

ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский Государственный Университет»
(Национальный исследовательский университет)

УДК 517.9

На правах рукописи

Богатырева Екатерина Александровна

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ
И ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент Н.А. Манакова

Челябинск – 2015

Содержание

Обозначения и соглашения	4
Введение	5
Глава 1. Квазилинейные математические модели соболевского типа	
1.1. Элементы нелинейного функционального анализа в исследовании и построении математических моделей	23
1.2. Аналитическое исследование задачи Коши для квазилинейного уравнения соболевского типа	29
1.3. Единственность решения задачи Коши для квазилинейного уравнения соболевского типа	32
1.4. Сходимость проекционного метода нахождения приближенного решения задачи Коши	35
1.5. Алгоритм проекционного метода нахождения приближенного решения задачи Коши	41
Глава 2. Математические модели двухфазной фильтрации	
2.1. Математическая модель неравновесной противоточной капиллярной пропитки	43
2.2. Аналитическое исследование математической модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки	50
2.3. Аналитическое исследование математической модели начального регулирования неравновесной противоточной капиллярной пропитки	52
2.4. Описание программы для моделирования неравновесной противоточной капиллярной пропитки	56

2.5. Вычислительные эксперименты для математической модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки	59
--	----

Глава 3. Математическая модель квазистационарного процесса в проводящей среде

3.1. Математическая модель квазистационарного процесса	63
3.2. Схема Розенброка для дифференциально-алгебраической системы	66
3.3. Аналитическое исследование математической модели квазистационарного процесса	69
3.4. Сходимость приближенного решения задачи Коши для модели квазистационарного процесса	71
3.5. Алгоритм численного метода нахождения решения задачи Коши для модели квазистационарного процесса. Описание программы для ЭВМ	76
3.6. Вычислительные эксперименты для математической модели квазистационарного процесса	81
3.7. Сравнительный анализ результатов вычислений	86
Заключение	95
Список литературы	97
Приложение	110

Обозначения и соглашения

1. Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами готического алфавита. Исключения составляют множества с устоявшимися названиями, например:

\mathbb{N} – множество натуральных чисел,

\mathbb{R} – множество действительных чисел,

\mathbb{R}_+ – множество положительных действительных чисел,

$L_p(\Omega)$ – пространства Лебега,

$W_p^l(\Omega)$ – пространства Соболева,

и множества отображений множеств, обозначаемых рукописными заглавными буквами латинского алфавита, например:

$\mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ – множество линейных непрерывных операторов, действующих из пространства \mathfrak{U} в пространство \mathfrak{F} ,

$C^\infty(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ – множество операторов, имеющих непрерывные производные Фреше любого порядка, определенных в пространстве \mathfrak{U} и действующих в пространство \mathfrak{F} .

2. Элементы множеств и индексы обозначаются строчными буквами латинского или греческого алфавитов, кроме отображений множеств, называемых операторами и обозначаемых заглавными буквами латинского алфавита, например:

$L : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ – оператор, действующий из пространства \mathfrak{U} в пространство \mathfrak{F} .

3. Все рассуждения проводятся в вещественных банаховых пространствах.

4. Полные доказательства приведены только для новых результатов. Символ \square лежит в конце доказательства.

Введение

Актуальность исследования

Активное развитие техники и появление новых технологий требуют всестороннего и глубокого понимания физических процессов, протекающих в окружающей среде. В частности, большое прикладное значение имеет построение и исследование адекватных математических моделей гидродинамических и электродинамических явлений. Полноценное экспериментальное исследование в этих областях зачастую требует значительных затрат, а в некоторых ситуациях и вовсе практически невозможно. Поэтому большую практическую значимость имеет разработка и реализация в программном виде численных методов нахождения приближенных решений начально-краевых задач для таких моделей, получение достаточных условий существования решения.

Обширный класс моделей математической физики основывается на неклассических нелинейных уравнениях или системах уравнений в частных производных, не разрешенных относительно производной по времени. Нелинейная структура таких моделей вызывает определенные трудности при их изучении и решении соответствующих задач, однако в такие модели описывают физический процесс гораздо качественнее, чем более простые линейные аналоги. Поэтому интерес к подобного рода нелинейным моделям постоянно возрастает с ростом требований к точности описания физических процессов в производственной практике. При этом нахождение аналитических решений, как правило, невозможно, и возникает необходимость в разработке численных методов нахождения приближенных решений начальных задач для таких моделей и разработка комплексов программ для них. Применение известных численных методов для нелинейных моделей зачастую невозможно, поэтому на первый план выходят вопросы построения новых численных методов

для таких моделей, доказательства их сходимости и проверка адекватности получаемых результатов.

Диссертационная работа посвящена исследованию одного класса нелинейных математических моделей, основанных на уравнениях, не разрешенных относительно производной по времени, а именно, модели противоточной неравновесной капиллярной пропитки, модели начального регулирования неравновесной противоточной капиллярной пропитки и модели квазистационарного процесса в проводящей среде без дисперсии.

Математическая модель противоточной неравновесной капиллярной пропитки. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей класса C^∞ . В цилиндре $\Omega \times (0, T)$, $T \in \mathbb{R}_+$ рассмотрим уравнение

$$x_t - \lambda \alpha (\Delta \Phi(x))_t = \alpha \Delta \Phi(x) \quad (0.0.1)$$

с условием Дирихле

$$x(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (0.0.2)$$

Уравнение (0.0.1) моделирует неравновесную противоточную капиллярную пропитку [5]. Искомая функция x соответствует насыщенности. Функция $\Phi(x) \equiv |x|^{p-2}x$, $p > 2$ – монотонно возрастающая и гладкая. Параметры α и λ вещественны, положительны, характеризуют свойства фаз и среды. Эта модель описывает совместную фильтрацию пары жидкостей (газов) в пористой среде под действием капиллярных сил. При противоточной пропитке среды фазы движутся в противоположных направлениях по капиллярам с различными параметрами. Сложный и нерегулярный характер структуры порового пространства не позволяет изучать движение жидкости и газов в нем обычными методами гидродинамики, то есть путем решения уравнений движения вязкой жидкости для области, представляющей собой совокупность всех пор. Поэтому возникает необходимость в создании и исследовании специальных моделей, описывающих эти процессы [4].

Классическую теорию совместной фильтрации несмешивающихся жидкостей в пористой среде разработали в первой половине XX века М. Мускат, М. Леверетт и их ученики [72, 76]. Эта теория имела и продолжает иметь фундаментальное значение для решения практических инженерных задач в области нефтедобычи [60, 62]. Однако, данная теория не вполне адекватно описывает ряд случаев, имеющих важное значение на практике. В частности, это случай противоточной капиллярной пропитки пористого блока, первоначально заполненного нефтью, или случай области возле границы раздела сред (вода-нефть).

Для решения этой проблемы Г.И. Баренблаттом и его соавторами был предложен ряд уточнений классической модели [4, 5, 59, 61]. Основным отличием их подхода является учет эффекта неравновесности. В частности, случай противоточной пропитки был детально рассмотрен Г.И. Баренблаттом и А.А. Гильманом в [5]. Поэтому модель неравновесной противоточной капиллярной пропитки мы будем называть моделью Баренблатта – Гильмана. Модели, учитывающие эффект неравновесности, были подробно рассмотрены в ряде более поздних работ [71, 90], были получены подтверждения их адекватности и точности. Однако, основным направлением этих исследований являлось численное моделирование и сопоставление его результатов с результатами натуральных экспериментов [63, 77, 79]. Также ряд исследований, связанных с этой моделью, проводился в последние годы российскими учеными [6, 54]. Например, в работе [54] модель исследовалась в линеаризованном виде, что позволило получать приближенно-аналитические решения. В нашей работе модель рассматривается в своем исходном виде. Мы исследуем вопрос глобальной по времени разрешимости задачи Коши для модели (0.0.1), (0.0.2) в слабом обобщенном смысле, разрабатываем метод численного ее решения и доказываем его сходимость, реализуем численный метод программно и проводим ряд вычислительных экспериментов.

Перечислим ряд практически значимых физических явлений, описываемых данной моделью. Во-первых, это динамика перераспределения воды и нефти (газа) в коллекторе при нефтедобыче. В наше время вводятся в разработку нетрадиционные источники нефти и газа (например, сланцевые), месторождения со сложными физико-геологическими условиями, решается важнейшая проблема увеличения полноты извлечения нефти из недр. В связи с этим значительно повысился уровень требований к пониманию того, как движутся в пластах насыщающие их жидкости. Во-вторых, можно рассматривать совместное поведение воды и нефти (нефтепродуктов) не только при добыче, но и в дальнейшем – при переработке и транспортировке. Это становится важным при оценке последствий разлива нефтепродуктов при авариях на объектах промышленности и транспортной инфраструктуры. Как уже было отмечено, особенностью модели является учет эффекта неравновесности. Это важно при описании процессов, протекающих значительное время (годы): длительной разработке месторождений, оценке долгосрочных экологических последствий разлива нефтепродуктов.

Актуальным вопросом является определение минимального внешнего воздействия на процесс неравновесной противоточной капиллярной пропитки с целью достижения требуемой насыщенности в пласте. Рассмотрим **математическую модель начального регулирования неравновесной противоточной капиллярной пропитки**, которая строится на основе задачи стартового управления и финального наблюдения

$$\begin{aligned} x(s, 0) &= u(s), \quad s \in \Omega, \\ J(x(T), u) &= \min_{(y,v) \in \mathfrak{U} \times U_{ad}} J(y(T), v), \end{aligned} \tag{0.0.3}$$

для математической модели (0.0.1), (0.0.2). Здесь $J(x(T), u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал, U_{ad} – непустое выпуклое и замкнутое множество, u – стартовое управление.

Математическая модель начального регулирования неравновесной проточной капиллярной пропитки описывает ситуацию, когда момент наблюдения результата отделен по времени от начального кратковременного управляющего воздействия, что хорошо согласуется с учетом эффекта неравновесности, который является особенностью модели (0.0.1), (0.0.2).

Модель квазистационарного процесса в проводящей среде без дисперсии. При исследовании квазистационарных процессов в проводящих средах без дисперсии [19] возникает задача Дирихле

$$x(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (0.0.4)$$

для уравнения, моделирующего квазистационарный процесс с учетом релаксации

$$(\Delta x - \Phi(x))_t = \Phi(x). \quad (0.0.5)$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область с границей класса C^∞ – область идеальной проводимости, $T \in \mathbb{R}_+$, искомая функция x соответствует потенциалу электрического поля. Функция $\Phi(x) \equiv |x|^{p-2}x, p > 2$ монотонно возрастающая и гладкая. Впервые задача Коши для модели (0.0.4), (0.0.5) была рассмотрена в работе [22], при некоторых условиях на данные задачи была доказана глобальная разрешимость в сильном обобщенном смысле. Ряд схожих (как по физической интерпретации, так и по математической сущности) моделей был рассмотрен в работах [24, 25].

Модель квазистационарного процесса в проводящей среде без дисперсии с учетом релаксации описывает сложный электродинамический процесс в сплошной среде, позволяет рассматривать и прогнозировать его развитие во времени. Изучение электродинамических моделей необходимо для развития электротехники и разработки современных энергосберегающих технологий.

Мы исследуем вопрос глобальной по времени разрешимости задачи (0.0.4), (0.0.5) в слабом обобщенном смысле, разрабатываем методы численного ее ре-

шения и доказываем их сходимость, реализуем численные методы программно и проводим ряд вычислительных экспериментов.

Как правило, аппарат исследования разрабатывается для каждой отдельно взятой нелинейной модели. Особенностью диссертационной работы является построение общего метода исследования начальных задач для изучаемых математических моделей как задач Коши для квазилинейных уравнений соболевского типа.

Начальные задачи для рассмотренных моделей (0.0.1), (0.0.2) и (0.0.4), (0.0.5) в специальном образом подобранных функциональных пространствах могут быть редуцированы к задаче Коши

$$x(0) = x_0 \quad (0.0.6)$$

для абстрактного операторного дифференциального уравнения вида

$$\frac{d}{dt}(L(x)) + M(x) = 0, L(x) = Ax + \lambda M(x), \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (0.0.7)$$

Кроме того, модель начального регулирования неравновесной противоточной капиллярной пропитки может быть редуцирована к задаче стартового управления и финального наблюдения для уравнения (0.0.7)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(L(x)) + M(x) &= 0, \\ x(0) &= u, \end{aligned} \quad (0.0.8)$$

$$J(x(T), u) = \min_{(y,v) \in \mathfrak{U} \times U_{ad}} J(y(T), v),$$

где $J(x(T), u)$ – ограниченный снизу полунепрерывный снизу коэрцитивный функционал.

Мы относим уравнение (0.0.7) к широкому классу уравнений соболевского типа. Методы, которыми мы исследуем задачу (0.0.6), (0.0.7), первоначально возникли в теории полулинейных уравнений соболевского типа. Если записать уравнение (0.0.7) в виде

$$N(x)\dot{x} + M(x) = 0, \quad (0.0.9)$$

где $N(x) = L'_x$ – производная Фреше оператора L , то получим уравнение соболевского типа (линейное относительно \dot{u}). Таким образом, все сказанное дает нам право называть уравнение (0.0.9), его прообраз (0.0.7), а также конкретные уравнения (0.0.1) и (0.0.5) *квазилинейными уравнениями соболевского типа*. Отметим, что в таком контексте уравнения (0.0.1), (0.0.5), (0.0.7), (0.0.9) рассматриваются впервые.

Возрастающий интерес к уравнениям соболевского типа обусловлен тем, что многие физические процессы и явления, такие как распространение волн на мелкой воде, неравновесная противоточная капиллярная пропитка, фильтрация вязкоупругой жидкости, выпучивание двутавровых балок и др., описываются такими уравнениями, чаще всего нелинейными [3, 53, 92].

Целью работы является аналитическое и численное исследования математических моделей двухфазной фильтрации и квазистационарного процесса в проводящей среде на основе квазилинейных уравнений соболевского типа с последующей реализацией алгоритмов численного решения в виде комплекса программ.

Для достижения данной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Разработать метод аналитического исследования математических моделей, основанных на квазилинейных уравнениях соболевского типа.
2. Исследовать с помощью разработанного аналитического метода математические модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки, начального регулирования неравновесной противоточной капиллярной пропитки.
3. Исследовать с помощью разработанного аналитического метода математическую модель квазистационарного процесса в проводящей среде без дисперсии.
4. Разработать методы численного решения задачи Коши для модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки и модели квазистационарно-

го процесса в проводящей среде без дисперсии, доказать сходимость численных методов.

5. Реализовать в виде программ для ЭВМ алгоритмы разработанных методов. Провести вычислительные эксперименты для модельных задач, подтверждающие эффективность предложенных методов и алгоритмов.

Научная новизна

В области математического моделирования:

Впервые предложен общий метод исследования квазилинейных математических моделей, описывающих процессы гидродинамики и электрического поля, основанных на квазилинейных уравнениях соболевского типа. Создана теоретическая основа для численного исследования изучаемых моделей: доказаны теоремы существования и единственности решений задачи Коши для квазилинейного уравнения соболевского типа.

В области численных методов:

Разработаны алгоритмы численных методов, позволяющие находить приближенные решения начальных задач для изучаемых квазилинейных моделей математической физики. Установлена сходимость приближенных решений к точному.

В области комплексов программ:

Разработан комплекс программ нахождения приближенного решения задачи Коши для квазилинейных моделей соболевского типа, позволяющий проводить вычислительные эксперименты для модельных и реальных задач, исследовать эффективность предложенных алгоритмов, методов, подходов.

Историография вопроса

Уравнения, неразрешенные относительно старшей производной, впервые появились, видимо, в работах А. Пуанкаре [80]. Затем они возникали в работах С. В. Озеена, Ф. К. Ж. Одквиста, У. Буссинеска, С. Г. Россби и многих других, что было связано с исследованием некоторых проблем гидродина-

мики. Первым, кто начал систематическое изучение начально-краевых задач для уравнений вида

$$L \dot{x} = Mx, \quad (0.0.10)$$

где L и M (возможно, матричные) дифференциальные операторы в частных производных по «пространственным» переменным, был С. Л. Соболев в 40-х годах прошлого столетия. В 1954 году в работе [50] им было получено уравнение, моделирующее колебания гравитирующей жидкости, и изучена задача Коши для него. Эта работа легла в основу нового направления, которое первоначально развивалось учениками С. Л. Соболева – Р. А. Александряном [1], А. Г. Костюченко и Г. И. Эскиным [26], Т. И. Зеленьком [14] и многими другими. Их результаты инициировали работы В. Н. Врагова [7], А. И. Кожанова [18, 78] и С. Г. Пяткова [15] по неклассическим уравнениям математической физики.

Отдавая дань С. Л. Соболеву, уравнения вида (0.0.10) и конкретные их интерпретации часто называют *уравнениями соболевского типа* [38, 27, 43, 45, 86, 91]. Уравнения соболевского типа являются самостоятельной частью обширной области неклассических уравнений математической физики. Интерес исследователей к этим уравнениям постоянно растет, выходит большое число публикаций, посвященных им [9, 11, 12, 41]. Заметим еще, что важность и необходимость создания общей теории уравнений вида (0.0.10) отмечали И. Г. Петровский [40] и Ж.-Л. Лионс [31]. Известно, что задача Коши для вырожденного уравнения (0.0.10) принципиально неразрешима при произвольных начальных значениях, и методы исследования отдельных нелинейных уравнений значительно отличаются в зависимости от особенностей этих уравнений.

Линейные и полумлинейные уравнения соболевского типа на данный момент достаточно подробно изучены, построены специальные методы для их исследования, например, метод фазового пространства [45, 46, 47, 48]. В Рос-

сии и за рубежом публикуется большое количество работ, посвященных этой тематике, например [67, 70].

Под нелинейными уравнениями мы будем понимать так называемые «уравнения с двойной нелинейностью» – случай, когда нелинейный член присутствует и под производной по времени, и вне ее. В исследовании таких уравнений можно выделить два основных направления. Первое состоит в исследовании отдельных моделей (как правило, возникающих на основе конкретной практической задачи), разработке для них численных методов решения и проведении вычислительных экспериментов. При этом не выявляются общие закономерности, выходящие за пределы данной модели, методы не обобщаются. К этому направлению можно отнести работы [58, 63, 66, 73, 74, 75, 77, 79, 89]. Второй подход состоит в построении абстрактных моделей, обобщающих собой целый ряд случаев, и разработке общих методов решения соответствующих задач. К этому направлению можно отнести, например, работы [30, 64, 82, 83, 84, 85, 87, 93] в его рамках выполнялась данная работа.

Перечислим основные методы, разработанные на данный момент и применимые для исследования нелинейных уравнений соболевского типа. Во-первых, метод монотонных операторов. Он применим для случая, когда операторные коэффициенты уравнения обладают свойством монотонности. Данный метод и особенности его применения были подробно рассмотрены, например, Ж.-Л. Лионсом в работе [31]. Примером использования этого метода можно считать работу [85]. Во-вторых, метод компактности. Этот метод заключается в том, что заданное уравнение приближается в некотором смысле более простыми уравнениями, с последующим переходом к пределу, с использованием теорем о компактности. Два вышеперечисленных метода в совокупности наиболее часто применимы в приложениях к нелинейным дифференциальным уравнениям. В-третьих, вариационный метод. Он применим для случая, когда операторные коэффициенты уравнения являются потенци-

альными и подразумевает сведение задачи к исследованию вариационными методами соответствующих потенциалов операторов [81]. В-четвертых, метод априорных оценок. Этот метод является вспомогательным и сводится к тому, чтобы вывести некоторое количество априорных неравенств и «ими воспользоваться». Не существует сколько-нибудь систематического метода вывода априорных оценок, поэтому вся теория здесь – это набор примеров априорных неравенств, получающихся энергетическим методом путем «умножения» на различные функционалы. Затем априорные неравенства используются для применения теоремы о неявной функции или в совокупности с методом компактности. Отметим, что описанные методы не являются универсальными и особенности их применения существенно зависят от конкретной задачи.

Остановимся на ряде работ более подробно.

В работе Е. ди Бенедетто [68] была рассмотрена начальная задача для эволюционного уравнения вида

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{A}(u) + \mathfrak{B}(u) \ni f, \mathfrak{A}u(0) \ni v_0$$

в Гильбертовом пространстве. Было доказано существование решения для случая монотонности или коэрцитивности операторов, исследован вопрос единственности решения и рассмотрены различные приложения.

В работе М. Пташник [81] были рассмотрены вопросы существования и единственности слабого решения для ряда уравнений соболевского типа (в том числе, с двойной нелинейностью). Для доказательства существования решения используется, в том числе, метод Галеркина, а так же вариационные методы.

В монографии А.Г. Свешникова, А.Б. Альшина, М.О. Корпусова, Ю.Д. Плетнера [30] рассматриваются проблемы глобальной и локальной разрешимости, как в классическом, так и в сильном и слабом обобщенном смысле, широких классов задач Коши и начально-краевых задач для линейных и нелинейных уравнений в частных производных первого и высоких порядков, вклю-

чая уравнения соболевского типа и псевдопараболические уравнения. В случае локальной разрешимости для ряда классов задач получены двусторонние оценки времени разрушения решений. Помимо аналитических методов предложены и реализованы численные методы решений конкретных задач.

Вопрос управления процессами, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n), i = \overline{1, n},$$

рассматривался еще Л.С. Понтрягиным [35] вместе со его учениками и соратниками. Разрешимость таких задач устанавливалась одним общим приемом — принципом максимума Понтрягина. Н.Н. Красовским [27] и его учениками были рассмотрены задачи о построении управляющего воздействия u , которое приводит объект в заданное состояние, а также проведена аналогия между теорией линейных управляемых систем и теорией игр.

Другое направление представлено в работах Ж.–Л. Лионса [33], А.В. Фурсикова [56, 57] и многих других. Работы этих авторов посвящены теории оптимального управления распределенными системами, то есть системами, которые описываются с помощью краевой задачи для уравнения с частными производными или для системы таких уравнений. В монографии [33] впервые систематически изучены задачи оптимального управления для уравнений с частными производными, уделено немало внимания линейным эллиптическим, параболическим, гиперболическим задачам с квадратичной минимизируемой функцией, рассмотрены соответствующие односторонние граничные задачи и задачи эволюционного типа, а также вопросы существования и аппроксимации оптимальных решений. В монографии [34] изложены основы теории управления сингулярными распределенными системами. При изучении задач такого рода заданному управлению может не соответствовать единственное устойчивое состояние. Для решения этой проблемы Ж.–Л. Лионс изучал вопрос о существовании обобщенных оптимальных пар и их

свойствах. В монографии А.В. Фурсикова [57] строится общая теория оптимального управления распределенными системами. В наиболее общей форме исследуемый в монографии класс задач можно записать в виде

$$J(x, u) \rightarrow \inf,$$

$$F(x, u) = 0,$$

$$u \in \mathfrak{U}_d,$$

где J — некоторый функционал, F — некоторый оператор, действующий в соответствующих пространствах. Большое количество абстрактных теоретических результатов монографии применены к различным классам задач оптимального управления.

Впервые исследованием задач оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа стали заниматься Г.А. Свиридюк и А.А. Ефремов [44]. Оптимальное управление решениями задачи Коши для линейных уравнений соболевского типа рассматривалось в [91]. В дальнейшем начатые исследования в этой области продолжили ученики Г.А. Свиридюка, среди которых А.В. Келлер [16], Н.А. Манакова [36], [37], А.А. Замышляева [13] и др.

В диссертационной работе рассмотрен случай стартового управления и финального наблюдения. Подобные задачи ставятся, например, в работах [17, 39, 55, 57, 65, 69] и др. Работа [65] посвящена разработке вычислительных методов на основе сеток для решения ряда задач оптимального управления с финальным наблюдением. В [39] исследованы задачи стартового управления для одного класса линейных распределенных систем, не разрешенных относительно производной по времени.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертационная работа вносит вклад в теорию нелинейных уравнений соболевского типа, получены достаточные условия однозначной разрешимо-

сти задачи Коши для квазилинейных уравнений соболевского типа, построены численные методы решения задачи Коши для таких уравнений, доказана сходимость численных методов. Алгоритмы численных методов реализованы программно и позволяют получать численное решение и наглядное представление о поведении решения задачи Коши для моделей двухфазной фильтрации и квазистационарного процесса в проводящей среде в графическом виде. Результаты, полученные при исследовании математических моделей, могут быть полезны в гидродинамике, в геологии при изучении фильтрации воды в почве, в нефтедобыче, электродинамике, электротехнике. Кроме того, полученные результаты создают основу для исследования других нелинейных неклассических моделей математической физики.

Методы исследования

Основным методом, использованным в данной работе, является метод априорных оценок. Кроме того мы широко используем, во-первых, метод компактности; во-вторых, такие мощные средства линейного и нелинейного функционального анализа, как теорему о неявной функции, теорему Вишика–Минти–Браудера, теоремы вложения Соболева, теорему Коши для невырожденного дифференциального уравнения [29].

В данном исследовании существенно используются также результаты теории s -монотонных и p -коэрцитивных операторов, разработанной Г.А. Свиридюком [49] и используемой в работах его учеников.

Для рассмотрения вопроса разрешимости уравнений соболевского типа существенную роль играет выбор функциональных пространств, в которых решается задача. Важность этого факта отмечали О. А. Ладыженская [28] и Ж.–Л. Лионс [31].

Поскольку диссертация кроме аналитических исследований содержит еще и алгоритмы численных методов решения, иллюстрирующих полученные в аналитических изысканиях результаты, здесь необходимо также упомянуть

методы Галеркина, ε -вложений, Розенброка, Рунге – Кутты, а также метод конечных разностей, позволяющий нам применить эти алгоритмы к требуемым задачам.

Краткое содержание диссертации

Диссертационная работа помимо введения, заключения, приложения и списка литературы содержит три главы. Список литературы включает 108 наименований.

Во введении определяется цель исследования, обосновываются его актуальность, теоретическая и практическая значимость, приводится историография и методология по направлению исследования.

Первая глава состоит из пяти параграфов. Она посвящена исследованию квазилинейных математических моделей соболевского типа. Первый параграф содержит вспомогательные сведения, с опорой на которые получены основные результаты работы, и носит вспомогательный характер. При этом результаты, полученные другими авторами, даны без доказательств. Приводятся некоторые определения, теоремы и леммы нелинейного функционального анализа, основные элементы теории s -монотонных и p -коэрцитивных операторов, теорема Вишика – Минти – Браудера, теорема о неявной функции, лемма Гронуолла – Беллмана, определяются пространства Соболева [51], приводятся теоремы вложения Соболева [52]. Уделяется внимание формализации понятия области с границей класса C^∞ . Второй параграф посвящен исследованию разрешимости задачи Коши для абстрактного квазилинейного уравнения соболевского типа, которые в дальнейшем применяются для исследования конкретных математических моделей. Здесь приводятся достаточные условия разрешимости в классическом локальном и слабом обобщенном смысле задачи Коши для квазилинейных моделей соболевского типа. В третьем параграфе поднимается вопрос о единственности слабого обобщенного решения задачи Коши для абстрактной модели, формулируются до-

статочные условия единственности решения. В четвертом параграфе строится проекционный метод нахождения приближенного решения задачи Коши для абстрактной квазилинейной модели, доказывается сходимость последовательности приближенных решений, полученных данным методом, к точному слабому обобщенному решению. В пятом параграфе описан алгоритм разработанного проекционного метода.

Вторая глава посвящена аналитическому и численному исследованиям математических моделей двухфазной фильтрации и состоит из пяти параграфов. В первом параграфе рассматривается модель неравновесной противоточной капиллярной пропитки, в нем дается обоснование некоторых допущений, приводится краткий вывод основного уравнения модели и интерпретация начально-краевых условий, описывается соответствующая математическая модель, проводится и обосновывается редукция начальной задачи для математической модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки к задаче Коши для абстрактного квазилинейного уравнения соболевского типа. Во втором параграфе доказывается существование и единственность решения задачи Коши для математической модели неравновесной противоточной пропитки в классическом локальном и слабом обобщенном смысле. В третьем параграфе исследуется задача начального регулирования насыщенности в математической модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки на основе задачи стартового управления и финального наблюдения для абстрактного квазилинейного уравнения. Четвертый параграф посвящен описанию алгоритма программы для численного исследования математической модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки на основе алгоритма проекционного метода, описанного в первой главе. В пятом параграфе приведены результаты вычислительных экспериментов для модельных примеров.

Третья глава состоит из семи параграфов и содержит результаты аналитического и численного исследований математической модели квазистационарного процесса в проводящей среде без дисперсии. В первом параграфе проводится обзор математической модели квазистационарного процесса в проводящей среде без дисперсии с учетом релаксации и обосновывается редукция начальной задачи для данной математической модели к задаче Коши для абстрактного квазилинейного уравнения соболевского типа. Второй параграф является вспомогательным, в нем описывается схема Розенброка для одного класса дифференциально-алгебраических систем. Третий параграф содержит аналитическое исследование математической модели квазистационарного процесса. Доказываются теоремы об однозначной классической локальной разрешимости и глобальной разрешимости в слабом обобщенном смысле задачи Коши для этой модели. В четвертом параграфе строится метод приближенного решения задачи Коши для модели квазистационарного процесса на основе метода конечных разностей, доказываются сходимость метода. Пятый параграф посвящен описанию алгоритма программы для численного исследования математической модели квазистационарного процесса. В шестом параграфе приведены результаты вычислительных экспериментов для модельных примеров. Седьмой параграф посвящен сравнительному анализу полученных результатов. Рассмотрены различные модельные примеры, проведены вычислительные эксперименты для них с помощью разработанных методов.

В заключении представлены выводы по результатам исследований и обосновывается соответствие диссертационной работы паспорту специальности 05.13.18.

Апробация

Результаты работы апробированы на конференциях: Международной научно-практической конференции «Измерения: состояние, перспективы, раз-

витие» (Челябинск, 2012) [102], конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений» (Новосибирск, 2013) [103], Научно-практической конференции студентов, аспирантов, молодых ученых в ЮУрГУ (Челябинск, 2013 и 2014), XII Всероссийском совещании по проблемам управления (Москва, 2014) [104], Всероссийской конференции с международным участием «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», посвященная памяти В.К. Иванова (Челябинск, 2014) [105], Международной конференции «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования» (Москва, 2014) [106], Международной конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 2015), Международной конференции «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ» (Уфа, 2015) [107]. Результаты неоднократно докладывались на областном семинаре профессора Г.А. Свиридюка, посвященном уравнениям соболевского типа, на семинаре кафедры Математики Физического факультета МГУ им. Ломоносова под руководством профессора Н.Н. Нефедова.

Результаты диссертационного исследования были представлены и обсуждены на Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Самара, 2015).

Благодарности

Автор считает приятным долгом выразить благодарность своему научному руководителю, Наталье Александровне Манаковой, за участие и неоценимую помощь в подготовке работы; Георгию Анатольевичу Свиридюку за ценные советы и предоставленную возможность прикоснуться к науке; коллективу кафедры уравнений математической физики за конструктивную, доброжелательную критику; своей семье за веру, терпение и время.

Глава 1. Квазилинейные математические модели соболевского типа

1.1. Элементы нелинейного функционального анализа в исследовании и построении математических моделей

Слабая сходимость

Определение 1.1.1. Пусть \mathfrak{X} – банахово пространство. Последовательность $\{x_n\} \subset \mathfrak{X}$ называется *слабо сходящейся*, если в \mathfrak{X} существует элемент x , такой, что

$$\lim x^*(x_n) = x^*(x) \quad \forall x^* \in \mathfrak{X}^*.$$

Лемма 1.1.1. Пусть $x_n \rightharpoonup x$ слабо в банаховом пространстве \mathfrak{X} . Тогда

- (i) последовательность $\{x_n\}$ ограничена;
- (ii) x принадлежит замыканию линейной оболочки множества $\{x_n\}$;
- (iii) $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

Определение 1.1.2. Подмножество S банахова пространства называется *относительно слабо секвенциально компактным*, если всякая последовательность в S содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. Если, вдобавок, слабые пределы всех таких подпоследовательностей лежат в S , то оно называется *слабо секвенциально компактным*.

Теорема 1.1.1. (теорема Банаха – Алаоглу) Замкнутый единичный шар в сепарабельном рефлексивном банаховом пространстве слабо секвенциально компактен.

Теорема 1.1.2. (теорема Мазура) Выпуклое замкнутое множество банахова пространства слабо секвенциально замкнуто.

Операторы в банаховых пространствах

Пусть \mathfrak{X} – вещественное рефлексивное сепарабельное банахово пространство.

Определение 1.1.3. Оператор $A : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ называется *радиально непрерывным*, если при любых фиксированных $x, y \in \mathfrak{X}$ вещественная функция

$$\sigma \rightarrow \langle A(x + \sigma y), y \rangle$$

непрерывна на $[0, 1]$.

Определение 1.1.4. Пусть x, y – произвольные элементы из \mathfrak{X} . Оператор $A : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ называется

монотонным, если

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq 0;$$

строго монотонным, если

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle > 0, \quad \text{для } x \neq y;$$

сильно монотонным (с постоянной монотонностью μ), если

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2, \quad \mu > 0;$$

s-монотонным, если $A \in C^r(\mathfrak{X}; \mathfrak{X}^*)$ и

$$\langle A'_y x, x \rangle > 0 \quad x, y \neq 0.$$

Лемма 1.1.2. [49] Для гладких операторов имеют место следующие включения: множество строго монотонных операторов \supset множество s-монотонных операторов \supset множество сильно монотонных операторов.

Определение 1.1.5. Оператор $A : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ называется *коэрцитивным*, если

$$\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} \frac{\langle A(y), y \rangle}{\|y\|} = +\infty.$$

Определение 1.1.6. Оператор $A : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ называется *сильно коэрцитивным*, если

$$\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} \frac{\langle A(x + y), y \rangle}{\|y\|} = +\infty \quad \forall x \in \mathfrak{X}.$$

Определение 1.1.7. Оператор $A : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ называется *p-коэрцитивным*, если $\exists C^A, C_A > 0$, и $\exists p \geq 2$ такие, что $\langle A(x), x \rangle \geq C_A \|x\|^p$ и $\|A(x)\|_* \leq C^A \|x\|^{p-1} \forall x \in \mathfrak{X}$.

Лемма 1.1.3. [49] *p-коэрцитивный оператор $A : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ сильно коэрцитивен.*

Теорема 1.1.3. [8] (*теорема Вишика – Минти – Браудера*) Пусть оператор $A : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ – радиально непрерывный строго монотонный коэрцитивный оператор. Тогда при любом $y \in \mathfrak{X}^*$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ уравнения

$$A(x) = y.$$

Следствие 1.1.1. Пусть оператор $M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$ – *s-монотонный, p-коэрцитивный*. Тогда при любом $y \in \mathfrak{U}^*$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{U}$ уравнения

$$M(x) = y.$$

Пусть \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} – банаховы пространства и $A : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ – непрерывный оператор, определенный на некотором открытом подмножестве в \mathfrak{X} .

Определение 1.1.8. Оператор A называется *дифференцируемым по Фреше* в точке $x_0 \in \mathfrak{X}$, если существует такой линейный непрерывный оператор $F \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, что

$$\|A(x_0 + u) - A(x_0) - Fu\| = \tilde{o}(r)$$

для $\|u\| \leq r$ при $r \rightarrow 0$.

Оператор F называется *производной Фреше оператора A в точке x_0* и обозначается $F = A'_{x_0}$.

Перечислим несколько свойств производной Фреше.

(i) Если A'_{x_0} существует, то она единственная.

(ii) Если $x_0 \mapsto A'_{x_0}$ есть непрерывное линейное отображение из \mathfrak{X} в $\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, то говорят, что A принадлежит классу C^1 . По индукции определяются отображения класса C^p , $p = 1, 2, \dots$; а именно, запись $A \in C^p$ означает, что $D(D^{p-1}A)(x_0)$ лежит в

$$\underbrace{\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \dots, \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \dots))}_p.$$

(iii) Композиция C^p -отображений есть C^p -отображение.

Теорема 1.1.4. (теорема о неявной функции) Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ – банаховы пространства и A – непрерывное отображение открытого множества $U \subset \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ в \mathfrak{Z} . Предположим, что A имеет производную Фреше $A'_x(x, y)$ по x , которая непрерывна в U . Пусть $(x_0, y_0) \in U$ и $A(x_0, y_0) = 0$. Если оператор $F = A'_x(x_0, y_0)$ – изоморфизм пространства \mathfrak{X} на \mathfrak{Z} , то

(i) существует шар $\{y : \|y - y_0\| < r\} = B_r(y_0)$ и единственное непрерывное отображение $u : B_r(y_0) \rightarrow \mathfrak{X}$, такие, что

$$u(y_0) = x_0 \text{ и } A(u(y), y) = 0;$$

(ii) в случае, когда A принадлежит классу C^1 , $u(y)$ тоже принадлежит классу C^1 и

$$u_y(y) = -[A'_x(u(y), y)]^{-1} \circ A'_y(u(y), y);$$

(iii) в случае, когда A принадлежит классу C^p , $p > 1$, $u(y)$ тоже принадлежит C^p .

Определение 1.1.9. Оператор $M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$ называется однородным порядка $k \geq 0$, если $M(su) = s^k M(u)$ при любых $u \in \mathfrak{U}$, $s \in \mathbb{R}_+$ и некотором $k \geq 0$, не зависящем ни от u , ни от s .

Определение 1.1.10. Оператор $M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$ называется положительно определенным, если $\langle M(u), u \rangle \geq m\|u\|^2$, где $m > 0$.

Определение 1.1.11. Линейный оператор $M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$ называется симметричным, если при любых $u, v \in \mathfrak{U}$ $\langle Mu, v \rangle = \langle u, Mv \rangle$.

Определение 1.1.12. *Линейный оператор $M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$ называется самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным.*

Лемма 1.1.4. *Самосопряженный оператор является симметричным.*

Определение 1.1.13. *Линейный оператор $M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$ называется топлинейным изоморфизмом, если является биективным гомоморфизмом, сохраняющим топологию.*

Лемма 1.1.5. [31] *Если $f \in L^p(0, T; \mathfrak{U})$ и $\frac{df}{dt} \in L^p(0, T; \mathfrak{U})$, где $1 \leq p \leq \infty$, то f после, быть может, изменения на множестве меры нуль (из отрезка $[0, T]$), будет непрерывным отображением $[0, T] \rightarrow \mathfrak{U}$.*

Лемма 1.1.6. [10] *Пусть $u(t) \geq 0$ и $f(t) \geq 0$ при $t \geq t_0$, а также $u(t), f(t) \in C[t_0, \infty)$, причем при $t \geq t_0$ выполнено неравенство*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t f(s)u(s)ds,$$

где c – неотрицательная постоянная. В таком случае при $t \geq t_0$ имеем

$$u(t) \leq ce^{\int_{t_0}^t f(s)ds}.$$

Следствие 1.1.2. *Пусть $u(t) \geq 0$ и $f(t) \geq 0$ при п.в. $t \geq 0$, а также $u(t), f(t) \in C[0, \infty)$ после, быть может, изменения на множестве меры нуль, причем при п.в. $t \geq 0$ выполнено неравенство*

$$u(t) \leq \int_0^t f(s)u(s)ds.$$

В таком случае при п.в. $t \geq 0$ имеем

$$u(t) \leq 0.$$

Лемма 1.1.7. [42] Пусть $A \in C^r(\mathfrak{X}; \mathfrak{X}^*)$, $r \in \mathbb{N}$ – однородный оператор порядка $k \in \overline{\mathbb{R}}_+$, имеющий симметричную производную Фреше. Тогда имеет место следующее соотношение

$$\frac{d}{dt} \langle A(u), u \rangle = (k + 1) \langle A(u), \dot{u} \rangle.$$

Определение 1.1.14. Ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ будем называть областью класса C^k , если существуют числа $\alpha, \beta > 0$ и конечное число локальных карт $\{a_i : i = 1, \dots, m\} \subset C^k$, соответствующих локальным системам координат $\{O_i; x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i, i = 1, \dots, m\}$, таким, что граница области $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^m \{(x_1^i, \bar{x}^i) : x_1^i = a_i(\bar{x}^i), |\bar{x}^i| < \alpha\}$, причем

$$\{(x_1^i, \bar{x}^i) : a_i(\bar{x}^i) < x_1^i < a_i(\bar{x}^i) + \beta, |\bar{x}^i| < \alpha\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$$

$$\{(x_1^i, \bar{x}^i) : a_i(\bar{x}^i) - \beta < x_1^i < a_i(\bar{x}^i), |\bar{x}^i| < \alpha\} \subset \Omega,$$

где $\bar{x}^i = (x_2^i, \dots, x_n^i)$, а условие $|\bar{x}^i| < \alpha$ означает $|x_j^i| < \alpha$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 2, \dots, n$.

В дальнейшем предполагаем, что область Ω класса C^∞ . Введем обозначение

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, α_i – неотрицательные целые числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Пространства Соболева

$$W_p^l \equiv W_p^l(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L_p(\Omega) \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq l\},$$

где l – неотрицательное целое число, $1 \leq p < \infty$. Пространство W_p^l является банаховым относительно нормы

$$\|u\|_{l,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пространство W_p^l рефлексивно при $1 < p < \infty$, что эквивалентно утверждению о слабой компактности единичного шара. При $l > l'$ ограниченное множество $\{u \in W_p^l : \|u\|_{l,p} \leq \text{const}\}$ компактно в $W_p^{l'}$. Если при $p = 2$ пространство W_p^l снабдить скалярным произведением

$$(u, v)_l = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq l} \partial^\alpha u \overline{\partial^\alpha v} dx,$$

то оно будет гильбертовым.

Теорема 1.1.5. (теорема вложения Соболева)

1. Если целое число k , $0 \leq k < l$ таково, что $0 \leq \frac{1}{q} \equiv \frac{1}{p} - \frac{l-k}{n} \leq 1$, то вложение $W_p^l \hookrightarrow W_q^k$ непрерывно. Если вдобавок $q' < q$, то вложение $W_p^l \hookrightarrow W_{q'}^k$ компактно.

1.2. Аналитическое исследование задачи Коши для квазилинейного уравнения соболевского типа

Пусть $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным и оснащенное дуальной парой рефлексивных банаховых пространств $\mathfrak{U} \equiv (\mathfrak{U}, \|\cdot\|)$ и $\mathfrak{U}^* \equiv (\mathfrak{U}, \|\cdot\|_*)$ так, что имеют место непрерывные и плотные вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{U}^*$. Пусть оператор $M \in C^{r+1}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$, $r \in \mathbb{N}$, а оператор $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$x(0) = x_0 \tag{1.2.1}$$

для абстрактного операторного дифференциального уравнения

$$N(x)\dot{x} + M(x) = 0, \tag{1.2.2}$$

где $N(x) = L'_x$ – производная Фреше оператора $L(x) = Ax + \lambda M(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Определение 1.2.1. Вектор-функцию $x \in C^1((0; T); \mathfrak{U})$, удовлетворяющую (1.2.2) на $(0, T)$ при некотором $T = T(x_0)$ и условию (1.2.1), назовем классическим локальным решением задачи (1.2.1), (1.2.2).

Теорема 1.2.1. Пусть в $x_0 \in \mathfrak{U}$ оператор $N(x_0) : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$ – топлинейный изоморфизм. Тогда существует единственное классическое локальное решение задачи (1.2.1), (1.2.2).

Доказательство. Из условий, наложенных на операторы, и условий теоремы следует, во-первых, что производная Фреше N оператора L такова, что $N \in C^r(\mathfrak{U}; \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*))$, $r \in \mathbb{N}$. Во-вторых, существует окрестность $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{U}$ точки $x_0 \in \mathfrak{U}$ такая, что $N(x) : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$ – топлинейный изоморфизм при всех $x \in \mathfrak{D}$. Отсюда вытекает, что уравнение

$$\dot{x} = F(x),$$

где $F(x) = -[N(x)]^{-1}M(x)$, эквивалентно уравнению (1.2.2) при всех $x \in \mathfrak{D}$. Поскольку $F \in C^r(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$, $r \in \mathbb{N}$ по построению, то, как следует из результатов [29], однозначная локальная разрешимость задачи (1.2.1), (1.2.2) следует из классической теоремы Коши. \square

Определение 1.2.2. Вектор-функцию $x \in L_\infty(0, T; \mathfrak{U})$ такую, что $\frac{dx}{dt} \in L_2(0, T; \mathfrak{H})$ при $T \in \mathbb{R}_+$, назовем слабым обобщенным решением задачи (1.2.1), (1.2.2), если она удовлетворяет соотношениям

$$\left\langle \frac{d}{dt}L(x(t)), v \right\rangle + \langle M(x(t)), v \rangle = 0, \text{ при п. в. } t \in (0, T)$$

и

$$\langle x(0) - x_0, v \rangle = 0$$

при всех $v \in \mathfrak{U}$.

Теорема 1.2.2. Пусть оператор M s -монотонен, p -коэрцитивен и однороден порядка $k \in \overline{\mathbb{R}}_+$, причем его производная Фреше симметрична, оператор

A положительно определен и симметричен. Пусть на некотором интервале $(0, T_0)$, $T_0 \in \mathbb{R}_+$, существует единственное локальное решение задачи (1.2.1), (1.2.2). Тогда при любом $T \in \mathbb{R}_+$ существует слабое обобщенное решение задачи (1.2.1), (1.2.2).

Доказательство. Умножим (1.2.2) скалярно на x и \dot{x} , получим

$$\langle N(x)\dot{x}, x \rangle = -\langle M(x), x \rangle, \quad (1.2.3)$$

$$\langle N(x)\dot{x}, \dot{x} \rangle = -\langle M(x), \dot{x} \rangle. \quad (1.2.4)$$

Затем из (1.2.2), (1.2.3), (1.2.4) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle L(x), x \rangle &= \langle N(x)\dot{x}, x \rangle + \langle L(x), \dot{x} \rangle = -\langle M(x), x \rangle + \langle Ax, \dot{x} \rangle + \lambda \langle M(x), \dot{x} \rangle = \\ &= -\langle M(x), x \rangle + \langle Ax, \dot{x} \rangle - \lambda \langle N(x)\dot{x}, \dot{x} \rangle. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Поскольку в силу линейности, непрерывности и симметричности оператора A

$$\frac{d}{dt} \langle Ax, x \rangle = \langle A\dot{x}, x \rangle + \langle Ax, \dot{x} \rangle = 2 \langle Ax, \dot{x} \rangle,$$

то из (1.2.5) получаем

$$\frac{d}{dt} (\langle L(x), x \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle) = -\langle M(x), x \rangle - \lambda \langle N(x)\dot{x}, \dot{x} \rangle \leq 0, \quad (1.2.6)$$

ввиду p -коэрцитивности и s -монотонности оператора M , а также положительной определенности оператора A . Заметив, что

$$\langle L(x), x \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \lambda \langle M(x), x \rangle + \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle,$$

из (1.2.6) после интегрирования на $(0, t)$ при любом $t \in (0, T)$, получим

$$\begin{aligned} C_M \|x(t)\|^p + \frac{m}{2} \|x(t)\|_S^2 &\leq \lambda \langle M(x(t)), x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle Ax(t), x(t) \rangle \leq \\ &\leq \lambda \langle M(x_0), x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Ax_0, x_0 \rangle \leq \lambda C^M \|x(0)\|^p + \frac{C_A}{2} \|x_0\|^2, \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

где C_A – константа ограниченности оператора $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$. Из (1.2.7) получаем

$$\|x(t)\|^p \leq C_1(\|x(0)\|^p + \|x_0\|^2), \text{ при п. в. } t \in (0, T),$$

откуда следует включение $x \in L_\infty((0, T); \mathfrak{U})$ при всех $T \in \mathbb{R}_+$.

Далее, из (1.2.2) следует, что

$$\langle A\dot{x}, \dot{x} \rangle = -\lambda \langle M'_x \dot{x}, \dot{x} \rangle - \langle M(x), \dot{x} \rangle \leq -\langle M(x), \dot{x} \rangle$$

в силу s -монотонности оператора M . Отсюда в силу леммы 1.1.7 получаем

$$\langle A\dot{x}, \dot{x} \rangle \leq -\frac{1}{k+1} \frac{d}{dt} \langle M(x), x \rangle. \quad (1.2.8)$$

Интегрируя (1.2.8) на интервале $(0, t)$ при любом $t \in (0, T)$, получаем

$$\begin{aligned} m \int_0^t \|\dot{x}\|_{\mathfrak{H}}^2 ds &\leq \int_0^t \langle A\dot{x}, \dot{x} \rangle ds \leq \\ &\leq -\frac{1}{k+1} \langle M(x(t)), x(t) \rangle + \frac{1}{k+1} \langle M(x_0), x_0 \rangle \leq \frac{C_M}{k+1} \|x_0\|^p. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Из (1.2.9) получаем

$$\|\dot{x}\|_{L_2((0, T); \mathfrak{H})}^2 \leq C_2 \|x_0\|^p,$$

отсюда следует включение $\dot{x} \in L_2((0, T); \mathfrak{H})$ при всех $T \in \mathbb{R}_+$. \square

1.3. Единственность решения задачи Коши для квазилинейного уравнения соболевского типа

Рассмотрим задачу Коши:

$$x(0) = x_0 \quad (1.3.1)$$

для абстрактного операторного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}(L(x)) + M(x) = 0, L(x) = Ax + \lambda M(x), \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (1.3.2)$$

Исследуем вопрос однозначной разрешимости задачи (1.3.1), (1.3.2) в слабом обобщенном смысле.

Замечание 1.3.1. В работе [30] показано, что введенное ранее определение 1.2.2 слабого обобщенного решения эквивалентно следующему:

Определение 1.3.1. Слабым обобщенным решением задачи Коши (1.3.1), (1.3.2) назовем функцию $x(t) \in L_\infty(0, T, \mathfrak{U})$, такую что $\frac{dx}{dt} \in L_2(0, T, \mathfrak{H})$, удовлетворяющую

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} \langle L(x), w \rangle + \langle M(x), w \rangle \right) \varphi(t) dt = 0,$$

$$x(0) = x_0, \forall w \in \mathfrak{U}, \forall \varphi \in L_2(0, T).$$

Введем

Условие 1.3.1. Будем говорить, что оператор $M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$ удовлетворяет условию 1.3.1, если $\exists F(s) \geq 0$ при п.в. $s \in [0, \infty)$, такая что $F(s) \in C[0, \infty)$ после, быть может, изменения на множестве меры нуль, и для п.в. $s_0 \in [0, \infty)$, для любых $u = u(s_0), v = v(s_0) \in \mathfrak{U}$ выполняется

$$\|M(u) - M(v)\|_* \leq F(s_0) \|u - v\|.$$

Теорема 1.3.1. Пусть оператор M s -монотонен, p -коэрцитивен и однороден порядка $k \in \overline{\mathbb{R}}_+$, причем его производная Фреше симметрична, оператор A положительно определен и симметричен. Пусть на некотором интервале $(0, T_0)$, $T_0 \in \mathbb{R}_+$, существует единственное локальное решение задачи (1.3.1), (1.3.2), и, кроме того, оператор M удовлетворяет условию 1.3.1. Тогда для любого $x_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение $x \in L_\infty(0, T; \mathfrak{U})$ такое, что $\frac{dx}{dt} \in L_2(0, T; \mathfrak{H})$ задачи (1.3.1), (1.3.2).

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 – два различных слабых обобщенных решения задачи (1.3.1), (1.3.2) в смысле определения 1.3.1. Пусть $\varphi(t) = 1 \in L_2(0, T)$,

тогда при почти всех $t \in (0, T)$ имеем:

$$\int_0^t \left(\frac{d}{ds} \langle L(x_i), w \rangle + \langle M(x_i), w \rangle \right) ds = 0, \forall w \in \mathfrak{U}, i = 1, 2;$$

$$\begin{aligned} \langle Ax_i(t) + \lambda M(x_i(t)), w \rangle + \int_0^t \langle M(x_i(s)), w \rangle ds = \\ = \langle Ax_0 + \lambda M(x_0), w \rangle, \forall w \in \mathfrak{U}, i = 1, 2. \end{aligned}$$

Пусть $v = x_1 - x_2$, тогда получим

$$\begin{aligned} \langle Av, w \rangle + \lambda \langle M(x_1(t)) - M(x_2(t)), w \rangle + \\ + \int_0^t \langle M(x_1(s)) - M(x_2(s)), w \rangle ds = 0, \forall w \in \mathfrak{U}. \end{aligned}$$

Так как $x_i \in L_\infty(0, T, \mathfrak{U})$, то $v(\alpha) \in \mathfrak{U}$ при почти всех $\alpha \in (0, T)$. Отсюда

$$\langle Av, v \rangle + \lambda \langle M(x_1(\alpha)) - M(x_2(\alpha)), v \rangle = \int_0^\alpha \langle M(x_2(s)) - M(x_1(s)), v(\alpha) \rangle ds.$$

Откуда в силу положительной определенности оператора A и s -монотонности оператора M приходим к неравенству

$$\|v(\alpha)\|^2 \leq m^{-1} \int_0^\alpha \langle M(x_2(s)) - M(x_1(s)), v(\alpha) \rangle ds.$$

Далее, в силу неравенства Гельдера

$$\|v(\alpha)\|^2 \leq m^{-1} \|v(\alpha)\| \int_0^\alpha \|M(x_2(s)) - M(x_1(s))\| ds.$$

Т.к. оператор M удовлетворяет условию 1.3.1, получим следующее неравенство

$$\|v(\alpha)\|^2 \leq \|v(\alpha)\| \int_0^\alpha F(s) \|v(s)\| ds,$$

из которого в силу следствия 1.1.2 получаем, что $x_1 = x_2$ почти всюду. \square

1.4. Сходимость проекционного метода нахождения приближенного решения задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши:

$$x(0) = x_0 \quad (1.4.1)$$

для абстрактного операторного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}(Ax + \lambda M(x)) + M(x) = 0, \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (1.4.2)$$

Опишем проекционный метод нахождения приближенного решения задачи (1.4.1), (1.4.2). Введем условия на рассматриваемые операторы и пространства

Условия (А):

A1. Вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{F}^* \hookrightarrow \mathfrak{U}^*$ плотны и непрерывны.

A2. Пространство \mathfrak{U} сепарабельно.

A3. Вложение $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}$ компактно.

Условие (В):

B1. Оператор $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$ симметричен, положительно определен.

Условия (С):

C1. Оператор $M \in C^{r+1}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$, $r \in \mathbb{N}$, s -монотонен, однороден порядка $k \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

C2. $\exists F(s) \geq 0$ при п.в. $s \in [0, \infty)$ такая, что $F \in C[0, \infty)$ после, быть может, изменения на множестве меры нуль, и для п.в. $s \in [0, \infty)$, для любых $u = u(s), v = v(s) \in \mathfrak{U}$ выполняется

$$\|M(u) - M(v)\|_{\mathfrak{F}^*} \leq F(s)\|u - v\|_{\mathfrak{F}}.$$

C3. $\exists C^M > 0$, и $\exists p \geq 2$ такие, что $\|M(u)\|_* \leq C^M \|u\|^{p-1} \forall u \in \mathfrak{U}$ и $\langle M(u), u \rangle \geq 0$.

С4. Производная Фреше оператора M симметрична.

В силу сепарабельности пространства \mathfrak{U} выберем в \mathfrak{U} счетную всюду плотную ортонормальную систему функций $\{w_k\}$. Построим приближения решения задачи (1.4.1), (1.4.2) в виде

$$x_m = \sum_{i=1}^m c_{mi}(t)w_i, \quad (1.4.3)$$

где коэффициенты $c_{mi} = c_{mi}(t) \in C^1[0, T_{m0}]$, $i = 1, \dots, m$ определяются следующей задачей

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} \langle Ax_m + \lambda M(x_m), w_k \rangle + \langle M(x_m), w_k \rangle \right) \varphi(t) dt = 0, \quad \forall \varphi \in L^2(0, T), \quad (1.4.4)$$

$$x_{m0} = \sum_{i=1}^m c_{mi}(0)w_i \rightarrow x_0 \text{ сильно в } \mathfrak{U} \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (1.4.5)$$

Лемма 1.4.1. *Если выполнены условия (A) – (C), тогда найдется такое $T_{m0} = T(x_0)$, что задача (1.4.4), (1.4.5) имеет локальное решение $x_m \in C^1([0, T_{m0}], \mathfrak{U})$.*

Доказательство. Подставим (1.4.3) в (1.4.4), получим

$$\int_0^T \left(\sum_{i=1}^m c'_{mi} \langle Aw_i + \lambda M'_{x_m} w_i, w_k \rangle + \langle M(x_m), w_k \rangle \right) \varphi(t) dt = 0,$$

$$\forall \varphi \in L^2(0, T), k = 1, \dots, m.$$

Далее в силу основной леммы вариационного исчисления

$$\sum_{i=1}^m c'_{mi} \langle Aw_i + \lambda M'_{x_m} w_i, w_k \rangle + \langle M(x_m), w_k \rangle = 0, k = 1, \dots, m. \quad (1.4.6)$$

Обозначим

$$a_{ik} = \langle Aw_i + \lambda M'_{x_m} w_i, w_k \rangle,$$

тогда

$$a_{ik} \xi_i \xi_k = \langle A \xi_i w_i + \lambda M'_{x_m} \xi_i w_i, \xi_k w_k \rangle.$$

Рассмотрим квадратичную форму:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k = \langle A\eta + \lambda M'_{x_m} \eta, \eta \rangle, \quad \eta = \sum_{i=1}^m \xi_i w_i. \quad (1.4.7)$$

В силу положительной определенности оператора A и s -монотонности оператора M квадратичная форма (1.4.7) неотрицательно определена, причем обращается в ноль только в случае $\eta = 0$. Так как система функций $\{w\}_{i=1}^m$ линейно независима, то $\eta = 0$ тогда и только тогда, когда все $\xi_i = 0$. Следовательно, квадратичная форма является положительно определенной, и в силу критерия Сильвестра $\det \{a_{ik}\} > 0$. Теорема существования решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [40] гарантирует существование решения задачи (1.4.4), (1.4.5) на некотором интервале $[0, T_{m0}]$, $T_{m0} > 0$, где $c_{mi} \in C^1[0, T_{m0}]$. \square

Следующая теорема показывает сходимость приближений решения задачи (1.4.1), (1.4.2) к точному слабому обобщенному решению.

Теорема 1.4.1. *Пусть выполнены условия (A) – (C), тогда для любого $x_0 \in \mathfrak{U}$ и для любого $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное слабое обобщенное решение задачи (1.4.1), (1.4.2).*

Доказательство. Умножим обе части равенства (1.4.6) на $c_{mk}(t)$ и просуммируем по $k = 1, \dots, m$, получим

$$\langle Ax'_m + \lambda M'_{x_m} x'_m, x_m \rangle + \langle M(x_m), x_m \rangle = 0, \quad (1.4.8)$$

кроме того, умножим обе части равенства (1.4.6) на $c'_{mk}(t)$ и просуммируем по $k = 1, \dots, m$, получим

$$\langle Ax'_m + \lambda M'_{x_m} x'_m, x'_m \rangle + \langle M(x_m), x'_m \rangle = 0. \quad (1.4.9)$$

Обозначим

$$N(x_m)x'_m = Ax'_m + \lambda M'_{x_m} x'_m.$$

Выражения (1.4.8), (1.4.9) можно переписать в виде

$$\langle N(x_m)x'_m, x_m \rangle = - \langle M(x_m), x_m \rangle, \quad (1.4.10)$$

$$\langle N(x_m)x'_m, x'_m \rangle = - \langle M(x_m), x'_m \rangle. \quad (1.4.11)$$

Заметив, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle L(x_m), x_m \rangle &= \langle N(x_m)x'_m, x_m \rangle + \langle L(x_m), x'_m \rangle = \\ &= \langle N(x_m)x'_m, x_m \rangle + \langle Ax_m, x'_m \rangle + \lambda \langle M(x_m), x'_m \rangle, \end{aligned}$$

с помощью (1.4.10), (1.4.11) получаем

$$\frac{d}{dt} \langle L(x_m), x_m \rangle = - \langle M(x_m), x_m \rangle + \langle Ax_m, x'_m \rangle - \lambda \langle N(x_m)x'_m, x'_m \rangle. \quad (1.4.12)$$

В силу линейности, непрерывности и симметричности оператора A

$$\frac{d}{dt} \langle Ax_m, x_m \rangle = \langle Ax'_m, x_m \rangle + \langle Ax_m, x'_m \rangle = 2 \langle Ax_m, x'_m \rangle,$$

тогда из (1.4.12) следует

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\langle L(x_m), x_m \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax_m, x_m \rangle) &= \\ &= - \langle M(x_m), x_m \rangle - \lambda \langle N(x_m)x'_m, x'_m \rangle \leq 0, \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

ввиду условия (С3) и s -монотонности оператора M , а также положительной определенности оператора A . Поскольку

$$\langle L(x_m), x_m \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax_m, x_m \rangle = \lambda \langle M(x_m), x_m \rangle + \frac{1}{2} \langle Ax_m, x_m \rangle,$$

из (1.4.13) получим

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \|x_m(t)\|_{\mathfrak{H}}^2 &\leq \lambda \langle M(x_m(t)), x_m(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle Ax_m(t), x_m(t) \rangle \leq \\ &\leq \lambda \langle M(x_{m0}), x_{m0} \rangle + \frac{1}{2} \langle Ax_{m0}, x_{m0} \rangle \leq \lambda C^M \|x_{m0}\|_{\mathfrak{U}}^p + \frac{C_A}{2} \|x_{m0}\|_{\mathfrak{P}}^2, \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

где C_A – константа ограниченности оператора $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{P}; \mathfrak{P}^*)$. Из (1.4.14) и (A1) получаем

$$\|x_m(t)\|_{\mathfrak{H}}^p \leq C_1(\|x_{m0}\|_{\mathfrak{H}}^p + \|x_{m0}\|_{\mathfrak{H}}^2), \text{ при п. в. } t \in (0, T),$$

откуда следует включение $x_m \in L_\infty((0, T); \mathfrak{H})$ при всех $T \in \mathbb{R}_+$.

Далее, из (1.4.9) следует, что

$$\langle Ax'_m, x'_m \rangle = -\lambda \langle M'_{x_m} x'_m, x'_m \rangle - \langle M(x_m), x'_m \rangle \leq -\langle M(x_m), x'_m \rangle$$

в силу s -монотонности оператора M . Отсюда в силу леммы 1.1.7 получаем

$$\langle Ax'_m, x'_m \rangle \leq -\frac{1}{k+1} \frac{d}{dt} \langle M(x_m), x_m \rangle. \quad (1.4.15)$$

Интегрируя (1.4.15) на интервале $(0, t)$ при любом $t \in (0, T)$, получаем

$$\begin{aligned} m \int_0^t \|x'_m\|_{\mathfrak{H}}^2 ds &\leq \int_0^t \langle Ax'_m, x'_m \rangle ds \leq \\ &\leq -\frac{1}{k+1} \langle M(x_m(t)), x_m(t) \rangle + \frac{1}{k+1} \langle M(x_{m0}), x_{m0} \rangle \leq \\ &\leq \frac{C_M}{k+1} \|x_{m0}\|_{\mathfrak{U}}^p. \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

Из (1.4.16) получаем

$$\|x'_m\|_{L_2((0, T); \mathfrak{H})}^2 \leq C_2 \|x_{m0}\|_{\mathfrak{U}}^p,$$

отсюда следует включение $x'_m \in L_2((0, T); \mathfrak{H})$ при всех $T \in \mathbb{R}_+$. Из оценок (1.4.14) и (1.4.16) следует, что все T_{m0} можно взять равными друг другу $T_{m0} = T$ для $\forall T \in \mathbb{R}_+$. В силу ограниченности линейного оператора A и ограниченности $\{x_m\}$ в $L_\infty(0, T; \mathfrak{H})$ получим:

$$\langle Ax_m(t), x_m(t) \rangle \leq \|Ax_m(t)\|_{\mathfrak{P}^*} \|x_m(t)\|_{\mathfrak{P}} \leq C \|x_m(t)\|_{\mathfrak{P}}^2,$$

значит, $\{Ax_m\}$ ограничена в $L_\infty(0, T; \mathfrak{P}^*)$. В силу условия (С3) и ограниченности $\{x_m\}$ в $L_\infty(0, T; \mathfrak{H})$, получим

$$\langle M(x_m(t)), x_m(t) \rangle \leq \|M(x_m(t))\|_{\mathfrak{U}^*} \|x_m(t)\|_{\mathfrak{U}} \leq C \|x_m(t)\|_{\mathfrak{U}}^p,$$

следовательно, $\{M(x_m)\}$ ограничена в $L_\infty(0, T; \mathfrak{U}^*)$. Следовательно, найдется такая подпоследовательность $\{x_m\}$, что

$$x_m \rightarrow x^* \text{ —слабо } L_\infty(0, T; \mathfrak{U}),$$

$$x'_m \rightarrow x' \text{ слабо } L_2(0, T; \mathfrak{U}),$$

$$Ax_m \rightarrow Ax^* \text{ —слабо } L_\infty(0, T; \mathfrak{P}^*),$$

$$M(x_m) \rightarrow \mu^* \text{ —слабо } L_\infty(0, T; \mathfrak{U}^*),$$

$$x_{m0} \rightarrow x_0 \text{ сильно } \mathfrak{U}.$$

Покажем, что $\mu = M(x)$.

Так как вложение $\mathfrak{U} \Subset \mathfrak{P}$ компактно, то найдется такая подпоследовательность $\{x_m\}$, что при почти всех $t \in (0, T)$ $x_m \rightarrow x$ сильно в \mathfrak{P} . Заметив, что оператор M удовлетворяет условию 1.3.1, получим

$$\|M(x_m) - M(x)\|_* \leq F(s)\|x_m - x\| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow +\infty,$$

следовательно, $\mu = M(x)$. В силу основной леммы вариационного исчисления можно записать (1.4.1) в эквивалентной форме

$$\langle Ax_m, w_j \rangle + \lambda \langle M(x_m), w_j \rangle + \int_0^T \lambda \langle M(x_m), w_j \rangle d\tau = \langle Ax_{m0}, w_j \rangle + \lambda \langle M(x_{m0}), w_j \rangle.$$

Зафиксируем j и перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$

$$\langle Ax, w_j \rangle + \lambda \langle M(x), w_j \rangle + \int_0^T \lambda \langle M(x), w_j \rangle d\tau = \langle Ax_0, w_j \rangle + \lambda \langle M(x_0), w_j \rangle.$$

Тогда получим, что

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} \langle L(x), w \rangle + \langle M(x), w \rangle \right) \varphi(t) dt = 0,$$

$$x(0) = x_0, \forall w \in \mathfrak{U}, \forall \varphi \in L_2(0, T).$$

Следовательно, $x(t)$ является слабым обобщенным решением задачи (4), (5).

Доказательство единственности аналогично проведенному в теореме 1.3.1 \square

1.5. Алгоритм проекционного метода нахождения приближенного решения задачи Коши

На основе теоретических результатов пп. 1.4. был разработан проекционный метод численного решения задачи Коши

$$x(0) = x_0 \quad (1.5.1)$$

для квазилинейного уравнения соболевского типа

$$\frac{d}{dt}(Ax + \lambda M(x)) + M(x) = 0, \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (1.5.2)$$

Выберем в \mathfrak{U} , счетную всюду плотную ортонормальную систему функций $\{w_i(s)\}$. Приближенное решение задачи (1.5.1), (1.5.2) будем искать в виде суммы

$$\tilde{x}(s, t) = x_m(s, t) = \sum_{i=1}^m c_{mi}(t)w_i(s), m \in N. \quad (1.5.3)$$

Подставляя сумму (1.5.3) в уравнение (1.5.2) и умножая полученную систему скалярно в \mathfrak{H} на $w_i(s)$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных $c_{mi}(t)$

$$\frac{d}{dt} \langle Ax_m + \lambda M(x_m), w_i \rangle + \langle M(x_m), w_i \rangle = 0, i = 1, \dots, m. \quad (1.5.4)$$

Начальные условия для решения этой системы получим из условий (1.5.1), умножив их скалярно в \mathfrak{H} на $w_i(s)$. Далее необходимо численно решить полученную систему нелинейных дифференциальных уравнений и найти неизвестные функциональные коэффициенты $c_{mi}(t)$ в приближенном решении $\tilde{x}(s, t) = x_m(s, t)$.

Таким образом, алгоритм проекционного метода нахождения приближенного решения задачи Коши для абстрактной квазилинейной модели соболевского типа можно свести к следующим этапам.

Этап 1. Нахождение счетной всюду плотной ортонормальной системы функций w_i в пространстве \mathfrak{U} .

Этап 2. Вычисление приближенного решения по заданным начальным функциям.

Опишем алгоритм метода подробнее.

Шаг 1. Вводятся коэффициенты λ , α , количество слагаемых в приближении m , начальное условия x_0 , параметры области, в которой ищется решение.

Шаг 2. Строится система функции $w_i(s)$.

Шаг 3. Составляется искомое приближенное решение для функции $x(s, t)$ в виде суммы

$$\tilde{x}(s, t) = \sum_{i=1}^m c_{mi}(t)w_i(s).$$

Шаг 4. Генерируется дифференциальное уравнение относительно неизвестных $c_{mi}(t)$.

Шаг 5. В цикле по i от 1 до m полученное на предыдущем шаге уравнение умножается на собственную функцию $w_i(s)$ и интегрируется в рассматриваемой области.

Шаг 6. Уравнения, полученные на предыдущем шаге, объединяются в систему.

Шаг 7. Начальные условия раскладываются в сумму, исходя из них определяются начальные условия для системы уравнений, полученной на предыдущем шаге.

Шаг 8. Решается система, полученная на шаге 6, с начальными условиями, полученными на шаге 7.

Шаг 9. Составляется решение и выводится на экран в виде графика и в виде множества точек.

Глава 2. Математические модели двухфазной фильтрации

2.1. Математическая модель неравновесной противоточной капиллярной пропитки

Традиционная модель капиллярной пропитки основана на автомоделном решении В. М. Рыжика [5], использующем классическую схему фильтрации неоднородных жидкостей Муската–Леверетта. Согласно этой схеме, относительные фазовые проницаемости воды и нефти, а также предельное капиллярное давление (функция Леверетта) считаются универсальными функциями мгновенной насыщенности σ , которые могут быть определены по данным о стационарном течении смеси данного состава. Однако в действительности в малопроницаемых микрон неоднородных блоках характерное время пропитки может оказаться сопоставимым со временем установления фазовых проницаемостей и капиллярного давления – временем перегруппировки жидкостей по каналам надлежащих размеров. По этой причине модель противоточной капиллярной пропитки должна учитывать эффекты неравновесности.

Приведем краткий вывод основного уравнения модели. Для совместной фильтрации воды и нефти справедлив закон Дарси [4]

$$u_1 = -(k/\mu_1)f_1\nabla p_1, \quad u_2 = -(k/\mu_2)f_2\nabla p_2, \quad (2.1.1)$$

$$p_2 - p_1 = T \cos \Theta (m/k)^{1/2} J. \quad (2.1.2)$$

Простейшая формулировка схемы учета неравновесности использует то обстоятельство, что функции f_1 , f_2 , J , определенные по данным стационарного течения смеси, – монотонные функции истинной водонасыщенности σ . При этом функции f_1 , f_2 меняются от нуля до единицы, а J с ростом σ убывает от бесконечности до нуля. Поэтому учет неравновесности в данной схеме сводится к тому, что функции f_1 , f_2 , J в неравновесном потоке считаются теми же,

что и в равновесном, но не от истинной водонасыщенности σ , а от некоторой водонасыщенности η . Единственное предположение здесь в действительности заключается в том, что величина эффективной водонасыщенности η для всех трех функций f_1 , f_2 , J одна и та же. Кинетическое уравнение, связывающее эффективную водонасыщенность η с истинной водонасыщенностью σ берется в виде

$$\eta = \sigma + \tau \partial_t \sigma,$$

где τ – постоянная для данной породы и пары жидкостей величина, называемая временем замещения.

Чтобы получить замкнутую систему уравнений, необходимо записать уравнения сохранения массы для обеих фаз. Приравнявая приращение массы жидкости в элементе V за время dt к притоку массы жидкости через поверхность элемента за то же время и преобразуя поверхностный интеграл в объемный, получаем интегральное соотношение

$$\int_V \left(\frac{\partial m \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i u_i) \right) dV = 0.$$

Откуда в силу произвольности элемента V и непрерывности всех полей следует дифференциальное уравнение непрерывности для каждой компоненты:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m \rho_1 s) - \operatorname{div}(\rho_1 u_1) = 0, \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m \rho_2 (1 - s)) - \operatorname{div}(\rho_2 u_2) = 0. \quad (2.1.4)$$

Здесь мы предполагаем, что сумма насыщенностей фаз равна 1. Соответственно, достаточно рассматривать насыщенность только одной фазы – s . Поскольку ρ_1 и ρ_2 – функции давлений p_1 и p_2 , а изменение пористости в однородном пласте зависит только от изменения среднего давления $\bar{p} = p_1 s + p_2 (1 - s)$, уравнения (2.1.1) – (2.1.4) образуют замкнутую систему для p_i и s .

Таким образом, получаем систему:

$$m\partial_t\sigma + \nabla \left(vF(\eta) + \left(\frac{T \cos \Theta}{\mu_2} \right) (mk)^{1/2} F(\eta) f_2(\eta) \nabla J(\eta) \right) = 0,$$

$$\nabla v = 0,$$

здесь функция F определяется соотношением

$$F(\eta) = \frac{f_1(\eta)}{f_1(\eta) + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) f_2(\eta)},$$

$v = u_1 + u_2$ – полный поток жидкости. Для противоточной капиллярной пропитки полный поток равен нулю, $v = 0$, и основное уравнение для насыщенности принимает вид

$$\partial_t\sigma = \kappa\Delta\Phi(\sigma + \tau\partial_t\sigma). \quad (2.1.5)$$

Здесь

$$\kappa = \frac{T \cos \Theta}{\mu} \left(\frac{k}{m} \right)^{1/2},$$

$$\Phi(\eta) = - \int_0^{\eta_2} F(s) f_2(s) J'(s) ds.$$

Поскольку $F > 0$, $f_2 > 0$, $J' < 0$, функция $\Phi(\eta)$ – положительная и монотонно возрастающая. Далее, поскольку при $\eta \rightarrow 0$ функция $F(\eta)$ быстро стремится к нулю, так же как $f_2(\eta)$ при $\eta \rightarrow 1$, функция $\Phi(\eta)$ имеет при $\eta \rightarrow 0$ нуль высокого порядка, а при $\eta = 1$ – максимум.

Умножая (2.1.5) на τ , дифференцируя по времени и складывая получающееся уравнение с (2.1.5), находим для эффективной водонасыщенности η уравнение третьего порядка

$$\partial_t\eta = \kappa\Delta\Phi(\eta) + \kappa\tau\partial_t\Delta\Phi(\eta).$$

Это уравнение является основным для предлагаемой модели.

Начальные условия задачи естественным образом возникают из данных о распределении жидкостей в начальный момент времени. Граничные условия – из данных о поведении жидкостей на границе рассматриваемой области. Например, нулевое граничное условие описывает случай блока, свободно омываемого нефтью.

Таким образом, приходим к задаче:

$$x_t - \lambda\alpha(\Delta\Phi(x))_t = \alpha\Delta\Phi(x) \quad (2.1.6)$$

$$x(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.1.7)$$

$$x(s, 0) = x_0(s), s \in \Omega, \quad (2.1.8)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей класса C^∞ , $T \in \mathbb{R}_+$.

Искомая функция x соответствует эффективной насыщенности. Функция $\Phi(x) \equiv |x|^{p-2}x$, $p \geq 2$ – монотонно возрастающая и гладкая. Параметры α и λ вещественны и положительны, характеризуют свойства фаз и среды.

Положим $\mathfrak{H} = W_2^{-1}(\Omega)$ со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(-\Delta)^{-1}v \, dx, u, v \in \mathfrak{H}, \quad (2.1.9)$$

где $(-\Delta)^{-1}$ – оператор Грина однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ в области Ω . Также положим $\mathfrak{U} = L_p(\Omega)$. Формулой

$$\langle Ax, v \rangle = \langle x, v \rangle = \int_{\Omega} x(-\Delta)^{-1}v \, ds, x, v \in \mathfrak{U}$$

определим оператор A .

Поскольку $L_p(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ при $p \in [2, +\infty)$ в случае ограниченности области Ω (что имеет место), а $L_2(\Omega) \hookrightarrow W_2^{-1}(\Omega)$, то в качестве \mathfrak{U}^* можно взять пространство, сопряженное к \mathfrak{U} относительно двойственности (2.1.9). В таком случае вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{U}^*$ (при $p \in [2, +\infty)$) плотны и непрерывны.

Лемма 2.1.1. *Оператор $A : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$ линеен, симметричен, положительно определен и непрерывен.*

Доказательство. Сначала покажем непрерывность оператора $A : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$. В силу неравенства Гельдера получим

$$\begin{aligned} |\langle Ax, v \rangle| &= |\langle x, (-\Delta)^{-1}v \rangle_{L_2(\Omega)}| \leq \|x\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \|(-\Delta)^{-1}v\|_{W_2^0(\Omega)} \leq \\ &\leq \text{const} \|x\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq \text{const} \|x\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|Ax\|_* = \sup_{\|v\|=1} |\langle Ax, v \rangle| \leq \text{const} \|x\|_{L_p(\Omega)},$$

т. е., действительно, оператор $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$.

Положительная определенность и симметричность оператора A следует из построения:

$$\langle Ax, x \rangle = \int_{\Omega} x(-\Delta)^{-1}x \, ds = \|x\|_{\mathfrak{H}}^2,$$

$$\langle Ax, v \rangle = \langle x, v \rangle = \langle x, Av \rangle, \quad x, v \in \mathfrak{U}.$$

□

Определим оператор M следующим образом:

$$\langle M(x), v \rangle = \alpha \int_{\Omega} |x|^{p-2} x v \, ds, \quad x, v \in \mathfrak{U}.$$

Лемма 2.1.2. *Оператор $M \in C^2(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$ s -монотонен, p -коэрцитивен, однороден порядка $k = p - 1$ и имеет симметричную производную Фреше.*

Доказательство. Сначала покажем действие оператора $M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$. В силу неравенства Гельдера

$$|\langle M(x), v \rangle| \leq \alpha \int_{\Omega} |x|^{p-1} |v| \, ds \leq$$

$$\text{const} \|x\|_{L_p(\Omega)}^{p-1} \|v\|_{L_p(\Omega)} \cdot \|M(x)\|_* = \sup_{\|v\|=1} |\langle M(x), v \rangle| \leq \text{const} \|x\|_{L_p(\Omega)}^{p-1}, \quad (2.1.10)$$

т. е., действительно, оператор $M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$. Кроме того, из (2.1.10) и

$$\langle M(x), x \rangle = \alpha \int_{\Omega} |x|^p ds = \alpha \|x\|_{L_p(\Omega)}^p$$

сразу же вытекает p -коэрцитивность оператора M .

Далее, построим производную Фреше M'_x оператора M . В точке $x \in \mathfrak{U}$ она определяется формулой

$$\langle M'_x v, w \rangle = (p-1)\alpha \int_{\Omega} |x|^{p-2} v w ds, \quad x, v, w \in \mathfrak{U}.$$

Из построения сразу же следует ее симметричность:

$$\langle M'_x v, w \rangle = \langle v, M'_x w \rangle.$$

Кроме того, в силу неравенства Гельдера

$$|\langle M'_x v, w \rangle| = (p-1)\alpha \int_{\Omega} |x|^{p-2} |v w| ds \leq (p-1)\alpha \|x\|^{p-2} \|v\| \|w\|,$$

т. е. оператор $M'_x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$ при любых $x \in \mathfrak{U}$. Докажем s -монотонность оператора M :

$$\langle M'_x v, v \rangle = (p-1)\alpha \int_{\Omega} |x|^{p-2} v^2 ds > 0, \quad x, v \in \mathfrak{U}.$$

Наконец, покажем включение $M \in C^2(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$:

$$|\langle M''_x(v, w), z \rangle| \leq (p-1)(p-2)\alpha \|x\|^{p-3} \|v\| \|w\| \|z\|.$$

□

Лемма 2.1.3. *Оператор M удовлетворяет условию 1.3.1.*

Доказательство. Покажем, что существует $f(s, \tau)$, такая что для любого $s_0 \in \Omega$:

$$||x|^{p-2}x - |v|^{p-2}v| \leq f(s_0, \tau_0)|x - v|.$$

Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть x и v одного знака. Тогда

$$\begin{aligned} & ||x|^{p-2}x - |v|^{p-2}v| = |x^{p-1} - v^{p-1}| = \\ & = |(x - v) \sum_{k=0}^{p-2} x^k v^{p-2-k}| \leq |x - v| \left| \sum_{k=0}^{p-2} x^k v^{p-2-k} \right| = \\ & = f_1(s_0, \tau_0) |x - v|. \end{aligned}$$

2. Пусть теперь x и v имеют разные знаки (для определенности, $x \geq 0$, $v \leq 0$). Пусть $p - 2$ – четное число. Тогда, аналогично предыдущему случаю

$$\begin{aligned} & ||x|^{p-2}x - |v|^{p-2}v| = |x^{p-1} - v^{p-1}| = \\ & = f_1(s_0, \tau_0) |x - v|. \end{aligned}$$

3. Пусть $p - 2$ – нечетное число. Тогда

$$\begin{aligned} & ||x|^{p-2}x - |v|^{p-2}v| = |x^{p-1} + (-v)^{p-1}| \leq \\ & \leq |x^{p-1} + (-v)^{p-1}| + \sum_{k=1}^{p-2} C_{p-1}^k x^k (-v)^{p-1-k} = \\ & = \left| \sum_{k=0}^{p-1} C_{p-1}^k x^k (-v)^{p-1-k} \right| = |(x - v)^{p-1}| \leq \\ & \leq |x - v| |(x - v)^{p-2}| = f_2(s_0, \tau_0) |x - v|. \end{aligned}$$

Теперь положим $f(s_0, \tau_0) = \max \{f_1(s_0, \tau_0), f_2(s_0, \tau_0)\}$. Получим

$$\begin{aligned} & ||x|^{p-2}x - |v|^{p-2}v| \leq f(s_0, \tau_0) |x - v| \\ & \sup_{\|w\|=1} \alpha \int_{\Omega} ||x|^{p-2}x - |v|^{p-2}v| |w| ds \leq \sup_{\|w\|=1} \alpha \int_{\Omega} f(s, \tau_0) |x - v| |w| ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим левую часть неравенства:

$$\sup_{\|w\|=1} \alpha \int_{\Omega} ||x|^{p-2}x - |v|^{p-2}v| |w| ds \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sup_{\|w\|=1} \alpha \left| \int_{\Omega} |x|^{p-2} x w ds - \int_{\Omega} |v|^{p-2} v w ds \right| = \\
&= \sup_{\|w\|=1} |\langle M(x) - M(v), w \rangle| = \|M(x) - M(v)\|_*.
\end{aligned}$$

Рассмотрим правую часть неравенства:

$$\begin{aligned}
&\sup_{\|w\|=1} \alpha \int_{\Omega} f(s, \tau_0) |x - v| |w| ds = \\
&= \sup_{\|w\|=1} \alpha \langle f(s, \tau_0) |x - v|, |w| \rangle \leq \\
&\leq \sup_{\|w\|=1} \alpha \|f(s, \tau_0) |x - v|\|_{L_2(\Omega)} \|w\|_{L_2(\Omega)} \leq \\
&\leq \alpha A \|f(s, \tau_0) |x - v|\|_{L_2(\Omega)} \leq \alpha C \|f(s, \tau_0)\| \|x - v\| = \\
&= F(\tau_0) \|x - v\|.
\end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\|M(x) - M(v)\|_* \leq F(\tau) \|x - v\|.$$

□

Таким образом, мы провели редукцию задачи (2.1.6)–(2.1.8) к задаче Коши (0.0.6) для квазилинейного уравнения соболевского типа (0.0.7).

2.2. Аналитическое исследование математической модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей класса C^∞ . В цилиндре $\Omega \times (0, T)$, $T \in \mathbb{R}_+$ рассмотрим математическую модель Баренблатта – Гильмана, представленную уравнением

$$x_t - \alpha \lambda(\Delta \Phi(x))_t = \alpha \Delta \Phi(x) \quad (2.2.1)$$

и условиями Дирихле – Коши

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.2.2)$$

$$x(s, 0) = x_0(s), \quad s \in \Omega. \quad (2.2.3)$$

Напомним, что уравнение (2.2.1) моделирует неравновесную противоточную капиллярную пропитку.

Определение 2.2.1. Вектор-функцию $x \in C^1((0; T); L_p(\Omega))$, удовлетворяющую (2.2.1) на $(0, T)$ при некотором $T = T(x_0)$ и условиям (2.2.2), (2.2.3), назовем классическим локальным решением задачи (2.2.1) – (2.2.3).

Теорема 2.2.1. Пусть $p > 2$ и $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любого $x_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное классическое локальное решение задачи (2.2.1) – (2.2.3).

Доказательство. В силу построения оператора $N(x)$:

$$\langle N(x)v, w \rangle = \int_{\Omega} (v(-\Delta)^{-1}w + (p-1)\alpha\lambda|x|^{p-2}vw) ds, \quad \forall x, v, w \in \mathfrak{U}.$$

и в силу лемм 2.1.1, 2.1.2 для любого $x_0 \in \mathfrak{U}$ оператор $N(x_0)$ s -монотонен

$$\langle N(x_0)'_v w, w \rangle = \int_{\Omega} (w(-\Delta)^{-1}w + (p-1)\alpha\lambda|x_0|^{p-2}w^2) ds > 0, \quad \forall w \in \mathfrak{U}, w \neq 0,$$

и p -коэрцитивен ($p = 2$).

Далее, рассмотрим уравнение

$$N(x_0)v = f.$$

Существование и единственность решения этого уравнения для любого $x_0 \in \mathfrak{U}$ и любого $f \in \mathfrak{U}^*$ следует из следствия 1.1.1 в силу s -монотонности и p -коэрцитивности оператора $N(x_0)$, значит, оператор $[N(x_0)]^{-1}$ существует для любого $x_0 \in \mathfrak{U} \setminus \{0\}$. Принадлежность $[N(x_0)]^{-1}$ классу $C^1(\mathfrak{U}^* \setminus \{0\}; \mathfrak{U} \setminus \{0\})$ следует из теоремы 1.1.4 в силу s -монотонности оператора $N(x_0)$. Поэтому в силу лемм 2.1.1, 2.1.2 и теоремы 1.2.1 существует единственное локальное решение задачи (2.2.1) – (2.2.3). \square

Определение 2.2.2. Вектор-функцию $x \in L_\infty(0, T; L_p(\Omega))$ такую, что $\frac{dx}{dt} \in L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$ при $T \in \mathbb{R}_+$, назовем слабым обобщенным решением задачи (2.2.1) – (2.2.3), если она удовлетворяет соотношениям

$$\left\langle \frac{d}{dt} L(x(t)), v \right\rangle + \langle M(x(t)), v \rangle = 0, \text{ при п. в. } t \in (0, T),$$

$$\langle x(0) - x_0, v \rangle = 0.$$

при всех $v \in \mathfrak{U}$.

Справедлива следующая

Теорема 2.2.2. Пусть $p > 2$ и $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любого $x_0 \in \mathfrak{U}$ и для любого $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное слабое обобщенное решение $x \in L_\infty(0, T; L_p(\Omega))$ такое, что $\frac{dx}{dt} \in L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$ задачи (2.2.1) – (2.2.3).

Доказательство. Доказательство теоремы вытекает из лемм 2.1.1 – 2.1.3 и теорем 1.3.1, 2.2.1. \square

Замечание 2.2.1. Если $x_0 = 0$, тогда $u \equiv 0$ является решением задачи (2.2.1) – (2.2.3). Единственность же решения следует из оценки (1.2.7).

2.3. Аналитическое исследование математической модели начального регулирования неравновесной противоточной капиллярной пропитки

Пусть $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}^*)$ и $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^*)$ – дуальные (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств. Определим в пространстве \mathfrak{U} непустое замкнутое и выпуклое множество U_{ad} .

Рассмотрим задачу начального регулирования насыщенности в модели неравновесной пртивоточной капиллярной пропитки

$$\begin{aligned}
x_t - \lambda\alpha(\Delta\Phi(x))_t &= \alpha\Delta\Phi(x), \\
x(s, 0) &= u(s), \quad s \in \Omega, \\
x(s, t) &= 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\
J(x(T), u) &= \min_{(y,v) \in \mathfrak{U} \times U_{ad}} J(y(T), v).
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Задача (2.3.1) в специальном образом подобранных функциональных пространствах редуцируется к задаче стартового управления и финального наблюдения

$$x(0) = u, \tag{2.3.2}$$

$$J(x(T), u) = \min_{(y,v) \in \mathfrak{U} \times U_{ad}} J(y(T), v), \tag{2.3.3}$$

для квазилинейного уравнения соболевского типа

$$\frac{d}{dt}(L(x)) + M(x) = 0, \tag{2.3.4}$$

где $J(x, u)$ – ограниченный снизу полунепрерывный снизу коэрцитивный функционал, а x_d – требуемое финальное состояние.

Введем пространство $H = \{x : x \in L_\infty(0, T; \mathfrak{U}), x_t \in L_2(0, T; \mathfrak{H})\}$.

Определение 2.3.1. Пару $(\hat{x}, \hat{u}) \in H \times U_{ad}$ будем называть решением задачи (2.3.2) – (2.3.4), если $J(\hat{x}(T), \hat{u}) = \min_{(x,u) \in \mathfrak{U} \times U_{ad}} J(x(T), u)$, и (\hat{x}, \hat{u}) удовлетворяет задаче (2.3.2), (2.3.4) в слабом обобщенном смысле. Вектор \hat{u} будем называть стартовым управлением в задаче (2.3.2) – (2.3.4).

Теорема 2.3.1. Пусть выполнены условия (A)–(C), сформулированные в п. 1.4, тогда при любом $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (2.3.2) – (2.3.4).

Доказательство. При сформулированных условиях для задачи

$$\frac{d}{dt}(L(x)) + M(x) = 0, \quad x(0) = u,$$

при любом $u \in U_{ad}$ по теореме 1.3.1 существует единственное слабое обобщенное решение. Поэтому можно считать, что

$$J(x(T), u) = J(u).$$

Так как множество значений функционала ограничено снизу, то существует минимизирующая последовательность $\{u_n\} \in \mathfrak{U}$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = C,$$

где C – точная нижняя грань множества значений функционала. Следовательно, последовательность $\{J(u_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в \mathbb{R} , а значит, в силу коэрцитивности функционала $J(u)$, последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в \mathfrak{U} .

Извлечем из $\{u_n\}$ (переходя, если потребуется, к подпоследовательности) слабо сходящуюся последовательность $u_m \rightarrow \hat{u}$. В силу теоремы 1.1.2, $\hat{u} \in U_{ad}$.

Обозначим за $x_m = x(u_m)$. В доказательстве теоремы 1.2.2 были получены следующие неравенства:

$$\|x_m(t)\|_{\mathfrak{U}}^p \leq C_1(\|u_m\|_{\mathfrak{U}}^p + \|u_m\|_{\mathfrak{U}}^2), \text{ при п. в. } t \in (0, T),$$

и

$$\|x'_m\|_{L_2((0,T);\mathfrak{H})}^2 \leq C_2\|u_m\|_{\mathfrak{U}}^p,$$

значит, можно извлечь такую подпоследовательность, назовем ее снова x_m , что

$$x_m \rightarrow x^* \text{ – слабо в } L_{\infty}(0, T; \mathfrak{U}),$$

$$x'_m \rightarrow x' \text{ слабо в } L_2(0, T; \mathfrak{U}).$$

В силу ограниченности линейного оператора A и ограниченности $\{x_m\}$ в $L_{\infty}(0, T; \mathfrak{U})$ получим:

$$\langle Ax_m(t), x_m(t) \rangle \leq \|Ax_m(t)\|_{\mathfrak{U}^*} \|x_m(t)\|_{\mathfrak{U}} \leq C \|x_m(t)\|_{\mathfrak{U}}^2,$$

значит, $\{Ax_m\}$ ограничена в $L_{\infty}(0, T; \mathfrak{U}^*)$. В силу условия (С3) и ограниченности $\{x_m\}$ в $L_{\infty}(0, T; \mathfrak{U})$, получим

$$\langle M(x_m(t)), x_m(t) \rangle \leq \|M(x_m(t))\|_{\mathfrak{U}^*} \|x_m(t)\|_{\mathfrak{U}} \leq C \|x_m(t)\|_{\mathfrak{U}}^p,$$

следовательно, $\{M(x_m)\}$ ограничена в $L_\infty(0, T; \mathfrak{U}^*)$. Следовательно, найдется такая подпоследовательность $\{x_m\}$, что

$$Ax_m \rightarrow Ax^* \text{ - слабо в } L_\infty(0, T; \mathfrak{U}^*),$$

$$M(x_m) \rightarrow \mu^* \text{ - слабо в } L_\infty(0, T; \mathfrak{U}^*).$$

Покажем, что $\mu = M(x)$.

Так как вложение $\mathfrak{U} \Subset \mathfrak{B}$ компактно, то найдется такая подпоследовательность $\{x_m\}$, что при почти всех $t \in (0, T)$ $x_m \rightarrow x$ сильно в \mathfrak{B} . Заметив, что оператор M удовлетворяет (C2), получим

$$\|M(x_m) - M(x)\|_* \leq F(s)\|x_m - x\| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow +\infty,$$

следовательно, $\mu = M(x)$.

В силу сепарабельности пространства \mathfrak{U} выберем в \mathfrak{U} счетную всюду плотную ортонормальную систему функций $\{w_k\}$.

В силу основной леммы вариационного исчисления можно записать слабую обобщенную форму уравнения (1.3.2)

$$\langle Ax_m, w_j \rangle + \lambda \langle M(x_m), w_j \rangle + \int_0^T \lambda \langle M(x_m), w_j \rangle d\tau = \langle Ax_{m0}, w_j \rangle + \lambda \langle M(x_{m0}), w_j \rangle.$$

Зафиксируем j и перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$

$$\langle Ax, w_j \rangle + \lambda \langle M(x), w_j \rangle + \int_0^T \lambda \langle M(x), w_j \rangle d\tau = \langle A\hat{u}, w_j \rangle + \lambda \langle M(\hat{u}), w_j \rangle.$$

Тогда получим, что

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} \langle L(x), w \rangle + \langle M(x), w \rangle \right) \varphi(t) dt = 0,$$

$$x(0) = \hat{u}, \forall w \in \mathfrak{U}, \forall \varphi \in L_2(0, T).$$

Следовательно, $x = x(\hat{u})$ и $\liminf_{m \rightarrow \infty} J(u_m) \geq J(\hat{u})$, значит, \hat{u} есть искомое стартовое управление. □

Вернемся к рассмотрению задачи (2.3.1), функционал зададим формулой

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \|x(s, T) - x_d(s)\|_{W_q^1(\Omega)}^q + \frac{N}{2} \|u(s) - x_0(s)\|_{W_q^1(\Omega)}^q.$$

Положим $\mathfrak{H} = W_2^{-1}(\Omega)$. В качестве пространства \mathfrak{F} выберем пространство $L_p(\Omega)$. Также положим $\mathfrak{U} = W_q^1(\Omega)$. В качестве \mathfrak{U}^* и \mathfrak{F}^* можно взять пространства, сопряженные к \mathfrak{U} и \mathfrak{F} относительно двойственности в $W_2^{-1}(\Omega)$.

Справедлива следующая

Теорема 2.3.2. Пусть $1 < q \leq n$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$, и $q < n$, $2 < p < \frac{2q}{n-q}$, или $n = q$, $p \in (2, +\infty)$. Тогда при любом $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (2.3.1).

Доказательство. Данный результат следует из теоремы 2.3.1, лемм 2.1.1 – 2.1.3 и условия (A1). \square

2.4. Описание программы для моделирования неравновесной противоточной капиллярной пропитки

Алгоритм метода, описанный в пункте 1.5, был реализован с помощью математического пакета Maple. Выбор среды программирования был обусловлен наличием встроенного аппарата аналитических вычислений и встроенных средств для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Написанная программа позволяет находить приближенное решение задачи Коши – Дирихле для уравнения Баренблатта – Гильмана для заданных начальных значений и числа слагаемых в приближении, а также выводит на экран график приближенного решения.

Программа может быть использована при исследовании процесса неравновесной противоточной пропитки, протекающей в пористых средах, интересна специалистам в области геологии и теории фильтрации.

На вход программе подаются коэффициенты α , λ , начальное условие $x_0(s)$, параметры области, в которой решается задача, число используемых слагае-

мых в приближении. На выходе программа выдает приближенное решение и строит его график.

Схема алгоритма программы приведена на рис. 2.4.1.

Опишем алгоритм подробнее. Каждому блоку алгоритма соответствует один шаг.

Шаг 1. Вводятся коэффициенты λ, α , количество слагаемых в приближении m , начальное условия x_0 , параметры области, на которой ищется решение.

Шаг 2. Строится система функции $w_i(s)$. Для этого решается задача Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в рассматриваемой области, производится нормировка функций w_i .

Шаг 3. Составляется искомое приближенное решение для функции $x(s, t)$ в виде суммы

$$\tilde{x}(s, t) = \sum_{i=1}^m c_{mi}(t)w_i(s).$$

Шаг 4. Составленное на третьем шаге выражение подставляется в основное уравнение модели, генерируется дифференциальное уравнение относительно неизвестных $c_{mi}(t)$.

Шаг 5. В цикле по i от 1 до m полученное на предыдущем шаге уравнение умножается на собственную функцию $w_i(s)$ и интегрируется в рассматриваемой области. Таким образом, получается система для определения коэффициентов приближения.

Шаг 6. Уравнения полученные на предыдущем шаге объединяются в систему.

Шаг 7. Начальные условия раскладываются в сумму, исходя из них определяются начальные условия для системы уравнений, полученной на предыдущем шаге.

Шаг 8. Решается система, полученная на шаге 6, с начальными условиями, полученными на шаге 7.

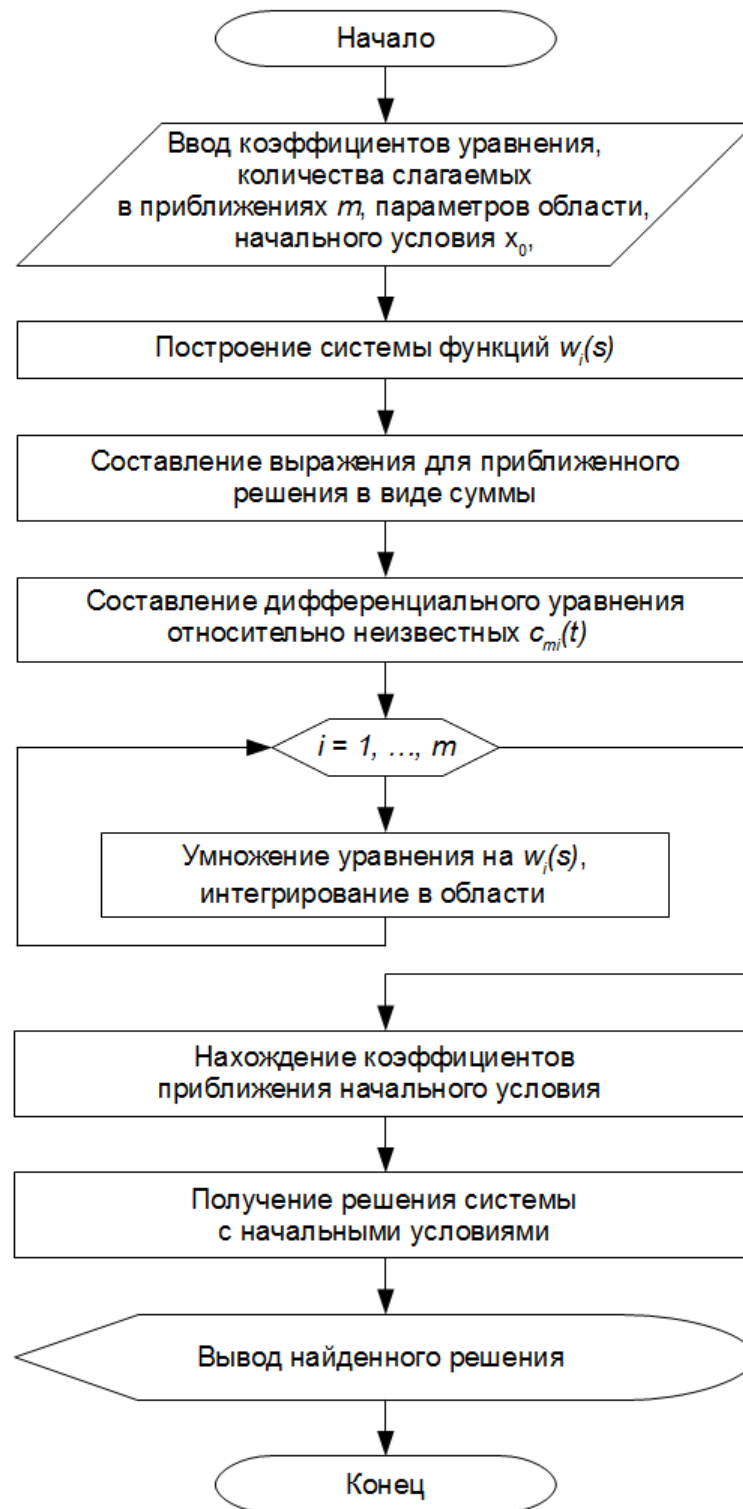


Рис. 2.4.1. Обобщенная схема алгоритма работы программы

Шаг 9. Составляется решение и выводится на экран в виде графика и в виде множества точек.

2.5. Вычислительные эксперименты для математической модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки

Проведем вычислительные эксперименты, иллюстрирующие работу программы, описанной в пункте 2.4.

Пример 2.5.1. *Рассмотрим задачу Дирихле – Коши*

$$x(0, t) = x(\pi, t) = 0, t \in (0, 5), \quad (2.5.1)$$

$$x(s, 0) = \frac{0.7 \sin(s) - 0.2 \sin(2s)}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, s \in (0, \pi), \quad (2.5.2)$$

для уравнения, моделирующего неравновесную противоточную пропитку

$$(x - \Delta|x|^2x)_t = \Delta|x|^2x. \quad (2.5.3)$$

Вычисления будем проводить с помощью проекционного метода, описанного в пункте 1.4. Искомую функцию мы представляем в виде суммы

$$x(s, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^m x_k(t) \sin(ks)$$

с различным количеством членов: от 2 до 6. Приведем графики полученных решений (в момент времени $t = 5$) для всех случаев на рисунке 2.5.1. А также приведем графики решения, полученного с использованием шести членов в приближении, в разные моменты времени на рисунке 2.5.2.

На рисунке 2.5.1 мы видим, что с увеличением числа слагаемых в приближении найденные решения приближаются к некоторому общему пределу и сближаются между собой. Найдем вычислительную погрешность решений по формуле:

$$\delta_i^G = \max_{s \in \Omega} |x_{i-1}^G - x_i^G|.$$

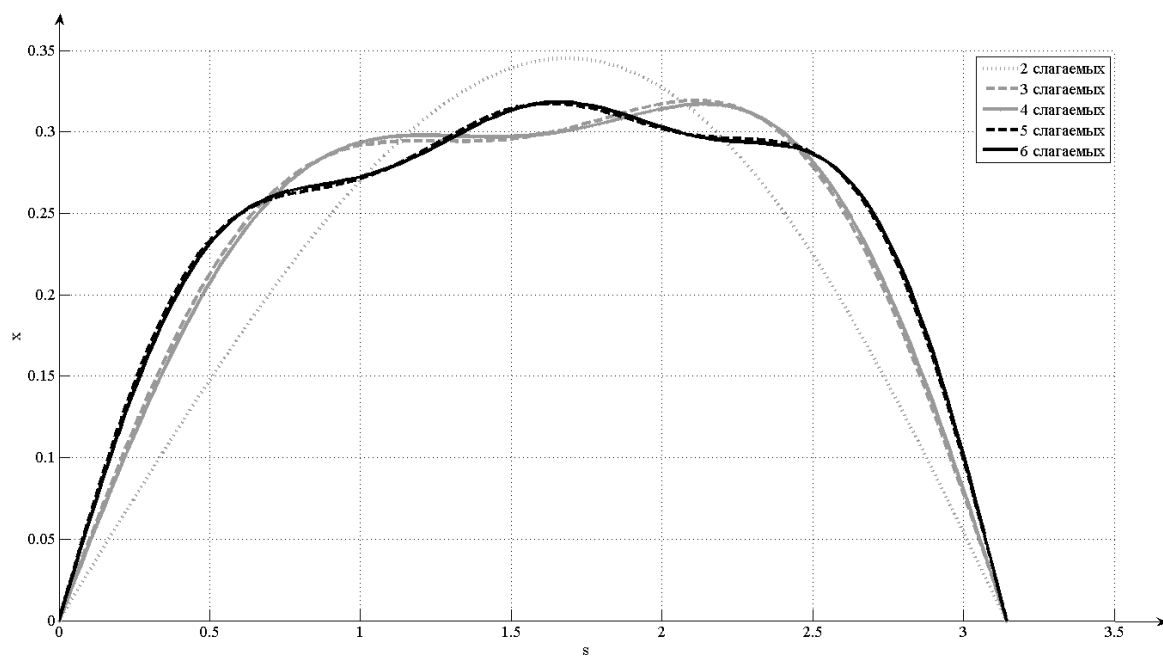


Рис. 2.5.1. Графики приближенных решений

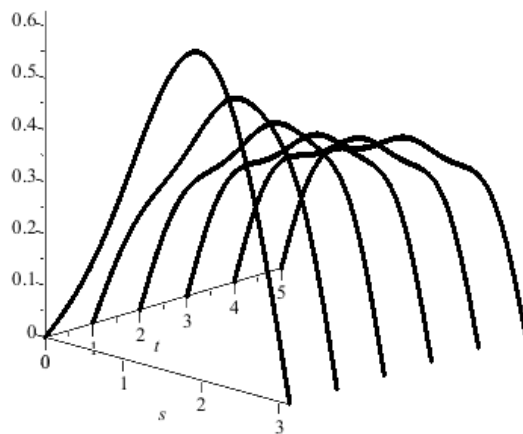


Рис. 2.5.2. Временная динамика решения

Таблица 2.5.1

i	3	4	5	6
δ_i^G	0.0659	0.0056	0.0344	0.0040

Приведем найденные значения в таблице 2.5.1.

Заметим, что значения δ_i^G в целом уменьшаются с ростом i . Минимальное значение из полученных имеет величину менее 0.004. Таким образом, можно утверждать, что найденные приближенные решения достаточно близки к точному.

Пример 2.5.2. *Рассмотрим задачу Дирихле – Коши*

$$x(1, \phi, t) = 0, \phi \in [0; 2\pi), t \in (0, 10), \quad (2.5.4)$$

$$x(r, \phi, 0) = 1 - r^2, r \in [0, 1), \phi \in [0; 2\pi), \quad (2.5.5)$$

для уравнения, моделирующего неравновесную противоточную капиллярную пропитку

$$x_t(r, t) - \left(\frac{1}{r}(r(|x|^3(r, t)x)_r)_r\right)_t = \frac{1}{r}(r(|x|^3(r, t)x)_r)_r. \quad (2.5.6)$$

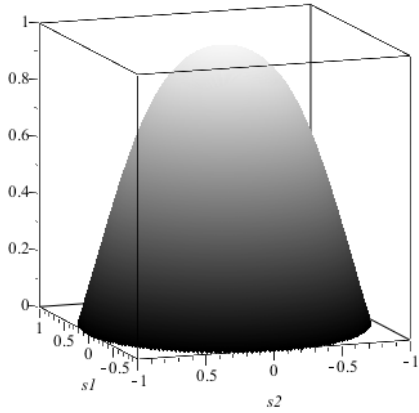
Для задачи (2.5.4) – (2.5.6) найдем приближенные решения с использованием метода, описанного в пункте 1.4. Решение $x(r, t)$ будем искать в виде суммы

$$x_m(r, t) = \sum_{i=1}^m c_{mi}(t) \frac{J_0(\mu_0^i r)}{B_i},$$

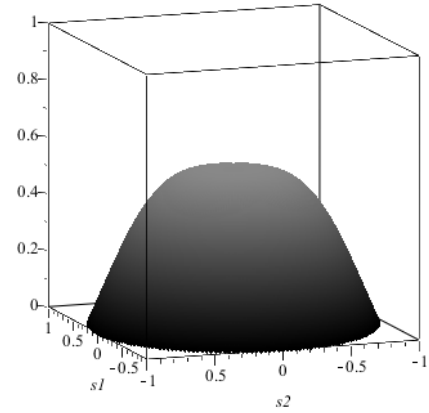
где $B_i = \frac{1}{2}J_1^2(\mu_0^i)$ – норма функции $J_0(\mu_0^i r)$ с весом r в $L_2(\Omega)$, J_i – функция Бесселя i -го порядка, μ_0^i – i -ый нуль функции J_0 . Начальные условия для системы дифференциальных уравнений относительно c_{mi} имеют вид:

$$c_{mi}(0) = \frac{4J_1(\mu_0^i)}{(\mu_0^i)^3}.$$

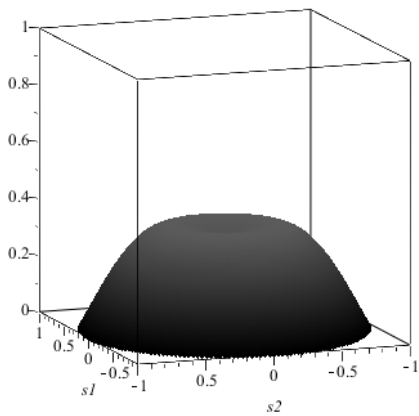
Вычисления будем проводить с 2 членами в приближенном представлении искомой функции. Приведем графики решения в разные моменты времени на рисунке 2.5.3.



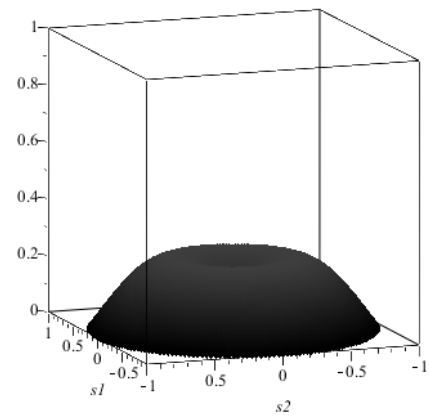
$t = 0$



$t = 2.5$



$t = 5$



$t = 10$

Рис. 2.5.3. Приближенное решение в разные моменты времени

Рассмотренный пример соответствует случаю тонкой пористой линзы между двумя непроницаемыми слоями, частично заполненной несмачивающей фазой и омываемой по краю смачивающей фазой. Полученные результаты можно интерпретировать следующим образом. Насыщенность несмачивающей фазы в центральной части линзы быстро выравнивается и затем медленно убывает, что согласуется с естественными физическими представлениями.

Глава 3. Математическая модель квазистационарного процесса в проводящей среде

3.1. Математическая модель квазистационарного процесса

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область с границей класса C^∞ – область идеальной проводимости, $\tau \in \mathbb{R}_+$. Система уравнений квазистационарного поля с учетом релаксации или источников свободных электронов имеет вид

$$\operatorname{div} D = 4\pi e n - |\phi|^{q_1} \phi, \quad D = -\epsilon \nabla \phi, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = (4\pi e)^{-1} \alpha |\phi|^{q_2} \phi, \quad q_i > 0, i = 1, 2; \quad (3.1.2)$$

здесь ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, без ограничения общности, будем считать, что $\epsilon = 1$, n – концентрация свободных электронов, $|\phi|^{q_1} \phi$ – концентрация объемного заряда, связанного на примесных центрах полупроводника, в самосогласованном поле ϕ , D – вектор индукции электрического поля, ϕ – потенциал электрического поля, $(4\pi e)^{-1} \alpha$ – параметр релаксации, при $\alpha < 0$, и параметр, характеризующий источники свободных зарядов, если $\alpha > 0$, $|\phi|^{q_2} \phi$ – скорость роста концентрации свободных электронов в самосогласованном поле ϕ . Положим $q_1 = q_2$, $\alpha < 0$. В этом случае система уравнений (3.1.1), (3.1.2) редуцируется к уравнению, моделирующему квазистационарный процесс с учетом релаксации

$$(\Delta x - \Phi(x))_t = \lambda \Phi(x), \quad (3.1.3)$$

искомая функция u соответствует потенциалу электрического поля. Функция $\Phi(x) \equiv |x|^{p-2} x$, $p > 2$ монотонно возрастающая и гладкая. Кроме того, на границе раздела идеально проводящей среды имеем граничное условие

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (3.1.4)$$

при наличии начального возмущения электрического поля приходим к задаче Коши

$$x(s, 0) = x_0(s), s \in \Omega. \quad (3.1.5)$$

Положим $\mathfrak{H} = L_2(\Omega)$, $\mathfrak{U} = W_2^1(\Omega)$.

Операторы A и M определим следующим образом:

$$\langle Ax, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla x \nabla v \, ds, x, v \in \mathfrak{U},$$

$$\langle M(x), v \rangle = \int_{\Omega} |x|^{p-2} x v \, ds, \quad x, v \in \mathfrak{U}.$$

Лемма 3.1.1. *Оператор $A : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$ линеен, положительно определен, симметричен и непрерывен.*

Доказательство. Перечисленные свойства следуют из построения оператора A . □

Условие 3.1.1. Будем говорить, что оператор $M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$ удовлетворяет условию 3.1.1, если $\exists C^M > 0$, и $\exists p \geq 2$, такие что $\|M(u)\|_* \leq C^M \|u\|^{p-1} \forall u \in \mathfrak{U}$ и $\langle M(u), u \rangle \geq 0$.

Лемма 3.1.2. *Оператор $M \in C^2(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$, s -монотонен, однороден порядка k , удовлетворяет условиям 1.3.1 и 3.1.1, кроме того производная Фреше оператора M симметрична.*

Доказательство. Сначала покажем действие оператора $M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$. В силу неравенства Гельдера

$$|\langle M(u), v \rangle| \leq \int_{\Omega} |u|^{p-1} |v| \, dx \leq \|u\|_{L_2(\Omega)}^{p-1} \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^{p-1} \|v\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Отсюда

$$\|M(u)\|_* = \sup_{\|v\|=1} |\langle M(u), v \rangle| \leq C \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^{p-1},$$

т. е., действительно, оператор $M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$. Кроме того, из

$$\langle M(u), u \rangle = \int_{\Omega} |u|^p dx \geq 0$$

сразу же вытекает, что оператор M удовлетворяет условию 3.1.1. Очевидно, также оператор M является однородным порядка $p - 1$.

Далее, построим производную Фреше M'_u оператора M . В точке $u \in \mathfrak{U}$ она определяется формулой

$$\langle M'_u v, w \rangle = (p - 1) \int_{\Omega} |u|^{p-2} v w dx, u, v, w \in \mathfrak{U}$$

и является симметричной. В силу неравенства Гельдера

$$|\langle M'_u v, w \rangle| = (p - 1) \int_{\Omega} |u|^{p-2} |v w| dx \leq (p - 1) C \|u\|_{W_2(\Omega)}^{p-2} \|v\|_{W_2(\Omega)} \|w\|_{W_2(\Omega)},$$

оператор $M'_u \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$ при любых $u \in \mathfrak{U}$. Докажем s -монотонность оператора M :

$$\langle M'_u v, v \rangle = (p - 1) \int_{\Omega} |u|^{p-2} v^2 dx > 0, u, v \in \mathfrak{U} \setminus \{0\}.$$

Наконец, покажем включение $M \in C^2(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$:

$$|\langle M''_u(v, w), z \rangle| \leq (p - 1)(p - 2) C \alpha \|u\|_{W_2(\Omega)}^{p-3} \|v\|_{W_2(\Omega)} \|w\|_{W_2(\Omega)} \|z\|_{W_2(\Omega)}.$$

Покажем, что оператор M удовлетворяет условию 1.3.1.

Существует непрерывная и неотрицательная функция $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, такая что для любых $u, v \in \mathbb{R}$:

$$\left| |u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v \right| \leq g(u, v) |u - v|. \quad (3.1.6)$$

Легко показать, что данным условиям удовлетворяет, например, функция

$$g(u, v) = \begin{cases} \frac{||u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v|}{|u - v|}, & u \neq v; \\ (p - 2) |u|^{p-1}, & u = v. \end{cases}$$

Из (3.1.6) следует, что для вещественнозначных функций $u = u(x, s)$, $v = v(x, s) \in \mathfrak{U}$ п.в. выполняется:

$$\left| |u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v \right| \leq f(x, s)|u - v|, \quad (3.1.7)$$

где $f(x, s) = g(u(x, s), v(x, s))$. Из (3.1.7) вытекает

$$\sup_{\|w\|=1} \int_{\Omega} \left| |u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v \right| |w| dx \leq \sup_{\|w\|=1} \int_{\Omega} f(x, s)|u - v| |w| dx. \quad (3.1.8)$$

Рассмотрим левую часть (3.1.8):

$$\begin{aligned} \sup_{\|w\|=1} \int_{\Omega} \left| |u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v \right| |w| dx &\geq \sup_{\|w\|=1} \left| \int_{\Omega} |u|^{p-2}u w dx - \int_{\Omega} |v|^{p-2}v w dx \right| = \\ &= \sup_{\|w\|=1} | \langle M(u) - M(v), w \rangle | = \|M(u) - M(v)\|_*. \end{aligned}$$

Рассмотрим правую часть (3.1.8):

$$\begin{aligned} \sup_{\|w\|=1} \int_{\Omega} f(x, s)|u - v| |w| dx &= \sup_{\|w\|=1} \langle f(x, s)|u - v|, |w| \rangle \leq \\ &\leq \sup_{\|w\|=1} \|f(x, s)|u - v|\|_{L_2(\Omega)} \|w\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq A \|f(x, s)|u - v|\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|f(x, s)\|_{L_2(\Omega)} \|u - v\|_{L_2(\Omega)} \leq F(s) \|u - v\|_{\dot{W}_2(\Omega)}^0. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\|M(u) - M(v)\|_* \leq F(s) \|u - v\|.$$

□

Таким образом, мы провели редукцию задачи (3.1.3)–(3.1.5) к задаче Коши (0.0.6) для квазилинейного уравнения соболевского типа (0.0.7).

3.2. Схема Розенброка для дифференциально-алгебраической системы

Рассмотрим дифференциально-алгебраическую систему [42]:

$$\begin{cases} w_t + w + |u|^{p-2} u + |u|^{q-2} u, \\ 0 = w - u_{xx} + |u|^{p-2} u, \\ u(x, 0) = u_0(x), u(0, t) = u(l, t) = 0, w(x, 0) = u_{0xx} + |u_0|^{p-2} u_0. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Для задачи (3.2.1) применим метод прямых.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} W = -W + |U|^{p-2} U + |U|^{q-2} U, \\ 0 = W - MU + |U|^{p-2} U. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Здесь:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix},$$

$$|U|^{p-2} = \begin{pmatrix} |u_1|^{p-2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & |u_2|^{p-2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & |u_n|^{p-2} \end{pmatrix},$$

$$M = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

где h – шаг пространственной сетки.

Введем пространство сеток C_{w_h} с нормой $\|U\|_{C_{w_h}} = \max_{1 \leq i \leq N-1} |u_i|$.

Лемма 3.2.1. [42] *Сеточный оператор $M - (p-1)|U|^{p-2}$ имеет равномерно (по шагу сетки) ограниченный обратный оператор, действующий из C_{w_h} в*

C_{w_h} , причем норма обратного оператора ограничена константой, не зависящей ни от шага сетки, ни от значений u_k в узлах сетки.

Систему (3.2.2) будем решать с помощью одностадийного метода Розенброка с коэффициентом $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

В соответствии с данным методом на следующем временном шаге имеем

$$\begin{cases} \hat{W} = W + \operatorname{Re} \vec{k}, \\ \hat{U} = U + \operatorname{Re} \vec{l}, \end{cases} \quad (3.2.3)$$

где векторы \vec{k}, \vec{l} определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \vec{k} = -\alpha\tau\vec{k} + \alpha\tau((p-1)|U|^{p-2} + (q-1)|U|^{q-2})\vec{l} - \tau W + \tau|U|^{p-2}U + \tau|U|^{q-2}U, \\ -\alpha\vec{k} + \alpha(M - (p-1)|U|^{p-2})\vec{l} = W - MU + |U|^{p-2}U, \end{cases}$$

τ – шаг временной сетки.

Определение 3.2.1. Пусть $u(x, t)$ и $w(x, t)$ классическое решение задачи (3.2.2). Будем говорить, что точка (t, x, w, u) принадлежит δ -окрестности классического решения, если $|w - w(x, t)| < \delta$ и $|u - u(x, t)| < \delta$.

Лемма 3.2.2. [42] Пусть сеточные функции W и U заданы на равномерной сетке w_h и при некотором t их значения в точках x_k принадлежат δ -окрестности классического решения (w, u) , тогда

$$\left\| \left(M - (p-1)|U|^{p-2} \right)^{-1} \left(W - \left(MU - |U|^{p-2}U \right) \right) \right\| = O(\delta + h^2).$$

Лемма 3.2.3. [42] Если мы для начальных данных (W_0, U_0) и (\bar{W}_0, \bar{U}_0) сделаем N шагов ($N\tau \leq \text{const}$) и предположим, что на каждом шаге (W_k, U_k) и (\bar{W}_k, \bar{U}_k) $1 \leq k \leq N$ остаются в описанной выше окрестности, то

$$\|W_N - \bar{W}_N\|_{C_w} \leq C \left(\|W_0 - \bar{W}_0\|_{C_w} + \tau \|U_0 - \bar{U}_0\|_{C_w} \right),$$

$$\|U_N - \bar{U}_N\|_{C_w} \leq C \left(\|W_0 - \bar{W}_0\|_{C_w} + (\tau + q^N) \|U_0 - \bar{U}_0\|_{C_w} \right), \quad q < 1.$$

Теорема 3.2.1. [42] *Найдутся такие τ_0, h_0 , что при $0 < \tau < \tau_0, 0 < h < h_0, (N\tau \leq \text{const})$ для задачи (3.2.1) глобальная ошибка метода конечных разностей в сочетании с методом Розенброка в норме C_{w_h} удовлетворяет следующим оценкам*

$$\|\bar{W}_N - w(N\tau)\|_{C_w} \leq C(\tau^2 + h^2),$$

$$\|\bar{U}_N - u(N\tau)\|_{C_w} \leq C(\tau^2 + h^2).$$

3.3. Аналитическое исследование математической модели квазистационарного процесса

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ – ограниченная область с границей класса C^∞ . В цилиндре $\Omega \times (0, T), T \in \mathbb{R}$ рассмотрим уравнение

$$(\Delta x - \Phi(x))_t = \Phi(x) \quad (3.3.1)$$

с условиями Дирихле – Коши

$$x(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (3.3.2)$$

$$x(s, 0) = x_0(s), s \in \Omega. \quad (3.3.3)$$

Данная задача возникает при исследовании квазистационарных процессов в проводящих средах без дисперсии [19]. Искомая функция x соответствует потенциалу электрического поля. Функция $\Phi(x) \equiv |x|^{p-2}x, p > 2$ монотонно возрастающая и гладкая.

Положим $\mathfrak{H} = L_2(\Omega), \mathfrak{U} = W_2^1(\Omega)$.

Операторы A и M определим следующим образом:

$$\langle Ax, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla x \nabla v ds, \quad x, v \in \mathfrak{U},$$

$$\langle M(x), v \rangle = \int_{\Omega} |x|^{p-2} x v ds, \quad x, v \in \mathfrak{U}.$$

Определение 3.3.1. Вектор-функцию $x \in C^1((0; T); L_p(\Omega))$, удовлетворяющую (3.3.1) на $(0, T)$ при некотором $T = T(x_0)$ и условиям (3.3.2), (3.3.3), назовем классическим локальным решением задачи (3.3.2) – (3.3.1).

Теорема 3.3.1. Пусть $p > 2$ и $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любого $x_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное классическое локальное решение задачи (3.3.2) – (3.3.1).

Доказательство. В силу построения оператора $N(x)$:

$$\langle N(x)v, w \rangle = \int_{\Omega} (p-1)\alpha\lambda|x|^{p-2}vw \, ds, \quad \forall x, v, w \in \mathfrak{U},$$

и в силу лемм 3.1.1, 3.1.2 для любого $x_0 \in \mathfrak{U}$ оператор $N(x_0)$ s -монотонен

$$\langle N(x_0)'_v w, w \rangle = \int_{\Omega} (p-1)\alpha\lambda|x_0|^{p-2}w^2 \, ds > 0, \quad \forall w \in \mathfrak{U}, w \neq 0,$$

и p -коэрцитивен.

Далее, рассмотрим уравнение

$$N(x_0)v = f.$$

Существование и единственность решения этого уравнения для любого $x_0 \in \mathfrak{U}$ и любого $f \in \mathfrak{U}^*$ следует из следствия 1.1.1 в силу s -монотонности и p -коэрцитивности оператора $N(x_0)$, значит, оператор $[N(x_0)]^{-1}$ существует для любого $x_0 \in \mathfrak{U} \setminus \{0\}$. Принадлежность $[N(x_0)]^{-1}$ классу $C^1(\mathfrak{U}^* \setminus \{0\}; \mathfrak{U} \setminus \{0\})$ следует из теоремы 1.1.4 в силу s -монотонности оператора $N(x_0)$. Поэтому в силу лемм 3.1.1, 3.1.2 и теоремы 1.2.1 существует единственное локальное решение задачи (3.3.2) – (3.3.1). \square

Справедлива следующая

Теорема 3.3.2. Пусть $p > 2$, тогда для любого $x_0 \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$ и для любого $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное слабое обобщенное решение задачи (3.3.2) – (3.3.1).

Доказательство. Данный результат напрямую следует из лемм 3.1.1, 3.1.2 и теоремы 3.3.1. \square

3.4. Сходимость приближенного решения задачи Коши для модели квазистационарного процесса

Рассмотрим случай одной пространственной переменной

$$\begin{aligned} (x_{ss} - |x|^{p-2}x)_t &= |x|^{p-2}x, \\ x(0, t) &= 0, \\ x(l, t) &= 0, \\ x(s, 0) &= x_0(s), s \in (0, l). \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Проведем декомпозицию задачи (3.4.1), для этого положим $w = x_{ss} - |x|^{p-2}x$, получим эквивалентную (3.4.1) задачу

$$\begin{aligned} w_t &= -w + x_{ss}, \\ 0 &= w - x_{ss} + |x|^{p-2}x, \\ x(s, t) &= 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ x(s, 0) &= x_0(s), s \in \Omega, \\ w(s, t) &= 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ w(s, 0) &= x_{0ss}(s) - |x_0|^{p-2}x_0, s \in \Omega. \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Применим для задачи (3.4.2) метод конечных разностей.

Доказательство сходимости метода будем проводить в сеточной норме C_{w_h} . Логика доказательства аналогична логике доказательства сходимости метода в работе [42].

Перейдем к дифференциально-алгебраической системе:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}W = -W + MX, \\ 0 = W - MX + |X|^{p-2}X. \end{cases} \tag{3.4.3}$$

Полученную систему будем решать с помощью одностадийного метода Розенброка с коэффициентом $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Данный метод и его применение к

дифференциально-алгебраическим системам посредством метода ε -вложений подробно рассмотрен в [2], там же дано обоснование выбора комплексного коэффициента.

Докажем теорему о локальной ошибке.

Теорема 3.4.1. *Существуют τ_0, h_0 , что при $\forall \tau \in (0, \tau_0), \forall h \in (0, h_0)$, для задачи (3.4.2) локальная ошибка метода удовлетворяет оценкам:*

$$\begin{aligned} \left\| \hat{W} - w(t + \tau) \right\|_{C_{w_h}} &\leq C\tau(\tau^2 + h^2), \\ \left\| \hat{X} - x(t + \tau) \right\|_{C_{w_h}} &\leq C(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Доказательство. Под X, W, W_t, X_t будем понимать значения точного решения задачи (3.4.2), взятые в узлах пространственной сетки в момент времени t_n .

В соответствии с методом Розенброка на следующем временном шаге имеем

$$\begin{cases} \hat{W} = W + \text{Re}\vec{k}, \\ \hat{X} = X + \text{Re}\vec{l}, \end{cases} \quad (3.4.4)$$

где векторы \vec{k}, \vec{l} определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \vec{k} + \alpha\tau\vec{k} - \alpha\tau M\vec{l} = \tau(-W + MX), \\ -\alpha\vec{k} + \alpha(M - (p-1)|X|^{p-2})\vec{l} = W - MX + |X|^{p-2}X, \end{cases}$$

τ – шаг временной сетки.

Положим:

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \tau W_t + \alpha\tau^2(-W_t + MX_t) + \vec{k}_1, \\ \vec{l} &= \tau X_t + \vec{l}_1. \end{aligned}$$

Учитывая порядок локальной ошибки дифференциальной и алгебраических компонент метода ε -вложений [2] приходим для векторов \vec{k}_1, \vec{l}_1 к системе

$$\begin{aligned} \tau W_t + \alpha\tau^2(-W_t + MX_t) + \vec{k}_1 + \alpha\tau(\tau W_t + \alpha\tau^2(-W_t + MX_t) + \vec{k}_1) - \\ - \alpha\tau M(\tau X_t + \vec{l}_1) &= \tau(-W + MX), \\ -\alpha\tau(\tau W_t + \alpha\tau^2(-W_t + MX_t) + \vec{k}_1) + \alpha\tau(M - (p-1)|X|^{p-2})(\tau X_t + \vec{l}_1) &= \\ = \tau(W - MX + |X|^{p-2}X). \end{aligned}$$

Далее, учитывая

$$\begin{aligned} W_t &= -W + MX + O(h^2), \\ (M - (p-1)|X|^{p-2})X_t &= W_t + O(h^2), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 + \alpha\tau\vec{k}_1 - \alpha\tau M\vec{l}_1 &= O(\tau^3), \\ -\alpha(\vec{k}_1 - (M - (p-1)|X|^{p-2})\vec{l}_1) &= O(h^2 + \tau^2). \end{aligned}$$

Обозначим $(M - (p-1)|X|^{p-2})^{-1} = A$. Оператор A , согласно лемме 3.2.1, равномерно ограничен по норме C_{wh} . Тогда

$$\vec{k}_1 + \alpha\tau\vec{k}_1 - \alpha\tau MA\vec{k}_1 = O(\tau h^2 + \tau^3).$$

Оператор $S\vec{k}_1 = -\alpha\vec{k}_1 + \alpha MA\vec{k}_1$ равномерно ограничен. Значит, найдется такое τ_0 , что оператор $E + \tau S$ при $0 < \tau \leq \tau_0$ будет иметь равномерно ограниченный обратный $\vec{k}_1 = O(\tau^3 + \tau h^2)$. Следовательно, $\vec{l}_1 = O(\tau^2 + h^2)$, и окончательно

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \tau W_t + \alpha\tau^2(-W_t + MX_t) + O(\tau^3 + \tau h^2), \\ \vec{l} &= \tau X_t + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Подставляя (3.4.5) в (3.4.3) и учитывая

$$W(t + \tau) = W(t) + \tau W_t + \frac{\tau^2}{2} W_{tt} + O(\tau^3),$$

$$X(t + \tau) = X(t) + \tau X_t + O(\tau^2),$$

$$W_{tt} = -W_t + MX_t,$$

$$\operatorname{Re}\alpha = \frac{1}{2},$$

получаем утверждение теоремы. \square

Определение 3.4.1. Пусть $x(s, t)$ и $w(s, t)$ классическое решение задачи (3.4.3). Будем говорить, что точка $(t, s, \tilde{w}, \tilde{x})$ принадлежит δ -окрестности классического решения, если $|\tilde{w} - w(s, t)| < \delta$ и $|\tilde{x} - x(s, t)| < \delta$.

Пусть (W_0, X_0) и $(\tilde{W}_0, \tilde{X}_0)$ – две пары начальных данных, а (W_1, X_1) и $(\tilde{W}_1, \tilde{X}_1)$ – значения на следующем временном слое, полученном по методу (3.4.4) методом ε -вложений со схемой Розенброка с комплексным коэффициентом. Справедлива

Лемма 3.4.1. Пусть $p > 2$. Найдутся такие τ_0, h_0 что при $0 < \tau < \tau_0$, $0 < h < h_0$ справедливы следующие оценки

$$\|W_1 - \tilde{W}_1\|_{C_w} \leq (1 + \tau L) \|W_0 - \tilde{W}_0\|_{C_w} + \tau P \|X_0 - \tilde{X}_0\|_{C_w},$$

$$\|X_1 - \tilde{X}_1\|_{C_w} \leq Q \|W_0 - \tilde{W}_0\|_{C_w} + q \|X_0 - \tilde{X}_0\|_{C_w}.$$

Причем константы Q, P, L, q не зависят от начальных данных, а уменьшением δ и h можно добиться, чтобы выполнялось $q < 1$.

Доказательство. Вектора \vec{k}, \vec{l} определяются из системы

$$\begin{cases} \vec{k} + \alpha\tau\vec{k} - \alpha\tau M\vec{l} = \tau(-W + MX), \\ -\alpha\vec{k} + \alpha(M - (p-1)|X|^{p-2})\vec{l} = W - MX + |X|^{p-2}X. \end{cases}$$

Выражая \vec{l} из второго уравнения и подставляя в первое уравнение, получаем, что найдутся такие τ_0, h_0 , что при $0 < \tau < \tau_0$, $0 < h < h_0$ вектор \vec{k} равномерно ограничен в норме C_w , из второго уравнения следует, что \vec{l} также равномерно ограничен. Тогда из первого уравнения следует $k = O(\tau)$, подставляя во

второе, с учетом леммы 3.2.2, получаем $\vec{l} = O(\tau + \delta + h^2)$. Дифференцируя первое и второе уравнение по W , получаем

$$\left\| \frac{\partial \vec{k}}{\partial W} \right\|_{C_w} = O(\tau),$$

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial W} = \frac{1}{\alpha} (M - (p-1) |X|^{p-2})^{-1} + O(\tau),$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{l}}{\partial W} \right\|_{C_w} \leq Q.$$

Дифференцируя первое и второе уравнение по X , получаем

$$\frac{\partial \vec{k}}{\partial X} = O(\tau),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{l}}{\partial X} &= -\frac{1}{\alpha} E + (M - (p-1) |X|^{p-2})^{-1} (p-1)(p-2) |X|^{p-1} \times \\ &\times \text{sign} X (M - (p-1) |X|^{p-2})^{-1} \times (MX - |X|^{p-2} X) + O(\tau) = \\ &= -\frac{1}{\alpha} + O(\tau + \delta + h^2). \end{aligned}$$

Отметим, что для схемы Розенброка с $\alpha = \frac{1+i}{2}$, величина $(1 - \text{Re} \frac{1}{\alpha}) = 0$.

Из (3.4.3)

$$\frac{\partial W_1}{\partial W_0} = E + O(\tau), \quad \frac{\partial X_1}{\partial W_0} = O(1), \quad \frac{\partial W_1}{\partial X_0} = O(\tau),$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial X_0} = E(1 - \text{Re} \frac{1}{\alpha}) + O(\tau + \delta + h^2).$$

Отсюда получаем утверждение леммы, так как уменьшением τ, δ, h можно добиться

$$\left\| \frac{\partial X_1}{\partial X_0} \right\| \leq q < 1.$$

□

Справедлива следующая лемма о распространении ошибки.

Лемма 3.4.2. *Если для начальных данных (W_0, X_0) и (\bar{W}_0, \bar{X}_0) при $\forall k \in [1, N]$, $N\tau \leq \text{const}$, (W_k, X_k) и (\bar{W}_k, \bar{X}_k) остаются в δ -окрестности, то*

$$\|W_N - \bar{W}_N\|_{C_w} \leq C \left(\|W_0 - \bar{W}_0\|_{C_w} + \tau \|X_0 - \bar{X}_0\|_{C_w} \right),$$

$$\|X_N - \bar{X}_N\|_{C_w} \leq C \left(\|W_0 - \bar{W}_0\|_{C_w} + (\tau + q^N) \|X_0 - \bar{X}_0\|_{C_w} \right), \quad q < 1.$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 3.2.3. □

Имеет место теорема о глобальной ошибке

Теорема 3.4.2. *Существуют τ_0, h_0 , что при $\forall \tau \in (0, \tau_0)$, $\forall h \in (0, h_0)$, для задачи (3.4.2) глобальная ошибка метода удовлетворяет оценкам:*

$$\|\bar{W}_N - w(N\tau)\|_{C_w} \leq C(\tau^2 + h^2),$$

$$\|\bar{X}_N - x(N\tau)\|_{C_w} \leq C(\tau^2 + h^2).$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3.2.1. □

3.5. Алгоритм численного метода нахождения решения задачи

Коши для модели квазистационарного процесса.

Описание программы для ЭВМ

На основе теоретических результатов главы III. 3.4 был разработан алгоритм метода численного решения задачи Коши для модели квазистационарного процесса

$$\begin{aligned} (x_{ss} - |x|^{p-2}x)_t &= |x|^{p-2}x, \\ x(0, t) &= 0, \\ x(l, t) &= 0, \\ x(s, 0) &= x_0(s), \quad x \in (0, l). \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Решение проводится методом Розенброка в сочетании с методом конечных разностей и ε -вложений. Аналогично пункту 3.4 проведем декомпозицию задачи (3.5.1), получим

$$\begin{aligned}
 w_t &= -w + x_{ss}, \\
 0 &= w - x_{ss} + |x|^{p-2}x, \\
 x(s, t) &= 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, \tau), \\
 x(s, 0) &= x_0(s), s \in \Omega, \\
 w(s, t) &= 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, \tau), \\
 w(s, 0) &= x_{0ss}(s) - |x_0(s)|^{p-2}x_0(s), s \in \Omega.
 \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

Применив метод конечных разностей, для заданного шага пространственной сетки h , обозначим:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix},$$

$$|X|^{p-2} = \begin{pmatrix} |x_1|^{p-2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & |x_2|^{p-2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & |x_n|^{p-2} \end{pmatrix},$$

$$M = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Используя введенные обозначения, перейдем к дифференциально-алгебраической системе:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}W = -W + MX, \\ 0 = W - MX + |X|^{p-2} X. \end{cases} \quad (3.5.3)$$

Полученную систему будем решать с помощью одностадийного метода Розенброка с коэффициентом $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

В соответствии с методом Розенброка на следующем временном шаге имеем

$$\begin{cases} \hat{W} = W + \text{Re } \vec{k}, \\ \hat{X} = X + \text{Re } \vec{l}, \end{cases} \quad (3.5.4)$$

где векторы \vec{k}, \vec{l} определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \vec{k} + \alpha\tau\vec{k} - \alpha\tau M\vec{l} = \tau(-W + MX), \\ -\alpha\vec{k} + \alpha(M - (p-1)|U|^{p-2})\vec{l} = W - MX + |X|^{p-2} X, \end{cases}$$

τ – шаг временной сетки.

Таким образом, метод нахождения приближенного решения задачи Коши для модели квазистационарного процесса можно свести к следующим этапам.

Этап 1. Декомпозиция исходной задачи, введение дополнительной переменной.

Этап 2. Применение к полученной задаче метода конечных разностей, составление алгебро-дифференциальной системы.

Этап 3. Получение приближенного решение задачи путем применения к алгебро-дифференциальной системе одностадийного метода Розенброка в сочетании с методом ε -вложений.

Данный метод был реализован с использованием языка программирования Matlab. Выбор был обусловлен наличием в языке эффективных и удобных встроенных средств для работы со значениями, представленными в векторной и матричной форме, в том числе для решения систем линейных уравнений больших размерностей.

Написанная программа позволяет находить приближенное решение задачи Коши–Дирихле для уравнения, моделирующего квазистационарный процесс в проводящей среде без дисперсии с учетом релаксации, а также выводит на экран график приближенного решения.

Программа может быть интересна специалистам в области электродинамики и электротехники.

На вход программе подаются длина отрезка, границы рассматриваемого временного отрезка на котором ищется решение, и количество элементов в разбиении этих отрезков, начальное условие $x_0(s)$. На выходе программа выдает приближенное решение и строит его график.

Схема алгоритма программы приведена на рис. 3.5.1.

Опишем алгоритм подробнее. Каждому блоку алгоритма соответствует один шаг.

Шаг 1. Вводятся длина отрезка, границы рассматриваемого временного отрезка, на котором ищется решение, и количество элементов в разбиении этих отрезков, начальное условие $x_0(s)$

Шаг 2. На основе начальных условий инициализируются матрицы (X, W, E, M) , используемые для вычислений.

Шаг 3. Последовательно проводятся вычисления для каждого временного слоя (шаги 4-7).

Шаг 4. Для каждого узла пространственной сетки и для каждой переменной вычисляется соответствующий элемент правой части СЛАУ.

Шаг 5. Для каждой пары переменных и узлов пространственной сетки вычисляется соответствующий элемент матрицы СЛАУ.

Шаг 6. Находится решение полученной СЛАУ.

Шаг 7. Вычисляются текущие значения переменных в узлах сетки.

Шаг 8. Составляется решение и выводится на экран в виде графика и в виде множества точек.

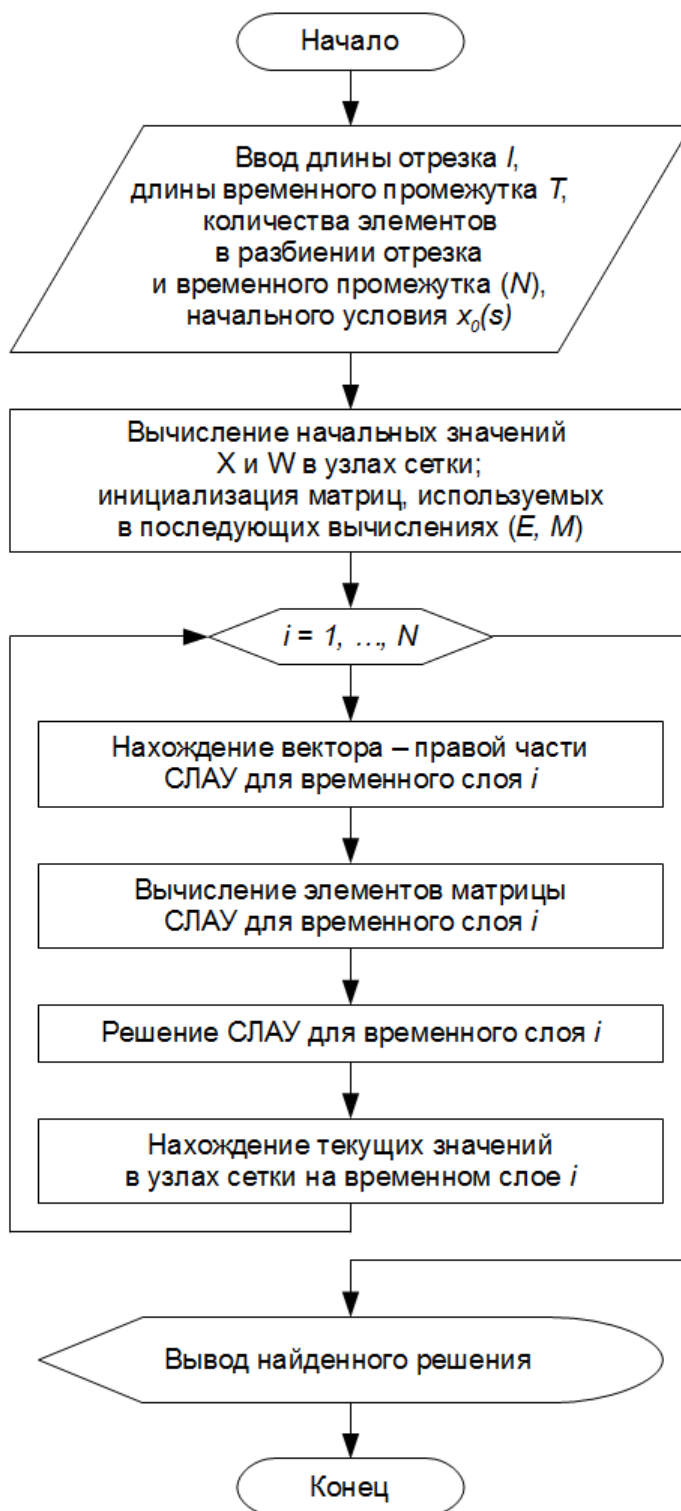


Рис. 3.5.1. Обобщенная схема алгоритма работы программы

На основе алгоритма метода, описанного в 1.5, также был разработан алгоритм программы для численного решения задачи Коши для модели квазистационарного процесса. Описание программы аналогично приведенному в пп. 2.4.

3.6. Вычислительные эксперименты для математической модели квазистационарного процесса

Проведем вычислительные эксперименты, иллюстрирующие работу программ, описанных в п.п. 3.5.

Пример 3.6.1. *Рассмотрим задачу Дирихле – Коши*

$$x(0, t) = x(\pi, t) = 0, t \in (0, 5), \quad (3.6.1)$$

$$x(s, 0) = \frac{0.9 \sin(s) + 0.3 \sin(2s)}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, s \in (0, \pi), \quad (3.6.2)$$

для уравнения, моделирующего квазистационарный процесс с учетом релаксации

$$(\Delta x - |x|^2 x)_t = |x|^2 x. \quad (3.6.3)$$

Для задачи (3.6.1) – (3.6.3) вычисления будем проводить с помощью проекционного метода, описанного в пункте 1.4. Искомую функцию мы представляем в виде суммы

$$x(s, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^m x_k(t) \sin(ks)$$

с различным количеством членов: от 2 до 6. Приведем графики полученных решений (в момент времени $t = 5$) для всех случаев на рисунке 3.6.1. А также приведем графики решения, полученного с использованием шести членов в приближении, в разные моменты времени на рисунке 3.6.2.

На рисунке 3.6.1 мы видим, что с увеличением числа слагаемых в приближении найденные решения приближаются к некоторому общему пределу

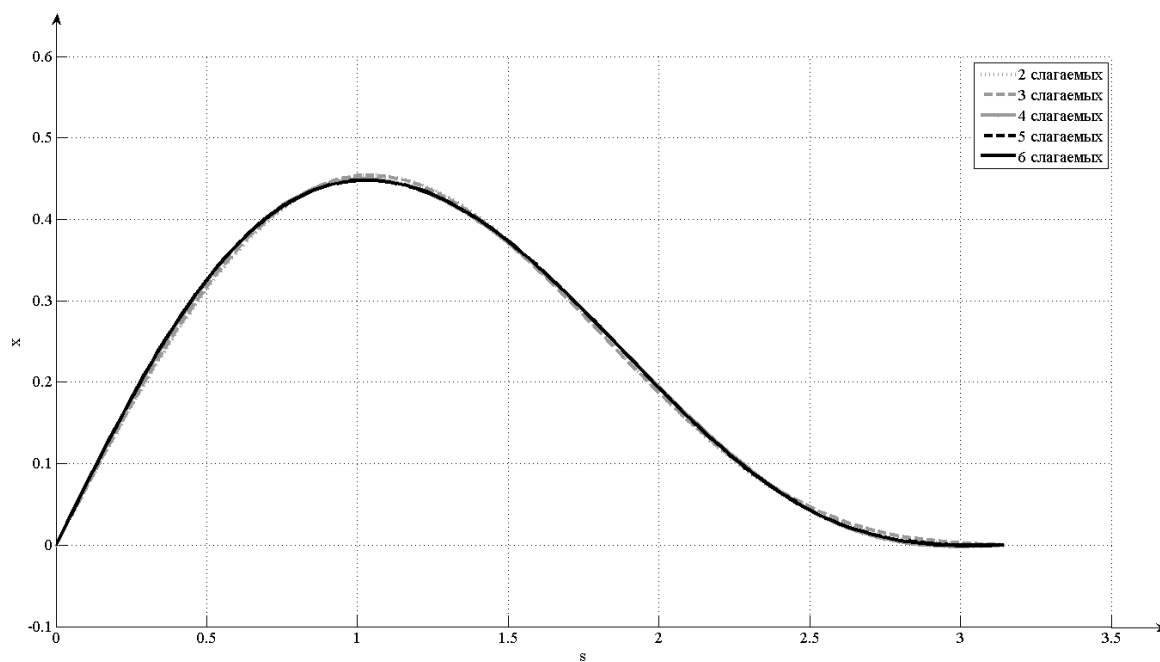


Рис. 3.6.1. Графики приближенных решений

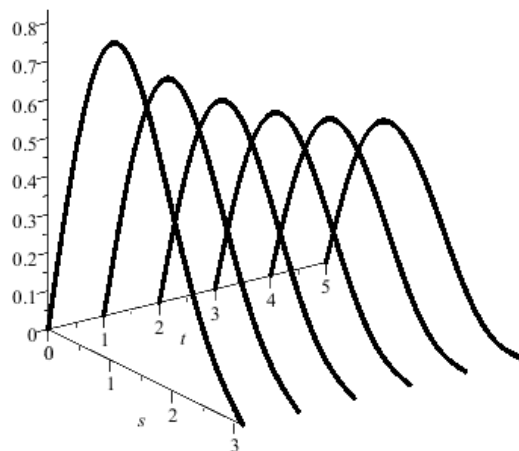


Рис. 3.6.2. Временная динамика решения

и сближаются между собой. Найдем вычислительную погрешность решений по формуле:

$$\delta_i^G = \max_{s \in \Omega} |x_{i-1}^G - x_i^G|,$$

где x_i^G - численное решение, полученное проекционным методом с числом слагаемых i . Приведем найденные значения в таблице 3.6.1.

Таблица 3.5.1

i	3	4	5	6
δ_i^G	0.0039	0.0075	0.0021	0.0004

Заметим, что значения δ_i^G в целом уменьшаются с ростом i . Минимальное значение из полученных имеет величину менее 0.0004. Таким образом, можно утверждать, что найденные приближенные решения достаточно близки к точному.

Пример 3.6.2. *Рассмотрим задачу Дирихле – Коши*

$$x(1, \phi, t) = 0, \phi \in [0; 2\pi) t \in (0, 10), \quad (3.6.4)$$

$$x(r, \phi, 0) = \cos\left(\frac{r\pi}{2}\right), r \in [0, 1), \phi \in [0; 2\pi), \quad (3.6.5)$$

для уравнения, моделирующего квазистационарный процесс с учетом релаксации

$$\left(\frac{1}{r}(r(x(r, t))_r)_r\right)_t - (x^3(r, t))_t = x^3(r, t), . \quad (3.6.6)$$

Для задачи (3.6.4) – (3.6.6) найдем приближенные решения с использованием метода, описанного в пункте 1.4. Решение $x(r, t)$ будем искать в виде суммы

$$x_m(r, t) = \sum_{i=1}^m c_{mi}(t) \frac{J_0(\mu_0^i r)}{B_i},$$

где $B_i = \frac{1}{2} J_1^2(\mu_0^i)$ – норма функции $J_0(\mu_0^i r)$ с весом r в $L_2(\Omega)$, J_i – функция Бесселя i -го порядка, μ_0^i – i -ый нуль функции J_0 . Вычисления будем

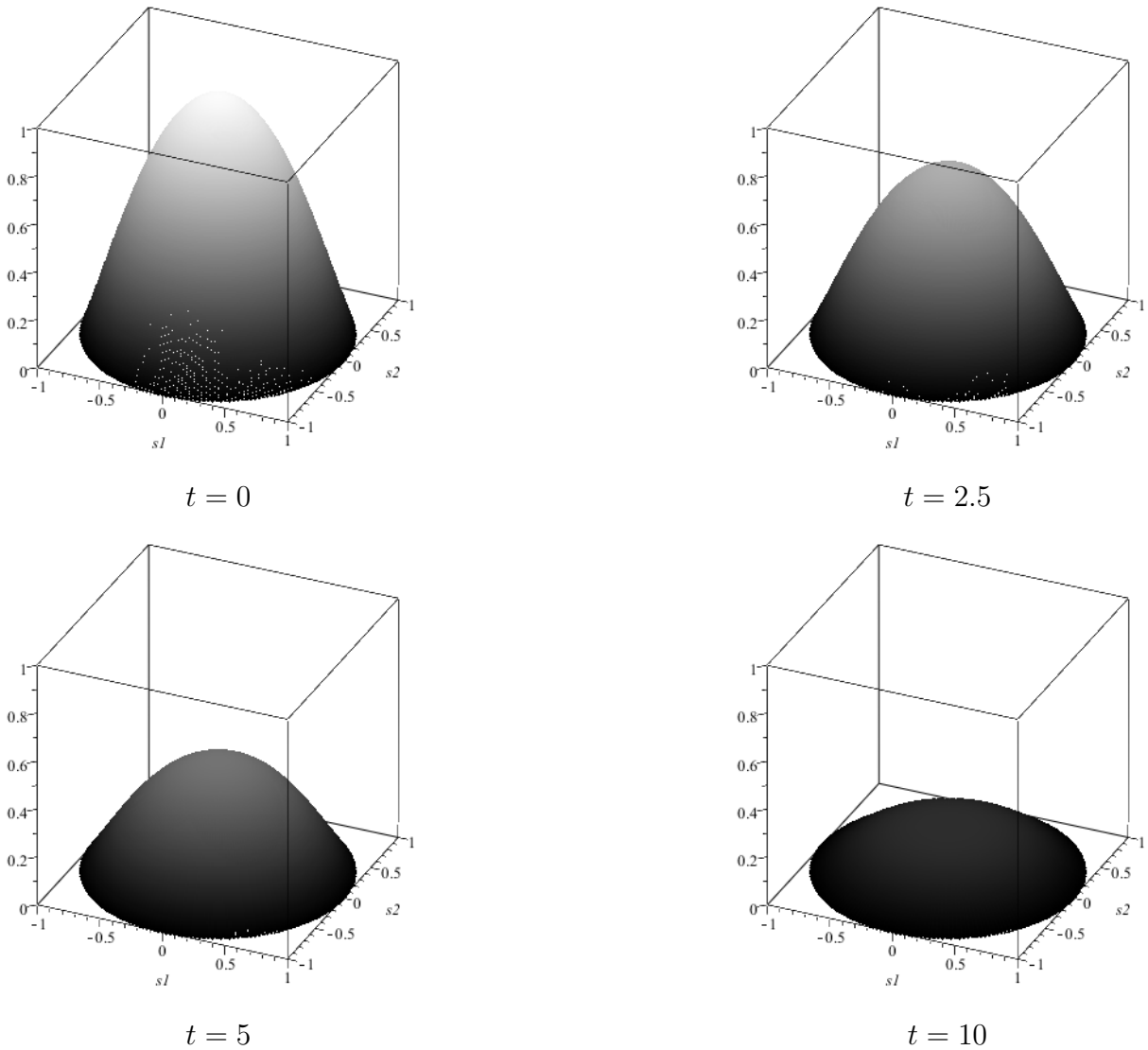


Рис. 3.6.3. Потенциал электрического поля в разные моменты времени

проводить с 2 членами в приближенном представлении искомой функции. Приведем графики решения в разные моменты времени на рисунке 3.6.3.

Пример 3.6.3. Рассмотрим задачу Коши – Дирихле

$$x(0, t) = x(\pi, t) = 0, t \in (0, 5), \quad (3.6.7)$$

$$x(s, 0) = s \sin(s), s \in (0, \pi), \quad (3.6.8)$$

для уравнения, моделирующего квазистационарный процесс с учетом релаксации

$$(\Delta x - |x|^2 x)_t = |x|^2 x. \quad (3.6.9)$$

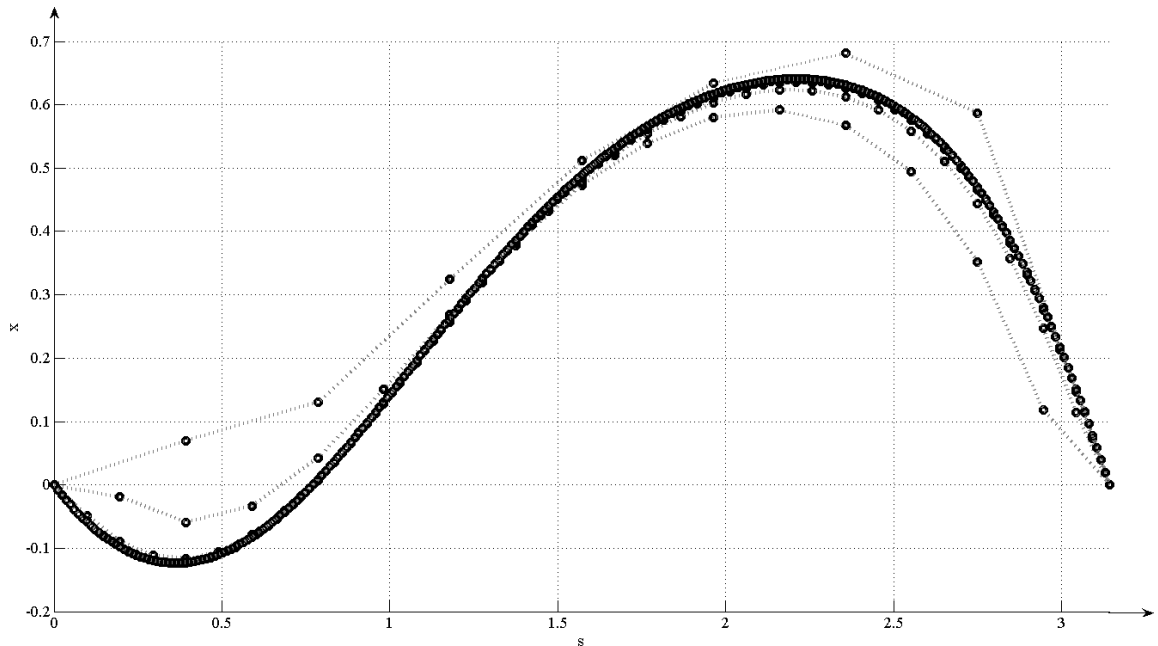


Рис. 3.6.4. Графики приближенных решений

Для задачи (3.6.7) – (3.6.9) найдем приближенные решения с использованием метода, описанного в пункте 3.4. Вычисления будем проводить с последовательным сгущением сетки (как пространственной, так и временной) в 2 раза, с шагом $\frac{\pi}{8}$ и $\frac{5}{8}$, $\frac{\pi}{16}$ и $\frac{5}{16}$, $\frac{\pi}{32}$ и $\frac{5}{32}$, $\frac{\pi}{64}$ и $\frac{5}{64}$, $\frac{\pi}{128}$ и $\frac{5}{128}$, $\frac{\pi}{256}$ и $\frac{5}{256}$. Приведем графики полученных решений (в момент времени $t = 5$) для всех случаев.

На рисунке 3.6.4 мы видим, что с уменьшением шага сетки найденные решения приближаются к некоторому общему пределу и сближаются между собой. Найдем вычислительную погрешность решений по формуле:

$$\delta_i^R = \max_{s \in \Omega} |x_{i-1}^R - x_i^R|,$$

где x_i^R - численное решение, полученное на сетке с шагом $\frac{5}{2^{2+i}}$ и $\frac{\pi}{2^{2+i}}$. Приведем найденные значения в таблице 3.6.2.

Таблица 3.6.2

i	3	4	5	6	7
δ_i^R	0.2347	0.1282	0.0321	0.0039	0.0017

Заметим, что значения δ_i^R быстро уменьшаются с ростом i . Минимальное значение из полученных имеет величину менее 0.0017. Таким образом, можно утверждать, что найденные приближенные решения достаточно близки к точному.

3.7. Сравнительный анализ результатов вычислений

Рассмотрим результаты применения описанных ранее в пунктах 1.5 и 3.4 численных методов к задаче Дирихле – Коши

$$x(0, t) = x(\pi, t) = 0, t \in (0, 5), \quad (3.7.1)$$

$$x(s, 0) = \frac{1}{190}(s^5 - 10s^3 + 30s)(\pi^2 - s^2), s \in (0, \pi), \quad (3.7.2)$$

для уравнения, моделирующего квазистационарный процесс с учетом релаксации

$$(\Delta x - |x|^2 x)_t = |x|^2 x. \quad (3.7.3)$$

Вычисления с использованием проекционного метода проводились с различным количеством членов в приближении искомой функции: от 2 до 6. Вычисления по методу на основе метода конечных разностей проводились с последовательным сгущением сетки (как пространственной, так и временной) в 2 раза, с шагом $\frac{\pi}{8}$ и $\frac{5}{8}$, $\frac{\pi}{16}$ и $\frac{5}{16}$, $\frac{\pi}{32}$ и $\frac{5}{32}$, $\frac{\pi}{64}$ и $\frac{5}{64}$, $\frac{\pi}{128}$ и $\frac{5}{128}$, $\frac{\pi}{256}$ и $\frac{5}{256}$. Приведем графики полученных решений (в момент времени $t = 5$) на рисунках 3.7.1 – 3.7.5.

На рисунках 3.7.1 – 3.7.5 мы видим, что с увеличением количества членов в приближении и уменьшением шага сетки найденные решения приближаются к некоторому общему пределу. Кроме того, решения, полученные одним и тем же методом, сближаются между собой. Найдем вычислительную погрешность решений по формулам:

$$\delta_i^G = \max_{s \in \Omega} |x_{i-1}^G - x_i^G|,$$

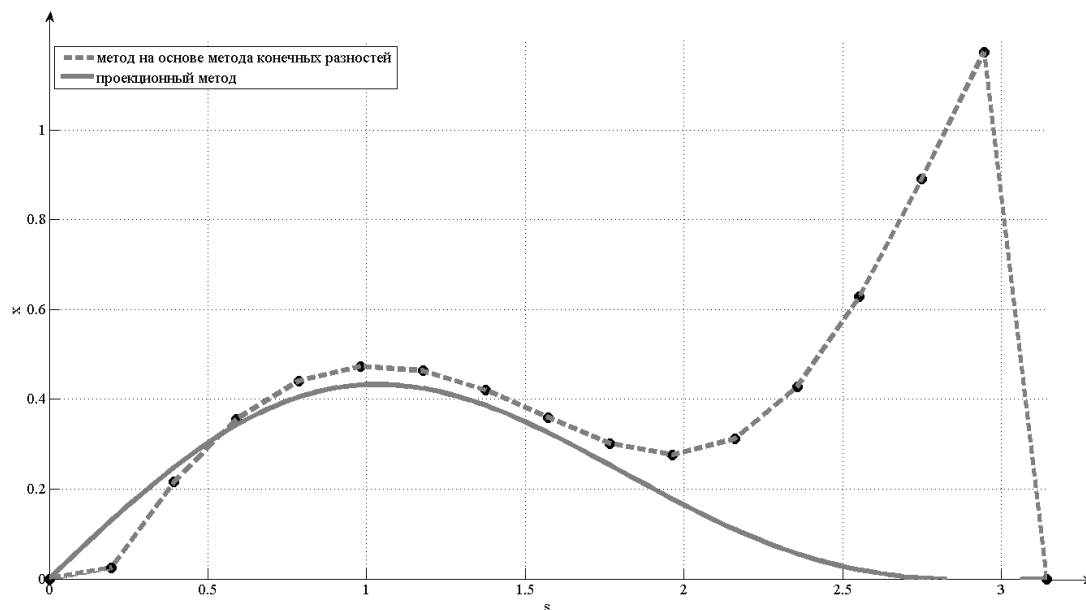


Рис. 3.7.1. Решения, полученные проекционным методом (2 слагаемых) и методом на основе метода конечных разностей (шаг $\frac{\pi}{16}$ и $\frac{5}{16}$)

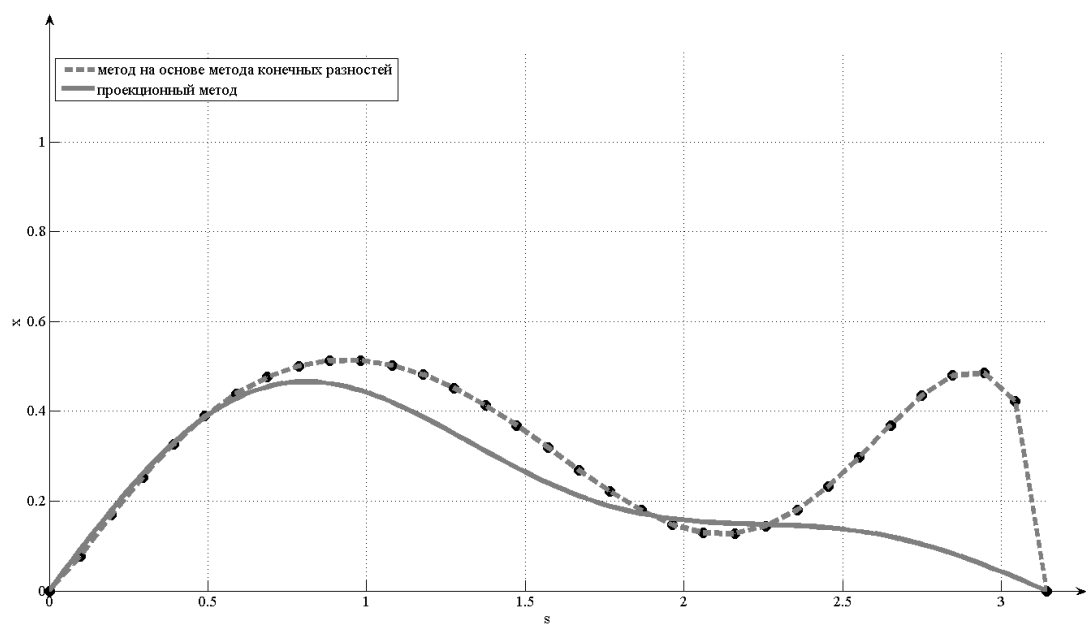


Рис. 3.7.2. Решения, полученные проекционным методом (3 слагаемых) и методом на основе метода конечных разностей (шаг $\frac{\pi}{32}$ и $\frac{5}{32}$)

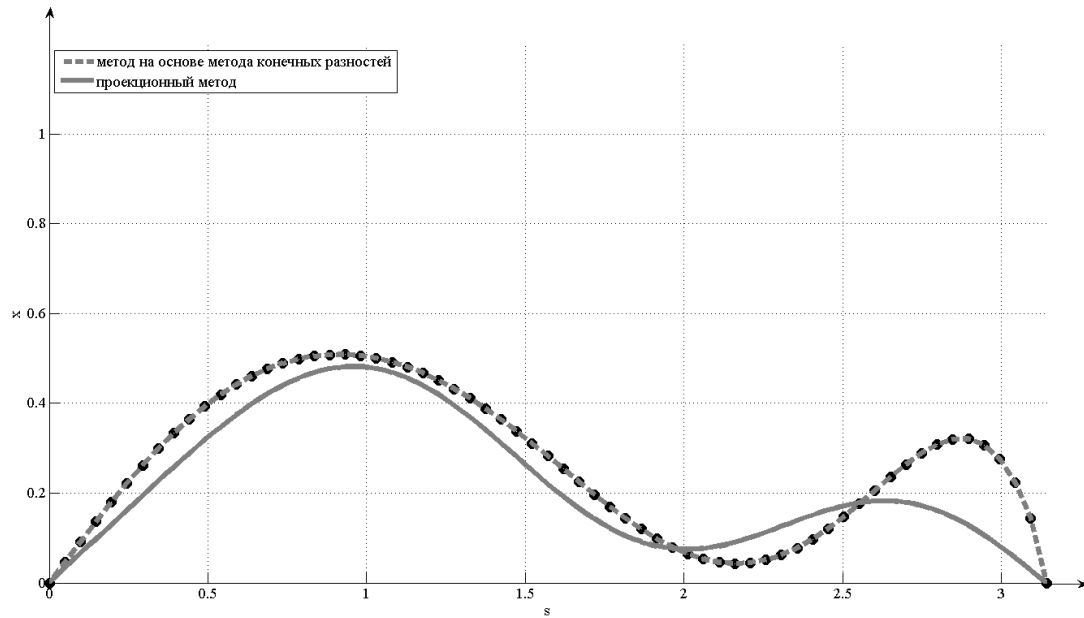


Рис. 3.7.3. Решения, полученные проекционным методом (4 слагаемых) и методом на основе метода конечных разностей (шаг $\frac{\pi}{64}$ и $\frac{5}{64}$)

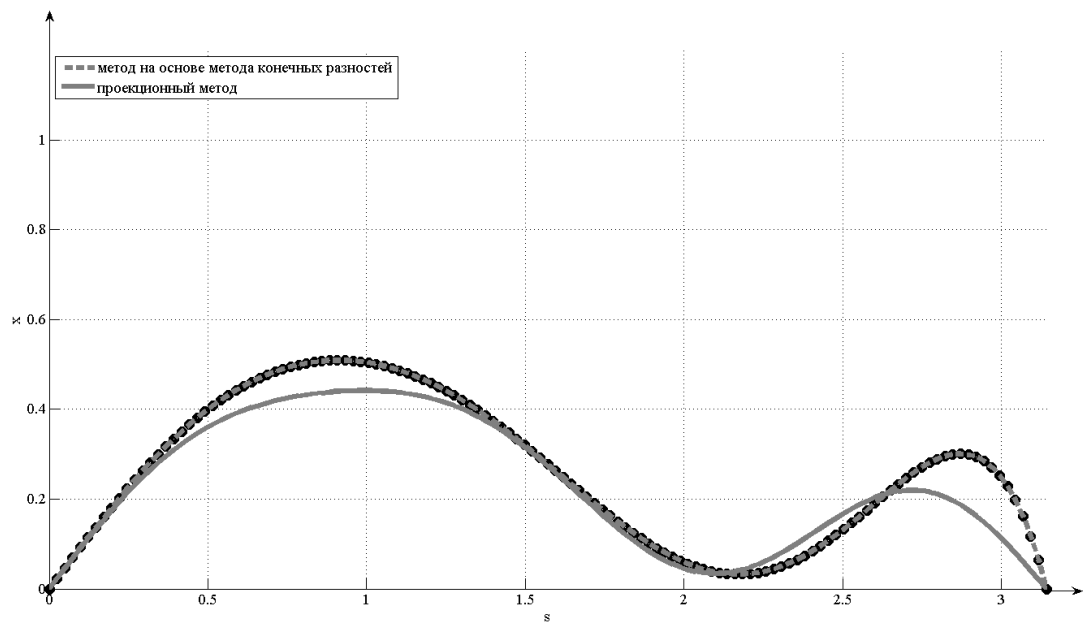


Рис. 3.7.4. Решения, полученные проекционным методом (5 слагаемых) и методом на основе метода конечных разностей (шаг $\frac{\pi}{128}$ и $\frac{5}{128}$)

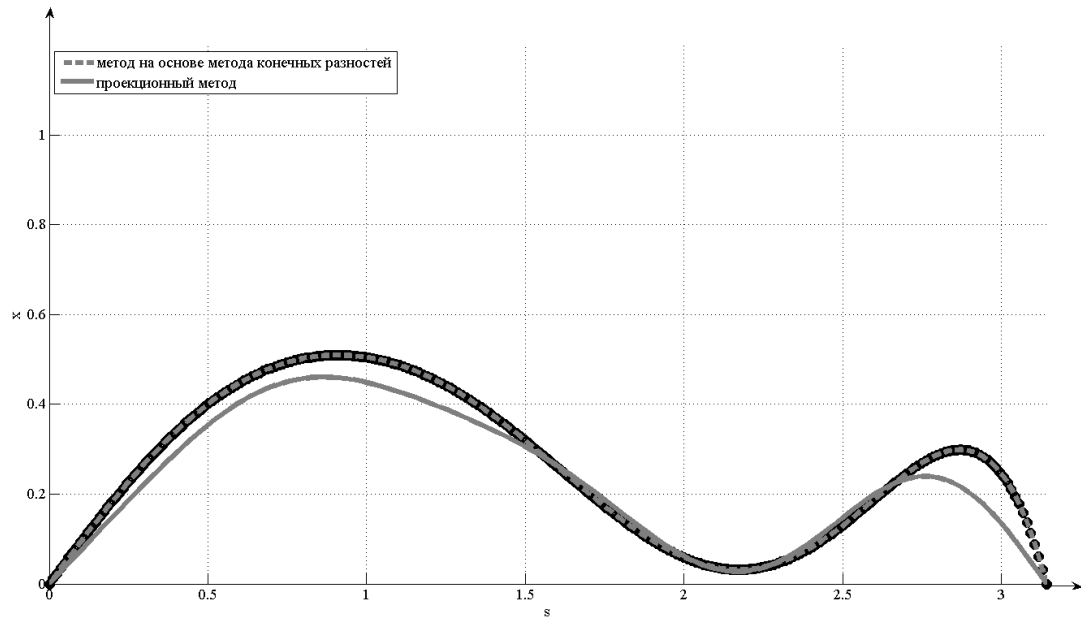


Рис. 3.7.5. Решения, полученные проекционным методом (6 слагаемых) и методом на основе метода конечных разностей (шаг $\frac{\pi}{256}$ и $\frac{5}{256}$)

$$\delta_i^R = \max_{s \in \Omega} |x_{i-1}^R - x_i^R|,$$

где x_i^G - численное решение, полученное проекционным методом с i членами в приближении искомой функции, а x_i^R - численное решение, полученное на сетке с шагом $\frac{5}{2^{2+i}}$ и $\frac{\pi}{2^{2+i}}$. Приведем найденные значения в таблицах 3.7.1 и 3.7.2.

Таблица 3.7.1

i	3	4	5	6
δ_i^G	0.1133	0.0844	0.0543	0.0310

Таблица 3.7.2

i	2	3	4	5	6
δ_i^R	0.9638	0.6886	0.1994	0.0262	0.0034

Заметим, что значения δ_i^G и δ_i^R быстро уменьшаются с ростом i . Минимальные значения из полученных имеют величину соответственно менее 0.031

и 0.0034. Таким образом, можно утверждать, что найденные приближенные решения достаточно близки к точному.

По таблицам видно, что приближенные решения, полученные с помощью метода на основе метода конечных разностей, имеют значительную погрешность при малом числе узлов, но при сгущении сетки погрешность быстро (быстрее, чем при добавлении новых слагаемых при использовании проекционного метода) уменьшается. В результате решения, полученные на наиболее густых сетках, имеют вычислительную точность на порядок выше, чем решения, полученные проекционным методом с максимальным количеством слагаемых (0.0034 и 0.031 соответственно), при сопоставимом или меньшем объеме использованных вычислительных ресурсов. Таким образом, можно сделать вывод, что для данной задачи метод на основе метода конечных разностей является предпочтительным.

Однако, данный результат не является общим. Рассмотрим, например, задачу Дирихле – Коши

$$x(0, t) = x(\pi, t) = 0, t \in (0, 5), \quad (3.7.4)$$

$$x(s, 0) = \frac{1}{2} \sin s, s \in (0, \pi), \quad (3.7.5)$$

для уравнения, моделирующего квазистационарный процесс с учетом релаксации

$$(\Delta x - |x|^2 x)_t = |x|^2 x. \quad (3.7.6)$$

Найдем приближенные решения этой задачи на тех же сетках, а так же проекционным методом с тем же числом слагаемых. Приведем графики полученных решений (в момент времени $t = 5$) для всех случаев на рисунках 3.7.6 – 3.7.10.

А так же найдем вычислительную погрешность решений по тем же формулам. Найденные значения приведены в таблицах 3.7.3 и 3.7.4.

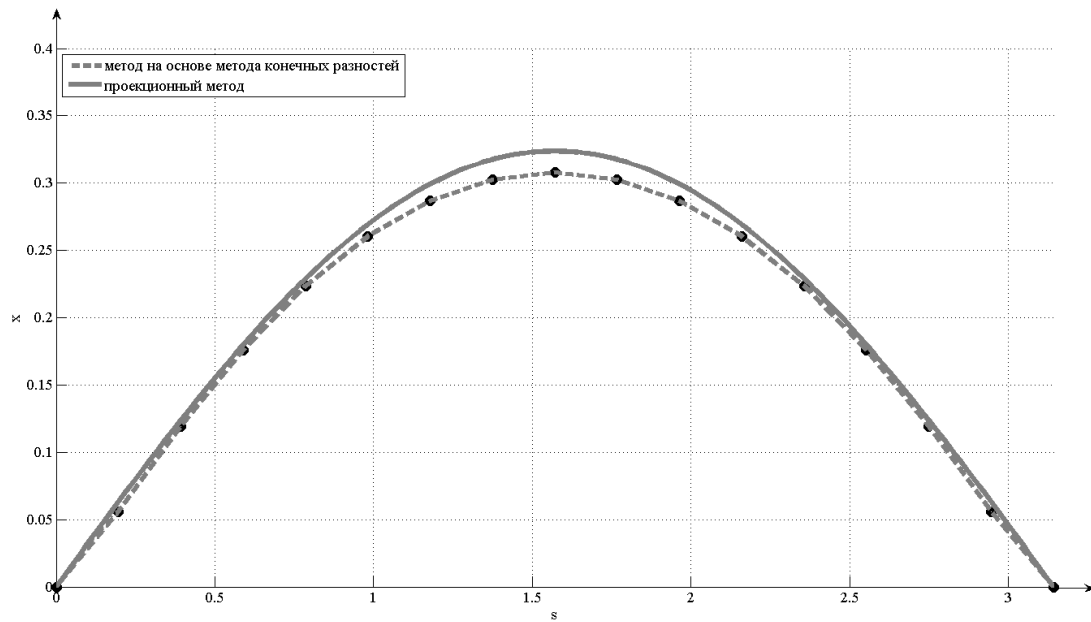


Рис. 3.7.6. Решения, полученные проекционным методом (2 слагаемых) и методом на основе метода конечных разностей (шаг $\frac{\pi}{16}$ и $\frac{5}{16}$)

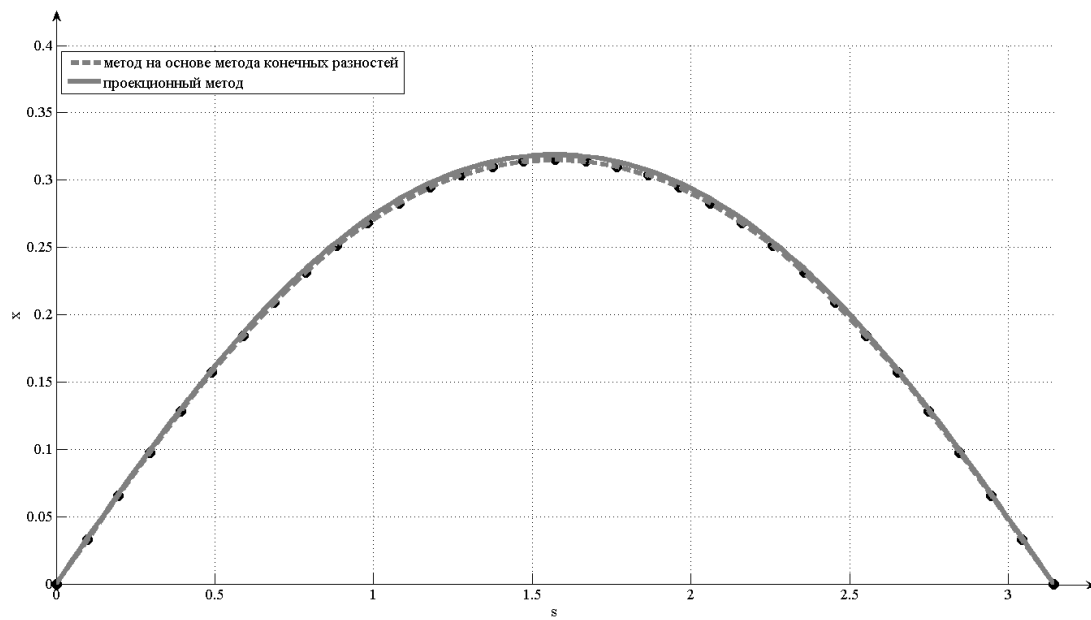


Рис. 3.7.7. Решения, полученные проекционным методом (3 слагаемых) и методом на основе метода конечных разностей (шаг $\frac{\pi}{32}$ и $\frac{5}{32}$)

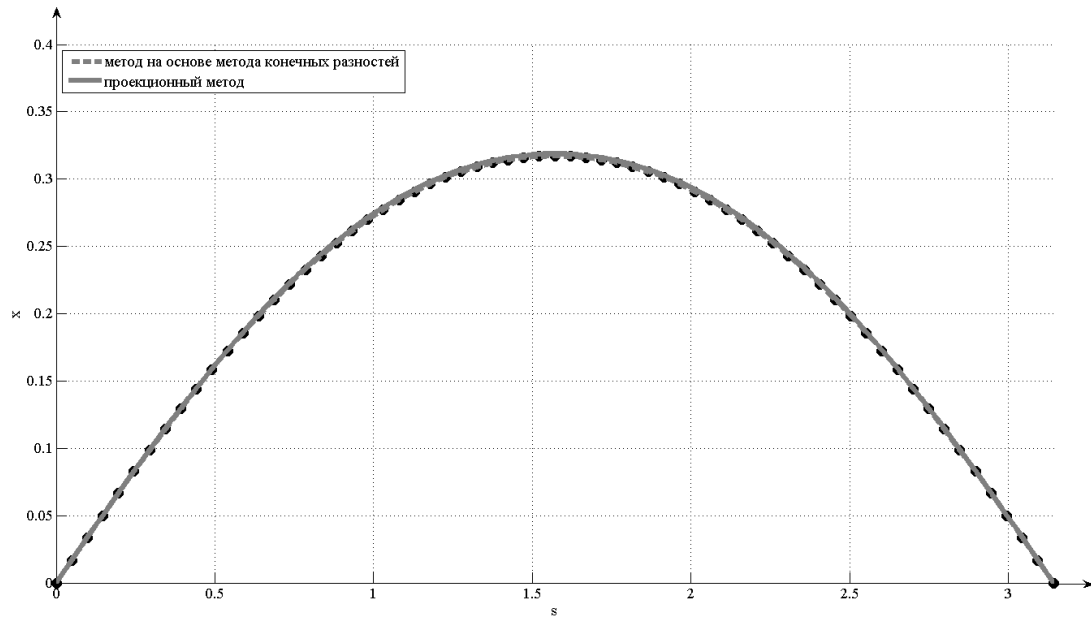


Рис. 3.7.8. Решения, полученные проекционным методом (4 слагаемых) и методом на основе метода конечных разностей (шаг $\frac{\pi}{64}$ и $\frac{5}{64}$)

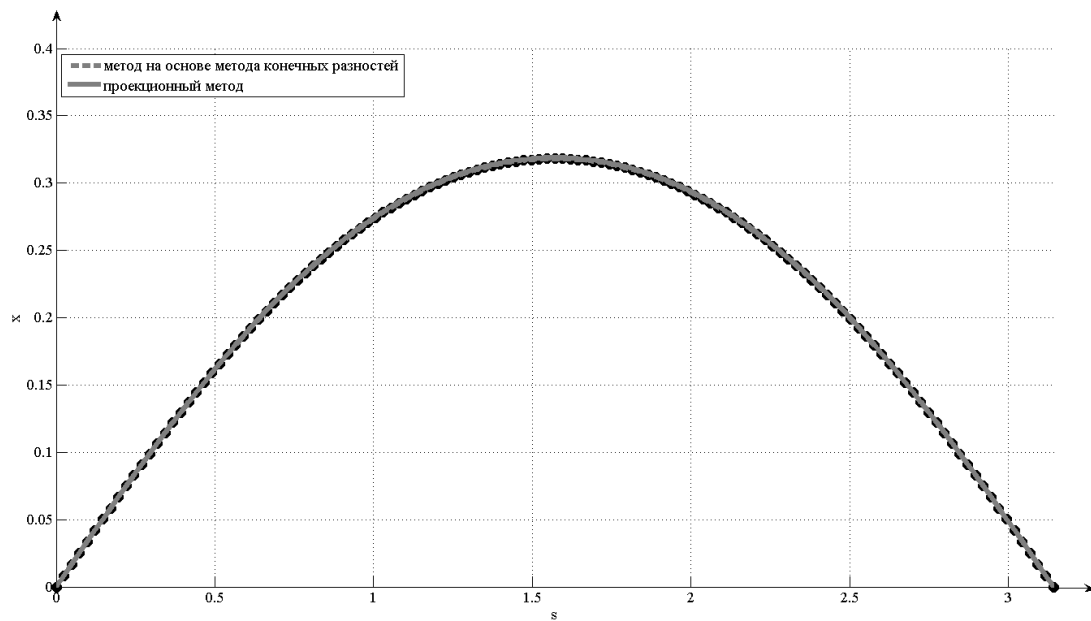


Рис. 3.7.9. Решения, полученные проекционным методом (5 слагаемых) и методом на основе метода конечных разностей (шаг $\frac{\pi}{128}$ и $\frac{5}{128}$)

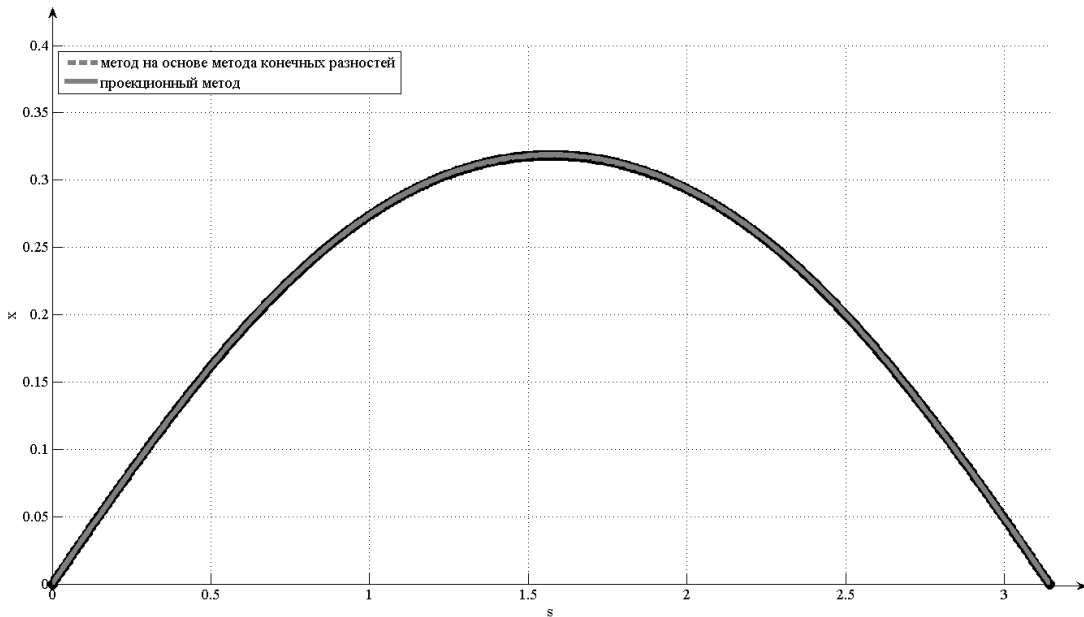


Рис. 3.7.10. Решения, полученные проекционным методом (6 слагаемых) и методом на основе метода конечных разностей (шаг $\frac{\pi}{256}$ и $\frac{5}{256}$)

Таблица 3.7.3

i	3	4	5	6
δ_i^G	0.0066	0.0000	0.0001	0.0000

Таблица 3.7.4

i	2	3	4	5	6
δ_i^R	0.0719	0.0095	0.0019	0.0008	0.0004

На графиках видно, что приближенные решения, полученные с помощью проекционного метода, сходятся к предельному значению быстрее полученных методом на основе метода конечных разностей, если использовать в качестве критерия сравнения для выбора сопоставимых δ_i^G и δ_j^R объем вычислительных ресурсов, затраченных на получение соответствующих решений, а именно время вычисления. Заметим, однако, что результат работы обусловлен в значительной степени выбором начального условия. Если разложение начального условия в ряд Фурье содержит большое количество значимо от-

личных от нуля членов (как в задаче (3.7.1) – (3.7.3)), они будут отброшены при формировании начальных условий для решаемой системы дифференциальных уравнений, что повлечет более значительную погрешность.

Замечание 3.7.1. *Характер изменения δ_i^G для $i = 4, i = 5$ можно объяснить следующим образом. Начальное условие для задачи задано в виде функции, имеющей ровно 1 член в разложении в ряд Фурье по синусам на соответствующем отрезке, и решение также может иметь близкие к нулю коэффициенты при дальнейших членах разложения. Это объясняет малую величину разности между последовательными приближениями, а небольшие колебания погрешности возле 0 могут быть вызваны, например, погрешностью машинных вычислений.*

Таким образом, на основе полученных данных можно сделать следующий вывод. Для произвольно взятого начального условия имеет смысл использовать метод на основе метода конечных разностей с достаточно большим числом узлов, но для начальных условий специального вида проекционный метод может давать гораздо лучшие результаты.

Заключение

В работе исследованы математические модели, основанные на одном классе квазилинейных уравнений соболевского типа: математическая модель неравновесной противоточной капиллярной пропитки, модель начального регулирования неравновесной противоточной капиллярной пропитки и математическая модель квазистационарного процесса в проводящей среде без дисперсии.

Основываясь на представленных теоретических результатах и данных проведенных вычислительных экспериментов, сформулируем основные **результаты, выносимые на защиту**:

В рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п. 2 паспорта специальности) получены:

1. Аналитический метод исследования математических моделей, основанных на квазилинейных уравнениях соболевского типа.
2. Достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки.
3. Достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для модели квазистационарного процесса.
4. Достаточные условия разрешимости задачи регулирования эффективной насыщенности в модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки на основе задачи стартового управления и финального наблюдения.

В рамках разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (п. 3 паспорта специальности) получены:

5. Условия сходимости проекционного метода нахождения приближенного решения начальных задач для математических моделей на основе квазилинейных уравнений соболевского типа.

6. Условия сходимости численного метода исследования математической модели квазистационарного процесса.

7. Алгоритм проекционного метода нахождения приближенного решения начальных задач для математических моделей на основе квазилинейных уравнений соболевского типа.

8. Алгоритм численного метода исследования математической модели квазистационарного процесса.

В рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов (п. 4 паспорта специальности) получены:

9. Программа для ЭВМ, реализующая алгоритм нахождения приближенного решения задачи Коши для модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки.

10. Программа для ЭВМ, реализующая алгоритм нахождения приближенного решения задачи Коши для модели квазистационарного процесса.

Таким образом, в работе решены все поставленные выше задачи и достигнута цель исследования, что позволяет говорить о соответствии диссертационной работы следующим областям исследования паспорта специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»:

1) развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п. 2);

2) разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (п. 3);

3) реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов (п. 4).

Список литературы

1. Александрян, Р.А. Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С.Л. Соболева / Р.А. Александрян // Труды Московского математического общества. – 1960. – Т. 9. – С. 455–505.
2. Альшин, А.Б. Схемы Розенброка с комплексными коэффициентами для жестких и дифференциально-алгебраических систем / А.Б. Альшин, Е.А. Альшина, Н.Н. Калиткин, А.Б. Корягина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 8. – С. 1392–1414.
3. Архипов, Д.Г. Новое уравнение для описания неупругого взаимодействия нелинейных локализованных волн в диспергирующих средах / Д.Г. Архипов, Г.А. Хабахпашев // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2011. – Т. 93, № 8. – С. 469–472.
4. Баренблатт, Г.И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик. – М.: Недра, 1984.
5. Баренблатт, Г.И. Математическая модель неравновесной противоточной капиллярной пропитки / Г.И. Баренблатт, А.А. Гильман // Инженерно-физический журнал. – 1987. – Т. 52, № 3. – С. 456–461.
6. Булгакова, Г.Т. Неравновесные и нелинейные эффекты в процессах двухфазной фильтрации: дис. . . . докт. физ.-мат. наук / Г.Т. Булгакова; Баш. гос. ун-т. – Уфа, 2000.
7. Врагов, В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В.Н. Врагов. – Новосибирск: НГУ, 1983.
8. Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Греггер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978.

9. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Научная книга, 1998.
10. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука. – 1967.
11. Загребина, С.А. Устойчивость в моделях Хоффа / С.А. Загребина, П.О. Москвичева. – Saarbrücken: LAMBERT Academic Publishing, 2012.
12. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.
13. Замышляева, А.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 5 (264), вып. 11. – С. 13–24.
14. Зеленьяк, Т.И. Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными / Т.И. Зеленьяк. – Новосибирск, 1970.
15. Егоров, И.Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов. – Новосибирск: Наука, 2000.
16. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа : дис. . . . докт. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. – Челябинск, 2011.
17. Келлер, А.В. Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа / А.В. Келлер // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 345–346.
18. Кожанов, А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка / А.И. Кожанов. – Новосибирск: НГУ, 1990.

19. Корпусов, М.О. О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии / М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер, А.Г. Свешников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40, № 8. – С. 1237–1249.
20. Корпусов, М.О. О «разрушении» решения сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью / М.О. Корпусов, А.Г. Свешников // Математические заметки. – 2006. – Т. 79, № 6. – С. 879–899.
21. Корпусов, М.О. О разрушении решения системы уравнений Осколкова / М.О. Корпусов, А.Г. Свешников // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 4. – С. 83–108.
22. Корпусов, М.О. «Разрушение» решения псевдопараболического уравнения с производной по времени от нелинейного эллиптического оператора / М.О. Корпусов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42, № 12. – С. 1788–1795.
23. Корпусов, М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях / М.О. Корпусов. – М.: Либроком, 2010.
24. Корпусов, М.О. Глобальная разрешимость и разрушение за конечное время решений нелинейных уравнений псевдопараболического типа / М.О. Корпусов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42, № 6. – С. 849–866.
25. Корпусов, М.О. О разрешимости сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью / М.О. Корпусов, А.Г. Свешников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43, № 7. – С. 987–1004.

26. Костюченко, А.Г. Задача Коши для уравнений типа Соболева – Гальперна / А.Г. Костюченко, Г.И. Эскин // Труды Московского математического общества. – 1961. – Т. 10. – С. 273–285.
27. Красовский, Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М. : Наука, 1968.
28. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уралцева – М.: Наука, 1967.
29. Ленг С. Введение в теорию дифференциальных многообразий / С. Ленг. – М.: Мир, 1967.
30. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов и др. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
31. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972.
32. Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. – М.: Мир, 1971.
33. Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972.
34. Лионс, Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами / Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1987.
35. Понтрягин, А.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1976.
36. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185–1192.

37. Манакова, Н.А. Об одной задаче оптимального управления с функционалом качества общего вида / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2011. – № 4 (25). – С. 18–24.
38. Осколков, А.П. Нелокальные задачи для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института им. В.А. Стеклова Академии Наук СССР. – 1991. – Т. 198. – С. 31–48.
39. Плеханова, М.В. Стартовое управление вырожденными линейными распределенными системами / М.В. Плеханова // Известия Иркутского государственного университета. Серия математика. – 2013. – Т. 6, вып. 4. – С. 53–68.
40. Петровский, И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г. Петровский. – М.: Физматгиз, 1961.
41. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.
42. Свешников, А.Г. Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов. – М.: Научный мир, 2008.
43. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сибирский математический журнал. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 109–119.
44. Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p -секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1912–1919.

45. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 250–258.
46. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства уравнений типа Соболева с s -монотонными и сильно коэрцитивными операторами / Г.А. Свиридюк, М.В. Климентьев // Известия вузов. Математика. – 1994. – № 11. – С. 75–82.
47. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова / Г.А. Свиридюк, М.М. Якупов // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 11. – С. 1538–1543.
48. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Математические заметки. – 2002. – Т. 71, № 2. – С. 292–297.
49. Свиридюк, Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк // Известия вузов. Математика. – 1989. – № 2. С. 55–61.
50. Соболев, С.Л. Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1954. – Т. 18, № 1. – С. 3–50.
51. Соболев, С.Л. Применение функционального анализа к математической физике / С.Л. Соболев. – Л.: Наука, 1961.
52. Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир, 1980.
53. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М.: Мир, 1977.
54. Файзулин, Т.А. Приближенно-аналитическое решение нелинейной задачи неравновесной двухфазной фильтрации / Т.А. Файзулин // Вестник

- Уфимского государственного авиационного технического университета.
– 2005. – Т. 6, № 2. – С. 209–213.
55. Федоров, В.Е. Задача стартового управления для класса полулинейных распределенных систем соболевского типа / В.Е. Федоров, М.В. Плеханова // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 259–267.
56. Фурсиков, А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга, 1999.
57. Фурсиков, А.В. Задачи управления и теоремы, касающиеся однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для трехмерных уравнений Навье – Стокса и Эйлера / А.В. Фурсиков // Математический сборник. – 1981. – Т. 115, № 2. – С. 281–306.
58. Akagi, G. Doubly Nonlinear Evolution Equations Governed by Time-Dependent Subdifferentials in Reflexive Banach Spaces / G. Akagi // Journal of Differential Equations. – 2006. – V. 231, issue 1. – P. 32–56.
59. Barenblatt, G.I. Filtration of Two Nonmixing Fluids in a Homogeneous Porous Medium / G.I. Barenblatt // Soviet Academy Izvestia. Mechanics of Gas and Fluids. – 1971. – V. 6, issue 5. – P. 857–864.
60. Barenblatt, G.I. Mathematical Model of the Non-Equilibrium Water-Oil Displacement in Porous Strata / G.I. Barenblatt, J. Garsia-Azorero, A. De Pablo, J.L. Vazquez // Applicable Analysis. – 1997. – V. 65. – P. 19–45.
61. Barenblatt, G.I. Non-Equilibrium Seepage of Immiscible Fluids / G.I. Barenblatt, A.P. Vinnichenko // Advances in Mechanics. – 1980. – V. 3, № 3. – P. 35–50. (in Russian)

62. Barenblatt, G.I. The Mathematical Model of Nonequilibrium Effects in Water-Oil Displacement / G.I. Barenblatt, T.V. Patzek, D.B. Silin // Society of Petroleum Engineers Journal. – 2003. – V. 8. – P. 409–416.
63. Behbahani, H.S. Simulation of Counter-Current Imbibition in Water-Wet Fractured Reservoirs / H.S. Behbahani, G. Di Donato, M.J. Blunt // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2006. – V. 50. – P. 21–39.
64. Böhm, M. A Nonlinear Pseudoparabolic Diffusion Equation / M. Böhm, R.E. Showalter // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1985. – V. 16, № 5. – P. 980–999.
65. Borzi, A. Fast Multigrid Solution of Optimal Control Problems with Terminal Observation / A. Borzi, M. Wogrin // Paper presented at the European Community on Computational Methods in Applied Sciences, The Netherlands, 2006. <http://proceedings.fyper.com/eccomascfd2006/documents/454.pdf>
66. Bouziani, A. Initial-Boundary Value Problems for a Class of Pseudoparabolic Equations with Integral Boundary Conditions / A. Bouziani // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2004. – V. 291, issue 2. – P. 371–386.
67. Changchun, L. Some Properties of Solutions of the Pseudoparabolic Equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2004. – V. 15. – P. 3–10.
68. Di Benedetto, E. Implicit Degenerate Evolution Equations and Applications / E. Di Benedetto, R.E. Showalter // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1981. – V. 12, № 5. – P. 731–751.
69. Dronioua, J. Optimal Pointwise Control of Semilinear Parabolic Equations / J. Dronioua, J.-P. Raymondb // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2000. – V. 39, Issue 2. – P. 135–156.

70. Favini, A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces / A. Favini, G. Marinoschi. – Berlin: Springer, 2012.
71. Gilman, A. Non-Equilibrium Imbibition of a Porous Block / A. Gilman // European Journal of Applied Mathematics. – 1996. – V. 7. – P. 43–52.
72. Leverett, M.C. Flow of Oil-Water Mixtures Through Unconsolidated Sands / M.C. Leverett // Transactions of the American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers. – 1939. – V. 132. – P. 149–169.
73. Liu, C. Weak Solutions for a Viscous p -Laplacian Equation / C. Liu // Electronic Journal of Differential Equations. – 2003. – V. 2003, № 63. – P. 1–11.
74. Mesloub, S. A Nonlinear Nonlocal Mixed Problem for a Second Order Pseudoparabolic Equation / S. Mesloub // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2006. – V. 316, issue 1. – P. 189–209.
75. Mesloub, S. On the Solvability of a Nonlinear Pseudoparabolic Problem / S. Mesloub, T. Hayat // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2013. – V. 44, issue 3. – P. 343–354.
76. Muskat, M. The Flow of Heterogeneous Fluids Through Porous Media / M. Muskat, M.W. Meres // Physics. – 1936. – V. 7, № 9. – P. 346–363.
77. Juanes, R. Nonequilibrium Effects in Models of Three-Phase Flow in Porous Media / R. Juanes // Advances in Water Resources. – 2008. – V. 31. – P. 661–673.
78. Kozhanov, A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems / A.I. Kozhanov. – Zeist: VSP, 1999.
79. Mirzaei-Paiaman, A. Study on Non-Equilibrium Effects During Spontaneous Imbibition / A. Mirzaei-Paiaman, M. Masihi, D.C. Standnes // Energy & Fuels. – 2011. – V. 25. – P. 3053–3059.

80. Poincare, H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation / H. Poincare // *Acta Mathematica*. – 1885. – V. 7. – P. 259–380.
81. Ptashnyk, M. Nonlinear Pseudo-Parabolic Equations and Variational Inequalities: PhD dissertation. Heidelberg University. – Heidelberg, 2004.
82. Seam, N. Existence Results for Nonlinear Pseudoparabolic Problems / N. Seam, G. Vallet // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. – 2011. – P. 1–15.
83. Showalter, R.E. Pseudoparabolic Partial Differential Equations / R.E. Showalter, T.W. Ting // *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. – 1970. – V. 1, № 1. – P. 1–26.
84. Showalter, R.E. Nonlinear Degenerate Evolution Equations and Partial Differential Equations of Mixed Type / R.E. Showalter // *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. – 1975. – V. 6, № 1. – P. 25–42.
85. Showalter, R.E. Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations / R.E. Showalter. – Providence: American Mathematical Society, 1997.
86. Showalter, R.E. Partial Differential Equations of Sobolev-Galpern Type / R.E. Showalter // *Pacific Journal of Mathematics*. – 1963. – V. 31, № 3. – P. 787–794.
87. Showalter, R.E. Weak Solutions of Nonlinear Evolution Equations of Sobolev-Galpern Type / R.E. Showalter // *Journal of Differential Equations*. – 1972. – V. 11. – P. 252–265.
88. Showalter, R.E. A Nonlinear Parabolic–Sobolev Equation / R.E. Showalter // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 1975. – V. 50. – P. 183–190.

89. Showalter, R.E. Singular Nonlinear Evolution Equations / R.E. Showalter // Rocky Mountain Journal on Mathematics. – 1980. – V. 10, № 3. – P. 499–507.
90. Silin, D. On Barenblatt's Model of Spontaneous Countercurrent Imbibition / D. Silin, T. Patzek // Transport in Porous Media. – 2004. – V. 54, issue 3. – P. 297–322.
91. Sviridyuk, G.A. Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokio: VSP, 2003.
92. Wang, Sh. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation / Sh. Wang, G. Chen // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2002. – V. 274. – P. 497–518.
93. Xu, X. Existence and Convergence Theorems for Doubly Nonlinear Partial Differential Equations of Elliptic-Parabolic Type / X. Xu // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1990. – V. 150, issue 1. – P. 205–223.
94. Манакова, Н.А. О решении задачи Дирихле – Коши для уравнения Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2014. – Т. 7, [№ 1]. – С. 52–60.
95. Bogatyreva, E.A. On the Uniqueness of a Nonlocal Solution in the Barenblatt – Gilman Model / E.A. Bogatyreva, I.N. Semenova // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 4. – С. 113–119.
96. Богатырева, Е.А. Задача стартового управления и финального наблюдения для одного квазилинейного уравнения соболевского типа / Е.А. Бо-

- гатырева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 5–10.
97. Манакова, Н.А. О начально-краевой задаче для уравнения Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Кононова // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 270–271.
98. Манакова, Н.А. Численное исследование процессов в модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Вестник МаГУ. Математика. Вып. 15. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. ун-та, 2013. – С. 58–67.
99. Bogatyreva, E.A. Numerical Modeling of Quasi-Steady Process in Conducting Nondispersive Medium with Relaxation / E.A. Bogatyreva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – V. 2, № 1. – P. 45–51.
100. Манакова, Н.А. Задача стартового управления и финального наблюдения для модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2015. – Т. 22, № 1. – С. 79–80.
101. Bogatyreva, E.A. Comparison of Numerical Modeling Methods for Quasi-Steady Process in Conducting Nondispersive Medium with Relaxation / E.A. Bogatyreva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – V. 2, № 2. – P. 13–18.
102. Манакова, Н.А. О нелокальном решении задачи Коши – Дирихле для модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Измерения: состояние, перспективы развития. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – С. 165–166.
103. Манакова, Н.А. О продолжении решения задачи Коши для квазилинейного уравнения соболевского типа / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева //

- Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. – Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2013. – С. 190.
104. Манакова, Н.А. Исследование математической модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. – М.: Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. – С. 1502–1506.
105. Манакова, Н.А. Сходимость метода Галеркина в модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2014. – С. 206–207.
106. Манакова, Н.А. Сходимость метода Галеркина в квазилинейной модели соболевского типа / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования: Тезисы и тексты докладов международной конференции. Москва, РУДН, 15 – 18 декабря 2014 г. – М: Издательство РУДН, 2014. – С. 219–220.
107. Манакова, Н.А. Численное моделирование квазистационарного процесса в проводящей среде без дисперсии с учетом релаксации / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ: сборник тезисов международной конференции (г. Уфа, 1 – 3 октября 2015 г.). – Уфа: РИЦ БашГУ, 2015. – С. 103–104.
108. Численное моделирование неравновесной противоточной капиллярной пропитки в круге: Свидетельство № 2015617080 / Богатырева Е.А, Манакова Н.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2015614008; заявл. 15.05.2015; зарегистр. 30.07.2015, реестр программ для ЭВМ.

Приложение. Свидетельство о регистрации программы приближенного решения задач Коши для модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015617080

Численное моделирование неравновесной противоточной капиллярной пропитки в круге

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ) (ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ» (НИУ)) (RU)*

Авторы: *Богатырева Екатерина Александровна (RU), Манакова Наталья Александровна (RU)*



Заявка № 2015614008

Дата поступления 15 мая 2015 г.

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ 30 июня 2015 г.

Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий