементы  $\mathfrak{R}_B^g$  являются бинарными реализациями размера  $n \times m$ , т.е.  $\mathfrak{R}_B^g = \langle M_{bin}, g \rangle$ , где  $M_{bin} = \{I_{bin}\}$ ,  $I_{bin} = \|x_{ij}\|$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Ясно, что математической моделью бинарного изображения является бинарная реализация, представленная матрицей размера  $n \times m$ . Так как, каждая ячейка этой матрицы может принимать всего лишь два значения, 0 или 1, то число различных заполнений этой матрицы будет равно  $2^{nm}$  [70-72]. Таким образом, если под заполнением подразумевать состояние данной реализации, то число состояний бинарной реализации размера  $n \times m$  будет равно  $2^{nm}$ . Большие размеры ПСИ позволяют его отнести к числу проблемных

пространств, вызывающих явление «пространственного взрыва» [70-72, 73-74, 94-98]. Например, для бинарного изображения размера  $100 \times 100$  пикселей, число состояний этой реализации будет равно  $1,9950631168807583848837421626836e+3010$ . Аналогично можно оценить количество состояний полутоновых и цветных реализаций, представляющих более сложные формы ПСИ. Если задана АПР  $\mathfrak{R}_G^g = \langle M_{gray}, g \rangle$ ,  $M_{gray} = \{I_{gray}\}$  такой же размерности реализаций изображений, то мощность  $M_{gray}$  будет равна  $256^{nm}$  [70-72]. Например, для полутонового изображения размера  $100 \times 100$  число состояний равно  $2,50988092810539007004183232767e+24082$ . Если же задана алгебра цветных реализаций размерностей  $n \times m$ , то мощность  $M_{color}$  будет составлять при 8-ми битной кодировке для каждой из составляющих цвет компонент  $r$ ,  $g$  и  $b$ ,  $(256 \cdot 256 \cdot 256)^{nm} = 16777216^{nm}$ . Ясно, что это число невообразимо огромное. Например, при размерности цветной реализации  $50 \times 50$  пикселей число различных состояний будет равно  $6,3057948700178233572600261579236e+18061$ . Таким образом, приходим к следующим трем формулам для вычисления числа состояний реализаций в соответствующих алгебрах [70-72]:

$$1. \quad P(M_{bin}) = 2^{nm} \quad (103)$$

$$2. \quad P(M_{gray}) = 256^{nm} \quad (104)$$

$$3. \quad P(M_{color}) = 256^{3nm}, \quad (105)$$

где  $P$  - количество взаимно различных элементов множества.

Последовательность преобразований будет описывать маршрут в графе ПСИ [70-72, 138]. Начальная вершины маршрута будет являться первоначальной РИ, а конечная вершина – РИ, подлежащей, в дальнейшем, анализу (измерению выбранного параметры объекта наблюдения). Итак, маршрут в ПСИ описывает процесс обработки изображений (рис. 2) [138].

*Определение 14* [70, 71]: Совокупность подмаршрутов, входящих во всевозможные маршруты, которые начинаются с исходной реализации (отмечено

на рис. 2 кругом черного цвета в  $R_{color}$ ) и заканчиваются в целевой реализации (отмечено на рис. 2 кругом черного цвета в  $R_{bin}$ ), называется воронкой МДАИ.

В воронке ПСИ моделью процесса обработки изображений является Т-ДАСПИ (дескриптивная алгебраическая схема преобразования изображений) (3) [125, 133, 138, 139].

$$I_g = \mathfrak{R}_T(\bar{\mu})(I_f) = O_{T_n}^{k_n}((\dots O_{T_1}^{k_1}(I_f; \bar{\mu}_1) \dots \bar{\mu}_n)), \quad (106)$$

где  $I_f$  - начальная вершина маршрута,  $I_g$  - конечная вершина маршрута,  $T_{i=1,n} \in \{convert, improve, filter, dissect, morph, \dots\}$ ,  $k_{i=1,m} = type(T_{i=1,n})$ ,  $\bar{\mu} = \langle \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n \rangle$ .

Из (3) ясно, что Т-ДАСПИ  $\mathfrak{R}_T(\bar{\mu})(\cdot)$  является суперпозицией  $n$  процедурных преобразований  $\langle O_{T_1}^{k_1}, \dots, O_{T_n}^{k_n} \rangle$  с параметрами  $\bar{\mu} = \langle \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n \rangle$  соответственно.

Кроме Т-ДАСПИ в аппарате МДАИ используется еще и Р-ДАСПИ [125, 133, 138, 139]. Р-ДАСПИ описывают измерение выбранных параметров объектов наблюдения на РИ (решают задачу анализа изображений) [125, 133, 138, 139] и определяются согласно (4).

$$\mathfrak{R}_P(\bar{\eta})(I_f) \stackrel{def}{=} \left[ \underset{j=1}{\overset{m}{\circ}} O_{P_j}^{k_j}(\cdot, \eta_j) \right](I_f) = \underset{j=1}{\overset{m}{\circ}} O_{P_j}^{k_j}(I_f, \eta_j), \quad (107)$$

где  $P_{j=1,m} \in \{determ, probal, struct\}$ ,  $k_{j=1,m} = type(P_{j=1,m})$ ,  $\bar{\eta} = \langle \eta_1, \dots, \eta_m \rangle$

Рассчитаем основные характеристики воронки ПСИ и определим вероятность попадания в эту воронку.

1. Определяем размер (ширины  $m$  и высоты  $n$  в пикселях) начального изображения  $I_{color} = \| < r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} > \|$ ,  $< r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} > \in S_{color}$ ,  $S_{color} = \{0, \dots, 255\}$ , точности вычислений  $\varepsilon$ .
2. Определим  $p$  пикселей, значимых в планируемом достоверном измерении, по формуле (1) для изображений  $I_{bin}^*$ , содержащих объекты интереса.

$$p \approx N_{pix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m z_{ij}, \quad I_{bin} = \| z_{ij} \|, \quad z_{ij} \in S_{bin} = \{0, 1\} \quad (108)$$

Величина  $p$  есть число значимых пикселей делающих вклад в измерение значения выбранного признака. В решения задачи выбран детерминированный признак, представляющий площадь объекта наблюдения.

3. Вычисляем число пикселей  $\delta$  для точности  $\varepsilon$  согласно (2):

$$\delta = \lceil N_{pix} \cdot \varepsilon \rceil \quad (109)$$

Величина  $\delta$  является дискретной формой погрешности  $\varepsilon$  или допустимым отклонением в пикселях.

4. Таким образом, для достоверного измерения границ допустимы будут изображения ровно с  $l = (p - \delta; p + \delta)$  значимыми пикселями. Далее, значения величин  $\delta$  и  $p$  подставляем в (3) и вычисляем координаты вектора  $\overrightarrow{k_{bin}}$  [70-72].

$$\overrightarrow{k_{bin}} = (C_{nm}^{p-\delta}, \dots, C_{nm}^{p+\delta}) = (C_{7254}^{1759}, \dots, C_{7254}^{2381}) \quad (110)$$

Каждая из координат этого вектора представляет количество изображений  $I_{bin}^* = \|z_{ij}\|$ ,  $z_{ij} \in S_{bin}$  в группах для  $p$  значимых пикселей.

5. Вычисляем размер сечения воронки  $K_{bin}$  в МДАИ  $\mathfrak{R}_{bin} = \langle M_{bin}, F_{bin} \rangle$  бинарных изображений  $I_{bin} = \|z_{ij}\|$ ,  $z_{ij} \in S_{bin}$ ,  $S_{bin} = \{0, 1\}$ , где  $M_{bin}, F_{bin}$  - основное множество элементов и множество главных операций алгебры  $\mathfrak{R}_{bin}$  соответственно. Сумма координат вектора  $\overrightarrow{k_{bin}}$  согласно (4) будет оценкой сечения воронки  $K_{bin}$  в МДАИ  $\mathfrak{R}_{bin}$  [94-98].

$$K_{bin} = \sum_{l=p-\delta}^{p+\delta} C_{nm}^l \quad (111)$$

6. Вычисляем размер сечения воронки  $K_{gray}$  в МДАИ  $\mathfrak{R}_{gray} = \langle M_{gray}, F_{gray} \rangle$  полутоночных изображений  $I_{gray} = \|y_{ij}\|$ ,  $y_{ij} \in S_{gray}$ ,  $S_{gray} = \{0, \dots, 255\}$  для каждого из вариантов изображений  $I_{bin}^* = \|z_{ij}\|$ ,  $z_{ij} \in S_{bin}$  с числом  $l = \overline{(p - \delta), (p + \delta)}$  значимых пикселей соответственно и допустимых точностью  $\varepsilon$ , где  $M_{gray}, F_{gray}$  - основное множество элементов и множество главных операций алгебры  $\mathfrak{R}_{gray}$  соответственно.

Пусть  $\|z_{ij}\| = O_T^{gray \rightarrow bin}(\|y_{ij}\|, \theta)$ , где  $z_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } y_{ij} < \theta \\ 1, & \text{если } y_{ij} \geq \theta \end{cases}$  и  $\theta$  - порог

конвертирования. Реальное значение  $\theta$  должно быть подобрано экспертом исходя из максимального вписывания площади объекта интереса в указанные ранее границы после конвертирования в бинарное изображение. Вычислим количество полуточновых изображений  $I_{gray}^* = \|y_{ij}\|$ ,  $y_{ij} \in S_{gray}$  (прообразов), переходящих при конвертировании в бинарные изображения  $I_{bin}^* = \|z_{ij}\|$ ,  $z_{ij} \in S_{bin}$ . Для  $l = \overline{(p-\delta), (p+\delta)}$  значимых точек в  $I_{bin}^* = \|z_{ij}\|$ ,  $z_{ij} \in S_{bin}$  при пороге конвертирования  $\theta$  таких прообразов будет ровно  $\theta^{nm-(p-\delta)} \cdot (256-\theta)^{(p-\delta)}, \dots, \theta^{nm-(p+\delta)} \cdot (256-\theta)^{(p+\delta)}$  единиц соответственно [70-72, 94-98].

Представим их в виде координат вектора  $\overrightarrow{\theta_{gray}}$  (5).

$$\overrightarrow{\theta_{gray}} = (\theta_{p-\delta}^{gray}, \dots, \theta_{p+\delta}^{gray}) = (\theta^{nm-(p-\delta)} \cdot (256-\theta)^{(p-\delta)}, \dots, \theta^{nm-(p+\delta)} \cdot (256-\theta)^{(p+\delta)}) \quad (112)$$

Каждая из координат вектора  $\overrightarrow{\theta_{gray}}$  (5) представляет число полуточновых изображений  $I_{gray}^* = \|y_{ij}\|$ ,  $y_{ij} \in S_{gray}$ , содержащих ровно  $l = \overline{(p-\delta), (p+\delta)}$  значимых точек в образе при их конвертировании. Учитывая перестановки значимых пикселей по  $nm$  возможным позициям в изображении  $I_{bin}^* = \|z_{ij}\|$ ,  $z_{ij} \in S_{bin}$ , получаем коэффициенты множественности для этих координат  $C_{nm}^l$ . Таким образом, размер сечения воронки  $K_{gray}$  рассчитывается как скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{k_{bin}}$  и  $\overrightarrow{\theta_{gray}}$  согласно (6) [70-72, 94-98].

$$K_{gray} = \overrightarrow{k_{bin}} \cdot \overrightarrow{\theta_{gray}} = \sum_{l=p-\delta}^{p+\delta} k_l^{bin} \cdot \theta_l^{gray} = \sum_{l=p-\delta}^{p+\delta} C_{nm}^l \cdot \theta^{nm-l} \cdot (256-\theta)^l \quad (113)$$

7. Вычисляем размер сечения воронки  $K_{color}$  в начальном МДАИ

$\mathfrak{R}_{color} = \langle M_{color}, F_{color} \rangle$  цветных изображений

$I_{color} = \langle r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \rangle$ ,  $\langle r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \rangle \in S_{bin}$ ,  $S_{bin} = \{0, \dots, 255\}^3$  согласно (7), где  $M_{color}, F_{color}$  - основное множество элементов и множество главных операций алгебры  $\mathfrak{R}_{color}$  соответственно.

$$K_{color} = (K_{gray})^3 \quad (114)$$

Так как, цветные изображения представлены в RGB-пространстве, то цветовые слои независимы друг от друга. Каждый из слоев аналогичен МДАИ полутоновых изображений  $\mathfrak{R}_{gray} = \langle M_{gray}, F_{gray} \rangle$  в своей кодировке.

Следовательно, на них можно полностью по отдельности распространить результаты оценки из шага 6 [75-87].

8. Вычисляем геометрическую вероятность попадания выбираемых изображений в сечение воронки в МДАИ цветных изображений в соответствии с (8) [88-90].

$$P^* = P(I_{color} \in N_{color}) = \frac{K_{color}}{256^{3nm}} \quad (115)$$

9. Формируем множество начальных изображений  $\tilde{I} = \{I_{color}\}$  с вероятностью  $P^*$ .

Согласно (8) можно рассчитать вероятность попадания фиксируемых изображений в сечение воронки в МДАИ цветных изображений.

### **Выводы по третьей главе**

Модифицированные дескриптивные алгебры изображений являются алгебраическими структурами без операторного кольца. Представление самого пространства моделирования в виде отдельных подпространств позволяет упростить моделирование процессов обработки и анализа изображений в системах технического зрения. Алгебраическое представление пространства дает широкие возможности и гибкий математический аппарат для создания методов обработки и анализа изображений, а также проводить научные исследования их эффективности. Отличие МДАИ от стандартных дескриптивных алгебр изображений заключается в том, что под реализацией изображения подразумевается не только реальное изображение, но и «идеализированное изображение» - модель изображения. Последнее означает, что оно может содержать идеальные формы объектов сцены, которые и являются их дескриптивными моделями. Термин «дескриптивный» означает описательный. В данной работе предполагается, что «идеальные» формы подчиняются некоторой

известной математической закономерности, которую можно легко восстановить, имея геометрическое место точек. Полученное формальное описание и будет представлять его дескриптивную модель.

В качестве главных операций МДАИ были выбраны логические операции, операции фильтрации и морфологические операции. Алгебраический аппарат МДАИ накладывает на операции, претендующие на роль главных операций, единственное требование замкнутости. В данной главе перечисленные операции определены в матричной форме, ибо реализации задаются в виде матриц. В роли основных множеств алгебр были выбраны множества бинарных и полутоновых реализаций. Для МДАИ бинарных реализаций с логическими и морфологическими главными операциями было исследовано и сформулировано 8 определений, доказаны 16 утверждений и сформулированы 4 следствия. Для МДАИ полутоновых и цветных реализаций с логическими и морфологическими главными операциями было сформулировано 4 определения, доказано 4 утверждения и сформулировано 1 следствие. Рассмотренные МДАИ позволяют математически описывать пространство обработки и анализа изображений одной и той же размерности. Их объединение позволяет смоделировать более сложное пространство обработки и анализа изображений, называемое пространством состояний изображений (ПСИ). Для ПСИ было сформулировано 2 определения и доказано 1 утверждение. Произведена оценка размеров подпространств и сформулированы 3 формулы их вычисления. В данной главе центральной является гипотеза о методе обработки и анализа изображений в ПСИ. Суть гипотезы заключается в том, что существует окрестность результирующего изображения, на котором допустимо измерение искомого признака с заданной точностью в каждом подпространстве, называемое воронкой ПСИ. В воронке ПСИ реализации изображений объединяются в маршруты. В ходе исследований были получены 8 оценочных формул организации выборочной совокупности начальных изображений, гарантированно попадающих с заданной вероятностью в сечение воронки. Выбрав реализацию в МДАИ цветных изображений можно по некоторому маршруту получить реализацию бинарных изображений. Данный

маршрут будет представлять метод обработки начального изображения (Т-ДАСПИ). Метод обработки изображения дополняется методом анализа изображений (Р-ДАСПИ), состоящего из хотя бы одного параметрического преобразования. Упорядоченная совокупность Т- и Р-ДАСПИ образует метод математического моделирования функций системы технического зрения.

Разработка математической модели систем обработки и анализа изображений для задачи измерения площадей природных водоемов и их количества будет рассмотрена в следующей главе диссертационной работы. Теоретическую основу этого процесса образуют материалы второй и третьей глав. Системы технического зрения являются физической реализацией систем обработки и анализа изображений. Она представляет собой совокупность функций, каждая из которых направлена на решение задачи измерения параметров, характеризующих объекты сцены наблюдения. Создание математических моделей этих функций позволяет разработать математическое описание системы технического зрения. Следующая глава диссертационной работы посвящается использование математического аппарата МДАИ.

## Глава 4. Математическое моделирование функций системы технического зрения для измерения площадей и количества объектов наблюдения

### 4.1 Вычисление характеристик воронки пространства обработки и анализа изображений

Пусть требуется разработать функцию измерения площади и вычисления количества объектов наблюдения на снимках оптического диапазона (космические, аэрофотоснимки и т.п.). Для любого такого изображения, согласно результатам исследований предыдущих глав диссертационной работы, существует единое пространство обработки и анализа изображений – пространство состояний изображений [122-139]. Для любого изображения и выбранного признака измерения в этом пространстве существует хотя бы одно его состояние, позволяющее измерить достоверно (с заданной точностью) искомый признак [75-90, 94-98].



Рисунок 4.1 – Изображения природных водоемов для измерения площадей. Следовательно, существует воронка в ПСИ, характеристики которого можно вычислить по формулам, приведенным в предыдущей главе. Например, для изображений на рисунке 4.1 имеем высоту  $n=99$  пикселей, ширину  $m=99$  пикселей и разрешение  $drcm=96$  пиксель на дюйм длины.

Определим  $p$  пикселей, значимых в планируемом достоверном измерении по формуле (1) [85-87].

$$p \approx N_{pix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m z_{ij}, \quad z_{ij} \in S_{bin} = \{0,1\} \quad (1)$$

Для объекта (рисунок 4.2, слева) были подсчитаны пиксели ее площади, ограниченные границей красного цвета (рисунок 4.2, справа). Граница определена экспертом и равна  $p = 2070$  пикселям.



Рисунок 4.2 – Изображение из выборки (левый) и оценка его границ (правый).

Вычислим число пикселей  $\delta$  для точности  $\varepsilon$  по формуле (2).

$$\delta = \lceil N_{pix} \cdot \varepsilon \rceil \quad (2)$$

Площадь объекта «Озеро» для вида сверху (рисунок 4.1, справа) примерно составляет  $328,702 \text{ m}^2 \Leftrightarrow 2070 \text{ pix}$ . Пусть измерение реальной площади объекта производится с точностью 15% от полной площади. Точность 15% соответствует погрешности  $\delta = \left\lceil \frac{2070 \cdot 15}{100} \right\rceil = \left\lceil \frac{31050}{100} \right\rceil = 310,5 \approx 311$  пиксель. Таким образом, для достоверного измерения площади допустимы будут черно-белые изображения ровно с  $l = (1759; 2381)$  значимыми пикселями.

Далее, значения величин  $\delta = 311$  и  $p = 2070$  подставляем в (3) и вычисляем координаты вектора  $\overrightarrow{k_{bin}}$  [70, 71].

$$\overrightarrow{k_{bin}} = (C_{nm}^{p-\delta}, \dots, C_{nm}^{p+\delta}) = (C_{7254}^{1759}, \dots, C_{7254}^{2381}) \quad (3)$$

Каждая из координат этого вектора представляет количество изображений  $I_{bin}^* = \|z_{ij}\|$ ,  $z_{ij} \in S_{bin}$  в группах для  $p$  значимых пикселей. Сумма координат вектора  $\overrightarrow{k_{bin}}$  согласно (4) будет оценкой сечения воронки  $K_{bin}$  в МДАИ  $\mathfrak{R}_{bin}$ .

$$K_{bin} = \sum_{l=1759}^{2381} C_{7254}^l = .3423393567 \cdot 10^{1993} \quad (4)$$

Пусть  $\|z_{ij}\| = O_T^{gray \rightarrow bin}(\|y_{ij}\|, \theta)$  есть операция конвертирования полутоновых изображений  $I_{gray} = \|y_{ij}\|$ ,  $y_{ij} \in S_{gray}$  в бинарные изображения  $I_{bin} = \|z_{ij}\|$ ,  $z_{ij} \in S_{bin}$ , где  $z_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } y_{ij} < \theta \\ 1, & \text{если } y_{ij} \geq \theta \end{cases}$  и  $\theta$  - порог конвертирования [75-87]. Реальное значение  $\theta = 64$  было подобрано экспертом исходя из максимального вписывания площади объекта интереса в указанные ранее границы после конвертирования в бинарное изображение. Для  $l = \overline{(p-\delta), (p+\delta)}$  значимых точек в изображении  $I_{bin}^* = \|z_{ij}\|$ ,  $z_{ij} \in S_{bin}$  при пороге конвертирования  $\theta = 64$  его прообразов будет ровно  $\theta^{nm-(p-\delta)} \cdot (256-\theta)^{(p-\delta)}, \dots, \theta^{nm-(p+\delta)} \cdot (256-\theta)^{(p+\delta)}$  единиц соответственно. Представим их в виде координат вектора  $\overrightarrow{\theta_{gray}}$  (5) [70-72].

$$\overrightarrow{\theta_{gray}} = (\theta_{p-\delta}^{gray}, \dots, \theta_{p+\delta}^{gray}) = (\theta^{nm-(p-\delta)} \cdot (256-\theta)^{(p-\delta)}, \dots, \theta^{nm-(p+\delta)} \cdot (256-\theta)^{(p+\delta)}) \quad (5)$$

Подставив в (5) значения величин  $n = 99$ ,  $m = 99$ ,  $\delta = 311$ ,  $p = 2070$  и  $\theta = 64$  (определен экспертом) вычисляем координаты вектора  $\overrightarrow{\theta_{gray}}$  для решаемой задачи.

$$\overrightarrow{\theta_{gray}} = (64^{1759} \cdot 192^{5495}, \dots, 64^{2381} \cdot 192^{4873})$$

Таким образом, размер сечения воронки  $K_{gray}$  рассчитывается как скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{k_{bin}}$  и  $\overrightarrow{\theta_{gray}}$  согласно (6) [70-72].

$$K_{gray} = \overrightarrow{k_{bin}} \cdot \overrightarrow{\theta_{gray}} = \sum_{l=p-\delta}^{p+\delta} k_l^{bin} \cdot \theta_l^{gray} = \sum_{l=p-\delta}^{p+\delta} C_{nm}^l \cdot \theta^{nm-l} \cdot (256-\theta)^l \quad (6)$$

Для решаемой задачи величина

$$K_{gray} = \sum_{l=1759}^{2381} k_l^{bin} \cdot \theta_l^{gray} = \sum_{l=1759}^{2381} C_{7254}^l \cdot 64^l \cdot 192^{7254-l} = .2190920805 \cdot 10^{17470}$$

Так как, цветные изображения представлены в RGB-пространстве, то цветовые слои независимы друг от друга [75-87]. Следовательно, верным будет оценка размера сечения воронки  $K_{color}$  для цветного МДАИ  $\mathfrak{R}_{color} = \langle M_{color}, F_{color} \rangle$ .

$$K_{color} = (K_{gray})^3 \quad (7)$$

Для решаемой задачи получаем оценку

$$K_{color} = \left( \sum_{l=1759}^{2381} C_{7254}^l \cdot 64^l \cdot 192^{7254-l} \right)^3 = 0.1051671340 \cdot 10^{52409}$$

Согласно (7) можно рассчитать вероятность попадания фиксируемых изображений в сечение воронки в МДАИ цветных изображений в соответствии с (8) [88-90].

$$P^* = P(I_{color} \in N_{color}) = \frac{K_{color}}{256^{3nm}} = \frac{0.105167134 \cdot 10^{52409}}{0.131257799 \cdot 10^{52409}} = \frac{0.105167134 \cdot 10^{52409}}{0.131257799 \cdot 10^{52409}} \approx 0.8 \quad (8)$$

Таким образом, выбор начального изображения предполагает проведение имитационного эксперимента, в ходе которого нужно выбрать цветную реализацию начального изображения  $I_{color}^* = \|x_{ij}\|$ ,  $x_{ij} = \langle r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \rangle \in S_{color}$ , попадающего в сечение воронки в МДАИ  $\mathfrak{R}_{color} = \langle M_{color}, F_{color} \rangle$ . Выбранное изображение позволит свести его в такое состояние в виде черно-белого изображения, в котором возможно достоверное (с заданной точностью) измерение искомой площади [75-87]. А последовательность использованных операций будет представлять искомую функцию измерения системы технического зрения [10-12, 17, 22, 23, 68, 69, 75-87].

## **4.2 Алгоритм разработки методов математического моделирования обработки и анализа изображений**

Проектирование и разработка функций систем технического зрения является сложным процессом [10-12, 17, 22, 23, 68, 69, 75-87]. В диссертационной работе было допущено, что ее функциональная модель представляет совокупность измерительных функций [68, 69]. Функции могут отличаться друг

от друга следованием и количеством, использованных методов обработки изображений [10-12, 17, 22, 23, 68, 69, 75-87]. Последовательность методов обработки изображений обычно подбирается в ходе преобразования начальных изображений [23, 68, 69]. В предыдущем параграфе была изложена методика проведения имитационного эксперимента по выбору таких изображений. Разработаем алгоритм создания измерительной функции системы технического зрения. Вычисление характеристик воронки пространства обработки и анализа изображений образуют первые шаги этого алгоритма:

Шаг 1. Ввод цветного изображения с выделенными границами

$$I_{color} = \left\| \langle r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \rangle \right\|, \quad \langle r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \rangle \in S_{color}, \quad S_{color} = \{0, \dots, 255\}^3$$

Шаг 2. Вычисление параметров  $n, m$  изображения  $I_{color}$

Шаг 3. Вычисление числа значимых точек  $p$  и точности вычислений  $\delta$  по формулам

$$p \approx N_{pix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m z_{ij}, \quad \delta = \lceil N_{pix} \cdot \varepsilon \rceil$$

Шаг 4. Вычисление координат вектора  $\overrightarrow{k_{bin}}$  и размера сечения воронки  $K_{bin}$  по формулам

$$\overrightarrow{k_{bin}} = (C_{nm}^{p-\delta}, \dots, C_{nm}^{p+\delta}), \quad K_{bin} = \sum_{l=p-\delta}^{p+\delta} C_{nm}^l$$

Шаг 5. Вычисление координат вектора  $\overrightarrow{\theta_{gray}}$  и размера сечения воронки  $K_{gray}$  по формулам

$$\theta_l^{gray} = \theta^{nm-l} \cdot (256 - \theta)^l, \quad l = \overline{(p-\delta), (p+\delta)}, \quad K_{gray} = \overrightarrow{k_{bin}} \cdot \overrightarrow{\theta_{gray}} = \sum_{l=p-\delta}^{p+\delta} C_{nm}^l \cdot \theta_l^{gray}$$

Шаг 6. Вычисление размера воронки  $K_{color}$  и вероятности выбора начального изображения  $I_{color}^0$  по формулам

$$K_{color} = (K_{gray})^3, \quad P(I_{color}^0) = \frac{K_{color}}{256^{3nm}}$$

Шаг 7. Пусть  $k = 0$  и выбрать начальное изображение  $I_{color}^0$  с вероятностью  $P(I_{color}^0)$

Далее, нужно провести структурный синтез (выбрать структуру метода обработки изображений) функции системы технического зрения:

Шаг 8. Выбрать процедурное преобразование  $O_{T,k}(\cdot, \mu_k) \in \{O_T\}$  с параметром  $\mu_k$

Шаг 9. Преобразование изображения  $I_f^k$  в изображение  $I_f^{k+1}$ ,  $f \in \{color, gray, bin\}$

методом обработки изображений

$$O_{T,k}(\cdot, \mu_k) \in \{O_T\}$$

Шаг 10. Если качество изображения  $I_f^{k+1}, f \in \{color, gray, bin\}$  не позволяет провести измерение выбранной величины, то  $k = k + 1$  и переход на Шаг 8, иначе переход на Шаг 11

Шаг 11. Записать  $n = k$  и  $\bar{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ .

Шаг 12. Записать математический метод обработки изображений по формуле

$$I_{bin}^n = \mathfrak{R}_T(\bar{\mu})(I_{color}^0) = \langle O_{T,1}(\cdot, \mu_1), \dots, O_{T,n}(\cdot, \mu_n) \rangle(I_{color}^0) = O_{T,n}(\cdot, \mu_n)(\dots O_{T,1}(I_{color}^0, \mu_1), \dots)$$

На шаге 12 получается математический метод обработки начальных изображений. Этот метод должен гарантировать сведение начального изображения  $I_{color}^0$  в изображение  $I_{bin}^n$ , на котором можно измерить значение признака  $p$  с точностью  $\delta$ . Далее переходим к шагу выбора метода измерения:

Шаг 13. Выбрать параметрическое преобразование  $O_P(\cdot, \eta) \in \{O_P\}$  с параметром  $\eta$

Шаг 14. Измерить искомую величину  $p$  объекта наблюдения по формуле

$$p = \mathfrak{R}_P(\eta)(I_{bin}^n) = O_P(I_{bin}^n; \eta)$$

Шаг 15. Если  $|p - p| > \delta$ , то переход на Шаг 7, иначе переход на Шаг 16

Шаг 16. Записать  $\eta$  и математический метод анализа изображений по формуле

$$\mathfrak{R}_P(\eta)(I_{bin}^n) = O_P(I_{bin}^n; \eta)$$

Если же построены методы моделирования обработки  $\mathfrak{R}_T(\mu)(\cdot)$  и анализа изображений  $\mathfrak{R}_P(\eta)(\cdot)$ , то на последнем шаге записывается метод математического моделирования функции системы технического зрения:

Шаг 17. Записать метод математического моделирования обработки и анализа изображений по формуле

$$p = \mathfrak{R}_P(\eta)(\mathfrak{R}_T(\bar{\mu})(I_{color}^0)) = O_P(O_{T,n}(\cdot, \mu_n)(\dots(O_{T,2}(O_{T,1}(I_{color}^0, \mu_1), \mu_2))\dots); \eta)$$

Данный алгоритм позволяет математически описать метод измерения любого детерминированного признака [94-98] наблюдаемого объекта на изображении. Рассмотрим задачу определения количества объектов на изображении.

### 4.3 Измерение количества объектов на изображении без учета их площади

На основе описанного алгоритма была построена функция измерения количества объектов интереса на изображении. Особенность этого алгоритма заключается в применении математического аппарата модифицированных дескриптивных алгебр изображений [122-139] к формализованному представлению методов математического моделирования обработки и анализа изображений. Система технического зрения [10-12, 17, 22, 23, 68, 69, 75-87] выполняет измерительные функции, которые математически описываются этими методами. Для задачи вычисления количества природных водоемов на изображении метод обработки может иметь вид (116):

$$\begin{aligned} N_{pix} &= \text{Alg}(I_{color}; < n, \theta >) \\ I_{bin} &= \|z_{ij}\|, I_{gray} = \|y_{ij}\|, I_{color} = \|\langle r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \rangle\| = \|x_{ij}\| \\ \|y_{ij}\| &= O_T^{color \rightarrow gray} (\|\langle r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \rangle\|; *), \quad y_{ij} = \left\lceil \frac{r_{ij} + g_{ij} + b_{ij}}{3} \right\rceil \\ \|\overline{y}_{ij}\| &= O_T^{medfilt} (\|y_{ij}\|; n, W), \quad \overline{y}_{ij} = med \left[ x_{i+n, j+n}; (n, n) \in W \right] \\ \|z_{ij}\| &= O_T^{gray \rightarrow bin} (\|\overline{y}_{ij}\|; \theta), \quad z_{ij} = \begin{cases} 0, & \overline{y}_{ij} < \theta \\ 1, & \overline{y}_{ij} \geq \theta \end{cases} \end{aligned} \quad (116)$$

Для этого метода математического моделирования (116) была разработана программа в среде MATLAB [85-87].

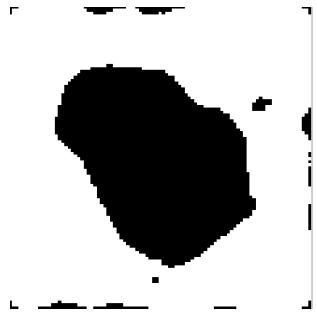
```
function res=genim1(a,p,info,mode)
%вычисление количества объектов на изображении
% a – обрабатываемое изображение
% p – вектор параметров метода
% info – экспертная оценка количества объектов интереса
% mode – режим работы функции
% ****
%ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЯ
b=rgb2gray(a);%конвертирование цветного изображения в полуточковое
pp=round(p(1)*10);%вычисляем апертуру для медианного фильтра
bb=medfilt2(b,[pp pp]);%медианная фильтрация с 1-м параметром
c=im2bw(bb,p(2));%конвертирование в бинарное изображение со 2-м параметром
% ****
%АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЯ
[d cnt]=bwlabel(~c,8);%выделение 8-ми связных областей в инверт-рисунке
if (mode==1)
    figure;
    imshow(d);
    title(p);
    xlabel(cnt);
end
res=cnt;%возвращаем количество областей интереса по их площади
```

Параметр  $p$  обычно подбирается разработчиком систем технического зрения [10-12, 17, 22, 23, 68, 69, 75-87]. Успешность подбора в большинстве случаев зависит от опыта разработчика. Система технического зрения является специализированной бесконтактной информационно-измерительной системой [10-12, 17, 22, 23, 68, 69, 75-87]. Качество ее работы сильно зависит от правильной освещенности платформы, на которой располагается объект наблюдения. Для

выбранного режима освещения сцены наблюдения, как показывает опыт, можно подобрать не один подходящий набор значений варьируемых параметров, и среди них можно найти наилучший. В ходе проведения вычислительного эксперимента по определению апертуры медианного фильтра и порога конвертирования были получены несколько наборов значений параметров (таблица 4.1) [85-87].

Таблица 4.1

Значения параметров для измерения площади с требуемой точностью

Вектор параметров	Количество объектов (ручной подсчет)	Обработанное изображение
$n = 7$ $\theta = 0.19$	16	
$n = 6$ $\theta = 0.2$	15	

На основании результатов вычислительного эксперимента можно утверждать, что успешная обработка изображений уже возможна при 2 наборах. Возникает задача – определить, сколько существует наборов значений варьируемых параметров, позволяющих провести успешную обработку. Критерием отбора должно быть совпадение измеренного количества заранее заданным априори. Эквивалентом к этому критерию может быть модуль разности между экспертной оценкой и текущим подсчетом количества объектов наблюдения.

Таким образом, на основе измерительной функции системы технического зрения можно создать целевую функцию, ввести ограничения на варьируемые

параметры и задачу поиска нужных параметров свести к задаче нелинейной (линейной) многопараметрической оптимизации с линейными ограничениями (117) [105].

$$G(\bar{\mu}) = \left| N^* - O_P^{area} \left( O_T^{gray \rightarrow bin} \left( O_T^{medfilt} \left( O_T^{color \rightarrow gray} (*; \| \langle r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \rangle \|), n \right), \theta \right), * \right) \right| \rightarrow \min_{\mu \in X} \quad (117)$$

$$X = \{ \bar{\mu} \mid \bar{\mu} = \langle n, \theta \rangle; n > 1, 0 \leq \theta \leq 1 \} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z},$$

где

$$N^* = const \quad (apriori)$$

$$\|y_{ij}\| = O_T^{color \rightarrow gray} (*; \| \langle r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \rangle \|), \quad x_{ij} = \left\lceil \frac{r_{ij} + g_{ij} + b_{ij}}{3} \right\rceil, \quad x_{ij}, r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \in \{0, \dots, 255\}$$

$$\|\bar{y}_{ij}\| = O_T^{medfilt} (\|x_{ij}\|; n, W), \quad \bar{y}_{ij} = med [x_{i+n, j+n}; (n, n) \in W] \in \{0, \dots, 255\}$$

$$\|z_{ij}\| = O_T^{gray \rightarrow bin} (\|\bar{y}_{ij}\|, \theta), \quad z_{ij} = \begin{cases} 0, & \bar{y}_{ij} < \theta \\ 1, & \bar{y}_{ij} \geq \theta \end{cases}$$

$$N = O_P^{bwlabel} (\|z_{ij}\|, q), \quad q \in \{4, 8\}, \quad N \in \mathbb{N}$$

При переходе от измерительной функции к целевой функции ситуация не изменилась – указанные в таблице наборы вписываются в ограничения, позволяют измерить выбранный признак, но не обращают целевую функцию в 0. Кроме того, возникает еще одна проблема. Целевая функция (117) минимизируется не только для успешных наборов (наборы значений варьируемых параметров, при которых изображение содержит все пиксели объекта наблюдения, позволяющего измерить признак с заданной точностью), но и на таких наборах, которые обращают целевую функцию 0, но не позволяют измерить признак с заданной точностью. В этом можно убедиться, построив график поверхности целевой функции (117) (рисунок 4.3) и проверить случайно выбранную пару. Например, для пары  $n=0.9, \theta=0.6$  целевая функция  $G(0.9, 0.6)=1$ , а на самом изображении нет объекта интереса.

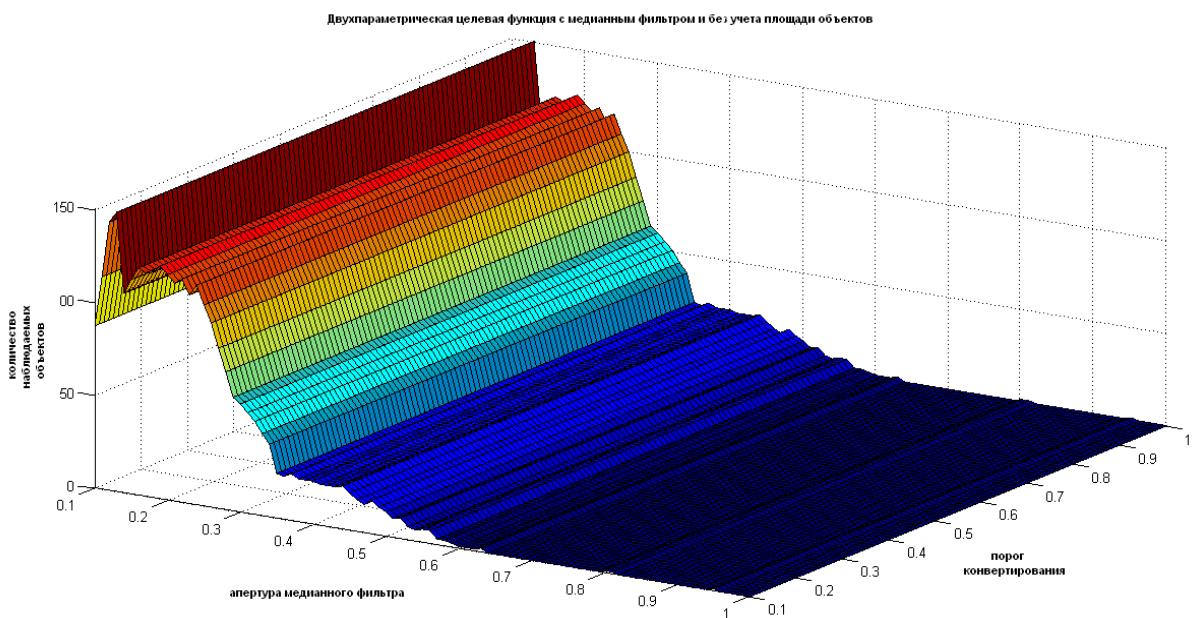


Рисунок 4.3 - Поверхность двухпараметрической целевой функции (117).

Это возможно в том случае, когда априорная модель объекта наблюдения является неполной. Для данной задачи априорную модель можно сформулировать как «Только 1 объект». Уточнение этой априорной модели позволит избавиться от лишних точек (ложные точки), в которых нельзя измерить признак.

С точки зрения теории распознавания образов выделить природный водоем среди остальных паттернов, число которых может изменяться в большом диапазоне, на одном только признаке, является нелинейной задачей [94-98]. Введем еще один признак с целью линеаризовать задачу. Естественным является использование площади  $s$ , по которому можно отделить все остальные паттерны от паттерна озера. Исключением могут быть случаи, когда изображение полностью «залито» черными пикселями. Кроме того, признаки «площадь» и «количество» тесно взаимосвязаны друг с другом, что вычисление одного из них требует привлечения другого. Следовательно, измерение количества объектов всегда можно свести к задаче измерения площадей паттернов, в котором эти площади отбираются с учетом их априорного количества. Поэтому в следующем параграфе диссертационной работы ставится задача поиска паттерна с наибольшей площадью (измерение площадей объектов) и в единственном экземпляре (измерение количества объектов).

#### 4.4 Измерение площадей объектов с учетом их количества

Изменение в методе измерения количества последний метод параметрической процедурой [122-139] по вычислению площади позволит найти объекты с указанной площадью. Таких паттернов может больше одного. На выбранных изображениях содержится только один большой объект. Поэтому надо привлечь для поиска два признака, а априорная модель может быть сформулирована как «Только 1 объект с большой площадью». Использование лингвистической оценки площади сужает множество инструментов до класса нечетких систем. Можно обойтись без их применения, если модель будет переформулирована, как «Число объектов близких к максимальной площади». Параметрическое преобразование  $m = O_P^{count}(\|z_{ij}\|, q)$ ,  $q \in \{4, 8\}$  вычисляет количество объектов [94-98, 122-139]; множество  $S = \{S_k \mid k = \overline{1, m}, |S_{expert} - S_k| \leq \varepsilon, \varepsilon \in [0; 1]\}$  содержит только те площади  $S_k$  из  $m$  возможных, которые отличаются на величину  $\varepsilon$  и искомое количество равно  $N = \begin{cases} P(S), & P(S) > 0 \\ m, & P(S) = 0 \end{cases}$ . Тогда алгоритм примет вид (118)

$$\begin{aligned}
 N &= \text{Alg}(I_{color}; < n, \theta >) \\
 \|I_{bin}\|, \|I_{gray}\|, \|I_{color}\| &= \|\langle r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \rangle\| \\
 \|y_{ij}\| &= O_T^{color \rightarrow gray}(\|\langle r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \rangle\|; *), \quad y_{ij} = \left\lceil \frac{r_{ij} + g_{ij} + b_{ij}}{3} \right\rceil \\
 \|\overline{y_{ij}}\| &= O_T^{medfilt}(\|y_{ij}\|; n, W), \quad \overline{y_{ij}} = med[y_{i+n, j+n}; (n, n) \in W] \\
 \|z_{ij}\| &= O_T^{gray \rightarrow bin}(\|\overline{y_{ij}}\|; *), \quad z_{ij} = \begin{cases} 0, & \overline{y_{ij}} < \theta \\ 1, & \overline{y_{ij}} \geq \theta \end{cases} \\
 m &= O_P^{bwlabel}(\|z_{ij}\|, q), \quad q \in \{4, 8\} \\
 N &= \begin{cases} P(S), & P(S) > 0 \\ m, & P(S) = 0 \end{cases}, \quad S = \{S_k \mid k = \overline{1, m}, |S_{expert} - S_k| \leq \varepsilon, \varepsilon \in [0; 1]\} \\
 \}
 \end{aligned} \tag{118}$$

Задача поиска нужного объекта будет сведена к задаче нелинейного программирования с нелинейной двухпараметрической целевой функцией (119) (используется медианный фильтр, который является нелинейной) и линейной системой ограничений [105].

$$G(\bar{\mu}) = \left| N^* - O_P^{bwlabel}(O_T^{gray \rightarrow bin}(O_T^{medfilt}(O_T^{color \rightarrow gray}(*; \| \langle r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \rangle \|), n), \theta), *) \right| \rightarrow \min_{\mu \in X}$$

$$X = \{ \bar{\mu} \mid \bar{\mu} = \langle n, \theta \rangle; n > 6, 0 \leq \theta \leq 1 \} \subset N \times Z,$$
(119)

где

$N^*$  (*a priori*)

$$\|y_{ij}\| = O_T^{color \rightarrow gray}(*; \| \langle r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \rangle \|), \quad x_{ij} = \left\lceil \frac{r_{ij} + g_{ij} + b_{ij}}{3} \right\rceil, \quad x_{ij}, r_{ij}, g_{ij}, b_{ij} \in \{0, \dots, 255\}$$

$$\|\bar{y}_{ij}\| = O_T^{medfilt}(\|y_{ij}\|; n, W), \quad \bar{y}_{ij} = med[y_{i+n, j+n}; (n, n) \in W] \in \{0, \dots, 255\}$$

$$\|z_{ij}\| = O_T^{gray \rightarrow bin}(\|\bar{y}_{ij}\|, \theta), \quad z_{ij} = \begin{cases} 0, & \bar{y}_{ij} < \theta \\ 1, & \bar{y}_{ij} \geq \theta \end{cases}$$

$$m = O_P^{bwlabel}(\|z_{ij}\|, q), \quad q \in \{4, 8\}$$

$$N = \begin{cases} P(S), & P(S) > 0 \\ m, & P(S) = 0 \end{cases}, \quad S = \{S_k \mid k = \overline{1, m}, |S_{expert} - S_k| \leq \varepsilon, \varepsilon \in [0; 1]\}$$

Для решения оптимизации целевой функции (119) [105] разработана следующая программа для MATLAB [85-87].

```
function res=genim2(a,p,dapr,prc,mode)
% a – обрабатываемое изображение
% p – вектор параметров метода
% dapr – экспертная оценка площади объекта
% prc – допустимое отклонение от площади
% mode – режим работы функции
%ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЯ
b=rgb2gray(a);% конвертирование в полутоновое изображение
pp=round(p(1)*10);% формирование апертуры фильтра
bb=medfilt2(b,[pp pp]);% фильтрация с параметром 1
c=im2bw(bb,p(2));% конвертирование в бинарное изображение с параметром 2
%АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЯ
[d cnt]=bwlabel(~c,8);%выделение 8-ми связных областей в инверт-рисунке
if (mode==1)
```

```

figure; imshow(~d);
end
e=imfeature(d,'Area',8);%вычисление площади и индексы в инверт-рисунке
mas=cell2mat(struct2cell(e)); %создание массива площадей паттернов
maxcnt=0; %поиск количества паттернов с допустимой площадью
for i=1:cnt
    if ((mas(i)>=dapr*(1-prc)) && (mas(i)<=dapr*(1+prc)))
        maxcnt=maxcnt+1;
    end
end
if (maxcnt>0)%если есть паттерны с площадью из указанного диапазона
    res=maxcnt;%возврат минимум целевой функции
else
    res=cnt;%возврат общего количества паттернов
end
Для целевой функции (119) [105] была получена уточненная поверхность
(рисунок 4.4).

```

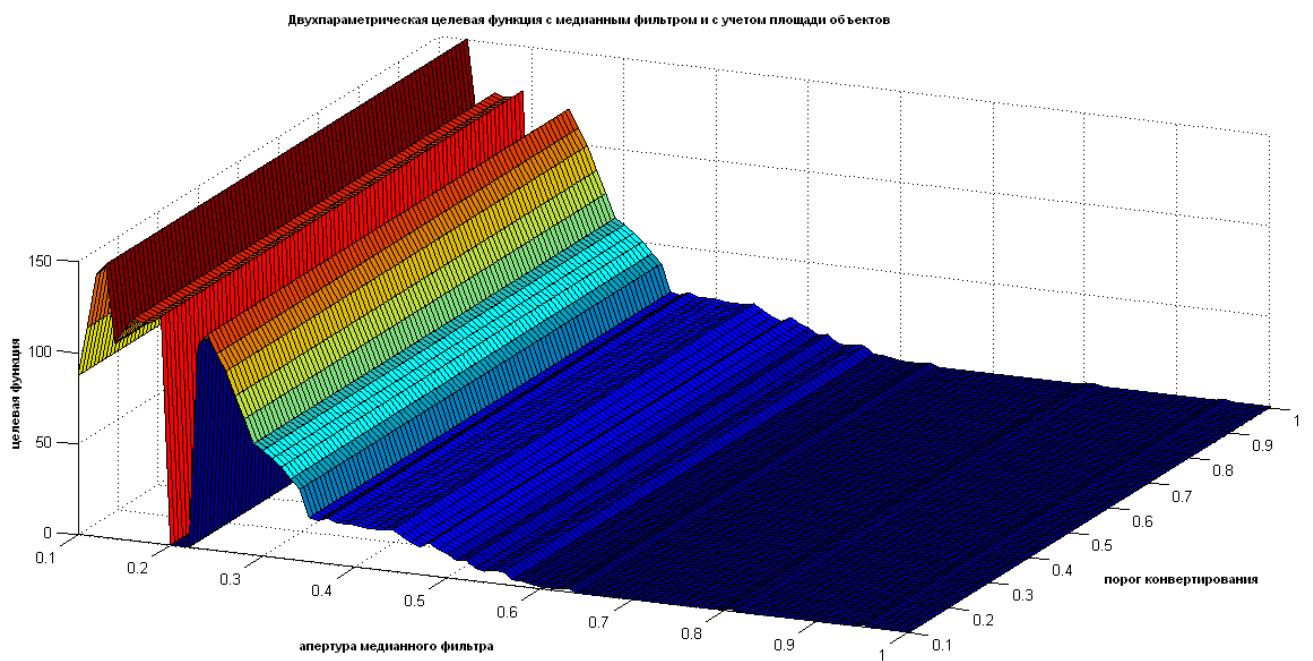


Рисунок 4.4 - Поверхность целевой функции (119) с медианным фильтром.

В данном математическом методе (118) «слабым» шагом является метод фильтрации [85-87, 94-98, 105].

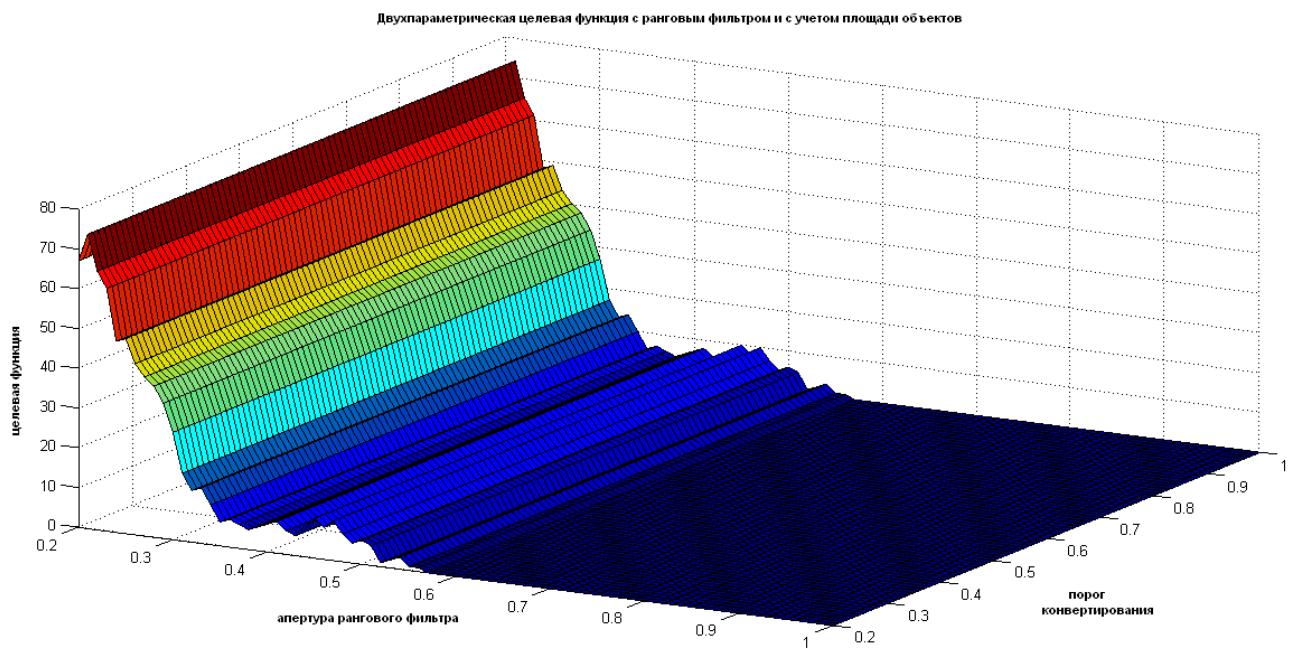


Рисунок 4.5 - Поверхность целевой функции (119) с ранговым фильтром.

С целью выяснения влияния медианного фильтра на конечный результат был проведен дополнительный эксперимент, где медианный фильтр менялся на ранговый фильтр [75-87]. На рисунке 4.5 можно увидеть поверхность целевой функции (119), в составе которого находится ранговый фильтр. Полученные результаты позволяют сузить пространство оптимизации на 60% относительно первоначального его размера и констатировать инвариантность области минимума к смене фильтра.

$$X = \left\{ \bar{\mu} \mid \bar{\mu} = \langle n, \theta \rangle; n > 6, 0 \leq \theta \leq 1 \right\} \subset N \times Z,$$

#### **4.5 Генетический алгоритм оптимизации нелинейной двухпараметрической целевой функции с линейными ограничениями**

В предыдущем параграфе для вычисления количества объектов наблюдения с учетом их площади был разработан метод математического моделирования [99-101] обработки и анализа изображений функцией системы технического зрения [10-12, 17, 22, 23, 68, 69, 75-87]. Данная функция используется в целевой функции

с двумя параметрами [105] (апертура медианного фильтра и порог конвертирования полутонаового изображения в бинарное изображение). Целевая функция является нелинейной [105] в силу нелинейности медианного фильтра [75-87]. Вводятся линейные ограничения для этих параметров, и строится график (поверхность) целевой функции, что приводит к уменьшению пространство поиска [73-87]. Для оптимизации данной нелинейной целевой функции с двумя параметрами используются генетических алгоритмов[105].

В стандартном генетическом алгоритме [73, 74, 105] существует множество, независимых друг от друга, параметров, которые влияют на конечный результат. Ниже в таблице 4.2 приведена используемая конфигурация классического генетического алгоритма [105].

Таблица 4.2

Конфигурация генетического алгоритма

Параметр ГА	Значение параметра	Назначение параметра
PopulationType	doubleVector	Тип данных популяции – каждая особь (точка в пространстве поиска) задается действительным числом двойной точности.
PopInitRange	[0;1]	Диапазон выбора особей определяется отрезком.
PopulationSize	20	Количество точек, одновременно оперируемых в алгоритме.
<b>EliteCount=6</b>	от 1 до 10	Число сохраняемых точек при переходе из одного этапа на другой. В эксперименте принято значение 6 в качестве оптимального.
<b>CrossoverFraction=0.7</b>	от 0.1 до 1.0	Вероятность скрещивания. В эксперименте принято значение 0,7 в качестве оптимального.
Generations	100	Максимальное число шагов эволюции.
TimeLimit	Inf	Генетический алгоритм не ограничен по времени работы
FitnessLimit	-Inf	Значение функции пригодности, при достижении которого останавливается генетический алгоритм.

Продолжение таблицы 4.2

Конфигурация генетического алгоритма

Параметр ГА	Значение параметра	Назначение параметра
InitialPenalty	10	Начальное значение параметра штрафа.
StallGenLimit	50	Генетический алгоритм останавливается, если в течении указанного шагов эволюции не улучшается текущее решение.
StallTimeLimit	20	Генетический алгоритм останавливается, если в течении указанного времени эволюции не улучшается текущее решение.
TolFun	1e-006	Генетический алгоритм останавливается, если изменение целевой функции за <b>StallGenLimit</b> шагов эволюции меньше указанной величины.
CreationFcn	@gacreationuniform	Функция создания начальной популяции (начального множества точек) с равномерным распределением в отрезке <b>PopInitRange</b> .
FitnessScalingFcn	@fitscalingrank	Ранговая функция масштабирования функции пригодности по возрастанию.
SelectionFcn	@selectionstochunif	Функция для создания родительского пула – линейный аналог метода рулетки.
CrossoverFcn	@crossoverscattered	Функция кроссинговера с вероятностью <b>CrossoverFraction</b> .
MutationFcn	@mutationgaussian	Функция мутации по распределению Гаусса со средним 0, с дисперсией, определяемой параметрами 0 и 0.3

Исследования генетического алгоритма проводились с целью повысить его эффективность в минимизации целевой функции [105]. Рассматривались параметры генетического алгоритма (число элитных особей в популяции, вероятность кроссинговера (скрещивания) и вероятность мутации), влияющие на

процесс оптимизации [73, 74, 105]. На рисунке 4.6 изображена зависимость количества обнаруживаемых точек (от 10% до 80%) минимума целевой функции [105] от числа сохраняемых элитных особей (от 1 до 10) при смене популяций. Непрерывное увеличение количества вычислительных экспериментов позволили констатировать 2 точки максимума этой зависимости, равные 2 и 6. Объем выборки равен  $N = 10^6$ .

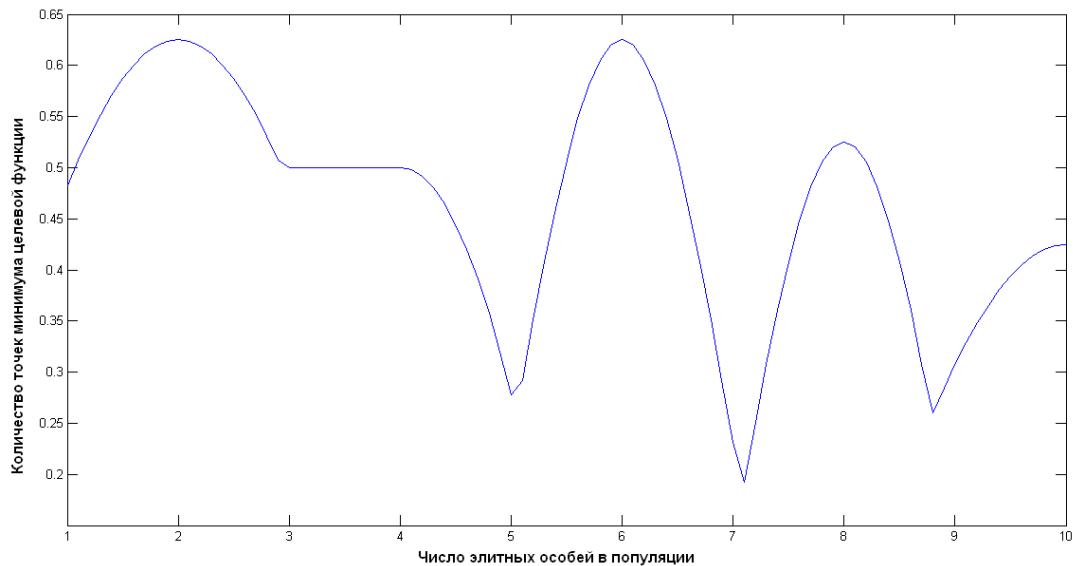


Рисунок 4.6 – Влияние числа элитных особей на количество точек минимума.

Аналогично были получены зависимости количества точек минимума от вероятностей скрещивания (рисунок 4.7) и мутации (рисунок 4.8). Эти операции в стандартном генетическом алгоритме следуют последовательно и считаются независимыми [105]. Однако следование этих операций друг за другом уже создает зависимость между ними.

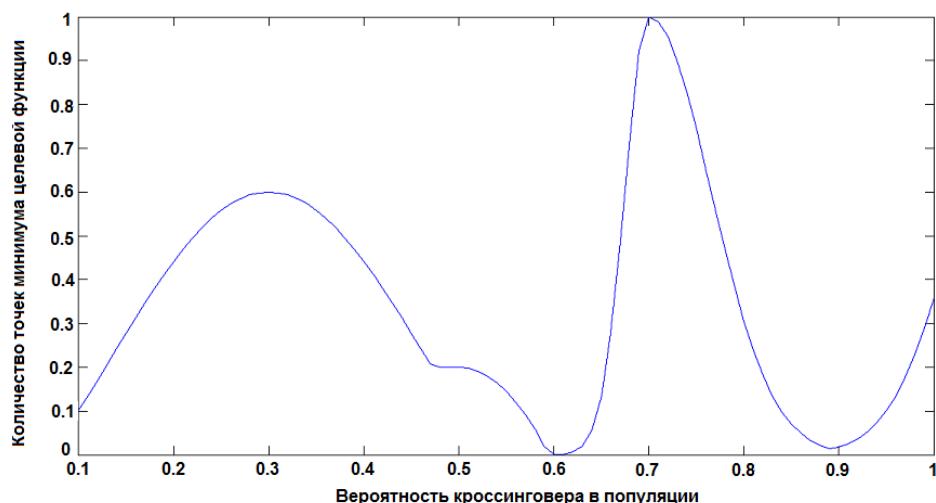


Рисунок 4.7 – Влияние вероятности скрещивания на количество точек минимума.

Из рисунков 4.7 и 4.8 констатируем, что оптимальной вероятностью скрещивания является значение 0.7, а оптимальной вероятностью мутации – значение 0.3. Так как, независимость элитизма, скрещивания и мутации допускается и предполагается их аддитивное влияние на конечный результат, то эти значения, в дальнейшем, будут использованы в вычислительном эксперименте (таблица 4.2).

Скрещивание отвечает за разнообразие рассматриваемых потенциальных точек минимума целевой функции, которые создаются на основе случайно отобранных двух других точек [105].

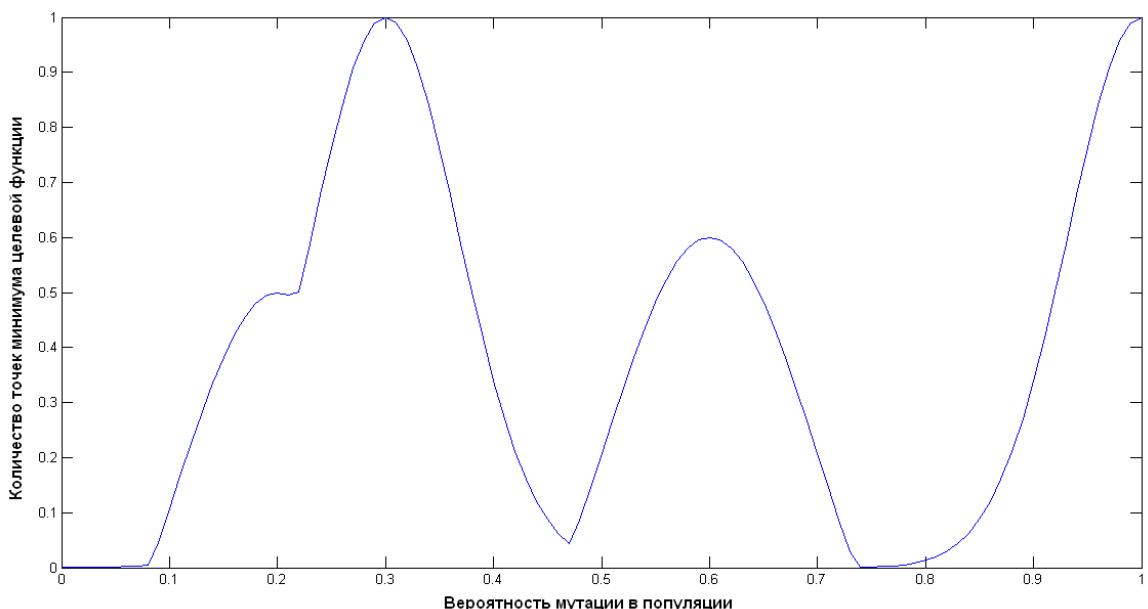


Рисунок 4.8 – Влияние вероятности мутации на количество точек минимума.

В отличие от скрещивания, мутация создает разнообразие с большим разбросом. В случае же со скрещиванием, этот разброс обеспечивается множественной зависимостью между последовательными популяциями в эволюции [105].

С учетом выявленных особенностей в элитизме, скрещивании и мутации был проведен вычислительный эксперимент в количестве  $N=800$  единиц по оптимизации целевой функции (13). В результате оптимизации целевой функции [105] (9) были получены следующие точки минимума (таблица 4.3). Критерием остановки генетического алгоритма было присутствие 80% одинаковых решений

в текущей популяции.

Таблица 4.3

Точки минимума двухпараметрической целевой функции.

<i>Апертура</i>	<i>Порог</i>	<i>Апертура</i>	<i>Порог</i>	<i>Апертура</i>	<i>Порог</i>
0.8942	0.8708	0.9901	0.2189	0.5612	0.2173
0.8057	0.2316	0.924	0.2325	0.8252	0.2308
0.8784	0.2116	0.988	0.2215	0.8965	0.2221
0.1636	0.2221	0.974	0.2158	0.1	0.2214
0.9901	0.2189	0.8252	0.2308	0.5305	0.2213
0.7108	0.2153	0.1	0.2214	0.3782	0.2334
0.7303	0.2199	0.4526	0.2227	0.3149	0.2183
0.3896	0.2308	0.345	0.2262	0.1	0.2018
0.2162	0.2219	0.7506	0.2229	0.8613	0.2262
0.42	0.239	0.1	0.2018	0.8814	0.2181
0.6454	0.2334	0.8899	0.2154	0.8062	0.2171
0.6163	0.2121	0.8062	0.2171	0.4958	0.2212
0.1395	0.2088	0.172	0.2232	0.5906	0.2233
0.8894	0.2089	0.8515	0.2325	1	0.228
0.8057	0.2316	0.9868	0.2041	0.1	0.2074
0.4251	0.2232	0.9901	0.2189	0.8895	0.2088
0.5492	0.2161	0.6051	0.219	0.588	0.2289
0.6847	0.2212	0.7013	0.224		

Второй вычислительный эксперимент связан с проверкой полученных оптимальных значений (таблица 4.3) на новом изображении, содержащем два природных водоема (рисунок 4.1, слева). Результаты применения измерительной функции системы технического зрения [10-12, 17, 22, 23, 68, 69, 75-87], площадям новых природных водоемов, приведены в таблице 3. Общая площадь 2 природных водоемов составляла 3372 пикселя.

Таблица 4.4

Измерение площадей новых природных водоемов на точках минимума

<i>Площадь, пиксель</i>	<i>Точность, %</i>	<i>Отклонение, %</i>	<i>Площадь, пиксель</i>	<i>Точность, %</i>	<i>Отклонение %</i>
3372	100.00	0.00	2957	87.69	0.12
3120	92.53	0.07	3011	89.29	0.11
2986	88.55	0.11	3027	89.77	0.10
3022	89.62	0.10	3022	89.62	0.10
2993	88.76	0.11	3158	93.65	0.06
3049	90.42	0.10	2917	86.51	0.13
3101	91.96	0.08	2993	88.76	0.11
3099	91.90	0.08	3039	90.12	0.10

Продолжение таблицы 4.4

Измерение площадей новых природных водоемов на точках минимума

<i>Площадь, пиксель</i>	<i>Точность, %</i>	<i>Отклонение, %</i>	<i>Площадь, пиксель</i>	<i>Точность, %</i>	<i>Отклонение %</i>
3022	89.62	0.10	3123	92.62	0.07
3128	92.76	0.07	3039	90.12	0.10
3131	92.85	0.07	3099	91.90	0.08
3025	89.71	0.10	3068	90.98	0.09
2996	88.85	0.11	3055	90.60	0.09
2986	88.55	0.11	3110	92.23	0.08
3120	92.53	0.07	3117	92.44	0.08
3061	90.78	0.09	3064	90.87	0.09
3092	91.70	0.08	2957	87.69	0.12
3101	91.96	0.08	3097	91.84	0.08
2993	88.76	0.11	3038	90.09	0.10
3158	93.65	0.06	3027	89.77	0.10
3023	89.65	0.10	3110	92.23	0.08
2993	88.76	0.11	3062	90.81	0.09
3099	91.90	0.08	3068	90.98	0.09
3055	90.60	0.09	2978	88.32	0.12
3110	92.23	0.08	2986	88.55	0.11
3103	92.02	0.08	3109	92.20	0.08
<b>3051</b>	<b>90.48</b>	<b>0.10</b>			

Как показывает второй вычислительный эксперимент, найденные оптимальные значения апертуры медианного фильтра и порога конвертирования на новом изображении (рисунок 4.1, слева) дают максимальную погрешность в 13%. Следовательно, может быть принята гипотеза о том, что возможно определение оптимальных значений параметров измерительной функции, при которых допустимо измерение площади наблюдаемого объекта (с заданной точностью) не только на выбранном изображении, но и на любых других, которые находятся под влиянием тех же самых внешних факторов, что и начальное изображение.

## Выводы по четвертой главе

Четвертая глава диссертационной работы описывает прикладные аспекты теории модифицированных дескриптивных алгебр изображений. В третьей главе была разработана методика оценивания воронки пространства обработки и анализа изображений, представленная в виде алгоритма в четвертой главе. Воронка образована маршрутами, начальные вершины которых располагаются в МДАИ цветных реализаций, а конечные – в МДАИ бинарных реализаций изображений. Выбор любой другой цветной реализации не гарантирует переход в допустимое бинарное состояние, тогда как, выбрав цветную реализацию из воронки, эта возможность появляется. Алгоритм комбинаторной оценки воронки позволяет оценить эту возможность, как геометрическую вероятность. Пример вычисления геометрической вероятности приводится в этой главе. Получив вероятностную оценку можно организовать выборку начальных изображений, среди которых будет реализация изображения, приводящая к бинарной реализации для измерения признака с допустимой точностью. В этой главе решаются задачи: вычисление количества природных водоемов, без учета их площадей, вычисление площадей природных водоемов с учетом их априорного количества. Таким образом, оказывается сильная взаимосвязанность задач вычисления количества объектов на изображении и вычисления площадей объектов на изображении. В дальнейшем, разработка функции измерения признаков «количество» и «площадь» сводится к определению оптимальных параметров разработанной функции системы технического зрения в виде нелинейной задачи минимизации двухпараметрической целевой функции с линейными ограничениями. В четвертой главе поставлена задача нелинейного программирования и демонстрируется разработка целевой функции через измерительную функцию СТЗ. Задача оптимизации решается генетическим алгоритмом. Проведены два вычислительных эксперимента в четвертой главе.

Первый эксперимент направлен на вычисление оптимальных значений апертуры медианного фильтра и порога конвертирования для 100

последовательных запусков оптимизации генетическим алгоритмом. При оптимальных значениях после обработки изображения допускается измерение площади с учетом априорного количества природного водоема. Оценка результата обработки проводится экспертом вручную. При проведении вычислительного эксперимента изменялись параметры генетического алгоритма: число элитных особей, вероятность скрещивания и вероятность мутации особей в популяции. Как показали результаты вычислительного эксперимента, целевая функция является многоэкстремальной, а процесс оптимизации при каждом ее запуске ведет себя как случайный процесс. Поэтому основой первого вычислительного эксперимента стала гипотеза о том, что число элитных особей, вероятность скрещивания и вероятность мутации влияют на количества точек экстремума целевой функции независимо. В ходе вычислительного эксперимента были выявлены зависимости числа точек минимума от указанных выше параметров генетического алгоритма. По найденным зависимостям определены необходимые значения количества элитных особей в популяции, вероятности скрещивания и мутации, которые позволяют получить максимальное количество изображений, пригодных к допустимому измерению площади природного водоема. Такая техника оптимизации для целевой функции позволило получить 53 оптимальных значений апертуры медианного фильтра и порога конвертирования. Результаты первого вычислительного эксперимента приведены в первой таблице. В ходе вычислительного эксперимента подтвердилась слабая аддитивность выбранных параметров генетического алгоритма.

Второй вычислительный эксперимент основан на гипотезе о том, что на формирование начального изображения влияют набор внешних факторов, которые характеризуются параметрами. Задача минимизации влияния негативных факторов сводится к задаче параметрической их идентификации. Однако, является неясным природа этих негативных факторов. Поэтому, вместо решения задачи параметрической идентификации факторов можно решить задачу оптимизации измерительной функции СТЗ, для найденных оптимальных значений параметров измерить искомые признаки объекта наблюдения. Ясно, что

измерение будет точным для начального изображения. Качество измерения будет менее точным для других изображений. Ограничением предлагаемого метода является требование, согласно которому новые изображения должны быть подвержены тем же самым внешним факторам. В ходе второго вычислительного эксперимента эта гипотеза нашла свое подтверждение. Результаты второго вычислительного эксперимента приведены во второй таблице.

## Заключение

В диссертационной работе исследованы процессы обработки и анализа изображений в системах технического и компьютерного зрения. Для проведения исследований были разработаны: модели бинарных, полутоновых и цветных изображений; математические описания методов цифровой обработки и анализа изображений; формы методов математического моделирования обработки и анализа изображений; модифицированные дескриптивные алгебры изображений в виде универсальных алгебр с главными элементами из числа моделей изображений и главными операциями из числа логических операций и методов обработки изображений; пространство обработки и анализа изображений из модифицированных дескриптивных алгебр изображений и его воронка. Был проведен комбинаторный анализ воронки пространства обработки и анализа изображений для выбора начальных изображений и получены численные оценки сечений воронки. Разработана методика построения методов математического моделирования обработки и анализа изображений и методика улучшения математических методов обработки и анализа изображений путем их оптимизации генетическим алгоритмом.

Основываясь на представленных теоретических результатах и данных проведенных вычислительных экспериментов, сформулируем основные **результаты, выносимые на защиту:**

*В рамках разработки новых математических методов моделирования объектов и явлений (п.1 паспорта специальности):*

1. Впервые разработан способ построения методов математического моделирования обработки и анализа изображений в пространстве состояния изображений для систем технического и компьютерного зрения.
2. Задача вычисления площади и количества природных водоемов на размытых изображениях впервые сформулирована и решена как задача минимизации нелинейной многопараметрической целевой функции с линейными ограничениями

*В рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента (п.4 паспорта специальности):*

3. Впервые применен генетический алгоритм для численного решения задачи многопараметрической оптимизации математических методов обработки и анализа изображений.
4. Разработан программный комплекс в MATLAB, позволяющий получить комбинаторную оценку воронки пространства обработки и анализа изображений для выбора начальных изображений.

*В рамках комплексных исследований научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента (п.5 паспорта специальности)*

5. Разработан математический аппарат модифицированных дескриптивных алгебр изображений, представляющий специализацию дескриптивных алгебр изображений на случай универсальных алгебр, для решения научной проблемы математического представления и исследования процессов обработки и анализа изображений.
6. Определено и исследовано пространство обработки и анализа изображений, а также проведена его комбинаторная оценка с целью выбора начальных данных.
7. Разработана методика улучшения математических методов обработки и анализа изображений путем их оптимизации численными методами.

Таким образом, в работе решены все поставленные выше задачи и достигнута цель исследования, что позволяет говорить о соответствии диссертационной работы следующим областям исследования паспорта специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»:

- 1) разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (п. 1);

- 2) реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента (п. 4);
- 3) комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента (п. 5).

Перспективы дальнейших исследований по теме диссертационной работы заключаются:

- 1) в определении цифровых методов обработки и анализа изображений в модифицированных дескриптивных алгебрах изображений и исследование их на эффективность в пространстве обработки и анализа изображений;
- 2) в алгебраическом представлении цифровых методов обработки и анализа изображений через главные элементы и операции модифицированных дескриптивных алгебр изображений;
- 3) в автоматизированном синтезе методов цифровой обработки и анализа изображений;
- 4) в разработке новых видов систем технического и компьютерного зрения с адаптивной архитектурой.

## Словарь терминов

*Система технического зрения* – аппаратно-программный комплекс, представляющий класс бесконтактных информационно-измерительных систем и функционирующий в оптической области электромагнитного излучения, для измерения признаков (анализ) объектов наблюдения на фиксируемых изображениях с предварительной их обработкой.

*Система компьютерного зрения* – программный комплекс обработки и измерения признаков объектов наблюдения на цифровых изображениях.

*Автоматизированные системы обработки изображений* – программный комплекс, используемый при моделировании систем технического зрения и являющийся разновидностью систем компьютерного зрения.

*Модель системы технического зрения* – метод математического моделирования обработки и анализа изображений системой технического зрения.

*Алгебраический подход к обработке, анализу и распознаванию изображений* – совокупность математический теорий для проведения научных исследований обработки, анализа, распознавания и понимания изображений, использующих методы алгебры, как раздела математики.

*Дескриптивный подход к обработке, анализу и распознаванию изображений* – специализация алгебраического подхода на случай изображений и алгоритмов их распознавания, называемая алгеброй изображений.

*Теория модифицированных дескриптивных алгебр изображений* – специализация математического аппарата алгебр изображений для случая универсальных алгебр.

*Реализация изображения* – цифровое изображение в теории модифицированных дескриптивных алгебр изображений.

*Семантическая информация об изображении* – семантическая сеть о сцене наблюдения, структурно представляющая ориентированный граф.

*Контекстная информация об изображении (дескриптивная модель изображения)* – матрица чисел, размерности начального изображения, элементы которой зависят от углов Эйлера объекта наблюдения в пространстве.

*Процедурное преобразование* – любой допустимый метод обработки цифровых изображений, определенный в теории модифицированных дескриптивных алгебр изображений.

*Параметрическое преобразование* – любой допустимый метод анализа (измерение признака) цифрового изображения, определенный в теории модифицированных дескриптивных алгебр изображений.

*Процедурная дескриптивная алгебраическая схема преобразования изображений (Т-ДАСПИ)* – суперпозиция процедурных преобразований, описывающая последовательность применяемых методов обработки цифровых изображений.

*Реализация Т-ДАСПИ* – процедурная дескриптивная алгебраическая схема преобразования изображений, позволяющая получить осмысливаемое результирующее изображение от исходного изображения.

*Параметрическая дескриптивная алгебраическая схема преобразования изображений (Р-ДАСПИ)* – композиция параметрических преобразований, описывающая последовательность применяемых методов измерения признаков цифровых изображений.

*Реализация Р-ДАСПИ* – параметрическая дескриптивная алгебраическая схема преобразования изображений, позволяющая получить значение измеряемого признака для исходного изображения.

## Список литературы

1. Официальный сайт Научно-производственной компании «Малленом Системс» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.mallenom.ru/>, свободный
2. Официальный сайт корпорации OMRON Corporation [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.omron.com/>, свободный
3. Официальный сайт группы компаний «Спектрис Си-Ай-Эс» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://spectris.ru/>, свободный
4. Официальный сайт компании «Промэнерго Автоматика» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://omron-russia.com/>, свободный
5. Официальный сайт компании «Промышленная Автоматизация» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://promautomatic.ru/>, свободный
6. Официальный сайт ФГУП «ГосНИИАС» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://gosniias.ru/>, свободный
7. Официальный сайт Вычислительного центра им. А.А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.ccas.ru/>, свободный
8. Официальный сайт ФГБУН Институт Космических исследований РАН [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.iki.rssi.ru/>, свободный
9. Официальный сайт Института систем обработки изображений РАН [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.ipsi.smr.ru/>, свободный
10. Хорн, Б.К.П. Зрение роботов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 487 с.
11. Пью, А. Техническое зрение роботов: Пер. с англ. / А. Пью. – М.: Машиностроение, 1987. – 320 с.
12. Дуда, Р.О. Распознавание образов и анализ сцен /Р.О. Дуда, П.Е. Харт. – М.: Изд-во «Мир», 1976. – 507 с.
13. Марр, Д. Зрение. Информационный подход к изучению представления и обработки зрительных образов: Пер. с англ. / Д. Марр. – М.: Радио и связь, 1987. – 400 с.

14. Патрик, Э.А. Основы теории распознавания образов: Пер. с англ. / Э.А. Патрик. – М.: Сов.радио, 1980. – 408 с.
15. Прэтт, У.К. Цифровая обработка изображений: пер с англ. / У.К. Прэтт. – М.: Мир, 1982. – Кн.1. – 312 с.
16. Ту, Дж.Т. Принципы распознавания образов: Пер. с англ. /Дж.Т. Ту, Р.С. Гонсалес. – М.: Изд-во «Мир», 1978. – 414 с.
17. Форсайт, Д.А. Компьютерное зрение. Современный подход: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 928 с.
18. Фу, К.С. Структурные методы в распознавании образов: Пер. с англ. / К.С. Фу. – М.: Изд-во «Мир», 1977. – 320 с.
19. Фу, К.С. Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин: пер. с англ. / К.С. Фу.– М.: изд-ва «Наука», 1971. – 256 с.
20. Хуанг, Т.С. Обработка изображений и цифровая фильтрация: Пер. с англ. / Т.С. Хуанг. – М.: Изд-во «Мир», 1979. – 318 с.
21. Хуанг, Т.С. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений. Преобразования и медианные фильтры: Пер. с англ. / Т.С. Хуанг, Дж.О. Эклунд, Г.Дж. Нуссбаумер и др. – М.: Радио и связь, 1984. – 224 с.
22. Шapiro, Л.Г. Компьютерное зрение: Пер. с англ. / Л.Г. Шapiro, Дж.С. Стокман. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 752 с.
23. Сырямкин, В.И. Системы технического зрения: Справочник / В.И. Сырямкин, В.С. Титов, Ю.Г. Якушенков и др. – Томск: МГП «РАСКО», 1992. - 367 с.
24. Визильтер, Ю.В. Детектирование и распознавание объектов с использованием анализа изображений, основанного на событиях / Ю.В. Визильтер, С.Ю. Желтов, А.А. Степанов // SPIE Proceedings. - 1996. - Vol. 2823. – С. 184-193.
25. Визильтер, Ю.В. Проективные морфологии и их применение в структурном анализе цифровых изображений / Ю.В. Визильтер, С.Ю. Желтов // Известия РАН. Теория и системы управления. - 2008. - №6. - С. 113-128.

26. Визильтер, Ю.В. Использование проективных морфологий в задачах обнаружения и идентификации объектов на изображениях/ Ю.В. Визильтер, С.Ю. Желтов // Известия РАН. Теория и системы управления. - 2009. - №2. - С. 125-138.
27. Гаврилов, А.В. Идентификация по малому числу наблюдений с использованием критерия относительной согласованности оценок / А.В. Гаврилов, В.А. Сойфер, В.А. Фурсов // Компьютерная оптика. - 2005. - №27. - С. 138-141.
28. Денисова, А.Ю. Алгоритм оценки параметров линейной спектральной смеси с полными ограничениями для анализа отсчетов гиперспектральных изображений / А.Ю. Денисова, В.В. Мясников // Компьютерная оптика. – 2014. - Т.38, №4. - С. 782-789.
29. Копенков, В.Н. Алгоритм автоматического построения процедуры локальной нелинейной обработки изображений на основе иерархической регрессии / В.Н. Копенков, В.В. Мясников // Компьютерная оптика. – 2012. - Т.36, №2. - С. 257-265.
30. Гроп, Д. Методы идентификации систем: Пер. с англ. / Д. Гроп. – М.: Изд-во «Мир», 1979. – 304 с.
31. Диленская, А.Н. Идентификация объектов управления. / А.Н. Диленская. – Самара: СГТУ, 2009. – 136 с.
32. Черноруцкий, И.Г. Методы оптимизации в теории управления: Учебное пособие / И.Г. Черноруцкий. – СПб.: Питер, 2004. – 256 с.
33. Нефедов, Д.Г. Математические модели и методы решения задач оптимального размещения элементов распределенной производственной структуры: дис. ... канд. тех. наук: 05.13.18 / Нефедов Денис Геннадьевич. - Челябинск, 2015. - 120 с.
34. Белоусов, А.А. Алгоритмы и программные средства эволюционной обработки изображений: дис. ... канд. тех. наук: 05.13.01 / Белоусов Артем Анатольевич. – Томск, 2010. - 168 с.

35. Табаси, С.Х. Адаптивный видеодатчик на базе КМОП приемника излучения с предварительной обработкой изображений: дис. ... канд. тех. наук: 05.13.05 / Табаси Сейед Хашем. – Курск, 2009. - 138 с.
36. Аряшев, С.Н. Вычислительные устройства с параллельной и изменяемой архитектурой для задач обработки изображений: дис. ... канд. тех. наук: 05.13.05 / Аряшев Сергей Иванович. – Москва, 2002. - 165 с.
37. Медведева, Е.В. Методы синтеза многомерных моделей и алгоритмов цифровой обработки изображений: дис. ... д-ра. тех. наук: 05.12.04 / Медведева Елена Викторовна. – Киров, 2011. - 270 с.
38. Чесноков, С.Е. Синтез и анализ алгоритмов обработки изображений групповых точечных объектов для систем ориентации летательных аппаратов: дис. ... канд. тех. наук: 05.12.04 / Чесноков Сергей Евгеньевич. – Йошкар-Ола, 2002. - 152 с.
39. Ларкин, Е.В. Оптимационные задачи на сетях Петри-Маркова / Е.В. Ларкин, А.Н. Ивутин // Современные технологии в науке и образовании: сб. статей Международной научно-технической и научно-методической конференции / Рязан. гос. радиотехн. ун-т. - Рязань, 2016. – С. 13-16.
40. Гридин, В.Н. Адаптивные системы технического зрения / В.Н. Гридин, В.С. Титов, М.И. Труфанов. — СПб.: Наука, 2009. — 442 с.
41. Журавлев, Ю. И. Экстремальные задачи, возникающие при обосновании эвристических процедур / Ю.И. Журавлев // Проблемы прикладной математики и механики. – 1971. - С. 67-74.
42. Журавлев, Ю.И. Алгоритмы распознавания, основанные на вычислении оценок / Ю.И. Журавлев, В.В. Никифоров // Кибернетика». – 1971. - №3. – С. 1-11.
43. Журавлев, Ю.И. Непараметрические задачи распознавания образов / Ю.И. Журавлев // Кибернетика. – 1976. - №6.
44. Журавлев, Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания и классификации / Ю.И. Журавлев // Проблемы кибернетики. – 1978. - №33. - С. 5-68.

45. Журавлев, Ю.И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов / Ю.И. Журавлев // Кибернетика. – 1978. - Т.3, №2. - С. 35-43.
46. Журавлев, Ю.И. Распознавание образов и анализ изображений. Искусственный интеллект: в 3 т. Т.2: Модели и методы / Ю.И. Журавлев, И.Б. Гуревич. - М.: Радио и связь, 1990. - С. 149 - 190.
47. Гуревич, И.Б. Дескриптивные алгебры изображений: определения и примеры / И.Б. Гуревич, Ю.И. Журавлев, Ю.Г. Сметанин // Автометрия. - 1999. - №.6. - С. 1 -19.
48. Журавлëв, Ю.И. РАСПОЗНАВАНИЕ. Математические методы. Программная система. Практические применения. / Ю.И. Журавлëв, В.В. Рязанов, О.В. Сенько. – М.: Фазис, 2006. – С. 159.
49. Гренандер, У.П. Лекции по теории образов: в 3 т. Т.1.: Синтез образов / У.П. Гренандер. – М.: Изд-во «Мир», 1979. – 382 с.
50. Гренандер, У.П. Лекции по теории образов: в 3 т. Т.2.: Анализ образов / У.П. Гренандер. – М.: Изд-во «Мир», 1981. – 447 с.
51. Гренандер, У.П. Лекции по теории образов: в 3 т. Т.3.: Регулярные структуры / У.П. Гренандер. – М.: Изд-во «Мир», 1983. – 432 с.
52. Матросов, В.Л. Корректные алгебры ограниченной емкости над множествами некорректных алгоритмов / В.Л. Матросов // ДАН СССР. - 1980. - Т. 253, №1. - С. 25-30.
53. Матросов, В.Л. Корректные алгебры ограниченной емкости над множеством алгоритмов вычисления оценок / В.Л. Матросов // Журнал вычислительной математики и математической физики, - 1981. - Т.21, № 5. - С. 1276—1291.
54. Матросов, В.Л. Оптимальные алгоритмы в алгебраических замыканиях операторов вычисления оценок / В.Л. Матросов // ДАН СССР. – 1982. - Т.262, №4.- С.818-822.

55. Матросов, В.Л. Корректные алгебры алгоритмов распознавания ограниченной емкости: дис. ... д-ра. физ.-мат.. наук: 01.01.09 / Матросов Виктор Леонидович. – Москва, 1985. - 220 с.
56. Рудаков, К.В. Универсальные и локальные ограничения в проблемах коррекции эвристических алгоритмов / К.В. Рудаков // Кибернетика. – 1987. - №2. - С. 30-34.
57. Рудаков, К.В. Алгебраическая теория универсальных и локальных ограничений для алгоритмов распознавания:: дис. ... д-ра. физ.-мат. наук: 05.12.04 / Рудаков Константин Владимирович. – Москва, 1992. - 146 с.
58. Мазуров, В.Д. Вопросы обоснования и применения комитетных алгоритмов распознавания / В.Д. Мазуров, В.С. Казанцев, Н.Г. Белецкий и др. // Распознавание. Классификация, Прогноз. Математические методы и их применение. – 1989. - №1. – С. 114-148.
59. Мазуров, В.Д. Комитеты систем неравенств и задача распознавания / В.Д. Мазуров // Кибернетика. - 1971. - №3.-С. 140-146.
60. Мазуров, В.Д. Теория и приложения комитетных конструкций / В.Д. Мазуров // Методы для нестационарных задач математического программирования. - 1979.- С. 31-63.
61. Мазуров, В.Д. Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации / В.Д. Мазуров. – М.: Наука, 1990. - 248 с.
62. Лабунец, В.Г. Алгебраическая теория сигналов и систем: цифровая обработка сигналов / В.Г. Лабунец. – Красноярск: Издательство Красноярского университета, 1984. – 243 с.
63. Пытьев, Ю.П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем / Ю.П. Пытьев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.
64. Синицын, И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева / И.Н. Синицын. –М.: Логос, 2007. – 772 с.
65. Фурман, Я.А. Визуализация изображений в трехмерных сценах: учебное пособие / Я.А. Фурман. - Йошкар-Ола: Марийский государственный технический университет, 2007. - 280 с.

66. Чернов, В.М.. Арифметические методы синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований / В.М. Чернов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 264 с.
67. Шлезингер, М.И. Математические средства обработки изображений / М.И. Шлезингер. – Киев: Наук.думка, 1989. – 196 с.
68. Алпатов, Б.А. Методы автоматического обнаружения и сопровождения объектов. Обработка изображений и управление / Б.А. Алпатов, П.В. Бабаян, О.Е Балашов, А.И.Степашкин. – М.: Радиотехника, 2008. – 176 с.
69. Воротников, С.А. Информационные устройства робототехнических систем: Учеб. пособие / С.А. Воротников. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 384 с.
70. Акимов, О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы / О.Е. Акимов. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 352 с.
71. Белоусов, А.И.Дискретная математика: Учеб. для вузов / А.И Белоусов, С.Б. Ткачев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с.
72. Игошин, В.И. Математическая логика и теория алгоритмов / В.И. Игошин. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. – 256 с.
73. Рассел, С. Искусственный интеллект: современный подход: Пер. с англ. / С. Рассел, П. Норвиг. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1408 с.
74. Люггер, Дж. Ф. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем: Пер. с англ. / Дж. Ф. Люггер. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 864 с.
75. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.
76. Потапов, А.С. Распознавание образов и машинное восприятие / А.С. Потапов. – СПб.: Политехника, 2007. – 548 с.
77. Потапов, А.А. Новейшие методы обработки изображений / А.А. Потапов, Ю.В. Гуляев, С.А. Никитов, А.А. Пахомов, В.А. Герман. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 496 с.

78. Ярославский, Л.П. Введение в цифровую обработку изображений / Л.П. Ярославский. – М.: Сов.радио, 1979. – 312 с.
79. Приоров, А.Л. Цифровая обработка изображений / А.Л. Приоров, И.В. Апальков, В.В. Хрящев. – Ярославль: Яросл.гос.уни-т, 2007. – 235 с.
80. Сойфер, В.А. Методы компьютерной обработки изображений / М.В. Гашников, Н.И. Глумов, Н.Ю. Ильясова и др. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 784 с.
81. Яншин, В.В. Анализ и обработка изображений: принципы и алгоритмы / В.В. Яншин. – М.: Машиностроение, 1995. – 112 с.
82. Фурман, Я.А. Цифровые методы обработки и распознавания бинарных изображений / Я.А. Фурман, А.Н. Юрьев, В.В. Яншин. – Красноярск: Изд-во Краснояр.ун-та, 1992. – 248 с.
83. Яне, Б. Цифровая обработка изображений / Б. Яне. – М.: Техносфера, 2007. – 584 с.
84. Анисимов, Б.В. Распознавание и цифровая обработка изображений: Учеб.пособие для студентов вузов. – М.: Высш.шк., 1983. – 295 с.
85. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений в среде Matlab: Пер. с англ. / Р. Гонсалес, Р. Вудс, С. Эддинс. - М.: Техносфера, 2006. – 616 с.
86. Дьяконов, В. Matlab. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник / В. Дьяконов, И. Абраменкова. – СПб.: Питер, 2002. – 608 с.
87. Рудаков, П.И.Обработка сигналов и изображений. MATLAB 5.x / П.И. Рудаков, В.И. Сафонов. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2000. – 416 с.
88. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1999. – 479 с.
89. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1999.– 400 с.
90. Горяинов, В.Б. Математическая статистика: Учеб. для вузов / В.Б. Горяинов, И.В. Павлов, Г.М. Цветкова и др. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 424 с.

91. Глушков, В.М. Синтез цифровых автоматов / В.М. Глушков. – М.: Физматгиз, 1962. – 476 с.
92. Карпов, Ю.Г. Теория автоматов / Ю.Г. Карпов. – СПб.: Питер, 2003. – 208 с.
93. Кобринский, Н. Е. Введение в теорию конечных автоматов / Н. Е. Кобринский, Б.А. Трахтенброт. – М.: Физматгиз, 1962. – 404 с.
94. Горелик, А.Л. Современные проблемы распознавания / А.Л. Горелик, И.Б. Гуревич, В.А. Скрипкин. – М.: Радио и связь, 1985. – 160 с.
95. Горелик, А.Л. Методы распознавания: Учеб. пособие для вузов / А.Л. Горелик, В.А. Скрипкин. – М.: Высш. Шк., 1984. – 208 с.
96. Лепский, А.Е. Математические методы распознавания образов: курс лекций / А.Е. Лепский, А.Г.Броневич. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. – 155 с.
97. Мазуров, Вл.Д. Математические методы распознавания образов: учеб.пособие / Вл.Д. Мазуров. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2010. – 101 с.
98. Местецкий, Л.М. Математические методы распознавания образов: курс лекций [Электронный ресурс] / Л.М. Местецкий. – М.: МГУ ВМИК , 2002.
99. Васильков, Ю.В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учеб. пособие / Ю.В. Васильков, Н.Н. Василькова. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 256 с.
100. Волков, И.К. Случайные процессы: Учеб. для вузов /. И.К. Волков, С.М. Зуев, Г.М. Цветкова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 448 с.
101. Говорухин, В. Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс / В. Говорухин, В. Цибулин. – СПб.: Питер, 2001. – 624 с.
102. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для педагогических институтов / Л.Я. Куликов – М.: Высш. шк., 1979. – 559 с.
103. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры: Учеб. для вузов. / А.Г. Курош. – М.: Издательство «Наука», 1968. – 431 с.
104. Курош, А.Г. Теория групп / А.Г. Курош. – М.: Изд-во «Наука», 1967. – 648 с.

105. Гольдштейн, А.Л. Оптимизация в среде MATLAB: учеб.пособие / А.Л. Гольдштейн. – Пермь: Изд-во Перм.нац.исслед.политех.ун-та, 2015. – 192 с.
106. Matheron, G. Random Sets and Integral Geometry / G. Matheron. - New York: Wiley, 1975.
107. Serra, J. Image Analysis and Mathematical Morphology / J. Serra. – London: Academic Press, 1982.
108. Serra, J. Morphological filtering: an overview / J. Serra // Signal Processing. 1994. vol.38, №.1. pp.3-11.
109. Serra, J. Introduction to morphological filters / J. Serra // Image Analysis and Mathematical Morphology. 1998. Vol.2, № 5. pp.101-114.
110. Pavel M. Pattern Recognition Categories / M. Pavel // Pattern Recognition. 1976. Vol.8, №.3. pp. 115-118.
111. Pavel M. Fundamentals of Pattern Recognition / M. Pavel. - New York: Dekker, Inc., 1989.
112. Sternberg, S.R. Language and Architecture for Parallel Image Processing / S.R. Sternberg // Proceedings of the Conference on Pattern Recognition in Practice. 1980.
113. Sternberg, S.R. An overview of Image Algebra and Related Architectures, Integrated Technology for parallel Image Processing / S.R. Sternberg. - London: Academic Press, 1985.
114. Sternberg, S.R. Grayscale morphology / S.R. Sternberg // Computer Vision, Graphics and Image Processing. 1986. Vol.35, №.3. pp. 333-355.
115. Ritter, G.X. Morphological associative memories / G.X. Ritter, P. Sussner, J.L. Diaz-de-Leon // IEEE Trans, on Neural Networks. 1998. Vol. 9, №. 2. pp. 281-292.
116. Ritter, G.X. Introduction to Morphological Neural Networks / G.X. Ritter, P. Sussner // Proceedings of ICPR 1996, IEEE, 1996. pp. 709-716.
117. Ritter, G.X. Morphological bidirectional associative memories / G.X. Ritter, P. Sussner, J.L. Diaz-de-Leon // Neural Networks. 1999. Vol.12. pp. 851—867.

118. Ritter, G.X. Handbook of Computer Vision Algorithms in Image Algebra / G.X. Ritter, J.N. Wilson. - CRC Press Inc., 2001.
119. Ritter, G.X. Image Algebra. Center for computer vision and visualization. Department of Computer and Information science and Engineering / G.X. Ritter. – Gainesville: University of Florida, 2001.
120. Ritter, G.X. Image Algebra techniques for parallel image processing / G.X.Ritter, P.D. Gader. // Parallel Distributed Computers. 1987. Vol.4, №.5. pp.7-44.
121. Ritter, G.X. Image Algebra: An Overview / G.X. Ritter, J.N. Wilson, J.L. Davidson. // Computer Vision, Graphics, and Image Processing. 1990. Vol.49. pp. 297-331.
122. Gurevich, I.B. Pattern Recognition and Image Recognition / I.B. Gurevich, Y.I. Zhuravlev // Pattern Recognition and Image Analysis. 1991. Vol.1, №.2. Pp. 149-181.
123. Gurevich, I.B. The Joint Use of Image Equivalents and Image Invariants in Image Recognition / I.B.Gurevich, I.A. Jernova // Pattern Recognition and Image Analysis. 2003. Vol. 13, №.4. pp. 570-578.
124. Gurevich, I.B. Conditions of Generating Descriptive Image Algebras by a Set of Image Processing Operations / I.B.Gurevich, V.V. Yashina // Progress in Pattern Recognition, Speech and Image Analysis. Proceedings of the 8th Iberoamerican Congress on Pattern Recognition. 2003, pp. 498-505.
125. Gurevich, I.B. Descriptive Image Algebras with One Ring / I.B. Gurevich, V.V. Yashina // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. 2003. Vol. 13, №.4. Pp. 579-599.
126. Gurevich, I.B. Investigation of Descriptive Image Algebras with a Single Ring / I.B. Gurevich, V.V. Yashina // Proceedings of the 6th German-Russian Workshop "Pattern Recognition and Image Understanding". 2003. P. 84-87.
127. Gurevich, I.B. Application of algebraic language in image analysis. Illustrative example / I.B. Gurevich, V.V. Yashina // Proceedings of the 7th International conference "Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies". 2004. Pp. 240-243.

128. Gurevich, I.B. Algorithmic Scheme Based on a Descriptive Image Algebra with One Ring: Image Analysis Example / I.B. Gurevich, V.V Yashina // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. 2005. Vol.15, №.1. Pp.192-194.
129. Gurevich, I.B. The Descriptive Approach to Image Analysis. Current State and Prospects / I.B. Gurevich // Proceedings of 14th Scandinavian Conference on Image Analysis. 2005. LNCS 3540. Pp. 214-223.
130. Gurevich, I.B. Elements of the Information Technology of Cytological Specimen Analysis: Taxonomy and Factor Analysis / I.B. Gurevich, D.V. Harazishvili, O. Salvetti, A.A. Trykova, I.A. Vorob'ev // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. 2006. Vol.16, №.1. Pp. 113-115.
131. Gurevich, I.B. An Open General-Purposes Research System for Automating the Development and Application of Information Technologies in the Area of Image Processing, Analysis, and Evaluation / I.B. Gurevich, A.V. Khilkov, I.V. Koryabkina, D.M. Murashov, and Yu.O. Trusova // Pattern Recognition and Image Analysis. 2006. Vol.16, №.4. Pp.530-563.
132. Gurevich, I.B. Comparative Analysis and Classification of Features for Image Models / I.B. Gurevich, I.V. Koryabkina. // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. 2006. Vol.16, №.3. Pp. 265-297.
133. Gurevich, I.B. Operations of Descriptive Image Algebras with One Ring / I.B. Gurevich, V.V. Yashina // Pattern Recognition and Image Analysis. 2006. Vol.16, №.3. Pp. 298-328.
134. Gurevich, I.B. Computer-Aided Image Analysis Based on the Concepts of Invariance and Equivalence / I.B. Gurevich, V.V. Yashina // Pattern Recognition and Image Analysis. 2006. Vol.16, №.4. Pp.564-589.
135. Gurevich, I.B. Descriptive Theory of Image Analysis. Models and Techniques / I.B. Gurevich, V.V. Yashina // 8th International Conference "Pattern Recognition

- and Image Analysis: New Information Technologies. Conference proceedings. 2007. Vol.1. Pp.103-112.
136. Gurevich, I.B. Descriptive Analysis of Image Data. Basic Models / I.B. Gurevich, V.V. Yashina // Image Mining Theory and Applications: Proceedings of the 1st International Workshop on Image Mining Theory and Applications. 2008 Pp. 3-15.
137. Gurevich, I.B. Image Representation Space in the Descriptive Approach Environment / I.B. Gurevich, V.V. Yashina // 9th International Conference "Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies". 2008. Vol.1. Pp.201-209.
138. Gurevich, I.B. Descriptive Approach to Image Analysis: Image Models / I.B. Gurevich, V.V. Yashina // Pattern Recognition and Image Analysis. 2008. Vol.18, №.4. Pp. 518-541.
139. Gurevich, I.B. Descriptive Approach to Medical Image Mining. An Algorithmic Scheme for Analysis of Cytological Specimens / I.B. Gurevich, V.V. Yashina, I.V. Koryabkina, H. Niemann, O. Salvetti // Pattern Recognition and Image Analysis. 2008. Vol.18, №.4. Pp. 542-562.
140. Rosenfeld, A. Picture Languages. Formal Models for Picture Recognition / A. Rosenfeld. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1979.
141. Evans, T.G. A Formalism for the Description of Complex Objects and its Implementation / T.G. Evans // Proceedings of the First International Conference on Cybernetics. 1967.
142. Evans, T.G. Descriptive Pattern Analysis Techniques: Potentialities and Problems / T.G. Evans // Methodologies of Pattern Recognition. 1969. Pp. 149-157.
143. Narasimhan, R. Syntax-Directed Interpretation of Classes of Pictures / R. Narasimhan // Communications ACM. 1966. Vol.9, №.3.
144. Narasimhan, R. Labeling Schemata and Syntactic Descriptions of Pictures / R. Narasimhan // Information and Control. 1967. Vol. 7, №.2.

145. Narasimhan, R. On the Description, Generalization and Recognition of Classes of Pictures / R. Narasimhan // NATO Summer School on Automatic Interpretation and Classification of Images. 1968.
146. Narasimhan, R. Picture Languages / R. Narasimhan // Picture Language Machines. 1970. Pp. 1-30.
147. Kirsh, R. Computer Interpretation of English Text and Picture Patterns / R. Kirsh // IEEE-TEC. 1964. Vol. EC-13, №. 4.
148. Shaw, A. Proposed Language for the Formal Description of Pictures / A. Shaw // CGS Memo. 1967.
149. Shaw, A. The Formal Description and Parsing of Pictures / A. Shaw // Ph.D. Thesis, Computer Sciences Department. – Stanford: Stanford University, 1967.
150. Barrow, H.G. Some Techniques for Recognizing Structures in Pictures / H.G. Barrow, A.P. Ambler, R.M. Burstall // Frontiers of Pattern Recognition. 1972. Pp. 1-30.
151. Kaneff, S. Pattern Cognition and the Organization of Information / S. Kaneff // Frontiers of Pattern Recognition. 1972. Pp. 193-222.
152. Unger, S.H. A computer oriented toward spatial problems / S.H. Unger // Proceedings of the IRE. 1958. Vol.46. Pp. 1744-1750.

## Приложение А. Свидетельство о регистрации программного комплекса

